UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SIMONE RODRIGUES TANGERINO

INTRODUÇÃO A SEQUÊNCIA DE NÚMEROS REAIS E SEU CONTEXTO HISTÓRICO

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

SIMONE RODRIGUES TANGERINO

INTRODUÇÃO A SEQUÊNCIA DE NÚMEROS REAIS E SEU CONTEXTO HISTÓRICO

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Adilandri Mércio Lobeiro

Co-orientadora: Prof. Msc. Priscila Amara Patricio de Melo

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Simone Rodrigues Tangerino

Introdução a Sequência de Números Reais e Seu Contexto Histórico

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Adilandri Mércio Lobeiro.

Co-orientadora: Profa. Msc. Priscila Anara Patricio de Melo.

Prof. Msc. Wellington Jose Corrêa.

Campo Mourão, 2010

Odete e Joaquim, que sempre me apoiaram e me motivaram e me ensinaram a ser a pessoa que sou hoje. Vocês são o exemplo de coragem, garra e esperança a quem me inspiro, obrigado por serem os melhores pais do mundo.

AGRADECIMENTOS

A Deus que me iluminou nos momentos difíceis.

Halan meu marido companheiro, amigo e amante, pelo amor paciência compreensão e apoio em todos os momentos desta jornada.

Aos amigos: Clicia por me convencer a fazer o curso e sempre me ajudar em todos os momentos desde a graduação até a pós e principalmente pelas palavras de consolo nos momentos de desespero.

Jéssica por sempre esta disposta a me ajudar quando preciso.

Ueslei a quem sempre pude contar desde a graduação e sempre esteve disposto a me ouvir nos momentos de desespero na pós.

William e Roney por se mostrarem ótimos amigos durante esta etapa.

A todos os professores e equipe que ajudaram a realizar a pós.

Adilandre professor, orientador e amigo. Agradeço por tudo; convidar-me para pós, não me deixar desistir, acreditar em mim quando eu já tinha perdido as esperanças, ser sempre muito critico e conseguir extrair o potencial, que ele sempre me dizia que eu tinha. Nessas poucas palavras espero que tenha conseguido expressar todos meus sentimentos.

Toda a educação científica que não se inicia com a Matemática é, naturalmente, imperfeita na sua base.

Auguste Conté

RESUMO

TANGERINO, Simone R.. Introdução a Sequência de Números Reais e Seu Contexto Histórico. 67 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Neste trabalho, descrevemos a teoria de sequência de números reais dando enfoque a parte algébrica, onde fizemos as demonstrações passo-a-passo e apresentamos uma grande porção de exemplos, com intuito de proporcionar um material acessível aos leitores.

Palavras-chave: Sequência

ABSTRACT

TANGERINO, Simone R.. Title in English. 67 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Here we describe the theory of sequence of real numbers by focusing on algebraic part, where we made statements step by step and present a great deal of examples, with an aim of providing material accessible to readers.

Keywords: sequences

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 CONTEXTO HISTÓRICO

1.1 FIBONACCI (1180-1250)

Leonardo de Pisa o Fibonacci (filho de Bonaccio) foi um dos matemáticos mais importantes da idade média. Na idade média havia dois tipos de matemáticos, os de escolas religiosas ou de universidades e os que exerciam atividades de comercio e negócios. É aliás neste ultimo grupo que Fibonacci se insere, como veremos mais a frente. Havia também neste período uma grande rivalidade entre os abacistas (aqueles que eram especialistas em cálculo com o ábaco) e os algoritmistas (aqueles que privilegiavam o cálculo através de algoritmos baseados no algarismo zero). Entre os agoritmistas, um dos percursores mais notáveis foi Fibonacci.

Fibonacci nasceu por volta de 1180 em Pisa, uma das primeiras cidades comerciais italianas e que manteve um comércio florescente com o mundo árabe. O pai de Fibonacci era um mercador que trabalhou no norte de África. Fibonacci iniciou-se cedo nos negócios e nos cálculos, o que despertou o seu interesse pela matemática. Além disso, foi através da profissão do pai que ele teve o primeiro contato com o sistema decimal hindu-árabe. Nesta altura, era ainda utilizada a numeração romana na Itália.

Foi no seu regresso a Pisa, em 1202, que Fibonacci escreveu a sua obra mais célebre, "Liber Abaci", que foi também um meio através do qual a numeração hindu-árabe foi introduzida na Europa Ocidental. No "Liber Abaci" explicava-se como utilizar estes numerais nas operações aritméticas, abordavam-se diversos temas de álgebra e geometria, e também propunham-se vários problemas. Escreveu também o livro "Practica Geometria" e em 1220; onde descreveu aquilo que tinha descoberto nas áreas de geometria e trigonometria.

O nome de Fibonacci tornou-se conhecido devido a um problema que existia no seu livro "Liber Abaci", que é o problema dos coelhos. A solução deste problema é uma sequência numérica e um matemático francês, Edouard Lucas, ao editar um trabalho seu, ligou o nome de Fibonacci a essa sequência.

A Sequência de Fibonacci consiste em uma sucessão de números, tais que, definindo os dois primeiros números da sequência como 0 e 1, os números seguintes serão obtidos por meio da soma dos seus dois antecessores. Portanto, os números são: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$

Dessa sequência, extrai-se o número transcedental conhecido como número de ouro.

A sequência de Fibonacci é dada pela fórmula:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \text{n=0} \\ 1, & \text{se} \quad \text{n=1} \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{outros casos} \end{cases}$$

Esta sequência foi descrita primeiramente por Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, para descrever o crescimento de uma população de coelhos. Os números descrevem o número de casais em uma população de coelhos depois de n meses se for suposto que:

- no primeiro mês nasce apenas um casal,
- casais amadurecem sexualmente (e reproduzem-se) apenas após o segundo mês de vida,
- não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo,
- todos os meses, cada casal fértil dá a luz a um novo casal, e
- os coelhos nunca morrem.

A sequência de Fibonacci tem inúmeras aplicações. É usada na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos. Também aparece em configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores ou das folhas em uma haste, no arranjo do cone da alcachofra, no abacaxi, ou no desenrolar da samambaia.

Mais genericamente, chama-se sequência de Fibonacci qualquer função g onde $g(n+2) = g(n) + g(n+1)$. Essas funções são precisamente as de formato $g(n) = aF(n) + bF(n+1)$ para alguns números a e b, então as sequências de Fibonacci formam um espaço vetorial com as funções $F(n)$ e $F(n+1)$ como base. Em particular, a sequência de Fibonacci com $F(1) = 1$ e F(2) = 3 é conhecida como os números de Lucas. A importância dos números de Lucas L(n) reside no fato deles gerarem a Proporção áurea para as enésimas potências:

$$\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n = \left(\frac{1}{2} + L(n) + F(n)\sqrt{5}\right)$$

Os números de Lucas se relacionam com os de Fibonacci pela fórmula:

$$L(n) = F(n-1) + F(n+1)z$$

Com esta fórmula podemos montar a Sequência de Fibonacci e descobrir, por exemplo, quantos coelhos foram gerados no sexto mês, basta aplicar a fórmula descrita acima até chegar ao ponto inicial de 1 e 1.

$$\begin{aligned}
F(6) &= (F(6)-1)+(F(6)-2) = 5 \quad \text{e} \quad 4 \rightarrow 8 \\
F(5) &= (F(5)-1)+(F(5)-2) = 4 \quad \text{e} \quad 3 \rightarrow 5 \\
F(4) &= (F(4)-1)+(F(4)-2) = 3 \quad \text{e} \quad 2 \rightarrow 3 \\
F(3) &= (F(3)-1)+(F(3)-2) = 2 \quad \text{e} \quad 1 \rightarrow 2 \\
F(2) &= (F(2)-1)+(F(2)-2) = 1 \quad \text{e} \quad 0 \rightarrow 1
\end{aligned}$$

Ou seja, no sexto mês foram gerados 8 coelhos e a primeira posição 1.

Note que a Sequência de Fibonacci esta no resultado de cada posição; $1,1,2,3,5,8,\ldots$

Depois de 1228, não se tem mais notícias do matemático, exceto por um decreto de 1240 da República de Pisa, que atribuía um estipêndio ao "Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo" ("sério e sábio mestre Leonardo Bigollo"), em reconhecimento dos serviços prestados à cidade, particularmente em matéria contábil e na instrução dos cidadãos .

Fibonacci morreu alguns anos mais tarde, provavelmente em Pisa. No século XIX, uma estátua foi erguida em Pisa, em sua homenagem. Hoje está localizada na galeria ocidental do Camposanto, cemitério histórico da Piazza dei Miracoli.

Seus estudos foram tão importantes que até hoje existe uma publicação periódica, Fibonacci Quarterly, inteiramente dedicada à sequência aritmética elaborada por ele. Há também um asteróide que também tem o seu nome, o 6765 Fibonacci.

1.1.1 Número de Ouro

A proporção áurea, número de ouro, número áureo ou proporção de ouro é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega ϕ(PHI), em homenagem ao escultor Phideas (Fídias), que a teria utilizado para conceber o Parthenon, e com o valor arredondado a três casas decimais de $1,618$. Também é chamada de seção áurea (do latim sectio aurea), razão áurea, razão de ouro, média e extrema razão (Euclides), divina proporção, divina seção (do latim sectio divina), proporção em extrema razão, divisão de extrema razão ou áurea excelência. O

número de ouro é ainda frequentemente chamado razão de Phidias.
A razão áurea é definida algebricamente como:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi.$$

Desde a Antiguidade, a proporção áurea é empregada na arte. É frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, como as do mestre Giotto. Este número está envolvido com a natureza do crescimento. Phi como é chamado o número de ouro, pode ser encontrado na proporção das conchas (o nautilus, por exemplo), dos seres humanos (o tamanho das falanges, ossos dos dedos, por exemplo) e nas colméias, entre inúmeros outros exemplos que envolvem a ordem do crescimento.

Por estar envolvido no crescimento, este número se torna tão frequente. E justamente por haver essa frequência, o número de ouro ganhou um status de “quase mágico”, sendo alvo de pesquisadores, artistas e escritores. Apesar desse status, o número de ouro é apenas o que é devido aos contextos em que está inserido: está envolvido em crescimentos biológicos, por exemplo. O fato de ser encontrado através de desenvolvimento matemático é que o torna fascinante. Como é um número extraído da sequência de Fibonacci, o número áureo representa diretamente uma constante de crescimento.

O número áureo é aproximado pela divisão do enésimo termo da Série de Fibonacci que é $(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,...)$, na qual cada número é a soma dos dois números imediatamente anteriores na própria série) pelo termo anterior. Essa divisão converge para o número áureo conforme tomamos cada vez maior. Podemos ver um exemplo dessa convergência a seguir, em que a série de Fibonacci está escrita até seu sétimo termo $\{1,1,2,3,5,8,13\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1} &= 2\\
\frac{3}{2} &= 1,5\\
\frac{5}{3} &= 1,666\cdots\\
\frac{8}{5} &= 1,6\\
\frac{13}{8} &= 1,625
\end{aligned}$$

Este número, assim como outros, por exemplo o Pi (π), estão presentes no mundo por uma razão matemática existente na natureza.

Essa sequência aparece na natureza, no DNA, no comportamento da refração da luz, dos átomos, nas vibrações sonoras, no crescimento das plantas, nas espirais das galáxias, dos marfins de elefantes, nas ondas no oceano, furacões, etc.

Atualmente, essa proporção ainda é muito usada. Ao padronizar internacionalmente algumas medidas usadas em nosso dia-a-dia, os projetistas procuraram "respeitar" a proporção divina. A razão entre o comprimento e a largura de um cartão de crédito, alguns livros, jornais, uma foto revelada, entre outros.

1.2 NEWTON (1642-1727)

Isaac Newton nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, no mesmo ano em que faleceu Galileu. Seu pai faleceu pouco antes do seu nascimento e a mãe voltou a casar-se quando ele tinha três anos. Foi educado pela avó e frequentou a escola em Woolsthorpe.

Quando completou catorze anos a mãe, viúva pela segunda vez, regressa a Woolsthorpe com os três filhos do segundo casamento. Enquanto frequenta a Grantham Grammar School Newton foi encarregado de a ajudar na gestão dos negócios da família, o que não lhe agrado. Por isso dividiu o seu tempo entre os livros e a construção de engenhosos entretenimentos como, por exemplo, um moinho de vento em miniatura ou, um relógio de água. Um tio materno ao aperceber-se do seu talento extraordinário convenceu a mãe de Newton a matriculá-lo em Cambridge. Enquanto se preparava para ingressar em Cambridge, Newton instalou-se na casa do farmacêutico da vila. Aí conheceu a menina Storey por quem se apaixonou e de quem ficou noivo antes de deixar Woolsthorpe para ingressar no Trinity College em Junho de 1661. Tinha então dezanove anos. Apesar de ter muito afeto por este primeiro e único amor da sua vida, a absorção crescente com o trabalho levou-o a relegar a sua vida afetiva para segundo plano. Na verdade, Newton nunca se casou.

Vários fatores influenciaram o desenvolvimento intelectual e a direção das pesquisas de Newton, em especial as ideias que encontrou nos seus primeiros anos de estudo, os problemas que descobriu através da leitura e o contato com outros que trabalhavam no mesmo campo. No início do seu primeiro ano, estudou um exemplar dos Elementos de Euclides (séc. IV-III A.C.), a Clavis de Oughtred (1574-1660), a Geometria de Descartes (1596-1650), a Óptica de Kepler (1571-1630), as obras de Viète (1540-1603) e também Arithmetica infinitorum de Wallis. Depois de 1663, assistiu a aulas dadas por Barrow e conheceu obras de Galileu (1564-1642), Fermat (1601-1665), Huygens (1629-1695) e outros.

Nos primeiros meses de 1665 exprimiu funções em termos de séries infinitas. De igual modo começou a pensar na taxa de variação e, ligando estes dois problemas, considerou-os como “o meu método”.

Durante 1665 ou 1666, após ter obtido o seu grau de Bacharel, o Trinity College foi encerrado devido à peste. Este foi para Newton o período mais produtivo pois, nesses meses, na sua casa de Lincolnshire, realizou quatro das suas principais descobertas: O teorema binomial,O cálculo, A lei da gravitação e A natureza das cores. Esse ano foi considerado extremamente frutuoso para a história das Ciências e, em consequência, foi denominado por “Annus mirabilis” por muitos historiadores.

Além da a Matemática e da Filosofia Natural, as suas duas grandes paixões foram a Teologia e a Alquimia. Homem de espírito científico nato, Newton propôs-se encontrar por meios experimentais a que é que correspondiam exatamente as afirmações dos alquimistas. Enquanto teólogo, Newton acreditava, sem questionar, no criador todo poderoso do Universo fazendo contudo questão de entender por ele próprio o que a generalidade dos seus contemporâneos acreditava sem discussão: o relato da criação. Nesse sentido, desenvolveu esforços para provar que as profecias de Daniel e que o “Apocalipse” faziam sentido, e realizou pesquisas cronológicas com o objectivo de harmonizar historicamente as datas do Antigo Testamento.

