UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CARBONE BRUNO SCHMIDT KRUG

ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS COMPARANDO MEDIDAS DE UNIDADE

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2015

CARBONE BRUNO SCHMIDT KRUG

ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS COMPARANDO MEDIDAS DE UNIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Rômel da Rosa da Silva, Dr.

Co-orientador: Marcio Bennemann, Dr.

PATO BRANCO

2015

K93e

Krug, Carbone Bruno Schmidt

Ensino dos números racionais comparando medidas de unidade / Carbone Bruno Schmidt Krug. – – Pato Branco, 2015.

x, 86 f. : il. ; 28 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

Orientador: Rômel da Rosa da Silva

Co-orientador: Marcio Bennemann

Banca examinadora: Rômel da Rosa da Silva, José Roberto Costa, Michael Santos Gonzales Gargate, João Biesdorf

Bibliografia: f. 72 – 74.

1. Matemática. 2. Ensino dos números racionais. 3. Divisão. 4. Interpretação como medida. . I. Título. II. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

CDD (21ª ed.) 372.7

Ficha Catalográfica elaborada por
Fabiano de Queiroz Jucá – CRB 9/1249

Título da Dissertação No. 005

“Ensino Dos Números Racionais Comparando Medidas de Unidade”

por

Carbone Bruno Schmidt Krug

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 09h do dia 21 de maio de 2015. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Romel da Rosa da Silva, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. José Roberto Costa, Dr.
(UNICENTRO)

Prof. Michael Santos Gonzales Gargate, Dr.
(UTFPR/Branco)

Prof. João Biesdorf, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

À minha família e aos amigos

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus;
- Aos meus pais, Valdir e Nelsi, pelos ensinamentos, amor e incentivo;
- Aos meus irmãos, Edino, Valdine e Mateus, pelo companheirismo e por estarem sempre ao meu lado;
- A todos que me ajudaram, direta ou indiretamente, a ter chegado até aqui e na realização deste trabalho;
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro;
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT;
- Aos professores doutores Rômel da Rosa da Silva e Marcio Bennemann, meus orientadores, por terem aceitado o desafio de me orientar, cumprindo a tarefa com profissionalismo, dedicação e sabedoria;
- A todos os professores do PROFMAT da UTFPR/Pato Branco, pelas contribuições para meu crescimento pessoal, intelectual e profissional;
- Aos colegas do PROFMAT, pelos momentos de estudo e companheirismo;
- Aos meus amigos, sempre presentes nos momentos que precisei;
- Aos professores participantes da banca, pela disponibilidade em aceitar participar da defesa da dissertação;
- À minha esposa Claudete, pelo carinho, amor, compreensão, incentivo e ajuda.

RESUMO

Krug, C. B. S.. ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS COMPARANDO MEDIDAS DE UNIDADE. 86 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

A presente pesquisa teve como objetivo investigar a possibilidade de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida. Adotamos como metodologia a Engenharia Didática e elaboramos uma sequência didática a fim de desenvolver o trabalho com estudantes do Ensino Médio. Participaram das sessões de ensino doze estudantes de uma escola estadual do município de Porto Barreiro - Pr. Os resultados da aplicação da sequência didática sugerem a importância da utilização de atividades pautadas na interpretação da medida, haja vista que potencializou o entendimento, por parte dos estudantes, do conceito de divisão de números racionais fracionários e contribuiu para eles aprofundarem a compreensão de outras questões relacionadas ao conceito de número racional, tais como ordem, equivalência e densidade.

Palavras-chave: Ensino dos números racionais, divisão, interpretação como medida.

ABSTRACT

Krug, C. B. S.. TEACHING OF RATIONAL NUMBERS COMPARING UNIT MEASURE. 86 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

This research aimed to investigate the possibility to develop the process of teaching and learning of the division of rational numbers with guided tasks in interpretation of measure. Adopted as methodology the Didactic Engineering and a didactic sequence in order to develop the work with students of High School. Participated of training sessions twelve students of one state school of Porto Barreiro city - Paraná. The results of application of the didactic engineering suggest the importance of utilization of guided tasks in interpretation of measure, since strengthened the understanding, on the part of students, the concept of division of fractional rational numbers and contributed for them develop the comprehension of others questions associated to the concept of rational numbers, such as order, equivalence and density.

Keywords: Teaching of rational numbers, division, interpretation as measure.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

EFM	Ensino Fundamental e Médio
MMM	Movimento da Matemática Moderna
NEPEM	Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao iniciar o PROFMAT[1], no ano de 2013, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR/Pato Branco), percebi o quanto precisava melhorar minha prática pedagógica e "meu saber de conteúdo". Muitos assuntos (conteúdos) estudados no programa contribuíram com tal percepção, mas o principal foi relacionado a conceituação dos números racionais.

A principal motivação para esse estudo se deu em virtude de experiências em sala de aula, como docente e também como discente. No primeiro caso, por atuar como professor na Educação Básica, tenho convivido com a dificuldade dos estudantes ao efetuarem operações envolvendo números racionais não inteiros. Na condição de discente, enquanto estudante do PROFMAT, aprendi que existe um conhecimento mais amplo e esclarecedor, acerca dos números racionais, do que aquele que ensinava na escola.

Neste sentido, passamos a observar e estudar o que as pesquisas científicas, especialmente em Educação Matemática, estavam considerando e produzindo acerca de tal objeto matemático. O resultado destes estudos, a princípio, revelou uma quantidade significativa de pesquisas sobre este assunto. Porém, a grande maioria com foco na formação de professores e na formação docente. São poucos os trabalhos com observações em sala de aula, com aplicações no ambiente escolar e, quando existem, abordam principalmente os anos inciais da Educação Básica.

Frente a isso, pensamos em desenvolver esta pesquisa para observar, no ambiente da sala de aula, o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais [2] com tarefas pautadas na interpretação da medida.

Tal intenção se justifica, inicialmente, pela falta de trabalhos que busquem compreender o ensino dos números racionais com aporte na sala de aula, tendo como campo de observação o ambiente escolar, acompanhando o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. Ressaltamos, ainda, a importância das pesquisas voltadas ao ensino dos números

[1] Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

[2] No texto desta dissertação, quando nos referirmos a números racionais, salvo quando mencionarmos na forma decimal, vamos estar nos referindo aos números racionais com escrita fracionária.

racionais na tentativa de superar o déficit de aprendizagem desse conteúdo bem como da Matemática em geral na Educação Básica, principalmente nas escolas públicas.

A partir destas considerações, pensamos na seguinte problemática: *É possível desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida?*

Para respondermos a nossa questão de investigação faremos uso da aplicação de uma sequência didática e da metodologia da Engenharia Didática. Uma descrição detalhada sobre isso será apresentada no capítulo 3 desta dissertação.

Nosso objetivo principal, com o desenvolvimento deste trabalho, é *Investigar se é possível desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida.* A partir disso, pretendemos:

* Realizar um estudo teórico a respeito do ensino dos números racionais, analisando suas diferentes interpretações;
* Elaborar uma proposta de sequência didática com o intuito de complementar o tratamento dado aos números racionais em sala de aula;
* Complementar o tratamento dado aos números racionais em sala de aula.

Este estudo está estruturado em quatro capítulos. No primeiro, enfatizamos nosso entendimento acerca dos números racionais e do seu ensino. Para tanto, iniciamos descrevendo de forma concisa a origem destes números, depois apresentamos brevemente o histórico do seu ensino e, para finalizar, trazemos uma análise a respeito de alguns estudos pertinentes referentes ao ensino dos números racionais.

No segundo capítulo, o mais conciso dentre todos, abordamos o conceito de número e as definições das interpretações parte-todo e medida.

O terceiro capítulo explica as razões da nossa escolha metodológica: a Engenharia Didática. Além disso, traz elementos sobre os sujeitos participantes da pesquisa e uma descrição da sequência didática.

No quarto capítulo apresentamos uma complementação da análise prévia, bem como fazemos a análise e a avaliação da aplicação da sequência didática. Para tanto, pontuamos nossas observações em subdivisões referentes à sessão 1, à sessão 2 e às sessões 3 e 4.

Finalmente, apresentamos as considerações finais, as referências e os apêndices da pesquisa.

2 ENTENDENDO OS NÚMEROS RACIONAIS E O SEU ENSINO

Nesse capítulo apresentaremos uma breve discussão acerca da origem dos números racionais, um olhar sobre a História do ensino destes números e resultados de alguns estudos realizados sobre o ensino dos números racionais.

2.1 ORIGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Os números racionais, com representação fracionária, já eram conhecidos na antiguidade, afirma Ifrah (1994). Acredita-se, de acordo com Souza (2013), que a necessidade prática da demarcação de terras às margens do Rio Nilo, foi a razão pela qual o estudo das frações surgiu primeiro no Egito. “Como a medida dos terrenos, na sua maioria, não era dada exatamente por números inteiros, surgia então a necessidade de um novo conceito de número, o número fracionário” (SOUZA, 2013, p. 15).

No entanto, a ideia de fração racional não é, conforme Boyer (1974), um produto da Idade Antiga, mas sim da Idade Moderna. A própria notação moderna de frações ordinárias, como salienta Souza (2013), é uma criação dos hindus que, com o passar do tempo, foi adotada e aperfeiçoada pelos árabes até o surgimento das frações decimais. Tal fato contribuiu, conforme Ifrah (1994), para prolongar a numeração decimal de posição em direção à moderna representação dos números decimais com vírgula. Para o autor, a evolução dos números racionais, passando a estarem sujeitos às mesmas regras que os números inteiros, está relacionada com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética.

2.2 BREVE HISTÓRICO DO ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS NO BRASIL

Segundo Damico (2007), atualmente o ensino dos números racionais vem recebendo um tratamento algorítmico e formal, ou seja, não são realizadas tarefas preliminares, por assim dizer, com a intenção de prover o estudante do entendimento do conceito a ser trabalhado. Dessa forma, a aprendizagem se resume a compreender a aplicação de regras sem, muitas vezes, reconhecer como foram criadas tais regras. Para o autor, deveriam ser trabalhadas situações da vida real com os estudantes e, por meio destas, potencializar a construção dos conceitos, operações e relações envolvendo os números racionais.

Rodrigues (2005), ao desenvolver uma pesquisa acerca do conceito de fração com alunos em fase de escolarização posterior ao ensino formal desses números (8ª série do Ensino Fundamental, 3º ano do Ensino Médio e de Nível Superior, na área de exatas), também apurou que os professores privilegiam atividades algorítmicas, recorrendo aos processos formais com a utilização de regras prontas. Ao procurar associar os aspectos da prática pedagógica às dificuldades encontradas pelos alunos, sua pesquisa concluiu que os alunos se apropriaram, em geral, somente das propriedades operatórias, mas não do conceito de número racional.

Vários autores, como Rodrigues (2005), Damico (2007), Silva (2005) e Almouloud e Silva (2008), apontam o predomínio do modelo parte-todo no processo de ensino dos números racionais nas escolas brasileiras. Na opinião de Almouloud e Silva (2008), o predomínio da concepção parte-todo no ambiente escolar é resultado, principalmente, da prática dos professores e da forma como estão organizados os livros didáticos.

Diante desse cenário, para compreender como se formou esse modelo de ensino dos números racionais, nos questionamos como se constituiu a história do ensino dos números racionais no Brasil.

Na tentativa de compreender esse processo, pode-se olhar para o texto de Maria Laura Magalhães Gomes (2006), "Os números racionais em três momentos da Matemática escolar brasileira". Analisando livros didáticos editados e publicados no decorrer do século XX, até os anos de 1970, a pesquisadora buscou elementos que demonstrassem como eram apresentados os números racionais na matemática da escola secundária brasileira. Para tanto, destacou três momentos em seu texto: o primeiro até a década de 1930; o segundo da Reforma de Francisco Campos (1931)[1] até o inicio da década de 1960; e, por último, o terceiro compreende os anos 1960 e o início da década de 1970.

No primeiro momento, Gomes (2006) identificou, em linhas gerais, que o enfoque dos números racionais consistia de uma definição de grandeza, conceituando número como resultado da medição de grandezas e relacionando a definição de fração à medição de comprimento. Essa apresentação traz o número racional como expressão da medição de uma grandeza comen-

[1]Esta representou, de acordo com Dallabrida (2009), a modernização do ensino secundário brasileiro, culminando no aumento do referido curso de 5 anos para 7 anos, sua divisão em dois ciclos (o "fundamental" com duração de 5 anos e o "ciclo complementar" de 2 anos); obrigatoriedade de 75% de presença nas aulas; criação de um sistema regular de avaliação e seriação anual das disciplinas. Com isso, houve uma homogeneização da cultura escolar do ensino secundário brasileiro por meio de procedimentos administrativos e didático-pedagógicos controlados pelo governo federal, de tal modo que estas novas normas definiam conhecimentos a ensinar.

surável com outra grandeza tomada como unidade. Tal fato era tão fortemente realçado, que predominavam as nomenclaturas “números comensuráveis” e “números incomensuráveis” para denominar os números racionais e os irracionais, respectivamente.

O segundo momento inicia com a reforma Francisco Campos, em 1931, a qual instituiu a disciplina Matemática no Brasil. Desse ano até o início dos anos de 1960, a definição de grandeza passa a receber representações diferenciadas nos livros didáticos pesquisados por Gomes (2006), mas continuou prevalecendo a conceituação de números racionais como resultado da medição de grandezas, ainda que com menor ênfase. Novamente, não foi acentuado o interesse ou preocupação em apresentar o termo “números racionais”, assim como no primeiro momento pesquisado.

No entanto, diferentemente do período anterior, foi abandonado o uso da expressão “números comensuráveis”. Esse fato, segundo Gomes (2006), enfatiza o afastamento ocorrido ao longo do tempo entre a medição de comprimentos e a noção de números racionais na forma fracionária, no ensino de Matemática nas escolas brasileiras; caracterizando a gradual desvinculação entre número e grandeza.

Já no terceiro momento, Gomes (2006) identificou que, por influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM)[2] no Brasil, as grandezas e sua medição praticamente deixam de figurar nos livros didáticos estudados. Ao assumirem o número natural como resultado da correspondência biunívoca entre conjuntos, os materiais didáticos passam a utilizar uma linguagem totalmente diferente da utilizada nos períodos anteriores. Isto conduziu a um predomínio de uma abordagem formal, na qual o número fracionário figurava como um par ordenado de números inteiros, em que a segunda coordenada era diferente de zero. Os números racionais passaram a ser ensinados, a partir de então, como a ampliação do campo numérico dos Naturais para um conjunto que goza da propriedade do fechamento na operação de divisão.

Gomes (2006) enfatiza, ainda, que os livros didáticos têm sido “fiéis” representantes dos currículos escolares brasileiros no decorrer dos anos. O estudo apontou elementos importantes do histórico do ensino dos números racionais nas escolas brasileiras. Um ponto relevante para a nossa pesquisa é a descrição do afastamento, por assim dizer, do ensino dos números racionais da sua interpretação como medida, a qual se concretizou por volta da década de 1960. Em vez dessa concepção que desenvolve a ideia de número racional como resultado da comparação de medidas entre grandezas comensuráveis, ganhou espaço, devido a influência do MMM, o

[2]O Movimento da Matemática Moderna (MMM), segundo Dobrowolski e Pinto (2009), foi um movimento de reformulação do ensino de Matemática com alcance mundial que, nas décadas de 1960 e 1970, buscava suplantar o ensino tradicional das escolas pautado na Matemática Clássica, no modelo euclidiano e na visão platônica em prol de uma “Matemática Moderna” que objetivava uma linguagem universal, assentada no rigor matemático das estruturas algébricas e na simbologia da linguagem formal da Matemática.

ensino dos números racionais baseado numa interpretação formal de classes de equivalência, na qual tais números são definidos como um par ordenado (a,b), com a, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

2.3 ALGUNS ESTUDOS REFERENTES AO ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Nessa seção analisaremos alguns estudos que abordam o ensino dos Números Racionais.

O estudo de Silva (2005), intitulado "Investigando saberes dos professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série", apresenta resultados importantes referentes ao ensino dos números racionais. Pesquisando as concepções de um grupo de professores de Matemática em relação à aprendizagem de números fracionários, detectou que a construção desses números decorre de um trabalho pedagógico pautado, quase que exclusivamente, em tarefas de concepção parte-todo, contextualizados em superfícies.

A autora comenta que em estudos anteriores já havia sido observado uma confusão, por parte dos estudantes, no entendimento dos números fracionários como dois números naturais. Dificuldade de entendimento também presente na introdução destes números quando fundamentados na concepção parte-todo, por meio do procedimento da dupla contagem das partes. O abuso da utilização das representações contínuas, em especial àquelas vinculadas ao círculo (a conhecida pizza), representa um dos problemas do ensino dos números racionais atualmente. O exagero no uso da interpretação parte-todo no ensino dos fracionários é entendido como provável causa dos problemas conceituais apresentados pelos alunos, no contexto escolar, sobre esses números.

Diante disso, Silva (2005) modelou enquanto Organização Matemática e Organização Didática alguns tipos de tarefas associando as concepções de fracionários: parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Devido ao interesse do nosso trabalho estar voltado na observação do processo de ensino e aprendizagem dos racionais, com tarefas pautadas nas interpretações da comparação e da medida, adotaremos a concepção de Silva (2005) acerca de parte-todo e medida.

- Parte-todo: "a concepção parte-todo emerge da ação de dividir uma grandeza contínua (comprimento, área, volume, ...) em partes equivalentes ou na grandeza discreta (coleção de objetos) em partes iguais em quantidade de objetos" (SILVA, 2005, p. 106).
- Medida: "as tarefas de medição naturalmente associam a concepção de medida, solicitando a manipulação de um padrão, chamado de unidade de medição que, por sua vez,

dependerá diretamente da grandeza em jogo" (SILVA, 2005, p. 117).

Segundo a autora, "a inserção no contexto escolar do ensino de fracionários baseado na concepção parte-todo e apoiado na contagem, parece-nos um movimento no sentido de auxiliar a criança no aprendizado dos novos números, utilizando seus conhecimentos dos números naturais" (SILVA, 2005, p. 95). Neste sentido, como nossa proposta é trabalhar com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio que, a priori, já possuem tais conhecimentos, pautaremos nosso trabalho em tarefas baseadas na concepção de medida dos números racionais.

