UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

KELLY VANESSA PAREDE BARCO

MODELO MATRICIAL DE LESLIE: CONCEITOS ALGÉBRICOS NO ESTUDO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL POR FAIXA ETÁRIA

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2012

KELLY VANESSA PAREDE BARCO

MODELO MATRICIAL DE LESLIE: CONCEITOS ALGÉBRICOS NO ESTUDO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL POR FAIXA ETÁRIA

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Priscila Amara Patricio de Melo

CAMPO MOURÃO

2012

TERMO DE APROVAÇÃO

Kelly Vanessa Parede Barco

Modelo Matricial de Leslie: Conceitos algébricos no estudo de crescimento populacional por faixa etária

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof. Msc. Priscila Amara Patricio de Melo

Prof. Msc. Adriana Strieder Philippsen

Prof. Msc. Viviane Colucci

Campo Mourão, 2012

Dedico esse trabalho à minha família, em especial à minha mãe, que sempre me apoiou e incentivou a seguir em frente, e ao meu namorado Paulo Roberto, que me auxiliou na escolha do tema da pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida.

Aos meus familiares, que estiveram ao meu lado, me apoiando e dando forças para enfrentar as dificuldades encontradas.

Ao meu namorado, que compreendeu minhas ausências devido ao tempo dedicado ao desenvolvimento desse trabalho, e por todo o incentivo.

A professora Priscila, minha orientadora, pela sua dedicação e pelo grande apoio prestado a mim no desenvolvimento de todo o trabalho.

Ao professor Adilandri, coordenador da especialização, pela sua dedicação, confiança e palavras de incentivo dadas em vários momentos durante o curso.

Aos demais professores da especialização, pelo conhecimento compartilhado.

Aos colegas de turma, que estiveram ao meu lado durante toda essa caminhada, compartilhando momentos de tensão, nervosismo, felicidade e conquistas.

A Matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes. Malba Tahan

RESUMO

BARCO, Kelly Vanessa Parede. Modelo Matricial de Leslie: Conceitos algébricos no estudo de crescimento populacional por faixa etária. 50 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

Nas diversas áreas do conhecimento a Matemática se faz presente como um instrumento importante que auxilia na resolução de problemas. Por meio dela é possível criar modelos que representam matematicamente uma situação real, o que facilita a obtenção de dados e análises de resultados. Visando mostrar uma aplicação prática da Matemática em outra área, o presente trabalho apresenta um modelo matricial utilizado por biólogos e demógrafos para estimativa de crescimento populacional, denominado modelo matricial de Leslie. Com esse modelo é possível descrever o crescimento das populações de fêmeas animais ou humanas por faixas etárias, levando-se em consideração a expectativa de sobrevivência e natalidade em cada faixa. Para melhor compreensão desse modelo é preciso que se conheça alguns conceitos de Álgebra Linear, tais como autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes. Por meio do estudo dos autovalores da matriz de Leslie é possível verificar se, com o passar do tempo, a população aumenta, diminui ou se estabiliza e, ainda, em qual proporção isso acontece. Essas informações auxiliam os pesquisadores que utilizam tal modelo em determinar os melhores períodos de colheitas, verificar se determinada espécie está entrando em extinção, entre outros.

Palavras-chave: Matriz de Leslie, Autovalores e autovetores, Crescimento populacional.

ABSTRACT

BARCO, Kelly Vanessa Parede. Leslie's Matrix Model: Algebraic concepts in the study of population growth by age group. 50 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

In many areas of the knowledge, the Mathematics is present as an important tool that assists in solving problems. Through it possibility the creation of mathematical models that represent a real situation, which facilitates the data collection and analysis of results. In order to demonstrate a practical application of Mathematics in another area, this paper presents a matrix model used by biologists and demographers to estimate population growth, called the Leslie´s matrix model. This model make possible to describe the growth of female animals or human populations by age group, taking into account the expectation of survival and birth rates in each band. For better understanding of this model it is necessary to know some concepts of linear algebra such as eigenvalues, eigenvectors and matrix diagonalization. By studying the eigenvalues of the Leslie matrix is possible to determine whether, over time, the population increases, decreases or stabilizes, and also in what proportion it happens. This information helps researchers that use this model to determine the best sampling periods to determine whether certain species are going extinct, among others.

Keywords: Leslie´s matrix, Eigenvalues and eigenvectors, Population growth.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é um instrumento importantíssimo para as ciências e tecnologia. Por meio dela é possível criar modelos que descrevem comportamento de fenômenos naturais e que auxiliam na resolução de problemas de diversas áreas, tais como engenharia, física, química, biologia, informática, entre outras. Partindo disso, percebemos a necessidade da utilização da Matemática para que possam obter resultados satisfatórios na realização de diversas atividades, sejam elas científicas, tecnológicas ou do cotidiano.

O estudo do crescimento, ao longo do tempo, de uma população é um problema comum em diversas áreas. Por exemplo, muitos produtores buscam os períodos corretos para que possam colher os animais de uma população de forma a obter a maior produtividade. Nesse caso, colher pode não significar somente o abate dos animais, mas também pode caracterizar o período em que o animal deve ser removido da população para outros fins. Um exemplo prático dessa situação é a colheita de lã de ovelhas.

Para obter os melhores resultados é necessário que se tenha uma colheita sustentável, isto é, o rendimento de cada colheita e a distribuição etária da população remanescente após cada colheita deve ser constante.

Um dos modelos de crescimento populacional mais comumente usados por demógrafos é o modelo Leslie, desenvolvido na década de 1940 (ANTON; RORRES, 2001).

No presente trabalho estudaremos este modelo, que tem por fim estimar o comportamento do crescimento populacional por meio de parâmetros demográficos de nascimento e esperança de sobrevivência da fêmea em determinada faixa etária, fazendo com que ao final obtemos a proporção das fêmeas em cada faixa etária. Esses valores serão base para a determinação dos melhores períodos de colheita a fim de que elas sejam sustentáveis.

No Capítulo 2 listaremos algumas informações básicas das matrizes e das transformações lineares que serão necessárias ao entendimento dos capítulos posteriores.

O Capítulo 3 será dedicado ao estudo dos autovalores e autovetores de um operador linear.

Ainda neste capítulo, estudamos sob quais condições um operador linear é diagonalizável.

O último capítulo é reservado ao estudo do modelo matricial de Leslie. Nele utilizamos a teoria apresentada nos capítulos anteriores para investigar o crescimento ao longo do tempo de uma população feminina que está dividida em faixas etárias. Por fim, analisaremos o comportamento limite da distribuição etária.

1.1 MOTIVAÇÃO

Dentre as diversas aplicações da matemática em diversas áreas do conhecimento vamos trabalhar com um modelo matemático que auxilia na Biologia, sendo um recurso utilizado para descrever o crescimento de populações animais e humana.

O modelo matricial de Leslie possibilita esse estudo, determinando o limite da distribuição etária e da faixa de crescimento populacional da espécie em questão, auxiliando assim na obtenção de colheita sustentável, indicando se a espécie corre risco de extinção, entre diversas outras aplicações. Trata-se de uma modelo já conhecido e bastante utilizado pelos demógrafos desde a década de 40, quando foi desenvolvido.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Apresentar uma aplicação prática de Álgebra Linear, no qual se faz necessário o estudo de conteúdos como diagonalização de matrizes, autovalores e autovetores, que nos possibilita o estudo do crescimento populacional de espécies animais e humana por meio de um modelo matricial.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Apresentar os principais conceitos e teoremas relacionados a autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes, necessários ao estudo do modelo;
- Determinar o polinômio característico da matriz de Leslie;
- Verificar, por meio do conceito de limite, a existência de um único autovalor positivo da matriz de Leslie;

- Estabelecer um modelo padrão para o cálculo do autovetor correspondente ao único autovalor positivo de uma matriz de Leslie;
- Verificar a relação entre o autovalor dominante e o comportamento do crescimento populacional.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo vamos recordar alguns resultados e estabelecer algumas notações que serão utilizados ao longo deste trabalho. Assumiremos que o leitor esteja familiarizado com os conceitos básicos de Álgebra Linear como espaço vetorial e transformação linear. Ao longo de todo texto denotaremos por $\mathbb{K}$ um corpo qualquer, mas nas aplicações utilizaremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Indicamos as referências (COELHO; LOURENCO, 2001; LEON, 1998; BOLDRINI et al., 1986) para maiores detalhes.