Quando regressou a Cambridge em 1667 Newton foi eleito Fellow do Trinity College e, em 1669, com vinte seis anos, sucedeu a Barrow como Professor of Mathematics por recomendação do próprio Barrow. As suas primeiras lições foram sob óptica e nelas expôs as suas próprias descobertas. Já em 1668 tinha construído com as suas próprias mãos um telescópio de espelho muito eficaz e de pequeno tamanho. Utilizou-o para observar os satélites de Júpiter e, possivelmente, para comprovar a universalidade da sua lei da gravitação universal.

Na sua eleição para a Royal Society em 1672 Newton comunica o seu trabalho sobre telescópios e a sua teoria corpuscular da luz, o que vai dar origem à primeira de muitas controvérsias que acompanharam os seus trabalhos.

Os esforços de Newton no campo da matemática e das ciências foram grandiosos, mas a sua maior obra foi sobre a exposição do sistema do mundo, dada na sua obra denominada Principia. Durante a escrita do Principia Newton não teve qualquer cuidado com a saúde, esquecendo-se das refeições diárias e até de dormir.

Os dois primeiros volumes dos Principia contêm toda a sua teoria, incluindo a da gravitação e as leis gerais que estabeleceu para descrever os movimentos e os pôr em relação com as forças que os determinam, leis denominadas por “leis de Newton”. No terceiro volume, Newton trata as aplicações da sua teoria dos movimentos de todos os corpos celestes, incluindo também os cometas.

Os vários ensaios de Newton sobre o cálculo ficaram desconhecidos durante muito tempo devido às suas próprias reservas em publicar esses trabalhos. Durante muito tempo os únicos ensaios que tornaram conhecido o cálculo de Newton foram os seguintes:

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas tratado enviado em 1669 por Barrow à Royal Society em nome de "um amigo meu daqui que tem uma certa qualidade para tratar este assunto". O tratado circulou em forma de manuscrito por diversos membros da Royal Society. Planos de uma breve publicação foram apenas realizados em 1711.

Methodus fluxionum et serium infinitarum tratado sobre fluxões, escrito em 1671 que não foi publicado durante a vida de Newton. Só em (1736-1737) surgiu uma tradução em inglês.

Tractatus de quadratura curvarum tratado sobre quadratura de curvas escrito em 1693 mas publicado em 1704 como apêndice à Óptica de Newton.

Principia continha muitas passagens relevantes expostas na forma geométrica em 1687.

Newton, que guardava para si as suas extraordinárias descobertas, foi convencido por Halley (1656-1742) a dá-las a conhecer. Halley responsabilizou-se por tudo o que estava relacionado com a publicação dos trabalhos do seu amigo, nomeadamente, pelas despesas de tal processo. A publicação do livro III do Principia deu-se apenas pelo facto de Newton ter sido alertado por Halley que, se tal não acontecesse, os anteriores volumes não eram vendidos e, como tal, ele ficaria arruinado financeiramente.

Os contemporâneos de Newton reconheceram a magnitude dos Principia, ainda que, apenas alguns conseguissem acompanhar os raciocínios nele expostos. Rapidamente, o sistema newtoniano foi ensinado em Cambridge (1699) e Oxford (1704).

Em França, a penetração das ideias de Newton não foi tão rápida. Mas é em França, passado meio século, que Newton encontra o seu maior sucessor, Laplace (1749-1827) que vai atribuir a si próprio a tarefa de continuar e aperfeiçoar os Principia.

Após ter escrito os Principia, Newton parece sentir-se saturado com a "Philophia naturalis"e vai ocupar-se de outros assuntos. Em Janeiro de 1689, é eleito para representar a universidade na convenção parlamentar onde se mantém até à sua dissolução em Fevereiro de 1690. Durante esses dois anos viveu em Londres onde fez novas amizades com pessoas influentes incluindo John Locke (1632-1704).

No Outono de 1692 Newton adoece seriamente. A aversão à comida e as insônias persistentes que lhe tinham permitido escrever os Principia conduzem-no para perto do colapso total.

Newton recupera a saúde em finais de 1693 para regozijo dos seus amigos, incluindo aquele que mais tarde se tornaria o seu maior inimigo, Leibinz (1646-1716).

Com efeito, no ano da sua recuperação, Newton toma conhecimento que o cálculo se estava a tornar conhecido no Continente e que era atribuído a Leibniz. A principio, as relações entre Newton e Leibniz eram cordiais como mostra a correspondência entre estes dois grandes homens. Newton reconhecia os méritos de Leibniz e Leibniz os de Newton e em nenhum momento algum deles teria tido a mínima suspeita que algum tivesse roubado ao outro qualquer ideia do cálculo. Mais tarde, por volta de 1712, quando até o comum cidadão inglês tinha já a vaga ideia que Newton tinha construído algo de monumental, a questão de quem tinha inventado o cálculo torna-se uma questão de orgulho nacional. A Inglaterra vai cerrar hostes em torno de Newton e acusar Leibniz de ser um ladrão e um mentiroso. Leibniz e os seus apoiantes vão responder do mesmo modo. Assim se inicia a célebre controvérsia Newton-Leibniz sobre a invenção do cálculo, controvérsia que vai desgostar Newton e que vai ter como grave consequência a estagnação das matemáticas na Inglaterra durante cerca de um século. Em França e na Suíça os seguidores de Leibniz, munidos de uma melhor notação para o cálculo, vão desenvolvê-lo e simplicá-lo.

Em 1699, Newton é nomeado Master of the Mint com a tarefa de reformar e supervisionar a cunhagem da moeda.

Em 1701 ou 1702 é novamente representante da universidade de Cambridge no parlamento e em 1703 vai ser eleito presidente da Royal Society, cargo honorário para o qual é sucessivamente reeleito até à sua morte. Em 1705 é investido cavaleiro pela rainha Anna.

É de lamentar que após 1693, Newton não se tenha dedicado mais à matemática. Ele teria facilmente criado uma das mais importantes aplicações do cálculo: o cálculo das variações que seá desenvolvido pelos Bernoulli (1623-1759) por Euler (1707-1783) e por Lagrange (1765-1843). Já nos Principia Newton tinha sugerido este assunto quando calcula a forma de uma superfície de revolução que atravessa uma massa de liquido oferecendo resistência mínima. Também em 1696, resolve - em poucas horas diz-se - o clássico problema da brachistochrona: determinar a forma da trajectória que uma massa em queda, sob a acção da gravidade, descreve entre dois pontos dados num tempo mínimo. Este problema tinha sido colocado por Johann Bernoulli e Leibniz tinha proposto uma solução que desafiava os matemáticos europeus da altura. Cautelosamente, Newton vai comunicar a sua solução à Royal Society de maneira anonima.

Poucas semanas antes da sua morte, Newton presidiu a uma secção da Real Society. Foi eleito sócio estrangeiro da Academia das Ciências Francesa em 1699. Faleceu a vinte de Março de 1727, entre a uma ou duas da manhã, durante o sono, com oitenta e cinco anos. Teve direito ao elogio fúnebre oficial pronunciado pelo secretário da Academia, Bernard le Bovier de Fontenelle. Foi sepultado no Panteão de Londres, junto aos reis de Inglaterra, na Abadia de Westminster.

1.3 LEIBNIZ (1646-1719)

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig, Alemanha. Ingressou na Universidade aos quinze anos de idade e, aos dezessete, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Para muitos historiadores, Leibniz é tido como o último erudito que possuía conhecimento universal.

Aos vinte anos de idade, já estava preparado para receber o título de doutor em direito. Este lhe foi recusado por ser ele muito jovem. Deixou então Leipzig e foi receber o seu título de doutor na Universidade de Altdorf, em Nuremberg.

A partir daí, Leibniz entrou para a vida diplomática. Como representante governamental influente, ele teve a oportunidade de viajar muito durante toda a sua vida. Em 1672 foi para Paris onde conheceu Huygens que lhe sugeriu a leitura dos tratados de 1658 de Blaise Pascal se quisesse tornar-se um matemático. Em 1673, visitou Londres, onde adquiriu uma cópia do Lectiones Geometricae de Isaac Barrow e tornou-se membro da Royal Society. Foi devido a essa visita a Londres que apareceram rumores de que Leibniz talvez tivesse visto o trabalho de Newton, que por sua vez o teria influenciado na descoberta do Cálculo, colocando em dúvida a legitimidade de suas descobertas relacionadas ao assunto. Sabemos hoje que isto não teria sido possível, dado que Leibniz, durante aquela visita a Londres, não possuía conhecimentos de geometria e análise suficientes para compreender o trabalho de Newton.

A partir daí, a Matemática estaria bastante presente nas descobertas de Leibniz. Em outra posterior visita a Londres, ele teria levado uma máquina de calcular, de sua invenção. Uma das inúmeras contribuições de Leibniz à Matemática, foi o estudo da aritmética binária, que segundo ele, havia sido utilizada pelos chineses e estaria presente no livro I Ching.

Como aconteceu com Newton, o estudo de séries infinitas foi muito importante no início de suas descobertas. Relacionando o triângulo de Pascal e o triângulo harmônico, Leibniz percebeu uma maneira de encontrar o resultado de muitas séries infinitas convergentes. A essa altura, ele voltou-se para o trabalho de Blaise Pascal - Traité des sinus du quart de cercle que lhe teria dado um importante insight: a determinação da tangente a uma curva dependia das diferenças das abscissas e ordenadas na medida em que essas se tornassem infinitamente pequenas e que a quadratura, isto é a área, dependia da soma das ordenadas ou retângulos infinitamente finos.

Tratado sobre os senos num quadrante de um círculo Esse insight levaria Leibniz em 1676 a chegar às mesmas conclusões a que havia chegado Newton alguns anos antes: ele tinha em mãos um método muito importante devido a sua abrangência. Independente de uma função ser racional ou irracional, algébrica ou transcendente - termo criado por Leibniz - as operações de encontrar "somas" (integrais) ou "diferenças"(diferenciais) poderiam ser sempre aplicadas. O destino havia reservado a Leibniz a tarefa de elaborar uma notação apropriada para estas operações, assim como a nomenclatura - Cálculo Diferencial e Cálculo Integral - ambas utilizadas atualmente.

O primeiro trabalho sobre Cálculo Diferencial foi publicado por Leibniz em 1684, antes mesmo do que Newton, sob o longo título Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur . Nesse trabalho apareceram as fórmulas:

Um Novo Método para Máximos e Mínimos e também para Tangentes não obstruídas por quantidades irracionaisd $(xy) = xdy + ydx$ (derivada do produto) $\frac{x}{y} = \frac{(ydx - xdy)}{y^2}$ (derivada do quociente) $dxn = nxn - 1$

Dois anos mais tarde, Leibniz publicaria no periódico Acta Eruditorum , um trabalho sobre o Cálculo Integral. Nesse trabalho, apresenta-se o problema da quadratura como um caso especial do método do inverso das tangentes.

Um periódico fundado por Leibniz e Otto Mencke em 1682 que teve larga difusão no continente e onde Leibniz publicaria a maioria de seus trabalhos desenvolvidos em Matemática entre 1682 e 1692.Além do Cálculo, Leibniz contribuiu para outras áreas da Matemática. Foi ele quem generalizou o teorema do binômio em Teorema do Multinômio, para expansões do tipo $(x+y+z)n$. A primeira referência do método dos determinantes no mundo ocidental também foi feita por ele. Leibniz reelaborou e desenvolveu o conceito de lógica simbólica. Contribuiu também para a teoria de probabilidades e a análise combinatória.

O peso das descobertas e contribuições de Leibniz para o Cálculo e para a Matemática como um todo é tão grande que outras importantes áreas de atuação frequentemente são deixadas de lado. Não obstante Leibniz é considerado também um dos sete filósofos modernos mais importantes.

Em Física, Leibniz acabou negando a teoria da gravitação de Newton pois acreditava que nenhum corpo podia entrar em movimento "naturalmente", a não ser através do contato com outro corpo que o impulsionaria. Ele também rejeitou os conceitos newtonianos de espaço e tempo absolutos. Junto com Huygens, Leibniz desenvolveu o conceito de energia cinética. Apesar de tudo, as suas contribuições para a ciência foram de certa forma obscurecidas por aquelas de Newton. Isto, entretanto, não o faz menos importante de Newton na descoberta do Cálculo. Na realidade Leibniz e Newton foram os dois maiores protagonistas na descoberta desta poderosa ferramenta matemática, o Cálculo.

É sabido que Leibniz era capaz de ficar sentado na mesma cadeira por vários dias pensando. Era um trabalhador incansável, um correspondente universal - ele tinha mais de 600 correspondentes. Era patriota, cosmopolita e um dos gênios mais influentes da civilização ocidental. Em julho de 1716 adoeceu, ficou então de cama até a sua morte em Hannover, Alemanha. As descobertas de um grande matemático, como Newton, não se tornam automaticamente parte da tradição matemática. Podem ficar perdidas para o mundo, a menos que outros cientistas as compreendam e se interessem suficientemente para encará-las de vários pontos de vista, esclarecê-las e generalizá-las, indicar suas implicações.

Newton, infelizmente, era demasiadamente sensível e não se comunicava com facilidade, por isso o métodos não era bem conhecido fora da Inglaterra. Leibniz, por outro lado, encontrou discípulos dedicados que estavam ansiosos por aprender o cálculo diferencial e integral e transmitir o conhecimento a outros. Na primeira linha desses entusiastas estavam dois irmãos suíços, Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), frequentemente conhecidos também pela forma anglicizada de seus nomes, James e John (ou pelos equivalentes alemães, Jakob e Johan).

1.4 FAMILIA BERNOULLI E SEUS DISCÍPOLOS

Nenhuma família na história da matemática produziu tantos matemáticos célebres quanto a Bernoulli. Cerca de uma dúzia de membros da família conseguiu distinguir-se na Matemática e na Física, e quatro deles foram eleitos como sócios estrangeiros da Academie des Sciences. O primeiro a atingir proeminência na matemática foi Jacques Bernoulli. Ele nasceu e morreu em Basileia, mas viajou muito para encontrar cientistas de outros países.