Algumas consequências da ênfase do uso da concepção parte-todo no ensino, segundo Silva (2005), são a restrição de validade que o enfoque propicia, obrigando o número $\frac{a}{b}$ assumir o valor máximo igual a 1 além da discretização do contínuo. Dessa forma, "[...] os tipos de tarefas que associam a concepção de medida constituem o ambiente ideal para tratar os números fracionários maiores que um [...]" (SILVA, 2005, p. 121). É preciso ter claro que tarefas envolvendo a concepção parte-todo em associação com a concepção de medida requerem, na opinião da autora, conhecimentos de Geometria quando relacionados com volumes, superfícies e/ou comprimento.

Podemos inferir, com base nos argumentos apresentados por Silva (2005), que um ensino com base na concepção de medida dos números racionais, na sua forma fracionária, pode ser desenvolvido no contexto escolar com estudantes do Ensino Médio que, a priori, já deveriam saber o conceito de número racional. Isto reforça nossa intenção em observar, em sala de aula, o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais com tarefas pautadas na concepção da medida.

Analisando o ensino dos números racionais, Damico (2007) afirma que é consenso entre pesquisadores em Educação Matemática que a aprendizagem das noções sobre os números racionais é um grave obstáculo no aprendizado matemático dos estudantes. Segundo o autor, o conceito de número racional figura entre os mais complicados para crianças e adolescentes. Menciona ainda, os resultados das avaliações internacionais como o "termômetro" das dificuldades encontradas pelos estudantes em idade escolar acerca da construção ou aplicação de conceitos relacionados aos números racionais. Diante disso, diz que "estas constatações nos mostram que os problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem dos números racionais são extremamente amplos e devem ser atacados por diversos ângulos" (DAMICO, 2007, p. 18).

Damico (2007) reconhece, ainda, o acentuado uso do subconstruto parte-todo no contexto escolar, especialmente por meio do tradicional modelo de superfície de pizza ou na subdivisão de conjuntos discretos, como aporte pedagógico para o ensino de frações. Além disso, ocorre um uso abusivo, de métodos algorítmicos e do tratamento formal, dado aos números racionais na escola. Em sua opinião, deveriam ser trabalhadas situações da vida real e, por intermédio destas, potencializar a construção dos conceitos, operações e relações dentro deste campo numérico.

Esse trabalho deve relacionar, conforme Damico (2007), os cinco subconstrutos dos números racionais: parte-todo, operador, quociente ou divisão indicada, medida e coordenada linear, de modo que a reta real faz parte do último subconstruto e, além disso,

> uma abordagem concreta e interessante do subconstruto medida de número racional pode ser feita utilizando-se a reta numérica. Neste contexto, uma unidade é representada por um comprimento, em contraste com o subconstruto parte-todo no qual a unidade é frequentemente uma área ou um conjunto de objetos discretos (DAMICO, 2007, p. 80).

Em relação ao entendimento de Damico (2007) acerca dos subconstrutos parte-todo e medida, destacamos:

- Parte-todo:

> quando um todo (contínuo ou discreto) se divide em partes “congruentes” (equivalente como quantidade de superfície ou quantidade de objetos). A fração indica a relação que existe entre um certo número de partes e o número total de partes em que o todo foi dividido. O todo recebe o nome de unidade (DAMICO, 2007, p. 67).

- Medida:

> Neste caso, a ideia é de comparação de duas grandezas, por exemplo: quantas vezes um palmo cabe no comprimento de uma mesa? [...] é necessário que se estabeleça um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie; ou seja, uma unidade de medida como centímetros para comprimentos; gramas para peso; segundos para tempo, etc. A questão também exige uma resposta para a pergunta quantas vezes?, o que se faz dando um número que exprima o resultado da comparação. Esse número chama-se medida da grandeza em relação a essa unidade (DAMICO, 2007, p. 73-74).

Os resultados da pesquisa de Damico (2007) demonstram o predomínio de procedimentos algorítmicos no trato dos números racionais no contexto escolar. Na opinião do autor, há predominância do entendimento processual em relação ao conceitual. Este fato está intimamente relacionado à forma como se dá a aprendizagem dos números racionais na Educação Básica, quando a utilização do subconstruto parte-todo é largamente empregado.

Frente a isso, percebemos a necessidade da utilização mais ampla dos outros subconstrutos no ensino dos números racionais, como propomos neste trabalho.

Para Damico (2007), é preciso repensar a formação dada aos futuros professores nos cursos de licenciatura em matemática, principalmente em relação ao campo dos números racionais. Segundo o autor, não conseguirá ensinar o conceito de número racional quem não o conhece e, infelizmente, os futuros docentes na disciplina de Matemática não estão recebendo essa formação na graduação.

Conforme Damico (2007) os problemas mais comuns e evidentes no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais são:

1. Predomínio do método algorítmico, fazendo com que procedimentos de manipulação se sobrepõem ao significado conceitual, em especial no Ensino Fundamental.

2. Falta de diferenciação entre os números racionais e os inteiros, principalmente no momento da introdução dos primeiros. Neste sentido, o uso de gráficos de setores circulares para apresentar as frações aos estudantes é um exemplo particular deste caso. Em consequência, a maior parte dos estudantes de nível médio não conseguem estabelecer relações de ordem entre números racionais na forma decimal, bem como não conseguem estabelecer estimativas percentuais.

3. A conceituação da unidade. “Um elemento importante [...] é o desenvolvimento de um sistema de notações para localizar a composição, decomposição e conversão de unidades que, seguramente, traz uma melhor compreensão do conceito de unidade em diferentes situações” (DAMICO, 2007, p. 96). Do modo como vem sendo praticado o ensino dos números racionais no ambiente da escola básica, para o autor, o estudante não desenvolve a noção de unidade quando trabalha com os números racionais na forma fracionária e, em consequência, não aprende o conceito de número racional.

4. A metodologia de ensino, normalmente tradicional.

Ao olharmos para as referências de Damico (2007), para pontuar esses problemas no ensino dos números racionais, percebemos que todas são das duas últimas décadas do século XX. Então, nos perguntamos: será que esses problemas ainda persistem no contexto escolar?

Nos estudos de Rodrigues (2005) encontramos um questionamento: O que a escola básica ensina sobre os números racionais? Em resposta o autor buscou identificar aspectos do conceito de número racional, relativos aos significados parte-todo e quociente, com construção ineficaz no contexto escolar e que permanecem sem serem apropriados pelos alunos ao longo do processo de escolarização.

Os resultados da pesquisa de Rodrigues (2005), desenvolvida com estudantes de oitava série do Ensino Fundamental, terceira série do Ensino Médio e Ensino Superior na área de exatas, apontam que a formação escolar, como vem ocorrendo, não é suficientemente abrangente para que se construa o conceito dos números racionais como um campo numérico. Menciona que o privilégio dado ao modelo parte-todo e às atividades algorítmicas, adotado pelos professores, conduz a construção de falsos conceitos em relação aos racionais. Associado a isso, a compreensão do papel da unidade no conjunto dos números racionais continua sendo uma das dificuldades persistentes.

Neste sentido, essas conclusões se aproximam dos problemas relativos ao ensino dos números racionais elencados por Damico (2007), respondendo nossa pergunta acerca da validade daqueles resultados em um contexto contemporâneo. Sendo assim, denota-se que o desenvolvimento de atividades que suplantem a interpretação da concepção parte-todo no ensino dos números racionais é muito importante. Para que a realidade que ora se apresenta acerca da aprendizagem dos números racionais seja modificada, tornando seu ensino mais significativo para o estudante e, por assim ser, possibilitando desenvolver a compreensão conceitual desses números, propomos seu estudo por meio da noção de medida.

Outro ponto relevante do trabalho de Rodrigues (2005), que vem somar ao desenvolvimento da nossa pesquisa, relaciona-se com as considerações acerca de trabalhos realizados em Educação Matemática sobre os números racionais. O autor evidencia os trabalhos de Kieren (1981, 1988 e 1993), argumentando que foi esse autor quem introduziu a ideia de estudar os números racionais segundo subconstrutos; Nunes (1997, 2003) com a exposição de uma classificação dos significados do número racional, a qual Rodrigues (2005) adota em seu trabalho, expõe a importância do estudo dos números racionais estabelecendo relações entre a construção formal e o conhecimento intuitivo do estudante; e, por fim, "[...] que apresentam modelos de introdução do conceito de número racional a partir do significado "medida"" (ESCOLANO; GAIRÍN (2005), *apud* RODRIGUES, 2005, p. 31).

A pesquisa de Escolano e Gairín (2005), com estudantes da escola primária espanhola, diz Rodrigues (2005), traz importante análise sobre obstáculos didáticos[3] relativos ao ensino dos números racionais decorrentes da utilização do modelo parte-todo na introdução desses números. No entendimento dos autores, o significado parte-todo, como tradicionalmente é

[3]Estamos nos referindo a obstáculos didáticos como dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos decorrentes das práticas de ensino adotadas.

usado, com base em uma figura dividida em partes equivalentes, sendo algumas pintadas, exige do aluno a realização de uma transferência entre as representações gráficas e simbólicas em processo, o que passa pela interpretação da figura, o desenvolvimento de uma dupla contagem das partes e a apresentação do resultado dessas operações na forma simbólica. "Essas tarefas conduzem ao estabelecimento de uma relação simbólica entre dois números naturais, e só depois, ao longo do processo educativo, será instituída a definição de número racional" (RODRIGUES, 2005, p. 53).

No entendimento de Escolano e Gaírin (2005), explica Rodrigues (2005), a construção do conceito de fração a partir do modelo parte-todo, como descrito, conduz a aquisição do conhecimento de forma visual e sem associação com o ato de medir. Mas como a ideia de medida é intrínseca à gênese do número racional, o processo de medição deve ser considerado no momento de ensinar esses números. Caso contrário, a aprendizagem pode ter efeitos indesejados, criando obstáculos quanto à construção de concepções corretas, porque:

> - fica omitida a grandeza utilizada. Embora se esteja trabalhando com unidades de superfície, não se faz menção a isso, pois a ênfase está na dupla contagem;
> - não se define uma unidade. O todo-unidade não necessita ser apresentado de forma explícita. Por esse motivo as figuras podem ser apresentadas superpostas e claramente diferenciadas segundo o atributo da cor, de modo que o aluno não tem a necessidade de reconhecer a unidade para resolver a tarefa;
> - não se atribui relevância à necessidade de igualdade dos tamanhos das partes (conservação das áreas), pois o processo está centrado na cardinalidade do número de partes (ESCOLANO; GAIRÍN, 2005 *apud* RODRIGUES, 2005, p. 53).

Assim, comenta Rodrigues (2005), Escolano e Gaírin (2005) concluem que a criança não associa a fração a um novo número, pois, devido à ideia do modelo parte-todo, com base na dupla contagem, a fração é interpretada como uma relação entre números naturais. Isso conduz a uma aprendizagem passiva porque, via de regra, não existe uma situação problemática, bastando seguir o modelo para concluir a tarefa.

Tais considerações reforçam a importância de se desenvolver atividades que conduzam os estudantes a um entendimento do conceito de número racional.

Segundo Rodrigues (2005), Escolano e Gaírin (2005) destacam que apesar da aparente vantagem didática do modelo parte-todo, o seu distanciamento com a gênese do número racional e ausência de relação entre seu surgimento e a necessidade humana, pode conferir ao seu uso alguns obstáculos didáticos, principalmente:

1. Quanto a formação de concepções adequadas, haja vista que as frações são números e

não medidas, não existem frações impróprias e não identifica a unidade;

2. Em relação à separação conceitual entre números racionais e naturais, porque a fração, enquanto símbolo resultante da dupla contagem, é resultado de uma situação estática da relação entre dois números naturais e, em consequência, os estudantes não conseguem perceber as peculiaridades das operações com números racionais, tentando simplesmente empregar as mesmas técnicas utilizadas com os números naturais;

3. No tocante à formação de ideias abstratas.

Frente a isso, Rodrigues (2005) destaca que os autores propõem uma sequência de ensino com uma proposta alternativa ao modelo parte-todo para abordar o ensino de frações, pautada em três grandes objetivos:

> 1. Favorecer a construção de concepções adequadas, ao propor modelos que têm como característica comum a medida de grandezas. Deste modo se dispõe de um mundo de objetos físicos para justificar os resultados matemáticos.
> 2. Potencializar a ideia de número racional, provocando uma ruptura entre as concepções de número natural e de número racional, na medida em que se destaca que os naturais servem para contar, e os racionais, para medir.
> 3. Facilitar a construção de ideias abstratas, entendendo que os modelos de aprendizagem em que o aluno interage com o mundo dos objetos facilita a construção mental dos números racionais e permite a avaliação semântica de qualquer expressão simbólica em que esses números apareçam (ESCOLANO; GAÍRIN, 2005 *apud* RODRIGUES, 2005, p. 56).

Neste ponto, apesar de Escolano e Gaírin (2005) estarem se referindo à introdução do conceito de frações na escola primária espanhola, seus objetivos com essa sequência didática se aproximam dos objetivos do nosso trabalho, em especial por considerarem o modelo como medida fundamental para o ensino dos números racionais. É importante, ainda, ressaltar que os autores acreditam que modelos de atividades envolvendo a medida de grandezas, para estudo dos números racionais, ajudariam os estudantes a formarem o conceito deste tipo de número. Dado que esse argumento também está presente em nossa pesquisa, denotamos que o trabalho destes autores sugere que é viável pensarmos em uma sequência de atividades acerca dos números racionais com base na interpretação da medida.

Rodrigues (2005) também enfatiza que Escolano e Gairín (2005) demonstraram que a sequência de ensino proposta, baseada nos significados de medida, quociente e razão, proporcionou a superação dos obstáculos didáticos anteriormente elencados.

Com base nisso, entendemos que nossa pesquisa também poderá ajudar no desenvolvimento de atividades que favoreçam a aprendizagem dos conceitos de números racionais e suas operações, em especial a divisão. Analogamente às ideias de Escolano e Gaírin (2005), sintetizadas por Rodrigues (2005), investiremos na interpretação como medida dos números racionais para alcançar tal objetivo.

2.4 RELACIONANDO IDEIAS DE DIFERENTES AUTORES SOBRE O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Como registramos na seção anterior, para muitos pesquisadores a aprendizagem do conceito de número racional constitui um obstáculo a ser superado na Educação Básica. Os resultados das avaliações internacionais como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), conforme Damico (2007), corroboram essa afirmação, pois, em linhas gerais, revelam o acentuado grau de dificuldade que os alunos têm na aplicação do conceito de números racionais.

Neste sentido, as pesquisas trazem alguns apontamentos como prováveis causas do "problema" bem como as possibilidades para resolvê-las. Uma mudança de atitude dos professores frente a esse conteúdo, tomando consciência sobre a origem e natureza deste saber, de como se constitui, compreendendo em que medida e sentido é relevante para a sala de aula, "pode contribuir para disparar mudanças em suas práticas de ensino e, consequentemente, para enriquecer a aprendizagem de seus alunos" (RANGEL *et al.*, 2014, p. 12).

Ideia semelhante é defendida pelo NEPEM/USF (2004)[4], ao considerar a dificuldade encontrada pelos alunos em interpretar conceitos dos números racionais enquanto fruto da forma como vem sendo trabalhado em sala de aula. Na opinião do grupo, após comprovarem que os livros didáticos não tratam adequadamente o tema, cabe ao professor complementar o tratamento adequado para os números racionais em sala de aula.

Silva (2005), por sua vez, constatou que os professores da Educação Básica não possuem uma formação adequada para ensinarem o conceito de número racional, reproduzindo aquilo que aprenderam enquanto alunos. Em consequência, acabam privilegiando o ensino baseado em regras prontas, acreditando na aprendizagem por memorização. No entanto, "não basta saber, é necessário compreender como esse saber se constitui, qual sua natureza e origem, bem como compreender em que sentido e em que medida esse saber é relevante para a sala de aula" (RANGEL *et al.*, 2014, p. 11).

A opção pelo modelo parte-todo ao iniciarem o estudo dos números racionais bem como a extrema rapidez com a qual professores da Escola Básica partem para atividades al-

[4]Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade São Francisco.

gorítmicas são, para Rodrigues (2005), possíveis causas que perpetuam as dificuldades dos alunos no que tange aos números racionais.

Estudos de Damico (2007), acerca da formação inicial de professores, também revelam uma formação deficiente que esses profissionais recebem para ensinar números racionais. Mesmo assim, aponta que a complexidade presente na aprendizagem desse assunto, "[...]provavelmente esteja mais fortemente relacionada à metodologia de ensino tradicional do que propriamente à dificuldade relativa ao conceito e aos problemas utilizados" (DAMICO, 2007, p. 91). Assim, sintetiza que os problemas decorrentes do ensino dos números racionais são resultantes do predomínio do método algorítmico, da falta de diferenciação conceitual dos números inteiros, da não definição da unidade e da metodologia de ensino, normalmente tradicional. Esse método de ensino pauta-se na memorização de regras para a resolução de listas de exercícios, privilegiando uma aprendizagem processual, mecanizada, em detrimento de uma aprendizagem conceitual.

Todos os estudos supracitados são unânimes em reconhecer a necessidade da formação continuada de professores, preparando-os para ensinar os números racionais, como um quesito para diminuir as dificuldades de aprendizagem deste tema. Outro ponto em comum é o reconhecimento dos métodos tradicionais de ensino, pautados na memorização de regras algorítmicas para resolver listas de exercícios e na utilização da interpretação parte-todo, como um obstáculo, por assim dizer, ao avanço no processo de ensino dos números racionais. Frente a isso, destaca-se a necessidade do desenvolvimento de pesquisas acerca do uso de novas metodologias de ensino dos números racionais, com campo de observação em sala de aula, assim como estamos propondo.

Para Silva (2005) "os conhecimentos de medida, comparação e distribuição permitem a percepção da razão de ser dos fracionários que relacionados facilitariam a construção do conceito de número racional pretendido" (SILVA, 2005, p. 96). Teoricamente está comprovado pelo seu estudo, mas e na prática, em sala de aula, será que isso se efetivaria? Qual seria a melhor metodologia a ser empregada? Qual seria o caminho metodológico para ensinar os conceitos dos números racionais?

Um dos primeiros pontos a considerar, conforme salientam Rodrigues (2005) e Silva (2005), é a gênese dos números racionais. Suas pesquisas mostram que os números racionais surgiram devido à necessidade social de medir. Biffi (2001) também argumenta que a necessidade do uso dos números racionais certamente decorreu da sua utilização para medição de áreas de terras. Egípcios e babilônios, há 3000 a.C, já usavam representações fracionárias, apesar de serem distintas das utilizadas atualmente. "[...]as relações entre medição, propriedade privada e o Estado, forma as bases da necessidade de criação de um novo campo numérico" (BIFFI, 2001, p. 25).

