UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLICIA GEOVANA ALVES PEREIRA

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

**CAMPO MOURÃO**

**2011**

CLICIA GEOVANA ALVES PEREIRA

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Adilandri Mércio Lobeiro

CAMPO MOURÃO

2011

**TERMO DE APROVAÇÃO**

Clicia Geovana Alves Pereira

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Adilandri Mércio Lobeiro

Prof. PhD. Juan Amadeo Soriano Palomino

Prof. Msc. Viviane Colucci

Campo Mourão, 2011

Em memória do meu avô Serafim.

**AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças pra chegar aqui hoje. Aos meus pais, principalmente a minha mãe, que sempre compreendeu minha ausência por precisar estudar. Ao meu gerente Luiz, por sua compreensão em me conceder férias para que pudesse concluir este trabalho. Meu agradecimento especial ao meu orientador, professor Adilandri, por sua imensa paciência com minhas dificuldades, minha eterna admiração por sua dedicação a Matemática e a seus alunos.

Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, o que outra estabeleceu a outra desfaz, somente na Matemática é que cada geração constrói uma novo andar sobre a antiga estrutura.

(Hermann Hankel)

**RESUMO**

PEREIRA, Clicia G A . Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. 76 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Neste trabalho, resolvemos alguns tipos de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem que são classificadas de acordo com *software Maple 12.* Tornamos os métodos de solução mais acessíveis, escrevendo um texto com abordagem algébrica bem detalhada. Verificamos também, que o método empregado para resolver uma equação pode não valer para as demais, pelo fato destas equações terem sido estudadas por diversos matemáticos de forma independente e em épocas distintas. Ao término de cada tipo de equação, procuramos ilustrar por meio de um exemplo o método de solução empregado e a correspondente classificação via *software.*



**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Ordinárias, *Maple 12*, Classificação

## ABSTRACT

PEREIRA, Clicia G A . Odinary Differential Equations. 76 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

In this paper, we solve some types of ordinary differential equations of first order which are classified according to Maple 12 software. We make the solution more accessible methods, writing a text with very detailed algebraic approach. We also note that the method used to solve an equation may not hold for the others, because these equations have been studied by several mathematicians independently and at different times. At the end of each type of equation, we illustrate through an example the method of solution used by software and the corresponding classification.



**Keywords:** Ordinary Differential Equations, Maple 12, Classification.

**LISTA DE FIGURAS**

## LISTA DE SIGLAS

| | |
|---|---|
| ED | Equações Diferenciais |
| EDO | Equações Diferenciais Ordinárias |
| EDP | Equações Diferenciais Parciais |

## SUMÁRIO

# 1 BREVE HISTORIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Faremos agora um resumo dos principais acontecimentos que levaram a "criação" das Equações Diferenciais. Não será possível citar todos os matemáticos que contribuíram para a teoria das Equações Diferenciais, pois são muitos, o que tornaria o texto extenso. Nosso intuito é fornecer uma visão geral a respeito dos motivos que levaram esses matemáticos a se debruçarem sobre estas equações, por isso procuramos respeitar ao máximo a ordem cronológica das descobertas Matemáticas, e os nomes mais conhecidos dessa trajetória que nos trouxeram até as equações diferenciais abordadas nesse trabalho.

As equações diferenciais surgiram da necessidades de dominar a mais antiga das ciências físicas, a mecânica. Os escritos mais antigos registrados a respeito da mecânica, são de Arquimedes (287-212 a.c), referentes ao princípio da alavanca e o princípio do impulso, um exemplo de aplicação desses princípios é a catapulta, arma de guerra usada nesse período. Os problemas de mecânica apresentavam conexão com os corpos sólidos, sendo seus conceitos utilizados na construção de edifícios, são eles: principio da estática, trata de como um peso reage sobre outro quando ambos estão em repouso, e a distribuição de esforços, esta mecânica é chamada de *mecânica do repouso* (HOGBEN, 2000).

Copérnico (1473-1543), com seu sistema heliocêntrico, introduziu a base de uma nova ciência, a *mecânica celeste* . O interesse por esses estudos levou Johann Kepler[1] a tentar explicar os fenômenos da astronomia de forma racional, seus trabalhos envolviam longos cálculos, bem como considerações infinitesimais. Em uma de suas publicações, *Nova stereometria doliorum vinarioum* (Nova astronomia dos barris de vinho,1615), calculou volumes de sólidos obtidos por rotação de segmentos de secções cônicas em volta de um eixo no seu plano, rompendo com o rigor arquimediano,o circulo compunha-se de uma infinidade de triângulos com o vértice no centro, analogamente, a esfera consistia numa infinidade de pirâmides.

Foi então que Galileu (1564-1642) trouxe o primeiro problema dinâmico, que refere-se aos experimentos sobre a lei da queda dos corpos, demonstrando que dois corpos maciços e relati-

[1]Usando esses cálculos e observações, Kepler provou que as órbitas planetárias são elípticas e não circulares como se supunha na ápoca.

vamente pesados, com diversas dimensões e densidade, tombam simultaneamente sobre a terra, aumentando de velocidade na mesma gradação, se abandonados de um mesmo ponto do espaço; também demonstrou o princípio do isocronismo das oscilações pendulares. Huyghens (1629-1695), o primeiro a adotar o pêndulo ao relógio, estudou a colisão da lei dos corpos elásticos e o princípio do movimento centrífugo por ele empregado para marcarem corretamente tempo em diferentes latitudes[2] . Comparando com qualquer um dos que o precederam, o século posterior as grandes navegações (XVI) se caracteriza por uma verdadeira obsessão com os grandes problemas de movimento.

Logo que os matemáticos começaram a se interessar por esses problema, viram-se penosamente desapoiados pela álgebra comum, cujos princípios se derivam da geometria clássica. No entanto, já no inicio do século XVII foram descobertos os logaritimos e introduzida a chamada Geometria da Reforma[3] , começaram então a imaginar um novo instrumento de cálculo baseado nessa nova geometria, esta nova álgebra é conhecida pelo nome de *cálculo infinitesimal.*

Não podemos deixar de lembrar que a integração antecede a diferenciação, por praticamente dois mil anos. Em antigo método grego de exaustão e as medidas infitesimais de Arquimedes, representam processos antigos de somas integrais, no entanto, foi apenas no século XVII que Fermat, encontrou as tangentes e os pontos críticos por métodos equivalentes a determinação dos quocientes incrementais. Fermat, em 1629 utilizou as ideias de Kepler sobre o fato de que os incrementos das funções tornam-se infinitesimais nas vizinhanças de um ponto de máximos e mínimos comum, transformando esse fato num processo para determinar esses pontos de máximos e mínimos, por esse motivo podemos dizer que diferenciação se originou de problemas relativos a traçados de tangentes a curvas e de questões objetivando o obtenção de máximos e mínimos. O método de Fermat será considerado aqui em poucas linhas. Se $f(x)$ tem uma máximo ou mínimo comum em $x$ e se $e$ é muito pequeno, então o valor de $f(x-e)$ é quase igual ao de $f(x)$. Portanto, pode se experimentar fazer $f(x-e) = f(x)$, para tornar a igualdade correta, impor que $e$ assuma o valor de zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de $x$ para os quais $f(x)$ assume um valor de um máximo ou mínimo.

Usamos a notação moderna para facilitar a compreensão do leitor, no entanto, Fermat não utilizava esta notação e sim a notação de Viète em que as consoantes maiúsculas representavam constantes e as vogais maiúsculas as variáveis, ilustraremos o procedimento esboçado segundo o primeiro exemplo de Fermat: dividir uma quantidade em duas partes tais que seu produto seja

[2]A forca centrífuga exercida pela terra é diversa em latitudes diferentes, daí os pêndulos não oscilam do mesmo modo no Equador e nos polos.

[3]Refere-se ao que conhecemos hoje como geometria analítica, cuja primeira publicação se deve a Descartes, em *La Géométrie(1637).*

o máximo. Seguindo sua notação, seja $B$ a quantidade dada e denotemos as partes procuradas por $A$ e $B-A$. Formando

$$(A-E)[B-(A-E)],$$

igualando esse produto a

$$A(B-A)$$

obtemos

$$A(B-A)=(A-E)(B-A+E),$$

ou

$$2AE-BE-E^2=0$$

dividindo por $E$ chegamos a

$$2A-B-E=0.$$

Fazendo então $E=0$, conclui-se que $2A=B$, estabelecendo-se assim a divisão desejada.

Embora a lógica do processo de Fermat deixe muito a desejar, vê-se um método equivalente a impor

$$\lim_{b\to 0} a=\frac{f(x+b)-f(x)}{b},$$

isto é, impor que a derivada de $f(x)$ em $x$ seja nula, método ate hoje utilizado em textos elementares de cálculo para encontrar máximos e mínimos de uma função. Fermat, porém, ignorava que a condição de a derivada de $f(x)$ se anular não é suficiente para se ter um máximo ou mínimo comum, mas apenas necessária. O método também não distinguia entre valor máximo e valor mínimo. (EVES, 2004). Fermat também descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva, cuja equação cartesiana é dada. Sua ideia consistia em achar a subtangente relativa a esse ponto, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção no ponto de tangência sobre o eixo $x$ e a intersecção da tangente com esse eixo. A ideia de tangente usada pelo método é a posição limite de uma secante quando dois pontos de interseção com a curva tendem coincidir. Vejamos, em notação moderna, o que consiste o método. Seja $f(x,y)=0$ a equação da curva $(1)$ e procuremos a subtangente $a$ relativa a $(x,y)$. Por semelhança de triângulos, facilmente se estabelece que as coordenadas de um ponto da tangente, próximo ao ponto de tangência, são $\left[x+e,y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right]$. Tratando esse ponto como se ele fosse uma curva, obtêm-se

$$f\left[x+e,y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right]=0$$

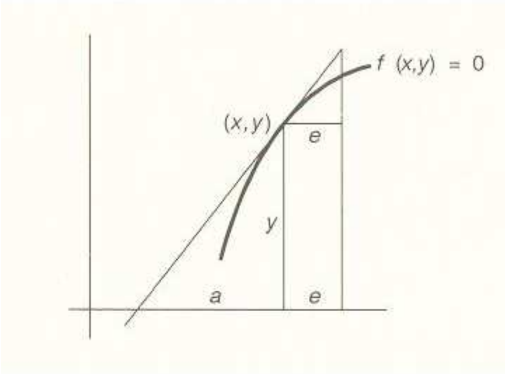


**Figura 1: Representação da curva**

E para essa igualdade ser considerada correta, faz-se com que $e$ assuma o valor zero. Determina-se então, a partir da equação resultante, a subtangente de a em função das coordenadas $x$ e $y$ do ponto de tangência, isso equivale a fazer hoje

$$a = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Até esse momento ainda não havia a ideia de equação diferencial, foi então que Isaac Barrow, professor de Isaac Newton, publicou *Lectinones aplicae et geometricae*, livro que já trazia as contribuições de seu aluno Newton a cerca de óptica. Nesse livro ele descreve com uma abordagem muito próxima do processo de moderno de diferenciação, mediante o uso do chamado triangulo diferencial. Suponhamos que se pretenda obter a tangente à curva da figura* no ponto $P$. Seja $Q$ um ponto da curva vizinho de $P$. Entao os triângulos $PTM$ e $PQR$ são praticamente semelhantes entre si e , argumentava Barrow, considerando o triângulo menor infinitamente pequeno, vale a relação

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}.$$

Façamos $QR = e$ e $RP = a$. Então se as coordenadas de $P$ são $x$ e $y$, as de $Q$ são $x-e$ e $y-a$. Substituindo esses valores na equação da curva e desprezando os quadrados das potências superiores tanto de $e$ como de $a$, encontramos a razão $\frac{a}{e}$. Temos estão

$$OT = OM - TM = OM - MP\left(\frac{QR}{RP}\right) = x - y\left(\frac{e}{a}\right),$$

e a tangente esta determinada.Vejamos um exemplo onde Barrow aplicou seu método a uma particular *curva de Lamé* que é dada por $x^3 + y^3 = r^3$. Neste caso

$$(x-e)^3 + (y-a)^3 = r^3,$$

ou

$$x^2 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = r^3.$$

Desprezando os quadrados e as potências superiores de $a$ e $e$ e usando o fato de $x^3 + y^3 = r^3$, obtém-se

$$3x^2e + 3y^2a = 0,$$

do que resulta

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$$

A razão $\frac{a}{e}$, obviamente, nosso moderno $\frac{dy}{dx}$ e o questionável procedimento de Barrow torna-se rigoroso com o uso da teoria dos limites (EVES, 2004).

Apesar de alguns indícios que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Como já podemos perceber, o desenvolvimento do cálculo e as Equações Diferenciais andaram lado a lado. Outro aspecto importante a ser observado é o fato de que não foi apenas um matemático que descreveu todo sua teoria, mas sim uma sucessão dos estudos e muitos anos de conhecimento matemático acumulado.

Nesta altura o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral já havia feito muitos avanços, haviam calculado cubaturas, quadraturas, integrações, já aflorara um processo de diferenciação e muitas tangentes a curvas já haviam sido construídas, no entanto faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras formais e também um desenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi a primeira dessas duas coisas, ou seja, a criação de um cálculo manipulável e proveitoso, que Newtom e Leibniz, trabalharam independentemente e deram suas contribuições. Por esses motivos, embora Newtom e Leibniz tenham tido muitos precursores, a criação do cálculo é geralmente atribuída a eles.