1.4.1 Jacob (Jacques) Bernoulli (1654-1705)

Nasceu a 27 de Dezembro de 1654 em Basel, na Suíça, onde faleceu a 16 de Agosto de 1705. Bernoulli, enquanto frequentava a universidade, estudou matemática e astronomia, contra a vontade dos seus pais. Em 1676, após se licenciar em Teologia, foi para Genebra, onde trabalhou como tutor. Mais tarde, viajou para França, onde trabalhou durante dois anos com os seguidores de Descartes. Em 1681, Bernoulli foi para a Holanda, onde conheceu vários matemáticos. Continuando os seus estudos com os mais célebres cientistas e matemáticos da Europa, Bernoulli foi para Inglaterra,onde conheceu, entre outros, Boyle e Hooke. Nesta altura, começou a interessar-se bastante pela astronomia, área na qual elaborou uma teoria sobre cometas que, afinal, se revelou incorrecta. Em resultado de tantas viagens, Bernoulli estabeleceu correspondências com vários matemáticos, mantendo-as durante muitos anos. Regressou, depois, à Suíça, onde ensinou mecânica na Universidade de Basel desde 1683, tendo dado várias palestras sobre mecânica de sólidos e líquidos. Como era formado em Teologia, seria de esperar que voltasse para a Igreja mas, apesar de esta lhe ter oferecido um lugar, ele recusou-o. As verdadeiras paixões de Bernoulli eram a matemática e a física teórica e foi nestas áreas que ele se dedicou à pesquisa e ao ensino. Durante este período Bernoulli estudou os trabalhos dos grandes matemáticos da sua época, através dos quais, se começou a interessar por Geometria Infinitesimal. Em 1682 começou a publicar no jornal Acta Eruditorum, em Leipzig. Em 1684 casou com Judith Stupanus e tiveram dois filhos, um rapaz e uma rapariga que, ao contrário de muitos dos membros da família Bernoulli, não se tornaram nem matemáticos nem físicos. Em 1687 Bernoulli foi nomeado professor de matemática em Basel e, juntamente com o seu irmão Johann Bernoulli, começou a estudar o cálculo como Leibniz o apresentava. Note-se que as publicações de Leibniz sobre o cálculo eram muito obscuras para os matemáticos da altura, e os irmãos Bernoulli foram os primeiros a tentar compreender e aplicar a sua Teoria. Apesar da sua cooperação em trabalhos importantes, os irmãos Bernoulli desentenderam-se, chegando mesmo a haver, em 1697, uma ruptura total das relações entre eles. Jacob Bernoulli criticou publicamente as autoridades da Universidade de Basel, o que, como seria de esperar, o colocou numa situação difícil na própria Universidade. Foram várias as primeiras grandes contribuições de Bernoulli para a matemática: em 1685 publicou um panfleto sobre o paralelismo entre a lógica e a álgebra; em 1685 trabalhou no campo da Teoria das Probabilidades é de referir que, a conselho de Leibniz, Bernoulli dedicou-se a aperfeiçoar os estudos feitos anteriormente nesta área e pode-se dizer que é devido ao seu trabalho que o Cálculo de Probabilidades adquiriu o estatuto de ciência; em 1687 elaborou trabalhos no campo da Geometria, e os resultados que obteve permitiram-lhe formular uma construção que permitia dividir qualquer triângulo em quatro partes iguais com duas linhas perpendiculares. Em 1689 Bernoulli publicou dois importantes trabalhos: um sobre séries infinitas e outro em que demonstrava a chamada Lei dos Grandes Números. Entre 1682 e 1704 publicou cinco trabalhos sobre séries infinitas, em que os primeiros dois continham importantes resultados, tais como:$S\frac{1}{n}$ diverge, o que Bernoulli considerava um resultado completamente novo mas que, na realidade, Mengoli tinha demonstrado quarenta anos antes. Apesar de não ter conseguido chegar a um resultado exato para a soma da série $S\frac{1}{n^2}$, Bernoulli demonstrou que esta convergia para um limite finito inferior a dois (Euler foi o primeiro a descobrir a soma desta série em 1737). Bernoulli estudou também séries exponenciais. Em Maio de 1690 Bernoulli publicou um artigo muito importante para a história do desenvolvimento do Cálculo, uma vez que é nele que o termo integral aparece pela primeira vez, com o verdadeiro sentido de integração. Em 1696 resolveu a equação que hoje conhecemos como "Equação de Bernoulli"$y' = p(x).y + q(x).yn$. Bernoulli interessou-se também pelo estudo de curvas, entre as quais as hipociclóides e epiciclóides, a ciclóide, a catenária, as ovais de Cassini, a espiral equiangular e a lemniscata, que depois ficou com o seu nome. Ele foi também o matemático que mais avançou no estudo da espiral logarítmica. Investigou, em 1692, as curvas cáusticas e estudou-as, em particular, associadas à parábola, à espiral logarítmica e à epiciclóide. Em 1694 foi concebida, pela primeira vez, a Lemniscata de Bernoulli. O trabalho mais original de Bernoulli foi "Ars Conjectandi" "A arte de conjecturar" publicado em Basel em 1713, oito anos após a sua morte. Até à data da sua morte, em 1705, continuou a leccionar matemática em Basel, sendo depois substituído pelo seu irmão Johann. Aquando da sua morte o seu trabalho estava incompleto, não deixando, no entanto, de ter um enorme significado na Teoria das Probabilidades. Bernoulli, um apaixonado pelas curvas e pelo Cálculo, que sempre considerou as propriedades da espiral logarítmica como sendo quase mágicas, pediu que, na sua pedra tumular, ficasse inscrita a seguinte frase em latim: " Eadem Mutata Resurgo", que significa "surjo sempre igual a mim própria".

1.4.2 Johann I (1667 - 1748)

Tal como o seu irmão Jacob, apesar de ter estudado Medicina, o seu interesse pela Matemática falou mais alto tendo sido iniciado em matemática pelo seu irmão Jacob. Apesar desta relação inicial, a vida destes dois homens está marcada por intermináveis quezílias e disputas científicas. Também com o seu filho Daniel não conseguiu evitar conflitos existindo mesmo relatos de que acabou por o expulsar de casa no advento de uma disputa científica. Conta-se ainda que terá obrigado o filho Daniel a partilhar com ele a glória de uma das suas descobertas. Johann I Bernouille foi um dos mais bem sucedidos matemáticos da sua época, justificando-se assim o ser frequentemente apelidado de Aristóteles do Século XVII. Aquando da morte do seu irmão Jacob, ocupou a cadeira de Matemática na Universidade de Basileia até à data da sua própria morte. Anteriormente tinha sido professor de Física e Matemática em Groenigen. As suas areas de maior interesse foram o estudo das propriedades da luz, as famílias de curvas, tal como o problema de Braquistócrone, a quadratura de áreas e as séries.

1.4.3 Nicolau I (1687 - 1759)

Estudou matemática com os seus tios Jacob e Johann. Foi o próprio Jacob que supervisionou a sua graduação, terminada em 1704, como mestre na Universidade de Basileia onde, cinco anos mais tarde, recebeu o doutoramento. Viajou pela Europa onde conheceu e trabalhou com Montmort e Moivre. Acabou por regressar a Basileia em cuja universidade ministrou as disciplinas de Direito e Lógica. Nicolau I era um matemático bastante dotado mas não muito produtivo. Como consequência muitos dos seus importantes descobertas estão espalhadas na sua correspondência, que ascende a 560 textos. A mais significativa parte da sua correspondência com Montmort, entre 1710 e 1712, está publicada na obra Essai d'analyse sur les jeux de hazard (Paris, 1713).

1.4.4 Nicolau II (1695 - 1726)

Nicoulau II entrou para a universidade de Basileia apenas com 13 anos de idade, formou-se em Jurisprudência e, como muitos membros da sua família, acabou por estudar Matemática. Foi chamado para a Academia de São Petersburgo. Infelizmente morreu passados apenas oito meses. Esteve envolvido na famosa disputa entre Newton e Leibniz. As suas áreas de interesse preferencial foram curvas, equações diferenciais, probabilidades e teoria fundamental de álgebra.

1.4.5 Daniel (1700 - 1782)

Daniel entrou para a Universidade de Basileia aos 13 anos para estudar Filosofia e Lógica. Obteve o grau em mestre em 1716. A sua educação em Matemática começou com o seu irmão mais velho Nicolau com quem se voltou a cruzar quando, em 1725, foi designado para a Academia de São Petersburgo. Sete anos após a morte do seu irmão, regressou a Basileia onde foi professor de várias disciplinas matemáticas. Daniel foi grande amigo de Euler tendo os dois mantido uma proveitosa colaboração e intercâmbio de ideias em que, frequentemente, Euler usava a sua extraordinária capacidade analítica para dar forma rigorosa às ideias de Daniel.

Daniel teve a honra de ganhar por dez vezes a distinção da Academia Francesa. Entre os seus estudos contam-se trabalhos sobre cálculo e equações diferenciais, probabilidades e uma tentativa de explicar a teoria cinética dos gases.

1.4.6 Johann II (1710 - 1790)

O mais novo dos três filhos de Johann I. Começou por estudar Direito tendo obtido em 1727 o doutoramento em Jurisprudência. Trabalhou com o seu pai em matemática mas também como investigador independente. Recebeu por quatro vezes distinções da Academia de Paris. Quando o seu pai morreu, foi-lhe designada a disciplina de Matemática na Universidade de Basileia. Estudou prioritariamente a luz e o calor.

1.4.7 Johann III (1744 - 1807)

Considerado um prodígio desde pequeno, obteve o grau de doutor em Direito quando tinha apenas 14 anos. Como todos os Bernoulli, interessou-se por Matemática e foi chamado pela Academia de Berlim aos 19 anos. O rei Frederico II chamou-o para dirigir o observatório astronómico da Academia, tarefa para a qual não estava adequadamente preparado. Assim, a maior parte das suas obras recaíram sobre Astronomia mas nunca atingiram grande fama nem glória. As suas àreas de maior interesse foram Probabilidades, Recorrência Decimal e a Teoria das Equações (BOYER, 1996).

1.4.8 Jacob II (1759 - 1789)

Como outros Bernoulli, estudou Direito e enveredou pela Matemática. Em 1782 candidatou-se à cadeira de Física na Universidade de Basileia, quando Daniel morreu. Acabou por não conseguir e mudou-se para Turim e Veneza acabando por se fixar em São Petersburgo. Aí escreveu importantes trabalhos sobre Física Matemática, referentes a elasticidade, hidrostática e balística. Morreu em São Petersburgo, afogado nos rios e canais daquela a que chamam a Veneza do Norte.

1.5 L'HOSPITAL(1661-1704)

Guillaume François Antoine de l'Hospital, Marquês de Sainte-Mesme, matemático e nobre francês, nascido em Paris em 1661 e falecido na mesma cidade em 2 de fevereiro de 1704. Serviu como um oficial de cavalaria mas saiu por problemas de saúde, dirigindo, então, toda a sua atenção para a matemática. Estava entre os alunos mais antigos de John Bernoulli, quem, em 1691, dedicou alguns meses de seu tempo hospedado na casa de l'Hospital, em Paris, com o propósito de ensinar-lhe o novo cálculo. Parece estranho, mas o conhecimento do cálculo infinitesimal e o poder de usá-lo, na época, era limitado a Newton, Leibniz e aos dois Bernoullis mais velhos - e é notado que eles eram os únicos matemáticos que conseguiam resolver os problemas mais difíceis que à época eram propostos como desafio. Não existia naquele tempo um único texto ou livro sobre o assunto e o crédito de escrever o primeiro tratado que explicava os princípios e a forma de uso dos métodos sobre o tema é devido a l'Hospital. O texto foi publicado em 1696 sob o título L'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes, o que foi o primeiro manual publicado de cálculo diferencial. Neste livro está incluída a regra que leva seu nome e também contém uma investigação parcial do valor limite da relação de funções, que para um certo valor da variável toma a forma de indeterminação $\frac{0}{0}$, um problema resolvido por John Bernoulli em 1704. Este trabalho teve uma grande circulação e acabou por dar forma à notação de diferencial a ser usada na a França, ajudando a fazê-lo conhecido por toda a Europa.

Um suplemento contendo um tratamento semelhante do cálculo integral, junto com adições para o cálculo diferencial, que tinham sido feitas na segunda metade do século, foi publicado em Paris, em (1754-1756), por L. A. de Bougainville.

Aos 15 anos, L'Hospital resolveu o difícil problema sobre ciclóides, proposto por Pascal. Tomou parte em quase todos desafios emitidos por Leibniz, pelos Bernoullis e por outros matemáticos continentais da época. Em particular ele deu uma solução do brachystochrone* e investigou a forma do sólido de menor resistência sobre o qual Newton, na Principia, declarou o resultado. Ele também escreveu um tratado analítico sobre cones, que foi publicado em 1707, e que foi por quase um século julgado um trabalho padrão sobre o assunto.

A forma original de seu nome era L'Hospital. A partir de uma das várias reformas ortográficas ocorridas na França entre os séculos XVII e XIX, a grafia correta passou a ser L'Hôpital.

1.6 COLIN MACLAURIN (1698 - 1746)

Matemático e professor escocês nascido em Kilmodan, 12 km ao norte de Tighnabruaich, Cowal, Argyllshire, considerado por muitos, o mais importante matemático britânico posterior a Newton. Seu pai era o ministro da paróquia da igreja de Glendauel, e ele foi educado em Glasgow. Aos dezenove anos ensinava matemática na Faculdade de Marischal, em Aberdeen, e aos vinte e sete entrou para a Universidade de Edimburgo onde permaneceu 20 anos (1725-1745). Em Edimburgo fez um trabalho notável em geometria, trabalhando com Daniel Bernoulli e Euler e foi um continuista das descobertas de Newton e Stirling sobre curvas planas, cônicas e cúbicas. Publicou dois tratados sobre curvas: Geometria orgânica (1720) e De linearum

geometricarum proprietatibus (1720). Foi eleito um membro da Sociedade Real Society (1719), foi premiado duas vezes pela Academia de Ciências: (1724) pelo seu trabalho no impacto de corpos e (1740) pelo estudo chamada teoria das marés. Este segundo prêmio foi dado também a Euler e Daniel Bernoulli.
Publicou Treatrise of fluxions (1742), um tratado de 2 volumes e 763 páginas, sobre séries e técnicas de cálculo, a primeira exposição sistemática dos métodos de Newton escrita na defesa deste contra os ataques de George Berkeley.

Maclaurin apelou aos métodos geométricos dos gregos antigos e para método de Arquimedes da exaustão. No seu Tratado, Maclaurin usa o caso especial da série de Taylor, nomeada agora depois dele (reconhecendo Taylor). Maclaurin também usou o teste integral para a convergência de uma série infinita. Ele investiga em seu Tratado a atração mútua de dois elipsóides de revolução como uma aplicação dos métodos.

Maclaurin representou um papel ativo na defesa de Edinburgh durante a rebelião de Jacobite em 1745. Quando a cidade caiu Maclaurin fugiu para York e ele morreu no ano seguinte em Edinburgh.

O Tratado de Maclaurin em álgebra foi publicado em 1748, dois anos depois da sua morte. Outro trabalho informando das descobertas do Sr. Isaac Newton permaneceu incompleto na sua morte mas foi publicado mais tarde (BOYER, 1996).