Definição 2.1 *Uma matriz obtida a partir da matriz identidade por uma das operações elementares é chamada de matriz elementar. Existem três tipos de matrizes elementares, uma para cada operação elementar.*

(a) **Tipo I:** Uma matriz elementar do tipo I é obtida trocando-se a ordem de duas linhas da matriz identidade.

Exemplo 2.1 *Seja*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_1 é a matriz elementar do tipo I, já que foi obtida trocando-se as duas primeiras linhas da matriz identidade. Seja A uma matriz 3×3.

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A E_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Multiplicando A à esquerda por E_1, trocamos as duas primeiras linhas de A. Multiplicar A à direita por E_1 equivale a efetuar a operação elementar sobre colunas que consiste na troca das duas primeiras colunas de A.

(b) Tipo II: Uma matriz elementar do tipo II é uma matriz obtida multiplicando-se uma linha da matriz identidade por uma constante não nula.

Exemplo 2.2 *Seja*

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

uma matriz elementar do tipo II.

$$E_2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AE_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}$$

A multiplicação à esquerda por E_2 efetua a operação elementar sobre as linhas que consiste em multiplicar a terceira linha por 3, enquanto a multiplicação à direita por E_2 efetua a operação elementar sobre as colunas que consiste em multiplicar a terceira coluna por 3.

(c) Tipo III: Uma matriz elementar do tipo III é uma matriz obtida da matriz identidade somando-se um múltiplo de uma das linhas a outra linha.

Exemplo 2.3 *Seja*

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

uma matriz elementar do tipo III. Se A é uma matriz 3×3, *então*

$$
\begin{aligned}
E_3A &= \begin{pmatrix} a_{11}+3a_{31} & a_{12}+3a_{32} & a_{13}+3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
AE_3 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31}+a_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Multiplicação à esquerda por E_3 soma 3 vezes a terceira linha à segunda. Multiplicação à direita por E_3 soma 3 vezes a primeira coluna à terceira.

Em geral, suponha que E seja uma matriz elementar $n \times n$. Podemos pensar em E como sendo obtida da matriz identidade por uma operação elementar sobre as linhas ou sobre as colunas. Se A é uma matriz $n \times r$, multiplicar A por E à esquerda tem o efeito de efetuar a mesma operação sobre as linhas de A. Se B é uma matriz $m \times n$, multiplicar B por E a direita equivale a efetuar a mesma operação sobre as colunas de B.

Definição 2.2 *Uma matriz B é equivalente por linhas a A se existe uma sequência finita de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que*

$$B = E_kE_{k-1}\ldots E_1A$$

Em outras palavras, B é equivalente por linhas a A se B puder ser obtida de A por um número finito de operações elementares.

Teorema 2.1 *Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, isto é, uma matriz quadrada de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$, não é invertível se, e somente se, $detA = 0$.*

Demonstração: A matriz A pode ser reduzida a sua forma escada reduzida por linhas por meio de um número finito de operações elementares, logo

$$U = E_kE_{k-1}\ldots E_1A$$

onde U está na forma escada reduzida e por linhas e as matrizes E_i são elementares.

$$
\begin{aligned}
det(U) &= det(E_kE_{k-1}\ldots E_1A) \\
&= det(E_k)det(E_{k-1})\ldots det(E_1)det(A)
\end{aligned}
$$

Como os determinantes das matrizes E_i são todos diferentes de zero, temos que $det(A) = 0$ se, e somente se, $det(U) = 0$. Se A não é invertível, então U tem um linha contendo apenas elementos nulos e, portanto, $det(U) = 0$.

Se A é invertível, então U é triangular e todos os elementos da diagonal são iguais a 1, logo $det(U) = 1$. ■

Proposição 2.1 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e* $T : U \to V$ *uma transformação linear. Então*

(a) *Ker T é um subespaço vetorial de U e Im T é um subespaço vetorial de V.*

(b) *T é injetora se, e somente se, Ker T=*$\{0\}$.

Demonstração: (a) Inicialmente, vamos provar que $KerT$ é um subespaço vetorial de V. Sabe-se que $0 \in KerT$, portanto $KerT \neq \varnothing$.

Sejam u_1, $u_2 \in KerT$. Então

$$T(u_1) = 0 \; e \; T(u_2) = 0$$

Segue que

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0$$

Logo, $u_1 + u_2 \in KerT$.

Sejam $u \in KerT$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Temos que

$$T(u) = 0$$

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Logo, $\alpha u \in KerT$.

Portanto, $KerT$ é um subespaço vetorial de V.

Agora vamos mostrar que ImT é um subespaço vetorial de V. Como $T : U \to V$ é uma transformação linear, então $ImT = \{v \in V : \exists u \in U \; com \; T(u) = v\}$.

Sejam v_1, $v_2 \in ImT$. Então

$$\exists \; u_1 \in U_1 \; tal \; que \; T(u_1) = v_1$$

$$\exists\, u_2 \in U_2 \; tal \; que \; T(u_2) = v_2$$

Logo, $v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2)$, isto é, $v_1 + v_2 \in ImT$.

Sejam $v \in ImT$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$\exists\, u \in U \; tal \; que \; T(u) = v$$

$$\alpha v = \alpha T(u) = T(\alpha u)$$

Logo, $\alpha v \in ImT$.

Portanto, ImT é um subespaço vetorial de V.

(b) $(\Rightarrow)$ Note que se T é injetora, então não pode haver nenhum vetor além de 0 em $KerT$, pois sabemos que $T(0) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Sejam u_1, $u_2 \in U$ tais que

$$T(u_1) = T(u_2)$$

$$T(u_1) - T(u_2) = 0$$

$$T(u_1 - u_2) = 0$$

Logo, $u_1 - u_2 \in KerT$, mas por hipótese temos que $KerT = 0$, então $u_1 - u_2 = 0$ isto é, $u_1 = u_2$.

Portanto, T é injetora. $\blacksquare$

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e sejam $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ duas bases de U. Considere a matriz $M = (a_{ij})_{i,j} = [Id]_{B,B'}$ associada à transformação identidade com relação às bases B e B', isto é, matriz dada pelos coeficientes

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{n1}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}v_i \\ \vdots \\ u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{nn}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}v_i. \end{cases}$$

Com isto, se $v \in U$ e escrevendo $v = (a_1, \ldots, a_n)_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)_{B'}$ as coordenadas de v com relação às bases B e B', teremos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{B'}$$

isto é, a multiplicação de M pelas coordenadas de v na base B fornece-nos as coordenadas de v na base *B'*. Tal matriz é chamada de *matriz de mudança de bases de B' para B*. Observe que a matriz M é sempre invertível pois a transformação identidade é obviamente bijetora. Não é difícil ver então que M^{-1} é a matriz de mudanças de bases de B para B'.

Definição 2.3 *Dados U e V espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$, *denotamos por* $L(U,V)$ *o conjunto de todas as transformações lineares de U em V.*

Teorema 2.2 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *com dimensões n e m, respectivamente. Então o espaço L(U,V) tem dimensão* $m \cdot n$.