Falaremos primeiramente de Isaac Newton, suas contribuições a Física e a Matemática são tão numerosas que seria ímpossível descreve-las aqui, vamos nos ater ao *método dos fluxos*, que hoje chamamos equações diferenciais, a descoberta desse método foi comunicado ao seu professor Barrow em 1669, embora seu *Method of Fluxions* tenha sido escrito em 1671, só foi publicado em 1736. Para Newton, neste trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínua de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de *fluente*(uma quantidade que flui) e à taxa de variação dava o nome de *fluxo* do fluente. Se um fluente, como a ordenada de um ponto gerador, era indicada por $y$, então o fluxo desse fluente era denotado por $y^{\cdot}$[4]($y$ acentuado como um i). A taxa de crescimento constante de alguma fluente, ele chamava de *fluxo principal*, podendo o fluxo de qualquer fluente ser comparada a esse fluxo principal. Newton indicava o fluxo de qualquer $y^{\cdot}$ por $y^{\cdot\cdot}$ ($y$ acentuado com dois pontos) e assim por diante. Por outro lado denotava o fluente de $y$ pelo próprio $y$ no interior de um pequeno quadrado. Newton introduziu também um outro conceito, chamado por ele de *momento* de um fluente, trata-se do incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente como $x$, por exemplo, num intervalo de tempo infinitamente pequeno $o$. Assim, o momento do fluente $x$ é dado por $x_o$ , Newton salientou que podemos, em qualquer problema, desprezar os termos que aparecem multiplicados por potências de $o$ iguais ou maiores que dois (método de Barrow) e assim obter uma equação envolvendo as coordenadas $x$ e $y$ do ponto gerador da curva e seus fluxos $x$ e $y$. Como exemplo consideremos a curva cúbica $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = o$. Substituindo $x$ por $x + x_o$ e $y$ por $y + y_o$, obtemos

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2(\dot{x_o}) + 3x(\dot{x_o})^2 + (\dot{x_o})^3 - ax^2 - 2ax(\dot{x_o}) & \\ -a(\dot{x_o})^2 + axy + ay(\dot{x_o}) + a(\dot{x_o})(\dot{y_o}) + ax(\dot{y_o}) & \\ -y^3 - 3y^2(\dot{y_o}) - 3y(\dot{y_o})^2 + (\dot{y_o})^3 & = 0 \end{aligned}$$

Usando agora o fato de que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = o$, desprezando os termos em que o $o$ figura como expoente igual ou maior que dois, e então dividindo por $o$ chegamos a

$$3x^2\dot{x_o} - 2ax\dot{x_o} + ay\dot{y_o} - 3y^2\dot{y_o} = 0.$$

Newton considerou dois tipos de problema. No primeiro, dada uma relação ligando alguns fluentes, pretende-se estabelecer alguma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, como no exemplo anterior, isso é equivalente, como é claro, à diferenciação. No segundo, dada uma relação entre alguns fluentes e fluxos, pretende-se achar uma relação envolvendo apenas os fluentes. Trata-se do problema inverso, que equivale a resolver uma equação diferencial. A ideia de desprezar termos em que $o$ aparece com expoente igual ou superior a 2 foi justificada mais tarde por Newton através de ideias primitivas sobre limites.

[4]Em notação moderna esse fluxo equivale a $\frac{dy}{dt}$, onde $t$ representa o tempo.

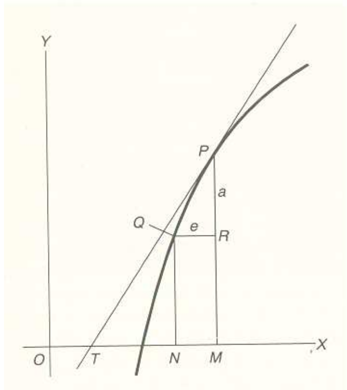


**Figura 2: Método de Barrow.**

Apesar das ideias de Newton sobre o cálculo, e consequentemente as equações diferenciais ja existirem em 1669, ele não publicou suas descobertas imediatamente. O cálculo apareceu impresso, pela primeira vez, com um artigo de seis páginas De Leibniz (1646-1716) em uma *Acta Eruditorium* de 1684, um espécie de periódico matemático da época, que continha a definição de diferencial $y$, onde estavam pequenas regras para seu cálculo em somas, produtos, quocientes, potências e raízes. Também incluía pequenas aplicações e problemas de tangentes e pontos críticos. Isso gerou um grande polêmica entre Newton e Leibniz, pois cada um requeria para si a "invenção" do cálculo.

Naturalmente, no início a atenção se concentrava em diferentes equações de primeira ordem. Sua solução se buscava em formas de funções algébricas ou transcendentais elementares. Para reduzir esse problema a operação de busca de funções primitivas, os criadores da análise e seus discípulos, tendiam em cada equação em separar suas variáveis. Este método muito utilizado ainda hoje,inclusive consta neste trabalho, e historicamente é o primeiro.

Em primeiro lugar, assinalamos que o termo "equação diferencial", foi primeiramente empregado do Leibniz em 1676 para indicar a relação entre as diferenciais $dx$ e $dy$ das variáveis $x$ e $y$, concepção que se conservou até os tempos de Euler (1768-1770). Assim mesmo, é importante destacar que as Equações Diferenciais Ordinárias surgiram praticamente junto com o cálculo, na célebre polêmica Newton-Leibniz que tem seu grande momento quando Newton comunica por meio Oldenberg o seguinte anagrama

$$6accdae13eff7iel9n4049rr4s9t12vx,$$

que quer dizer:"Dada uma equação com quantidades derivadas, determinar suas funções,e vice-versa"(VALDES JUAN E N, 2002). Este foi o descobrimento do cálculo de Newton e que ele considerou que deveria manter em segredo.

Curiosamente, esta afirmação coincide com a aparição desta equação em 11 de Novembro de 1675, quando Leibniz escreveu

$$\int y dy = \frac{y^2}{2},$$

portanto, resolveu uma equação diferencial, foi um grande momento, tornando conhecida uma ferramenta poderosa, o símbolo da integral.

A primeira classificação das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem (dizia-se equações fluxionais) ditas por Newton. O primeiro tipo estava composto de equações nas quais os fluxonais $x'$, $y'$, $y$ e um variante $x$ ou $y$, estão relacionados, como por exemplo, $\frac{x'}{y'} = f(x)$, escrevemos hoje $\frac{dy}{dx} = f(x)$ e $\frac{dy}{dx} = f(y)$. O segundo tipo as equações que envolvem dois variantes $x$ e $y$, dadas por $\frac{x'}{y'} = f(x,y)$, ou seja, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. E finalmente, o terceiro tipo, aquelas que envolvem mais de dois variantes, as quais atualmente conhecemos como Equações Diferenciais Parciais.

Na ultima década do século XVII, os irmão Bernoulli (James e Johan) introduziram o termo "integrar" uma equação diferencial, assim como o processo de separação de variáveis, que será tratado detalhadamente neste trabalho.

Por volta de 1629, Johan Bernoulli (1667-1748) encontrou um método, utilizando uma série de problemas, a multiplicação por um "fator integrante", sobretudo pra resolver equações das quais o método das variaveir separáveis não poderia ser aplicado, digamos a equação $\alpha x dy - y dx = 0$, assim era possível separar as variáveis, mas não se podia integrar, pois não era conhecido que $\int \frac{dx}{x} = \ln x$, método utilizado por seu sobrinho Daniel (1700-1782) a partir de 1720.

Todavia, os métodos eram incompletos e uma *teoria geral* das equações diferenciais não poderia ser suposta. Os resultados de caráter geral começaram a aparecer nos anos 20 do século XVIII. Em 1724, o matemático italiano J. F. Riccati (1674-1754) estudou as equações

$$\frac{dy}{dx} + a y^2 = b x^\alpha,$$

onde $\alpha, a, b$ constantes; determinou a integrabilidade destas funções elementares, como uma equação proposta por D'Alambert em 1769, leva seu nome, denominação estendida a todas as equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = P(x) y^2 + Q(x) y + R(x),$$

onde $P, Q$ e $R$ funções contínuas.

É a Euler que se atribui a primeira sistematização dos trabalhos anteriores[5], onde encontramos o que se pode chamar de primeira teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Esta obra contém boa parte do que encontramos num livro texto atual como estudo das equações de primeira ordem; sua classificação entre separáveis, homogêneas, lineares, exatas e as de segunda ordem, lineares e suscetíveis a redução de ordem e a generalização das de ordem superior. Euler, em sua forma de centralizar as Equações Diferenciais Ordinárias a expressão $\frac{dy}{dx}$, significa para Euler o quociente das diferenciais, assim como a derivada de segunda ordem $\frac{ddy}{dx^2}$, em lugar da notação usada por Newton.

d'Alembert, 1766, demonstrou que a solução de uma equação linear não homogênea é dado pela soma de uma certa solução particular, e uma solução geral que corresponde a equação homogênea.

Muitos matemáticos (em particular Euler e Clairaut) seguiram elaborando métodos de fatores integrantes. Assim, entre os anos de 1768 e 1769, Euler investigou as classes das equações diferenciais que tem fatores integrantes de um tipo dado, e tentou estender essas investigações a equações de ordem superior.

Lagrange (1736-1813), já no final do seculo XVII, demonstrou *o princípio da superposição*, que diz que uma diferencial linear homogênea de ordem $n$ com coeficientes constantes, é da forma

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n,$$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_n$, são um conjunto de soluções linearmente independentes e $c_1, c_2, \ldots, c_n$, são constrantes arbitrárias. Também descobriu o método de variação de parâmetros, 1774.

A equação de Riccati "rompe" com a tradição algébrica, uma equação relativamente simples que pode ser integrada por quadratura. Este rompimento é forte, se considerarmos que é mais fácil resolver uma equação diferencial linear a uma não linear. A existência do princípio da superposição é mencionada. Este princípio é a forma usual de expressar a solução geral como uma função de um mínimo finito de soluções particulares. Riccati apresentou uma equação não linear que possui uma solução geral que satisfaz a fórmula

$$\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_4)}$$

para quatro valores diferentes de $\alpha$ e $y$ quaisquer três soluções particulares $y_1, y_2, y_3$, uma solução geral de uma equação diferencial é expressa em termo de outras particulares.

Desta maneira, o trabalho consistia em encontrar soluções particulares específicas. Gostaríamos

[5](1768-1770) *Instituitiones Calculi Integralis*

de destacar conceitos que hoje são conhecidos não eram tão claros no século XVII, vários conceitos utilizados para resolver as equações não estavam garantidos ou não eram compreendidos, tais como:

- **Compreensão incorreta do conceito de diferencial.**Leibniz, Euler e outros matemáticos confundiam o conceito de diferencial e incremento.
- **Compreensão insuficiente do conceito de função.** Até o século XIX utilizavam apenas funções analíticas, representadas por determinada fórmula; somente com o aparecimento de funções descontínuas em problemas práticos, foi definido o conceito de função.
- **Ausência de um conceito claro de limite.** Somente em 1823 Cauchy definiu de uma forma lógica, limite.
- **O conceito de continuidade era intuitivo.**Eles consideravam todas as funções contínuas.
- **Conceito difuso de integral definida.** Consideravam que a fórmula de Newton-Leibniz era universal, valia para todas as funções.

Foi somente no século XIX que a teoria das equações diferenciais foi de fato fundamentada. Com cada vez mais aplicações surgindo para as equações diferenciais, começaram a surgir dúvidas, pois para estudar certos problemas físicos, se faz necessário conhecer certas propriedades, pois em muitos casos encontrar expressões analíticas para certas soluções tornara-se impraticável. Deste modo, surgiu o problema de investigar as propriedades das soluções das equações diferenciais, dando lugar assim a *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais*, teoria que surge na segunda metade do século XIX, sendo abordada por Jules H. Poincaré (1854-1912) e Alexander M. Liapunov (1857-1918). (VALDES JUAN E N, 2002)

Um grande salto no estudo das equações ocorreu nos últimos cinquenta anos, onde o avanço dos computadores permitiu a investigação de muitas equações por métodos numéricos. Integrações numéricas já eram efetuadas em 1900, mas os cálculos demandavam muito tempo, os programas computacionais como *Maple, Matlab, Mathematica,*etc, tornaram o trabalho mais fácil possibilitando o desenvolvimento dos métodos númericos.

Embora equações diferenciais já tenham sido bastante estudadas, a junção das novas tecnologias, antigos e novos métodos de solução, estão gerando novas fontes de estudo como, por exemplo, os fractais. Neste trabalho não abordamos esses tópicos, consideramos relevante cita-los para que fique claro que as equações diferenciais ainda são uma fonte de problemas interessantes e importantes a serem resolvidos.

# 2 INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As palavras “equação” e “diferencial” sugerem algum tipo de equação que envolve derivadas. Em um curso de cálculo, aprendemos que dada uma função $y = \varphi(x)$, a sua derivada

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$$

é uma função que se pode encontrar mediante certas regras. Por exemplo, dada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ representa o conjunto de números reais, definida por $y = \varphi(x) = e^{x^4}$, temos $\frac{dy}{dx} = 4x^3 e^{x^4}$, ou ainda, $\frac{dy}{dx} = 4x^3 y$. O problema com o qual nos deparamos agora não é o de calcular derivadas de funções, mas sim, dada uma equação como $\frac{dy}{dx} = 4x^3 y$, encontrar de alguma maneira uma função $y = \varphi(x)$ que satisfaz a equação, ou seja, vamos resolver “equações diferenciais”(ZILL DENNIS G; CULLEN, 2006).

Para tornar o assunto mais familiar, vamos primeiramente introduzir algumas definições e terminologias básicas sobre o mesmo.

## 2.1 TERMINOLOGIA E DEFINIÇÕES BÁSICAS

**Definição 2.1 (Equação Diferencial)** *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial ( ED).*

Para discutirmos melhor, classificaremos as equações diferenciais por **tipo**, **ordem**, **linearidade** e **grau**.

### 2.1.1 Classificação pelo Tipo

**Definição 2.2 (Equação Diferencial Ordinária)** *Uma equação que contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, é chamada de equação diferencial ordinária ( EDO).*

Consideremos os seguintes exemplos de EDOs,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} - 5y &= 1 \\ \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y &= 0 \\ (y-x)dx + 4xdy &= 0 \\ \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} &= x \\ \left(x - y\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 &= 1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

**Definição 2.3 (Equação Diferencial Parcial)** *Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial ( EDP).*

Consideremos os exemplos de EDPs,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} &= u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} . \tag{2.1.2}$$

As derivadas ordinárias serão escritas ao longo deste texto como a notação de Leibniz $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\cdots$, ou com a notação linha $y'$, $y''$, $y'''$, $\cdots$. Usando a última notação, podemos escrever as duas primeiras equações diferenciais em (2.1.1) um pouco mais compactamente como $y' - 5y = 1$ e $y'' - 2y' + 6y = 0$. Na realidade, a notação linha é usada somente para denotar as três primeiras derivadas; a quarta derivada é escrita como $y^{(4)}$, em vez de $y''''$. Em geral, a $n$-ésima derivada é escrita como $\frac{d^ny}{dx^n}$ ou $y^{(n)}$. Embora seja menos conveniente para escrever e imprimir, a notação de Leibniz tem, sobre a notação linha, a vantagem de explicitar claramente as variáveis dependentes e independentes. Por exemplo, na equação $\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$ vê-se imediatamente que $x$ representa uma variável dependente e $t$ uma variável independente. Derivadas parciais são freqüentemente denotadas por uma notação em subscrito indicando as variáveis independentes. Por exemplo, com a notação em subscrito, a terceira equação em (2.1.2) torna-se $u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$.

### 2.1.2 Classificação pelo Ordem

**Definição 2.4 (Ordem de uma ED)** *A ordem de uma equação diferencial é a ordem da maior derivada na equação.*

Para melhor esclarecimento sobre a ordem de uma ED, vamos analisar o próximo exemplo.

**Exemplo 2.1** *Observemos a equação*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4y \quad = \quad e^x$$

*que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (ou de ordem dois). Já a equação diferencial* $(y-x)dx+4xdy=0$*, quando dividimos pela diferencial* $dx$*, pode ser escrita na forma*

$$4x\frac{dy}{dx}+y=x$$

*que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Para finalizar, consideremos a equação*

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

*que é uma equação diferencial parcial de quarta ordem.*

Embora as equações diferenciais parciais sejam muito importante, seu estudo demanda um bom conhecimento da teoria de equações diferenciais ordinárias. Portanto, na discussão que se segue, limitaremos nossa atenção às equações diferenciais ordinárias.