1.7 BROOK TAYLOR (1683-1731)

Matemático britânico inventivo e produtivo nascido em Edmonton, Middlesex, conhecido pelo nome das famosas Séries de Taylor. Descendente de uma próspera família, filho de John Taylor e Olivia Tempest, foi encorajado a desenvolver seu talento musical e artístico e entrou para o St John’s College, Cambridge (1703), onde passou a gostar de matemática. Graduado em Cambridge, LL.B. (1709), período em que escreveu seu primeiro e importante paper matemático (1708) embora só publicado seis anos depois (1714) no Philosophical Transactions da Royal Society. Admirador da mecânica de Newton, foi eleito fellow da Royal Society (1712), sendo depois seu secretário (1714-1718). Já matemático conceituado publicou seu livro de cálculo, Methodus incrementorum (1715), em que apresentou sua famosa série, base do cálculo diferencial, e seu livro sobre geometria, Linear perspectiva, no mesmo ano. Methodus gerou imensa polêmica com Jaques Bernoulli sobre sua paternidade, porém ambos tinham sido antecedidos por James Gregory. Assim, apesar do nome, não foi ele que inventou as séries de Taylor e as séries de Maclaurin não foram desenvolvidas por Maclaurin. James Gregory trabalhou com as séries de Taylor quando o inglês tinha poucos anos de idade, enquanto Gregory também publicou as séries de Maclaurin de funções trigonométricas dez anos antes de Maclaurin ter nascido. Casou-se com Miss Brydges, de Wallington, Surrey, mas enviuvou dois anos depois. Casou-se novamente (1725) com Sabetta Sawbridge, de Olantigh, Kent, da qual também enviuvou (1730). Publicou também livros sobre perspectiva linear e sobre propagação de vibrações e morreu em Somerset House, Londres.

1.8 EULLER E D'ALEMBERT

1.8.1 Euller (1707-1783)

Euler nasceu em Basel, Suíça. Seu pai, um pastor, queria que o filho seguisse os passos dele e o enviou para a Universidade de Basel para prepará-lo para o ministério, mas geometria se tornou logo o assunto favorito dele. Pela intercessão de Bernoulli, Euler obteve o consentimento de seu pai para mudar para a matemática. Depois de não conseguir uma posição de físico em Basel em 1726, ele se uniu a St. Academia de Ciência de Petersburg em 1727. Quando foram retidos capitais da academia, ele serviu como médico-tenente na marinha russa de 1727 a 1730. Ele se tornou o professor de Física na academia em 1730 e professor de Matemática em 1733, quando ele casou e deixou a casa de Bernoulli. A reputação dele cresceu depois da publicação de muitos artigos e o seu livro Mechanica (1736-1737), que apresentou extensivamente pela primeira vez dinâmica Newtoniana na forma de análise matemática.

Em 1741, Euler se juntou à Academia de Ciência de Berlim, onde ele permaneceu durante 25 anos. Em 1744 ele se tornou o diretor da seção de matemática da academia. Durante a permanência dele em Berlim, ele escreveu mais de 200 artigos, três livros em análise matemática, e uma popularização científica, Cartas para Princesa de Alemanha (3 vols., 1768-1772). Em 1755 ele foi eleito um membro estrangeiro da Academia de Ciência de Paris; durante sua carreira ele recebeu 12 desses prêmios bienais prestigiosos.

Em 1766, Euler voltou à Rússia, depois de Catherine a Grande fazer-lhe uma oferta generosa. Na ocasião, Euler estava tendo diferenças com Frederick o Grande em cima da liberdade acadêmica e outros assuntos. Frederick ficou enfurecido na partida dele e foi convidado Lagrange a substitui-lo. Na Rússia, Euler se tornou quase completamente cego depois de uma operação de catarata, mas pôde continuar com sua pesquisa e escrevendo. Ele teve uma memória prodigiosa e pôde ditar tratados em óticas, álgebra, e movimento lunar. Em sua morte em 1783, ele deixou uma reserva vasta de artigos. A Academia de St.Petersburg continuou a publicá-los durante os próximos 50 anos.

1.8.2 D'Alembert (1717-1783)

Jean Le Rond D'Alembert nasceu no dia 17 de novembro em Paris. Ainda pequeno, foi abandonado na igreja de St. Jean Baptiste le Rond localizada perto de Notre Dame. Rapidamente foi encontrado e encaminhado para uma casa de crianças desabrigadas. Recebeu o mesmo nome do local onde foi encontrado - Le Rond - e D'Alembert, seu sobrenome, foi acrescentado mais tarde quando iniciou seus estudos. Posteriormente soube-se que sua mãe era Madame de Tencin, uma escritora eloquente, e que seu pai era Chevalier Destouches, general da artilharia.

Quando D'Alembert nasceu, seu pai estava fora do país. Logo que retornou à Paris procurou seu filho e arrumou uma mãe adotiva para criá-lo, Madame Rousseau, que permaneceria como tal para o resto de sua vida. Sua verdadeira mãe jamais o reconheceu como filho. Destouches morreu em 1726, quando D'Alembert tinha apenas nove anos, porém deixou dinheiro suficiente para garantir-lhe uma boa educação.

D'Alembert teve uma ampla educação estudando Direito, Medicina, Ciência e Matemática. Esta última foi sua grande paixão. Em julho de 1739, começou sua carreira em Matemática e, dois anos depois, aos vinte e quatro anos, foi admitido para a Academia de Ciências de Paris. Entre os contemporâneos D'Alembert e Clairaut havia uma rivalidade científica que muitas vezes raiava a inimizade.

Em 1743, publicou o Traité de Dynamique, que era uma interpretação poderosa da terceira lei de Newton. Em 1744, D'Alembert utilizou os seus resultados sobre o equilíbrio e o movimento para publicar Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides. Esse trabalho deu um tratamento alternativo aos fluidos comparado aquele dado por Daniel Bernoulli. Estudou Astronomia, e resolveu o processo dos equinócios, sendo também o primeiro a encontrar e resolver a equação da ondulatória em 1747.

Tratado de Dinâmica Tratado do Equilíbrio e do Movimento dos Flúidos. Foi pioneiro no estudo das equações diferenciais parciais e também na utilização delas equações na Física. Seu trabalho sobre esse assunto apareceu, pela primeira vez, em 1747, em um artigo que D'Alembert enviou para a Academia de Ciências da Prússia, sob o título Réflexions sur la cause générale des vents, o qual lhe rendeu o prêmio da Academia.

Reflexões sobre a causa genérica dos ventos Enciclopédia ou Dicionário explicativo das ciências, das artes e das ocupações Diferencial Limite Entre 1751 e 1772, trabalhou junto com Denis Diderot, editando os vinte e oito volumes da Encyclopédie ou Dictionnaire raisonnné des sciences, des arts, et dês métiers. Diderot escreveu a maioria dos textos sobre política, fruto das discussões com Montesquieu; Rousseau escreveu o tratado de música; D'Alembert escreveu a maioria dos textos matemáticos e científicos. Em 1754, no artigo Differential da Encyclopédie, D'Alembert afirmou que "a diferenciação de equações consiste simplesmente em achar os limites da razão de diferenças finitas de duas variáveis contidas na equação" e, em 1765, no artigo Limit, definiu "uma quantidade, o limite de uma segunda quantidade variável, se a segunda pode se aproximar da primeira por qualquer quantidade dada, sem coincidir com ela". Esse conceito, mesmo que impreciso, ajudaria Cauchy a definir o conceito fundamental do Cálculo Diferencial.

D'Alembert dedicou também parte de sua vida à Literatura e à Filosofia. Um trabalho de cinco volumes, editado entre 1753 e 1767, Mélanges de littérature et de philosophie, concentra boa parte de seus estudos nessas áreas. Entre as ideias contidas nesse trabalho, D'Alembert aceitava um argumento a favor da existência de Deus, baseado na crença de que a inteligência não pode ser um produto da matéria somente. Entretanto, há evidências de que ele foi persuadido por Diderot a aceitar a crença materialista antes de 1770. D'Alembert morreu no dia 29 de outubro de 1783, em Paris.

1.9 CAUCHY(1789-1857)

Augustin-Louis Cauchy filho de pais instruidos, em 1804 tomou aulas de Matemática e fez o exame de admissão para a École Polytechnique em 1805. Ele foi examinado por Biot e ficou em segundo lugar. Lá teve aulas com Lacroix, de Prony e Hachette, sendo tutorado em Análise por Ampère. Em 1807 graduou-se e entrou na escola de engenharia École des Ponts et Chaussées. Ele era um estudante excepcional e por seu trabalho prático foi designado para trabalhar sob as vistas de Pierre Girard, no projeto do Canal Ourcq.

Em 1810 Cauchy arrumou seu primeiro emprego em Cherbourg para trabalhar no porto para a frota de invasão Inglesa de Napoleão. Ele levou com ele uma cópia de Méchanique Céleste, de Laplace e de Thèorie des Fonctions. Apesar da carga intensa de trabalho no porto, Cauchy dedicou-se intensamente à pesquisa matemática e ele provou em 1811 que os ângulos de um poliedro convexo são determinados por suas faces. Ele submeteu seu primeiro trabalho neste tópico e então, encorajado por Legendre e Malus, submeteu outro sobre polígonos e poliedros em 1812. Cauchy sentia que deveria retornar a Paris se quisesse deixar sua marca na pesquisa. Infelizmente Cauchy voltou pelos motivos errados: provavelmente uma severa depressão.

De volta a Paris, Cauchy investigou funções simétricas e submeteu um artigo sobre este tópico em novembro de 1812, que foi publicado no Journal of the École Polytechnique em 1815.

Contudo ele deveria voltar a Cherbourg em fevereiro de 1813, quando tivesse recobrado sua saúde, mas isto não se encaixava com suas ambições matemáticas. Seu pedido a de Prony para ser um professor associado na École des Ponts et Chaussées foi recusado, mas foi-lhe permitido continuar como engenheiro no projeto do Canal Ourcq, ao invés de voltar a Cherbourg.

O que realmente Cauchy desejava era uma carreira acadêmica e então inscreveu-se para um posto no Bureau des Longitudes. Legendre ficou com a vaga. Também falhou ao se inscrever para a seção de geometria do Institute, indo a vaga para Poinsot.

Outros postos ficaram vagos, mas um em 1814 foi a Ampère e uma vaga em Mecânica no Institute, que era de Napoleão Bonaparte, foi para Molard. Na última eleição Cauchy não recebeu um único voto! Contudo sua produção matemática continuava grande e em 1814 ele publicou um trabalho sobre integrais definidas que posteriormente viria a se tornar a base da teoria de funções complexas.

Em 1815 Cauchy perdeu para Binet um cadeira em Mecânica na École Polytechnique, mas foi apontado como professor assistente de Análise. Ele era responsável pelo segundo ano de curso. Em 1816 ele ganho o Grand Prix of the French Academy of Science por um trabalho em ondas. Ele atingiu realmente a fama, porém, quanto submeteu um trabalho ao Institute resolvendo uma das afirmações de Fermat acerca de números poligonais feita a Mersenne. Graças à ajuda política Cauchy agora ocupava um posto na Academy of Sciences.

Em 1817 Cauchy substituiu Biot em seu posto no Collège de France, pois Biot saíra em expedição. Lá deu aulas sobre métodos de integração desenvolvidos por ele, mas ainda não publicados. Cauchy foi o primeiro a fazer um estudo rigoroso das condições de convergência de séries infinitas, além de sua rigorosa definição de integral. Seu texto Cours d'analyse de 1821 foi escrito para estudantes da École Polytechnique e tratava do desenvolvimento dos teoremas básicos do Cálculo, tão rigorosamente quanto possível.

Em 1826 começou um estudo do cálculo de resíduos em Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinétesimal enquanto que em 1829 em Leçons sur le Calcul Différential ele define pela primeira vez uma função complexa de uma variável complexa.

Em 1830 os eventos políticos em Paris e os anos de trabalho intenso começaram a cobrar seu preço e Cauchy decidiu tirar umas férias. Ele deixou Paris em setembro de 1830, antes da revolução de Julho, e passou algum tempo na Suíça. Lá ele foi um ajudante entusiástico na organização da Académie Helvétique mas este projeto colapsou pois ele foi pego em eventos políticos.

Eventos políticos na França significavam que Cauchy deveria jurar lealdade ao novo regime, mas tendo falhado em retornar a Paris, ele perdeu todas as suas posições. Em 1831 Cauchy foi a Turim e durante algum tempo, por oferecimento do Rei de Piemonte, ocupou uma cadeira de Física teórica. Ele ensinou em Turim em 1832. Menabrea assistiu a estas aulas em Turim e escreveu que os cursos

eram muito confusos, passando repentinamente de uma idéia a outra, de uma fórmula à próxima, sem nenhum esforço de dar uma conexão entre elas. Suas apresentações eram nuvens obscuras, iluminadas de tempos em tempos por um brilho de pura genialidade.

... dos trinta colegas comigo, eu era o único a perceber isto.

Cauchy voltou a Paris em 1838 e recuperou sua posição na Academia, mas não suas posições como professor por ter recusado jurar lealdade. De Prony morreu em 1839 e sua posição no Bureau des Longitudes tornou-se vaga. Cauchy era fortemente apoiado por Biot e Arago mas Poisson opunha-se radicalmente a ele. Cauchy foi eleito mas, tendo recusado-se a jurar lealdade, não foi indicado e não poderia participar de reuniões ou receber um salário.

Em 1843 Lacroix morreu e Cauchy tornou-se candidato para sua cadeira no Collège de France. Liouville e Libri eram também candidatos. Cauchy teria facilmente sido indicado, mas suas atividades políticas e religiosas (como ajudar os Jesuítas), foram fatores cruciais. Libri foi escolhido, claramente o mais fraco dos três matematicamente falando, e Liouville escreveu no dia seguinte que ele estava.

profundamente humilhado como homem e como matemático pelo que acontecera ontem no Collège de France. Durante este período a produção matemática de Cauchy foi menor do que no período de exílio auto-imposto. Ele fez trabalhos importantes na área de Equações Diferenciais e aplicações à Física Matemática. Ele também escreveu sobre Astronomia Matemática, especialmente por ser candidato a posições no Bureau des Longitudes. O texto em 4 volumes Exercises d'analyse et de physique mathematique publicado entre 1840 e 1847 mostrou-se extremamente importante.

Quanto Louis Philippe foi deposto em 1848 Cauchy recuperou suas posições na Universidade. A cadeira ocupada por Libri vagou (fugiu, acusado de roubar livros), sendo novamente disputada por Liouville e Cauchy. Liouville ganhou, azedando a relação entre os dois.

Os últimos anos da vida de Cauchy foram particularmente amargos, por ter se envolvido com Duhamel a respeito de um resultado sobre choques inelásticos. Foi provado que Cauchy estava errado, mas ele nunca admitiu isso.

Inúmeros termos em Matemática levam o nome de Cauchy: o teorema da integral de

Cauchy, a teoria de funções complexas, o teorema de existência de Cauchy-Kovalevskaya, as equações de Cauchy-Riemman e as seqüências de Cauchy. Ele produziu 789 trabalhos em Matemática, um feito extraordinário.

Uma coleção com seus trabalhos, Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy (1882-1970), foi publicada em 27 volumes.