Portanto, a concepção de medida deve ser considerada no momento de ensinar o objeto matemático números racionais. Essa ideia é corroborada no texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCN's (2000) que defendem a importância da correlação das situações problemas em seus contextos sócio-históricos para o ensino desses números.

Além disso, Damico (2007) argumenta que a resolução de situações-problema pode constituir uma base para o desenvolvimento de conceitos formais de números racionais. Essa ideia, mesmo com um enfoque diferente, é defendida enquanto objetivo de aprendizagem nos PCN's (1997) de Matemática para o Ensino Fundamental. Ao sugerir o ensino dos números racionais por meio da resolução de problemas, o documento oficial defende que um dos objetivos do ensino de Matemática é levar o discente a "construir o significado de número racional e de suas representações (fracionária e decimal) a partir de seus diferentes usos no contexto social" (BRASIL, 1997, p. 55). Em um contexto mais geral, os PCN's de Matemática para o Ensino Médio defendem que os processos de ensino e aprendizagem dos números:

> [...] estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real (BRASIL, 2000, p. 44).

Neste sentido, o desenvolvimento de uma pesquisa acerca do ensino dos números racionais, desenvolvida no ambiente da sala de aula, em contado direto com os estudantes e pautada nas interpretações da comparação e da medida vem, de certa forma, preencher uma lacuna nas pesquisas desenvolvidas acerca do ensino dos números racionais.

3 COMO NÓS ESTAMOS PENSANDO

Neste capítulo vamos apresentar um breve texto de como estamos pensando o conceito de número e as concepções parte-todo e medida de número racional.

3.1 O CONCEITO DE NÚMERO

Não vamos nos alongar aqui numa tentativa de recontar toda a História que conduziu a formação do conceito de número. No entanto, assumiremos a ideia de Souza (2013, p. 3) de que esse conceito "[...] foi construído a partir da necessidade do homem de criar um método para contar e, mais tarde, para medir."

Conforme Roque (2012 *apud* SOUZA, 2013), contar é realizar uma correspondência entre duas coleções de seres, sendo que essa ação origina um número que indica a quantidade de seres de uma coleção definida.

Ainda em relação a isso, Pitombeira e Roque (2010, p. 6) argumentam que "contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato". O desenvolvimento desta prática, em sua opinião, engendrou a evolução do conceito de número.

Até os anos finais do século XVIII, conforme Pitombeira e Roque (2010), a noção de número estava diretamente relacionada à ideia de quantidade e, sendo assim, só eram aceitos os números absolutos. Porém, segundo os autores, a noção de rigor matemático se transformou no contexto do século XVIII e durante o século XIX, quando o fundamento na "análise algebrizada" perdeu campo para os métodos do cálculo infinitesimal. Então, "para avançar, era preciso migrar para um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade" (PITOMBEIRA; ROQUE, 2010, p 238).

Aliás, foi no século XIX, de acordo com Pitombeira e Roque (2010), que se desenvolveu o conceito abstrato de número, justamente porque o desenvolvimento da análise necessitou de uma extensão do conceito de número. "Para dar consistência às práticas da análise, tornou-se necessário introduzir um conceito abstrato de número, independente das ideias de quantidade e grandeza" (PITOMBEIRA; ROQUE, 2010, p. 239).

Esse desenvolvimento no conceito abstrato de número também atingiu os números racionais. Atualmente, em relação ao rigor da formalização matemática, o conceito de número racional é estruturado de duas maneiras:

> Assim se destacam no contexto da álgebra, a construção dos números racionais por classes de equivalência; e no contexto da análise, os resultados que garantem que um número é racional se e somente se sua representação nos sistemas de numeração posicional é finita ou periódica (RANGEL *et al.*, 2014, p. 11).

Em nossa pesquisa adotaremos a definição de número racional proposta por Niven (2012, p. 25):*"um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero"*.

3.2 DEFININDO AS CONCEPÇÕES PARTE-TODO E MEDIDA EM NOSSO TRABALHO

Foi denotado nos estudos de Damico (2007), Silva (2005), Silva e Almouloud (2008), Souza (2013), NEPEM/USF (2004), Rodrigues (2005), entre outros, que o ensino dos números racionais, principalmente no Ensino Fundamental, é realizado com o auxílio de tarefas pautadas na concepção parte-todo.

Como vamos estudar a divisão de números racionais como medida em nosso trabalho, precisaremos saber relacionar essa atividade com a interpretação parte-todo. Sendo assim, com base nos trabalhos de Silva e Almouloud (2008), Damico (2007) e Silva (2005), trataremos a operação de divisão dos números racionais na concepção parte-todo quando: *Dados uma grandeza total e o número de partes, for perguntado qual o tamanho de cada parte*.

Assim, essa ideia remete à divisão a repartição em partes iguais. Por exemplo, dividir um pacote com 30 bombons entre cinco crianças de modo que todos ganhem a mesma quantidade de bombons. Com quantos bombons cada criança ficará? Logo, a quantidade de bombons que cabe a cada uma é determinada pela divisão de 30 por 5.

Vemos, com isso, que a ideia de repartição em partes iguais (equipartição), esta posta em problemas nos quais é dado um todo e o número de partes e se pergunta o tamanho de cada parte.

Como apresentamos no capítulo 1, no ensino dos números racionais fracionários, pautados na concepção parte-todo, é comum o uso de representações geométricas, principalmente por meio de uma figura plana, para ilustrar a situação. Assim, aparecem com frequência para os alunos exemplos de construções como as da Figura 1.

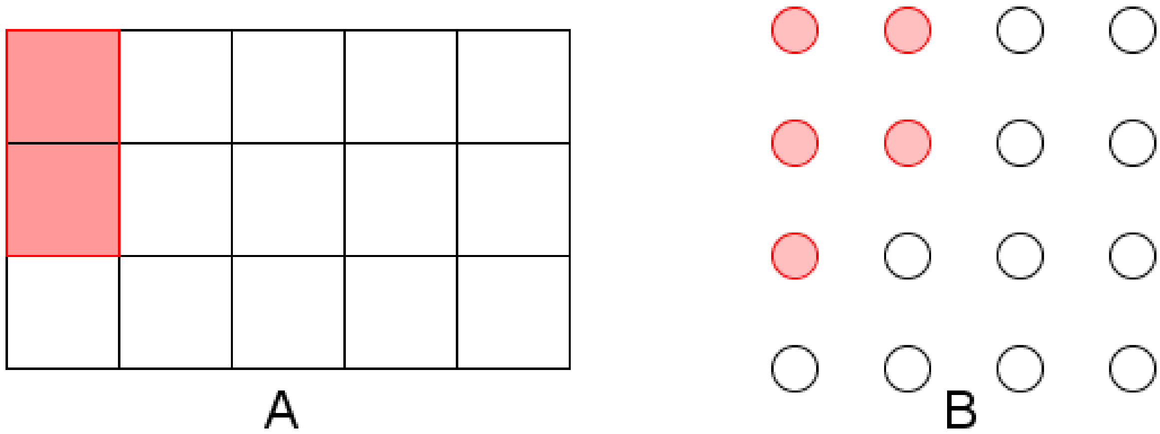


Figura 1: Representação da concepção parte-todo de fração com (A) grandezas contínuas e (B) grandezas discretas

Na Figura 1A, a fração $\frac{2}{15}$ é representada pela contagem dupla das partes entre a área que foi pintada e a que não foi pintada, haja vista que a figura foi dividida em partes iguais, ou seja, com áreas congruentes. Neste caso, temos uma representação com grandezas contínuas.

Já na Figura 1B, por sua vez, a representação remete a grandezas discretas. Mas, analogamente, a fração $\frac{5}{16}$ é resultado da contagem dupla entre as partes pintadas e não pintadas.

Porém, como pretendemos trabalhar com a divisão de números racionais em um primeiro ano do Ensino Médio, com atividades pautadas na interpretação da medida, precisamos esclarecer o que entendemos por divisão como medida. Novamente, com base nos trabalhos de Damico (2007), Silva e Almouloud (2008) e Rangel *et al* (2014), mas também no estudo de Pinto (2009), definiremos a concepção como medida do seguinte modo: *São dados o tamanho da parte (unidade) e a grandeza total e pergunta-se o número de partes (unidades) da grandeza total*.

O ato de medir, segundo Caraça (2005, p. 30), envolve três aspectos: “escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por um número.” Então, como a operação de divisão, no campo numérico dos números racionais, expressa medida, ela está diretamente associada à comparação entre grandezas de mesma natureza. Para tanto, envolve um todo, uma unidade de medida (parte) de natureza igual à do todo e o número de vezes, obtido pela comparação entre o todo e a parte, que a unidade de medida cabe no todo.

Um exemplo concreto de atividade envolvendo a interpretação da divisão de números racionais como medida é o seguinte: Como podemos distribuir 60 bombons em pacotinhos com capacidade para 5 bombons? Neste caso a quantidade de pacotinhos é determinada pela divisão de 60 por 5, isto é, está sendo verificado quantas vezes o 5 cabe em 60. Note que o significado medida só faz sentido quando estão envolvidas grandezas de mesma natureza; pois, como medida, conforme esclarecido no estudo de Pinto (2009), a operação de divisão remete à comparação entre grandezas de mesma natureza. Portanto, o dividendo (o todo) e o divisor (a parte / unidade de medida) são grandezas de igual natureza.

Diante disso percebemos, em linhas gerais, não ser fácil identificar a distinção entre a concepção parte-todo e medida de número racional quando resolvemos problemas nos quais estão envolvidas somente operações numéricas. No entanto, enquanto a interpretação da divisão como equipartição só faz sentido se o divisor for um número natural, a interpretação da divisão como medida não exige tal condição, pois basta que as grandezas sejam comensuráveis.

Então, para trabalhar o ensino da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida vamos explorar, principalmente, o contexto geométrico dado por segmentos de reta. Tomamos essa decisão com base na observação de Damico (2007), de que o subconstruto coordenada linear (reta real) pode ser um instrumento eficaz na abordagem do subconstruto medida de número racional.

Vejamos um exemplo a fim de esclarecer como é possível trabalhar a interpretação da divisão de números racionais por meio da representação geométrica por segmentos de reta. Vamos representar geometricamente, conforme a Figura 2, a divisão de $\frac{2}{5}$ por $\frac{7}{3}$ utilizando a interpretação como medida. Para compreender a Figura 2 considere $u = \frac{2}{5}$ e $v = \frac{7}{3}$. Note que H é uma unidade de medida (um segmento de reta) da qual u e v são múltiplos inteiros. Então, subdividindo o segmento de comprimento $\frac{1}{5}$ em 3 e o segmento de comprimento $\frac{1}{3}$ em 5, dividimos u em 6 segmentos de comprimento H e v em 35 segmentos de comprimento H. Logo, $u = 6H$ e $v = 35H$, donde obtemos $H=\frac{v}{35}$. Portanto, a medida de u tomando v como unidade é $u = \frac{6}{35}v$. Como $v = \frac{7}{3} \neq 0$, temos $\frac{u}{v} = \frac{6}{35}$, isto é, $\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{6}{35}$. Neste caso, dizemos que $\frac{7}{3}$ "cabe" $\frac{6}{35}$ em $\frac{2}{5}$.

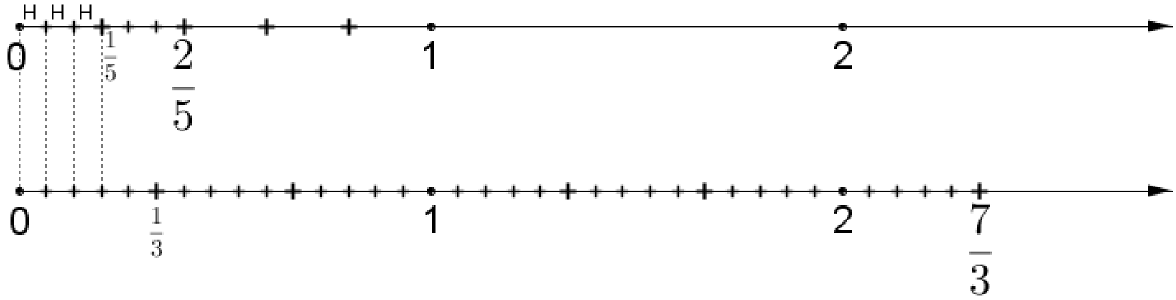


Figura 2: Representação geométrica por segmentos de reta de $\frac{2}{5} \div \frac{7}{3}$

De modo geral, realizar a divisão dos números racionais $u = \frac{a}{b}$ por $v = \frac{c}{d}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $b, d \neq 0$, consiste em encontrar uma unidade de medida comum H subdividindo $\frac{1}{b}$ em d partes congruentes e $\frac{1}{d}$ em b partes congruentes.
Logo, segue que

(i) H cabe d vezes em $\frac{1}{b}$ que cabe a vezes em u. Portanto, H cabe ad vezes em u, ou seja, $u = (ad)H$;

(ii) analogamente H cabe b vezes em $\frac{1}{d}$ que cabe c vezes em v. Portanto, H cabe bc vezes em v, ou seja, $v = (bc)H$. Assim, como $bc \neq 0$, temos $H = \frac{v}{bc}$.

Então, tomando H como uma subdivisão da unidade v e contando quantas vezes H cabe em u, concluímos que a medida de u quando v é a unidade será, por (i) e (ii), $u = ad\frac{v}{bc} = \frac{ad}{bc}v$. Como $v \neq 0$, temos $\frac{u}{v} = \frac{ad}{bc}$. Dessa forma, associado ao significado medida, obtemos a fórmula de divisão de frações:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

4 NOSSA OPÇÃO METODOLÓGICA

Após decidirmos estudar o ensino da divisão de números racionais por meio de tarefas pautadas na interpretação da medida, passamos a desenvolver ideias sobre qual seria o caminho a ser trilhado para desenvolver a pesquisa. Optamos, logo de início, por realizar um trabalho investigatório em sala de aula e coletar dados para posterior análise. Diante disso, surgiu o seguinte questionamento: Como vamos proceder para trabalhar a divisão de números racionais, por meio da interpretação como medida, com estudantes?

Responder tal pergunta não foi uma tarefa simples e imediata. Primeiramente, pensamos em desenvolver oficinas com os estudantes. Nestas, estudaríamos questões nas quais a divisão de números racionais estaria sujeita ao contexto da interpretação como medida destes números. Pretendíamos, em linhas gerais, desenvolver uma sequência didática permeada por questões dessa natureza com os sujeitos participantes da pesquisa.

Frente a isso, fomos em busca de uma metodologia apropriada para desenvolver um estudo com essas particularidades. Após a realização de algumas leituras referentes a metodologias de pesquisa em Educação Matemática, optamos pela Engenharia Didática. Mas o que vem a ser a metodologia Engenharia Didática? Vamos, brevemente, tentar responder a esta pergunta na próxima seção.

4.1 O QUE É ENGENHARIA DIDÁTICA?

Já mencionamos nossa opção pelo desenvolvimento da pesquisa por meio da Engenharia Didática. Essa metodologia, tendo em consideração a concepção, planejamento e execução de um projeto, conforme Paiz (2002), pode ser considerada análoga ao trabalho de um engenheiro ao desenvolver um projeto arquitetônico. Semelhante a este, o educador/pesquisador necessita de conhecimentos prévios para ensinar, mesmo que seu domínio não seja o bastante para anular os desafios do complexo ato de ensinar. Portanto, a engenharia didática contempla, na opinião de Paiz (2002), tanto a dimensão teórica quanto a dimensão prática da pesquisa desenvolvida em didática. Ela “se constitui em uma forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática" (PAIZ, 2002, p. 100).

No entendimento de Almouloud e Coutinho (2008), a Engenharia Didática caracteriza-se por um arranjo empírico baseado em "realizações didáticas" no ambiente escolar que, a grosso modo, pode ser resumida pela realização, observação e análise de sessões de ensino. Ideia semelhante, acerca desta metodologia, é defendida por Almouloud e Silva (2012). Na visão destes autores, a Engenharia Didática apresenta algumas características da pesquisa ação, haja vista se desenvolverem nela circunstâncias de sala de aula nas quais "[...] o pesquisador é levado a descrever e analisar os resultados de sua aplicação, tomando os devidos cuidados em relação ao grau de generalidade dos resultados" (ALMOULOUD; SILVA, 2012, p. 46).

A utilização da metodologia Engenharia Didática se faz, de acordo com Paiz (2002), em quatro fases:

1ª) Análises preliminares;

2ª) Concepção e análise prévia;

3ª) Aplicação de uma sequência didática;

4ª) Análise a posteriori e avaliação.

Na realização do nosso trabalho, buscamos contemplar as quatro fases da Engenharia Didática. Como cada fase não é independente uma da outra, o desenvolvimento de uma pode ser concomitante ao de outra.

Vamos, na próxima seção, relacionar nossa pesquisa com as quatro fases da engenharia didática. Salientamos, ainda, que as observações também contribuírão para um esclarecimento mais completo acerca dessa metodologia bem como a respeito da forma como a interpretamos para a realização deste trabalho.

4.2 NOSSA PESQUISA E AS QUATRO FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Nesta seção vamos apresentar, de forma sucinta, uma relação das quatro fases da engenharia didática com o nosso trabalho.

4.2.1 ANÁLISE PRELIMINAR: APRESENTANDO OS PARTICIPANTES

No capítulo 1 apresentamos uma análise preliminar do nosso objeto de estudo (o ensino da divisão dos números racionais) considerando o viés pedagógico e o epistemológico. Ainda, dados de uma análise preliminar, baseada principalmente em uma descrição da dimensão cognitiva do fenômeno estudado, é realizada no capítulo 2. Tal organização foi escolhida para o texto, pois “para melhor organizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como o epistemológico, cognitivo, pedagógico, entre outros” (PAIZ, 2002, p. 101).

A complementação da análise preliminar decorre, então, da apresentação dos participantes da pesquisa. O colégio e a turma na qual aplicamos as sessões de ensino da Engenharia Didática foram pensados antes do início da elaboração das atividades. Escolhemos o Colégio Estadual Gabriela Mistral - E.F.M, localizado no município de Porto Barreiro/PR. A turma escolhida foi o 1° ano do Ensino Médio do período vespertino. Essa escolha foi motivada, em especial, pela familiaridade do pesquisador com a escola e com os estudantes, haja vista atuar como professor de matemática no estabelecimento e lecionar nesta turma.