Demonstração: Sejam $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de U e V, respectivamente. Para cada par *(p,q)*, $1 \leq p \leq m$, e $1 \leq q \leq n$, vamos definir uma transformação $T_{p,q} : U \to V$ como sendo

$$T_{p,q}(u_i) = \begin{cases} v_p & se\ i = q \\ 0 & se\ i \neq q \end{cases}$$

isto é, $T_{p,q}(u_i) = \delta_{iq} v_p$ (lembramos que $\delta_{iq=1}$ se $i = q$ e $\delta_{iq} = 0$ se $i \neq q$). Assim teremos o conjunto

$$C = \{T_{11}, \ldots, T_{1n}, T_{21}, \ldots, T_{2n}, \ldots, T_{m1}, \ldots, T_{mn}\}$$

com $m \cdot n$ elementos de $L(U,V)$. Para mostrar que C gera $L(U,V)$, seja $T \in L(U,V)$ e considere a sua matriz $[T]_{B,B'}$, isto é, a matriz dada por:

$$\begin{cases} T(u_1) &=& a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} vi \\ & & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ T(u_n) &=& a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m = \sum_{i=1}^{m} a_{in} vi \end{cases}$$

ou ainda $T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$, para $j = 1, \ldots, n$.

Considere agora a transformação linear S dada pela combinação linear $S = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}T_{p,q}$. Vamos mostrar que $S = T$ e para tanto, basta mostrar que S e T coincidem nos elementos de uma base. Observe que

$$S(u_j) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}T_{p,q}(u_j) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}(\delta_{jp}v_p) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{pj}v_p = T(u_j)$$

para cada $j = 1,\ldots,n$. Portanto, $S = T$ e, consequentemente, C gera $L(U,V)$.

Para mostrar que C é linearmente independente, suponha que $b_{pq} \in \mathbb{K}$, com $1 \leq p \leq m$ e $1 \leq q \leq n$, sejam tais que

$$S = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}T_{p,q} = 0.$$

Em particular, $S(u_j) = 0$ para $j = 1,\ldots,n$, isto é, vale que

$$0 = S(u_j) = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} b_{pq}T_{p,q}(u_j) = \sum_{p=1}^{m} b_{pj}v_p.$$

Como $\{v_1,\ldots,v_m\}$ é l.i., segue que $b_{pj} = 0$, $\forall p = 1,\ldots,m$ e $\forall j = 1,\ldots,n$. Portanto, C é linearmente independente e, consequentemente, uma base de $L(U,V)$. $\blacksquare$

3 DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo vamos trabalhar os conceitos de autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes visando sua posterior utilização na aplicação do Capítulo 4.

3.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma transformação linear $T : U \to V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo. Vamos formalizar este conceito na seguinte definição.

Definição 3.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um autovalor de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$. Observe que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo.*

Definição 3.2 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se λ é autovalor de T então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de autovetor de T associado a λ. Denotaremos por $Aut_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ.*

Vale lembrar que chamamos de operador linear a transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, e de subespaço gerado um subconjunto de V formado por todas as combinações lineares de um conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores.

Exemplo 3.1 *Seja*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}$$

Pela definição $T(x,y) = \lambda(x,y)$, logo

$$(x,-y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x & = & \lambda x \\ -y & = & \lambda y \end{cases}$$

Desenvolvendo as equações acima obtemos como resultado $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = -1$ *que são os autovalores de T.*

Note que todo vetor $(x,0)$ *com* $x \neq 0$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda_1 = 1$ *e* $(0,y)$ *com* $y \neq 0$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda_2 = -1$.

Assim, $Aut_T(1) = [(1,0)]$ *e* $Aut_T(-1) = [(0,1)]$.

Exemplo 3.2 *Seja*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (2x+2y,y) \end{array}$$

Pela definição $T(x,y) = \lambda(x,y)$, *logo*

$$(2x+2y,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 2x+2y & = & \lambda x \\ y & = & \lambda y \end{cases}$$

Desenvolvendo a segunda equação do sistema obtemos

$$\begin{array}{rcl} y - \lambda y & = & 0 \\ y(1-\lambda) & = & 0 \end{array}$$

$$y = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

Tomando $y = 0$ *e substituindo na primeira equação do sistema temos*

$$\begin{array}{rcl} 2x + 2.0 & = & \lambda x \\ 2x & = & \lambda x \\ \lambda & = & 2 \end{array}$$

Logo, $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 2$ *são os autovalores de T.*

Substituindo $\lambda_1 = 1$ na primeira equação do sistema temos

$$\begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 1x \\ x & = & -2y \end{array}$$

Segue que $Aut_T(1) = [(-2,1)]$.

Agora, se tomarmos $\lambda_2 = 2$ temos que $y = 0$, conforme já mostrado anteriormente. Logo, $Aut_T(2) = [(1,0)]$.

Existem operadores lineares que não possuem autovalores, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 3.3 *Seja*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (-y,x) \end{array}$$

Pela definição $T(x,y) = \lambda(x,y)$, logo

$$(-y,x) = (\lambda x, \lambda y)$$

Obtemos o seguinte sistema de equação

$$\begin{cases} -y & = & \lambda x \\ x & = & \lambda y \end{cases}$$

Note que não há valor real que satisfaça o sistema acima. Portanto, T não possui autovalores nem autovetores.

Observação 3.1 *Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear não injetor. Então 0 é um autovalor de T.*

De fato, como T não é injetor então existe um vetor não nulo $v \in KerT$. Logo, T(v)=0=0.v, como queríamos.

Vejamos agora como descobrir todos os autovalores de um operador linear, caso existam.

Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ for um autovalor de T, então existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, o que é equivalente a dizer que $(\lambda Id - T)(v) = 0$, onde $Id : V \to V$ é a transformação identidade em V. Segue então que

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \Leftrightarrow Ker(\lambda Id - T) \neq 0$$

Seja C uma base qualquer de V e considere a matriz $[\lambda Id - T]_C$ do operador $\lambda Id - T$ nesta base. Segue do Teorema 2.1 e da Proposição 2.1 que

$$Ker(\lambda Id - T) \neq 0 \Leftrightarrow [\lambda Id - T]_C \text{ não é invertível} \Leftrightarrow det([\lambda Id - T]_C) = 0$$

Esta relação acima nos dá uma ideia de como poderemos achar os autovalores de um dado operador T. Seja C uma base de V. Observe que $[xId - T]_C$ é uma matriz onde, na diagonal principal, aparecem polinômios mônicos de grau um com coeficientes em $\mathbb{K}$ e elementos de $\mathbb{K}$ nas outras posições. Portanto, $det([xId - T]_C)$ é um polinômio mônico de grau n sobre $\mathbb{K}$. A equivalência acima pode ser reescrita como

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \Leftrightarrow \lambda \text{ é uma raíz de } det([xId - T]_C).$$

O polinômio em questão independe da escolha da base, como veremos.

Sejam C e C' duas bases de V. Pela definição de matriz de mudança de base estudada no Capítulo 2 sabemos que existe uma matriz invertível P tal que $[T]_C = P^{-1}[T]_{C'}P$, em outras palavras, as matrizes $[T]_C$ e $[T]_{C'}$ são semelhantes. Daí, se indicarmos por Id_n a matriz identidade de $M_n(\mathbb{K})$, teremos

$$\begin{aligned} det([xId - T]_C) &= det(xId_n - [T]_C) = \\ &= det(xP^{-1}Id_nP - P^{-1}[T]_{C'}P) = \\ &= det(P^{-1}(xId_n - [T]_{C'})P) = \\ &= detP^{-1} \cdot det(xId_n - [T]_{C'}) \cdot detP = \\ &= det(xId_n - [T]_{C'}) = \\ &= det([xId_n - T]_{C'}) \end{aligned}$$

(lembre-se que $(detP^{-1}) \cdot (detP) = 1$).

Assim, $det(xId_n - [T]_C)$ não depende da base C escolhida.

Definição 3.3 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e C uma base de V, sendo V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Chamaremos $det(xId_n - T_C)$ de polinômio característico de T e denotaremos por $p_T(x)$.*

Os autovalores de T, caso existam, serão as raízes de seu polinômio característico.