**Definição 2.5** *Dizemos que uma equação diferencial ordinária (de ordem* $n$*) está escrita na forma* **implícita** *quando tem a forma*

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0,$$

*sendo* $F$ *uma função* $F:\omega\subset\mathbb{R}^{n+2}\to\mathbb{R}$ *com* $\omega$ *um subconjunto (geralmente aberto) de* $\mathbb{R}^{n+2}$*. E dizemos que está escrita na forma* **explícita** *quando*

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}),$$

*com* $f:D\subset\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ *uma função definida em um subconjunto* $D$ *(geralmente aberto) de* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*

Por exemplo, dada a equação diferencial $3x\dfrac{dy}{dx}+y=x$, temos que a sua forma implícita é dada por $F\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)=0$ onde $F\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)=3x\dfrac{dy}{dx}+y-x$ e sua forma explícita é dada por $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ onde $f(x,y)=\dfrac{x-y}{3x}$.

### 2.1.3 Classificação como Linear e Não-Linear

**Definição 2.6 (EDO Linear)** *Uma equação diferencial ordinária é chamada de linear quando pode ser escrita na forma*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

*onde a variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é um e cada coeficiente depende apenas da variável independente x.*

**Definição 2.7** *Uma equação que não é linear é chamada de* **não-linear**.

As equações

$$\begin{aligned} xdy+ydx &= 0\\ y''-2y'+y &= 0\\ 3x^2\frac{d^3u}{dx^3}+x\frac{d^2y}{dx^2}+3\ln(x)\frac{dy}{dx}+5y &= e^x \end{aligned}$$

são equações diferenciais ordinárias lineares de primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente. Por outro lado,

$$yy'''-2y'=x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2}+y^2=0$$

são equações diferenciais ordinárias não-lineares de terceira e segunda ordens, respectivamente.

### 2.1.4 Classificação pelo grau

**Definição 2.8 (Grau de uma EDO)** *Supondo a equação escrita sob a forma racional inteira em relação as derivadas, o grau da equação é o maior dos expoentes a que está elevada a derivada de mais alta ordem contida na equação(ABUNAHMAN, 1989).*

Por exemplo, as equações

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 3x-1 \\
\frac{d^2y}{dx^2}+y &= 0 \\
\left(x-y\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 &= 1+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4
\end{aligned}
$$

são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e primeiro grau, segunda ordem e primeiro grau, terceira ordem e segundo grau, respectivamente.

Como mencionado antes, nosso objetivo neste material é encontrar soluções para equações diferenciais ordinárias.

### 2.1.5 Solução de uma EDO

**Definição 2.9 (Solução de uma EDO)** *Dizemos que uma função $y = \varphi(x)$ definida em um intervalo $I$ (isto é, $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) é solução de uma equação diferencial no intervalo $I$ se ao substituirmos na equação reduz a uma identidade (satisfaz a EDO).*

Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$$

é uma função $\varphi$ que possui pelo menos $n$ derivadas e satisfaz a equação, isto é,

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)) = 0$$

para todo $x$ no intervalo $I$.

**Exemplo 2.2** *Vamos verificar se $y = xe^x$ é uma solução para a equação linear*

$$y'' - 2y' + y = 0$$

*no intervalo $(-\infty,+\infty)$ .*

***Solução:*** *Como $y = xe^x$, temos*

$$\frac{dy}{dx} = e^x + e^x x$$

*e*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x + xe^x.$$

*Substituindo na equação $y'' - 2y' + y = 0$, obtemos*

$$\begin{array}{rcl} 2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}.$$

*Portanto, $y = xe^x$ é solução da equação no intervalo $(-\infty, +\infty)$.*

Primeiramente devemos nos acostumar com dois fatos, nem toda equação diferencial possue solução e dada uma equação diferencial ela geralmente possui um número infinito de soluções.

**Exemplo 2.3** *A equação diferencial de primeira ordem*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4 = 0$$

*não possui solução no intervalo $(-\infty, +\infty)$, pois não existe uma função real que satisfaz a equação.*

**Exemplo 2.4** *A equação diferencial de segunda ordem*

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 10y^4 = 0$$

*só possui uma solução no intervalo $(-\infty, +\infty)$, que é a solução nula.*

**Exemplo 2.5** *Para qualquer valor de c, a função $y = \frac{c}{x} + 1$ é uma solução da equação diferencial de primeira ordem*

$$x\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0$$

*no intervalo $(0, +\infty)$.*

***Solução:*** *Dado $y = \frac{c}{x} + 1$ temos $\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2}$. Substituindo na equação $x\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0$, temos*

$$\begin{array}{rcl} x\left(-\frac{c}{x^2}\right) + \frac{c}{x} + 1 - 1 & = & 0 \\ -\frac{c}{x} + \frac{c}{x} + 1 - 1 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

*isto mostra que $y = \frac{c}{x} + 1$ é solução da equação.*

**Observação 2.1** *Considere duas soluções particulares do exemplo (2.5), $y_1 = \frac{c_1}{x} + 1$ e $y_2 = \frac{c_2}{x} + 1$, onde $c_1 \neq c_2$, temos que $y_s = y_1 + y_2 = \frac{c_1 + c_2}{x} + 2$ não é solução da equação $x\frac{dy}{dx} +$*

*$y-1=0$. De fato, dado $y_s = \dfrac{c_1+c_2}{x}+2$ temos $y_s' = -\dfrac{c_1+c_2}{x^2}$. Substituindo na equação $x\dfrac{dy}{dx}+y-1=0$, temos*

$$
\begin{aligned}
x\frac{dy_s}{dx}+y_s-1 &= x\left(-\left(\frac{c_1+c_2}{x^2}\right)\right)+\frac{c_1+c_2}{x}+2-1\\
&= -\left(\frac{c_1+c_2}{x}\right)+\frac{c_1+c_2}{x}+2-1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

*isto mostra que $y_s = \dfrac{c_1+c_2}{x}+2$ não é solução da equação, ou seja, a soma de duas soluções de uma equação diferencial não é necessariamente uma solução da equação diferencial.*

Em alguns casos, quando somamos duas soluções de uma equação diferencial ordinária, obtemos uma outra solução.

**Exemplo 2.6** *Vamos verificar que as funções $y_1 = c_1\cos 4x$ e $y_2 = c_2\sin 4x$, em que $c_1$ e $c_2$ são constantes arbitrárias, são soluções para equação diferencial*

$$y''+16y=0,$$

*assim como $y = y_1+y_2 = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$, também é uma solução para $y''+16y=0$.*

***Solução:*** *Temos*

$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_1\cos 4x &\Rightarrow\ y_1' &= -4c_1\sin 4x &\Rightarrow\ y_1'' &= -16c_1\cos 4x\\
&e\\
y_2 &= c_2\sin 4x &\Rightarrow\ y_2' &= 4c_2\cos 4x &\Rightarrow\ y_2'' &= -16c_2\sin 4x
\end{aligned}
$$

*também, como $y_s = y_1+y_2 = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$, temos*

$$y_s' = -4c_1\sin 4x + 4c_2\cos 4x \ \Rightarrow\ y_s'' = -16c_1\cos 4x - 16c_2\sin 4x$$

*substitindo os resultados na equação $y''+16y=0$, verificamos que são solução. De fato,*

$$
\begin{aligned}
y_1''+16y_1 &= -16c_1\cos 4x + 16(c_1\cos 4x) = 0\\
y_2''+16y_2 &= -16c_2\sin 4x + 16(c_2\sin 4x) = 0\\
y_s''+16y_s &= -16c_1\cos 4x - 16c_2\sin 4x + 16(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x) = 0
\end{aligned}
$$

Uma solução para uma equação diferencial ordinária que pode ser escrita na forma $y=\varphi(x)$ é chamada de **solução explícita**. Dizemos que uma relação $G(x,y)=0$ é uma **solução implícita** de uma equação diferencial em um intervalo $I$, se ela define uma ou mais soluções explícitas em $I$.

Por exemplo, para $-2 < x < 2$, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Além disso, note que qualquer relação da forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisfaz, formalmente, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ para qualquer constante $c$. Porém, fica subentendido que a relação deve sempre fazer sentido no sistema dos números reais; logo, não podemos dizer que $x^2 + y^2 + 1 = 0$ determina uma solução da equação diferencial.

Como a distinção entre uma solução explícita e uma solução implícita é intuitivamente clara, não nos daremos ao trabalho de dizer “aqui temos uma solução explícita (implícita)”.

A **solução geral** de uma equação diferencial é a solução que contém tantas constantes arbitrárias quantas forem as unidades da ordem da equação, ou seja, quando resolvemos a equação diferencial $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$ obtemos $G(x,y,c_1,\cdots,c_n) = 0$, onde $c_i$ é a constante arbitrária, que representa uma **família a n-parâmetros de soluções**. Dessa forma, uma equação de primeira ordem $F(x,y,y')$ apresenta apenas uma constante arbitrária em sua solução geral $G(x,y,c)$, uma de segunda ordem apresentará duas constantes, e assim por diante.

Especificando valores de $c_i$ em $G(x,y,c_1,\cdots,c_n) = 0$, teremos a **solução particular** da equação diferencial. Geometricamente a solução particular (ou integral particular) corresponde uma única curva que passa por um ponto dado no plano. Por exemplo, é fácil ver que $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação de primeira ordem $y' = y$. Para $c = 0, -2$ e $5$, obtemos as soluções particulares $y = 0$, $y = -2e^x$ e $y = 5e^x$, respectivamente.

Às vezes, uma equação diferencial possui uma solução que não pode ser obtida especificando-se os parâmetros em uma família de soluções, mas satisfaz a equação diferencial . Tal solução é chamada de **solução singular**.

Uma solução para equação diferencial que é identicamente nula em uma intervalo $I$ é em geral referida como **solução trivial**. Note que, no exemplo $(2.2)$, a função constante $y = 0$ satisfaz a equação diferencial dada para todo $x$ real.

No que se segue, dedicaremos a explicar diversos métodos clássicos de resolução de EDO. Não efetuaremos um estudo detalhado da rigorosidade dos métodos empregados (com exceção na observação (2.2)), que em essência resumem-se sempre na regra da cadeia e nos teoremas das funções inversas e funções implícita.

**Observação 2.2** *Consideremos a ED*

$$g(x) = h(y)\frac{dy}{dx}$$

*que formalmente, podemos escrever*

$$g(x)dx = h(y)dy,$$

*onde descreveremos e justificaremos a sua solução. Sendo $G$ uma primitiva de $g$ e $H$ uma de $h$, temos*

$$G'(x)dx = H'(y)dy.$$

*Integrando de ambos os membros, obtemos*

$$G(x) = H(y) + c$$

*que é a solução geral da equação.*

*Explicaremos, agora com um pouco mais de rigor porque funciona o método.*

*Seja $y = \varphi(x)$ uma solução da ED, isto é, $\varphi(x)$ deve satisfazer a relação*

$$g(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x).$$

*Mas como $H$ é uma primitiva de $h$, temos pela regra da cadeia que*

$$g(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x) = (H \circ \varphi)'(x)$$

*Integrando de ambos os membros*

$$G(x) = (H \circ \varphi)(x) + c,$$

*(antes expressamos $G(x) = H(x) + c$) segue que*

$$\varphi(x) = H^{-1}(G(x) - c).$$

*Nos passos anteriores, está justificado aplicar a regra da cadeia quando $\varphi$ e $H$ são deriváveis e $h$ contínua. Finalmente para poder isolar $\varphi$ mediante o uso de $H^{-1}$ basta exigirmos que $h$ não se anula no intervalo de definição onde $H' = h \neq 0$. Sendo $H$ crescente ou decrescente logo existe $H^{-1}$ (em outras palavras, como a derivada de $H$ não se anula, o teorema da inversa nos assegura que existe $H^{-1}$).*

*As equações com "variáveis separáveis" são as mais simples de integrar e além disso,* *as mais importantes, já que qualquer outro método de solução se baseia essencialmente em aplicar diversos truques para chegar a uma equação com "variáveis separáveis". Nelas vimos com todo rigor, as hipóteses que tem que impor para que o método de solução esteja corretamente empregado. A partir de agora não mostraremos, mais estes detalhes, que apesar de importantes, sobrecarregam a resolução das equações.*

Não nos deteremos nunca em comprovar as hipóteses destes teoremas, assim, vamos supor a todo momento que as funções que aparecem no método descrito são suficientemente "boas", estão restritas em seu domínio, para que sempre satisfaçam as hipóteses necessárias. Tão pouco nos preocuparemos em saber se obtemos todas as soluções e em alguns casos estaremos interessados nas soluções singulares das EDO.

Convém observar que a expressão $\dfrac{dy}{dx}$ é simplesmente uma útil notação para indicar a derivada de $y$ com respeito a $x$, não um quociente de $dy$ dividido por $dx$, nem $dy$ nem $dx$ tem valor próprio. Esta notação se aplica, não para introduzir confusão, mas pelo contrário, se usa porque é uma consequência dos enunciados de vários resultados importantes. Já vimos como se adapta corretamente na hora de resolver equações com "variáveis separáveis" $g(x) = h(y)\dfrac{dy}{dx}$ decompondo $g(x)dx = h(y)dy$ (como se fosse realmente uma fração) e integrando ambos os membros da equação. Mas não é só aqui que se manifesta a utilidade desta notação. Por exemplo, o teorema da função inversa prova (com as hipóteses adequadas) que quando $y$ é uma função de $x$, se escreve $x$ como uma função de $y$ e se

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'(x)}$$

isto é, se produz um comportamento similar se estivéssemos operando com frações. Analogamente, se é função de $y$ e por sua vez, $y$ é uma função de $x$, a regra da cadeia estabelece que a derivada da função composta $z(x)$ é

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

que é como simplificarmos $dy$. Isto permite usar a notação do tipo $\dfrac{dy}{dx}$ e analisar seu comportamento como se fosse uma fração.

# 3 CLASSIFICAÇÃO DAS EDO DE PRIMEIRA ORDEM

Apresentadas todas as terminologias necessárias, estamos agora aptos para focar no objetivo deste trabalho, que é estudar algumas das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem segundo a classificação do *sotware Maple 12* e resolvê-las.

Se uma equação diferencial de primeira ordem puder ser resolvida, veremos que a técnica ou método para resolvê-la depende do tipo da equação de primeira ordem com que estamos lidando. Durante anos, muitos matemáticos se esforçaram para resolver diversos tipos particulares de equações. Por isso, há vários métodos de solução: o que funciona para um tipo de equação de primeira ordem não se aplica necessariamente a outros tipos de equação (MALUMBRES, 1996).