1.10 KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

O mais importante analista em Berlim na segunda metade do século dezenove. Ele foi criado numa familia católica devota mais liberal, seu pai tendo-se convertido do protestantismo. Ele tinha um irmão e duas irmãs mais novos. karl estudou direito na Universidade de Bonn, onde ele se tornou perito em beber e na esgrima, mais do que em leis ou na matemática, ele saiu sem se graduar. Preparou-se então em Munster para o ensino na escola secundaria, e la um instrutor, Christoph Guderman (1798-1851) tomou-o sob sua proteção. Guderman se interessava por funções elipticas e hiperbólicas, tema em que seu nome é lembrado na gudermanniana: Se u é uma funçào de x satisfazendo à equação $tan\ u = senh\ x$ então u é chamada a gudermannina de x, escrito como $u = gdx$. Karl se inspirou no seu professor e se tornou o maior professor de matemática de meados do século. Ele obteve o certificado de professor aos 26 anos. Em 1804 se tornou professor na Universidade de Berlim.

Antes de Weierstrass sunpunha-se que uma série infinita converge em algum intervalo a uma função continua e derivável $f(x)$, então uma segunda série obtida por diferenciação termo a termo da série original convergirá necessariamente, no mesmo intervalo, a $f'(x)$. Varios matemáticos mostraram que isto não é necessariamente verdade e que a derivação termo a termo merece confiança somente sob o ponto de convergência uniforme- em que um unico N pode ser achado tal que para todo valor de x no intervalo as somas parciais $S_n(x)$ diferem da soma $S(x)$ por menos que um dado e para todo $n > N$. Karl Weierstrass mostrou que para uma série uniformemente convergente a integração termo a termo é permissivel. Esse conceito tambem foi percebido ao mesmo tempo por Cauchy na França (em 1853), Sir G. G. Stokes em Cabridge (em 1847) e P.L.V. Seidel (1821-1896) na Alemanha (1848).

Uma das mais importantes contribuições á analise é prolongamento análitico. Ele definia uma função analítica como sendo uma série de potências juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico Este trabalho teve grande importancia na fisica matemática, em que soluções de equações diferenciais raramente são achadas em qualquer forma que não seja uma série infinita.

A ifluência de Weierstrass se deu tanto através de seus estudantes quanto por seus cursos e publicações. No campo das equações diferenciais lineares no dominio complexo Lazarus Fuchs (1833-1902). Sua motivação veio da conferência sobre funções abelianas que Weierstrass dera 1863. O trabalho de Fuchs foi aperfeiçoado por G.Frobenius(1849-1917) em Berlim e serviu de ponto de partida para Poincaré.

H.A.Schwars(1848-1921) sobre a influência de Weierstrass começou a procurar aplicações sobre o teorema da aplicação de Riemann. Weierstrass observou que a prova de Riemann era inaceitável porque estendia o uso do príncipio de Dirichlet além das limitações que garantiam a existência de uma integral minimizante. Scwartz então começou a procurar exemplos específicos para qual podia validar o teorema. Esta busca levou-o a dois instrumentos "principio de reflexão" e "processo alternante". Por exemplo, podia levar uma região simplesmente conexa do plano sobre círculo mas não pode realizar a generlização mais ampla que esperava. Schwars deu grandes contribuições na analise complexa.

O sueco Gosta Mitlague Leffler (1846-1927) assumiu uma grande importancia internacional graças a seu apoio a matemátematicos de todo mundo e seu jornal, um seguidor de Weierstrass, que estudou com Hermite em Paris e Schering em Gottingen antes de vir a Berlim. Fez contribuições independentes à teoria das funções complexas. Fundou o periódico Acta Mthematica. E teve um importante papel na vidas de Sofia Vasilyevna Kovalevskaja, Henri Poincaré e George Cantor.

Em 1870 Sofia Kovalevskaya veio a Berlim e Weierstrass ensinou-lhe em particular porque não era permitido a ela o acesso à universidade. É evidente que ela era uma aluna muito especial, tanto que Weierstrass escreveu para ela que ele:

> ... sonhou e foi arrebatado de tantos enigmas que permanecem para nós resolvermos, em espaços finito e infinito, sobre a estabilidade do sistema mundial, e em todos os outros grandes problemas da matemática e da física do futuro. ... você tem estado perto ... toda a minha vida inteira ... e nunca encontrei ninguém que pudesse me trazer essa compreensão dos mais altos objetivos da ciência e de acordo com a minha alegria, tais intenções e princípios básicos que você.

Os padrões de rigor que Weierstrass impôs, definindo, por exemplo, irracionais números como limites de séries convergentes, influenciou fortemente o futuro da matemática. Ele também estudou funções inteiras, a noção de convergência uniforme e funções definidas por produtos infinitos.

Conhecido como o pai da análise moderna, Weierstrass desenvolveu testes para a convergência de séries e contribuiu para a teoria das funções periódicas, funções de variáveis reais e complexas, funções elípticas, funções abelianas, produtos infinitos convergentes e o cálculo das variações. Ele também avançou com a teoria de bilinear e formas quadráticas .

> ... porque o seu senso crítico, invariavelmente, o obrigou a base de qualquer análise sobre uma base firme, a partir de uma abordagem nova e contínua revisão e ampliação.

No entanto, ele fez editar a obra completa de Steiner e os de Jacobi . Ele decidiu fiscalizar a publicação das suas próprias obras completas, no seu caso, isso implicaria uma grande quantidade de material inédito da conferência de seus cursos e Weierstrass percebeu que sem a sua ajuda esta seria uma tarefa difícil. Os dois primeiros volumes apareceram em 1894 e 1895, sendo os únicos que aparecem antes de sua morte em 1897. Durante os últimos três anos, ele estava confinado a uma cadeira de rodas, imóvel e dependente. Ele morreu de pneumonia. Os restantes volumes da sua Obra Completa apareceu lentamente, volume 3, em 1903, volume 4, em 1902, volumes 5 e 6 em 1915, volume 7 em 1927. Os sete volumes foram reimpressos em 1967. Mais trabalho continua a ser publicado hoje, particularmente as versões de seus cursos de palestra tirado das anotações feitas por aqueles que assistiram às palestras (BOYER, 1996).

1.11 GEORG CANTOR (1845-1918)

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor - matemático de origem Russa, nasceu na cidade de St. Petersburg a 03 de março de 1845. Deixou a Rússia ainda menino, emigrando com a família para a Alemanha. Sua formação foi realizada na Alemanha e Suíça, primeiramente na Universidade de Zurich até 1862, posteriormente na de Berlim, onde foi aluno de notáveis matemáticos como Ernst Kummer, Karl Weierstrass e Leopold Keonecker, e finalmente em Göttingen. Na universidade de Berlim ele recebeu o seu doutorado em 1867, aceitando em 1872 sua nomeação na Universidade de Halle como professor assistente de matemática, assumindo a direção da cadeira a partir de 1879, caracterizando-se, sua vida, por contrastante sucesso de períodos de grande lucidez, quando produziu obras geniais, e períodos de forte depressão, que obrigavam seu internamento em clínicas de doenças mentais.

No dizer de muitos, a teoria dos conjuntos, criada por Cantor, é uma das mais notáveis inovações matemáticas dos últimos séculos. Nessa teoria, Cantor apresenta demonstrações novas de fatos conhecidos e, ao lado disso, inúmeros fatos novos. A teoria contribuiu decisivamente para que se passasse a encarar sob outra perspectiva os problemas da matemática, desde os que surgem nos fundamentos da disciplina até os que são típicos de ramos especializados da álgebra, da análise e da geometria.

Apresentada em pleno século XIX, a teoria dos conjuntos foi muito combatida pelos contemporâneos de Cantor, suscitando várias polêmicas. A intervenção de paradoxos que conduziam a resultados aparentemente inaceitáveis, e a rejeição de axiomas clássicos, muito contribuíram para o não reconhecimento, por parte dos matemáticos da época, da nova teoria. Todavia, com o decorrer dos anos, as aplicações da teoria dos conjuntos vieram comprovar sua extraordinária importância para o progresso da análise.

Os primeiros trabalhos do célebre matemático estão voltados para a questão dos números. Cantor estava interessado no decênio que se inicia em 1870, em estabelecer sólidos fundamentos para o continuum dos números reais e mostra, entre outras coisas, que há conjuntos não enumeráveis.

Ao distinguir números algébricos e transcendentais (não algébricos, ou melhor esclarecendo: número transcendental é um número irracional que não é uma raiz de qualquer equação polinomial com coeficientes inteiros.), Cantor encontra maneira de comparar os tamanhos de conjuntos infinitos, mostrando que o conjunto de todos os números é maior do que o conjunto dos números algébricos. Encarar totalidades, e não objetos individuais (números, pontos ou funções), é uma das inovações de Cantor, revelando-se que as totalidades possuem propriedades que não são partilhadas pelos objetos dessas totalidades. O inesperado resultado relativo ao conjunto de todos os números algébricos, que Cantor estabelece, bem como a total novidade dos métodos empregados, assinalam a capacidade inventiva do jovem matemático. Em 1872 ele definiu números irracionais em termos de sequências convergentes de números racionais.

Valendo-se da distinção que Bolzano havia postulado, entre classes infinitas e finitas, Cantor define conjuntos similares, ou eqüipotentes (que podem ser postos em correspondência biunívoca), e mostra a diferença entre cardinais e ordinais, que deixa de ser trivial quando os conjuntos são infinitos. Em 1873, ele provou que os números racionais podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais. Em 1874, Cantor demonstra que a classe de todos os números algébricos é enumerável; em 1878 apresenta regra para construir classe não enumerável de números reais.

Entre as consequências dos estudos de Cantor está a de que existem totalidades que não são equipotentes, podendo um conjunto infinito ser colocado em correspondência com uma de suas partes próprias. O velho axioma do “ Todo maior que as partes” foi, assim, banido da matemática, quando se trata de conjuntos infinitos. São vários os tipos de infinitude, de que resultaram os números transfinitos, cuja álgebra peculiar foi examinada por Cantor chegando a mostrar , em 1871, que em um certo sentido “ quase todos” números são transcendentais e que daí surgiu a sua definição de continuidade que é ainda hoje assunto de muitos estudos. O trabalho de Cantor que conduzido pelo próprio professor Kronecker foi atacado por muitos matemáticos, inclusive por Henri Poincaré. Apesar da descoberta dos paradoxos da teoria dos conjuntos, Cantor nunca duvidou da verdade absoluta do seu trabalho, tendo sido apoiado por Dedekind, Weierstrass, David Hilbert, Russell e Zermelo. Hilbert descreveu o trabalho de Cantor da seguinte maneira: “ o melhor produto de gênio matemático e uma das realizações supremas da atividade humana puramente intelectual ”.

A existência de conjuntos infinitos foi debatida e severamente criticada, particularmente porque não dava meios para a construção das totalidades em pauta e porque originava paradoxos indesejáveis. A maneira de contornar esses paradoxos caracteriza, em suas linhas mestras, as investigações que ainda hoje são objetos de estudos no setor de fundamentos da matemática.

Tomando por base o contínuo linear, Cantor desenvolve a “Teoria de conjuntos de pontos”, em que surgem noções como as de ponto de acumulação, conjunto fechado, conjunto perfeito, etc., bem como a teoria geral dos conjuntos, em que aparecem noções como as de números cardinal e ordinal, ordem, etc., que são muito comuns na terminologia contemporânea.

A metrificação de conjuntos foi explorada por Cantor entre 1880 e 1890, chegando com os trabalhos de Borel em 1894 e Lebesgue em 1902.

As aplicações da teoria dos conjuntos à solução de questões relativas à estrutura algébrica de vários tipos de conjuntos e a questões relativas às suas propriedades operatórias abriram novos rumos para os matemáticos, ressaltando, entre outras aplicações, a extensão dos conceitos de medida e de integral, a introdução das noções de espaço abstrato, definido como conjuntos de elementos com dadas propriedades, e bem assim notáveis inovações no campo da integração e no do estudo das funções, examinadas à luz da correspondência entre conjuntos.

A teoria dos conjuntos é um alicerce sobre que assenta toda a matemática de hoje, tal como agora ensinada, sendo recente a tentativa de formular uma teoria ainda mais geral que poderia substituí-la nesse papel.

Entre 1895 e 1897, Cantor publicou “ Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre” (Contribuições para a fundamentação da teoria das quantidades transfinitas).

Em 1915, foi planejado em Halle um evento para comemorar o septuagésimo aniversário de Cantor, tendo sido cancelado pelo fato de que o pais estava em guerra.

Entre 1916 e 1918, Cantor adoeceu e voltou à clínica psiquiátrica em Halle, onde faleceu no dia 6 de janeiro de 1918.

2 SEQUÊNCIAS

2.1 SEQUÊNCIAS

Definição 2.1 *Denominamos sequência de números reais a toda função*

$$\begin{array}{rccc} x & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & x(n) = x_n \end{array}$$

que associa a cada número natural n um real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência.

Os números que pertence ao conjunto imagem de uma sequência são chamados de elementos da sequência. Se o n-ésimo termo da sequência for dado por $x(n)$, então a sequência será o conjunto de pares ordenados da forma $(n, x(n))$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1 *Seja a sequência*

$$\begin{array}{rccc} z & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & z(n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right) \end{array} \tag{1}$$

onde alguns dos seus elementos estão dados abaixo na forma de pares ordenados

$$\left(1, \frac{1}{3}\right), \left(2, \frac{2}{5}\right), \left(3, \frac{3}{7}\right), \left(4, \frac{4}{9}\right), \left(5, \frac{5}{11}\right), \cdots$$

Como qualquer função, uma sequência também possui um gráfico. Este gráfico consiste em representar seus pontos.

Um esboço do gráfico da sequência (1) está na Figura (1),

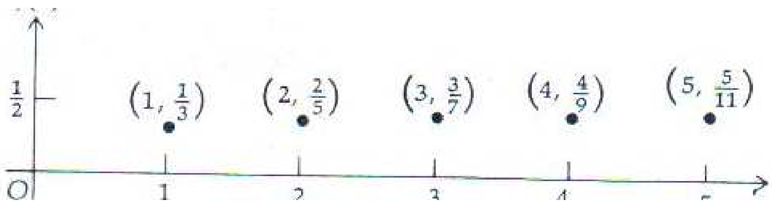

Figura 1: Alguns pontos da (z_n).

Observação 2.1 *Como sempre consideramos o conjunto dos números naturais($\mathbb{N}$) como domínio de uma sequência, usaremos a notação $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou ainda, $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ ou simplesmente (x_n) para indicar uma sequência x .*

Exemplo 2.2 1. *A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por $\dfrac{(-1)^n+1}{n}$ é dada por $\left(0,1,0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{3},\cdots\right)$.*

2. *A sequência $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots\right)$ tem termo geral $\dfrac{1}{n}$ onde $n\geq 2$. O termo geral, também pode ser dado por, $\dfrac{1}{n+1}$ desde que consideremos $n\geq 1$.*

3. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-1,1,-1,1,\cdots)_{n\in\mathbb{N}}$ então $x_n=(-1)^n$ para $n\geq 1$.*

Definição 2.2 *Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é igual á sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, e somente se, $x_i=y_i$, para todo $i\in\mathbb{N}$.*

Não devemos confundir a sequência (x_n) com o conjunto dos seus termos que é dado por $x(\mathbb{N})=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$.