Exemplo 3.4 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Inicialmente vamos encontrar o polinômio característico dessa transformação conforme a Definição 3.3.

$$\begin{aligned}
p_T(x) &= det(xId - T) = \\
&= det\left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\
&= det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\
&= det\begin{pmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{pmatrix} = \\
&= x^3 - 5x^2 + 8x - 4
\end{aligned}$$

Igualando o polinômio característico a 0 obtemos as raízes 1 e 2. Logo, seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.

A transformação é dada por

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x+y-z, 2x+2y-z, 2x+2z)$$

Tomando $\lambda_1 = 1$ temos

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= 1(x,y,z) \\
(3x+y-z, 2x+2y-z, 2x+2z) &= (x,y,z)
\end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 3x+y-z & = & x \\ 2x+2y-z & = & y \\ 2x+2y & = & z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $2x = z$ *e* $y = 0$. *Logo,* $Aut_T(1) = \{(x,0,2x), x \in \mathbb{R}\} = [(1,0,2)]$
Agora, tomando $\lambda = 2$ *temos*

$$\begin{array}{rcl} T(x,y,z) & = & 2(x,y,z) \\ (3x+y-z, 2x+2y-z, 2x+2z) & = & (2x,2y,2z) \end{array}$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 3x+y-z & = & 2x \\ 2x+2y-z & = & 2y \\ 2x+2y & = & 2z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = y$ *e* $z = 2x$. *Logo,* $Aut_T(2) = \{(x,x,2x), x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,2)]$

Observação 3.2 *Seja V um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e seja T em L(V,V). Como* $\mathbb{C}$ *é um corpo algebricamente fechado, o polinômio característico de T será da forma*

$$p_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \ldots (x-\lambda_t)^{r_t}$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{C}$ *e* $r_1 \geq 1$. *Portanto, sempre existirão autovalores para T.*

Teorema 3.1 *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear onde V é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita e sejam* $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, $t \geq 1$, *autovalores de T, dois a dois distintos.*

(a) *Se* $v_1 + \ldots + v_t = 0$ *com* $v_i \in Aut_T(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, t$, *então* $v_i = 0$ *para cada i.*

(b) *Para cada* $i = 1, \ldots, t$, *seja* β_i *um conjunto linearmente independente contido em* $Aut_T(\lambda_i)$. *Então* $\beta_1 \cup \beta_2 \cup \ldots \cup \beta_t$ *é linearmente independente.*

Demonstração: (a) Vamos provar esse item pelo Princípio da Indução. Se tomarmos $t = 1$, temos que $v_1 = 0$. Seja agora $t > 1$ e suponha que o resultado seja válido para todo $j < t$, vamos então prová-lo para $j = t$. Seja

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_t = 0 \text{ com } v_i \in Aut_T(\lambda_i), \forall i = 1, \ldots, t. \tag{1}$$

Calculando T em (1) teremos que

$$0 = T(0) = T(v_1 + v_2 + \ldots + v_t) = T(v_1) + T(v_2) + \ldots + T(v_t)$$

e, portanto

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_t v_t = 0 \tag{2}$$

Multiplicando a equação (1) por λ_1 e subtraindo (2), temos

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \ldots + (\lambda_1 - \lambda_t)v_t = 0$$

temos por hipótese de indução que $(\lambda_1 - \lambda_i)v_i = 0$ para cada $i = 2, \ldots, t$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_i$ se $i \neq 1$, temos que $v_i = 0$ para todo $i = 2, \ldots, t$. Substituindo em 1, teremos que $v_1 = 0$ como queríamos.

(b) Escrevemos $B_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{in_i}\}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, t$.

Vamos mostrar que $\beta_1 \cup \ldots \cup \beta_t = \{v_{11}, \ldots, v_{1n_1}, \ldots, v_{t1}, \ldots, v_{tn_t}\}$ é linearmente independente. Para isso, assuma que

$$a_{11}v_{11} + \ldots + a_{1n_1}v_{1n_1} + \ldots + a_{t1}v_{t1} + \ldots + a_{tn_t}v_{tn_t} = 0,$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j.

Como $\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}v_{ij} \in Aut_T(\lambda_i)$ para todo i, então, segue do item anterior que $\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}v_{ij} = 0$, $\forall i = 1, \ldots, t$. Como B_i é um conjunto linearmente independente teremos que $a_{ij} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, t$ e todo $j = 1, \ldots, n_i$.

Portanto, $\beta_1 \cup \ldots \cup \beta_t$ é linearmente independente. ■

Dado um autovalor λ de T, o próximo passo será relacionarmos a dimensão $dim_{\mathbb{K}} Aut_T(\lambda)$ com a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico $p_T(x)$. Começaremos com a seguinte definição.

Definição 3.4 *Seja λ um autovalor de um operador linear $T : V \longrightarrow V$ onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Suponhamos que $p_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$, com $q(x) \neq 0$, seja o polinômio característico de T. O número m é chamado de multiplicidade algébrica de λ e o denotamos por $ma(\lambda)$. Chamamos de multiplicidade geométrica de λ à dimensão do subespaço $Aut_T(\lambda)$ e indicamos tal número por $mg(\lambda)$.*

Observação 3.3 *Note que a multiplicidade algébrica de um autovalor λ é o maior índice j, tal que $(x-\lambda)^j$ divide $p_T(x)$.*

Proposição 3.1 *Seja λ um autovalor de $T: V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.*

Demonstração: Seja $W = Aut_T(\lambda)$ e assuma que $dim_{\mathbb{K}} W = s$ e $dim_{\mathbb{K}} V = n$. Seja $B' = \{w_1, \ldots, w_s\}$ uma base de W. Como B'é linearmente independente, existe uma base $B = \{w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, \ldots, w_n\}$ de V contendo B'. Como $T(w_i) = \lambda w_i$ para $i = 1, \ldots, s$, teremos:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & A_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & A_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \end{pmatrix}$$

onde $A_1 \in M_{s\times(n-s)}(\mathbb{K})$ e $A_2 \in M_{(n-s)\times(n-s)}(\mathbb{K})$.

Vamos, então, determinar o polinômio característico,

$$\begin{aligned} p_T(x) &= det(xId_n - [T]_B) \\ &= det\left(xId_{(s)} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot det(xId_{(n-s)} - A_2) \\ &= (x-\lambda)^s \cdot det(xId_{(n-s)} - A_2) \end{aligned}$$

Por definição, temos que $ma(\lambda)$ é o maior índice j tal que $(x-\lambda)^j$ divide $p_T(x)$. Portanto, $mg(\lambda) = s \leq ma(\lambda)$, como queríamos. ■

Seja agora $T: V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, tal que $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \ldots (x-\lambda_t)^{n_t}$. Deve estar claro que $dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{t} n_i$. Usando o resultado acima é fácil ver que $dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{t} dim_{\mathbb{K}} Aut_T(\lambda_i)$ se, e somente se, para cada i, $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$.

3.2 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Nesta seção veremos como fatorar uma matriz $A_{n\times n}$ em um produto da forma XDX^{-1}, onde D é uma matriz diagonal.

Teorema 3.2 *Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são autovalores distintos de uma matriz $A_{n\times n}$ com autovetores associados $v_1, v_2, \ldots, v_k$, então $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.*

Demonstração: Seja n a dimensão do subespaço de R^n gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_k$ e suponha que $n < k$. Podemos supor (reordenando os v_i e λ_i se necessário) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Como $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes, existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$, nem todos nulos, tais que

$$c_1v_1 + \ldots + c_nv_n + c_{n+1}v_{n+1} = 0 \tag{3}$$

Observe que c_{n+1} tem que ser diferente de zero, pois, caso contrário, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seriam linearmente dependentes. Logo, $c_{n+1}v_{n+1} \neq 0$ e, portanto, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ não podem ser todos nulos. Multiplicando (3) por A, obtemos

$$c_1Av_1 + \ldots + c_nAv_n + c_{n+1}Av_{n+1} = 0$$

ou

$$c_1\lambda_1v_1 + \ldots + c_n\lambda_nv_n + c_{n+1}\lambda_{n+1}v_{n+1} = 0 \tag{4}$$

Multiplicando a equação (3) por λ_{n+1} e subtraindo da equação (4), obtemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})v_1 + \ldots + c_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})v_n = 0$$

Isso contradiz a independência linear de $v_1, \ldots, v_n$. Logo, n tem que ser igual a k. $\blacksquare$

Definição 3.5 *Uma matriz $A_{n\times n}$ é dita diagonalizável se existirem uma matriz invertível X e uma matriz diagonal D satisfazendo*

$$X^{-1}AX = D$$

Neste caso, dizemos que X diagonaliza A.