Estudaremos alguns tipos de EDO de primeira ordem mostrado na Figura (3), conforme a classificação do *software* Maple 12.

First order ODEs

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Abel, | Abel2A, | Abel2C, | Bernoulli, | Chini, |
| Clairaut, | dAlembert, | exact, | homogeneous, | homogeneousB, |
| homogeneousC, | homogeneousD, | homogeneousG, | linear, | patterns, |
| quadrature, | rational, | Riccati, | separable, | sym_implicit |

**Figura 3: EDO de primeira ordem.**

Iniciaremos nossos estudos com o tipo “Quadrature”.

## 3.1 QUADRATURA

Começamos nosso estudo sobre a resolução de equações diferenciais de primeira ordem

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (3.1.1)$$

que pode ser escrita na forma explícita

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.1.2}$$

com a mais simples dentre todas as equações diferenciais, aquela onde $f$ é independente da variável $y$, isto é, $f(x,y) = h(x)$. De (3.1.2), temos:

$$\frac{dy}{dx} = h(x)\ . \tag{3.1.3}$$

Resolver esta equação consiste em encontrar uma função cuja derivada seja $h(x)$, isto é, encontrar a primitiva (integral indefinida) de $h(x)$.

Integrando ambos os lados de (3.1.3), ou ainda, usando o primeiro teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$y(x) = \int h(x)dx + c = H(x) + c$$

A função $y$ dada desta forma é a solução geral da equação (3.1.3). Geometricamente, a primitiva é a equação de uma família de curvas e uma solução particular é a equação de uma dessas curvas. Estas curvas são denominadas curvas integrais da equação diferencial. Se $f$ é independente da variável $x$, isto é, $f(x,y) = g(y)$, resolvemos de maneira análoga, veja .

**Definição 3.1 (Equação Quadratura)** *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem da forma*

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \tag{3.1.4}$$

*ou*

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \tag{3.1.5}$$

*é chamada de quadratura.*

**Exemplo 3.1** *Vamos encontrar a solução da quadratura,* $\dfrac{dy}{dx} = 2x$.

***Solução:***

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x \\ \Rightarrow\ dy &= 2xdx \\ \Rightarrow \int dy &= 2\int xdx \\ \Rightarrow\ y &= x^2 + C. \end{aligned}$$

*segue que* $y(x) = x^2 + C$ *é a solução geral da EDO.*

**Exemplo 3.2** *Dada a quadratura*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4 \tag{3.1.6}$$

*vamos encontrar a sua solução.* **Solução:** *Temos dois casos para analisar.*

**i)** $y^2 - 4 \neq 0$;

*Se* $y^2 - 4 \neq 0$, *temos:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y^2 - 4 \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2-4}\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y^2-4}dy &= \int 1dx \\ \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y^2-4}dy &= x+c \end{aligned}$$

*calculando a integral por frações parciais, ou seja,*

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y-2},$$

*obtemos,* $A = -\frac{1}{4}$ *e* $B = \frac{1}{4}$. *Segue que,*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2-4}dy &= x+c \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\int \frac{1}{y+2}dy + \frac{1}{4}\int \frac{1}{y-2}dy &= x+c \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\ln(y+2) + \frac{1}{4}\ln(y-2) &= x+c \\ \Rightarrow \quad \ln(y-2) - \ln(y+2) &= 4x+4c \\ \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{y-2}{y+2}\right) &= 4x+4c \\ \Rightarrow \quad \frac{y-2}{y+2} &= e^{4x}\cdot e^{4c} \\ \Rightarrow \quad y-2 &= ce^{4x}(y+2) \\ \Rightarrow \quad y-2 &= ce^{4x}y + 2ce^{4x} \\ \Rightarrow \quad y(1-ce^{4x}) &= 2(1+ce^{4x}) \\ \Rightarrow \quad y &= 2\frac{(1+ce^{4x})}{(1-ce^{4x})} \end{aligned}$$

*concluímos que*

$$y(x) = 2\frac{(1+ce^{4x})}{(1-ce^{4x})}.$$

*é a solução geral da EDO.*

**ii)** $y^2 - 4 = 0$;

*Se $y^2 - 4 = 0$ temos que $y = 2$ e $y = -2$ são soluções. No entanto, não existe um valor de c que substituído na solução geral da EDO, que nos retorne a solução $y = -2$. Esta solução é chamada de solução singular. Para obter a solução $y = 2$ basta atribuir $c = 0$ na solução geral.*

## 3.2 VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Considerando a equação diferencial de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.2.7}$$

podemos escrever a função $f = f(x,y)$ como o quociente de duas outras funções, a saber, $M = M(x,y)$ e $N = N(x,y)$, logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

É conveniente manter o sinal negativo no segundo membro da equação, na forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

assim podemos escrever a equação (3.2.7) na forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.2.8}$$

O problema de resolver equações diferenciais de 1ª ordem depende da solução da equação $(3.2.7)$ ou da solução da equação $(3.2.8)$.

Se $M$ é uma função apenas da variável $x$, isto é $M = M(x)$ e $N$ é uma função apenas da variável $y$, isto é $N = N(y)$, então a equação $(3.2.8)$ fica na forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{3.2.9}$$

e ela é chamada "equação separável".

**Definição 3.2 (Equação Separável)** *Uma equação diferencial de primeira ordem da forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{3.2.10}$$

*é chamada de separável ou de variáveis separáveis.*

**Método de solução:** Para resolver a equação (3.2.10), devemos considerar os seguintes casos:

**a)** Se $g(y) = a$, onde $a$ é constante, temos uma EDO separável que é, em particular, uma quadratura. Temos da equação (3.2.10) que

$$\frac{dy}{dx} = af(x) \ . \tag{3.2.11}$$

Para obter a solução basta observar como resolvemos (3.1.4). Para reforçar o entendimento veja o exemplo (3.1).

**b)** Se $f(x) = b$, onde $b$ é constante, temos uma EDO separável que é, em particular, uma quadratura conforme $(3.1.5)$. Da equação (3.2.10), temos

$$\frac{dy}{dx} = bg(y). \tag{3.2.12}$$

Nesta situação vamos considerar dois casos:

**(i)** $g(y) \neq 0$;

Ao considerarmos $g(y) \neq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} &= b \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= b\int dx + C \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= bx + C, \end{aligned}$$

que é a solução da equação.

**(ii)** $g(y) = 0$.

Se $g(y) = 0$ significa que existe $y_0$ tal que $g(y_0) = 0$. Logo a solução é $y_0 = c$, onde $c$ constante. De fato,

$$\frac{d}{dx}(y_0) = 0 = b \cdot 0 = bg(y_0).$$

Concluímos que $y_0$ é uma solução singular. Veja o exemplo (3.1.6).

**c)** Se nem $f$ e nem $g$ forem constantes temos uma equação de variável separável. Para resolvermos consideraremos dois casos:

**Caso 1:** $g(y) \neq 0$;

Se para todo $y$ temos $g(y) \neq 0$. Podemos escrever a equação (3.2.10) da forma

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Ao calcularmos a integral

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c \ .$$

obtemos a solução.

**Caso 2:** $g(y) = 0$.

Se existe $y_0$ tal que $g(y_0) = 0$. Temos que $y_0 = c$, onde $c$ constante, é solução. De fato,

$$\frac{d}{dx}(y_0) = 0 = f(x) \cdot 0 = f(x) \cdot g(y_0).$$

**Observação 3.1** *Uma equação diferencial de primeira ordem da forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

*é chamada de separável ou de variáveis separáveis.*

**a)** *Se $g(y) = a$, onde $a$ é constante, temos uma EDO separável que é, em particular, uma quadratura. Veja (3.1.4);*

**b)** *Se $f(x) = b$ temos uma situação análoga ao item anterior;*

**c)** *Se nem $f$ e nem $g$ forem constantes temos uma equação de variável separável.*

Apresentaremos agora uma exemplo para melhor entendimento.

**Exemplo 3.3** *Considere a EDO*

$$\frac{dy}{dx} = x(y-1).$$

*Vamos encontrar sua solução.*

***Solução:*** *É importante observar que podemos considerar $f(x) = x$ e $g(y) = y - 1$. Temos dois casos para analisarmos:*

**Caso 1:** $y - 1 \neq 0$*;*

*Se $y - 1 \neq 0$ podemos escrever*

$$\begin{aligned} \frac{1}{y-1}\frac{dy}{dx} &= x \\ \int \frac{1}{y-1}dy &= \int x dx + c \\ \ln(y-1) &= \frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

*que representa uma solução implícita da equação. A solução implícita é dado por*

$$y \quad = \quad ce^{x^2} + 1 \ .$$

**Caso 2:** $y - 1 = 0$;

*Se* $y - 1 = 0$ *temos* $y = 1$ *como solução singular da EDO. De fato,*

$$\frac{d}{dx}(1) \quad = \quad 0 \quad = \quad x \cdot (1-1) \quad = \quad x \cdot (y-1) \ .$$

Consideramos até agora, alguns casos onde era possivel separar as variáveis, contudo, nem sempre essa situação privilegiada ocorre. Por exemplo, não existe uma maneira através da qual a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y}{2y - 5x}$$

pode ser escrita na forma $(3.2.9)$. Nestes casos, somos obrigados a usar outros métodos para tentar separar as variáveis.Descrever tais métodos é nosso objetivo.

**Mudança de Variáveis**

Como uma equação diferencial cujas variáveis são separáveis é fácil de resolver, surge então a seguinte pergunta:

"Existem outros tipos de equações diferenciais cujas variáveis não são separáveis mas que podem ser transformadas em equações cujas variáveis são separáveis?"

A resposta, a esta pergunta é "sim". De fato, uma das maneiras mais importantes de resolver uma equação diferencial dada é fazer uma **mudança de variável** conveniente, que reduza a equação num tipo que possamos resolver. É uma situação semelhante a que usamos em cálculo $I$ para resolver integrais por meio de uma mudança de variáveis. Em alguns casos a mudança de variáveis a ser usada é sugerida pela forma da equação. Em outros casos a transformação não é tão óbvia.

## 3.3 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Antes de considerar o conceito de equação diferencial homogênea de primeira ordem e seu método de solução, precisamos primeiro examinar a natureza de uma função homogênea. Começamos com a definição deste conceito.

**Definição 3.3 (Função Homogênea)** *Se uma função* $f$ *satisfaz*

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{3.3.13}$$

*para algum número real n, então dizemos que $f$ é uma função homogênea de grau n.*

Vamos apresentar um exemplo.

**Exemplo 3.4** *Dadas as funções abaixo vamos determinar se elas são homogêneas e especificar o grau de homogeneidade, quando for o caso.*

1. $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5y^2$

   *Temos*

   $$f(x,y) \quad = \quad x^2 - 3xy + 5y^2 \ .$$

   *Para verificar se $f$ é homogênea vamos aplicar* (3.3.13),

   $$\begin{aligned} f(tx,ty) &= (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 5(ty)^2 \\ &= t^2x^2 - 3t^2xy + 5t^2y^2 \\ &= t^2(x^2 - 3xy + 5y^2) \\ &= t^2 f(x,y) \end{aligned} \ ,$$

   *isto mostra que $f$ é homogênea de grau* 2.

2. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$

   *Temos*

   $$f(x,y) \quad = \quad x^3 + y^3 + 1 \ .$$

   *Vamos verificar se $f$ é homogênea. Para isso, aplicaremos* (3.3.13),

   $$\begin{aligned} f(tx,ty) &= x^3 + y^3 + 1 \\ &= (tx)^3 + (ty)^3 + 1 \\ &= t^3x^3 + t^3y^3 + 1 \\ &= t^3\left(x^3 + 3y^3 + \frac{1}{t^3}\right) \\ &\neq t^3 f(x,y), \end{aligned}$$

   *isto mostra que $f$ não é homogênea, pois não satisfaz* (3.3.13).

Seja $f(x,y)$ uma função homogênea de grau $n$, ou seja,

$$f(tx,ty) \quad = \quad t^n f(x,y) \ ,$$

podemos escrever

$$f(x,y) \quad = \quad \left(\frac{1}{t}\right)^n f(tx,ty) \ . \tag{3.3.14}$$

Fazendo $tx = 1$ temos $x = \frac{1}{t}$ e $t = \frac{1}{x}$. De (3.3.14), obtemos:

$$f(x,y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \ . \tag{3.3.15}$$

Fazendo $ty = 1$ temos $y = \frac{1}{t}$ e $t = \frac{1}{y}$. Substituindo em (3.3.14), obtemos:

$$f(x,y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right) \ . \tag{3.3.16}$$

É importante observar que $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ e $f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ são ambas homogêneas de grau zero.

Uma equação diferencial homogênea de primeira ordem é definida em termos das funções homogêneas.

**Definição 3.4 (Equação Homogênea)** *Uma equação diferencial da forma*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

*é chamada de homogênea se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau.*

*Em outras palavras,*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

*é homogênea se*

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y) \quad e \quad N(tx,ty) = t^n N(x,y)$$

*ou ainda,*

$$M(x,y) = x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad e \quad M(x,y) = y^n M\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

*e*

$$N(x,y) = x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad e \quad N(x,y) = y^n N\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

### 3.3.1 Equações Homogêneas de Classe $A$

Uma equação diferencial homogênea pode sempre ser expressa na forma alternativa

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Para ver isso, consideramos a equação homogênea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ e escrevemos na forma, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, onde

$$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Sabendo que $M$ e $N$ são homogêneas de grau $n$, observamos que $f(x,y)$ deve ser necessariamente homogênea de grau zero e

$$f(x,y) = -\frac{x^n M(1,\frac{y}{x})}{x^n N(1,\frac{y}{x})} = -\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}.$$

A última razão é uma função da forma $f\left(\frac{y}{x}\right)$. Analogamente,

$$f(x,y) = -\frac{y^n M(\frac{x}{y},1)}{y^n N(\frac{x}{y},1)} = -\frac{M(\frac{x}{y},1)}{N(\frac{x}{y},1)}.$$

A última razão é uma função da forma $g\left(\frac{x}{y}\right)$.

**Definição 3.5 (Equação Homogênea de Classe** $A$**)** *A forma geral de uma equação homogênea de classe $A$ é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.3.17}$$

*ou*

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{x}{y}\right) \tag{3.3.18}$$

*onde $f\left(\frac{y}{x}\right)$ e $g\left(\frac{x}{y}\right)$ são funções arbitrárias.*

**Método de solução:** O método consiste em transformar a EDO homogênea de Classe $A$, em uma equação de variáveis separáveis com a substituição $\frac{y(x)}{x} = u(x)$ , ou de uma forma mais simples $\frac{y}{x} = u$ , onde $u = u(x)$ é uma nova função incógnita.

