UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANDRESSA MORO SACOMAN

APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES NO RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2012

ANDRESSA MORO SACOMAN

APLICAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES NO RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Priscila Amara Patricio de Melo

CAMPO MOURÃO

2012

TERMO DE APROVAÇÃO

ANDRESSA MORO SACOMAN

Aplicação de Autovalores e Autovetores no Reconhecimento de Quádricas

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof. Msc. Priscila Amara Patricio de Melo

Prof. Msc. Raquel Polizeli

Prof. Msc. Sara Coelho da Silva

Campo Mourão, 2012

Dedico este trabalho a Deus.
A minha família.
Ao meu namorado Juliano.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me iluminar e por me conceder saúde, força e paciência para desenvolver meus estudos.

A orientadora professora Msc. Priscila Amara Patricio de Melo, pela paciência, sabedoria e dedicação na realização deste trabalho.

Aos meus pais, Celso e Dulcinéia, pelos ensinamentos, pelos cuidados e pelo incentivo ao estudo. E ao meu irmão, Alessandro, pelo auxílio e apoio nessa jornada.

Ao meu namorado Juliano, pelo amor e carinho; pela paciência, conforto, compreensão e dedicação dados a mim para que conseguisse concluir essa etapa da minha vida.

Aos professores da especialização, que contribuíram com a minha formação e pela ajuda durante o curso.

E por fim, agradeço às minhas amigas da graduação, por compartilharem seus conhecimentos e dividirem os momentos de alegria e tristeza durante o curso. Quero agradecer em especial à amiga Elisangela, que também esteve presente durante a Especialização e mais uma vez compartilhou seus conhecimentos e sua amizade.

Toda a sabedoria vem do Senhor Deus, ela sempre esteve com Ele.
Ela existe antes de todos os séculos.
Eclesiástico 1, 1

RESUMO

SACOMAN, Andressa Moro. Aplicação de Autovalores e Autovetores no Reconhecimento de Quádricas. 51 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

O principal objetivo deste trabalho é estudar conceitos de Álgebra Linear e utilizá-los no reconhecimento de quádricas. Inicialmente relembramos conceitos básicos da Álgebra Linear, como espaços vetoriais, transformações lineares, autovalores e autovetores bem como relações existentes entre eles. Posteriormente tratamos dos espaços vetoriais com produto interno. Por fim, vamos introduzir o conceito de formas bilineares bem como o caso particular das formas quadráticas, e utilizar a teoria estudada para fazer o reconhecimento de quádricas.

Palavras-chave: Autovalores, autovetores, formas bilineares, quádricas.

ABSTRACT

SACOMAN, Andressa Moro. Application of Eigenvalues and Eigenvectors in the Recognition of Quadrics. 51 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2012.

The main objective of this work is to study the concepts of linear algebra and use it for recognition of quadrics. First we recall the basic concepts of linear algebra as vector spaces, linear transformations, eigenvalues and eigenvectors as well as relationships between them. Later we deal with the inner product vector spaces. Finally, we introduce the concept of bilinear forms and the particular case of quadratic forms, and use the theory to study the recognition of quadrics.

Keywords: Eigenvalues, eigenvectors, bilinear forms, quadrics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os conceitos envolvidos em Álgebra Linear constituem atualmente ferramentas muito úteis nas várias áreas da Matemática, seja explorando apenas os seus aspectos mais algébricos, seja levando em conta os aspectos geométricos embutidos na teoria. Com isso ela se torna relevante na resolução de vários tipos de problemas matemáticos, dentre eles está o de reconhecimento de quádricas.

O principal objetivo deste trabalho é o de estudar conceitos fundamentais da Álgebra Linear visando sua posterior aplicação na classificação das quádricas.

No Capítulo 2 listaremos algumas informações que consideramos necessárias ao entendimento dos capítulos posteriores. Começaremos com o conceito de espaços vetoriais, pois é este o principal objeto de estudo da álgebra. Em seguida enunciaremos resultados básicos sobre os espaços vetoriais e as transformações lineares. Em particular, são explorados os conceitos de base e dimensão e a relação entre eles. Ainda neste capítulo definimos os autovalores e autovetores de um operador linear.

O Capítulo 3 será dedicado ao estudo dos espaços vetoriais com produto interno. Veremos conceitos como ortogonalidade e o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, operadores adjuntos e auto-adjuntos.

No Capítulo 4 apresentaremos as formas bilineares e algumas de suas classes especiais como formas simétricas e quadráticas. Por fim, aplicamos os conceitos e resultados estudados para fazer o reconhecimento de quádricas.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, iremos recordar algumas definições e resultados básicos da Álgebra Linear que serão utilizados ao longo deste trabalho. Assumiremos que o leitor esteja familiarizado com o conteúdo apresentando aqui.

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

Nesta seção, apresentaremos defenições e resultados referentes a espaço vetorial, base, dimensão e subespaço vetorial que serão utilizados nos Capítulos 3 e 4.

Definição 2.1 *Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre (um corpo) $\mathbb{K}$ se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as seguintes duas operações:*
(A) A cada par u, v de vetores de V corresponde um vetor $u+v \in V$, chamado de soma de u e v, de modo que:
(A1) $u+v = v+u$, $\forall u,v \in V$ (propriedade comutativa).
(A2) $(u+v)+w = u+(v+w)$, $\forall u,v,w \in V$ (propriedade associativa).
(A3) exista em V um vetor, denominado vetor nulo e denotado por 0, tal que $0+v = v$, $\forall v \in V$.
(A4) a cada vetor $v \in V$ exista um vetor em V, denotado por -v, tal que $v+(-v) = 0$.
(M) A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, corresponde um vetor $\alpha \cdot v \in V$, denominado produto por escalar de α por v de modo que:
(M1) $(\alpha\beta)\cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$ (propriedade associativa).
(M2) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$ (onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{K}$).
(M3) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall u,v \in V$.
(M4) $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$.

Exemplo 2.1 *O conjunto dos vetores do espaço $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1,x_2,x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ bastante natural com as opereções:*
$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$, $\forall (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$
$\alpha(x_1,x_2,x_3) = (\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.2 *O conjunto das matrizes reais $m \times n$, com a soma e o produto por escalar usuais é um espaço vetorial.*

Definição 2.2 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.*
(1) Um vetor $v \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \cdots, v_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

(2) Seja B um subconjunto de V. Dizemos que B é um conjunto gerador de V (ou que B gera V) se todo elemento de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de B. Denota-se $V = [B]$.

Definição 2.3 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ um subconjunto de V.*
(a) Dizemos que B é linearmente independente (ou LI) se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, para todo $v_i \in B$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$, implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
(b) O conjunto B é chamado de linearmente dependente (ou LD) se não for linearmente independente.

Definição 2.4 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto B de V é uma base de V se*
(i) B for um conjunto gerador de V; e
(ii) B for linearmente independente.

Exemplo 2.3 *O conjunto $\{(1,1),(0,1)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.*
De fato: Se $(0,0) = a(1,1) + b(0,1) = (a, a+b)$, então

$$\begin{cases} a &= 0 \\ a+b &= 0 \end{cases}$$

logo $a = b = 0$. Isto é, $\{(1,1),(0,1)\}$ é linearmente independente.
Ainda o conjunto $[(1,1),(0,1)]$ é gerador de V, pois dado $v = (x,y) \in V$, temos

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$$

ou seja, todo vetor de $\mathbb{R}^2$ é uma combinação linear dos vetores (1, 1) e (0, 1).

Definição 2.5 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se V admite uma base finita, então chamamos de dimensão de V o número de elementos de tal base. Caso contrário dizemos que* *a dimensão de V é infinita. Seja n o número de elementos de uma base de V, denotaremos* $dim_{\mathbb{K}}V = n$.

Neste trabalho estamos interessados somente nos espaços de dimensão finita.

Definição 2.6 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$. *Um subconjunto não vazio, W de V é um subespaço vetorial de V se:*
(a) para quaisquer $v_1, v_2 \in W$ *tivermos* $v_1 + v_2 \in W$;
(b) para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $v \in W$ *tivermos* $\alpha v \in W$.

Observe que fazendo $\alpha = 0$ no item (b) temos que qualquer subespaço W de V dever conter o vetor nulo.

Exemplo 2.4 *Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços chamados subespaços triviais, o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial V.*

Exemplo 2.5 *Seja* $V = \mathbb{R}^3$. *Se* $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y = 0\right\}$, *então W é um subespaço vetorial de V.*
De fato, sejam $u, v \in W$ *onde* $u = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $v = (x_2, y_2, z_2)$, *então*

$$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

note que

$$x_1 + x_2 + 3(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + 3y_1 + 3y_2 = x_1 + 3y_1 + x_2 + 3y_2 = 0 + 0 = 0$$

logo $u + v \in W$.
Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $u = (x,y,z) \in W$, *como* $u \in W \Rightarrow x + 3y = 0$, *então*

$$\alpha u = \alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

observe que

$$\alpha x + 3\alpha y = \alpha(x + 3y) = \alpha 0 = 0$$

logo $\alpha u \in W$.

Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

2.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Esta seção será dedicada a recordar definições e resultados referentes a transformações lineares, isomorfismo, autovalor, autovetor, polinômio característico e subespaço invariante que serão aplicados nos próximos capítulos.

Definição 2.7 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se*
(1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para todos $u_1, u_2 \in U$, e
(2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $u \in U$.

Definição 2.8 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear.*
(a) O conjunto $\{u \in U : T(u) = 0\}$ é chamado de núcleo de T e será denotado por $NucT$.
(a) O conjunto $\{v \in V : \exists u \in U \text{ com } T(u) = v\}$ é chamado de imagem de T e será denotado por ImT.

Proposição 2.1 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então*
(a) $NucT$ é um subespaço vetorial de U e ImT é um subespaço vetorial de V.
(b) T é injetora se e somente se $NucT = \{0\}$.
DEMONSTRAÇÃO: (a) Como $0 \in NucT$ temos que $NucT \neq \emptyset$.

Sejam $u_1, u_2 \in NucT$ como é núcleo implica $T(u_1) = 0$ e $T(u_2) = 0$, mas T é transformação linear então

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0$$

então $(u_1 + u_2) \in NucT$.

Seja $u \in NucT$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, como é núcleo implica $T(u) = 0$, mas T é transformação linear então

$$T(\lambda u) = \lambda \cdot T(u) = \lambda \cdot 0 = 0$$

logo $\lambda u \in NucT$.

Portanto, $NucT$ é um subespaço vetorial de U.

Analogamente, como $0 \in ImT$ temos que $ImT \neq \emptyset$.

Sejam $v_1, v_2 \in ImT$. Então $\exists u_1 \in U$ tal que $T(u_1) = v_1$ e $\exists u_2 \in U$ tal que $T(u_2) = v_2$

$$v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2)$$

então $(v_1+v_2)\in ImT$.

Seja $v\in ImT$ *e* $\lambda\in \mathbb{K}$, *como é imagem implica que* $\exists u\in U$ *tal que* $T(u)=v$

$$\lambda v=\lambda T(u)=T(\lambda u)$$

logo $\lambda v\in ImT$.

Portanto, ImT *é um subespaço vetorial de V.*

(b) $(\Rightarrow)$ *Sabemos que* $T(0)=0$, *pois T é uma transformação linear. Note que se T é injetora então não pode haver nenhum vetor além de 0 em* $NucT$. *Portanto* $NucT=\{0\}$.