Os estudantes do 1ºB, do Colégio Estadual Gabriela Mistral, formam um grupo bem heterogêneo de 16 meninas e 10 meninos. As idades dos estudantes estão no intervalo de 14 a 17 anos, sendo que a maioria, 13 deles, possuem 15 anos. Realçamos, ainda, que a maior parcela destes sujeitos possui um histórico de notas baixas em Matemática, a ponto de muitos serem aprovados por Conselho de Classe na passagem do nono para o primeiro ano.

Outro fator relevante para a escolha dessa turma foi a identificação, decorrente da relação professor-aluno, de que os estudantes não conheciam e não compreendiam o conceito de número racional, apesar de já terem estudado esse conteúdo no Ensino Fundamental. A ideia de número racional para eles, em geral, estava associada a regras operatórias aplicadas aos números decimais ou fracionários.

Devido a aplicação das sessões de ensino ocorrerem em contraturno, no período matutino, 12 (doze) estudantes, 8 meninas e 4 meninos, com idade média de 15 anos, que denominaremos de agora em diante por E1, E2, ..., E12, a fim de preservar a identidade deles, se propuseram a participar. Salientamos que todos os 26 estudantes da turma foram convidados a participar. Porém, como alguns estudantes não conseguiram transporte escolar em contraturno, outros não obtiveram autorização dos responsáveis legais, outros demonstraram falta de interesse ou não justificaram porque não participariam, o número de estudantes foi esse.

4.2.2 ANÁLISE PRÉVIA: UM OLHAR SOBRE A DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Na segunda fase ou concepção e análise prévia, define-se um certo número "[...] de variáveis de comando do sistema de ensino que supostamente interferem na constituição do fenômeno" (PAIZ, 2002, p. 101). Neste trabalho, a principal variável estudada é referente a aprendizagem da divisão dos números racionais por meio da interpretação da medida e seu delineamento encontra-se, principalmente, no capítulo 2 desse texto.

Além disso, na intenção de complementar a análise prévia, precisávamos ampliar nosso entendimento a respeito do conhecimento dos estudantes envolvidos com a pesquisa em relação aos números racionais, mais especificamente sobre a divisão destes números.

Para identificar elementos importantes acerca dos conhecimentos que os estudantes participantes do projeto possuíam em relação aos números racionais recorremos ao instrumento da entrevista semi-estruturada. Esse caminho, de acordo com Colognese e Mélo (1998), mesmo utilizando uma lista de perguntas, previamente elaboradas, possibilita ajustes durante a entrevista, dando liberdade ao pesquisador para debater e/ou aprofundar outras questões.

Neste sentido, elaboramos uma lista com 11 questões (conforme apêndice A) acerca dos números racionais. As questões buscam elucidar como e quando os estudantes aprenderam o conceito de número racional na forma fracionária; como eles conceituam os números racionais; qual o entendimento deles referente à equivalência de frações, relação de ordem entre números racionais e a densidade desses números, assim como o entendimento deles acerca da divisão no contexto dos números racionais.

Devido ao tempo disponível para a realização da pesquisa escolhemos, aleatoriamente, os estudantes E1, E2 e E5 para participarem, individualmente, dessa atividade. Cada um deles, no momento da realização da entrevista, recebeu as perguntas pré-estabelecidas em folhas com espaço para escreverem, quando necessário, suas respostas. Isto ajudou os estudantes a expressarem suas ideias quando não conseguiam comunicá-las oralmente.

Apresentaremos uma descrição das respostas dos estudantes E1, E2 e E5 mais adiante, no início do capítulo 5. Porém, adiantamos que eles não possuíam uma ideia clara do significado de números racionais. Nenhum deles soube definir número racional e demonstraram não compreenderem o conceito deste tipo de número. Em linhas gerais, não responderam o que é um número racional e quais eram as maiores dificuldades que encontravam ao trabalharem com esses números.

4.2.3 O DESENROLAR DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A terceira fase da Engenharia Didática compreende a aplicação de uma sequência didática e, conforme Paiz (2002), é neste momento que as variáveis da segunda fase serão articuladas e analisadas. "Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática" (PAIZ, 2002, p. 102).

A sequência didática desenvolvida na realização desta pesquisa pode ser visualizada nos apêndices B, C, D e E.

Frente aos resultados da análise a priori, começamos a pensar a sequência didática. Como o principal objetivo do nosso trabalho era investigar a possibilidade do uso de tarefas pautadas na interpretação da medida no processo de ensino e aprendizagem da divisão de números racionais, em especial a de números racionais com escrita fracionária, pesquisamos atividades que pudessem figurar nas sessões de ensino.

Durante a empreitada, nos deparamos com lacunas da nossa própria formação. Na tentativa de desenvolver atividades pautadas na interpretação como medida, acerca dos números racionais, percebemos o quão difícil é superar o vínculo da aprendizagem destes números com o modelo parte-todo. Isso ficou ainda mais sobrecarregado pelos anos de docência desenvolvidos nessa mesma linha de pensamento. Muitas vezes sentimos dificuldades acentuadas em resolver questões que pretendíamos trabalhar com os estudantes. Queremos frisar, com isso, que trabalhar com a interpretação dos racionais como medida foi, antes de tudo, uma atividade que ajudou sobremaneira na formação acadêmica deste pesquisador/professor.

Pedir, hoje, para um estudante representar a operação $\frac{4}{5} \div \frac{1}{3}$ nos parece uma atividade fácil. Porém, é um bom exemplo de questão que nos obrigou a estudar para resolvê-la. Depois de aprofundar o estudo dos números racionais como medida, é simples apresentar uma solução como a da Figura 3.

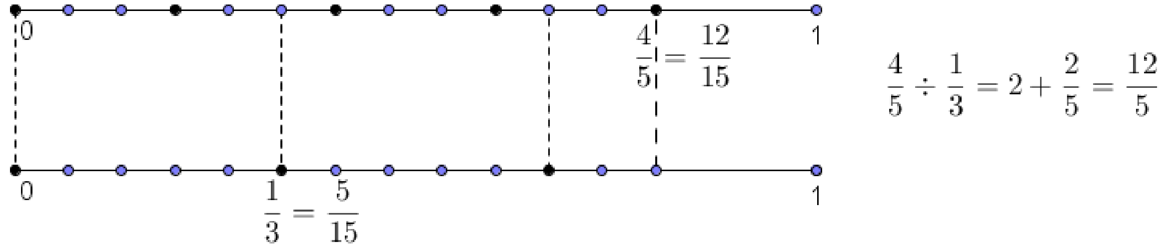


Figura 3: Representação geométrica da operação $\frac{4}{5} \div \frac{1}{3}$

Neste sentido, preparar as atividades das sessões de ensino bem como desenvolver essa pesquisa, tem contribuído extraordinariamente com a nossa prática pedagógica, enquanto docente, e com a nossa formação acadêmica, enquanto estudante.

Dito isto, para não ultrapassar o escopo deste trabalho, passamos a sequência didática. Com base na análise prévia, pensamos em organizá-la em quatro encontros[1], denominados sessões de ensino na metodologia da Engenharia Didática. Antes de descrever cada sessão, é necessário observar que as atividades propostas foram pensadas, desenvolvidas e elaboradas em equipe, pelo autor e seus orientadores, observando os trabalhos de Silva (2005), Damico (2007), Souza (2013) e Almouloud e Silva (2008), dos quais apropriamos algumas questões que serviram de luz para a elaboração de outras.

Na sessão 1, conforme apêndice B, utilizamos questões com o objetivo de revisar a noção e representação de número racional, frações equivalentes, ordenação, densidade e comparação dos números racionais. Na sessão 2, que pode ser visualizada no apêndice C, desenvolvemos e utilizamos atividades com o objetivo de revisar com os estudantes as operações de adição, subtração e multiplicação de números racionais.

Estas duas sessões foram assim planejadas pois, com base na análise prévia, era preciso retomar alguns conhecimentos fundamentais referentes aos números racionais bem como situar os estudantes acerca da interpretação como medida destes números. Isso era necessário, no nosso entendimento, para em seguida podermos observar situações de aprendizagem acerca da divisão de números racionais com base na concepção de medida, assim como prevemos nesta pesquisa.

As sessões 3 e 4, conforme apêndices D e E respectivamente, foram organizadas com o objetivo de possibilitar o estudo da divisão de números racionais com base na interpretação da medida.

Pensamos nesta sequência didática a fim de observarmos situações de aprendizagem acerca do conceito de número racional e, mais especificamente, da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida.

Um fato importante sobre a aplicação da sequência didática, é a nossa opção em utilizar gravações de áudio nas aulas com os estudantes. Acreditamos que isto poderia nos ajudar no momento da realização da análise dos resultados, haja vista as gravações em áudio terem potencial para revelar informações que não foram observadas no decorrer da aplicação da sequência didática bem como o de armazenar os dados de modo seguro. Além disso, faremos uso de um

[1]Cada encontro duraria por volta de três horas e meia, com um intervalo de quinze minutos após decorridos 1hora e 40 min. de aula.

diário de campo das aulas e das folhas de respostas dos estudantes para obtermos informações pertinentes ao nosso objeto de estudo.

4.2.4 A VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS: ANÁLISE A POSTERIORI E AVALIAÇÃO

Após a aplicação da sequência didática, cada aula, denominada sessão, é analisada na quarta fase da Engenharia Didática, isto é, na análise a posteriori e avaliação.

A 4ª fase, análise a posteriori e avaliação, que segundo Paiz (2002) compreendem a confrontação com os dados da análise a priori e a ratificação dos resultados por meio da análise das hipóteses iniciais da pesquisa serão exploradas no capítulo 4. A análise a posteriori e avaliação, portanto, será desenvolvida no decorrer da análise das sessões de ensino e nas considerações finais deste estudo.

Em linhas gerais, a descrição da aplicação das sessões de ensino, no capítulo 4 deste trabalho, nos fornecerá um terreno fértil para desenvolver a análise a posteriori e avaliação. Neste momento estaremos acompanhando as manifestações dos estudantes, tendo a oportunidade de observar as dimensões epistemológica, cognitiva e didática no processo de ensino e aprendizagem da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida. Em paralelo a isto, ainda, poderemos desenvolver uma confrontação com os dados da análise prévia e assim, de acordo com Paiz (2002), ratificar os resultados da pesquisa.

Além disso, nas considerações finais do trabalho também apresentaremos os resultados decorrentes da confrontação dos dados observados na análise prévia com as informações verificadas na análise a posteriori e avaliação a luz das hipóteses iniciais da pesquisa.

A validação dos resultados pela comparação entre a análise a priori e a análise a posteriori deve, de acordo com Almouloud e Coutinho (2008), enquanto análise das variáveis, ser desenvolvida à luz das três dimensões exigidas pelos pressupostos de uma Engenharia Didática: a epistemológica, a cognitiva e a didática. “Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste” (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p. 66).

Devido a essa validação ser interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada na pesquisa, como argumenta Paiz (2002), o procedimento metodológico da Engenharia Didática fundamenta-se no protocolo de estudos de caso e, assim sendo, “[...] amplia as condições de influência do saber acadêmico na realidade imediata do sistema de ensino” (PAIZ, 2002, p. 104).

Como possibilitar a vinculação do saber acadêmico com o processo de ensino e aprendizagem da educação básica é um dos princípios fundamentais das pesquisas em Educação Matemática, optamos por esse procedimento metodológico. Com isso atendemos ainda a um dos pilares que fundamentam o PROFMAT, qual seja: fortalecer o Ensino da Matemática no ensino básico.

5 DESCRIÇÃO, ANÁLISE E AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A partir do desenvolvimento das entrevistas semi-estruturadas com os estudantes E1, E2 e E5, conseguimos estabelecer um panorama referente ao conhecimento dos estudantes alvos desta pesquisa a respeito da operação de divisão dos números racionais, em particular e sobre o conceito de número racional, em geral.

Ao questioná-los se lembravam quando estudaram fração pela primeira vez, os três foram unânimes em responder que foi na 5ª série/6º ano. O estudante E5 disse que aprendeu por meio de operações, ou seja, foi ensinado com foco exclusivo no método algorítmico. Já os estudantes E1 e E2, por sua vez, salientaram as operações, mas também destacaram a representação das frações por meio de figuras.

Em relação a essas figuras, E1 e E2 deixam bem claro a utilização do modelo parte-todo, no qual faziam a dupla contagem das partes. Nas palavras de E1, as figuras eram:
– *aqueles redondinho assim, aqueles círculos [...], você via lá uma conta, e depois, escrevia.*
Neste caso, a conta era feita relacionando o número de subdivisões da figura (denominador) e o número de subdivisões destacadas (numerador) que era expressa por uma fração. Ou seja, provavelmente eles aprenderam números racionais na forma fracionária com base no modelo parte-todo de superfície (as famosas pizzas), fazendo a dupla contagem das partes.

Esse resultado já era esperado, pois isso também foi observado nos trabalhos de Silva (2005), Damico (2007), NEPEM/USF (2004) e Rodrigues (2005), ao estudarem o ensino dos números racionais na forma fracionária.

Ao ser questionado sobre qual das operações, adição, subtração, multiplicação ou divisão, apresentava mais dificuldade, E1 disse que a divisão era mais complicada, mesmo não sabendo explicar o porquê. Neste ponto, cabe destacar que Santos (2013) argumenta que o conceito de divisão figura entre os mais complexos, com maior grau de dificuldade, para o ensino e aprendizagem dos conceitos de fração e número racional. Apesar dos alunos terem facilidade em aprender o algoritmo da divisão, não conseguem compreender o significado daquela operação.

Na questão seguinte, ao pedir para os discentes representarem a fração $\frac{1}{4}$ por uma figura, o resultado foi a tentativa de construção de um círculo dividido em 4 partes iguais, com uma parte pintada. Os estudantes E1 e E2, conforme Figura 4, conseguiram rapidamente fazer essa representação. Ao ser questionado porque escolheu essa figura, E1 disse:
– *Porque é mais fácil!*
Quando questionado se $\frac{1}{4}$ poderia ser representado por outra figura, E1 afirmou que também poderia ser um retângulo, a mesma figura utilizada por E5.

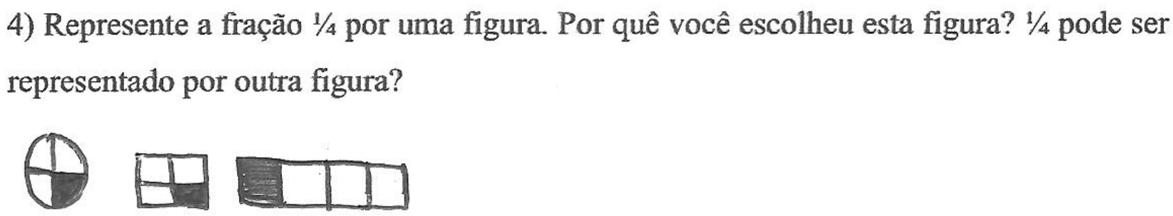


Figura 4: Figuras feitas por E1 para representar $\frac{1}{4}$

Diante disso, podemos inferir que esses estudantes aprenderam os números racionais predominantemente por meio da interpretação parte-todo. Isso também ficou evidente na questão 6, quando pedimos para eles representarem o número 5 por meio de uma figura. Nenhum deles conseguiu. Destacamos que não é possível, por meio da construção de "uma só" figura, utilizando grandezas contínuas e a dupla contagem das partes, fazer uma representação do número racional 5 recorrendo a interpretação parte-todo. Segundo Almouloud e Silva (2008), ao fazer uso de figuras que representam grandezas contínuas, tais como segmentos de reta, círculos e polígonos, na interpretação parte-todo, tem-se:

> [...] a impossibilidade de o resultado ser maior que um inteiro, pois, se para a fração $2/3$, por exemplo, a criança compreende que o inteiro foi dividido em três partes, de mesma área ou "iguais", das quais duas estão sendo consideradas, como explicar a fração $5/3$? Como obter cinco partes se o inteiro foi dividido em três? (ALMOULOUD e SILVA, 2008, p. 59).

Para representar o número 5 utilizando a interpretação parte-todo, explorando grandezas contínuas, o estudante necessitaria de no mínimo um conjunto discreto de cinco figuras, cada uma representando um inteiro. Para tanto, ele precisaria identificar a unidade (o número 1) ao fazer a representação. Porém, conforme observaram Campos e Rodrigues (2007), a compreensão do papel da unidade, no conjunto dos números racionais, é uma dificuldade não superada pelos estudantes durante a formação escolar. De forma semelhante, Damico (2007) concluiu que a não definição da unidade é um dos problemas da aprendizagem dos números racionais.

Apesar de estarmos trabalhando com estudantes do ensino médio, percebemos a dificuldade encontrada por eles para expressar a representação de números racionais maiores que um inteiro. Acreditamos que isso seja devido a uma aprendizagem focada na dupla contagem das partes, ao utilizarem a interpretação parte-todo, pois buscam contar o número de partes do todo e esquecem de levar em consideração a função da unidade como referencial a ser tomado. Conforme observaram Silva (2005) e Escolano e Gaírin (2005), a ênfase exagerada na dupla contagem das partes, no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, pode se constituir em um obstáculo didático, dificultando a aprendizagem do conceito de número racional pelos estudantes.

Na questão 5 perguntamos o seguinte: "o número 0,5 pode ser escrito como fração? Por quê? Qual fração? Posso escrevê-lo como outra fração? Por que isso é possível?" Ao se depararem com tais questionamentos, percebemos a dificuldade dos estudantes em compreenderem a existência de duas representações, a fracionária e a decimal, para um mesmo número racional. Apesar deles três afirmarem positivamente sobre a possibilidade de escrever 0,5 como fração e E1 e E5 optarem pela fração $\frac{1}{2}$ como resultado, somente E1 conseguiu destacar outras forma fracionárias equivalentes, tais como $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}$, etc. Nenhum dos estudantes soube explicar a razão pela qual o número racional decimal 0,5 poder ser escrito na forma fracionária.

Na questão seguinte os estudantes afirmaram que o número inteiro 5 é um número racional e que poderia ser escrito como uma fração. Isso demonstra que eles reconhecem os números naturais e inteiros como números racionais.

Percebemos, na questão 9, em que perguntamos "quem é maior, $\frac{3}{2}$ ou $\frac{3}{4}$? Por quê? Existe algum número entre esses dois?", que os estudantes utilizam as propriedades válidas para os inteiros quando fazem operações com números racionais não inteiros. Somente E2 acertou que $\frac{3}{2}$ é maior que $\frac{3}{4}$, sem a mediação do professor. Os outros dois estudantes disseram que $\frac{3}{4}$ é maior $\frac{3}{2}$, sendo que E1 não soube explicar a razão disso e E5 afirmou que seria porque $4>2$. É interessante notar que Damico (2007) também encontrou respostas parecidas em seus estudos sobre os números racionais. Porém, segundo o autor, esses erros praticamente não acontecem em situações contextualizadas.