Dada a equação homogênea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, podemos escrevê-la na forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Fazendo $\dfrac{y}{x} = u$, temos

$$\begin{aligned} y &= ux \\ \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= u + x\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

podemos então separar as variáveis

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

ou ainda,

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u. \tag{3.3.19}$$

onde temos dois casos, a considerar:

**Caso 1:** $f(u) - u \neq 0$;

Se $f(u) - u \neq 0$ podemos escrever (3.3.19) da seguinte forma

$$\frac{1}{f(u)-u}du = \frac{dx}{x}, \ .$$

Integrando, ambos os membros, obtemos

$$\int \frac{1}{f(u)-u}du = \int \frac{dx}{x}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{f(u)-u} &= \ln x + c \\ \Rightarrow \quad \ln x - \ln c &= \int \frac{1}{f(u)-u}du \\ \Rightarrow \quad \ln\frac{x}{c} &= \int \frac{1}{f(u)-u}du \\ \Rightarrow \quad \frac{x}{c} &= e^{\int \frac{1}{f(u)-u}du} \end{aligned}$$

isolando $x$,

$$x = ce^{\int \frac{1}{f(u)-u}du}.$$

Fazendo

$$\phi(u) = \int \frac{1}{f(u)-u}du$$

obtemos

$$x = ce^{\phi(u)}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= u \\ \Rightarrow \quad y &= ux \\ \Rightarrow \quad y &= cue^{\phi(u)} \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{cases} x = ce^{\phi(u)} \\ y = cue^{\phi(u)} \end{cases} \tag{3.3.20}$$

que são as curvas de equações paramétricas que são as soluções para a equação diferencial homogênea de Classe $A$ para cada $c \in \mathbb{R}$.

**Caso 2:** $f(u) - u = 0$.

Suponhamos que existe algum $u_0$ tal que $f(u_0) = u_0$. Neste caso, é imediato comprovar que a reta $y = u_0 x$ é solução da equação diferencial (3.3.17), pois:

$$\frac{dy}{dx} = u_0.1 = u_0 = f(u_0) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

A reta $y = u_0 x$ é a solução singular da equação (3.3.17).

Apresentaremos agora um exemplo de EDO homogênea de Classe A.

**Exemplo 3.5** *Consideremos a equação homogênea de classe A*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2}$$

***Solução:*** *Vamos verificar que de fato a equação*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2},$$

*é homogênea. Temos* $M(x,y) = 2xy - y^2$ *e* $N(x,y) = x^2$*, daí*

$$M(tx,ty) = 2(tx)(ty) - (ty)^2 = t^2(2xy - y^2) = t^2 M(x,y)$$

*e*

$$N(tx,ty) = (tx)^2 = t^2(x^2) = t^2 N(x,y)$$

*isto mostra que M e N são funções homogêneas de grau 2.*

*Para obter a equação na forma (3.3.17) dividimos o numerador e o denominador do lado* *direito da equação por* $x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2xy-y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}},$$

*donde obtemos*

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 .$$

*Fazendo* $\frac{y}{x} = u$*, temos*

$$\begin{aligned} y &= ux \\ \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= u + \frac{du}{dx} \\ \Rightarrow \quad u + x\frac{du}{dx} &= 2u - u^2 \end{aligned}$$

*então*

$$x\frac{du}{dx} = u - u^2. \tag{3.3.21}$$

*Temos então dois casos a considerar,*

**Caso 1:** $u - u^2 \neq 0$*;*

*Se* $u - u^2 \neq 0$ *em (3.3.21), temos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{u-u^2}du &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u-u^2}du &= \int \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

*para calcular a integral do lado esquerdo usaremos a técnica de frações parciais, ou seja, fazendo*

$$\frac{1}{u-u^2}du = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u}$$

*encontramos* $A = 1$ *e* $B = 1$*. Daí*

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \ln x &= \int \frac{1}{u} + \int \frac{1}{1-u} \\ \Rightarrow \quad \ln x &= \ln u + \ln(1-u) + c \\ \Rightarrow \quad \ln x + c &= \ln u(1-u) \\ \Rightarrow \quad \ln x - \ln c &= \ln u(1-u) \\ \Rightarrow \quad \ln \frac{x}{c} &= \ln u(1-u) \\ \Rightarrow \quad \frac{x}{c} &= u(1-u) \\ \Rightarrow \quad x &= cu(1-u) \end{aligned}$$

*Como* $y = ux$*, temos*

$$y = cu^2(1-u).$$

*Portanto, a solução da equação homogênea é dada pelas curvas paramétricas*

$$\begin{cases} x &= cu(1-u) \\ y &= cu^2(1-u) \end{cases},$$

*onde u é o parâmetro e* $c \in \mathbb{R}$ .

**Caso 2:** $u - u^2 = 0$;

*Se* $u - u^2 = 0$ *significa que existe* $u_0$ *tal que* $u_0 - u_0^2 = 0$. *Para encontrarmos* $u_0$ *basta resolver a equação* $u_0 - u_0^2 = 0$. *Temos*

$$\begin{aligned} u_0 - u_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad u_0(1-u_0) &= 0 \end{aligned}$$

*então* $u_0 = 0$ *ou* $u_0 = 1$. *Como a solução é dada por*

$$y = u_0 x$$

*temos como soluções singulares* $y = 0$ *e* $y = x$.

### 3.3.2 Equações Homogêneas de Classe $B$

**Definição 3.6 (Equação Homogênea de Classe $B$)** *A forma geral de uma equação homogênea de classe B é dada por*

$$F\left(\frac{dy}{dx}, \frac{y}{x}\right) = 0.$$

**Método de Solução:**

Para resolvermos esta equação vamos considerar a curva $F(\alpha, \beta) = 0$. Suponhamos, também, que temos uma representação paramétrica da curva dada por $\alpha = \psi(t)$ e $\beta = \varphi(t)$, isto é, que satisfaz

$$F(\psi(t), \varphi(t)) = 0$$

Façamos agora,

$$\frac{y}{x} = \varphi(t)$$

e levamos em consideração que $\dfrac{dy}{dx} = \psi(t)$.

Se derivarmos $y = x\varphi(t)$ em relação a $x$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(t) + x\varphi'(t)\frac{dt}{dx} .$$

Como $\dfrac{dy}{dx} = \psi(t)$, temos

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \varphi(t) + x\varphi'(t)\frac{dt}{dx} \\ \Rightarrow \quad \psi(t) - \varphi(t) &= x\varphi'(t)\frac{dt}{dx} \end{aligned}$$

que é uma EDO de variáveis separáveis.

Devemos considerar os seguintes casos:

**Caso 1:** $\psi(t) - \varphi(t) \neq 0$;

Se $\psi(t) - \varphi(t) \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)}dt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)}dt + c \\ \ln x &= \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)}dt + c \\ x &= e^{\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)}dt + c} \\ x &= e^{\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)}dt} \cdot e^{c} \\ x &= ce^{\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)}dt} \\ x &= ce^{\phi(t)} \end{aligned}$$

onde $\phi(t) = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t) - \varphi(t)}$. Como $y = x\varphi(t)$, temos $y = c\varphi(t)e^{\phi(t)}$.
Portanto, obtemos a solução

$$\begin{cases} x &= ce^{\phi(t)} \\ y &= c\varphi(t)e^{\phi(t)} \end{cases}$$

na forma paramétrica, onde $c \in \mathbb{R}$.

**Caso 2:** $\psi(t) - \varphi(t) = 0$;

Se $\psi(t) - \varphi(t) = 0$ então existe algum $t_0$ tal que $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$. Temos que $y = x\varphi(t_0)$ é solução da EDO. De fato,

$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{dy}{dx},\frac{y}{x}\right) &= F\left(\frac{d}{dx}(x\varphi(t_0)),\frac{x\varphi(t_0)}{x}\right)\\
&= F\left(\frac{d}{dx}(x\varphi(t_0)),\frac{x\varphi(t_0)}{x}\right)\\
&= F\left(\varphi(t_0),\varphi(t_0)\right)\\
&= F\left(\varphi(t_0),\psi(t_0)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Concluímos que a reta $y = x\varphi(t_0)$ é solução da EDO.

### 3.3.3 Equações Homogêneas de Classe $C$.

Definiremos a seguir uma Equação Homogênea de Classe $C$.

**Definição 3.7 (Equação Homogênea de Classe** $C$**)** *A forma geral de uma equação homogênea de classe $C$ é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{rx+sy+t}\right)$$

*onde $f$ é uma função arbitrária e $a$, $b$, $c$, $r$, $s$ e $t$ são constantes.*

**Método de Solução:**

Consideremos a equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{rx+sy+t}\right)$$

onde $a$, $b$, $c$, $r$, $s$ e $t$ são constantes. Para esse tipo de equação temos dois casos a considerar:

**Caso 1:** O $\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix}$ é diferente de zero.

Suponhamos em primeiro lugar que o $\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0$, ou seja, que as retas $ax+by+c=0$ e $rx+sy+t=0$ se interceptam em um ponto $(\alpha;\beta)$, ou ainda, ao considerarmos o sistema

$$\left\{\begin{aligned} ax+by+c &= 0\\ rx+sy+t &= 0 \end{aligned}\right. \tag{3.3.22}$$

temos como solução $x=\alpha$ e $y=\beta$.

Fazendo

$$\begin{cases} x &= u+\alpha \\ y &= v+\beta \end{cases} \tag{3.3.23}$$

e substituindo no sistema $(3.3.22)$, temos

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a(u+\alpha)+b(v+\beta)+c}{r(u+\alpha)+s(v+\beta)+t}\right)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv+a\alpha+b\beta+c}{ru+sv+r\alpha+s\beta+t}\right).$$

Como $(\alpha,\beta)$ é solução do sistema, temos

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{ru+sv}\right).$$

Obtemos assim uma equação homogênea de classe A,

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a+b\left(\frac{v}{u}\right)}{r+s\left(\frac{v}{u}\right)}\right),$$

para resolvermos essa equação basta observamos (3.3.18). Observamos que, geometricamente, equivale a uma translação dos eixos coordenados para o ponto $(\alpha,\beta)$ que é a interseção das retas componentes do sistema, o que é verdadeiro, uma vez que o determinante considerado e diferente de zero.

**Caso 2:** O $\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix}$ é igual a zero.

Suponhamos agora, que o $\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix} = 0$, ou seja, que as retas $ax+by+c=0$ e $rx+sy+t=0$ sejam paralelas distintas, ou seja, a solução do sistema é vazia. Isto implica que o método aplicado no primeiro caso não faz sentido.

Como $\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix} = 0$ , os coeficentes de $x$ e $y$ são proporcionais, de modo que se podemos escrever $as = rb$, ou ainda,

$$\frac{s}{b} = \frac{r}{a}. \tag{3.3.24}$$

Chamando a relação de $m$, temos:

$$\frac{s}{b} = \frac{r}{a} = m \neq \frac{c}{t} \tag{3.3.25}$$

logo

$$\frac{s}{b} = m \Rightarrow s = bm$$

e

$$\frac{r}{a} = m \Rightarrow r = am.$$

Como

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{rx+sy+t}\right)$$

e substituindo as relações anteriores nesse sistema, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{m(ax+by)+t}\right) \tag{3.3.26}$$

Fazendo $ax+by=z$, e sendo $z=g(x)$, temos

$$y = \frac{1}{b}(z-ax). \tag{3.3.27}$$

Derivando (3.3.27) em relação a $x$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) \tag{3.3.28}$$

Substituindo as equações (3.3.27) e (3.3.28) na equação (3.3.26), temos:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f\left(\frac{z+c}{mz+t}\right)$$

o que implica em

$$\frac{dz}{dx} = a + bf\left(\frac{z+c}{mz+t}\right)$$

que é uma EDO de variáveis separáveis. Para resolvermos esta equação basta observar (3.2.10).

Apresentamos a seguir um exemplo de uma EDO homogênea de classe $C$.

**Exemplo 3.6** *Consideremos a EDO de classe C.*

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-3y-1}{3x+y-2}$;

   *Dada a EDO de classe C, vamos encontrar a sua solução. Temos*

$$\begin{cases} 2x-3y = 1 \\ 3x+y = 2 \end{cases} \tag{3.3.29}$$

*onde*

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

*Isto mostra que estamos no* **Caso 1**. *Resolvendo o sistema (3.3.29), encontramos* $x = \alpha = \dfrac{7}{11}$ *e* $y = \beta = \dfrac{1}{11}$. *Substituindo em (3.3.23), temos:*

$$\begin{cases} x &= u + \dfrac{7}{11} \\ y &= v + \dfrac{1}{11} \end{cases} \tag{3.3.30}$$

*também*

$$\begin{cases} dx &= du \\ dy &= dv \end{cases}$$

*Substituindo na EDO, temos:*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{2\left(u + \frac{7}{11}\right) - 3\left(v + \frac{1}{11}\right) - 1}{3\left(u + \frac{7}{11}\right) + 1\left(v + \frac{1}{11}\right) - 2} \\ \Rightarrow \frac{dv}{du} &= \frac{2u + \frac{14}{11} - 3v - \frac{3}{11} - \frac{11}{11}}{3u + \frac{21}{11} + 1v + \frac{1}{11} - \frac{22}{11}} \\ \Rightarrow \frac{dv}{du} &= \frac{2u - 3v}{3u + v}. \end{aligned}$$

*Dividindo numerador e denominador por u, obtemos*

$$\frac{dv}{du} = \frac{2 - 3\left(\frac{v}{u}\right)}{3 + \frac{v}{u}},$$

*uma EDO homogênea de Classe A. Fazendo* $\dfrac{v}{u} = w$, *temos* $v = wu$, *daí*

$$\frac{dv}{du} = w + u\frac{dw}{du}$$

*Substituindo na EDO, obtemos*

$$\begin{aligned} w + u\frac{dw}{du} &= \frac{2 - 3w}{3 + w} \\ u\frac{dw}{du} &= \frac{2 - 3w}{3 + w} - w \\ u\frac{dw}{du} &= \frac{2 - 6w - w^2}{3 + w} \end{aligned}$$

*que é uma EDO separável. Temos casos a considerar.*

**Caso 1:** $2-6w-w^2 \neq 0$;

*Se* $2-6w-w^2 \neq 0$ *podemos escrever*

$$\begin{aligned}
\frac{3+w}{2-6w-w^2}dw &= \frac{1}{u}du \\
\int \frac{3+w}{2-6w-w^2}dw &= \int \frac{1}{u}du
\end{aligned}$$

*Fazendo a mudança de variável* $t = 2-6w-w^2$ *temos* $dt = -2(w+3)dw$, *daí*

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int \frac{-2(3+w)}{2-6w-w^2}dw &= \int \frac{1}{u}du \\
\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}dw &= \int \frac{1}{u}du \\
\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln t &= \ln u + c \\
\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln(2-6w-w^2) &= \ln u + c
\end{aligned}$$

*substituindo* $\frac{v}{u} = w$ *na equação*

$$\begin{aligned}
\ln\left(2-6\left(\frac{v}{u}\right)-\left(\frac{v}{u}\right)^2\right) &= -2\ln u + c \\
\Rightarrow \quad \ln\left(2-6\left(\frac{v}{u}\right)-\left(\frac{v}{u}\right)^2\right) + 2\ln u &= c \\
\Rightarrow \quad \ln\left(2-6\left(\frac{v}{u}\right)-\left(\frac{v}{u}\right)^2\right) + \ln u^2 &= c \\
\Rightarrow \quad \ln u^2\left(2-6\left(\frac{v}{u}\right)-\left(\frac{v}{u}\right)^2\right) &= c \\
\Rightarrow \quad u^2\left(2-6\left(\frac{v}{u}\right)-\left(\frac{v}{u}\right)^2\right) &= c \\
\Rightarrow \quad 2u^2-6uv-v^2 &= c
\end{aligned}.$$

*Isolando u e v em* (3.3.30) *e substituindo na equação, obtemos*

$$2\left(x-\frac{7}{11}\right)^2 - 6\left(x-\frac{7}{11}\right)\left(y-\frac{1}{11}\right) - \left(y-\frac{1}{11}\right)^2 = c$$

*que é a solução da EDO.*

**Caso 2:** $w^2+6w-2=0$.

*Temos que existe* $w_0$, *tal que*

$$w_0^2+6w_0-2=0.$$

*Resolvendo a equação obtemos* $w_0 = -3 \pm \sqrt{11}$. *Como* $\dfrac{v}{u} = w_0$ *implica em* $v = w_0 u$ *temos que as soluções são* $v = (-3+\sqrt{11})u$ *e* $v = (-3-\sqrt{11})u$. *Isolando* $u$ *e* $v$ *em* $(3.3.30)$ *e substituindo na equação, obtemos*

$$\left(y - \frac{1}{11}\right) = (-3+\sqrt{11})\left(x - \frac{7}{11}\right)$$

*e*

$$\left(y - \frac{1}{11}\right) = (-3-\sqrt{11})\left(x - \frac{7}{11}\right),$$

*que são as soluções singulares da EDO.*

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y-1}{x-y-2}$.