$(\Leftarrow)$ *Vamos mostrar que* $NucT=\{0\}\Rightarrow T$ *é injetora.*

Sejam $u_1,u_2\in U$ *tais que*

$$\begin{gathered} T(u_1)=T(u_2)\\ T(u_1)-T(u_2)=0\\ T(u_1-u_2)=0 \end{gathered}$$

logo $(u_1-u_2)\in NucT$.

Por hipótese $NucT=\{0\}$, *então* $u_1-u_2=0 \ \Rightarrow\ u_1=u_2$.

Portanto, T é injetora.

Lema 2.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e* $T:U\to V$ *uma transformação linear. Se* $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ *é uma base de U, então* $\{T(u_1),\cdots,T(u_m)\}$ *gera* ImT.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $v\in ImT$. *Então existe* $u\in U$ *tal que* $T(u)=v$.

Como B é uma base de U temos que existem escalares $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ *tais que*

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n\\ T(u) &= T\left(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n\right)\\ T(u) &= T(\alpha_1u_1)+T(\alpha_2u_2)+\cdots+T(\alpha_nu_n)\\ T(u) &= \alpha_1T(u_1)+\alpha_2T(u_2)+\cdots+\alpha_nT(u_n) \end{aligned}$$

como $v=T(u)=\alpha_1T(u_1)+\alpha_2T(u_2)+\cdots+\alpha_nT(u_n)$ *temos que* $\{T(u_1),\cdots,T(u_m)\}$ *gera a* ImT.

Teorema 2.1 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *com* $dim_{\mathbb{K}}U$ *finita e* $T:U\to V$ *uma transformação linear. Então*

$$dim_{\mathbb{K}}U=dim_{\mathbb{K}}NucT+dim_{\mathbb{K}}ImT$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que $NucT\neq\{0\}$. *Considere* $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ *uma base de* $NucT$

como B é uma base temos que B é linearmente independente, logo podemos estender o conjunto B a uma base $B' = \{u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m\}$ de U. Para concluir o que queremos basta exibirmos uma base de ImT com m elementos. Considere os elementos V:

$$T(u_1), \cdots, T(u_n), T(v_1), \cdots, T(v_m)$$

note que $T(u_i) = 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

Segue do Lema 2.1 que $B'' = \{T(v_1), \cdots, T(v_m)\}$ é um conjunto gerador da imagem de T.

Vamos mostrar que B'' é linearmente independente. De fato, sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tais que

$$\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_m T(v_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T(v_i) = 0$$

mas $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i)\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \in NucT$, como B é uma base de Nuc T temos que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j u_j \in NucT$$

para $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{K}$. Então

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j u_j = 0$$

como B' é linearmente independente temos que $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \cdots, m$.

Portanto, B'' é linearmente independente.

Definição 2.9 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$.*
(i) Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Se T for bijetora (isto é, injetora e sobrejetora) então dizemos que ela é um isomorfismo.
(ii) Se existir um isomorfismo $T : U \to V$, então dizemos que U e V são espaços vetoriais isomorfos e indicaremos $U \cong V$.

Proposição 2.2 *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de mesma dimensão finita $n \geq 1$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) T é um isomorfismo.
(b) T é injetora.
(c) T é sobrejetora.
DEMONSTRAÇÃO: As implicações $(a) \Rightarrow (b)$ e $(a) \Rightarrow (c)$ são imediatas pela definição de isomorfismo.
$(b) \Rightarrow (a)$ Suponha que T seja injetora. Então $NucT = \{0\}$ e, portanto, $dim_{\mathbb{K}} NucT = 0$.

Usando o Teorema 2.1 temos que

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{K}}U &= dim_{\mathbb{K}}NucT + dim_{\mathbb{K}}ImT \\ dim_{\mathbb{K}}U &= 0 + dim_{\mathbb{K}}ImT \\ dim_{\mathbb{K}}U &= dim_{\mathbb{K}}ImT \end{aligned}$$

mas por hipótese $dim_{\mathbb{K}}U = dim_{\mathbb{K}}V = n$, então $dim_{\mathbb{K}}U = dim_{\mathbb{K}}ImT = dim_{\mathbb{K}}V$. Logo, $ImT = V$, isto é, T é sobrejetora.

Logo, T é injetora e sobrejetora, portanto, T é isomorfismo.

$(c) \Rightarrow (a)$ *Suponha que T seja sobrejetora. Então $ImT = V$ e, portanto,*

$$dim_{\mathbb{K}}ImT = dim_{\mathbb{K}}V = dim_{\mathbb{K}}U$$

Pelo Teorema 2.1 temos que

$$dim_{\mathbb{K}}U = dim_{\mathbb{K}}NucT + dim_{\mathbb{K}}ImT$$

Então, $dim_{\mathbb{K}}NucT = 0 \Rightarrow NucT = \{0\}$ implica em T injetora.

Portanto T é injetora, logo, T é um isomorfismo.

MATRIZES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial n-dimensional e V $\mathbb{K}$-espaço vetorial m-dimensional. Consideremos $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ base de U e $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ base de V. Dado $T : U \to V$ uma transformação linear temos que

$$\begin{array}{ccccccccccc} T(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & a_{21}v_2 & + & \cdots & + & a_{m1}v_m & = & \sum_{i=1}^{m} a_{i1}v_i \\ T(u_2) & = & a_{12}v_1 & + & a_{22}v_2 & + & \cdots & + & a_{m2}v_m & = & \sum_{i=1}^{m} a_{i2}v_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & a_{2n}v_2 & + & \cdots & + & a_{mn}v_m & = & \sum_{i=1}^{m} a_{in}v_i, \end{array}$$

para $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Para $u \in U$ temos $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$, onde os $\alpha_j's$ pertencem a $\mathbb{K}$, segue que

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) \\ &= \alpha_1 (a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m) + \cdots + \alpha_n (a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m) \\ &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m \end{aligned}$$

Reescrevendo em termos de multiplicação de matrizes temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{B'}$$

isto é, $[T(u)]_{B'} = A \cdot [v]_B$ onde A é a matriz $(a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Definição 2.10 *A matriz $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida acima é chamada de matriz da transformação linear de T com relação as bases B e B' e é denotada por $[T]_{B,B'}$.*

Lembremos que um operador linear é uma transformação linear $T : V \to V$. Denotamos por $L(V,V)$, o conjunto de todos os operadores lineares de V, em que V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Definição 2.11 *Seja $T : V \to V$ um operador linear:*
(a) Um autovalor de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$.
(b) Se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de autovetor de T associado a λ. Denotaremos por $Aut_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ.
(c) Suponha que $dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$. Dizemos que T é diagonalizável se existir uma base B tal que a matriz da transformação linear T nessa base, $[T]_B$, é diagonal, o que é equivalente a dizer que existe uma base formada por autovetores de T.

Definição 2.12 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $T \in L(V,V)$ um operador linear e C uma base de V. Chamamos o polinômio $det([x\, Id - T]_C)$ de polinômio característico de T e o denotamos por $p_T(x)$.*

Os autovalores de T, caso existam, serão as raízes de seu polinômio caracterísco.

Exemplo 2.6 *Seja* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *dada por* $T(x,y) = (-y,x)$. *Se* $C = \{(1,0),(0,1)\}$ *é a base canônica de* $\mathbb{C}^2$ *sobre* $\mathbb{C}$*, então*

$$T(1,0) = (0,1) = 0\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1)$$

$$T(0,1) = (-1,0) = -1\cdot(1,0) + 0\cdot(0,1)$$

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Também,

$$\begin{aligned} p_T(x) &= [x\cdot Id - T] \\ &= det\left[x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= det\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= det\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Note que as raízes do polinômio $p_T(x) = x^2 + 1$ *são* $x = \pm i$*, logo, os autovalores são* $\lambda_1 = i$ *e* $\lambda_2 = -i$.

Vamos determinar os autovetores associados.

Para $\lambda_1 = i$ *temos*

$$T(x,y) = (-y,x) = i(x,y) = (xi,yi)$$

$$\begin{cases} -y &= xi \\ x &= yi \end{cases}$$

Com isso, $Aut_T(i) = [(i,1)]$.

Da mesma forma, obtemos o autovetor associado a $\lambda_2 = -i$ *que será* $Aut_T(-i) = [(i,-1)]$.

Observe que $B = \{(i,1),(i,-1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{C}^2$ *sobre* $\mathbb{C}$.

Definição 2.13 *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear onde* V *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial e seja* $W \subseteq V$ *um subespaço de* V*. Dizemos que* W *é um subespaço T-invariante de* V *se* $T(w) \in W$ *para todo* $w \in W$.

Definição 2.14 *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial. Um funcional linear em* V *é uma transformação linear* $f : V \to \mathbb{K}$.

Iremos denotar o funcional linear $L(V,\mathbb{K})$ por V^* e chamá-lo de esapaço dual a V.

3 ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Ao longo deste capítulo, iremos apresentar espaços vetoriais com produtos internos. Um espaço vetorial com produto interno é um espaço vetorial que mantém muitas das características do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, sendo de certa forma, a sua generalização mais natural. Neste capítulo, o corpo $\mathbb{K}$ de um espaço vetorial será sempre igual a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{C}$.

Definição 3.1 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um produto interno sobre V é uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes quatro propriedades:*
(P1) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle\,,\ \forall u,v,w \in V.$
(P2) $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\,\langle u,v\rangle\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u,v \in V.$
(P3) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle},\ \forall u,v \in V.$
(P4) $\langle u,u\rangle > 0,$ *se* $u \neq 0.$

Observação 3.1 *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.*
(a) Segue facilmente das propriedades acima que
1) $\langle 0,v\rangle = \langle v,0\rangle = 0,\ \forall v \in V.$
De fato, como $\langle 0\cdot 0,v\rangle = 0\,\langle 0,v\rangle = 0$*, segue-se que* $\langle 0,v\rangle = \langle v,0\rangle = 0,\ 0 \in \mathbb{R},\ \forall v \in V.$
2) $\langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$
(b) Observe que vale
(P5) $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle\,,\ \forall u,v,w \in V.$
Com efeito, pelas propriedades (P1) e (P3), teremos, para $u,v,w \in V$, que

$$\langle u,v+w\rangle = \overline{\langle v+w,u\rangle} = \overline{\langle v,u\rangle + \langle w,u\rangle} = \overline{\langle v,u\rangle} + \overline{\langle w,u\rangle} = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$$

(c) Note que vale a seguinte igualdade
(P6) $\langle u,\lambda v\rangle = \overline{\lambda}\,\langle u,v\rangle\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u,v \in V.$
De fato, se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u,v \in V$, temos, pelas propriedades (P2) e (P3), que

$$\langle u,\lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v,u\rangle} = \overline{\lambda\,\langle v,u\rangle} = \overline{\lambda}\ \ \overline{\langle v,u\rangle} = \overline{\lambda}\,\langle u,v\rangle$$

(d) Usando as propriedades (P2) e (P6), teremos que

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle u_i, v_j \rangle$$

para $u_i, v_j \in V$ *e* $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$ *e* $j = 1, \cdots, m$.
(e) No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, a propriedade (P3) implica na igualdade* $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *para* $u, v \in V$*, pois, neste caso, teremos que* $\overline{\langle v, u \rangle} = \langle v, u \rangle$, $\forall u, v \in V$. *Esta simetria não será válida para o caso complexo. De fato, se* V *é um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial e* $v \in V$*, teremos por (P4) que* $\langle v, v \rangle > 0$ *e* $\langle iv, iv \rangle > 0$. *Se tivéssemos aqui* $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *para todos* $u, v \in V$ *então, usando (P2), obteríamos*

$$\langle iv, iv \rangle = i \langle v, iv \rangle = i \langle iv, v \rangle = i^2 \langle v, v \rangle = - \langle v, v \rangle > 0$$

uma contradição.