Exemplo 2.3 *A sequência $(1,1,\cdots,1,\cdots)$ possui como conjunto dos seus termos o conjunto unitário formado pelo elemento 1, ou seja, $x(\mathbb{N})=\{1\}$.*

É possível duas sequências terem os mesmos elementos e não serem iguais.

Exemplo 2.4 *As sequências $(0,1,0,1,\cdots)$ e $(0,0,1,0,0,1,\cdots)$ são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, isto é, $\{0,1\}$.*

Exemplo 2.5 *A sequência* $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ *é dada por*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right) \tag{2}$$

e tem como conjunto dos seus termos $x(\mathbb{N}) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots\right\}$. *Enquanto a sequência* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cujo termo geral é dado por*

$$y(n) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n \text{ for ímpar;} \\ \dfrac{2}{n+2} & \text{se} \quad n \text{ for par.} \end{cases}$$

é descrita por

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \;=\; \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \cdots, 1, \frac{2}{n+2}, 1, \cdots\right) \tag{3}$$

e tem como conjunto dos seus termos $y(\mathbb{N}) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots\right\}$.

Observe que os elementos das sequências (2) e (3) são os mesmos, mas as sequências são diferentes.

Observação 2.2 *Nas sequências (2) e (3), vimos que o conjunto dos seus valores são iguais mas as sequências são diferentes, ou seja, os seus pontos não são os mesmo. Observe na Figura (2) os cincos primeiros pontos da sequência (2)*

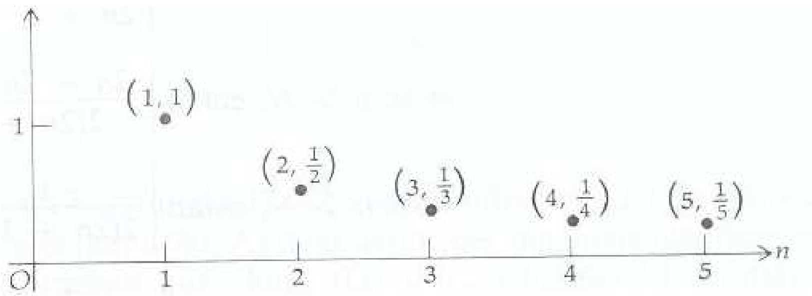

Figura 2: Alguns pontos da (x_n)**.**

e na figura (3) os seis primeiros pontos da sequência (3),

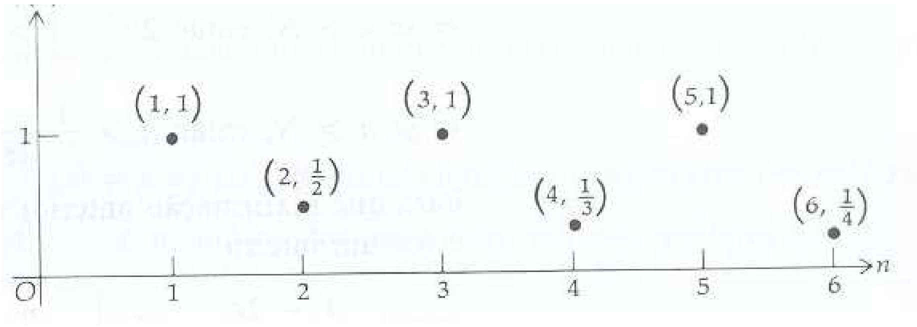

Figura 3: Alguns pontos da (y_n)**.**

Como o conjunto dos termos de uma sequência é dada por $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ podemos representá-los em uma reta (LIMA, 2009).

Exemplo 2.6 *Colocando num eixo horizontal os pontos correspondentes aos sucessivos elementos da sequencia (1), temos*

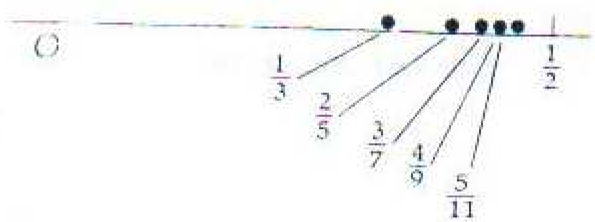

Figura 4: Alguns pontos de (z_n) **no eixo horizontal.**

Definição 2.3 *Dizemos que uma sequência de números reais* (x_n) *é limitada superiormente quando existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_n \leq c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.4 *Dizemos que uma sequência de números reais* (x_n) *é limitada inferiormente quando existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_n \geq c$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.5 *Dizemos que uma sequência de números reais* (x_n) *é limitada se* (x_n) *é limitada inferiormente e superiormente. Ou seja, existem números reais a, b tais que* $a \leq x_n \leq b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *ou ainda, existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x_n| \leq k$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.7 *Se* $a > 1$ *então a sequência* $\left(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots\right)$ *é limitada inferiormente mas não é limitada superiormente.*

Solução: *De fato, vamos mostrar que*

$$P(n) : \left\{a^n < a^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

é verdadeira,$\forall n \in \mathbb{N}$. *Com isso, mostraremos que* $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitado inferiormente. Vamos usar o primeiro princípio de indução.*

Temos

$$a \quad > \quad 1$$

daí, multiplicando por a de ambos os membros, temos:

$$a^2 \quad > \quad a \ .$$

Isto mostra que $P(1)$ *é verdadeira, ou seja,* $P(n)$ *é verdadeira para* $n = 1$.

Suponhamos que

$$P(k) \quad : \quad a^k < a^{k+1}$$

seja verdadeira para $K \in \mathbb{N}$. *Vamos mostrar que*

$$P(k+1) \quad : \quad a^{k+1} < a^{k+2}$$

é verdadeira. Temos, por hipótese que

$$a^k \quad < \quad a^{k+1} \ ,$$

multiplicando por a^k *de ambos os membros, temos*

$$a^{k+1} \quad < \quad a^{k+2} \ .$$

Logo $P(k+1)$ *é verdadeiro. Portanto,* $a^n < a^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Isto mostra que* $P(n)$ *é verdadeira,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *ou seja* $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada inferiormente.*

Definição 2.6 *Seja* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais. Dado* $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ *com* $\mathbb{N}'$ *infinito, isto é, ilimitado, ou ainda,* $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$ *existe* $n_k \in \mathbb{N}'$ *tal que* $n_0 < n_k$ *então a restrição da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ao conjunto* $\mathbb{N}'$ *é denominada uma subsequência da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Denota-se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ *ou* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 2.8 *Seja* $a < -1$, *considere a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a^n)_{n\in\mathbb{N}} = (a^1, a^2, a^3, a^4, \cdots)$. *Obtenha duas subsequências de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Seja

$$\mathbb{N}' = \textit{o conjunto dos números ímpares}$$

e

$$\mathbb{N}'' = \textit{o conjunto dos números pares}$$

Temos

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}'} = (a^1, a^3, a^5, \cdots) = \left(a^{2k-1}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (a^{n_k})_{k\in\mathbb{N}};$$

onde $n_k = 2k-1$. *Também*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}''} = (a^2, a^4, a^6, \cdots) = \left(a^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (a^{n_k})_{k\in\mathbb{N}};$$

onde $n_k = 2k$.

Em particular, se $a = -2$, *temos*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}'} = ((-2)^1, (-2)^3, (-2)^5, \cdots) = \left((-2)^{2k-1}\right)_{k\in\mathbb{N}} = ((-2)^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

e

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}''} = ((-2)^2, (-2)^4, (-2)^6, \cdots) = \left((-2)^{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = ((-2)^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

2.1.1 Limite de uma sequência

Dizer que o número real a é limite de uma sequência (x_n) significa afirmar que para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantem tão próximos de a quanto desejarmos. Estipulando um “erro”por meio de um número real $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que todos os termos x_n da sequência que tem índice n maior que n_0, deve depender de ε, para valores cada vez menores de ε, necessita tomar n_0 cada vez maior (LIMA, 2009). Isto nos leva a seguinte definição.

Definição 2.7 *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tem limite* $a \in \mathbb{R}$ *quando para todo* $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, pode-se obter um número natural* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que todos os termos* x_n, *com índice* $n > n_0$ *cumprem a condição* $|x_n - a| < \varepsilon$ *e escreve*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que} \\ \textit{se } n > n_0 \textit{ então } |x_n - a| < \varepsilon \end{array}$$

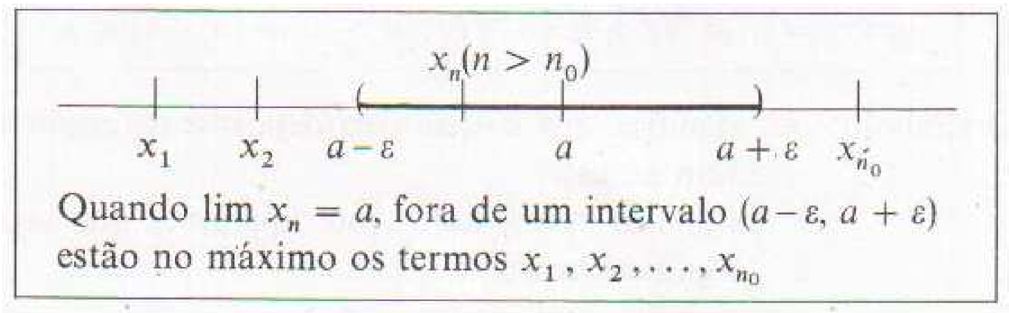

Figura 5: Limite de uma sequência.

O matemático ingles G. H. Hardy, um aficionado das competições esportivas, costumava dizer que, para bem entender a ideia de limite, deve-se pensar em dois competidores. Um deles, digamos, o mocinho, quer provar que $\lim x_n = a$, enquanto o outro, digamos, o bandido, procura impedi-lo. O bandido fornece os épsilons (ε) enquanto o mocinho trata de conseguir, para cada $\varepsilon > 0$ proposto como desafio, o n_0 correspondente (isto é, o n_0 tal que $n > n_0$ implique $|x_n - a| < \varepsilon$).

O mocinho ganhará o jogo (e ficará portanto estabelecido que $\lim x_n = a$), se para qualquer $\varepsilon > 0$ exibido pelo seu adversário, ele for capaz de obter um n_0 conveniente (isto é, tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$). Por outro lado, para que o bandido ganhe a parada, basta que ele consiga achar um número real $\varepsilon > 0$ para o qual nenhum n_0 que o mocinho venha a tentar, sirva. (ou seja, esse ε deve ser tal que para todo n_0 exista $n > n_0$ com $|x_n - a| \geq \varepsilon$.)

Voltando a falar sério, observamos que se $\lim x_n = a$ então qualquer intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, de centro a e raio $\varepsilon > 0$, contem todos os termos x_n da sequência, com exceção no màximo de um número finito de índices n. Com efeito, dado o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, como $\lim x_n = a$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Ou seja, se $n > n_0$ então $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Assim, fora do intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ só poderão estar, no máximo, os termos $x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}$.

Reciprocamente: se qualquer intervalo de centro a contém todos os x_n, salvo talvez para um número finito de índices n, então $\lim x_n = a$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contera todos os x_n exceto para um número finito de índices n. Seja n_0 o maior índice n tal que $x_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Isto prova que $\lim x_n = a$.

Exemplo 2.9 *Voltando a sequência (1) temos que os seus sucessivos elementos estão cada vez mais próximos de* $\frac{1}{2}$, *confome Figura (4) embora nenhum elemento da sequência assuma o* *valor* $\frac{1}{2}$. *Intuitivamente,vemos que é possível obter um elemento da sequência tão próximo de* $\frac{1}{2}$ *quanto desejarmos, bastando tomar o número de elementos suficientes grande. Ou, expressando isso de outra forma,* $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|$ *pode se tornar menor que qualquer número positivo* ε*, contando que n seja suficientemente grande. Por isso dizemos que o limite da sequência* $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|$ *é* $\frac{1}{2}$.

Usaremos a definição para mostrar que a sequência $\left(\frac{n}{2n+1}\right)$ *tem limite* $\frac{1}{2}$.

Solução: *Queremos mostrar que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$, *ou equivalentemente, para todo* $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ *tal que se* $n>n_0$ *então* $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

Devemos ter

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| &< \varepsilon\\
\Rightarrow \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| &< \varepsilon\\
\Rightarrow \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| &< \varepsilon\\
\Rightarrow \frac{1}{2(2n+1)} &< \varepsilon\\
\Rightarrow 2n+1 &< \frac{1}{2\varepsilon}\\
\Rightarrow n &> \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}
\end{aligned}$$

A afirmação anterior só será considerada verdadeira, se para todo $\varepsilon>0$, *existir* $n_0>\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ *tal que se*

$$n>\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \tag{4}$$

isto mostra que a sequência dada tem limite $\frac{1}{2}$.

Definição 2.8 *Se* (x_n) *tem limite a, finito, dizemos que a sequência é convergente e que converge para a (escrevemos* $x_n\to a$*). Se não existe o limite ou se* $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\pm\infty$, *dizemos que a sequência é divergente.*

Exemplo 2.10 *Vamos mostrar que* $x_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, *então* $x_n\to 0$.

Solução: *Queremos mostrar que* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ *ou equivalentemente, para todo* $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in$

$\mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Devemos ter,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Temos que para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ *tal que se*

$$\begin{aligned} & n & > & \; n_0 \\ \Rightarrow \quad & n & > & \; \frac{1}{\varepsilon} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{n} & < & \; \varepsilon \\ \Rightarrow \quad & \left|\frac{1}{n}\right| & < & \; \varepsilon \\ \Rightarrow \quad & \left|\frac{1}{n} - 0\right| & < & \; \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$, *tal que se* $n > n_0$ *então* $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Concluímos, desta forma, que $\frac{1}{n} \to 0$, *ou ainda,* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Teorema 2.1 (Unicidade do Limite) *O limite de uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é único.*

Suponhamos por absurdo que dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *temos:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad e \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq b$. *Sem perda de generalidade considere* $a < b$ *o que implica* $b - a > 0$. *Pela definição de limite, dado* $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então*

$$\begin{array}{ccccc} & & |x_n - a| & < & \varepsilon \\ -\varepsilon & < & |x_n - a| & < & \varepsilon \\ a - \varepsilon & < & x_n & < & \varepsilon + a \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccccc} & & |x_n - b| & < & \varepsilon \\ -\varepsilon & < & |x_n - b| & < & \varepsilon \\ b - \varepsilon & < & x_n & < & \varepsilon + b \end{array} \tag{5}$$

Observe que

$$\begin{aligned} a+\varepsilon &= a+\frac{b-a}{2}=\frac{2a+b-a}{2}=\frac{b+a}{2} \\ &e \\ b-\varepsilon &= b-\frac{b-a}{2}=\frac{2b-b+a}{2}=\frac{b+a}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

então de (5) e (6), temos:

$$x_n < a+\varepsilon = \frac{b+a}{2} = b-\varepsilon < x_n,$$

ou seja, $x_n < x_n$. Absurdo!

Portanto, $a=b$. Concluímos que o limite de uma sequência é único.