*Dada a EDO,* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y-1}{x-y-2}$, *temos* $\begin{cases} x-y &= 1 \\ x-y &= 2 \end{cases}$. *Observamos que*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

*isto mostra que estamos no* **Caso 2**. *Observamos que* $\dfrac{1}{1} = \dfrac{-1}{-1} = m$, *o que implica em* $m = 1 \neq \dfrac{1}{2}$. *Dada a*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-1}{x-y-2}, \tag{3.3.31}$$

*basta fazermos* $x - y = z$, *ou ainda,*

$$y = x - z, \tag{3.3.32}$$

*o que implica em*

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}. \tag{3.3.33}$$

*Substituindo* $(3.3.33)$ *e* $(3.3.32)$ *em* $(3.3.31)$, *obtemos*

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-2} &= 1 - \frac{dz}{dx} \\ \Rightarrow \quad -\frac{dz}{dx} &= -1 + \frac{z-1}{z-2} \end{aligned}$$

*que uma EDO de variáveis separáveis, logo*

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad dz &= \left[1-\left(\frac{z-1}{z-2}\right)\right]dx \\
\Rightarrow \qquad dz &= \left(\frac{-1}{z-2}\right)dx \\
\Rightarrow \qquad (z-2)dz &= -1dx \\
\Rightarrow \qquad \int (z-2)dz &= -\int dx \\
\Rightarrow \qquad z^2-2z &= -x+c,
\end{aligned}
$$

*substituindo* $z = x - y$*, obtemos*

$$(x-y)^2 - 2(x-y) = -x + c$$

*que é a solução da EDO.*

### 3.3.4 Equações Homogêneas de Classe $D$

**Definição 3.8 (Equação Homogênea de Classe** $D$**)** *A forma geral de uma equação homogênea de classe D é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + g(x) f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.3.34}$$

*onde* $f$ *e* $g$ *são funções arbitrárias.*

**Método de Solução:** Fazendo

$$\frac{y}{x} = u \tag{3.3.35}$$

temos

$$
\begin{aligned}
y &= u \cdot x \\
\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= u\frac{dx}{dx} + x\frac{du}{dx} \cdot
\end{aligned}
$$

Daí

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \tag{3.3.36}$$

que é uma equação de variáveis separáveis.

Substituindo (3.3.35) e (3.3.36) em (3.3.34), temos

$$x\frac{du}{dx} = g(x) f(u). \tag{3.3.37}$$

Temos dois casos, a considerar:

**Caso 1:** $f(u) \neq 0$

Se $f(u) \neq 0$ podemos escrever (3.3.37) da forma

$$\frac{1}{f(u)}du = \frac{1}{x}g(x)dx$$

e, integrando,

$$\int \frac{1}{f(u)}du = \int \frac{1}{x}g(x)dx + c$$

obtemos a solução geral da equação diferencial.

**Caso 2:** $f(u) = 0$

Suponhamos que existe algum $u_0$ tal que $f(u_0) = 0$. Neste caso, é imediato comprovar que a reta, $y = u_0x$, é solução da equação diferencial (3.3.34), pois

$$\frac{y}{x} + g(x)f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{u_0x}{x} + g(x)f(u_0) = u_0 + g(x)\cdot 0 = u_0 = \frac{dy}{dx}.$$

Temos que $y = u_0x$ é chamada de solução solução singular da EDO.

**Exemplo 3.7** *Vamos aplicar o método de solução para resolver a equação diferencial homogênea de classe D*

$$x\frac{dy}{dx} - y = \frac{2x^3}{y}e^{\frac{y}{x}}.$$

***Solução:*** *Dada a equação*

$$x\frac{dy}{dx} = y + \frac{2x^3}{y}e^{\frac{y}{x}},$$

*podemos escrevê-la na forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{2x^2}{y}e^{\frac{y}{x}}.$$

*ou ainda,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{2xe^{\frac{y}{x}}}{\frac{y}{x}}. \tag{3.3.38}$$

*Ao compararmos (3.3.38) com (3.3.34), temos*

$$g(x) = 2x \quad e \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{\frac{y}{x}}.$$

*Fazendo*

$$\frac{y}{x} = u \tag{3.3.39}$$

*temos*

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}. \tag{3.3.40}$$

*Substituindo* (3.3.40) *e* (3.3.39) *em* (3.3.38), *temos*

$$\begin{aligned} u + x\frac{du}{dx} &= u + \frac{2x}{u}e^u \\ \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} &= \frac{2x}{u}e^u \\ \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} &= \frac{2}{u}e^u \\ \Rightarrow \quad ue^{-u}du &= 2dx \\ \Rightarrow \quad \int ue^{-u}du &= 2\int dx \end{aligned}$$

*Fazendo a mudança de variável*

$$u = u \Rightarrow du = du$$

*e*

$$dv = e^{-u}du \Rightarrow v = -e^{-u}$$

*temos*

$$\begin{aligned} -ue^{-u} + \int e^{-u}du &= 2x + c \\ \Rightarrow \quad -ue^{-u} - e^{-u} &= 2x + c \\ \Rightarrow \quad (-u-1)e^{-u} &= 2x + c \\ \Rightarrow \quad (u+1)e^{-u} &= -2x - c \end{aligned}$$

*Substituindo* $u = \frac{y}{x}$ *na equação anterior, chegamos a solução geral da EDO,*

$$\left(\frac{y}{x} + 1\right) = (-2x - c)e^{\frac{y}{x}}.$$

*Observe que neste exemplo não temos a solução singular, visto que,* $f(u) = \frac{e^u}{u}$ *é sempre diferente de zero.*

### 3.3.5 Equações Homogêneas de Classe $G$

Seja a equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{3.3.41}$$

onde $f$ satisfaz a condição

$$f(\lambda x, \lambda^{\alpha} y) = \lambda^{\alpha - 1} f(x,y)$$

para algum $\alpha$, ou ainda,

$$f(x,y) = \frac{1}{\lambda^{\alpha-1}} f(\lambda x, \lambda^{\alpha} y).$$

Note em primeiro lugar que, quando $\alpha = 0$ e $\lambda = x^{-1}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{1}{(x^{-1})^{0-1}} f\left(x^{-1}x, (x^{-1})^{0} y\right) = x^{-1} f(1,y)$$

então

$$x\frac{dy}{dx} = f(1,y)$$

que é uma EDO Separável, veja equação (3.2.10).

Se $\alpha = 1$ e $\lambda = x^{-1}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{1}{(x^{-1})^{1-1}} f\left(x^{-1}x, (x^{-1})^{1} y\right) = \frac{1}{(x^{-1})^{0}} f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

que é uma Equação Homogênea de Classe A, veja definição (3.5).

Em outros casos, fazendo

$$y = (ux)^{\alpha} \tag{3.3.42}$$

temos

$$\frac{dy}{dx} = \alpha (ux)^{\alpha-1}\left(u + x\tfrac{du}{dx}\right) \tag{3.3.43}$$

Substituindo (3.3.42) e (3.3.43) em (3.3.41), temos:

$$\alpha (ux)^{\alpha-1}\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = f(x, (ux)^{\alpha})$$

daí,

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{ux}\right)^{\alpha-1} f(x, (ux)^{\alpha})$$

ou ainda,

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{1}{ux}x, \left(\frac{1}{ux}\right)^{\alpha}(ux)^{\alpha}\right)$$

logo

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{1}{u}, 1\right)$$

que é uma EDO Separável, veja equação (3.2.10).

Temos

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = f\left(x, x^{\alpha}\frac{y}{x^{\alpha}}\right) = x^{\alpha-1} f\left(1, \frac{y}{x^{\alpha}}\right) = x^{\alpha-1} h\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$$

onde $\lambda = x$ e $x = 1$.

**Observação 3.2** *Se a equação* $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ *é tal que para algum* $\alpha \neq 0$*,* $f$ *satisfaz*

$$f(\lambda x, \lambda^{\alpha} y) = \lambda^{\alpha-1} f(x,y)$$

*então a mudança* $y = (ux)^{\alpha}$ *transforma a equação em uma EDO Separável. Se* $\alpha = 1$ *e* $\lambda = x^{-1}$ *a equação é Homogênea de Classe A. Também, se* $f$ *satisfaz a relação para* $\alpha = 0$ *e* $\lambda = x^{-1}$*, a EDO é separável.*

**Definição 3.9 (Equação Homogênea de Classe** $G$**)** *A forma geral de uma equação homogênea de classe G é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} F\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right) \tag{3.3.44}$$

*onde* $F$ *é uma função arbitrária.*

**Método de Solução:** Considerando

$$y = (ux)^{\alpha} \tag{3.3.45}$$

temos

$$\frac{dy}{dx} = \alpha (ux)^{\alpha-1}\left(u + x\frac{du}{dx}\right). \tag{3.3.46}$$

Substituindo (3.3.45) e (3.3.46) em (3.3.44), temos

$$\alpha (ux)^{\alpha-1}\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = \frac{(ux)^{\alpha}}{x} F\left(\frac{(ux)^{\alpha}}{x^{\alpha}}\right),$$

que acarreta em,

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{\alpha}(ux)^{-\alpha+1}\frac{(ux)^{\alpha}}{x}F(u^{\alpha}),$$

ou ainda,

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{\alpha}F(u^{\alpha}).$$

o que acarreta, em

$$x\frac{du}{dx} = -u + \frac{u}{\alpha}F(u^{\alpha}),$$

que é uma EDO Separável.

Vamos resolver um exemplo de uma EDO Homogênea de Classe $G$.

**Exemplo 3.8** *Neste exemplo resolveremos a EDO Homogênea de Classe G*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} - \frac{3\sqrt{x}}{y^2}$$

***Solução:*** *Temos*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{y}{2x} - \frac{3\sqrt{x}}{y^2}. \tag{3.3.47}$$

*Vamos encontrar* $\alpha$ *tal que,*

$$f(\lambda x, \lambda^{\alpha}) = \lambda^{\alpha-1} f(x,y).$$

*Podemos expressar* $f$*, da seguinte maneira,*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^{-1}y - 3y^{-2}x^{\frac{1}{2}}$$

*logo*

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda^{\alpha} y) &= \frac{1}{2}(\lambda x)^{-1}(\lambda^{\alpha} y) - 3(\lambda^{\alpha} y)^{-2}(\lambda x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\lambda^{-1}x^{-1}\lambda^{\alpha} y - 3\lambda^{-2\alpha}y^{-2}\lambda^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda^{\alpha-1}\frac{1}{2}x^{-1}y - 3y^{-2}x^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}-2\alpha}, \end{aligned}$$

*queremos que*

$$\alpha - 1 = \frac{1}{2} - 2\alpha \Rightarrow 3\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

*Daí,*

$$f(\lambda x, \lambda^{\frac{1}{2}} y) = \lambda^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}x^{-1}y - 3y^{-2}x^{\frac{1}{2}}\right],$$

*ou seja, encontramos* $\alpha = \frac{1}{2}$*, que satisfaz a relação*

$$f(\lambda x, \lambda^{\frac{1}{2}} y) = \lambda^{-\frac{1}{2}} f(x,y).$$

*Como* $y = (ux)^{\alpha}$*, temos*

$$y = (ux)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.48}$$

*Derivando* (3.3.48)*, obtemos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(ux)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[u + x\frac{du}{dx}\right]. \tag{3.3.49}$$

*Substituindo* (3.3.48) *e* (3.3.49) *em* (3.3.47)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(ux)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[u+x\frac{du}{dx}\right] &= \frac{(ux)^{\frac{1}{2}}}{2x}-\frac{3\sqrt{x}}{\left[(ux)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}}\\
\Rightarrow \qquad \left[u+x\frac{du}{dx}\right] &= \frac{(ux)^{\frac{1}{2}}}{x(ux)^{-\frac{1}{2}}}-\frac{6\sqrt{x}}{ux(ux)^{-\frac{1}{2}}}\\
\Rightarrow \qquad u+x\frac{du}{dx} &= \frac{ux}{x}-\frac{6u^{\frac{1}{2}}(x)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{ux}\\
\Rightarrow \qquad u+x\frac{du}{dx} &= u-6u^{-\frac{1}{2}}\\
\Rightarrow \qquad x\frac{du}{dx} &= -6u^{-\frac{1}{2}}\\
\Rightarrow \qquad \int\frac{dx}{x} &= -\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du\\
\Rightarrow \qquad \ln x &= -\frac{1}{9}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{3}+c\\
\Rightarrow \qquad \ln x &= -\frac{1}{9}\left(\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{3}+c
\end{aligned}$$

*onde obtemos a solução da EDO.*

**Observação 3.3** *Podemos escrever a equação (3.3.47) na forma da equação (3.3.44) , para isto, basta observar que*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2x}-\frac{3\sqrt{x}}{y^{2}}\\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2x}-\frac{y}{x}\frac{x}{y}\frac{3\sqrt{x}}{y^{2}}\\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}\left[\frac{1}{2}-3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{y^{3}}\right]\\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}\left[\frac{1}{2}-3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y}\right)^{3}\right]\\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}F\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

*onde* $F\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)=\left[\frac{1}{2}-3\left(\frac{x^{\alpha}}{y}\right)^{3}\right]$ *com* $\alpha=\frac{1}{2}$.