Os estudantes também foram questionados a respeito da comparação entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Neste caso, é oportuno salientar que E1 e E5, após responderem corretamente ao pesquisador que $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{4}$, perceberam a relação de ordem envolvendo $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{4}$. Talvez eles tenham errado por influência do gravador ou ainda pela tensão em estar respondendo questões relativas aos números racionais na forma fracionária, haja vista todos afirmarem associar fração a cálculos complicados.

Com o objetivo de averiguar se os estudantes possuíam conhecimento acerca dos números racionais como medida, bem como se eram hábeis para efetuarem a divisão de números

racionais, elaboramos a seguinte questão:
"10) Represente por meio de uma figura e dê o resultado das expressões: a) $\frac{1}{2} \div 2$; b) $4 \div \frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$".

O estudante E5 não conseguiu resolver completamente nenhuma questão enquanto E1 e E2 resolveram completamente somente a primeira. Estes representaram $\frac{1}{2} \div 2$ como ilustrado na Figura 5, encontrando o resultado $\frac{1}{4}$. Vemos assim, a forte influência do modelo parte-todo. Como as questões b) e c) tinham como resultados valores maiores do que a unidade, era

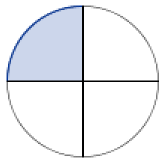


Figura 5: Representação dos alunos para a operação $\frac{1}{2} \div 2$

preciso reconhecer a unidade que serviria de base de comparação com o todo. Ao fazer isso, estariam recorrendo a interpretação de medida de número racional, haja vista que buscariam saber quantas vezes o $\frac{1}{2}$ cabe em 4 e quantas vezes o $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$. Uma possível solução para as letras (b) e (c), utilizado a concepção de medida, recorrendo ao contexto geométrico da representação em segmentos de reta, encontra-se na Figura 6.

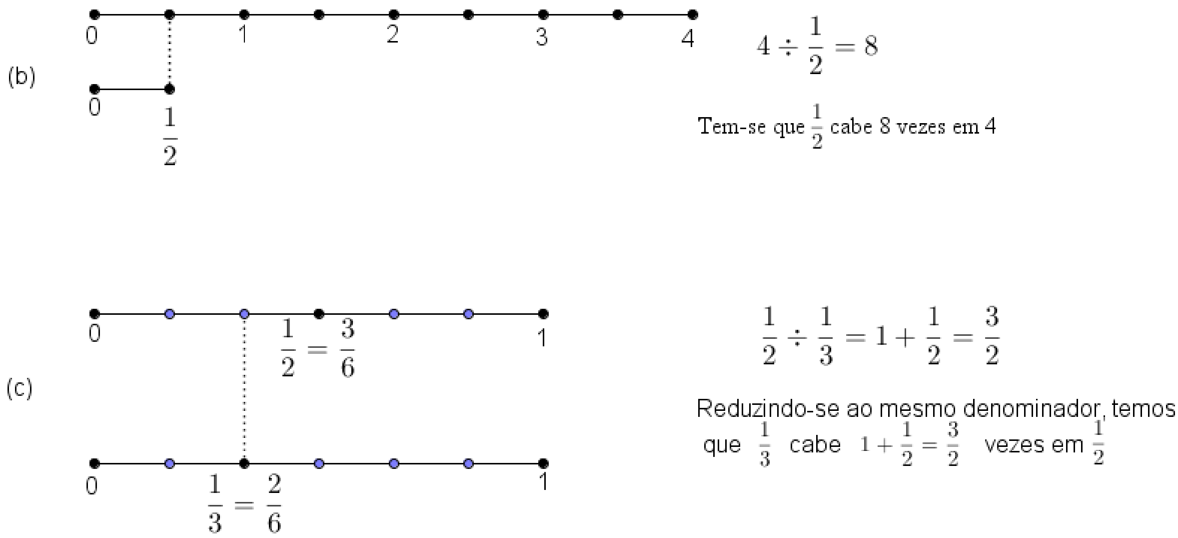


Figura 6: Solução geométrica com segmentos de reta de (b) $4 \div \frac{1}{2}$ **e (c)** $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

Podemos inferir, diante disso, o desconhecimento dos alunos acerca dos números racionais como medida, bem como da divisão desses números à luz da interpretação de medida. A última questão da entrevista semi-estruturada tinha o objetivo de sondar quais os conhecimentos utilizados pelos estudantes ao se depararem com uma questão na qual os números racionais

aparecem em uma contextualização. A pergunta foi:
"Responda: Um agricultor possui 6 silos de ração animal completamente cheios em uma propriedade. Ele vendeu esta propriedade e pretende transferir a ração para outra propriedade que acabou de comprar, mas os silos dessa nova propriedade tem $\frac{3}{4}$ da capacidade dos silos da propriedade vendida. Quantos silos serão necessários para armazenar toda a ração nesta nova propriedade?"

O estudante E2 não conseguiu responder a questão. E5, por sua vez, não conseguiu obter a resposta, mas com o auxílio de uma figura (barra retangular), percebeu que o número de silos aumentaria. Já E1 encontrou a solução correta, isto é, 8 novos silos. Seu argumento foi:
– *Acho que é 8 porque aqui vai ter $\frac{1}{4}$ a menos que no outro silo, por isso ele vai precisar de mais dois silos.*

Nesta questão também notamos, em linhas gerais, a busca dos estudantes por uma representação geométrica envolvendo áreas de figuras congruentes, com um todo dividido em partes iguais, conforme Figura 7, tal como é feito na concepção parte-todo ao representar números racionais. É importante observar, que apesar da possibilidade que os estudantes tinham em desenvolver a representação da figura utilizando a interpretação de medida de número racional, recorrendo a medida de área, não foi esse o raciocínio desenvolvido por eles. O estudante E1, por exemplo, pensou, com base na concepção parte-todo, em representar os seis silos e destacar $\frac{3}{4}$ de cada um. Após isso, interpretou corretamente que cada 3 quadrados, em que o todo foi dividido, correspondia a uma unidade de silo novo. Então fez a contagem. Em nenhum momento o estudante esboçou entender a figura enquanto uma comparação de quantas vezes $\frac{3}{4}$ de uma unidade de área caberiam em seis unidades de área, ou então, quantas vezes $\frac{3}{4}$ cabe em 6.

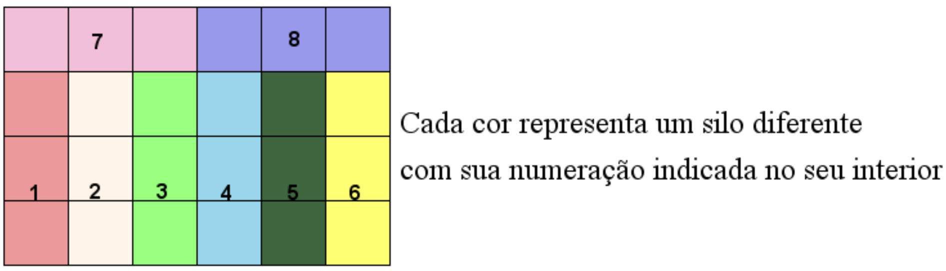


Figura 7: Representação geométrica de superficíe do problema 11

A mesma questão também poderia ser respondida com o auxílio de uma figura que remete à interpretação de medida, conforme Figura 8, ou simplesmente pelo método algorítmico, pois $6 \div \frac{3}{4} = 8$. Isto indica a falta de compreensão do significado da divisão de números racionais assim como o desconhecimento da interpretação como medida dos números racionais. Esta questão passa a ter uma solução como medida quando, conforme a Figura 8, buscamos saber quantas vezes o $\frac{3}{4}$ cabe em 6.

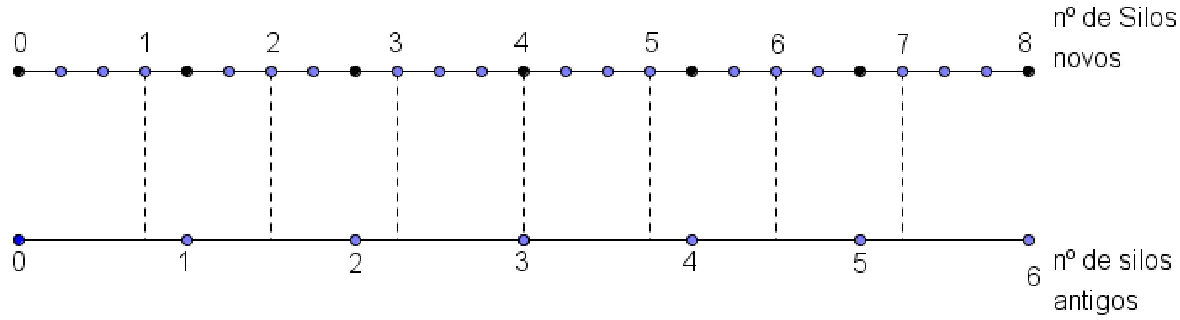


Figura 8: Representação geométrica por segmentos de reta de quantas vezes $\frac{3}{4}$ cabe em 6, remetendo a interpretação da divisão de números racionais como medida

Diante das observações efetuadas nos parágrafos precedentes, a título de fechamento, podemos elencar alguns pontos cruciais:

- Os estudantes não possuem familiaridade com o significado dos números racionais como medida e, em consequência, desconhecem a divisão desses números à luz da interpretação de medida;
- A aprendizagem dos números racionais foi feita, predominantemente, por um ensino baseado na interpretação parte-todo, com atividades de dupla contagem das partes em representações geométricas de superfície;
- O modelo coordenada linear, que estamos considerando como fundamental para o ensino dos números racionais como medida, também não se mostrou significativo no repertório de recursos utilizados pelos estudantes para resolverem as questões. Aliás, nenhum deles fez uso da representação geométrica do segmento de reta;
- Os estudantes apresentaram dificuldade em representar, com figuras, frações maiores que a unidade bem como divisões de números racionais;
- Também demonstraram dificuldade significativa acerca da equivalência de frações, conhecimento de ordem e densidade dos racionais;
- A questão da unidade, ao trabalharem com números racionais, é outro ponto com o qual os estudantes ficam em dúvida, não conseguindo compreender seu significado;
- Por fim, apesar de os estudantes resolverem tarefas nas quais faziam uso dos números racionais e de suas propriedades, eles possuem um conhecimento limitado acerca do con-

ceito de número racional, bem como também é limitado o entendimento do significado das operações elementares com esses números, em especial, a divisão.

Nas páginas seguintes vamos efetuar a descrição e análise do desenvolvimento da sequência didática. Destacamos, ainda, que optamos por não descrever cada questão individualmente. Nos concentramos nos momentos mais importantes relativos ao foco dessa pesquisa. Faremos, então, uma descrição/análise geral de cada sessão de ensino, destacando algumas questões nas quais ocorreram situações de aprendizagem pertinentes aos objetivos do nosso trabalho. Lembramos, ainda, que todas as atividades desenvolvidas nas sessões encontram-se nos apêndices B, C, D e E.

5.1 SESSÃO 1: REVISANDO CONCEITOS INDISPENSÁVEIS PARA ESTUDAR A DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Realizamos a primeira sessão de ensino, que denominaremos de sessão 1 de agora em diante, no dia 19/10/2014. Iniciamos a aula às 07:45min, na sala multiuso do Colégio, com a presença dos estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10. Uma breve conversa, a fim de elucidar possíveis dúvidas acerca da pesquisa, marcou o início da sessão. Os estudantes sentaram-se, lado a lado, bem próximos à lousa. Essa disposição foi escolhida para facilitar a interação dos estudantes no momento de resolver as questões, bem como melhorar a gravação do áudio, pois o gravador estava localizado na mesa do professor.

Iniciamos questionando os estudantes se eles lembravam em qual etapa de ensino (ano/série) tinham estudado os números racionais na forma fracionária pela primeira vez. As respostas foram unânimes, afirmando que havia sido na quinta série/sexto ano. Isto sugere duas coisas. Primeiro, que eles não estudaram fração no primário e, segundo, se estudaram o aprendizado não foi significativo. O estudante E6, oportunamente, mencionou que tem guardado os cadernos do primário, mas que tem muito pouco conhecimento de matemática.

Em seguida, lançamos duas outras perguntas aos estudantes: O que é uma fração? E o que é um número racional? Talvez por ser a primeira sessão ou por não terem certeza das respostas, os estudantes não tentaram respondê-las, reagindo com risos e afirmando não lembrarem. Frente a isso, sentimos a necessidade da realização de uma breve exposição acerca do tema.

Para trabalhar o que é uma fração, lançamos mão de exemplos, escritos na lousa, de números fracionários da forma a/b, com b $\neq$ 0, tais como $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{\sqrt{49}}{7}$, $\frac{25}{25}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\frac{x+5}{2x}$, $\frac{i+4}{3}$, etc. Com isso, assumimos a definição expressa por Niven (2012, p. 26) de que "[...] a palavra fração, sozinha, é usada para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador, como, por exemplo: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{17}{x}$ ou $\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$".

Em relação ao que é um número racional, trabalhamos com recortes da História da Matemática, por meio da exposição oral, acerca da necessidade de medir e, brevemente, concluímos que o corpo[1] dos racionais $\mathbb{Q}$ é, tal como define Niven (2012), $\mathbb{Q}$: $\{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Observamos, neste momento, que não insistimos em explicações referentes ao conceito de número racional, pois a sua aprendizagem é um dos itens importantes para avaliarmos durante o desenvolvimento da sequência didática.

Na sequência, iniciamos o estudo da sessão 1 entregando a atividade 1, conforme apêndice B, em uma folha A4, a cada um dos 10 estudantes. Essa questão remete à interpretação como medida de números racionais por meio da representação geométrica em segmentos de reta. Observamos que os estudantes não sentiram dificuldade para resolver a atividade e, em geral, responderam de forma semelhante à resposta de E3 apresentada na Figura 9.

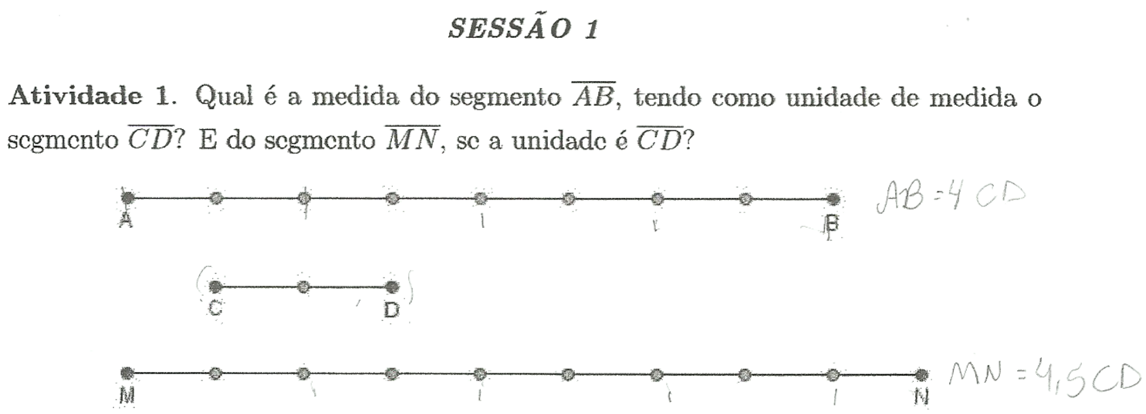


Figura 9: Resposta dada na atividade 1 pelo estudante E3

A atividade 2, conforme apêndice B, por sua vez, conduziu os estudantes a um quadro de incertezas. Em um primeiro momento, ficaram fazendo perguntas ao professor e dizendo que não conseguiriam fazer. Então, frente a esse quadro, optamos por fazer alguns exemplos na lousa. Em seguida, os estudantes concluíram o exercício. Vemos, portanto, que eles não têm familiaridade com o modelo coordenada linear, assim como tínhamos observado na análise prévia.

[1]Corpo é a denominação matemática, em linguagem algébrica, dada a um conjunto munido de duas operações interna, adição "+" e multiplicação "·", que satisfazem uma série de propriedades (comutatividade, associatividade, elementos neutros, distributividade). Uma discussão relevante sobre corpo é apresentada, por exemplo, em Lima (2007) e em Evaristo e Perdigão (2002).

Ainda em relação à atividade 2, é importante observar que três dos dez estudantes usaram a estratégia de expressar os números racionais na forma decimal, conforme Figura 10, para localizá-los no segmento de reta. O estudante E5, apesar de localizar $5/2$ e $-3/2$ no segmento de reta, disse não ser possível fazer isso com $9/4$ e $-7/4$, pois, segundo ele, a reta numérica não continha os números 9 e -7 no intervalo apresentado. Diante disso, percebemos que o estudante não conseguiu identificar $1/4$ como unidade, pois pretendia “ir até o 9 e o -7” contando a unidade $1/2$, seguindo o padrão adotado para $5/2$ e $-3/2$.