Exemplo 3.1 *Para* $u = (x_1, x_2)$ *e* $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$*, seja*

$$\langle u, v \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

é chamado produto interno canônico em $\mathbb{R}^2$. *E podemos generalizar para* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.2 *Para* $u = (x_1, x_2)$ *e* $v = (y_1, y_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*, seja*

$$\langle u, v \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$$

Iremos verficar as quatro propriedades. De fato,
(P1) seja $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ *e* $w = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ *então,*

$$\begin{aligned}
\langle u + v, w \rangle &= \langle (x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle \\
&= \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2) \rangle \\
&= (x_1 + y_1) z_1 - (x_2 + y_2) z_1 - (x_1 + y_1) z_2 + 4 (x_2 + y_2) z_2 \\
&= x_1 z_1 + y_1 z_1 - x_2 z_1 - y_2 z_1 - x_1 z_2 - y_1 z_2 + 4 x_2 z_2 + 4 y_2 z_2 \\
&= (x_1 z_1 - x_2 z_1 - x_1 z_2 + 4 x_2 z_2) + (y_1 z_1 - y_2 z_1 - y_1 z_2 + 4 y_2 z_2) \\
&= \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2) \rangle + \langle (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle \\
&= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

Logo $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, *para todos* $u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

(P2) Para $u, v \in \mathbb{R}^2$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *temos,*

$$\begin{aligned}
\langle \lambda u, v \rangle &= \langle \lambda (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= \langle (\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= \lambda x_1 y_1 - \lambda x_2 y_1 - \lambda x_1 y_2 + 4\lambda x_2 y_2 \\
&= \lambda (x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2) \\
&= \lambda \langle u, v \rangle
\end{aligned}$$

Logo $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.
(P3) Para $x, y \in \mathbb{R}$ *então*

$$\langle u, v \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2 = y_1 x_1 - y_1 x_2 - y_2 x_1 + 4 y_2 x_2 = \langle v, u \rangle$$

Logo $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
(P4) Observe que $\langle u, u \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$, *decorre que* $\langle u, u \rangle > 0$ *se* $u \neq 0$.

Portanto, $\langle u, v \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$ *é um produto interno.*

Exemplo 3.3 *Considere o* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* $V = C([a, b], \mathbb{R})$ *das funções contínuas de* $[a, b]$ *em* $\mathbb{R}$. *As regras de integração garantem que*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt, \text{ para } f, g \in V$$

é um produto interno. De fato,
(P1) para $f, g, h \in V$ *temos*

$$\begin{aligned}
\langle f + g, h \rangle &= \int_a^b [f(t) + g(t)] h(t) dt \\
&= \int_a^b [f(t)h(t) + g(t)h(t)] dt \\
&= \int_a^b f(t)h(t) dt + \int_a^b g(t)h(t) dt \\
&= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle
\end{aligned}$$

Logo $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$.
(P2) Para $f, g \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda f, g \rangle = \int_a^b \lambda f(t) g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) g(t) dt = \lambda \langle f, g \rangle$$

Logo $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$.
(P3) Para $f, g \in V$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt = \int_a^b g(t) f(t) dt = \langle g, f \rangle$$

Logo $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$.
(P4) Para $f \in V$

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$$

Logo $\langle f,f\rangle \geq 0$.

Portanto, $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$*, para* $f,g \in V$ *é um produto interno.*

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja $\langle\ ,\ \rangle$ um produto interno em V. Se $T : W \to V$ for uma transformação linear injetora, então podemos definir um produto interno em W da seguinte forma

$$\langle u,v\rangle_T = \langle T(u),T(v)\rangle\,,\ \forall u,v \in W \tag{1}$$

De fato,
(P1) Se $u_1,u_2,v \in W$, então

$$\begin{aligned}\langle u_1+u_2,v\rangle_T &= \langle T(u_1+u_2),T(v)\rangle = \langle T(u_1)+T(u_2),T(v)\rangle = \\ &= \langle T(u_1),T(v)\rangle + \langle T(u_2),T(v)\rangle = \langle u_1,v\rangle_T + \langle u_2,v\rangle_T\end{aligned}$$

(P2) Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u,v \in W$, então

$$\begin{aligned}\langle \lambda u,v\rangle_T &= \langle T(\lambda u),T(v)\rangle = \langle \lambda T(u),T(v)\rangle = \\ &= \lambda\,\langle T(u),T(v)\rangle = \lambda\,\langle u,v\rangle_T\end{aligned}$$

(P3) Se $u,v \in W$, então

$$\langle u,v\rangle_T = \langle T(u),T(v)\rangle = \overline{\langle T(u),T(v)\rangle} = \overline{\langle v,u\rangle}_T$$

(P4) Seja u um vetor não nulo em W. Como T é injetora, teremos que $T(u) \neq 0$. Logo

$$\langle u,u\rangle_T = \langle T(u),T(u)\rangle > 0$$

Definição 3.2 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Para cada $v \in V$, chamamos de norma de v ao número real dado por $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.*

Observação 3.2 *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Segue diretamente das definições envolvidas que*
(a) $\|u\| \geq 0,\ \forall u \in V$ *e* $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
Com efeito, $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ *pela propriedade (P4) temos que* $\langle u,u\rangle > 0$*, logo* $\|u\| > 0$.
E

$(\Rightarrow)$ Se $u = 0$ temos pela Observação 3.1 (1) que

$$\|u\| = \sqrt{\langle 0,0 \rangle} = \sqrt{0} = 0$$

$(\Leftarrow)$ Seja $\|u\| = 0$, então $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle} = 0$ elevando ao quadrado obtemos, $\langle u,u \rangle = 0$ logo pela Observação 3.1 (2) temos que $u = 0$.
(b) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall u \in V$.
De fato,

$$\|\alpha u\| = \sqrt{\langle \alpha u,u \rangle} = \sqrt{\alpha \langle u,u \rangle} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\langle u,u \rangle} = |\alpha| \, \|u\|$$

Exemplo 3.4 *A norma de um vetor depende do produto interno escolhido. Se considerarmos em $\mathbb{R}^2$ o produto interno*

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2) \rangle = 2x_1x_2 + 25y_1y_2$$

então a norma do vetor (1, 0) será $\|(1,0)\| = \sqrt{\langle (1,0),(1,0) \rangle} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 1 + 25 \cdot 0 \cdot 0} = \sqrt{2}$, enquanto a do vetor (0, 1) será $\|(0,1)\| = \sqrt{\langle (0,1),(0,1) \rangle} = \sqrt{2 \cdot 0 \cdot 0 + 25 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{25} = 5$.

3.1 ORTOGONALIDADE

Definição 3.3 *Sejam u e v vetores num espaço V com produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Dizemos que u e v são ortogonais se $\langle u,v \rangle = 0$. Se A é um subconjunto de vetores em V, dizemos que A é um conjunto ortogonal se dois quaisquer vetores distintos em A são ortogonais. Um conjunto ortonormal é um conjunto ortogonal A, com a propriedade adicional de que $\|u\| = 1$ para todo $u \in A$.*

Usaremos a notação $u \perp v$ para indicar que os vetores são ortogonais.

Observação 3.3 *O vetor nulo 0 é ortogonal a todos os elementos de V pois $\langle 0,u \rangle = 0$, $\forall u \in V$. Além disso, o vetor nulo é o único vetor com esta propriedade.*

Exemplo 3.5 *O vetor (x,y) em $\mathbb{R}^2$ é ortogonal a $(-y,x)$ em relação ao produto interno canônico, pois*

$$\langle (x,y),(-y,x) \rangle = x \cdot (-y) + y \cdot x = -xy + xy = 0$$

Proposição 3.1 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e seja A um subconjunto ortogonal de V formado por vetores não nulos.*

(a) Se $v \in [v_1, \cdots, v_n]$, com $v_i \in A$, então

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

(b) A é linearmente independente.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Seja $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$. Então, como $\{v_1, \cdots v_n\}$ é um conjunto ortogonal, temos, para $j = 1, \cdots, n$ que

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2$$

então

$$\langle v, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2 \Rightarrow \alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}, \ \ \forall j = 1, \cdots, n$$

Daí segue que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

como queríamos.

(b) Suponha que existam escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e vetores não nulos $v_1, \cdots, v_n \in A$ tais que

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

com $i = 1, \cdots, n$. Como $\{v_1, \cdots v_n\}$ é ortogonal, temos, para $j = 1, \cdots, n$ que

$$\langle 0, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2$$

daí segue que

$$\langle 0, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2 \Rightarrow \alpha_j = \frac{\langle 0, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}, \ \ \forall j = 1, \cdots, n$$

e para $i = 1, \cdots, n$, temos

$$\alpha_i = \frac{\langle 0, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} = 0$$

portanto, A é linearmente independente.

Corolário 3.1 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Então, para $v \in V$, temos*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V temos que $\|v_i\| = 1$, então *pela Proposição 3.1 temos que*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{1^2} v_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \, v_i$$

como queríamos.

3.2 O PROCESSO DE ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Considere V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno. Seja $A = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$ um conjunto linearmente independente. Vamos construir um outro conjunto $A' = \{w_1, \cdots, w_n\} \subset V$ que seja ortogonal e tal que os subespaços gerados por A e A' sejam os mesmos. Esta construção é feita indutivamente como segue

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$

Note que $w_2 \neq 0$, pois $\{v_1, v_2\}$ é LI e que $w_2 \perp w_1$, ou seja, $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle w_2, w_1 \rangle &= \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1, w_1 \right\rangle \\
&= \langle v_2, w_1 \rangle + \left\langle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1, w_1 \right\rangle \\
&= \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \langle w_1, w_1 \rangle \\
&= \langle v_2, w_1 \rangle - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \|w_1\|^2 \\
&= \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

como queríamos.

Definimos $w_1, \cdots, w_n$, $1 < k < n$, podemos definir w_{k+1} como sendo

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} w_k$$

Como $w_2 \perp w_1$ temos que o conjunto $\{w_1, \cdots, w_n\}$ definido acima é ortogonal e pela Proposição 3.1 temos que o conjunto é LI. Note que, para $i = 1, \cdots, n$, $w_i \in W = [v_1, \cdots, v_n]$. Como $dim_{\mathbb{K}} W = n$, segue que $A' = \{w_1, \cdots, w_n\}$ é uma base de W, o que mostra a igualdade dos subespaços gerados por A e por A'.