Teorema 3.3 *Uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável se, e somente se, A tem n autovetores linearmente independentes.*

Demonstração: Suponha que A tem n autovetores linearmente independentes $v_1, v_2, \dots, v_n$. Seja λ_i o autovalor associado a v_i para cada i, sendo que alguns dos λ_i podem ser iguais. Seja X a matriz cujo j-ésimo vetor coluna é o vetor v_j para cada $j = 1, \dots, n$. Então $Ax_j = \lambda_j v_j$ é o j-ésimo vetor coluna de AX. Logo

$$\begin{aligned} AX &= (Av_1, Av_2, \dots, Av_n) \\ &= (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n) \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= XD \end{aligned}$$

Como X tem n colunas linearmente independentes, X é invertível e, portanto

$$D = X^{-1}XD = X^{-1}AX$$

Reciprocamente, suponha que A é diagonalizável. Então, existe uma matriz invertível X tal que $AX = XD$. Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ são os vetores colunas de X, temos

$$Av_j = \lambda_j v_j \qquad (\lambda_j = d_{jj})$$

para cada j. Logo, para cada j, λ_j é um autovalor de A com autovetor associado v_j.

Como as colunas de X são linearmente independentes, A tem n autovetores linearmente independentes. ■

Observação 3.4

1. *Se A é diagonalizável, então os vetores colunas da matriz X que diagonaliza A são autovetores de A e os elementos diagonais de D são os autovalores associados.*

2. *A matriz não é única. Trocando-se a ordem das colunas de uma matriz diagonalizante X, ou multiplicando-se por escalares não-nulos, obteremos outra matriz diagonalizante.*

3. *Se A é $n \times n$ e tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável. Se os autovalores não forem distintos, A pode ser ou não diagonalizável, dependendo se tem ou não n autovetores linearmente independentes.*

4. *Se A é diagonalizável, então A pode ser fatorada em um produto XDX^{-1}.*

Como consequência da Observação 3.4 item 4, temos que

$$A^2 = (XDX^{-1})(XDX^{-1}) = XD^2X^{-1}$$

e em geral,

$$\begin{aligned} A^k &= XD^kX^{-1} \\ &= X \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_n)^k \end{pmatrix} X^{-1} \end{aligned}$$

Uma vez obtida uma fatoração $A = XDX^{-1}$, é fácil calcular as potências de A.

Exemplo 3.5 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -4$. Os autovetores associados a λ_1 e λ_2 são $v_1 = (3,1)$ e $v_2 = (1,2)$ respectivamente. Seja

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} X^{-1}AX &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$XDX^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = A$$

Exemplo 3.6 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ *e* $\lambda_3 = 1$. *Temos o autovetor* $(1,1,1)$ *associado a* $\lambda_1 = 0$ *e os autovetores* $(1,2,0)$ *e* $(0,-2,1)$ *associados a* $\lambda = 1$. *Seja*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então,

$$\begin{aligned} X^{-1}AX &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Embora $\lambda = 1$ *seja um autovalor múltiplo, a matriz ainda pode ser diagonalizada já que tem três autovetores linearmente independentes. Observe também que*

$$A^k = XD^kX^{-1} = XDX^{-1} = A$$

para todo $k \geq 1$.

Se uma matriz $A_{n\times n}$ *tem menos de que n autovalores linearmente independentes, dizemos que A é defectiva. Segue do Teorema 3.2 que uma matriz defectiva não é diagonalizável.*

Exemplo 3.7 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ambos os autovalores de A são iguais a 1. Qualquer autovetor associado a $\lambda = 1$ *tem que ser um múltiplo de* $v_1 = (1,0)$. *Logo A não pode ser diagonalizada.*

3.3 OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS

Queremos encontrar uma base de um espaço vetorial na qual a matriz de um determinado operador linear seja a mais simples possível. A melhor situação possível é aquela em que conseguimos uma matriz diagonal associada ao operador.

Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e suponha que exista uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que a matriz $[T]_\beta$ tenha a forma diagonal, isto é, tal que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

com $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$. Da definição de $[T]_\beta$, teremos então que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ com $\lambda_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$, isto é, a imagem de qualquer vetor da base β por T é um múltiplo deste vetor.

Definição 3.6 *Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear no qual V é um espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que T é* diagonalizável *se existir uma base β tal que $[T]_\beta$ é diagonal, o que é equivalente a dizer que existe uma base formada por autovetores de T.*

Observação 3.5 *No Capítulo 2 vimos que dada uma transformação linear, sempre existe uma matriz que a representa. Então, se pensarmos em T na representação matricial sabemos do Teorema 3.3 que ela só será diagonalizável se existir uma base de autovetores.*

Exemplo 3.8 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Inicialmente vamos determinar o polinômio característico dessa transformação

$$\begin{aligned}
p_T(x) &= det(xId - T) \\
&= det\left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right) \\
&= det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right) \\
&= det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 2 & x+3 & -1 \\ -2 & -2 & x+2 \end{pmatrix} \\
&= x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0
\end{aligned}$$

As raízes do polinômio característico acima são -1 e -2. Logo, $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = -2$ *são os autovalores de T.*

A transformação é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+2y-z, -2x-3y+z, 2x+2y-2z)$$

Tomando $\lambda_1 = -1$*, por definição, obtemos*

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= -1(x,y,z) \\
(x+2y-z, -2x-3y+z, 2x+2y-2z) &= (-x,-y,-z)
\end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x+2y-z &= -x \\ -2x-3y+z &= -y \\ 2x+2y-2z &= -z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos como solução $z = 2x+2y$.

Logo, $Aut_T(-1) = \{(x,y,2x+2y); x,y,z \in \mathbb{R}\} = [(1,0,2),(0,1,2)]$

Agora, tomando $\lambda_2 = -2$, por definição, obtemos

$$\begin{array}{rcl} T(x,y,z) & = & -2(x,y,z) \\ (x+2y-z,-2x-3y+z,2x+2y-2z) & = & (-2x,-2y,-2z) \end{array}$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & -2x \\ -2x-3y+z & = & -2y \\ 2x+2y-2z & = & -2z \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema obtemos como solução $y = -x$ e $z = x$.

Logo, $Aut_T(-2) = \{(x,-x,x); x,y,z \in \mathbb{R}\} = [(1,-1,1)]$.

Note que $B = \{(1,0,2),(0,1,2),(1,-1,1)\}$ é uma base formada por autovalores, portanto T é diagonalizável.

Exemplo 3.9 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Inicialmente vamos determinar o polinômio característico dessa transformação

$$\begin{array}{rcl} p_T(x) & = & det(xId - T) \\ & = & det\left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ & = & det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ & = & det \begin{pmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{pmatrix} \\ & = & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \end{array}$$

As raízes do polinômio característico acima são 1 e 2. Logo, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores de T.

A transformação é dada por

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x+y-z, 2x+2y-z, 2x+2y)$$

Tomando $\lambda_1 = 1$, por definição, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= 1(x,y,z) \\ (x+2y-z, -2x-3y+z, 2x+2y-2z) &= (x,y,z) \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 3x+y-z = x \\ 2x+2y-z = y \\ 2x+2y = z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos como solução $y = 0$ e $z = 2x$.