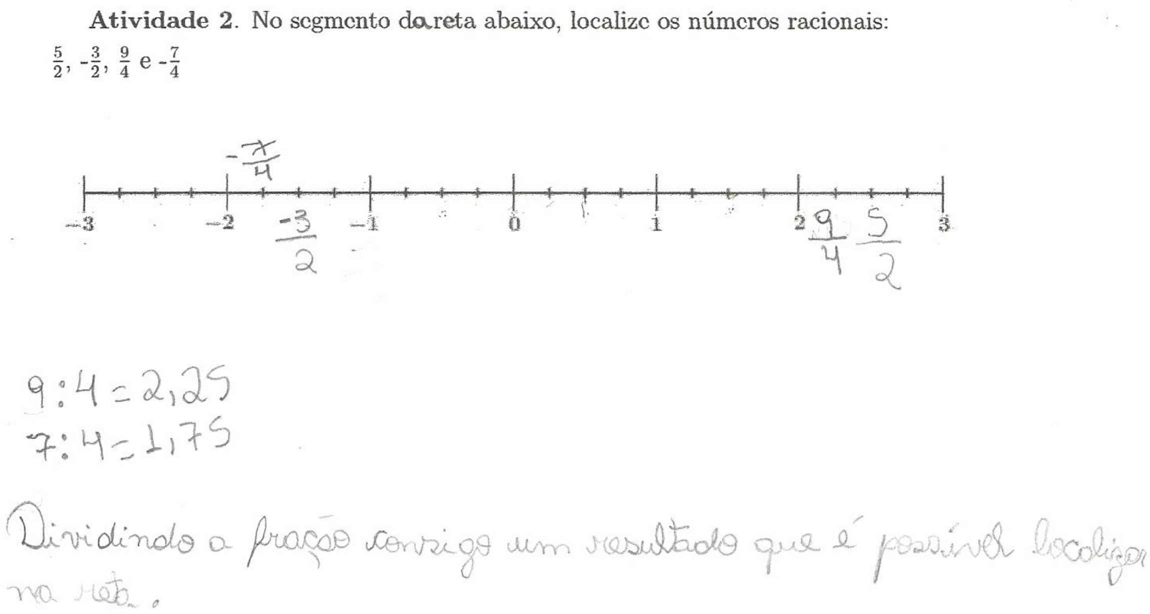
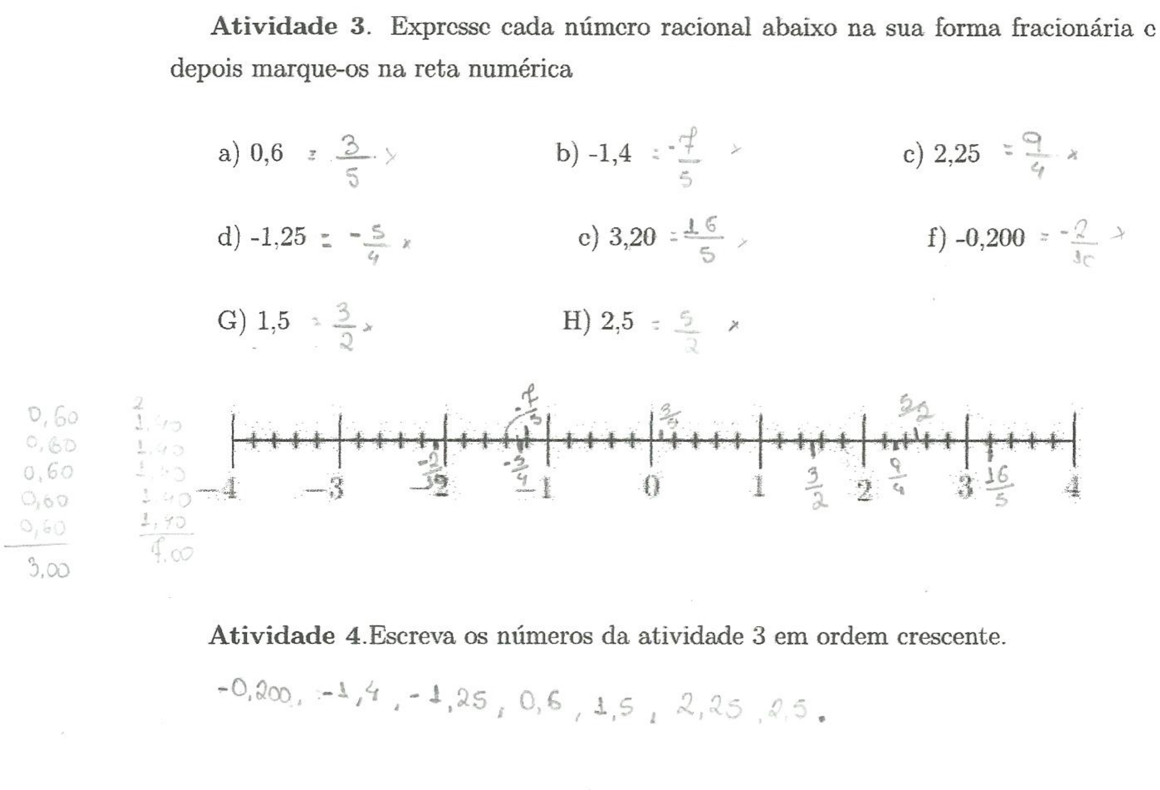


Figura 10: Resposta dada na atividade 2 pelo estudante E2

A dificuldade em reconhecer a unidade na representação geométrica em segmento de reta também foi um dos obstáculos encontrados na resolução da atividade 3 (disponível no apêndice B). Tomando como exemplo a Figura 11, podemos verificar que os estudantes não tinham incorporado essa ideia ao conceito de número racional. Nenhum deles, dentre os dez, acertou a localização de todos os números racionais. Na Figura 11 em questão, vemos que o estudante E1 não conseguiu, na atividade 3, localizar os números das letras a) 0,6 e f) -0,200 corretamente no segmento de reta. Estudos de Campos e Rodrigues (2007) já tinham mostrado que os estudantes não relacionam a ideia de unidade ao conceito de número racional mesmo quando se deparavam com situações simples. Isso, sugerem os autores, demonstra que o sujeito ainda não se apropriou do conceito de número racional.

Também observamos, com a atividade 3, que os estudantes não sabiam como transformar um número racional escrito na forma decimal para a forma fracionária. Somente um estudante, E1, que fez a transformação registrada na Figura 11, tinha um método para reali-



Atividade 3. Expresse cada número racional abaixo na sua forma fracionária e depois marque-os na reta numérica

a) 0,6 = $\frac{3}{5}$ b) -1,4 = $-\frac{7}{5}$ c) 2,25 = $\frac{9}{4}$

d) -1,25 = $-\frac{5}{4}$ e) 3,20 = $\frac{16}{5}$ f) -0,200 = $-\frac{2}{10}$

G) 1,5 = $\frac{3}{2}$ H) 2,5 = $\frac{5}{2}$

−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4

Atividade 4.Escreva os números da atividade 3 em ordem crescente.

-0,200 , -1,4 , -1,25 , 0,6 , 1,5 , 2,25 , 2,5 .

Figura 11: Resposta de E1 as atividades 3 e 4

zar a atividade, mas não sabia explicar porque funcionava. Seu método consistia em somar o número decimal com ele mesmo e, caso o resultado fosse um número não inteiro, somava esse valor com o número decimal novamente; caso o resultado fosse não inteiro, repetia o processo até que o resultado fosse um número inteiro. Feita a interação, o número de parcelas somadas iguais ao número decimal inicial é o denominador da fração e o inteiro resultante da soma é o numerador.

Vejamos com um exemplo. Transformar 0,6 em fração. Conforme o método do estudante: $\underbrace{0,6+0,6+0,6+0,6+0,6}_{5} = 3$. Logo, $0,6 = \frac{3}{5}$. Generalizando, temos: Seja D o número decimal que queremos transformar em fração, x o número de parcelas iguais a D e y o número inteiro obtido com a soma das parcelas, então $xD = y$. Portanto, como $x \neq 0$, segue que $D = \frac{y}{x}$. Isso explica porque o método é válido.

Como apenas este estudante estava conseguindo expressar os números racionais da atividade 3 na forma fracionária, optamos em trabalhar com os estudantes um processo bastante conhecido para desenvolver este tipo de tarefa. Vamos descrever aqui uma generalização do processo que, durante a aula, trabalhamos com exemplos numéricos, utilizando a lousa como apoio pedagógico. Considere um número racional

$$D = A, a_1 a_2 \cdots a_n \overline{b_1 b_2 \cdots b_m}$$

em que, valendo-se da notação mais usual de dízima periódica, A é a parte inteira, $a_1 a_2 \cdots a_n$ são os algarismos do anteperíodo e $\overline{b_1 b_2 \cdots b_m}$ é o período. Então, multiplicando D por 10^{n+m} e também por 10^n, obtemos

(i) $10^{n+m} D = A a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m + 0, \overline{b_1 b_2 \cdots b_m}$

(ii) $10^n D = A a_1 a_2 \cdots a_n + 0, \overline{b_1 b_2 \cdots b_m}$

Tomando a diferença entre (i) e (ii), membro a membro, temos
$(10^{n+m} - 10^n) D = A a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$ - $A a_1 a_2 \cdots a_n$ de tal forma que

(iii) $D = \dfrac{A a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m - A a_1 a_2 \cdots a_n}{10^{n+m} - 10^n}$

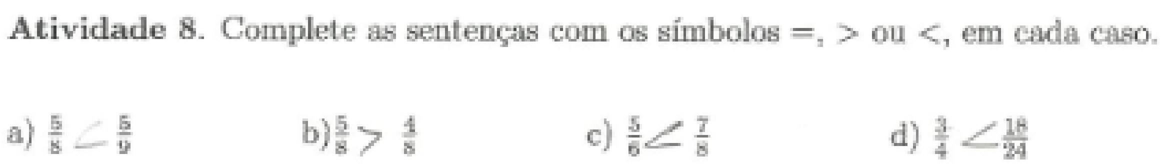
Portanto, como o numerador de (iii) é um número inteiro (pois é a diferença de dois números inteiros) e o denominador de (iii) é um número natural, obtemos o decimal D na forma fracionária.

Ao analisarmos a Figura 11 vemos, na resolução da atividade 4, que o estudante E1 considerou -0,200 menor do que -1,4. Talvez tenha cometido esse erro por ter posicionado $-0,200 = -2/10$ de forma incorreta no segmento de reta da atividade 3. Porém, como a maior parte dos estudantes escreveu que 2,25 é maior que 2,5, seguindo o padrão dos números naturais de que 25>5, pode ser que E1 tenha considerado o fato de que -200 é menor do que -4. Isto mostra, assim como observou Damico (2007), a tendência dos sujeitos que ainda não se apropriaram do conceito de número racional em ordená-los como se fossem números naturais.

Frente a esta situação, decidimos trabalhar os conceitos de modo mais aprofundado com os estudantes. Para isso, recolhemos as folhas com suas respostas e, utilizando a lousa, começamos a discutir questões acerca do tema. Trabalhamos a representação geométrica em segmento de reta dos números racionais e a sua ordenação.

A resolução das atividades 5 a 10, da sessão 1, ocorreu com maior autonomia e segurança por parte dos estudantes. Nas atividades 5 e 6, conforme apêndice B, eles teriam que utilizar conhecimentos acerca da equivalência de números racionais para solucioná-las. Observando os estudantes, e acompanhando seus raciocínios, percebemos as dificuldades inerentes ao conceito de equivalência. Muitos deles compreendiam o conceito, mas não logravam êxito na solução da questão devido, via de regra, a dificuldades decorrentes da falta de conhecimento da tabuada. Em uma “aula normal” de 50 minutos, com mais de 30 alunos presentes, como ocorre na maioria das escolas públicas do Brasil, dificilmente poderíamos auxiliar esses estudantes com a qualidade e atenção dedicada durante a aplicação dessa sessão de ensino.

Uma ilustração esclarecedora desse nosso discurso pode ser acompanhada na solução da atividade 8, conforme Figura 12, apresentada pelo estudante E9. Examinando suas respostas, notamos que E9 comparou os números racionais fracionários como se fossem números naturais. Situação semelhante foi registrado nas pesquisas de Damico (2007). Dessa forma, E9 concluiu que $\frac{5}{8}$ é menor que $\frac{5}{9}$ por extensão do conceito de ordem dos números naturais, onde 9 é maior do que 8. Nos itens (b) e (c), apesar do estudante E9 ter acertado a resposta, tomou por base ideia análoga. Porém, como nenhum dos 10 estudantes acertou o item $d)\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$, vemos o quanto ainda esta confuso a diferenciação entre os números racionais e os números inteiros para esses sujeitos.



Atividade 8. Complete as sentenças com os símbolos $=$, $>$ ou $<$, em cada caso.

a) $\frac{5}{8} < \frac{5}{9}$ b) $\frac{5}{8} > \frac{4}{8}$ c) $\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$ d) $\frac{3}{4} < \frac{18}{24}$

Figura 12: Resposta de E9 a atividade 8

Esse resultado nos obrigou a dedicar um tempo maior de trabalho com frações equivalentes pois, conforme Garcez (2013), este é um conhecimento fundamental para se aprender o conceito de número racional. Seguindo orientações do trabalho de Garcez (2013), focamos nossa atenção em atividades acerca da definição: dados $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ com b e $d \neq 0$, a/b e c/d são equivalentes se e somente se $ad = bc$.

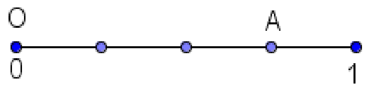
5.2 SESSÃO 2: REVISANDO OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

Organizamos a sessão 2 com atividades para trabalharmos a adição e subtração de números racionais e outras para discutirmos a operação de multiplicação desses números. Salientamos, ainda, que a maioria das atividades remetem à interpretação dos números racionais como medida por meio da utilização da representação geométrica do segmento de reta.

A realização da sessão 2 foi feita dia 05/11/2014 e compareceram os estudantes E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11 e E12. Nesta sessão, faltou o estudante E5 e compareceram E11 e E12, que não haviam participado da sessão anterior.

Antes de entregar a folha contendo as atividades, indagamo-los a respeito da necessidade da realização de uma revisão da aula anterior. Eles preferiram iniciar a sessão 2 sem essa introdução. Porém, após iniciarem a resolução, com o surgimento de dúvidas, pediram para o professor explicar.

Nesta momento, sentimos a necessidade de trabalhar, na lousa, um exemplo análogo à atividade 1, o qual apresentamos na Figura 13; pois percebemos o constrangimento dos estudantes em não lembrarem como solucionar a questão. Assim, pensando no desenvolvimento das outras atividades, atendemos ao pedido dos estudantes na intenção de transmitir-lhes tranquilidade e confiança. Como veremos adiante, os estudantes se envolveram com as atividades e, de um modo geral, demonstraram maior confiança para abordarem as questões, tentando solucioná-las.



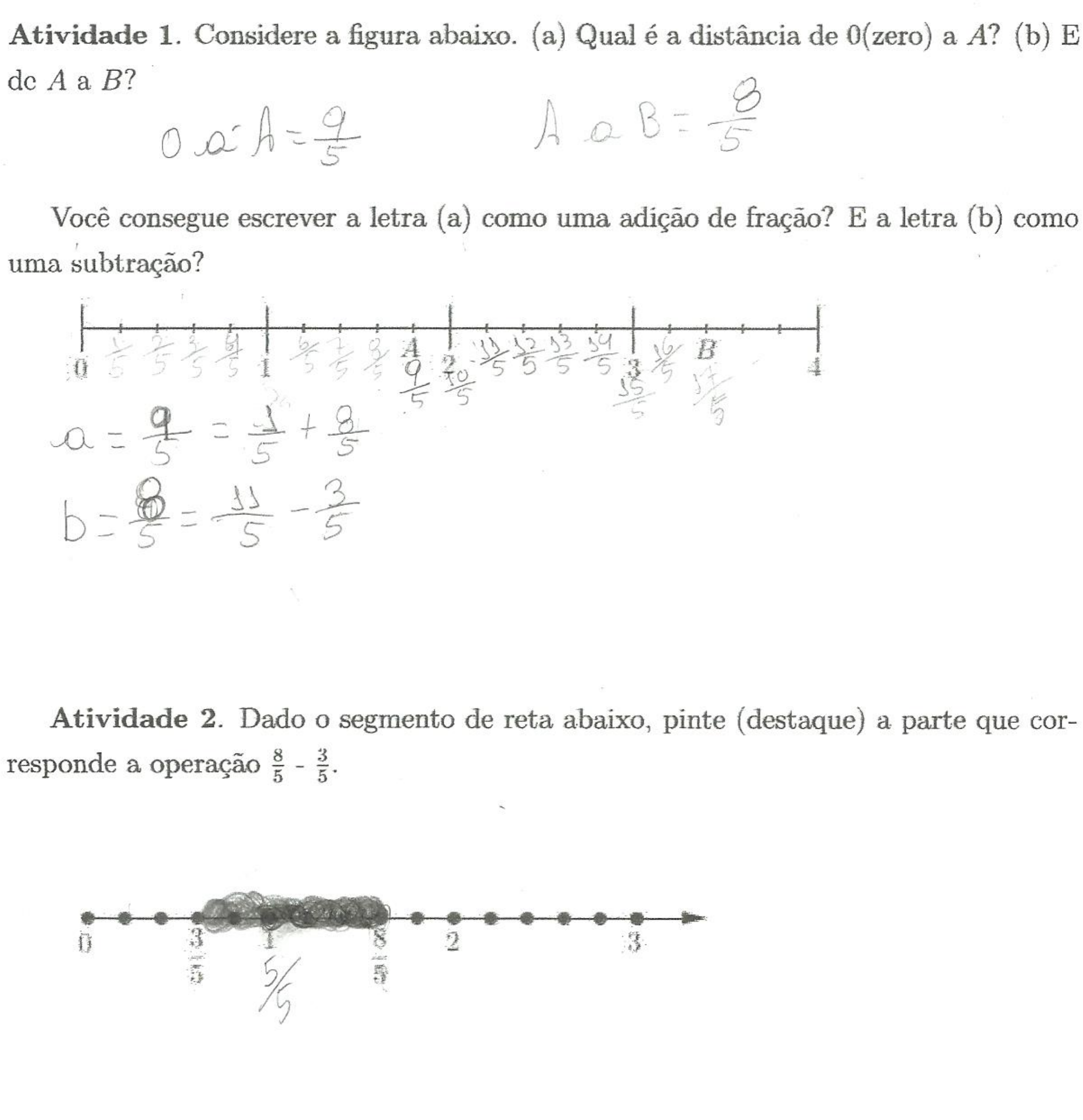
$$d(O,A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Figura 13: Ilustração do cálculo da distância entre os pontos O e A.

Após o exemplo trabalhado na lousa, os estudantes resolveram as atividades 1 e 2. Observando a Figura 14 vemos que o estudante E11 conseguiu solucionar as atividades propostas. Na atividade 1, o caminho adotado por E11 foi expressando $d(A,B) = b = \frac{8}{5} = \frac{11}{5} - \frac{3}{5}$ ao invés de considerar $d(A,B) = \frac{17}{5} - \frac{9}{5} = \frac{8}{5}$, utilizando os dados da própria questão. Aliás, nenhum dos estudantes fez dessa mesma forma. Isso confirma, em tese, os dados da análise prévia de que os estudantes não possuem familiaridade acerca do estudo de números racionais por meio da representação geométrica em segmento de reta, isto é, utilizando o modelo de coordenada linear. Na visão de Amorim (2007), a ausência do uso do viés geométrico por segmento de reta no ensino dos números racionais, principalmente no Ensino Fundamental, acaba privando os estudantes de apreenderem esse conceito de modo significativo.

Ainda acerca dessas atividades, percebemos que os estudantes E11 e E12, que não participaram da sessão 1 de ensino, tiveram muitas dificuldades para resolver as questões. Eles precisaram contar com o apoio dos demais estudantes bem como com a mediação do professor para iniciarem a resolução e, mesmo assim, não conseguiram executar a tarefa com êxito.