Exemplo 3.6 *Consideremos os vetores* $v_1 = (3, 0, 4)$, $v_2 = (-1, 0, 7)$ *e* $v_1 = (2, 9, 11)$ *em* $\mathbb{R}^3$

munido do produto interno canônico. Aplicando aos vetores v_1, v_2, v_3 o processo de ortogonalização de Gram-Schimidt, obteremos os seguintes vetores

$$w_1 = (3,0,4)$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= (-1,0,7) - \frac{\langle(-1,0,7),(3,0,4)\rangle}{\|(3,0,4)\|^2}(3,0,4) \\
w_2 &= (-1,0,7) - \frac{[-3+0+28]}{9+0+16}(3,0,4) \\
w_2 &= (-1,0,7) - \frac{25}{25}(3,0,4) \\
w_2 &= (-1,0,7) - (3,0,4) \\
w_2 &= (-4,0,3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3 &= (2,9,11) - \frac{\langle(2,9,11),(3,0,4)\rangle}{\|(3,0,4)\|^2}(3,0,4) - \frac{\langle(2,9,11),(-4,0,3)\rangle}{\|(-4,0,3)\|^2}(-4,0,3) \\
w_3 &= (2,9,11) - \frac{[6+0+44]}{9+0+16}(3,0,4) - \frac{[-8+0+33]}{16+0+9}(-4,0,3) \\
w_3 &= (2,9,11) - \frac{50}{25}(3,0,4) - \frac{25}{25}(-4,0,3) \\
w_3 &= (2,9,11) - (6,0,8) - (-4,0,3) \\
w_3 &= (0,9,0)
\end{aligned}$$

Observe que $(0,9,0) \perp w_1$ *e* $(0,9,0) \perp w_2$. *Portanto, o conjunto* $\{(3,0,4),(-4,0,3),(0,9,0)\}$ *é uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$ *contendo o vetor* $(3,0,4)$.

Teorema 3.1 *Todo espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno possui uma base ortonormal.*
DEMONSTRAÇÃO: Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Então pelo processo de ortogonalização de Gram-Schimidt, existe um conjunto ortogonal $\{w_1, \cdots, w_n\}$ que gera V. Como todo conjunto ortogonal é linearmente independente, segue que $\{w_1, \cdots, w_n\}$ é uma base ortogonal de V. Por fim, $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \cdots, \frac{w_n}{\|w_n\|}\right\}$ é uma base ortonormal, como queríamos.

Observação 3.4 *A vantagem de se trabalhar com bases ortonormais é que, neste caso, o produto interno pode ser descrito de uma maneira bastante simples em termos das coordenadas dos vetores de V.*
De fato, seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e com uma base ortonormal

$\{v_1, \cdots, v_n\}$. *Se* $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ *e* $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$ *pertencem a V, com* $\alpha_i^{\prime}s$ *e* $\beta_j^{\prime}s$ *em* $\mathbb{K}$*, então*

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \left\langle v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j}$$

Ou, em outra notação:

$$\langle (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_B, (\beta_1, \cdots, \beta_n)_B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

Uma outra consequência interessante é dada no próximo resultado.

Corolário 3.2 *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial munido de um produto interno. Sejam* $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ *e* $B' = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *duas bases ortonormais de V. Se M é matriz de mudança de bases B para* B'*, então* $M \cdot \overline{M}^t = \overline{M}^t \cdot M = Id_n$.
DEMONSTRAÇÃO: Seja $M = (a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ *a matriz de mudança de bases B para* B'*. Então, para* $i, j = 1, \cdots, n$*, temos que* $v_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} u_k$ *e* $v_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} u_k$*. Como* $\left\langle v_i, v_j \right\rangle = \delta_{ij}$*, onde* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$*. Segue da Observação 3.4 que*

$$\left\langle v_i, v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} u_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \overline{\alpha_{kj}} \langle u_k, u_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \overline{\alpha_{kj}} = \delta_{ij}$$

para cada $1 \leq i,\ j \leq n$*. Consequentemente,* $M \cdot \overline{M}^t = \overline{M}^t \cdot M = Id_n$.

3.3 SUBESPAÇO ORTOGONAL

Definição 3.4 *Seja V um espaço vetorial com produto interno, e seja* $S \subseteq V$ *um subconjunto de V. Chamamos de conjunto ortogonal a S ao conjunto* $S^{\perp} = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0,\ \forall u \in S\}$.

Observação 3.5 *seja S um subconjunto de um espaço vetorial V com produto interno.*
(1) O conjunto $S^{\perp}$ *é um subespaço vetorial de V, mesmo que S não tenha estrutura de espaço vetorial. De fato,*
a) $0 \in S^{\perp}$*, pois* $\langle 0, v \rangle = 0,\ \forall v \in V$.
b) Se $v_1, v_2 \in S^{\perp}$ *então* $\langle v_1, u \rangle = \langle v_2, u \rangle = 0,\ \forall u \in S$*. Portanto, temos que*

$$\langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle = 0,\ \forall u \in V$$

e então $v_1 + v_2 \in S^{\perp}$.

c) Se $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $v \in S^{\perp}$ *então* $\langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \lambda \cdot 0 = 0, \ \forall u \in V$.

(2) Se $S = \{0\}$, *então* $S^{\perp} = V$.

(3) Se S contiver uma base de V, então $S^{\perp} = \{0\}$.

Proposição 3.2 *Seja V um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *munido de um produto interno. Sejam* $W \subseteq V$ *um subespaço e* $B = \{w_1, \cdots, w_k\}$ *um conjunto gerador para W. Então* $v \in W^{\perp}$ *se e somente se* $\langle v, w_i \rangle = 0$, *para cada* $i = 1, \cdots, k$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $w \in W$. *Então existem* $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, *tais que*

$$w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k.$$

Portanto,

$$\langle v, w \rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \langle v, w_i \rangle .$$

Se assumirmos que $\langle v, w_i \rangle = 0$, *para cada* $1 \leq i \leq k$, *segue que* $\langle v, w \rangle = 0$, *ou seja,* $v \in W^{\perp}$. *Reciprocamente, se* $v \in W^{\perp}$, *então* $\langle v, w \rangle = 0$, *para cada* $w \in W$. *Em particular,* $\langle v, w_i \rangle = 0$, *para cada* $1 \leq i \leq k$.

Proposição 3.3 *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e com produto interno e seja* $W \subsetneq V$ *um subespaço próprio de V. Então* $V = W \oplus W^{\perp}$.

DEMONSTRAÇÃO: Precisamos mostrar que:

(i) $V = W + W^{\perp}$, *isto é, cada vetor* $v \in V$ *se escreve como uma soma* $v = w_1 + w_2$ *com* $w_1 \in W$ *e* $w_2 \in W^{\perp}$.

(ii) $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Se $W = 0$, *não há o que provar. Assuma que* $W \neq 0$ *e seja* $B = \{v_1, \cdots, v_m\}$ *uma base ortogonal de W (que existe pelo Teorema 3.1). Considere uma base* $C = \{v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ *também ortogonal de V e contendo B. Segue da proposição 3.1(a) que se* $v \in V$, *então*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

Note que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i \in W$. *Por outro lado, para cada* $j = 1, \cdots, m$

$$\left\langle v_j, \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i \right\rangle = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\overline{\langle v, v_i \rangle}}{\|v_i\|^2} \langle v_j, v_i \rangle = 0$$

Assim, segue da Proposição 3.2 que $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i \in W^{\perp}$. *Logo* $V = W + W^{\perp}$ *e isto prova (i).*

Para provarmos (ii), seja $w \in W \cap W^{\perp}$*. Como* $w \in W^{\perp}$*, temos* $\langle w, v \rangle = 0$ *para todo* $v \in W$*. Em particular,* $\langle w, w \rangle = 0$ *e, portanto,* $w = 0$*, como queríamos.*

Corolário 3.3 *Seja V um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e seja W um subespaço de V. Então* $dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} W + dim_{\mathbb{K}} W^{\perp}$*.*
DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 3.3 temos que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$*, segue disso que* $dim_{\mathbb{K}}(W \cap W^{\perp}) = 0$*, logo* $dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} W + dim_{\mathbb{K}} W^{\perp}$ *como queríamos.*

3.4 OPERADORES ADJUNTOS

Nesta seção iremos estudar alguns resultados referentes a operadores adjuntos e auto-adjuntos que são necessários para o reconhecimento das quádricas.

Definição 3.5 *Seja* $T \in L(V, V)$*, onde V é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *com produto interno e dimensão finita. Dizemos que o operador T possui um adjunto se existir um operador linear* $T^* \in L(V, V)$ *tal que* $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$*,* $\forall u, v \in V$*. Dizemos, neste caso, que* T^* *é o adjunto de T.*

Definição 3.6 *Seja* $T \in L(V, V)$*, onde V é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com produto interno. Dizemos que T é auto-adjunto se T admite adjunto* T^* *e* $T^* = T$*. No caso em que* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, usamos também o termo hermitiano e no caso em* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, usamos também o termo simétrico.*

Proposição 3.4 *Seja V um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*, com produto interno e de dimensão finita. Sejam* $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *uma base ortonormal de V e* $T \in L(V, V)$*. Se* $[T]_B = (a_{ij})_{i,j}$*, então* $a_{ij} = \left\langle T(v_j), v_i \right\rangle$*,* $\forall i, j = 1, \cdots, n$*.*
DEMONSTRAÇÃO: Segue da definição de $[T]_B$ *que*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \text{ para cada } j = 1, \cdots, n \tag{2}$$

Por outro lado, como B é uma base ortonormal, segue do Corolário 3.1 que, para todo $v \in V$*,* $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$*. Em particular, temos que*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle T(v_j), v_i \right\rangle v_i, \text{ para cada } j = 1, \cdots, n \tag{3}$$

Comparando-se as equações 2 e 3 (que nos dão ambas as coordenadas de $T(v_j)$ *em termos da base B), concluímos então que* $a_{ij} = \left\langle T(v_j), v_i \right\rangle$*,* $\forall i, j = 1, \cdots, n$*, como queríamos.*

Teorema 3.2 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita, e seja $T \in L(V,V)$. Em relação a qualquer base ortonormal de V, a matriz de T^* é igual à transposta conjugada da matriz de T.*

DEMONSTRAÇÃO: Considere $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ortonormal do espaço V e seja $[T]_B = (a_{ij})_{i,j}$ e $[T^*]_B = (c_{ij})_{i,j}$ as matrizes dos operadores T e T^*, respectivamente, com relação à base B. Segue da Proposição 3.4 que $a_{ij} = \left\langle T(v_j), v_i \right\rangle$ e $c_{ij} = \left\langle T^*(v_j), v_i \right\rangle$ para todos $i, j = 1, \cdots, n$. Usando-se a definição de T^* e as propriedades de produto intermo segue que

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \left\langle T^*(v_j), v_i \right\rangle \\ c_{ij} &= \overline{\left\langle v_i, T^*(v_j) \right\rangle} \\ c_{ij} &= \overline{\left\langle T(v_i), v_j \right\rangle} \\ c_{ij} &= \overline{a_{ji}} \\ [T^*]_B &= \overline{[T]}_B^t \end{aligned}$$

como queríamos.

Teorema 3.3 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita com produto interno. Se $T \in L(V,V)$ é auto-adjunto, então T possui um autovetor.*

DEMONSTRAÇÃO: Observe inicialmente que se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então $p_t(x)$ tem raízes e elas são autovalores de T, como queríamos. Vamos assumir então que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Suponha $dim_{\mathbb{K}}V = n$ e seja $T \in L(V,V)$ um operador auto-adjunto. Sejam B uma base ortonormal de V e $A = [T]_B$. Como $T = T^*$, temos pelo Teorema 3.2 que $A = \overline{A}^t$. Considere $W = M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ com produto interno $\langle X, Y \rangle = \overline{Y}^t X$ e $S : W \to W$ o operador linear dado por $S(X) = AX$. Calculando

$$\langle S(X), Y \rangle = \langle AX, Y \rangle = \overline{Y}^t (AX) = (\overline{Y}^t A)X = \overline{(\overline{A}^t Y)}^t X = \left\langle X, \overline{A}^t Y \right\rangle$$

Como $\langle S(X), Y \rangle = \left\langle X, \overline{A}^t Y \right\rangle$, $\forall X \in W$ teremos pela unicidade do adjunto que $S^*(Y) = \overline{A}^t Y$, e portanto, S é auto-adjunto. Por outro lado, não é difícil ver que $p_T(x) = p_S(x)$. Seja α uma raiz de $p_S(x)$. Como W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, segue que α é um autovalor de S.