Logo, $Aut_T(1) = \{(x,0,2x); x,y,z \in \mathbb{R}\} = [(1,0,2)]$.

Agora, tomando $\lambda_2 = 2$, por definição, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= 2(x,y,z) \\ (x+2y-z, -2x-3y+z, 2x+2y-2z) &= (-2x,-2y,-2z) \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x+2y-z = 2x \\ -2x-3y+z = 2y \\ 2x+2y-2z = 2z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos como solução $y = x$ e $z = 2x$.

Logo, $Aut_T(2) = \{(x,x,2x); x,y,z \in \mathbb{R}\} = [(1,1,2)]$.

Note que os autovetores de T são os múltiplos de (1,0,2) ou múltiplos de (1,1,2). Concluímos que não pode existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e, portanto, T não *é diagonalizável.*

Estamos particularmente interessados na situação em que existe uma base de autovetores. Tal base vai existir se, e somente se, a união $\beta_1 \cup \ldots \cup \beta_t$ for uma base de V. Não é difícil ver que isto vai ocorrer se, e somente se,

$$dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{t} dim_{\mathbb{K}} Aut_T(\lambda_i)$$

4 CRESCIMENTO POPULACIONAL POR FAIXA ETÁRIA

Neste capítulo vamos aplicar a teoria apresentada nos capítulos anteriores para estudar o modelo matricial de Leslie. Por meio desse modelo é possível analisar o crescimento de uma população feminina ao longo do tempo. Além de determinar o comportamento limite da distribuição etária e da taxa de crescimento populacional.

4.1 MODELO MATRICIAL DE LESLIE

Um dos modelos de crescimento populacional mais comumente usado por demógrafos é o assim chamado modelo Leslie, desenvolvido na década de 1940. Esse modelo descreve o crescimento da parte fêmea de uma população animal ou humana. Neste modelo, as fêmeas são divididas em faixas etárias de igual duração.

Por exemplo, suponha que a idade máxima atingida por qualquer fêmea da população seja L anos (ou alguma outra unidade de tempo). Se nós dividirmos a população em n faixas etárias, então cada faixa tem $\frac{L}{n}$ anos de duração. Nós numeramos as faixas etárias de acordo com a tabela a seguir.

Faixa Etária	**Intervalo de Idade**
1	$[0, L/n)$
2	$[L/n, 2L/n)$
3	$[2L/n, 3L/n)$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$[(n-2)L/n, (n-1)L/n)$
n	$[(n-1)L/n, L]$

Vamos supor que sabemos o número de fêmeas em cada uma das n faixas no instante $t = 0$. Em particular, suponha que há $x_1^{(0)}$ fêmeas na primeira faixa, $x_2^{(0)}$ fêmeas na segunda faixa, e assim por diante. Com estes n números, nós formamos um vetor-coluna

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

que chamamos de *vetor distribuição etária inicial*.

À medida que o tempo avança, o número de fêmeas dentro de cada uma das n faixas muda em virtude de três processos biológicos: nascimento, morte e envelhecimento. Descrevendo estes três processos quantitativamente, nós veremos como projetar o vetor de distribuição etária inicial para o futuro.

A maneira mais fácil de estudar o processo de envelhecimento é observar a população a intervalos discretos de tempo, digamos $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$. O modelo Leslie requer que a duração entre dois tempos de observação sucessivos seja igual à duração da faixa etária. Portanto, colocamos

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= \frac{L}{n} \\ t_2 &= \frac{2L}{n} \\ &\vdots \\ t_k &= \frac{kL}{n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Com esta hipótese, todas as fêmeas na (i+1)-ésima faixa etária no instante t_{k+1} estavam na i-ésima faixa no instante t_k.

Os processos de nascimento e morte entre dois tempos de observações sucessivas podem ser descritos por meio dos seguintes parâmetros demográficos:

a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é o número de filhas nascidas por fêmea durante o tempo em que ela está na i-ésima faixa etária;

b_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ é a fração de fêmeas na i-ésima faixa etária que se espera que vá sobreviver e passar para a $(i+1)$-ésima faixa etária.

Pelas definições, nós temos que

(i) $a_i \geq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $0 < b_i \leq 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$

Note que não permitimos qualquer b_i ser zero, pois então nenhuma fêmea sobreviveria além da i-ésima faixa etária. Nós também vamos supor que pelo menos um dos a_i é positivo, de modo que há algum nascimento. Qualquer faixa etária para a qual o correspondente valor de a_i é positivo e chamada uma *faixa etária fértil*.

Em seguida nós definimos o vetor $x^{(k)}$ de distribuição etária no instante t_k por

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

onde $x_i^{(k)}$ é o número de fêmeas na i-ésima faixa etária no instante t_k. Agora, no instante t_k, as fêmeas na primeira faixa etária são exatamente as filhas nascidas entre os instantes t_{k-1} e t_k. Assim, podemos escrever

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \ldots + a_n x_n^{(k-1)} \tag{1}$$

No qual,

$x_1^{(k)}$ = número de fêmeas na faixa etária 1 no tempo t_k

$a_1 x_1^{(k-1)}$ = número de filhas nascidas na faixa etária 1 entre os tempos t_{k-1} e t_k

$a_2 x_2^{(k-1)}$ = número de filhas nascidas na faixa etária 2 entre os tempos t_{k-1} e t_k

$\vdots$

$a_n x_n^{(k-1)}$ = número de filhas nascidas na faixa etária n entre os tempos t_{k-1} e t_k.

As fêmeas na (i+1)-ésima faixa etária $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ no instante t_k são aquelas fêmeas que estavam na i-ésima faixa etária no instante t_{k-1} e que ainda vivem no instante t_k. Assim,

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2}$$

no qual,

$x_{i+1}^{(k)}$ = número de fêmeas na faixa etária $i+1$ no instante t_k

b_i = fração de fêmeas na faixa etária i que sobrevive e passa para a faixa etária $i+1$

$x_i^{(k-1)}$ = número de fêmeas na faixa etária i no instante t_{k-1}

Usando notação matricial, podemos escrever as equações (1) e (2) como

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

ou mais compactamente,

$$x^{(k)} = Lx^{(k-1)}, k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

em que L é a *matriz de Leslie*

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Pela equação (4) obtemos

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Lx^{(0)} \\ x^{(2)} &= Lx^{(1)} = L^2x^{(0)} \\ x^{(3)} &= Lx^{(2)} = L^3x^{(0)} \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= Lx^{(k-1)} = L^kx^{(0)} \end{aligned} \tag{5}$$

Assim, se conhecermos a distribuição etária inicial $x^{(0)}$ e a matriz de Leslie L, nós poderemos determinar a distribuição etária das fêmeas em tempos posteriores.

Exemplo 4.1 *Suponha que a idade máxima atingida pela fêmeas de uma certa população animal é 15 anos e que dividimos a população em três faixas etárias com duração igual de 5 anos.*

Suponha que a matriz de Leslie para esta população é

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Se inicialmente havia 1000 fêmeas em cada uma das três faixas etárias, pela equação 3, temos

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} \\
x^{(1)} &= Lx^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} \\
x^{(2)} &= Lx^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix} \\
x^{(3)} &= Lx^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14375 \\ 1375 \\ 875 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, depois de 15 anos há 14375 fêmeas entre 0 e 5 anos de idade, 1375 fêmeas entre 5 e 10 anos de idade e 875 fêmeas entre 10 e 15 anos de idade.