■

Teorema 2.2 *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a então toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para a.*

Demonstração: *Se $x_n \to a$ temos,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n>n_0 \text{ então } |x_n-a|<\varepsilon.$$

Se $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então basta tomar $n_k > n_0$ e teremos que para todo $\varepsilon>0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n>n_0$ então $|x_n-a|<\varepsilon$.

■

Observação 2.3 *Temos pela contrapositiva do teorema (2.2) que se existe uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que não converge para a então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para a, como exemplo, observe o exemplo (2.11)(FIGUEIREDO, 1975).*

Exemplo 2.11 *A sequência $(2,0,2,0,2,0,\cdots)$ cujo n-ésimo termo é $x_n = 1+(-1)^{n+1}$ é limitada mas não é convergente.*

Solução: *Temos que a sequência $(2,0,2,0,2,0,\cdots)$ é limitada, por exemplo, $|x_n|\leq 3$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Mas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente pois possui duas subsequências constantes, a saber*

$$x_{2n-1} = 2$$

e

$$x_{2n} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$x_{2n-1} \to 2 \quad e \quad x_{2n} \to 0$$

isto mostra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não converge.*

Teorema 2.3 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência convergente. Pela definição de limite, dado* $\varepsilon = 1$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *então*

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< 1 \\ \Rightarrow \quad -1 < \quad x_n - a &< 1 \\ \Rightarrow \quad a-1 < \quad x_n &< a+1, \end{aligned}$$

$\forall\, n > n_0$*. Denotando* $\alpha = min\ \{a-1, x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\}$ *e* $\beta = máx\ \{a+1, x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\}$*, temos*

$$\alpha \leq a-1 < x_n < a+1 \leq \beta.$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*

■

Observação 2.4

1. *A recíproca do teorema (2.3) é falsa, por exemplo, a sequência* $(0,1,0,1,\cdots)$ *é limitada mas não é convergente, porque possui duas subsequências que convergem para limites diferentes, a saber,* 0 *e* 1*(ÁVILA, 2004).*

2. *Basta verificar que uma sequência não é limitada para concluir que ela não converge.*

Exemplo 2.12 *A sequência* $(1,2,3,\cdots)$ *com* $x_n = n$ *não é convergente.*

Solução: *Temos que a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *não é convergente, pois ela não é ilimitada. Observe que dada* $n \in \mathbb{N}$ *temos que* $n+1 \in \mathbb{N}$*.*

Definição 2.9 *Um elemento b chama-se supremo de um conjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em K. Para que* $b \in K$ *seja supremo de um conjunto* $X \subset K$*, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;*

2. *Se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.*

   A condição 1 dis que b é cota superior de X, enquanto 2 afirma que qualquer cota superior de X deve ser maior ou igual a b.

   A condição 2 pode ser reformulada assim:

3. *Dado $c < b$ em K, existe $x \in X$ tal que $c < x$.*

A condição 3 diz que nenhum elemento de K, que seja inferior a b, pode ser cota superior de X.

Se dois elementos b e b' em K cumprem as condições 1 e 2 acima,deve-se ter $b \leq b'$ e $b' \leq b$, ou seja $b = b'$. Portanto, o supremo de conjunto, quando existe, é único. Escrevemos sup X para indicá-lo.

As condições que caracterizam o supremo podem, portanto, ser escritas assim:

1. $x \in X \Rightarrow x \leq supX;$

2. *$c \geq x$ para todo $x \in X \Rightarrow c \geq supX;$*

3. *Se $c <$ sup X então existe $x \in X$ tal que $c < x$.*

Observação 2.5 *Se $X = \{\}$ então todo $b \in K$ é cota superior de X. O conjunto vazio $\{\}$ não possui supremo em K.*

Definição 2.10 (Sequência Monótona) *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

i) *se $x_n \leq x_{n+1}$ dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não-decrescente.*

ii) *se $x_n \geq x_{n+1}$ dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.*

iii) *se $x_n < x_{n+1}$ dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.*

iv) *se $x_n > x_{n+1}$ dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.*

A proposição seguinte nos fornece um “critério de convegência”, nos permite concluir que uma sequência (x_n) converge, mesmo sem conhecermos, o seu limite.

Além de sua importância, tanto teórica como prática, o teorema abaixo teve um papel histórico relevante. Foi tentando prová-lo “de maneira puramente aritmética” que Dedekind(1858) verificou a impossibilidade de fazê-lo sem antes possuir uma teoria matemática satisfatória dos números reais. Isto o motivou a construir os números reais através dos “cortes ” que hoje tem seu nome (LIMA, 2009).

Teorema 2.4 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada não decrescente. Logo, o conjunto dos termos desta sequência*

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

é não vazio e limitado superiormente. Seja $a = \sup X$*. Disto segue que, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a.$$

Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não decrescente resulta que*

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$$

para todo $n > n_0$*. Então*

$$\begin{array}{rc} & a + \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ \Rightarrow & -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \\ \Rightarrow & |x_n - a| < \varepsilon. \end{array}$$

Portanto, $x_n \to a$*.*

■

Teorema 2.5 (Teorema de Bolzano Weierstrass) *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: *Basta mostrar que toda sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência monótona e daí como é limitada será convergente.*

Seja

$$D = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots\}$$

o conjunto dos índices n_k *tais* x_{n_k} *é destacado (O termo* x_n *é destacado quando* $x_n \geq x_p$ *para todo* $p > n$*).*

1. *Se D é infinito*

$$D = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots\}$$

então

- x_{n_1} *é destacado daí* $x_{n_1} \geq x_p, \forall p > n_1$

  Se $p = n_2$ *então* $x_{n_1} \geq x_{n_2}$.

- x_{n_2} *é destacado daí* $x_{n_2} \geq x_p, \forall p > n_2$

  Se $p = n_3$ *então* $x_{n_2} \geq x_{n_3}$.

- x_{n_3} *é destacado daí* $x_{n_3} \geq x_p, \forall p > n_3$

  Se $p = n_4$ *então* $x_{n_3} \geq x_{n_4}$.

procedendo desta forma, obtem-se

$$\cdots \leq x_{n_4} \leq x_{n_3} \leq x_{n_2} \leq x_{n_1}$$

uma sequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não crescente, ou seja,* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *monótona e portanto* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

2. *Se D é finito, temos*

   (a) $D = \{\ \}$

   Se $D = \{\ \}$ *temos que* x_1 *não é destacado (* x_n *é destacado se* $x_n \geq x_P\ \forall\ p > n$*, ou ainda,* x_n *não é destacado se* $x_p > x_n$ *para algum* $p > n$*) logo* $x_{n_1^*} > x_1$ *para* $n_1^* > n \in \mathbb{N}$ *onde* $x_{n_1^*}$ *não é destacado também, pois* $D = \{\ \}$.

   Como $x_{n_1^*}$ *não é destacado temos que* $x_{n_2^*} > x_{n_1^*}$ *para* $n_2^* > n_1^* \in \mathbb{N}$ *onde* $x_{n_2^*}$ *não é destacado também, pois* $D = \{\ \}$.

   Temos

$$x_1 < x_{n_1^*} < x_{n_2^*}$$

   Procedendo desta forma, obtém-se que existe uma subsequência $\left(x_{n_k^*}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *monótona crescente e como é limitada temos que* $\left(x_{n_k^*}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

   (b) $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$

   Se $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$ *temos que* $n_{k+1} \notin D$*, logo* $x_{n_{k+1}}$ *não é destacado, segue que* $x_{n_1^*} > x_{n_{k+1}^*}$ *para* $n_1^* > n_{k+1}$ *e* $x_{n_1^*}$ *não é destacado pois* $n_1^* \notin D$.

Como $x_{n_1^*}$ não é destacado segue que $x_{n_2^*} > x_{n_1^*}$ para $n_2^* > n_1^*$ e $x_{n_2^*}$ não é destacado pois $n_2^* \notin D$. Procedendo desta forma, obtém-se que existe uma subsequência $\left(x_{n_k^*}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monótona crescente,

$$x_{n_{k+1}} < x_{n_1}* < x_{n_2}* < \cdots$$

que é limitada portanto convergente.

Concluimos de (a) e (b) que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monótona. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, temos que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tambem é. Concluímos que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é monotona e limitada e portanto convergente.

$\blacksquare$

Exemplo 2.13 *Seja $0 < a < 1$. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a^n)_{n\in\mathbb{N}} = (a^1, a^2, a^3, \cdots)$ converge para 0, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.*

Solução: *Vamos provar que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|a^n - 0| < \varepsilon$.*

De fato, como $0 < a < 1$ temos $\dfrac{1}{a} > 1$, logo a sequência $\left(\left(\dfrac{1}{a}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente (veja exemplo 2.7), ou seja, dado $c \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n > c$.

Em particular, considere $c = \dfrac{1}{\varepsilon}$ com $\varepsilon > 0$. Temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a^n < \varepsilon$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|a^n - 0| < \varepsilon$.

Portanto

$$a^n \to 0,$$

para todo $0 < a < 1$.

2.2 LIMITES E DESIGUALDADES

Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma propriedade P para n suficientemente grande quando existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que P se verifica $\forall\, n > n_0$.

Teorema 2.6 *Seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Se $b < a$ então para n suficientemente grande tem-se $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$ então para todo n suficientemente grande tem-se $x_n < b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: *Como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, onde $b < a$. Dado $\varepsilon = a - b > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ tem-se*

$$
\begin{array}{rrcccl}
 & & & |x_n - a| & < & \varepsilon \\
\Rightarrow & -\varepsilon & < & x_n - a & < & \varepsilon \\
\Rightarrow & -(a-b) & < & x_n - a & < & (a-b) \\
\Rightarrow & a-a+b & < & x_n - a + a & < & a+a-b \\
\Rightarrow & b & < & x_n & < & 2a-b \\
\Rightarrow & & & b & < & x_n
\end{array}
$$

para todo $n > n_0$. Do mesmo modo, se $a < b$ tem-se $x_n < b$ para todo n suficientemente grande. Dado $\varepsilon = (b-a) > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ tem-se

$$
\begin{array}{rrcccl}
 & & & |x_n - a| & < & \varepsilon \\
\Rightarrow & -\varepsilon & < & x_n - a & < & \varepsilon \\
\Rightarrow & -(b-a) & < & x_n - a & < & b-a \\
\Rightarrow & -b+a & < & x_n - a & < & b-a \\
\Rightarrow & b+a+a & < & x_n - a + a & < & b-a+a \\
\Rightarrow & -b+2a & < & x_n & < & b
\end{array}
$$

Portanto,

$$x_n \;<\; b$$

para todo $n > n_0$.

■

Corolário 2.1 *Seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Se $0 < a$ então para n suficientemente grande tem-se $0 < x_n$. Analogamente, se $a < 0$ então para todo n suficientemente grande tem-se $x_n < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: *Seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, queremos mostrar que se $a > 0$ para todo n suficientemente grande, tem-se $x_n > 0$. Considerando $\varepsilon = a > 0$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$*

então

$$\begin{array}{rrcccl} & & & |x_n - a| & < & \varepsilon \\ \Rightarrow & -\varepsilon & < & x_n - a & < & \varepsilon \\ \Rightarrow & -a & < & x_n - a & < & a \\ \Rightarrow & a-a & < & x_n & < & a+a \\ \Rightarrow & 0 & < & x_n & < & 2a \\ \Rightarrow & & & x_n & > & 0 \end{array}$$

para todo $n > n_0$.

Do mesmo modo, se $a < 0$ *tem-se* $x_n < 0$ *para todo n suficientemente grande.*

■

Corolário 2.2 *Seja* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *e* $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. *Se* $x_n \leq y_n$ *para todo n suficientemente grande então* $a \leq b$. *Em particular, se* $x_n \leq b$ *para n suficientemente grande então* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$.

Demonstração: *Vamos fazer a demonstração, pela contrapositiva, ou seja, se* $a > b$ *então* $x_n > y_n$ *para n suficientemente grande, onde* $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *e* $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Como $a > b$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *temos que, dado* $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$ *existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_1$ *então* $|y_n - b| < \varepsilon$, *ou seja,*

$$\begin{array}{rrcccl} \Rightarrow & -\varepsilon & < & y_n - b & < & \varepsilon \\ \Rightarrow & b-\varepsilon & < & y_n & < & b+\varepsilon \\ \Rightarrow & b-\left(\dfrac{a-b}{2}\right) & < & y_n & < & b+\dfrac{a-b}{2} \\ \Rightarrow & \dfrac{2b-a+b}{2} & < & y_n & < & \dfrac{2b+a-b}{2} \\ \Rightarrow & \dfrac{3b-a}{2} & < & y_n & < & \dfrac{b+a}{2} \end{array}$$

Também, como $x_n \to a$ *temos que dado* $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$, *existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_2$ *então* $|x_n - a| < \varepsilon$, *ou seja,*

$$\begin{array}{rrcccl} \Rightarrow & -\varepsilon & < & x_n - a & < & \varepsilon \\ \Rightarrow & a-\varepsilon & < & x_n & < & a+\varepsilon \\ \Rightarrow & a-\left(\dfrac{a-b}{2}\right) & < & x_n & < & a+\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \\ \Rightarrow & \dfrac{2a-a+b}{2} & < & x_n & < & \dfrac{2a+a-b}{2} \\ \Rightarrow & \dfrac{a+b}{2} & < & x_n & < & \dfrac{3a-b}{2} \end{array}$$

Seja $n_0 = \text{ máx } \{n_1, n_2\}$. *Logo*

$$\frac{3b-a}{2} < y_n < \frac{b+a}{2} < x_n < \frac{3a-b}{2},$$

$\forall\, n > n_0$. *Isto é,*

$$y_n < x_n$$

para todo $n > n_0$.

Em particular, para mostrarmos que se $x_n \leq b$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$, *basta considerarmos* $y_n = b$ *para todo* $n > n_0$. *Como* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n > n_0$, *teremos* $x_n \leq b$ *e*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &\leq \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} b \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n &\leq b \\ \Rightarrow a &\leq b. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.7 (Teorema do Sanduíche) *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *e* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para n suficientemente grande, então* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Demonstração: *Dado* $\varepsilon > 0$, *existem* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tais que*

- *Se* $n > n_1$ *então*

$$\begin{array}{rcccl} & & |x_n - a| & < & \varepsilon \\ \Rightarrow & -\varepsilon & < & x_n - a & < \varepsilon \\ \Rightarrow & a-\varepsilon & < & x_n & < a+\varepsilon. \end{array}$$

- *Se* $n > n_2$ *então*

$$\begin{array}{rcccl} & & |y_n - a| & < & \varepsilon \\ \Rightarrow & -\varepsilon & < & y_n - a & < \varepsilon \\ \Rightarrow & a-\varepsilon & < & y_n & < a+\varepsilon. \end{array}$$

Seja $n_0 = \text{máx } \{n_1, n_2\}$ *logo,*

$$\begin{array}{rcccl} & a-\varepsilon < x_n & \leq & z_n & \leq y_n < a+\varepsilon \\ \Rightarrow & a-\varepsilon & < & z_n & < a+\varepsilon \\ \Rightarrow & & & |z_n - a| & < \varepsilon. \end{array}$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

■

2.3 OPERAÇÕES COM LIMITES

Teorema 2.8 *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada (convergente ou não) então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0.$$

Demonstração: *Como* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada temos que existe* $k \in \mathbb{R}_+$ *tal que*

$$|y_n| \leq k, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $x_n \to 0$ *temos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$*, ou seja, para todo* $\dfrac{\varepsilon}{c} > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $|x_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{c}$.