Afirmação: α é um valor real.

De fato, se $v \neq 0$ for um autovetor associado ao autovalor α, então

$$\langle S(v), v \rangle = \langle \alpha v, v \rangle = \alpha \langle v, v \rangle$$

e, por outro lado,

$$\langle S(v), v \rangle = \langle v, S^*(v) \rangle = \langle v, S(v) \rangle = \langle v, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle v, v \rangle$$

Daí $\alpha \langle v, v \rangle = \overline{\alpha} \langle v, v \rangle$, e então

$$\alpha \langle v,v\rangle - \overline{\alpha} \langle v,v\rangle = 0$$
$$(\alpha - \overline{\alpha}) \langle v,v\rangle = 0$$

como $\langle v,v\rangle \neq 0$*, então* $(\alpha - \overline{\alpha}) = 0$ *e, consequentemente,* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Note que α *é uma raiz real de* $p_T(x)$*, e portanto,* α *é um autovalor de* T *como queríamos.*

Lema 3.1 *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita com produto interno e seja* $T \in L(V,V)$*. Se* W *é um subespaço* T*-invariante de* V*, então* $W^{\perp}$ *é* T^**-invariante.*
DEMONSTRAÇÃO: Temos que mostrar que $T^*(w) \in W^{\perp}$*, para cada* $w \in W^{\perp}$*, isto é, que* $\langle v, T^*(w)\rangle = 0$*,* $\forall v \in W$*. Sejam* $v \in W$ *e* $w \in W^{\perp}$*. Como* W *é* T*-invariante, então* $T(v) \in W$ *e, portanto,* $\langle T(v), w\rangle = 0$*. O resultado agora segue do fato de*

$$\langle v, T^*(w)\rangle = \langle T(v), w\rangle = 0$$

logo $W^{\perp}$ *é invariante por* T*.*

Proposição 3.5 *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Se* $T \in L(V,V)$ *é auto-adjunto, então existe uma base ortonormal de* V *cujos vetores são autovetores de* T*.*
DEMONSTRAÇÃO: Vamos supor que $dim_{\mathbb{K}}V = n \geq 1$*. Pelo Teorema 3.3,* T *possui um autovetor* v_1*. Se* $dim_{\mathbb{K}}V = 1$*, então* $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}\right\}$ *é uma base, como queríamos. Vamos supor agora que* $n > 1$ *e que o resultado vale para todo espaço vetorial de dimensão* $n-1$*. Seja* $W = [v_1]$*, onde* v_1 *é o autovetor. É facíl ver que* W *é invariante por* T*. Pelo Lema 3.1* $W^{\perp}$ *é* T^**-invariante. Como* $T \in L(V,V)$ *é auto-adjunto, então* $T^* = T$ *segue, disso, que* $W^{\perp}$ *é* T*-invariante. Agora, como* $W^{\perp}$ *é um espaço de dimensão* $n-1$ *segue da hipótese de indução que* $W^{\perp}$ *possui uma base ortonormal* $\{v_2, \cdots, v_n\}$ *formada por autovetores. Logo* $B = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, v_2, \cdots, v_n\right\}$ *é um conjunto ortonormal com* $dim_{\mathbb{K}}V$ *elementos e, portanto, uma base* V*. Por construção, todos os elementos de* B *são autovetores e o resultado esta provado.*

4 FORMAS BILINEARES

Neste capítulo vamos estudar funções associadas a espaços vetoriais, com comportamento próximo ao dos produtos internos, isto é, que a cada par de vetores associam um número de tal forma que uma vez fixado o primeiro vetor, a função seja uma forma linear em relação ao segundo vetor e vice-versa. Estas funções serão denominadas formas bilineares e estudaremos alguns de seus aspectos, principalmente o seu relacionamento com matrizes, visando como aplicação a classificação das quádricas.

Definição 4.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$. *Uma função* $f : U \times V \to \mathbb{K}$ *é chamada de forma bilinear de* $U \times V$ *em* $\mathbb{K}$ *se satisfizer:*
(i)$f(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + f(u_2, v)$, *para todos* $\lambda \in \mathbb{K}$, $u_1, u_2 \in U$ *e* $v \in V$.
(ii) $f(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda f(u, v_1) + f(u, v_2)$, *para todos* $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in U$ *e* $v_1, v_2 \in V$.

Esta definição pode ser reformuada da seguinte forma: uma função $f : U \times V \to \mathbb{K}$ é uma forma bilinear se for linear em cada uma das variáveis quando deixarmos a outra fixa. Indicaremos o conjunto de todas as formas bilineares de $U \times V$ em $\mathbb{K}$ por $B(U, V, \mathbb{K})$. Para o caso em que $U = V$, indicamos $B(U, V, \mathbb{K})$ por $B(V, \mathbb{K})$ e dizemos que seus elementos são *formas bilineares sobre V*.

Exemplo 4.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$. *Considere funcionais* $h \in U^*$ *e* $g \in V^*$ *e considere a função* $f : U \times V \to \mathbb{K}$ *definida por* $f(u, v) = h(u) \cdot g(v)$, *para todos* $u \in U$ *e* $v \in V$. *Afirmamos que f é uma forma bilinear. De fato, fixado* $v \in V$ *e pela linearidade de h, temos*

$$
\begin{aligned}
f(\lambda u_1 + u_2, v) &= h(\lambda u_1 + u_2) \cdot g(v) \\
&= (\lambda h(u_1) + h(u_2)) \cdot g(v) \\
&= \lambda h(u_1) \cdot g(v) + h(u_2) \cdot g(v) \\
&= \lambda f(u_1, v) + f(u_2, v), \ \forall \lambda \in \mathbb{K}
\end{aligned}
$$

Assim, f é linear na primeira variável. De modo análago, fixado $u \in U$ *e pela linearidade de g,* *temos*

$$\begin{aligned} f(u,\lambda v_1+v_2) &= h(u)\cdot g(\lambda v_1+v_2)\\ &= h(u)\cdot(\lambda g(v_1)+g(v_2))\\ &= h(u)\cdot\lambda g(v_1)+h(u)\cdot g(v_2)\\ &= \lambda f(u,v_1)+f(u,v_2),\ \forall\lambda\in\mathbb{K} \end{aligned}$$

Portanto, f é uma forma bilinear.

4.1 MATRIZ DE UMA FORMA BILINEAR

Considere U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita e sejam $\beta=\{u_1,\cdots,u_m\}$ e $\beta'=\{v_1,\cdots,v_n\}$ bases ordenadas de U e V, respectivamente. Suponha que $f\in B(U,V,\mathbb{K})$, dados quaisquer vetores $u\in U$ e $v\in V$ existem únicos escalares $x_i,y_j\in\mathbb{K}$ com $i=1,\cdots,m$ e $j=1,\cdots,n$ tais que

$$u=x_1u_1+x_2u_2+\cdots+x_mu_m$$

$$v=y_1v_1+y_2v_2+\cdots+y_nv_n$$

O escalar x_i é a i-éssima coordenada de u em relação a base β. De modo análogo, o escalar y_j é a j-éssima coordenada de v em relação a base β'. As matrizes

$$[u]_\beta=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}\ \text{e}\ [v]_{\beta'}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

são chamadas de matriz coordenada de u em relação a base β e matriz coordenada de v em relação a base β'. Então

$$f(u,v)=\begin{bmatrix}x_1&\cdots&x_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(u_1,v_1)&\cdots&f(u_1,v_n)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ f(u_m,v_1)&\cdots&f(u_m,v_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1&\cdots&y_n\end{bmatrix}$$

$f(u,v)=[u]_\beta^t\,[f]_{\beta'}^{\beta}\,[v]_{\beta'}$

onde $[f]_{\beta'}^{\beta}$ é a matriz da forma bilinear f com relação às bases β e β'.

Definição 4.2 *Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita com bases $\beta=\{u_1,\cdots,u_m\}$ e $\beta'=\{v_1,\cdots,v_n\}$, respectivamente. Para cada $f\in B(U,V,\mathbb{K})$ definimos a matriz de f em relação às bases ordenadas β e β' como sendo a matriz $A=(a_{ij})_{i,j}\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujos elementos são dados por $a_{ij}=f(u_i,v_j),\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$.*

Proposição 4.1 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com $dim_{\mathbb{K}}U=m\ge 1$ e $dim_{\mathbb{K}}V=n\ge 1$.*

Então o espaço $B(U,V,\mathbb{K})$ é isomorfo ao espaço $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\beta=\{u_1,\cdots,u_m\}$ e $\beta'=\{v_1,\cdots,v_n\}$ bases de U e V, respectivamente. Considere a transformação

$$T: B(U,V,\mathbb{K}) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

dada por $T(f)=[f]^{\beta}_{\beta'}$, onde $f\in B(U,V,\mathbb{K})$.

(i) Vamos mostrar que $T(f)=[f]^{\beta}_{\beta'}$ é injetora.

De fato, considere $f_1,f_2\in B(U,V,\mathbb{K})$ com $f_1\neq f_2$, então

$$T(f_1)=[f_1]^{\beta}_{\beta'}=\begin{bmatrix} f_1(u_1,v_1) & \cdots & f_1(u_1,v_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1(u_m,v_1) & \cdots & f_1(u_m,v_n)\end{bmatrix}$$

e

$$T(f_2)=[f_2]^{\beta}_{\beta'}=\begin{bmatrix} f_2(u_1,v_1) & \cdots & f_2(u_1,v_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_2(u_m,v_1) & \cdots & f_2(u_m,v_n)\end{bmatrix}$$

como $f_1 e f_2$ são funções distintas, temos que $T(f_1)\neq T(f_2)$, logo $T(f)=[f]^{\beta}_{\beta'}$ é injetora.

(ii) Vamos mostrar que $T(f)=[f]^{\beta}_{\beta'}$ é sobrejetora.

De fato, para cada $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, podemos definir

$$f_A(u,v)=[u]^t_{\beta}\,A\,[v]_{\beta'}$$

Note que f_A é a forma bilinear com a notação matricial, então

$$T(f_A)=[f_A]^{\beta}_{\beta'}=A$$

logo T é sobrejetora.