## 3.4 EQUAÇÕES EXATAS

Embora a EDO seja

$$ydx+xdy=0$$

seja Separável e Homogênea, podemos ver que ela é também equivalente à diferencial do produto de $x$ e $y$, isto é

$$d(xy) = ydx + xdy = 0.$$

Por integração, obtemos imediatamente a solução $xy = c$.

Você deve se lembrar do cálculo que, se $z = f(x,y)$ é uma função com derivadas parciais contínuas em uma região $R$ do plano $xy$, então sua diferencial total é

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Agora, se $f(x,y) = c$, segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Em outras palavras, dada uma família de curvas $f(x,y) = c$, podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem, calculando a diferencial total.

**Exemplo 3.9** *Dada* $f(x,y) = x^2 - 5xy + y^3 = c$ *encontraremos* $\frac{dy}{dx}$. *Para isso, basta calcular a diferencial total. Temos*

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy & = & d(c) \\ \Rightarrow & (2x-5y)dx + (-5x+3y^2)dy & = & 0 \\ \Rightarrow & \frac{dy}{dx} & = & \frac{5y-2x}{-5x+3y^2}. \end{array}$$

Para nossos propósitos, é mais importante inverter o problema, isto é, dada uma equação como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y-2x}{-5x+3y^2}, \tag{3.4.50}$$

queremos encontrar uma função, neste caso $f(x,y) = x^2 - 5xy + y^3$, onde

$$d(x^2 - 5xy + y^3) = 0.$$

**Observação 3.4** *Note que a equação (3.4.50) não é separável nem homogênea.*

**Definição 3.10 (Equação Exata)** *Uma expressão diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

*é uma diferencial exata em uma região $R$ do plano $xy$ se ela corresponde à diferencial total de* *algum função* $f(x,y)$. *Uma equação diferencial da forma*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

*é chamada de uma equação exata se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.*

**Exemplo 3.10** *Dada a função* $f(x,y)=x^3y^3$, *observe que, a equação* $x^2y^3dx+x^3y^2dy=0$ *é exata.*

O teorema a seguir é um teste para uma diferencial exata.

**Teorema 3.1 (Critério para uma Diferencial Exa ta)** *Sejam* $M(x,y)$ *e* $N(x,y)$ *funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular* $R$ *definida por* $a<x<b$, $c<y<d$. *Então, uma condição necessária e suficiente para que*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

*seja uma diferencial exata é*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

**Prova de que a Condição é necessária:** *Para simplificar, suponha que* $M(x,y)$ *e* $N(x,y)$ *tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em todo plano* $(x,y)$. *Agora, se a expressão* $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ *é exata, existe algum função* $f$ *tal que*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

*para todo* $(x,y)$ *em* $R$. *Logo,*

$$M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\,,\,N(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y},$$

*e*

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=N(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

*A igualdade das derivadas parciais mistas é uma consequência da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de* $M(x,y)$ *e* $N(x,y)$.

A prova de que a condição do teorema (3.1) é suficiente consiste em mostrar que existe uma função $f$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y}=M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}=N(x,y)$. A construção de tal função na verdade reflete um procedimento básica na resolução para equações exatas.

**Método de Solução:** Dada a equação

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

mostre primeiro que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Depois suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y),$$

daí podemos encontrar $f$ integrando $M(x,y)$ com relação a $x$, considerando $y$ constante. Escrevemos,

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx+g(y), \tag{3.4.51}$$

em que a função arbitrária $g(y)$ é a constante de integração. Agora, derivando $(3.4.51)$ com relação a $y$ e supondo $\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)=N(x,y).$$

Assim

$$g'(y) = N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \tag{3.4.52}$$

Finalmente, integre $(3.4.52)$ com relação a $y$ e substitua o resultado em $(3.4.51)$. A solução para a equação é $f(x,y)=c$.

**Exemplo 3.11** *Considere a EDO*

$$(1-2x^2-2y)\frac{dy}{dx}=4x^3+4xy.$$

*Mostraremos que*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

*onde* $M(x,y)=4x^3+4xy$ *e* $N(x,y)=-(1-2x^2-2y)$. *De fato,*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x$$

*e*

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x.$$

*Isto significa que a EDO é exata. Suponhamos, agora que,*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 4x^3 + 4xy,$$

*daí encontramos* $f$ *integrando* $4x^3 + 4xy$ *com relação a* $x$*, considerando* $y$ *constante. Escrevemos,*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 4x^3 + 4xydx \\ \Rightarrow \quad f(x,y) &= x^4 + 2yx^2 + g(y) \end{aligned} \tag{3.4.53}$$

*em que a função arbitrária* $g(y)$ *é a constante de integração. Agora, derivando* (3.4.53) *com relação a* $y$ *e supondo* $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = -(1-2x^2-2y)$*, temos*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2x^2 + g'(y) = -(1-2x^2-2y).$$

*Assim*

$$g'(y) = 2y - 1 \tag{3.4.54}$$

*Finalmente, basta integrarmos* (3.4.54) *com relação a* $y$*, ou ainda,*

$$g(y) = y^2 - y$$

*e substituirmos esse resultado em* (3.4.53)*. A solução para a EDO é*

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 - y = c.$$

Algumas vezes, é possível convertermos uma equação diferencial não exata em uma equação exata multiplicando-a por uma função $\mu(x,y)$ chamada "fator de integração".

**Definição 3.11 (Fator de Integração)** *Se*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

*é multiplicada por* $\mu(x,y)$ *para obter*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

*cujo membro esquerdo é uma diferencial exata, dizemos que obtivemos uma equação diferencial exata. A função de multiplicação* $\mu$ *é chamada fator de integração da equação diferencial* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$*.*

Dada a equação não exata

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.4.55}$$

queremos determinar um fator de integração $\mu$, onde supomos que $\mu$ depende apenas de uma variável. Temos dois casos, a considerar:

1. $\mu = \mu(x)$

   Como $\mu$ é um fator de integração para (3.4.55), ao multiplicarmos por $\mu$, obtemos uma equação exata da forma

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0$$

   assim

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

   daí

$$\begin{array}{rrcl} & \mu M_y & = & \mu_x N + \mu N_x \\ \Rightarrow & \mu M_y - \mu N_x & = & \mu_x N \\ \Rightarrow & (M_y - N_x)\mu & = & \mu_x N \\ \Rightarrow & \dfrac{\mu_x}{\mu} & = & \dfrac{M_y - N_x}{N}\ ,\ N \neq 0. \\ \Rightarrow & \displaystyle\int \frac{\mu_x}{\mu} & = & \displaystyle\int \frac{M_y - N_x}{N} \\ \Rightarrow & \ln \mu & = & \displaystyle\int \frac{M_y - N_x}{N}. \end{array}$$

   Obtemos o fator de integração $\mu$, que é dado por

$$\mu(x) \ = \ e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}\ ,\ N \neq 0. \tag{3.4.56}$$

2. $\mu = \mu(y)$

   Raciocinando de forma análoga ao item anterior obtemos,

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dx}\ ,\ M \neq 0.$$

Para melhor entendimento, apresentaremos o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.12** *Dada a EDO*

$$(x+y)dx + x\ln x dy = 0,$$

*encontraremos a sua solução. Observemos que a EDO não é exata, pois*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

*onde* $M(x,y) = x + y$ *e* $N(x,y) = x\ln x$. *De fato,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 1 \\ e \qquad & \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 1 + \ln x. \end{aligned}$$

*Vamos usar fórmula (3.4.56) para transformar a EDO não exata em uma exata. Temos*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \\ &= e^{\int \frac{1-(1+\ln x)}{x\ln x} dx} \\ &= e^{\int \frac{-\ln x}{x\ln x} dx} \\ &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \\ &= e^{-\ln x} \\ &= x^{-1} \end{aligned} \tag{3.4.57}$$

*Após termos encontrado o fator de integração,* $\mu(x) = \frac{1}{x}$, *multiplicamos a equação para obtermos*

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right) dx + \ln x dy = 0.$$

*Segue-se desta última forma que* $M(x,y) = 1 + \frac{y}{x}$ *e* $N(x,y) = \ln x$, *e daí*

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{x} \\ e \qquad & \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

*Isto significa que a EDO é exata. Suponhamos, agora que,*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = 1 + \frac{y}{x},$$

*daí encontramos* $f$ *integrando* $1 + \frac{y}{x}$ *com relação a x, considerando y constante. Escrevemos,*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 1 + \frac{y}{x} dx \\ \Rightarrow \quad f(x,y) &= x + y\ln x + g(y) \end{aligned} \tag{3.4.58}$$

*em que a função arbitrária* $g(y)$ *é a constante de integração. Agora, derivando* $(3.4.58)$ *com relação a y e supondo* $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = \ln x$, *temos*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \ln x + g'(y) = \ln x.$$

*Assim*

$$g'(y) \quad = \quad 0 \ . \tag{3.4.59}$$

*Finalmente, basta integrarmos* $(3.4.59)$ *com relação a y, ou ainda,*

$$g(y) = c$$

*e substituirmos esse resultado em* $(3.4.58)$. *A solução para a EDO é*

$$x + y\ln x + c = 0.$$

## 3.5 EQUAÇÕES LINEARES

No capítulo (2) seção (2.1.3), definimos a forma geral para uma equação diferencial de ordem $n$, como

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Lembre-se de que linearidade significa que todos os coeficientes são funções de $x$ somente e que $y$ e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Agora, quando $n = 1$, obtemos uma "EDO linear de Primeira Ordem",

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Dividindo pelo coeficiente $a_1(x)$, temos

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{3.5.60}$$

onde $P(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_1(x)}$.

**Definição 3.12 (Equação Linear)** *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{3.5.61}$$

*é chamada de equação linear.*

**Método de Solução:** Usando diferenciais, podemos escrevê-la, como

$$dy + [P(x)y - f(x)dx] = 0. \tag{3.5.62}$$

Equações lineares possuem a agradável propriedade através da qual podemos sempre encontrar uma função $\mu(x)$ em que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)dx] = 0, \tag{3.5.63}$$

é uma equação diferencial exata. Logo

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)) = \frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)(P(x)y - f(x))] \tag{3.5.64}$$

então

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)P(x).$$

Esta é uma equação separável em que podemos determinar $\mu(x)$. Sendo $\mu(x) \neq 0$, temos

$$\frac{d\mu}{\mu(x)} = P(x)dx. \tag{3.5.65}$$

Então

$$\ln \mu = \int P(x)dx \tag{3.5.66}$$

assim

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{3.5.67}$$

A função $\mu(x)$ definida em $(3.5.67)$ é um fator de integração para a equação linear $(3.5.61)$. Note que não precisamos usar uma constante de integração em $(3.5.66)$, pois $(3.5.64)$ não se altera se multiplicarmos por uma constante. Observe que $\mu(x) \neq 0$ para todo $x$ em $I$.

Multiplicando a equação $(3.5.61)$ por (3.5.67), obtemos

$$e^{\int P(x)dx}\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = e^{\int P(x)dx} f(x), \tag{3.5.68}$$

daí

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} y\right] = e^{\int P(x)dx} f(x). \tag{3.5.69}$$

Integrando esta equação, obtemos

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + ce^{-\int P(x)dx}. \tag{3.5.70}$$

Em outras palavras, se $(3.5.61)$ tiver uma solução, ela deverá ser da forma $(3.5.70)$. Reciprocamente, é imediato que $(3.5.70)$ constitui uma família a um parâmetro de soluções para a equação $(3.5.61)$.

**Observação 3.5** *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{3.5.71}$$

*é chamada de equação linear.*

**a)** *Se $P(x) = 0$ temos, em particular, uma EDO Quadratura. Veja (3.1.4);*

**b)** *Se $f(x) = 0$ temos, em particular, uma EDO separável. Veja (3.2.10);*

**b)** *Se $f$ e $P$ forem constantes, temos uma EDO Quadratura. Veja (3.1.4);*

**Exemplo 3.13** *Dada a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x \tag{3.5.72}$$

*vamos obter sua solução. Ao compararmos a equação (3.5.72) com (3.5.61) temos que $P(x) = -\dfrac{4}{x}$ e $f(x) = x^5e^x$. Segue de (3.5.67) que o fator de integração é*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\int -\frac{4}{x}dx} \\ &= e^{-4\ln x} \\ &= x^{-4} \end{aligned} \tag{3.5.73}$$

*Multiplicando a equação (3.5.72) pelo fator de integração, temos*

$$\begin{aligned} x^{-4}\frac{dy}{dx} - x^{-4}\frac{4}{x}y &= xe^x \\ \frac{d}{dx}\left[y \cdot x^{-4}\right] &= xe^x \\ \int \frac{d}{dx}\left[y \cdot x^{-4}\right] dx &= \int xe^x dx \\ y \cdot x^{-4} &= xe^x - e^x + c \\ y &= x^5e^x - x^4e^x + cx^4 \end{aligned} \tag{3.5.74}$$

*Portanto, a solução geral da EDO é*

$$y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$$

## 3.6 EQUAÇÃO DE BERNOULLI

**Definição 3.13 (Equação de Bernoulli)** *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y(x) = f(x)y(x)^n \tag{3.6.75}$$

*em que $n$ é um número real qualquer, é chamada de equação de Bernoulli. Para $n = 0$ e $n = 1$, a equação $(3.6.75)$ é linear em $y$.*

**Método de Solução:** Se $y \neq 0$, a equação $(3.6.75)$ pode ser escrita como

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n} \cdot y = f(x) \ .$$

Então

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x) \ . \tag{3.6.76}$$

Se fizermos $w = y^{1-n}$, com $n \neq 0$ e $n \neq 1$, temos

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Com esta substituição, a equação $(3.6.76)$ transforma-se na equação

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x) \ , \tag{3.6.77}$$

que é uma EDO linear. Resolvendo $(3.6.77)$ e depois substituindo $y^{1-n} = w$, obtemos a solução de $(3.6.75)$.