Daí, se $n > n_0$

$$|x_n y_n| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{c}.c = \varepsilon$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$*. Portanto,*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$$

∎

Exemplo 2.14 *A sequência* $\left(\dfrac{\sin\ n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ *quando n tende a infinito.*

Solução: *Como*

$$|\sin n| \leq 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

é limitada e

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

esta converge para zero, quando n tende ao infinito. Temos que

$$\frac{1}{n}\sin n = \frac{\sin n}{n} \to 0.$$

quando n tende ao infinito.

Teorema 2.9 *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$*, então:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b;$

2. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$

3. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *se* $b \neq 0.$

Demonstração:

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b;$

   Temos $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *ou ainda, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_1$ *então* $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, *ou ainda, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_2$ *então* $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ *temos que para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0$ *se então*

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a+b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

   ou seja, $\lim_{n\to\infty} |(x_n + y_n) - (a+b)| = 0$, *ou ainda,* $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = a + b$

   Também

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (a-b)| &= |(x_n - a) - (y_n + b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

   ou seja, $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b.$

2. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$

   Vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) - a \cdot b = 0$. *Notemos que*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}[(x_n.y_n) - (a.b)] &= \lim_{n\to\infty}[x_n.y_n - x_n b + x_n b - ab] \\ &= \lim_{n\to\infty}[x_n(y_n - b) + b(x_n - a)] \\ &= \lim_{n\to\infty} x_n(y_n - b) + \lim_{n\to\infty} b(x_n - a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$*.*
Vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right] = 0.$$

Temos

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{bx_n - ay_n}{y_n b}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{y_n b}\right)(bx_n - ay_n)\right].$$

Basta mostrarmos que $\left(\frac{1}{y_n b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*
Temos que

$$\lim_{n\to\infty} (y_n.b) = \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b\right) = b.b = b^2,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} (y_n.b) = b^2.$$

Escolhendo $0 < c < b^2$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a = \lim_{n\to\infty} x_n$*.*

$$\begin{array}{rcl} c & < & y_n b \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{c} & > & \frac{1}{y_n b} \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{y_n b} & > & \frac{1}{c}, \end{array}$$

para todo $n > n_0$*. Como*

$$\lim_{n\to\infty} (y_n.b) = b^2$$

onde $b^2 > 0$*, temos para* $n > n_0$

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & y_n.b \\ \Rightarrow \quad 0 & < & \frac{1}{y_n b}. \end{array}$$

Segue que

$$0 < \frac{1}{y_n b} < \frac{1}{c},$$

para $n > n_0$*.*

∎

Teorema 2.10 *Se $x_n > 0$ para $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Demonstração: *Tomemos $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < 1$, onde.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a.$$

Temos que

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < c,$$

para n suficientemente grande. Então

$$\begin{array}{rrclcl} & 0.x_n & < & x_{n+1} & < & c.x_n \\ \Rightarrow & 0.x_n & < & x_{n+1} & < & c.x_n < x_n \\ \Rightarrow & 0.x_n & < & x_{n+1} & < & x_n, \end{array}$$

para n suficientemente grande. Segue que (x_n) é decrescente e limitada inferiormente por zero para n suficientemente grande, ou seja, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e limitada, portanto convergente.

Seja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b,$$

então $b \geq 0$, pois $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como

$$\begin{array}{rrcl} & x_n + 1 & < & cx_n \\ \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} cx_n \\ \Rightarrow & b & \leq & cb \\ \Rightarrow & b - cb & \leq & 0 \\ \Rightarrow & b(1-c) & \leq & 0 \\ \Rightarrow & b & = & 0. \end{array}$$

Portanto, $x_n \to 0$.

■

Exemplo 2.15 *Se $k \in \mathbb{N}$ e $a > 1$, temos que:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$;

Demonstração:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$;

   Sendo $x_n = \dfrac{n^k}{a^n} > 0$ *e* $x_{n+1} = \dfrac{(n+1)^k}{a^{n+1}}$, *temos*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\dfrac{n^k}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k a^n}{a^{n+1} n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \frac{1}{a} \\
&= \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \frac{1}{a} < 1,
\end{aligned}$$

   então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$;

   Temos $x_n = \dfrac{a^n}{n!} > 0$ *pois* $a > 1$. *Daí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n.a.n!}{(n+1)n!a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

   Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = 0.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Temos que $x_n = \dfrac{n!}{n^n} > 0$. *Daí,*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e} < 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$.

Exemplo 2.16 *Se* $|a| < 1$ *temos que*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$$

onde $S_n = 1 + a + \ldots + a^n$.

Solução:

Temos

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + a + \ldots + a^{n-1} + a^n \\
aS_n &= a + a^2 + \ldots + a^n + a^{n+1} \\
S_n(1-a) &= 1 - a^{n+1} \\
S_n &= \frac{1-a^{n+1}}{(1-a)}.
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ *e* $|a| < 1$.

Afirmação 1: *Se* $0 < a < 1$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-a}$.

Se $0 < a < 1$ *temos pelo exemplo (2.13) que* $a^n \to 0$ *logo*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{(1-a)} = \frac{1}{1-a}$$

desde que $0 < a < 1$.

Afirmação 2: *Se* $-1 < a < 0$ *então* $a^n \to 0$.

De fato, se $-1 < a < 0$ *temos que* $0 < |a| < 1$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0,$$

logo, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $||a|^n - a| < \varepsilon$, *ou seja,*

$$\begin{array}{rcl} ||a|^n| & < & \varepsilon \\ \Rightarrow \quad |a^n| & < & \varepsilon \\ \Rightarrow \quad |a^n - 0| & < & \varepsilon, \end{array}$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Afirmação 3: *Se* $-1 < a < 0$ *então* $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-a}$.

De fato,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{(1-a)} = \frac{1}{1-a},$$

desde que $-1 < a < 0$.

Afirmação 4: *Se* $a = 0$ *então* $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-a}$.

De fato, se $a = 0$ *temos* $S_n = 1$ *e portanto*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = \frac{1}{1-0} = \frac{1}{1-a}.$$

Concluímos que,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a},$$

desde que, $|a| < 1$.

Exemplo 2.17 *A sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *onde*

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

é convergente.

Solução: *Vamos mostrar que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente e limitada.*

Afirmação 1: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é crescente.*

De fato,

$$a_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!} = a_{n+1}$$

então

$$a_n < a_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação 2: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*

Temos

$$2 \leq a_n$$

para todo $n \geq 1$. *E como,*

$$\begin{array}{rcl} n! & = & 1.2.3.\cdots.(n-1).n \geq 1.2.2.\cdots.2.2 = 2^{n-1} \\ \Rightarrow\ n! & \geq & 2^{n-1} \\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{n!} & \leq & \dfrac{1}{2^{n-1}} \ \ \forall n \geq 1 \end{array}$$

Como

$$\begin{array}{rcl} 2 & \leq & a_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ \Rightarrow\ 2 & \leq & a_n \leq 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n} \\ \Rightarrow\ 2 & \leq & a_n < 1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 1+2 = 3 \\ \Rightarrow\ 2 & \leq & a_n < 3, \end{array}$$

para todo $n \geq 1$, *logo* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é monótona e limitada, temos que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente.*

Define-se o número e como sendo o limite da sequência

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e.$$

O número e é uma das constantes mais importantes da Análise Matemática. Como vimos, tem-se $2 \leq e < 3$. Na realidade, o valor de e com apenas quatro casas decimais é $e = 2,7182$.(O número e é uma dízima infinita e não periódica).

2.4 LIMITES INFINITOS

Entre as sequências divergentes, destacaremos um tipo que se comporta com certa regularidade, a saber, aquelas cujos valores se tornam e mantêm arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente(LIMA, 2008).

Definição 2.11 *Dizemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *se* $\forall\, A > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n > A$.

Exemplo 2.18 *Prove que* $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$.

Solução: *Vamos mostrar que* $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$, *ou seja, para todo* $A > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $2^n > A$.

Queremos que,

$$\begin{aligned} 2^n > A \Rightarrow \quad log2^n &> \log A \\ \Rightarrow \quad n\log 2 &> \log A \\ \Rightarrow \quad n &> \frac{\log A}{\log 2}. \end{aligned}$$

logo $\forall\, A > 0$, *existe* $n_0 > \dfrac{log\ A}{log\ 2} \in \mathbb{N}$, *tal que se* $n > n_0$ *então,*

$$\begin{aligned} n > n_0 &> \frac{\log A}{\log 2} \\ \Rightarrow \quad n &> \frac{\log A}{\log 2} \\ \Rightarrow \quad n\log 2 &> \log A \\ \Rightarrow \quad \log 2^n &> \log A \\ \Rightarrow \quad 2^n &> A \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. *Isto mostra que* $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$.

Definição 2.12 *Dizemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *se* $\forall\, A > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n < -A$.

Exemplo 2.19 *Mostre que* $\lim\limits_{n\to+\infty} -3^n = -\infty$.

Solução: *Vamos mostrar que* $\lim\limits_{n\to\infty} -3^n = -\infty$, *ou ainda, para todo* $A > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $-3^n < -A$.

$$\begin{aligned} -3^n &< -A \\ \Rightarrow \quad 3^n &> A \\ \Rightarrow \quad \log 3^n &> \log A \\ \Rightarrow \quad n\log 3 &> \log A \\ \Rightarrow \quad n &> \frac{\log A}{\log 3} \end{aligned}$$

logo $\forall\, A > 0$ *existe* $n_0 > \dfrac{log\ A}{log\ 3} \in \mathbb{N}$, *tal que se* $n > n_0$, *então*

$$\begin{aligned} n > n_0 &> \frac{log\ A}{log\ 3} \\ \Rightarrow \quad n &> \frac{log\ A}{log\ 3} \\ \Rightarrow \quad n\log 3 &> \log A \\ \Rightarrow \quad \log 3^n &> \log A \\ \Rightarrow \quad 3^n &> A \\ \Rightarrow \quad -3^n &< -A. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\lim\limits_{n\to\infty} -3^n = -A$.

Observação 2.6 *1. Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ *as sequências* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não convergem;*

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -\infty$;

3. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *então a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é limitada superiormente. A recíproca é falsa, ou seja, se a sequência não é limitada (é ilimitada) superiormente então não necessariamente* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = +\infty$. *Basta observar a sequência*

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (n + (-1)^n \cdot n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, 16, 0, \cdots), \end{aligned}$$

que é ilimitada superiormente porém $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \neq +\infty$, *pois*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} &= \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \\ &e \\ \lim_{n\to\infty} x_{2n} &= +\infty. \end{aligned}$$

4. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é não-decrescente e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é ilimitada superiormente temos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$

$+\infty$. *Como exemplo basta observar o exemplo (2.7).*

Teorema 2.11 1. *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada inferiormente então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty.$$

2. *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty.$$

3. *Se* $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ *então*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

4. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada e* $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *então*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Demonstração:

1. *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada inferiormente então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty.$$

Temos por hipótese que:

(a) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada inferiormente. Logo existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_n \geq c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n) = +\infty$, *ou ainda, para todo* $A > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n > A - c$.

Segue que, se $n > n_0$ *então*

$$\begin{aligned} x_n + y_n &> A - c + c = A \\ \Rightarrow \quad x_n + y_n &> A, \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. *Logo, para todo* $A > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n + y_n > A$.

2. *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty.$$

Temos por hipótese que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = +\infty$*, ou seja, para todo* $A > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n > \frac{A}{c}$*. Como* $y_n > c$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, temos que se* $n > n_0$

$$\begin{aligned} x_n y_n &> \frac{A}{c}c = A \\ &\Rightarrow x_n \cdot y_n > A. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $A > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $x_n y_n > A$*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = A.$$

3. *Se* $x_n > c > 0$*,* $y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

Temos por hipótese $\lim_{n\to\infty}(y_n) = 0$*, ou ainda, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $|y_n - 0| < \varepsilon$*.*

Logo dado $\varepsilon = \frac{c}{A}$ *onde* $A > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então*

$$|y_n - 0| < \frac{c}{A}$$

onde $y_n > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$*. Então,*

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_n &< \frac{c}{A} \\ \Rightarrow \frac{1}{y_n} &> \frac{A}{c}. \end{aligned}$$

e como

$$x_n > c \;, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Temos

$$\begin{aligned} x_n \cdot \frac{1}{y_n} &> \frac{A}{c} \cdot c \\ \Rightarrow x_n \cdot \frac{1}{y_n} &> A. \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$*. Portanto,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

4. *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada e* $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Temos por hipótese que $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$*, ou seja, para todo* $A > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então* $y_n > A$*. Logo, dado* $A = \dfrac{c}{\varepsilon} > 0$ *onde* $c > 0$ *e* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > n_0$ *então*

$$y_n > \frac{c}{\varepsilon}$$

então

$$\frac{1}{y_n} > \frac{\varepsilon}{c},$$

para todo $n > n_0$*. E como* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada temos que existe* $c > 0$ *tal que*

$$|x_n| \leq c$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*. Logo, se* $n > n_0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n}\right| &= \frac{|x_n|}{|y_n|} = |x_n| \cdot \frac{1}{|y_n|} = |x_n| \cdot \frac{1}{y_n}\\ &= |x_n| \cdot \frac{1}{y_n} < c \cdot \frac{1}{y_n} = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon\end{aligned}$$

o que implica, $\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right| < \varepsilon$*. Portanto, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, se* $n > n_0$ *então* $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - 0\right| < \varepsilon$*.*

Observação 2.7 1. *As hipóteses feitas nas diversas partes do teorema anterior tem por objetivo evitar algumas das chamadas "expressões indeterminadas", tais como:*

(a) $+\infty - \infty$*;*

(b) $0 \cdot (+\infty)$*;*

(c) $\dfrac{0}{0}$ *e* $\dfrac{\infty}{\infty}$*;*

(d) ∞^0*;*

(e) 1^∞*;*

(f) 0^0*.*

2. *Os limites mais importantes da Análise quase sempre se apresentam sob forma de uma expressão indeterminada.*

3 CONCLUSÃO

Ao descrevermos a teoria de sequência de números reais, percebemos a “beleza” matemática que se encontra entre as linhas. Ao fazermos as demonstrações passo-a-passo percebemos um grande avanço no entendimento do conteúdo. Ao explicarmos os exemplosn detalhadamente concluímos que estamos disponibilizando um material de fácil acesso aos futuros leitores.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Metemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise I**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1975.

LIMA, E. L. **Análise real volume 1 Funções de uma variável**. 10. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

LIMA, E. L. **Curso de Análise vol 1**. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

ÁVILA, G. **Cáculo das Funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2004.