Portanto, de (i) e (ii) temos que $B(U,V,\mathbb{K})$ é isomorfo ao espaço $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Proposição 4.2 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com $dim_{\mathbb{K}}U=m\geq 1$ e $dim_{\mathbb{K}}V=n\geq 1$. Sejam $\beta=\{u_1,\cdots,u_m\}$ uma base de U, $\beta'=\{v_1,\cdots,v_n\}$ uma base de V, $\beta^*=\{h_1,\cdots,h_m\}$ base de U^* dual β e $\beta'^*=\{g_1,\cdots,g_n\}$ base de V^* dual a β'. Considere $f_{ij}(u,v)=h_i(u)\cdot g_j(v)$ para $1\leq j\leq n$ e $1\leq i\leq m$. Então $\left\{f_{ij}: 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n\right\}$ forma uma base de $B(U,V,\mathbb{K})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar que $f_{ij}\in B(U,V,\mathbb{K})$, consequentemente f é forma bilinear. De fato, fixando $v\in V$ e dados $u_1,u_2\in U$ tem-se

$$f_{ij}(\lambda u_1+u_2,v)=h_i(u_1+u_2)\cdot g_j(v)$$

como V^* é dual e h e g são lineares, então

$$\begin{aligned} f_{ij}(\lambda u_1+u_2,v) &= h_i(\lambda u_1+u_2)\cdot g_j(v) \\ &= [h_i(\lambda u_1)+h_i(u_2)]\cdot g_j(v) \\ &= [\lambda h_i(u_1)+h_i(u_2)]\cdot g_j(v) \\ &= \lambda h_i(u_1)\cdot g_j(v)+h_i(u_2)\cdot g_j(v) \\ &= \lambda f_{ij}(u_1,v)+f_{ij}(u_2,v) \end{aligned}$$

Analogamente, fixando $u \in U$ e dados $v_1, v_2 \in V$ obtemos

$$\begin{aligned} f_{ij}(u,\lambda v_1+v_2) &= h_i(u)\cdot g_j(\lambda v_1+v_2) \\ &= h_i(u)\cdot \left[\lambda g_j(v_1)+g_j(v_2)\right] \\ &= \lambda h_i(u)\cdot g_j(v_1)+h_i(u)\cdot g_j(v_2) \\ &= \lambda f_{ij}(u,v_1)+f_{ij}(u,v_2) \end{aligned}$$

Logo $f_{ij} \in B(U,V,\mathbb{K})$.

Agora basta mostrar que

$$C = \left\{f_{ij} : 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\right\}$$

é um subconjunto LI de $B(U,V,\mathbb{K})$.
Pela proposição anterior $B(U,V,\mathbb{K})$ tem dimensão $m \times n$. Sejam $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$, com $i = 1,2,\cdots,m$ e $j = 1,2,\cdots,n$ tais que

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_{11}f_{11} & + & \lambda_{12}f_{12} & + & \cdots & + & \lambda_{1n}f_{1n} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1}f_{m1} & + & \lambda_{m2}f_{m2} & + & \cdots & + & \lambda_{mn}f_{mn} & = & 0 \end{array}$$

segue disto que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}f_{ij} = 0$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}f_{ij}(u,v) = 0$$

para todos $u \in U$ e $v \in V$.

Em particular, para todos $k = 1, \cdots, m$ e $l = 1, \cdots, n$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} f_{ij}(u_k, v_l) \\ 0 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} h_i(u_k)\cdot g_j(v_l) \\ 0 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \delta_{ik}\delta_{jl} \\ 0 &= \lambda_{kl} \end{aligned}$$

onde $\delta_{ik} = h_i(u_k)$ e $\delta_{jl} = g_j(v_l)$.

Portanto, C é base de $B(U, V, \mathbb{K})$, como queriamos.

Proposição 4.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $f \in B(V, \mathbb{K})$. Se M for a matriz de mudança de bases de β para β' de V, então $[f]_{\beta'} = M^t\,[f]_\beta\,M$.*
DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\beta' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_n\}$ bases de V e seja, M a matriz mudança de bases de β para β'. Assim, para cada $v \in V$ temos

$$[v]_\beta = M\,[v]_{\beta'}$$

Para $u, v \in V$ temos que

$$f(u,v) = [u]_\beta^t\,[f]_\beta\,[v]_\beta$$

mas para cada $u \in V$ temos

$$[u]_\beta = M\,[u]_{\beta'}$$

$$[u]_\beta^t = [u]_{\beta'}^t\,M^t$$

então

$$f(u,v) = [u]_{\beta'}^t\,M^t\,[f]_\beta\,M\,[v]_{\beta'}$$

como β' é base de V, então

$$f(u,v) = [u]_{\beta'}^t\,[f]_{\beta'}\,[v]_{\beta'}$$

segue que

$$[u]_{\beta'}^t\,M^t\,[f]_\beta\,M\,[v]_{\beta'} = [u]_{\beta'}^t\,[f]_{\beta'}\,[v]_{\beta'}$$

$$M^t\,[f]_\beta\,M = [f]_{\beta'}$$

como queriamos.

Exemplo 4.2 *Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e β a base canônica de V. Considere a forma bilinear f em $\mathbb{R}^2$ definida por $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.*

Vamos determinar $[f]_\beta$, então

$$f_{11}\,[(1,0),(1,0)] = 2\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 2$$

$$f_{12}\,[(1,0),(0,1)] = 2\cdot 1\cdot 0 - 3\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = -3$$

$$f_{21}\,[(0,1),(1,0)] = 2\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0$$

$$f_{22}\,[(0,1),(0,1)] = 2\cdot 0\cdot 0 - 3\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1$$

Logo

$$[f]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos determinar M

$$(1,-1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) \Rightarrow a_{11} = 1 \text{ e } a_{21} = -1$$

$$(1,1) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1) \Rightarrow a_{12} = 1 \text{ e } a_{22} = 1$$

Logo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$[f]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[f]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[f]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Considere U e V $\mathbb{R}$-espaços vetoriais com V munido de um produto interno. Defina a função

$$\begin{array}{ccccccccc} \Phi & : & L(U,V) & \to & B(U,V,\mathbb{R}) & & & & \\ & & T & \longmapsto & \Phi(T) & : & U\times V & \to & \mathbb{R} \\ & & & & & & (u,v) & \longmapsto & < T(u), v > \end{array}$$

Note que Φ está bem definida pois $\Phi(T)$ é uma forma bilinear de $U\times V$ em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.4 *A função Φ definida acima é linear e injetora.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar que a Φ é linear. De fato, sejam $T,S \in L(U,V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, *temos que para todos $u \in U$ e $v \in V$,*

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda T+S)(u,v) &= <(\lambda T+S)(u),v> \\
&= <\lambda T(u)+S(u),v> \\
&= <\lambda T(u),v>+<S(u),v> \\
&= \lambda <T(u),v>+<S(u),v> \\
&= \lambda\Phi(T)(u,v)+\Phi(S)(u,v)
\end{aligned}$$

logo Φ é linear.
Vamos mostrar, agora, que Φ é injetora.
De fato, seja $T \in L(U,V)$ tal que $\Phi(T)=0$, então $<T(u),v>=0$ para todo $u \in U$ e $v \in V$, podemos escolher $T(u)=v$ e teremos $<T(u),T(u)>=0$ e pela definição de produto interno tem-se $T(u)=0$, portanto $T=0$. Logo, Φ é injetora.

Corolário 4.1 *Se as dimensões de U e V são finitas, então a função Φ é um isomorfismo.*
DEMONSTRAÇÃO: Pela proposição anterior temos que Φ é linear e injetora. Como Φ é injetora, então $nuc\,\Phi=0$ e, portanto, $dim_{\mathbb{K}} nuc\,\Phi=0$

$$\begin{aligned}
dim_{\mathbb{K}}L(U,V) &= dim_{\mathbb{K}}nuc\,\Phi + dim_{\mathbb{K}}Im\,\Phi \\
dim_{\mathbb{K}}L(U,V) &= dim_{\mathbb{K}}Im\,\Phi
\end{aligned}$$

Como $Im\,\Phi \subset B(U,V,\mathbb{K})$ e $dim_{\mathbb{K}}L(U,V)=dim_{\mathbb{K}}Im\,\Phi$, logo $dim_{\mathbb{K}}L(U,V)=dim_{\mathbb{K}}B(U,V,\mathbb{K})$ consequentemente $L(U,V)=B(U,V,\mathbb{K})$.

Assim, T é sobrejetora e, portanto, Φ é um isomorfismo.

4.2 FORMAS SIMÉTRICAS

A partir de agora estudaremos formas bilineares do tipo $f: V\times V \to \mathbb{K}$ que será denotado por $B(V,\mathbb{K})$.

Definição 4.3 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $f \in B(V,\mathbb{K})$. Dizemos que f é simétrica se $f(u,v)=f(v,u)$ para todos $u,v \in V$.*

Exemplo 4.3 *Se V é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ então a função $f: V\times V \to \mathbb{R}$ dada por $f(u,v)=\langle u,v\rangle$ é uma forma bilinear simétrica sobre V. De fato, como $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ temos pela propriedade 3 de produto interno que $f(u,v)=\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle=f(v,u)$, logo f é uma forma bilinear simétrica sobre V.*

Teorema 4.1 *Seja V um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão* $n \geq 1$*. As seguintes afirmações são equivalentes para a forma bilinear f sobre V:*
(a) f é simétrica.
(b) $[f]_\beta$ *é uma matriz simétrica para toda base* β *de V.*
(c) $[f]_C$ *é uma matriz simétrica para alguma base C de V.*
DEMONSTRAÇÃO:(a)⇒(b) Seja β *uma base de V. Por definição, para todos* $u, v \in V$*, temos* $f(u,v) = [u]_\beta^t [f]_\beta [v]_\beta$*. Como f é simétrica temos que*

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f(v,u) \\ [u]_\beta^t [f]_\beta [v]_\beta &= [v]_\beta^t [f]_\beta [u]_\beta \ \forall u, v \in V \end{aligned}$$

Como $[v]_\beta^t [f]_\beta [u]_\beta \in M_1(\mathbb{K})$*, onde* $M_1(\mathbb{K})$ *é o conjunto das matrizes* 1×1 *simétricas, isto é* $A^t = A$*, temos que*

$$[u]_\beta^t [f]_\beta [v]_\beta = [v]_\beta^t [f]_\beta [u]_\beta = ([v]_\beta^t [f]_\beta [u]_\beta)^t = [u]_\beta^t [f]_\beta^t \left([v]_\beta^t\right)^t = [u]_\beta^t [f]_\beta^t [v]_\beta$$

Disso segue que

$$[u]_\beta^t [f]_\beta [v]_\beta = [u]_\beta^t [f]_\beta^t [v]_\beta$$

multiplicando ambos os lados por $\left([u]_\beta^t\right)^{-1}$ *e por* $\left([v]_\beta\right)^{-1}$ *obtemos*

$$[f]_\beta = [f]_\beta^t$$

que é a matriz simétrica para toda base β *de V.*
(b)⇒(c) Sejam β *e C bases de V. Considere* $M \in M_1(\mathbb{K})$ *a matriz mudança de bases de* β *para C, então para cada* $f \in B(V, \mathbb{K})$ *pela proposição 4.3 temos* $[f]_\beta = M^t [f]_C M$ *portanto* $[f]_\beta^t = M^t [f]_C^t M$*. Como* $[f]_\beta$ *é uma matriz simétrica teremos*

$$\begin{aligned} [f]_\beta &= [f]_\beta^t \\ M^t [f]_C M &= M^t [f]_C^t M \end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados por M^{-1} *e por* $(M^t)^{-1}$ *obtemos*

$$[f]_C = [f]_C^t$$

logo $[f]_C$ *é uma matriz simétrica para alguma base C de V.*
(c)⇒(a) Seja C uma base de V tal que $[f]_C$ *é simétrica, ou seja,* $[f]_C = [f]_C^t$*. Por definição, para*

cada para $u, v \in V$, temos que $f(u,v) = [u]_C^t \, [f]_C \, [v]_C$. Como $[u]_C^t \, [f]_C \, [v]_C \in M_1(\mathbb{K})$ então

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \left([u]_C^t \, [f]_C \, [v]_C\right)^t \\ f(u,v) &= [v]_C^t \, [f]_C^t \left([u]_C^t\right)^t \\ f(u,v) &= [v]_C^t \, [f]_C^t \, [u]_C \end{aligned}$$

mas $[f]_C$ é uma matriz simétrica, então

$$f(u,v) = [v]_C^t \, [f]_C \, [u]_C = f(v,u)$$

$$f(u,v) = f(v,u)$$

Portanto, f é simétrica.