**Observação 3.6** *A equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y(x) = f(x)y(x)^n \tag{3.6.78}$$

*em que $n$ é um número real qualquer, é chamada de equação de Bernoulli (MURPHY, 1960).*

**a)** *Se $n = 0$ ou $n = 1$ temos, em particular, uma EDO Linear de Primeira Ordem. Veja (3.5.62);*

**b)** *Se $P(x) = 0$ ou $f(x) = 0$ temos, em particular, uma EDO separável. Veja (3.2.10);*

**b)** *Se $f$ e $P$ forem constantes, temos uma EDO Quadratura. Veja (3.1.4);*

**Exemplo 3.14** *Vamos aplicar o método de solução para resolver a equação de Bernoulli*

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y = xy^2. \tag{3.6.79}$$

***Solução:***

*Como* $y \neq 0$*, temos que* $P(x) = \frac{1}{x}$*,* $f(x) = x$ *e* $n = 2$*. Fazendo a mudança de variável* $w = y^{-1}$*, obtemos*

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}w = -x. \tag{3.6.80}$$

*O fator de integração é dado por*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{-\int \frac{1}{x}dx}\\ &= e^{-\ln x}\\ &= e^{\ln x^{-1}}\\ &= x^{-1}.\end{aligned}$$

*Multiplicando* $(3.6.80)$ *por* $x^{-1}$*, temos*

$$\begin{aligned}x^{-1}\frac{dy}{dx}-x^{-2}w &= -1\\ \frac{d}{dx}\left[x^{-1}w\right] &= -1\\ \int\frac{d}{dx}\left[x^{-1}w\right] &= -\int 1\\ x^{-1}w &= -x+c\\ w &= -x^2+cx,\end{aligned}$$

*como* $w = y^{-1}$

$$y = \frac{1}{-x^2+cx}.$$

*Solução da EDO.*

## 3.7 EQUAÇÃO DE RICATTI

**Definição 3.14 (Equação De Ricatti)** *A equação diferencial não linear*

$$\frac{dy}{dx} = P(x)+Q(x)y+R(x)y^2 \tag{3.7.81}$$

*é chamada de equação de Ricatti.*

**Método de Solução:** Se $y_1$ é uma solução particular para a equação $(3.7.81)$, então as substituições

$$y = y_1 + u \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$$

na equação $(3.7.81)$ produzem a seguinte equação diferencial na variável $u$:

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2y_1R)u \quad = \quad Ru^2 \tag{3.7.82}$$

Como $(3.7.82)$ é uma equação de Bernoulli com $n = 2$, ela pode, por sua vez, pode ser reduzida à Equação Linear

$$\frac{dw}{dx} + (Q + 2y_1R)w \quad = \quad -R \tag{3.7.83}$$

através da substituição $w = u^{-1}$. Ao encontrarmos, $u$ na equação (3.7.83), basta substituirmos na relação

$$y = y_1 + u$$

e teremos a solução da EDO.

**Observação 3.7** *A equação diferencial não linear*

$$\frac{dy}{dx} \quad = \quad P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{3.7.84}$$

**a)** *Se $P(x) = 0$ a equação (3.7.84) passa a ser uma EDO de Bernoulli;*

**b)** *Se $R(x) = 0$ a equação (3.7.84) passa a ser EDO Linear de Primeira Ordem;*

**c)** *Se $P$, $Q$ e $R$ forem constantes, temos uma EDO Quadratura. Veja (3.1.4);*

**Exemplo 3.15** *Dada a EDO*

$$\frac{dy}{dx} \quad = \quad 2 - 2xy + y^2 \tag{3.7.85}$$

*temos que $y_1 = 2x$ é solução particular, pois*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2x) &= 2 - 2x(2x) + (2x)^2 \\ 2 &= 2 - 2x(2x) + (2x)^2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

*Sendo $y_1 = 2x$ uma solução particular, então as substituições*

$$y = 2x + u \quad e \quad \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{du}{dx}$$

*na equação* $(3.7.85)$ *produzem a seguinte equação diferencial na variável u:*

$$\frac{du}{dx} - 2xu = u^2 \tag{3.7.86}$$

*que é uma equação de Bernoulli com* $n = 2$. *Divindo (3.7.86) por* $u^2$ *e substituindo* $w = u^{-1}$ *reduzimos a equação à EDO Linear de Primeira Ordem.*

$$\frac{dw}{dx} + 2xw = -1 \tag{3.7.87}$$

*Ao resolvermos a equação (3.7.87), encontrarmos*

$$w = \frac{c - \int e^{x^2} dx}{e^{x^2}}$$

*e como* $w = u^{-1}$, *temos*

$$u = \frac{e^{x^2}}{c - \int e^{x^2} dx}.$$

*A solução geral da EDO é*

$$y = 2x + \frac{e^{x^2}}{c - \int e^{x^2} dx}.$$

## 3.8 EQUAÇÃO DE CLAIRAUT

**Definição 3.15 (Equação De Clairaut)** *Toda equação diferencial de* $1^a$ *ordem da forma*

$$y = x\frac{dy}{dx} + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.8.88}$$

*é chamada de Equação de Clairaut onde g é uma função diferenciável.*

**Método de Solução:** Para resolver a equação (3.8.88) fazemos a mudança de variável $\frac{dy}{dx} = p$. Assim, a equação (3.8.88) passa a ser

$$y = xp + g(p) \ . \tag{3.8.89}$$

Derivando $(3.8.89)$ com relação a $x$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p + xp' + g'(p).p' \\ p &= p + xp' + g'(p).p' \\ (x + g'(p))p' &= 0 \end{aligned}$$

então

$$p' = 0 \quad \text{ou} \quad x + g'(p) = 0$$

**Caso 1:** Solução geral

Se $p' = 0$ então $p = c$. Devido ao fato de $\dfrac{dy}{dx} = p$ temos $\dfrac{dy}{dx} = c$. Portanto a solução geral é

$$y \;=\; cx + g(c).$$

Concluímos que $y = cx + g(c)$ é uma família de retas em que $c$ é uma constante arbitrária.

**Caso 2:** Solução singular

Se $x + g'(p) = 0$ podemos obter outra solução da equação (3.8.89) eliminando $p$ entre as equações

$$\begin{cases} x + g'(p) &= 0 \\ y &= xp + g(p) \end{cases}$$

Esta solução é conhecida como solução singular da equação de Clairaut a qual conduz sempre a uma envoltória da família de retas definida pela solução geral.

**Observação 3.8** *Envoltória é uma curva que é tangente a todas as curvas da família de curvas.*

**Exemplo 3.16** *Resolvemos a EDO*

$$y \;=\; x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{3.8.90}$$

*como exemplo de uma EDO de Clairaut, observe a equação (3.8.88). Para isso, fazemos a mudança de variável* $\dfrac{dy}{dx} = p$. *Assim, a equação (3.8.90) passa a ser*

$$y = xp + \frac{1}{2}p^2 \ . \tag{3.8.91}$$

*Derivando* (3.8.91) *com relação a x, obtemos*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p + xp' + p.p' \\ p - p &= xp' + g'(p).p' \\ (x + g'(p))p' &= 0 \end{aligned}$$

*então*

$$p' = 0 \quad \text{ou} \quad x + p = 0$$

**Caso 1:** *Solução geral*

*Se* $p' = 0$ *então* $p = c$. *Devido ao fato de* $\dfrac{dy}{dx} = p$ *temos* $\dfrac{dy}{dx} = c$. *Portanto a solução geral é*

$$y = xc + \frac{1}{2}c^2$$

*Concluímos que* $y = xc + \frac{1}{2}c^2$ *é uma família de retas em que* $c$ *é uma constante arbitrária.*

**Caso 2:** *Solução singular*

*Se* $x + p = 0$ *podemos obter outra solução da equação (3.8.91) eliminando* $p$ *entre as equações*

$$\begin{cases} x + p = 0 \\ y = xp + \frac{1}{2}p^2 \end{cases}$$

*temos* $p = -x$ *e portanto* $y = -\frac{1}{2}x^2$. *Temos que* $y = -\frac{1}{2}x^2$ *é uma envoltória da família de retas definida pela solução geral.*

## 3.9 EQUAÇÃO DE D'ALEMBERT

**Definição 3.16 (Equação de D'Alembert)** *A forma geral da equação diferencial ordinária de d'Alembert é dada por:*

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

*onde* $f$ *e* $g$ *são funções arbitrárias. Esta EDO é uma generalização da E.D.O. de Clairaut.*

**Método de Solução:** Fazendo

$$\frac{dy}{dx} = p$$

temos

$$y = xf(p) + g(p).$$

Daí

$$\frac{dy}{dx} = 1f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

logo,

$$p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx},$$

ou ainda,

$$(xf'(p) + g'(p))\frac{dp}{dx} = p - f(p)$$

**Caso 1:** $p-f(p)\neq 0$;

Se $p-f(p)\neq 0$, temos:

$$x\frac{f'(p)}{p-f(p)}+\frac{g'(p)}{p-f(p)}\frac{dp}{dx}=1$$

ou ainda

$$x\frac{f'(p)}{p-f(p)}+\frac{g'(p)}{p-f(p)}=\frac{dx}{dp}$$

ou seja,

$$\frac{dx}{dp}-\frac{f'(p)}{p-f(p)}x=\frac{g'(p)}{p-f(p)}$$

que é uma equação linear em x.

**Caso 2:** $p-f(p)=0$.

Se existe algum $p_0$ tal que $p_0-f(p_0)=0$, temos que,

$$y=p_0x+g(p_0)$$

é solução singular da EDO. De fato, dada a equação,

$$y=xf\left(\frac{dy}{dx}\right)+g\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

e $y=p_0x+g(p_0)$ temos

$$\frac{dy}{dx}=p_0$$

e

$$\begin{aligned}
y &= xf(p_0)+g(p_0)\\
p_0x+g(p_0) &= xf(p_0)+g(p_0)\\
p_0x &= xf(p_0)\\
p_0x-xf(p_0) &= 0\\
(p_0-f(p_0))x &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

**Exemplo 3.17** *Resolveremos a equação de D'Alembert*

$$y = x\left(y'+\frac{1}{y'}\right)+(y')^4 \ . \tag{3.9.92}$$

*Fazendo $y'=p$ e substituindo na equação (3.9.92), temos*

$$y=x\left(p+\frac{1}{p}\right)+(p)^4,$$

*daí*

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dx}{dx}\left(p+\frac{1}{p}\right)+x\left(\frac{dp}{dx}-p^{-2}\frac{dp}{dx}\right)+4p^3\frac{dp}{dx}\\
\frac{dy}{dx} &= \left(p+\frac{1}{p}\right)+\left[x\left(1-p^{-2}\right)+4p^3\right]\frac{dp}{dx}\\
p &= \left(p+\frac{1}{p}\right)+\left[x\left(1-p^{-2}\right)+4p^3\right]\frac{dp}{dx}\\
-\frac{1}{p} &= \left[x\left(1-p^{-2}\right)+4p^3\right]\frac{dp}{dx}\\
1 &= -p\left[x\left(1-p^{-2}\right)+4p^3\right]\frac{dp}{dx}\\
1 &= \left[x\left(-p+\frac{1}{p}\right)-4p^4\right]\frac{dp}{dx}
\end{aligned}
$$

*onde podemos escrever*

$$
\begin{aligned}
x\left(-p+\frac{1}{p}\right)-4p^4 &= \frac{dx}{dp}\\
\frac{dx}{dp}+x\left(p-\frac{1}{p}\right) &= 4p^4.
\end{aligned}
$$

*que é uma EDO Linear de Primeira Ordem. Temos*

$$
\begin{aligned}
\mu(p) &= e^{\int\left(p-\frac{1}{p}\right)dp}\\
&= e^{\int p\,dp-\int\frac{1}{p}dp}\\
&= e^{\frac{p^2}{2}-\ln p}\\
&= e^{-\ln p}\cdot e^{\frac{p^2}{2}}\\
&= e^{\ln p^{-1}}\cdot e^{\frac{p^2}{2}}\\
&= \frac{1}{p}\cdot e^{\frac{p^2}{2}}
\end{aligned}
.
$$

*Multiplicando a equação pelo fator de integração encontrado, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{2}}\frac{dx}{dp}+\frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{2}}\left(p-\frac{1}{p}\right)x &= -4p^4\frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{2}}\\
\frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{2}}\right] &= -4p^3e^{\frac{p^2}{2}}\\
\int\frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{2}}\right]dx &= \int -4p^3e^{\frac{p^2}{2}}dp\\
x\cdot\frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{2}} &= -4\int p^3e^{\frac{p^2}{2}}dp\\
x &= -4pe^{-\frac{p^2}{2}}\int p^3e^{\frac{p^2}{2}}dp+cpe^{-\frac{p^2}{2}}\\
x &= -4pe^{-\frac{p^2}{2}}2\int\frac{p^2}{2}\cdot e^{\frac{p^2}{2}}pdp+cpe^{-\frac{p^2}{2}}.
\end{aligned}$$

*Fazendo* $s=\dfrac{p^2}{2}$ *temos* $ds=pdp$.

$$x = -4pe^{-\frac{p^2}{2}}2\int s\cdot e^s ds+cpe^{-\frac{p^2}{2}}$$

*Fazendo* $u=s$ *o que implica em* $du=ds$ *e* $dv=e^s$ *o que acarreta em* $v=e^s$, *temos*

$$\begin{aligned}
x &= -4pe^{-\frac{p^2}{2}}2\left[se^s-e^s\right]+cpe^{-\frac{p^2}{2}}\\
&= -8pe^{-\frac{p^2}{2}}\left[e^s(s-1)\right]+cpe^{-\frac{p^2}{2}}\\
&= -8pe^{-\frac{p^2}{2}}\left[e^{\frac{p^2}{2}}\left(\frac{p^2}{2}-1\right)\right]+cpe^{-\frac{p^2}{2}}\\
&= -8p\left(\frac{p^2}{2}-1\right)+cpe^{-\frac{p^2}{2}}\\
&= \frac{-8p^3}{2}+8p+cpe^{-\frac{p^2}{2}}\\
&= -4p^3+8p+cpe^{-\frac{p^2}{2}}
\end{aligned}$$

*onde temos* $x=-4p^3+8p+cpe^{-\frac{p^2}{2}}$ *uma solução da EDO.*

# 4 CONCLUSÃO

Ao resolvermos alguns tipos de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem que são classificadas de acordo com *software Maple 12*, observamos a importância em fazer a abordagem algébrica de uma forma detalhada, pois desta maneira, fornecemos instruções significativas para o leitor que está iniciando seus estudos nesta área. Ao explicarmos, as diferentes maneiras com que o *software Maple 12* classifica as EDO, concluímos que fornecemos ao estudante um melhor aproveitamento, quando o mesmo utilizar o *software* concomitante com as equações. Esperamos que este material venha despertar o interesse dos leitores para estudarem as equações diferencias.

# REFERÊNCIAS

ABUNAHMAN, S. A. **Equações Diferenciais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Addison-Wesley, 1989.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 1. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Globo, 2000.

MALUMBRES, J. L. V. **Metodos Clásicos de Resolucion de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**. 4. ed. Espanha: Serviço de Publicações da Universidade de La Rioja, 1996.

MURPHY, G. M. **Ordinary Differential Equations Their Solutions**. 1. ed. New York: Litton Educational Publishing, 1960.

VALDES JUAN E N, S. C. N. **La historia de las equaciones diferenciales ordinarias contadas por sus livros de texto.** 2002. Disponível em: <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/>. Acesso em: 10 de Março de 2011.

ZILL DENNIS G; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais, Volume I**. 4. ed. São Paulo: Markon Books, 2006.