Em relação à atividade 2, conforme Figura 14, a maioria dos estudantes conseguiu desenvolver a resolução geométrica decorrente da operação $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}$. Alguns deles, no entanto, confirmando os dados obtidos na análise prévia, demonstraram insegurança no momento de associar pontos do segmento de reta a números racionais. O desenvolvimento da atividade propiciou, de certo modo, um contexto interessante para discutirmos esse tópico com os estudantes. Conseguimos, em linhas gerais, realçar os números racionais como medida e trabalhar a habilidade destes estudantes no tocante à associação entre números racionais e pontos da reta, ou seja, como coordenada linear.


Atividade 1. Considere a figura abaixo. (a) Qual é a distância de 0(zero) a A? (b) E dc A a B?

0 a A = $\frac{9}{5}$ A a B = $\frac{8}{5}$

Você consegue escrever a letra (a) como uma adição de fração? E a letra (b) como uma subtração?

a = $\frac{9}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}$

b = $\frac{8}{5} = \frac{11}{5} - \frac{3}{5}$

Atividade 2. Dado o segmento de reta abaixo, pinte (destaque) a parte que corresponde a operação $\frac{8}{5}$ - $\frac{3}{5}$.

Figura 14: Respostas de E11 às atividades 1 e 2 da sessão 2

Depois de recolher as atividades 1 e 2, entregamos outra folha com a atividade 3, conforme apêndice C, a qual foi resolvida pelos estudantes com uso de régua graduada. Logo que iniciaram a resolução, eles estabeleceram uma discussão acerca de como proceder para resolver a atividade. Não interferimos, deixando aberta a possibilidade para construírem um caminho, mesmo que coletivo, autônomo. Apenas os estudantes E8 e E12 não conseguiram resolver o item (a) da atividade sem a mediação do professor.

Resumidamente, os estudantes discutiam como fazer a medida dos segmentos com a régua graduada. Apesar de terem desenvolvido a habilidade em reconhecer os números racionais como medida, muitos deles apresentavam dúvidas acerca de como fazer para medir com esse instrumento de medida. Por meio da observação do diálogo entre eles, conseguimos perceber que foi uma surpresa, para alguns deles, o fato de metade do segmento mais um sexto do mesmo segmento resultar em dois terços deste segmento.

Ainda assim, no item c da atividade 3, os estudantes precisaram da mediação do professor. Frente às suas indagações, optamos por apresentar um exemplo análogo, conforme Figura 15, pois os estudantes estavam confusos e sem saber como representar um múltiplo inteiro comum aos denominadores das frações no segmento de reta.

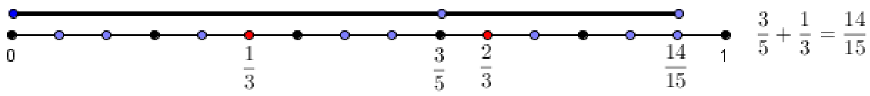
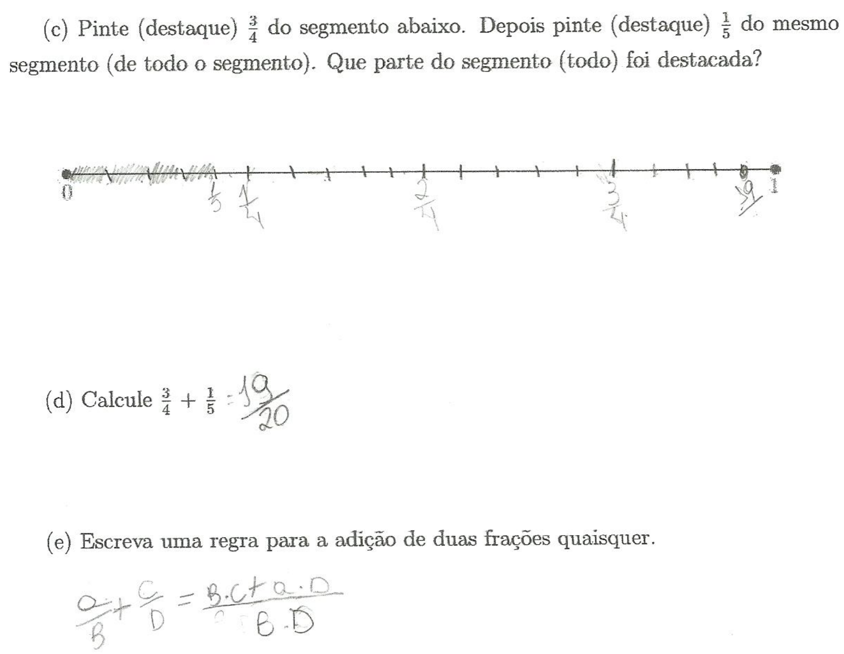


Figura 15: Representação da adição de números racionais fracionários

Depois disso, a maioria deles realizou a atividade corretamente, assim como podemos visualizar na Figura 16.


(c) Pinte (destaque) $\frac{3}{4}$ do segmento abaixo. Depois pinte (destaque) $\frac{1}{5}$ do mesmo segmento (de todo o segmento). Que parte do segmento (todo) foi destacada?

(d) Calcule $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ = $\frac{19}{20}$

(e) Escreva uma regra para a adição de duas frações quaisquer.

$\frac{a}{B} + \frac{c}{D} = \frac{B \cdot c + a \cdot D}{B \cdot D}$

Figura 16: Resposta do estudante E7 aos itens (c), (d) e (e) da atividade 3 da sessão 2

Ainda, observando a Figura 16, vemos a resposta do estudante E7 em relação ao item (e) da atividade 3. Os estudantes escreveram a seguinte regra para a adição de duas frações quaisquer : “Multiplica os denominadores, obtendo o denominador e, para obter o numerador, multiplica cruzado e soma". É importante observar que eles chegaram a tal conclusão observando o item (c) da atividade (3), pois, como afirmou E1: – *a figura ajuda a entender.* Isso corrobora, em linhas gerais, os resultados de Amorim (2007) acerca da importância do uso de segmentos de reta para ensinar as operações com números racionais aos estudantes.

Novamente, ao resolverem as atividades 4 e 5, que recorrem a interpretação da medida para representar a operação de multiplicação de números racionais, alguns estudantes ficaram surpresos ao visualizarem que $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Denotamos, com base nisso, caso não tivessem construído a figura, para muitos destes estudantes $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ continuaria sendo simplesmente uma multiplicação entre frações, seguindo um regra sem significado algum. Apesar de saberem a técnica e a utilizarem sempre que necessário, eles não entendiam as razões matemáticas que explicavam aquela operação. Vemos, portanto, que utilizar a concepção de medida dos números racionais, associando o enfoque geométrico, é um meio eficaz para tornar a aprendizagem dos estudantes mais eficiente no que se refere às operações com números racionais.

Como estamos trabalhando com estudantes do Ensino Médio, isso evidencia a necessidade destes conceitos serem trabalhados nesta fase escolar, pois os estudantes não possuem maturidade para aprofundar estes estudos no Ensino Fundamental.

Também observamos, com a atividade 6, a maior familiaridade dos estudantes para lidar com a representação de números racionais por meio de áreas de figuras planas, assim como podemos visualizar na solução de E4, apresentada na Figura 17.

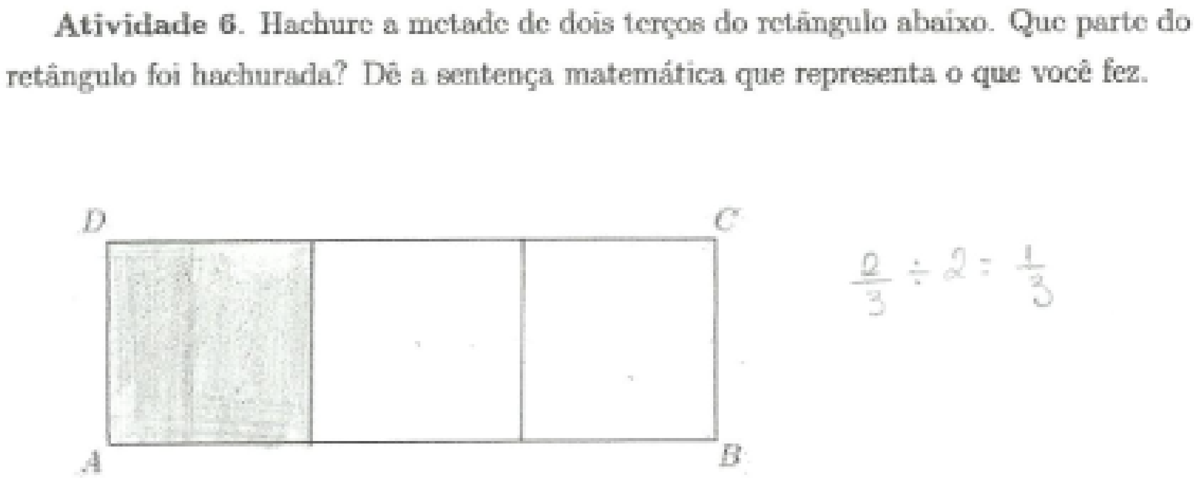


Figura 17: Resposta de E4 à atividade 6 da sessão 2.

Nos surpreendeu o fato de os estudantes terem apresentado a sentença matemática $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$, haja vista não termos trabalhado com a operação de divisão. Esperávamos como resposta a sentença $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Acreditamos que o enunciado da atividade, "hachure a metade de

...", tenha influênciado nesta decisão, pois os estudantes associaram, corretamente, metade com o fato de dividir por 2.

Diferentemente da questão 6, a atividade 7 mostrou-se mais complexa para os estudantes. Encontrar $\frac{2}{3}$ do segmento, conforme Figura 18, foi fácil. Porém, muitos encontraram dificuldades para "pintar" $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, demonstrando não conseguirem interpretar o $\frac{2}{3}$ como a unidade (todo). Só após trocarem informações entre eles e com a mediação do professor, conseguiram fazer isso. No entanto, somente o estudante E1 expressou, de acordo com a Figura 18, a operação corretamente; escrevendo $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. Outros três estudantes afirmaram corretamente que a operação era $3 \cdot \frac{1}{6}$, mas não escreveram nas suas folhas.

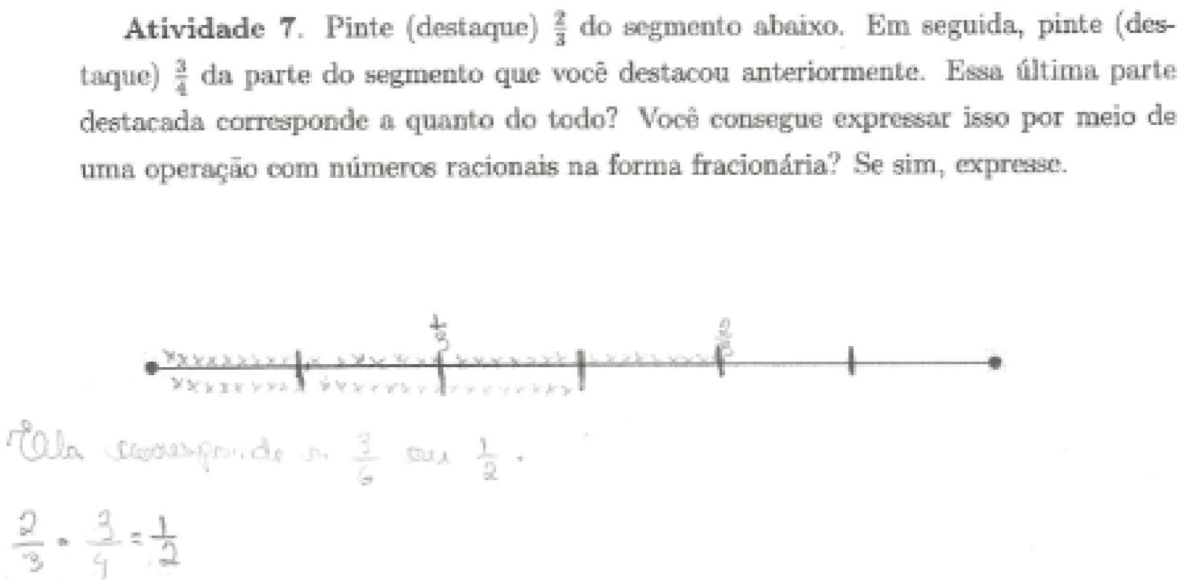
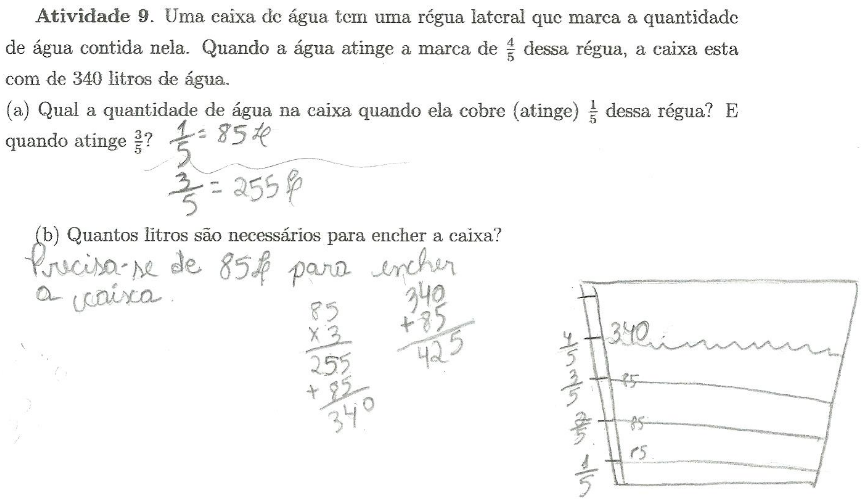


Figura 18: Resposta de E1 à atividade 7 da sessão 2.

Ao se depararem com as atividades 8 e 9, da sessão 2, conforme apêndice C, os estudantes encontraram duas situações contextualizadas envolvendo números racionais. Confirmando a observação de Damico (2007), de que situações contextualizadas ajudam os estudantes a compreenderem melhor os conceitos formais de números racionais, todos eles conseguiram resolver corretamente as atividades.

Em relação à atividade 9, a qual emprega a concepção de medida de número racional em uma situação problema, a solução apresentada na Figura 19, pelo estudante E10, acabou nos revelando um erro conceitual da questão. Deveria ficar explícito que a caixa tinha o formato de um cubo (ou de um paralelepípedo reto ou cilindro reto) pois, sem essa condição, a resposta poderia não ser precisa, não sendo possível determinar a quantidade de água em litros. Outra opção, seria mencionar que intervalos iguais da régua medem, na caixa, quantidades iguais de água.


Atividade 9. Uma caixa de água tem uma régua lateral que marca a quantidade de água contida nela. Quando a água atinge a marca de $\frac{4}{5}$ dessa régua, a caixa esta com de 340 litros de água.

(a) Qual a quantidade de água na caixa quando ela cobre (atinge) $\frac{1}{5}$ dessa régua? E quando atinge $\frac{3}{5}$? $\frac{1}{5} = 85\ell$

$\frac{3}{5} = 255\ell$

(b) Quantos litros são necessários para encher a caixa?

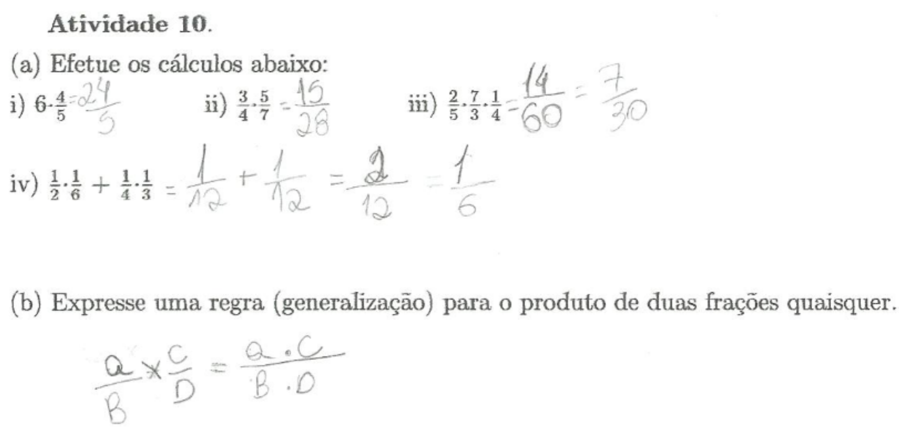
Precisa-se de 85ℓ para encher a caixa.

$85 \times 3 = 255$, $255 + 85 = 340$; $340 + 85 = 425$

Figura 19: Resposta de E10 à atividade 9 da sessão 2.

Quanto ao desenho feito pelo estudante, conforme Figura 19, este apresenta um erro comum e recorrente, segundo Garcez (2013), que os estudantes cometem por não se preocuparem com a divisão da figura em partes com áreas congruentes. Fruto da concepção parte-todo, os estudantes se preocupam com a contagem do número de partes, mas ignoram a congruência entre elas. Neste caso, como a congruência não é possível no desenho, deveria-se buscar a equivalência entre as áreas de cada subdivisão.

Por fim, demonstrando que os estudantes se apropriaram das operações com números racionais trabalhados na sessão 2, todos concluíram a atividade 10. Esse fato pode ser visualizado na Figura 20. A única dificuldade, que foi superada com a mediação do professor, foi no momento de generalizar o produto entre duas frações quaisquer.


Atividade 10.

(a) Efetue os cálculos abaixo:

i) $6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ ii) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$ iii) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$

iv) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

(b) Expresse uma regra (generalização) para o produto de duas frações quaisquer.

$\frac{a}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{a \cdot C}{B \cdot D}$

Figura 20: Resposta de E9 à atividade 10 da sessão 2.

5.3 SESSÕES 3 E 4: OBSERVANDO SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM DA DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Vamos descrever algumas de nossas observações quanto à divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida. Para tanto, exporemos as aplicações das sessões 3 e 4, de nossa sequência didática, as quais podem ser visualizadas nos apêndices D e E, respectivamente.

A sessão 3 contou com a presença dos estudantes E1, E2, E4, E5, E7, E8, E9, E11 e E12 e ocorreu na biblioteca do Colégio Estadual Gabriela Mistral. Devido à organização deste local, e com base nos resultados das sessões precedentes, propusemos aos alunos a ocupação das mesas da sala em duplas ou em trios, facilitando a circulação do professor, as trocas de informações entre eles e a gravação do áudio da aula.

Repetindo o enredo da sessão 2, os estudantes descartaram a necessidade de revisão dos tópicos trabalhados anteriormente, optando por iniciarem logo a resolução das atividades da sessão 3. Frente a isso, entregamos uma folha A4 a cada um deles com as atividade 1 e 2.