4.3 FORMAS QUADRÁTICAS

Definição 4.4 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e f em B(V, $\mathbb{K}$). A função $q : V \to \mathbb{K}$ dada por $q(v) = f(v,v)$ é denominada forma quadrática associada a f.*

Exemplo 4.4 *Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e $f \in B(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dada por*

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$$

A forma quadrática associada a f será então

$$q((x_1,x_2)) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$$

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $f \in B_s(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Se q é a forma quadrática associada a *f*, então, para cada $u, v \in V$, temos

$$\begin{aligned} q(u+v) - q(u) - q(v) &= f(u+v, u+v) - f(u,u) - f(v,v) = f(u, u+v) + f(v, u+v) \\ &= f(u,v) + f(u,u) + f(v,u) + f(v,v) - f(u,u) - f(v,v) = 2f(u,v) \end{aligned}$$

e assim

$$2f(u,v) = q(u+v) - q(u) - q(v)$$

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\left[q(u+v) - q(u) - q(v)\right] \tag{1}$$

Chamamos (1) de *forma polar* de *f*.

Teorema 4.2 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$. Se $f \in B_s(V, \mathbb{K})$, então existe uma base β de V tal que $[f]_\beta$ é uma matriz diagonal.*

DEMONSTRAÇÃO: O que precisamos encontrar é uma base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V tal que $f(v_i, v_j) = 0$, se $i \neq j$. Se $f = 0$ ou $dim_{\mathbb{K}} V = 1$, o teorema é obviamente verdadeiro. Assim, podemos supor $f \neq 0$ e $dim_{\mathbb{K}} V = n > 1$. Se $f(v, v) = 0$ para todo v em V, a forma quadrática associada q é identicamente nula e a forma polar (1) mostra que $f = 0$. Assim, existe um vetor v_1 em V tal que $f(v_1, v_1) = q(v_1) \neq 0$. Seja W o subespaço gerado por v_1 e considere $W' = \{v \in V : f(v_1, v) = 0\}$ um subespaço. De fato, sejam $u, v \in W'$ e $k \in \mathbb{K}$ então

$$f(v_1, u) + f(v_1, v) = 0 + 0 = 0$$

logo $f(v_1, u) + f(v_1, v) \in W'$

$$kf(v_1, v) = k \cdot 0 = 0$$

logo $kf(v_1, v) \in W'$.

Portanto, W' é subespaço.

Afirmamos que $V = W \oplus W'$. Observamos inicialmente que $W \cap W' = \{0\}$. Com efeito, se $v \in W \cap W'$ então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $v = \alpha v_1$ e como f é bilinear tem-se

$$f(v_1, \alpha v_1) = f(v_1, \alpha v_1 + 0) = \alpha f(v_1, v_1) + f(v_1, 0) = 0$$

note que $f(v_1, v_1) \neq 0$ e $f(v_1, 0) = 0$, logo, $\alpha = 0$. Consequentemente, $v = 0$ e $W \cap W' = \{0\}$.

Resta provar que $V = W + W'$. Para tanto, considere os vetores $v \in V$ e

$$w' = v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 \tag{2}$$

Então

$$\begin{aligned} f(v_1, w') &= f\left(v_1, v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1\right) \\ f(v_1, w') &= f(v_1, v) - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) \\ f(v_1, w') &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $w' \in W'$ e $v = \dfrac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 + w' \in W + W'$.

Observe que a restrição $f|_{W' \times W} : W' \times W' \to \mathbb{K}$ de f é a forma bilinear simétrica sobre W'. Como $dim_{\mathbb{K}} W' = n - 1$, então podemos supor por indução que W' possua uma base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ tal que $f(v_i, v_j) = 0$, para $i \neq j$ e $i \geq 2, j \leq n$. Decorre da definição de W' que $f(v_i, v_j) = 0$ para $2 \leq j \leq n$. Como $V = W \oplus W'$ segue que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base de V. Além disso, temos que $f(v_i, v_j) = 0$ se $i \neq j$ e $i \geq 1, j \leq n$, como queríamos.

Corolário 4.2 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam $f \in B_s(V,\mathbb{K})$ e $q : V \to \mathbb{K}$ a forma quadrática associada a f. Então existem $\lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ e uma base $\beta = \{v_1,\cdots,v_n\}$ de V tais que $f(v_i,v_j) = \lambda_i\delta_{ij}$ para cada $1 \leq i,j \leq n$ e $q(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i^2$ para cada $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 4.2 temos que V admite uma base $\beta = \{v_1,\cdots,v_n\}$ tal que $[f]_\beta$ é uma matriz diagonal, ou seja, existem $\lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $f(v_i,v_j) = \lambda_i$ e $f(v_i,v_j) = 0$, se $i \neq j$.

Como $q(v) = f(v,v)$ e $f(v,v) = [v]_\beta^t\,[f]_\beta\,[v]_\beta$ segue que

$$q(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

para cada $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$.

Portanto, $q(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i^2$, como queríamos mostrar.

Proposição 4.5 *Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ munido de um produto interno. Então $B_s(V,\mathbb{R})$ é isomorfo ao subespaço $\{T \in L(V,V) : T \text{ é auto-adjunto}\}$ de $L(V,V)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Considere que a função $\Phi : L(V,V) \to B(V,\mathbb{R})$ dada por $\Phi(T)(u,v) = \langle T(u),v\rangle$ seja um isomorfismo. Para tanto, devemos mostrar que Φ é bijetora. Seja $T \in L(V,V)$ tal que $\Phi(T)(u,v) = 0$, então $\langle T(u),v\rangle = 0$ para todo $u,v \in V$, podemos escolher $T(u) = v$ e teremos $\langle T(u),T(u)\rangle = 0$ pela definição de produto interno tem-se $T(u) = 0$, portanto $T = 0$, logo Φ é injetora. Mostraremos, também, que Φ é sobrejetora. Como Φ injetora temos que $nuc\,\Phi = \{0\}$ pela Proposição 2.2 temos que $dim_{\mathbb{R}}nuc\,\Phi = 0$, segue que

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{R}}L(V,V) &= dim_{\mathbb{R}}nuc\,\Phi + dim_{\mathbb{R}}Im\,\Phi \\ dim_{\mathbb{R}}L(V,V) &= dim_{\mathbb{R}}Im\,\Phi \end{aligned}$$

Como $Im\,\Phi \subset B(V,\mathbb{R})$ e $dim_{\mathbb{R}}L(V,V) = dim_{\mathbb{R}}Im\,\Phi$, logo $dim_{\mathbb{R}}L(V,V) = dim_{\mathbb{R}}B(V,\mathbb{R})$ consequentemente $L(U,V) = B(V,\mathbb{R})$, portanto Φ é sobrejetora. Como Φ é bijetora, então por definição é um isomorfismo. Assim, para concluir a demonstração, basta mostrar que T é auto-adjunto se e somente se $\Phi(T)$ é simétrica. Observe inicialmente que

$$\Phi(T)(u,v) = \langle T(u),v\rangle = \langle u,T^*(v)\rangle = \langle T^*(v),u\rangle$$

para quaisquer $u,v \in V$. Se $T = T^*$, então teremos que

$$\Phi(T)(u,v) = \langle T^*(v),u\rangle = \langle T(v),u\rangle = \Phi(T)(v,u) \;\; \forall u,v \in V$$

logo $\Phi(T)$ é simétrica. Por outro lado, se $\Phi(T)$ é simétrica segue que

$$\langle T^*(v),u\rangle = \Phi(T)(u,v) = \Phi(T)(v,u) = \langle T(v),u\rangle \;\; \forall u,v \in V$$

Portanto, $T = T^*$ e o resultado está provado.

Observação 4.1 *Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com produto interno. Observamos que as Proposições 3.5 e 4.5 nos garantem que se $f : V \times V \to \mathbb{R}$ for uma forma bilinear simétrica, então existe uma base ortogonal β de V tal que $[f]_\beta$ é diagonal.*

Exemplo 4.5 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $[f]_{can} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ com $a,b,c \in \mathbb{R}$. O polinômio real homogêneo de 2° grau em x e y dado por $p(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$ é a forma quadrática associada ao operador auto-adjunto T, pois*

$$q(x,y) = \langle T(x,y),(x,y)\rangle = \langle (ax+cy,cx+by),(x,y)\rangle = ax^2+by^2+2cxy = p(x,y)$$

.

4.4 RECONHECIMENTO DE QUÁDRICAS

O estudo das formas quadráticas tem uma aplicação bem interessante à Geometria Analítica, o reconhecimento das quádricas. Às vezes, nem sempre é fácil reconhecer uma quádrica em $\mathbb{R}^3$ obsevando apenas a sua equação, mas por meio de algumas mudanças de coordenas e translações é possível reduzir essa equação a forma mais simples e, assim, fazer o reconhecimento. A partir de agora, iremos utilizar os resultados discutidos acima para apresentar um método para obter tal simplificação. Para o nosso estudo utilizaremos o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$ e usaremos a notação usual $\left\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ para o sistema ortogonal de coordenadas inicial. Isso quer dizer que estaremos utilizando uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, indicada pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ e fixando o ponto de origem deste sistema de vetores que será denotado por 0. Esta convenção é necessária, pois devemos efetuar translação ao longo do processo que vamos descrever.

Definição 4.5 *Uma quádrica em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície formada pelos pontos de $\mathbb{R}^3$ cujas coor-*

denadas em relação a um sistema fixado verificam uma equação da forma

$$ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qxz+2ryz+Ex+Fy+Gz+d=0 \tag{3}$$

onde $a,b,c,d,p,q,r,E,F,G \in \mathbb{R}$ *e* $a^2+b^2+c^2 \neq 0$.

Consideremos agora os termos do 2° grau em (3) e vamos analisar a função $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definada por

$$Q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qxz+2ryz \tag{4}$$

Observe que Q é uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ associada à forma bilinear simétrica f cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$[f]_{can}=\begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qxz+2ryz \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= f((x,y,z),(x,y,z)) \end{aligned}$$

Segue da Observação 4.1 que $\mathbb{R}^3$ admite uma base ortogonal $\beta=\{v_1,v_2,v_3\}$ tal que $[f]_\beta$ é uma matriz diagonal. Assim, para cada $v \in V$, $v=x'v_1+y'v_2+z'v_3$, vamos ter que

$$Q(x',y',z')=\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ou seja, $Q(x',y',z')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2$. Isso significa que, ao efetuarmos a mudança de base correspondente, eliminamos os termos mistos do segundo grau da equação (4).

Efetuando uma mudança de coordenadas na equação (3) da quádrica obtemos

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+E'x'+F'y'+G'z'+d=0 \tag{5}$$

Podemos em (5) completar os quadrados e fatorar, obtendo assim uma nova mudança de coordenadas da foma

$$\begin{cases} x'' &= x' - \alpha \\ y'' &= y' - \beta \\ z'' &= z' - \gamma \end{cases}$$

que corresponde, na realidade, a uma translação. Consequentemente, teremos a equação reduzida da quádrica no sistema $(0'', v_1, v_2, v_3)$. Em sua forma reduzida, é fácil identificar a quádrica correspondente.