4.2 COMPORTAMENTO LIMITE

Embora a equação (5) dê a distribuição etária da população em qualquer instante, ela não dá automaticamente uma ideia geral da dinâmica do processo de crescimento. Para ter isto, precisamos investigar os autovalores e autovetores da matriz de Leslie. Sabemos da Seção 3.1 que os autovalores de L são as raízes do polinômio característico. Vamos determinar o polinômio característico de uma matriz de Leslie arbitrária dada pela equação (4).

$$
\begin{aligned}
p_T(\lambda) &= det(\lambda Id - L) \\
&= det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \ldots - a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}
\end{aligned}
$$

Para analisar as raízes desse polinômio, é conveniente introduzir a função

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{a_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda^n} \tag{6}$$

Observe que $p(\lambda) = (1 - q(\lambda)) \cdot \lambda^n$. Usando a função (6), a equação característica $p(\lambda) = 0$ pode ser escrita como

$$q(\lambda) = 1 para \lambda \neq 0 \tag{7}$$

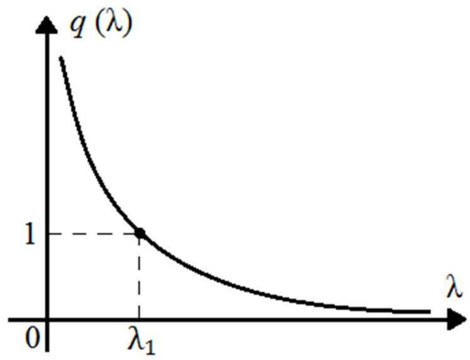

Figura 1: Comportamento limite da função *q*

Como todos os a_i e b_i são não-negativos, vemos que $q(x)$ é monotonamente decrescente para $\lambda > 0$. Além disto, $q(\lambda)$ tem uma assíntota vertical em $\lambda = 0$ e tende a zero quando $\lambda \to \infty$.

Temos que $p(\lambda) = (1 - q(\lambda)) \cdot \lambda^n$, se tomarmos qualquer autovalor de λ de L teremos $p(\lambda) = 0$ e, consequentemente $q(\lambda) = 1$. Mas, conforme indicado na Figura 1 existe um único λ, digamos $\lambda = \lambda_1$, tal que $q(\lambda_1) = 1$. Logo, a matriz L tem um único autovalor positivo.

Também pode ser mostrado que λ_1 tem multiplicidade 1. Para isso, λ_1 deve ser uma raiz simples do polinômio característico.

Proposição 4.1 *A raiz λ_1 de um polinômio $p(\lambda)$ é simples se, e somente se, $p'(\lambda_1)$ é diferente zero.*

Demonstração: Consideremos um polinômio arbitrário

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \tag{8}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade que $n_1 = 1$, ou seja, que λ_1 é um raiz simples desse polinômio, então

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

Derivando $p(\lambda)$ teremos

$$p'(\lambda) = 1 \cdot [(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}] + (\lambda - \lambda_1)^1 \cdot [(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}]'$$

Observe que ao calcularmos a derivada no ponto λ_1 a segunda parcela da soma se anula, restando apenas

$$p'(\lambda_1) = [(\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda_1 - \lambda_i)^{n_i}]$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_i$, $\forall i \neq 1$, então $p'(\lambda_1) \neq 0$.

Suponhamos agora que a derivada do polinômio (8) em relação a λ_1 seja diferente de zero. Então,

$$p'(\lambda) = n_1(\lambda - \lambda_1)^{n_1 - 1} \cdot [(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}] + (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot [(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}]' \neq 0$$

Observe que se substituirmos λ_1 na equação acima, teremos como resultado $p'(\lambda_1) = 0$. Para que possamos obter $p'(\lambda_1) \neq 0$ é preciso que alguma parcela da soma não se anule.

Note que a segunda parcela sempre será igual a zero, independente do expoente. Então precisamos que a primeira parcela seja diferente de zero. Para isso, é preciso que o expoente $n_1 - 1$ seja igual a zero, logo n_1 deve ser igual a 1.

Portanto, λ_1 é um raiz simples do polinômio. ■

Pela proposição acima, para que o autovalor positivo λ_1 tenha multiplicidade 1 devemos mostrar que ele é uma raiz simples do polinômio característico da matriz de Leslie.

Vimos que $p(\lambda) = (1 - q(\lambda)) \cdot \lambda^n$. Calculando a derivada desse polinômio em λ_1 obtemos

$$p'(\lambda_1) = q'(\lambda_1) \cdot \lambda_1^n + (1 - q(\lambda_1)) \cdot n\lambda_1^{n-1}$$

Sabemos que $q(\lambda_1) = 1$, por isso a segunda parcela da soma se anula. Além disso, $\lambda_1^n \neq 0$. Agora, basta mostrarmos que $q'(\lambda_1) \neq 0$.

De fato, se derivarmos a equação (6) em λ_1 teremos

$$q'(\lambda_1) = -\frac{a_1}{\lambda_1^2} - \frac{2a_2b_1}{\lambda_1^3} - \frac{3a_3b_1b_2}{\lambda_1^4} - \ldots - \frac{na_nb_1b_2\ldots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}$$

Como já foi definido anteriormente, não é permitido qualquer b_1 ser zero e supomos que pelo menos um dos a_i é positivo. Além disso λ_1 também é um valor positivo. Logo, a derivada acima não será nula. Portanto, λ_1 tem multiplicidade 1.

Queremos agora determinar o autovetor associado ao autovalor λ_1. Como já conhecemos o polinômio característico da matriz de Leslie, vamos então determinar a transformação linear. Temos

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, b_1x_1, b_2x_2, \ldots, b_{n-1}x_{n-1})$$

Pela definição de autovetores temos que

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lambda_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, b_1x_1, b_2x_2, \ldots, b_{n-1}x_{n-1}) &= (\lambda_1x_1, \lambda_1x_2, \ldots, \lambda_1x_n) \end{aligned}$$

Donde temos o seguinte sistema de equação

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n &= \lambda_1x_1 \\ b_1x_1 &= \lambda_1x_2 \\ b_2x_2 &= \lambda_1x_3 \\ \vdots & \vdots \\ b_{n-1}x_{n-1} &= \lambda_1x_n \end{cases}$$

Para resolver tal sistema vamos escrever os x_n em função de x_1. Assim

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & \frac{b_1 x_1}{\lambda_1} \\ x_3 & = & \frac{b_1 b_2 x_1}{\lambda_1^2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \frac{b_1 b_2 \ldots b_{n-1} x_1}{\lambda_1^{n-1}} \end{array} \tag{9}$$

Substituindo esse resultados na primeira equação do sistema obtemos

$$\begin{array}{rcl} a_1 x_1 + \dfrac{a_2 b_1 x_1}{\lambda_1} + \ldots + \dfrac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} x_1}{\lambda_1^{n-1}} & = & \lambda_1 x_1 \\ \dfrac{a_1 x_1}{\lambda_1} + \dfrac{a_2 b_1 x_1}{\lambda_1^2} + \ldots + \dfrac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} x_1}{\lambda_1^n} & = & x_1 \\ q(\lambda_1) & = & x_1 \\ 1 & = & x_1 \end{array}$$

Dividindo todos os termos por x_1 temos

$$\frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_1}{\lambda_1^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda_1^3} + \ldots + \frac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda_1^n} = 1$$

Agora, basta substituir $x_1 = 1$ em (9). Dessa forma obtemos o autovetor correspondente ao autovalor λ_1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Como λ_1 tem multiplicidade 1, pela Definição 3.4 e Proposição 3.1 o auto-espaço correspondente tem dimensão 1 e portanto qualquer autovetor associado a λ_1 é algum múltiplo de v_1. Podemos resumir estes resultados no seguinte teorema.

Teorema 4.1 (Existência de um autovalor positivo) *Uma matriz de Leslie L tem um único autovalor positivo λ_1. Este autovalor tem multiplicidade 1 e um autovetor associado v_1 cuja entradas são todas positivas.*

Os dois últimos resultados que apresentaremos visa garantir que o comportamento a longo termo da distribuição etária da população é determinado pelo autovalor positivo λ_1 e seu autovetor v_1.

Vai além dos objetivos deste trabalho apresentar suas respectivas demonstrações. Para maiores detalhes ver (ANTON; RORRES, 2001).

Teorema 4.2 (Autovalores de um matriz de Leslie) *Se λ_1 é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie L e λ_k é qualquer outro autovalor real ou complexo de L, então $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.*

Exemplo 4.2 *Seja*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Então o polinômio característico de L é

$$p(\lambda) = det(\lambda Id - L) = \lambda^3 - 1$$

Os autovalores de L são, portanto, as soluções de $\lambda^3 = 1$, a saber,

$$\lambda = 1, \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

Todos os autovalores têm mesmo valor absoluto 1, de modo que o único autovalor positivo $\lambda_1 = 1$ não é dominante. Observe que esta matriz de Leslie tem a propriedade $L^3 = Id$. Isto significa que para qualquer escolha da distribuição etária inicial $x^{(0)}$ nós temos

$$x^{(0)} = x^{(3)} = x^{(6)} = \cdots = x^{(3k)} = \cdots$$

Isto significa que o vetor de distribuição etária oscila com um período de três unidade de tempo. Tais oscilações, chamadas ondas populacionais, não poderiam ocorrer se λ_1 fosse um autovalor dominante, como veremos a seguir.

Teorema 4.3 (Autovalor dominante) *Se duas entradas sucessivas a_i e a_{i+1} da primeira linha de uma matriz de Leslie L são não-nulas, então o autovalor positivo de L é dominante.*

Assim, se a população de fêmeas tem duas faixas etárias férteis sucessivas, então a matriz de Leslie tem um autovalor dominante. Isto sempre ocorre com populações reais se a faixa etária for tomada suficientemente pequena. Note que no Exemplo 4.2 somente a terceira faixa etária era fértil, e portanto não vale a hipótese do Teorema 4.3. No que segue, vamos supor sempre que a condição do Teorema 4.3 está satisfeita.

Vamos supor que L é diagonalizável. Neste caso, L tem n autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, não necessariamente distintos, e n autovetores associados linearmente independentes, $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Enumeramos o autovalor dominante λ_1 e construímos uma matriz cujas colunas são os autovetores de L.

$$P = (v_1|v_2|v_3|\cdots|v_n)$$

A diagonalização de L é, então, dada por

$$L = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Disso segue que

$$L^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

para $k = 1, 2, \cdots$. Para qualquer vetor de distribuição etária inicial $x^{(0)}$ temos, então,

$$L^k x^{(0)} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)}$$

para $k = 1, 2, \ldots$. Dividindo ambos os lados desta equação por λ_1^k e lembrando que $x^{(k)} = L^k x^{(0)}$, obtemos

$$\frac{1}{\lambda_1^k} x^{(k)} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{pmatrix} P^{-1} x^{(0)} \tag{11}$$

Como λ_1 é um autovalor dominante, temos $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ para $i = 2, 3, \ldots, n$. Segue que

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda 1}\right)^k \to 0 \text{ quando } k \to \infty, \text{ para } i = 2, 3, \ldots, n$$

Usando isto, podemos tomar o limite de ambos os lados de (11) para obter

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}P^{-1}x^{(0)} \tag{12}$$

Observe que P é uma matriz $n \times n$, pois é formada por autovetores de L. Dessa forma, se desenvolvermos o lado esquerdo de (12) teremos

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & v_{3n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}_{n\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}_{n\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Ao multiplicarmos P^{-1} por $x^{(0)}$ teremos como resultado uma matriz coluna. Se denotamos a primeira entrada dessa matriz pela constante c teremos

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = \begin{pmatrix} cv_{11} \\ cv_{12} \\ \vdots \\ cv_{1n} \end{pmatrix}$$

Então, o lado direito de (12) pode ser reescrito como cx_1, onde c é uma constante positiva que depende do vetor de distribuição etária inicial $x^{(0)}$. Assim, (12) fica

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}x^{(k)}\right\} = cv_1 \tag{13}$$

Esta equação (13) nos dá a aproximação

$$x^{(k)} \cong c\lambda_1^k v_1 \tag{14}$$

para valores de k. Por (3) também temos

$$x^{(k-1)} \cong c\lambda_1^{k-1} v_1 \tag{15}$$

Comparando as equações (3) e (15) nós vemos que

$$x^{(k)} \cong \lambda_1 x^{(k-1)} \tag{16}$$

para valores grandes de k.

Isto significa que para valores grandes do tempo, cada vetor de distribuição etária é um múltiplo escalar do vetor de distribuição etária anterior, o escalar sendo o autovalor positivo da matriz de Leslie. Consequentemente, a proporção de fêmeas em cada faixa etária torna-se constante. Como veremos no exemplo a seguir, estas proporções no limite podem ser determinadas a partir do autovetor v_1.

Exemplo 4.3 *A matriz de Leslie do Exemplo 4.1 era*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Então, o polinômio característico é.

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= det(\lambda Id - L) \\ &= det\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Igualando o polinômio característico a 0, obtemos o autovalor positivo $\lambda_1 = \frac{3}{2}$.

Por (10), o autovetor correspondente de λ_1 é

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1/2}{3/2} \\ \frac{(1/2)(1/4)}{(3/2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

Logo, $Aut_T\left(\frac{3}{2}\right) = \left[\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}\right)\right]$

Por (16) nós temos

$$x^{(k)} \cong \frac{3}{2} x^{(k-1)}$$

para valores grandes de k. Logo, a cada cinco anos o número de fêmeas em cada uma das três faixas crescerá por cerca de 50%, assim como também o número total de fêmeas da população.

Por (3) nós temos

$$x^{(k)} \cong c\left(\frac{3}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

Consequentemente, a longo termo, as fêmeas estarão distribuídas entre as três faixas etárias na proporção $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{18}$. *Isto corresponde a uma distribuição de 72% das fêmeas da primeira faixa etária, 24% das fêmeas da segunda faixa etária e 4% das fêmeas na terceira faixa etária.*

Agora, voltemos a equação (3), que nos dá o vetor de distribuição etária da população para tempos grandes

$$x^{(k)} \cong c\lambda_1^k v_1 \tag{17}$$

De acordo com o valor do autovalor positivo λ_1, temos três casos:

(i) A população acaba aumentando se $\lambda_1 > 1$;

(ii) A população acaba diminuindo se $\lambda_1 < 1$;

(iii) A população acaba estabilizando se $\lambda_1 = 1$;

O caso $\lambda_1 = 1$ é particularmente interessante, pois determina uma população com *crescimento populacional nulo*. Para qualquer distribuição etária inicial, a população tende a distribuição etária limite que é algum múltiplo do autovetor v_1. A partir das equações (6) e (7) nós vemos que λ_1 é um autovalor se, e somente se,

$$a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} = 1 \tag{18}$$

A expressão

$$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \tag{19}$$

é chamada a *taxa líquida de reprodução* da população. Assim, nós podemos dizer que uma população tem crescimento populacional nulo se, e somente se, sua taxa líquida de reprodução é 1.

5 CONCLUSÃO

Conhecendo a média de nascimento e a probabilidade de sobrevivência em cada faixa etária de uma população, construímos a matriz de Leslie. Ao calcularmos seus autovalores, é possível determinar como será a distribuição do número de fêmeas em cada faixa etária.

Além disso, garantimos a existência de um único autovalor positivo de multiplicidade um. A partir desse autovalor, verificamos se ele é dominante ou não. Em caso afirmativo, concluímos que a proporção de fêmeas em cada faixa etária torna-se constante e a razão do crescimento populacional entre uma faixa etária e outra será o próprio autovalor dominante.

Como pode-se observar, para a compreensão do modelo matricial de Leslie e análise dos resultados obtidos foi essencial o estudo de conceitos da Álgebra Linear como autovalores, autovetores e operadores diagonalizáveis.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. São Paulo: Bookman, 2001.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. São Paulo: Harbra, 1986.

COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.