Apresentaremos a seguir uma tabela com todas as possibilidades para o reconhecimento da equação final, a menos do nome dos eixos.

$a > 0, b > 0$ e $c > 0$		
$ax^2 + by^2 + cz^2 = d$	$d > 0$	elipsoíde
	$d = 0$	ponto
	$d < 0$	vazio
$ax^2 + by^2 - cz^2 = d$	$d > 0$	hiperbolóide de uma folha
	$d = 0$	superfície cônica
	$d < 0$	hiperbolóide de duas folhas
$ax^2 = by + cz$	$d = 0$	cilindro parabólico
$a > 0$ e $b > 0$		
$ax^2 + by^2 = cz$	$c \neq 0$	parabolóide elíptico
	$c = 0$	reta
$ax^2 - by^2 = cz$	$c \neq 0$	parabolóide hiperbólico
	$c = 0$	planos concorrentes
$ax^2 = by$		cilindro parabólico
$ax^2 + by^2 = d$	$d > 0$	cilindro elíptico
	$d = 0$	reta
	$d < 0$	vazio
$ax^2 - by^2 = d$	$d \neq 0$	cilindro hiperbólico
	$d = 0$	par de planos concorrentes

Exemplo 4.6 *Considere a equação dada por*

$$7x^2 + 17y^2 + 7z^2 - 4xy + 6xz - 4yz - 6x - 12y - 6z + 1 = 0$$

em relação ao sistema ortogonal $\left\{0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. *Seja*

$$Q(x,y,z) = 7x^2 + 17y^2 + 7z^2 - 4xy + 6xz - 4yz$$

a forma quadrática dada pelos termos de 2º grau da equação acima. Assim

$$Q(x,y,z) = f((x,y,z),(x,y,z))$$

com

$$[f]_{can} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 17 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Segue da Observação 4.1 que $\mathbb{R}^3$ *admite uma base ortogonal* β *de autovetores tal que* $[f]_\beta$ *é diagonal. Vamos determinar tal base, ou seja, vamos determinar os autovalores de* $[f]_{can}$ *e depois os autovetores associados. Para tanto, vamos determinar o polinômio característico:*

$$\begin{aligned}
p_f(t) &= det(tId_3 - [f]_{can}) \\
&= det\left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 17 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}\right) \\
&= det\begin{pmatrix} t-7 & 2 & -3 \\ 2 & t-17 & 2 \\ -3 & 2 & t-7 \end{pmatrix} \\
&= (t-7)^2(t-17) - 12 - 12 - 9t + 153 - 4t + 28 - 4t + 28 \\
&= t^3 - 31t^2 + 270t - 648 \\
&= (t-4)(t^2 - 27t + 162)
\end{aligned}$$

temos que suas raízes são $t_1 = 4, t_2 = 9$ *e* $t_3 = 18$. *Se* x', y', z' *são as coordenadas de um ponto P com relação a* β, *vamos ter*

$$Q(x', y', z') = 4x'^2 + 9y'^2 + 18z'^2$$

Vamos determinar os autovetores que formam β, *associados aos autovalores* $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$ *e* $\lambda_3 = 18$, *respectivamente.*

-Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 4$*:*

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 2 & -13 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x+2y-3z &= 0 \\ 2x-13y+2z &= 0 \Leftrightarrow x=-z \; e \; y=0 \\ -3x+2y-3z &= 0 \end{cases}$$

Considere então o vetor unitário $v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *que gera o subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *dos autovetores associados ao autovalor 4.*

-Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 9$*:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & -8 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-3z &= 0 \\ 2x-8y+2z &= 0 \Leftrightarrow z=2y \; e \; z=x \\ -3x+2y+2z &= 0 \end{cases}$$

Então o autovetor unitário $v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *gera o subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *dos autovetores associados ao autovalor 9.*

- Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 18$*:*

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 11x+2y-3z &= 0 \\ 2x+y+2z &= 0 \Leftrightarrow x=z \; e \; y=-4z \\ -3x+2y+11z &= 0 \end{cases}$$

Considere o autovetor unitário $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right)$ *que gera o subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *formados pelos autovetores associados ao autovalor 18.*

A matriz mudança da base ortogonal $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ *para base ortogonal* v_1, v_2, v_3 *será então*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

Assim, a relação existe entre as coordenadas x, y, z no sistema $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *e* x', y', z' *no* *sistema* $(0, v_1, v_2, v_3)$ *é dada por:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' & +\frac{2}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{18}}z' \\ y &= & +\frac{1}{3}y' - \frac{4}{\sqrt{18}}z' \\ z &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x' & +\frac{2}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{18}}z' \end{cases}$$

Escrevendo a equação da quádrica com as coordenadas dos pontos P em relação ao sistema $(0, v_1, v_2, v_3)$ *temos:*

$$4x'^2 + 9y'^2 + 18z'^2 - 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{18}}z'\right) - 12\left(\frac{1}{3}y' - \frac{4}{\sqrt{18}}z'\right)$$
$$-6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{18}}z'\right) + 1 = 0$$

ou

$$4x'^2 + 9y'^2 + 18z'^2 - 12y' + \frac{36}{\sqrt{18}}z' + 1 = 0$$

Completando quadrados obtemos

$$4x'^2 + 9\left(y'^2 - \frac{4}{3}y' + \frac{4}{9}\right) + 18\left(z'^2 + \frac{2}{\sqrt{18}}z' + \frac{1}{18}\right) + 1 - 4 - 1 = 0$$

ou

$$4x'^2 + 9\left(y' - \frac{2}{3}\right)^2 + 18\left(z' + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 4$$

Assim, fazendo a translação

$$\begin{cases} x'' &= x' \\ y'' &= y' - \frac{2}{3} \\ z'' &= z' + \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{cases}$$

vamos obter

$$4x''^2 + 9y''^2 + 18z''^2 = 4$$

que é a equação de um elipsóide. Esta equação está dada em relação ao sistema ortogonal $\{0'', v_1', v_2', v_3'\}$ *onde* $0''$ *tem coordenandas* $0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}$ *em relação ao sistema ortogonal* $\{0, v_1, v_2, v_3\}$.

Exemplo 4.7 *Considere a equação dada por*

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 2x + 2y + 8z = -1$$

em relação ao sistema ortogonal $\left\{0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$*. Sejam*

$$Q(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 4xz + 4yz$$

a forma quadrática e $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *a forma bilinear associada a Q cuja matriz em relação à base canônica é:*

$$[f]_{can} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Vamos determinar os autovalores de $[f]_{can}$ *e depois os autovetores associados. Para tanto, vamos determinar o polinômio característico:*

$$\begin{aligned} p_f(t) &= det(tId_3 - [f]_{can}) \\ &= det\left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}\right) \\ &= det\begin{pmatrix} t-5 & -4 & 2 \\ -4 & t-5 & -2 \\ 2 & -2 & t-8 \end{pmatrix} \\ &= (t-5)^2(t-8) + 16 + 16 - 4t + 20 - 4t + 20 - 16t + 128 \\ &= t^3 - 18t^2 + 81t \\ &= t(t^2 - 18t + 81) \end{aligned}$$

temos que suas raízes sao $t_1 = t_2 = 9$ *e* $t_3 = 0$.

A forma quadrática com coordenadas em relação à base de autovetores será dada por

$$Q(x', y', z') = 9x'^2 + 9y'^2$$

. Vamos determinar agora a base formada por autovetores associados aos autovalores 9 e 0.

-Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$*:*

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 4x - 4y + 2z &= 0 \\ -4x + 4y - 2z &= 0 \\ 2x - 2y + z &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow z = -2x + 2y$$

e, portanto, $\{(1,0,-2),(0,1,2)\}$ *é uma base do subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *dos autovetores associados* *a 9. Para obtermos uma base ortogonal deste subespaço vamos usar o processo de Gram-Schimidt*

$$v_1' = (1,0,-2) e v_2' = (0,1,2) - \frac{\langle (0,1,2),(1,0,-2)\rangle}{5}(1,0,-2)$$

ou seja, $v_2' = \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)$. *Como precisamos de vetores unitários, estaremos dividindo* v_1' *e* v_2' *por suas respectivas normas e considerando* $v_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ *e* $v_2' = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

-Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 0$*:*

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -4 & -8 & -2 \\ 2 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -5x-4y+2z &= 0 \\ -4x-5y-2z &= 0 \\ 2x-2y-8z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2z \text{ e } y = -2z$$

e $\{(2,-2,1)\}$ *gera o subespaço dos autovetores associados a 0. Um gerador unitário deste espaço vetorial será então* $v_3' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Assim, a matriz mudança da base ortonormal $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ *para base ortonormal* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é dada por*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e a relação entre as coordenadas x, y, z no sistema $\left\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ *e* x', y', z' *no sistema* $(0, v_1', v_2', v_3')$ *é dada por:*

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{3\sqrt{5}}y' + \frac{2}{3}z' \\ y &= + \frac{5}{3\sqrt{5}}y' - \frac{2}{3}z' \\ z &= -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{3\sqrt{5}}y' + \frac{1}{3}z' \end{cases}$$

Substituindo na equação da quádrica obtemos

$$9x'^2 + 9y'^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{3\sqrt{5}}y' + \frac{2}{3}z'\right) + 2\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}y' - \frac{2}{3}z'\right) + 8\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{3\sqrt{5}}y' + \frac{1}{3}z'\right) = -1$$

ou

$$9x'^2 - \frac{18}{\sqrt{5}}x' + 9y'^2 + \frac{18}{3\sqrt{5}}y' = -1$$

Completando quadrados obtemos

$$9\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{5}\right)+9\left(y'^2+\frac{2}{3\sqrt{5}}y'+\frac{1}{45}\right)-\frac{9}{5}-\frac{9}{45}=-1$$

ou

$$9\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'+\frac{1}{3\sqrt{5}}\right)^2=1$$

Efetuando a translação

$$\begin{cases} x'' &= x'-\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y'' &= y'+\dfrac{1}{3\sqrt{5}} \\ z'' &= z' \end{cases}$$

vamos obter $9x''^2+9y''^2=1$ *e, portanto, a quádrica em questão é um cilindro elíptico. A equação* $9x''^2+9y''^2=1$ *está dada em relação ao sistema ortogonal* $\left\{0'',v_1',v_2',v_3'\right\}$ *onde* $0''$ *tem coordenandas* $\dfrac{1}{\sqrt{5}},-\dfrac{1}{3\sqrt{5}},0$ *em relação ao sistema ortogonal* $\{0,v_1,v_2,v_3\}$.

5 CONCLUSÃO

O estudo de autovalores e autovetores de um dado operador linear foi importante pois estes elementos algébricos tratam com simplicidade informações sobre o operador. Em particular no reconhecimento das quádricas eles carregam informações essências.

Vimos que as equações das quádricas podem ser descritas matricialmente. Calculando-se os autovetores associados obtemos uma base ortonormal tal que nesta base a matriz se torna uma matriz diagonal. Isso facilita bastante a análise, pois gera assim a equação reduzida. Em sua forma reduzida, identificar a quádrica correspondente torna-se um problema fácil.

REFERÊNCIAS

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científico, 1979.

BOLDRINI, Jóse Luiz et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1980.