A atividade 1 da sessão 3, como podemos visualizar na Figura 21, remete à interpretação de repartição em partes iguais, pois foi dada a grandeza total (40 bolitas) e o número de partes (8 amigos), devendo o estudante responder qual o tamanho de cada parte (com quantas bolitas cada amigo ficará). A solução aritmética não representou dificuldade para os estudantes. No entanto, a representação da situação em uma figura motivou o surgimento de dúvidas, as quais foram superadas pelo diálogo entre eles próprios.

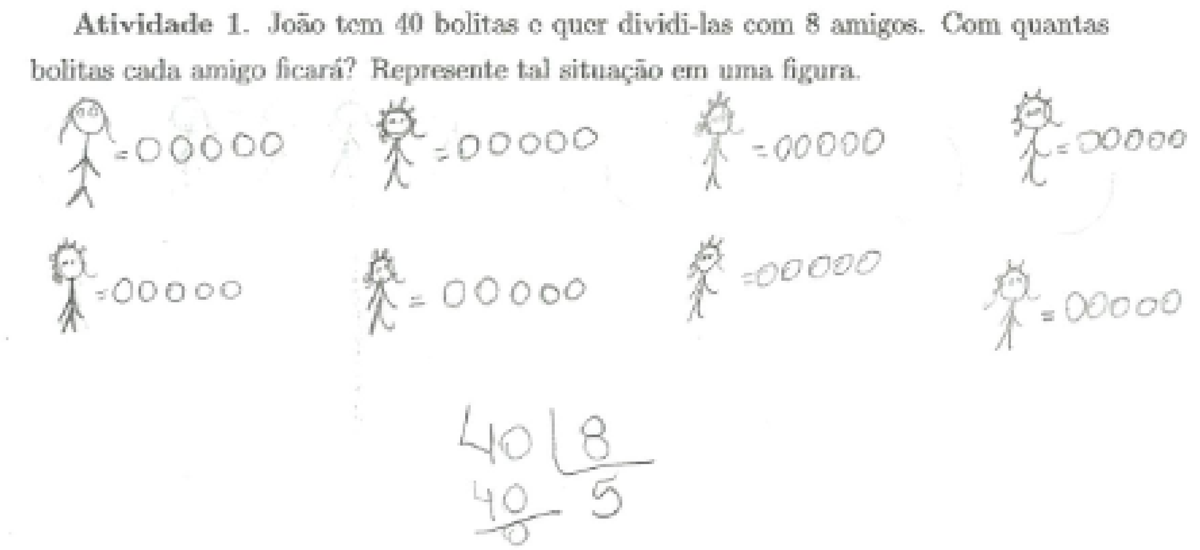


Figura 21: Resposta de E7 à atividade 1 da sessão 3.

Esse resultado já era esperado pois, como vimos na análise a priori, os estudantes aprenderam números racionais no Ensino Fundamental com um enfoque mediado pela concepção parte-todo e, diante disso, não se defrontaram com situações nas quais teriam que representar, por figuras, frações impróprias como $\frac{40}{8}$. Além disso, Rodrigues (2005) argumenta que questões relativas às grandezas discretas permanecem incompreendidas para muitos sujeitos ao longo do processo de escolarização, sendo tratadas apenas como o quociente entre os valores numéricos dados na questão; assim como procederam os estudantes alvos da nossa pesquisa nesta atividade.

Os estudantes se depararam com uma interpretação desconhecida da operação de divisão de números racionais ao tentarem resolver a atividade 2. Então, com a mediação do professor, conseguiram fazê-la; como podemos observar na Figura 22.

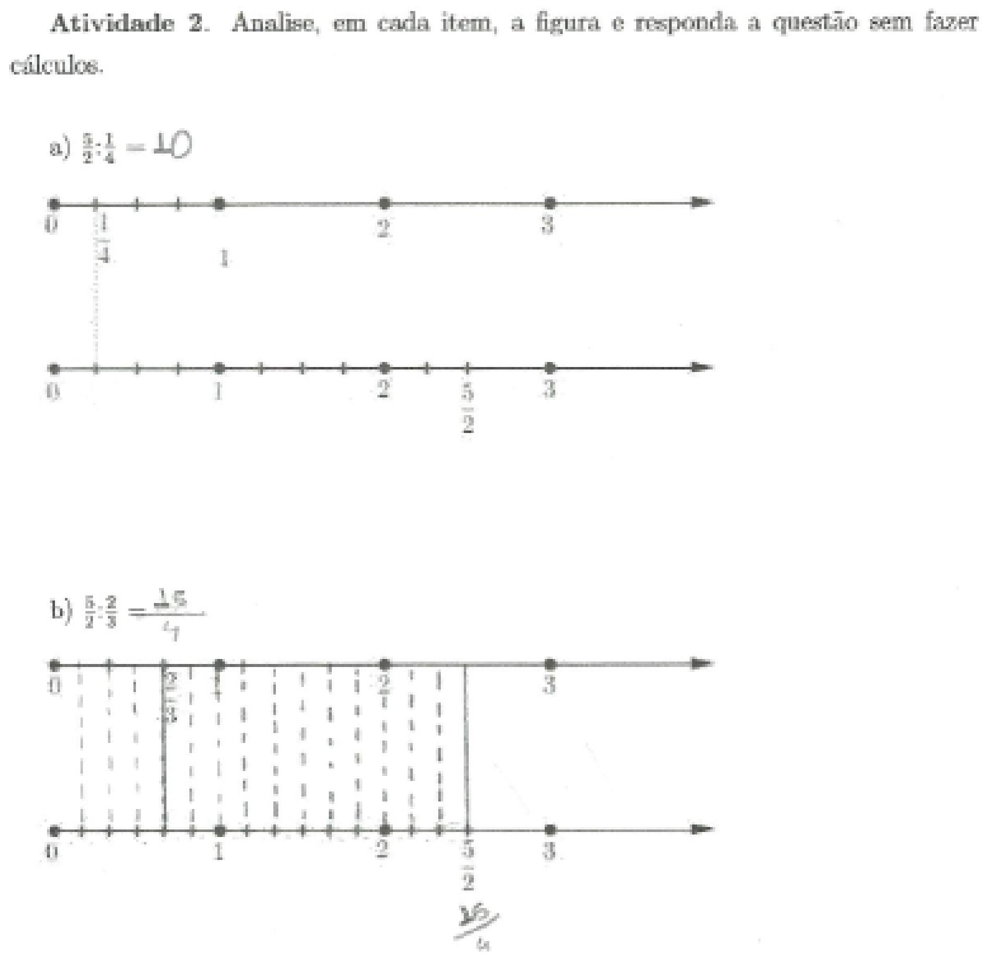


Figura 22: Resposta de E2 à atividade 2 da sessão 3.

Reparem que no item (a), conforme Figura 22, os estudantes precisavam comparar o todo (segmento de comprimento $\frac{5}{2}$) com a unidade de medida (segmento de comprimento $\frac{1}{4}$) para obter a divisão $\frac{5}{2} \div \frac{1}{4} = 10$. Alguns deles ficaram surpresos com o fato de $\frac{1}{4}$ caber 10 vezes em $\frac{5}{2}$. Já no item (b), como vemos na Figura 22, os estudantes precisaram encontrar uma unidade de medida da qual $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ possuíssem múltiplos inteiros. Então, subdividindo o segmento de comprimento $\frac{1}{2}$ em 3 e o segmento de comprimento $\frac{1}{3}$ em 2, encontraram que $\frac{2}{3}$ cabe $\frac{15}{4}$ de vezes em $\frac{5}{2}$, isto é, $\frac{5}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{15}{4}$. Entender como fazer essa operação não foi tarefa fácil para muitos dos estudantes participantes da pesquisa, porém todos apresentaram uma satisfação por conseguirem ampliar o entendimento do significado da operação de divisão de frações.

Isso ficou ainda mais latente com a resolução da atividade 3. Todos os estudantes conseguiram cumprir o item (a), semelhante à resposta visível na Figura 23. Porém, na parte (b), alguns encontraram dificuldade para compreenderem $\frac{3}{4}$ como a unidade de medida e, em decorrência disso, expressaram $\frac{7}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{14}{4}$ ao invés de $\frac{7}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{14}{3}$, que seria a resposta correta. Para resolver acertadamente o item (b), os estudantes precisavam compreender, como fez E11, cuja resposta está ilustrada na Figura 23, que $\frac{1}{4}$ de 1 é igual a $\frac{1}{3}$ quando $\frac{3}{4}$ é tomado como unidade de medida.

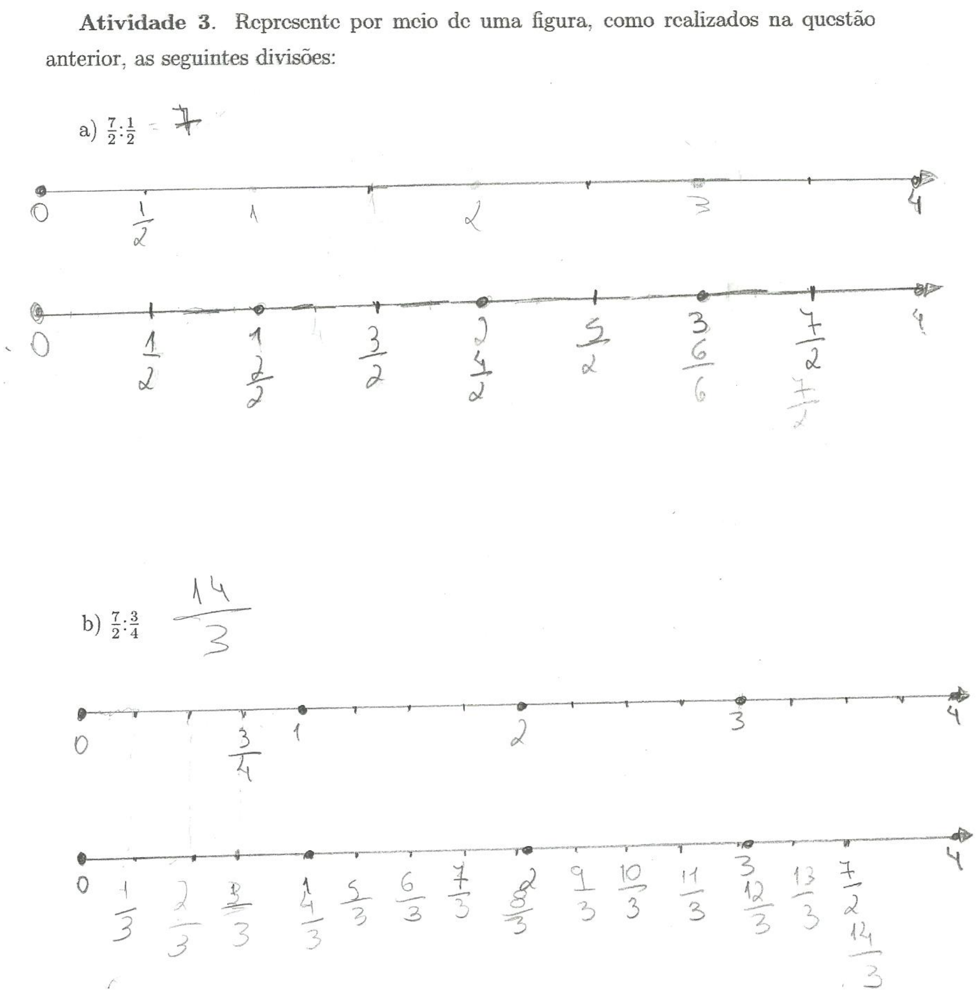


Figura 23: Resposta de E11 à atividade 3 da sessão 3

Mudando o enfoque, mas não a concepção, as atividades 4 e 5 remetem à interpretação da operação de divisão de frações como medida num contexto de situação-problema. É interessante o saldo positivo dessas atividades, haja vista todos os estudantes terem conseguido solucioná-las corretamente. Isso reforça, assim como considera Damico (2007), o papel facilitador das atividades contextualizadas para a efetivação de uma aprendizagem significativa dos estudantes. Segundo o autor, a contextualização ajuda na compreensão dos estudantes acerca da questão.

Outro ponto de destaque, em relação às atividades 4 e 5, é referente a figura construída para representar a situação. Cinco estudantes optaram por figuras de áreas congruentes, assim como o estudante E4 na Figura 24; enquanto os outros quatro estudantes utilizaram o modelo linear do semento de reta, como o estudante E5 na Figura 25. Isto sugere um avanço no entendimento sobre a operação de divisão de frações, pois todos conseguiram construir uma representação apropriada da situação-problema.

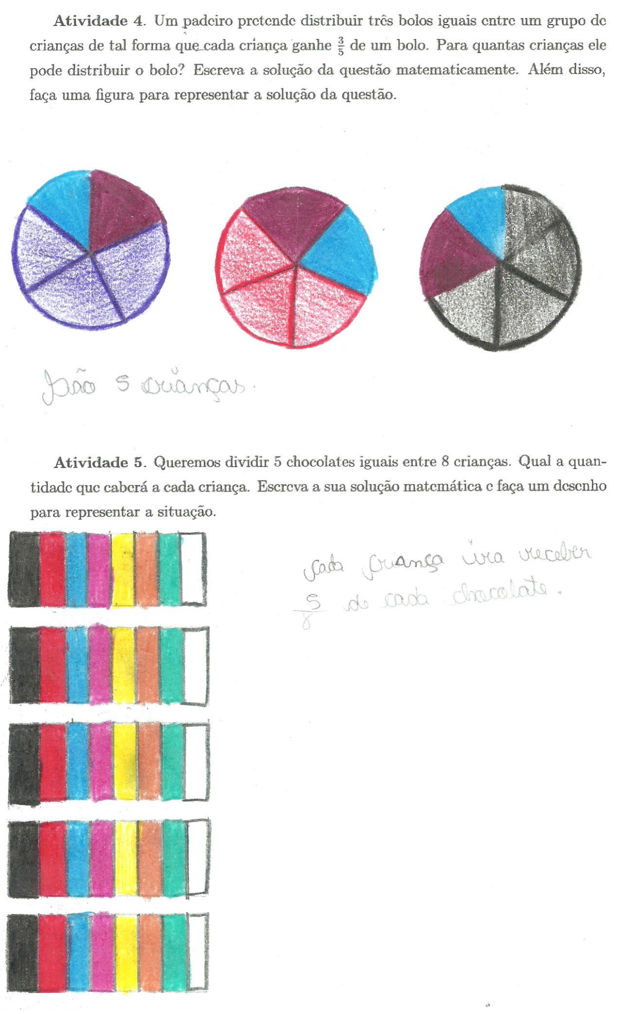
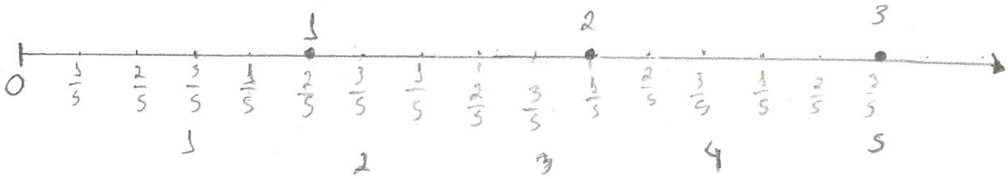


Figura 24: Respostas baseadas em áreas congruentes às atividades 4 e 5 da sessão 3 de E4

Atividade 4. Um padeiro pretende distribuir três bolos iguais entre um grupo de crianças de tal forma que cada criança ganhe $\frac{3}{5}$ de um bolo. Para quantas crianças ele pode distribuir o bolo? Escreva a solução da questão matematicamente. Além disso, faça uma figura para representar a solução da questão.



Atividade 5. Queremos dividir 5 chocolates iguais entre 8 crianças. Qual a quantidade que caberá a cada criança. Escreva a sua solução matemática e faça um desenho para representar a situação.

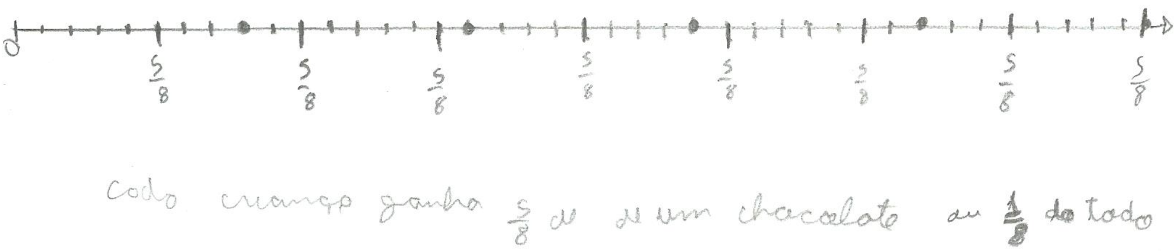


Figura 25: Respostas baseadas em segmentos às atividades 4 e 5 da sessão 3 de E5

Ainda, sobre a atividade 5, os estudantes se questionaram acerca da unidade de medida adotada e da unidade inteira (todo). Muitos ficaram em dúvida sobre $\frac{1}{8}$ do todo (5 chocolates) ser igual a $\frac{5}{8}$ de cada uma das 5 partes (cada um dos 5 chocolates). A discussão acerca disso foi importante para eles aprimorarem o entendimento a respeito do papel da unidade na operação de divisão de números racionais. Mesmo assim, se olharmos, na Figura 24, para a resposta apresentada pelo estudante E4 à atividade 5 da sessão 3, podemos perceber que, apesar do desenho estar correto, sua resposta escrita não está. Segundo ele cada criança deveria receber $\frac{5}{8}$ de cada chocolate, o que daria $\frac{25}{8}$ de chocolate. Como são 8 crianças, isso dá um total de 25 chocolates, e não 5 chocolates, como está proposto na questão.

Isso foi reforçado com a atividade 6, apresentada na Figura 26 da página a seguir. Adaptada do texto de Damico (2007), esta atividade exigiu dos estudantes a interpretação de um número racional como uma medida, pois eles precisavam reconhecer a unidade de medida adotada bem como o todo. Apesar do surgimento de algumas dúvidas entre os estudantes, esclarecidas por meio de diálogo feito entre eles, com a mediação do professor, os itens (a), (b) e (c) desta atividade foram feitos sem maiores dificuldades. O item (d), por sua vez, gerou dificuldade e três estudantes não conseguiram chegar à resposta $\frac{4}{3}$. Percebemos, com isso, um fato já apontado por Damico (2007), de que frações mistas não compõem o repertório de ferramentas matemáticas comum aos estudantes.

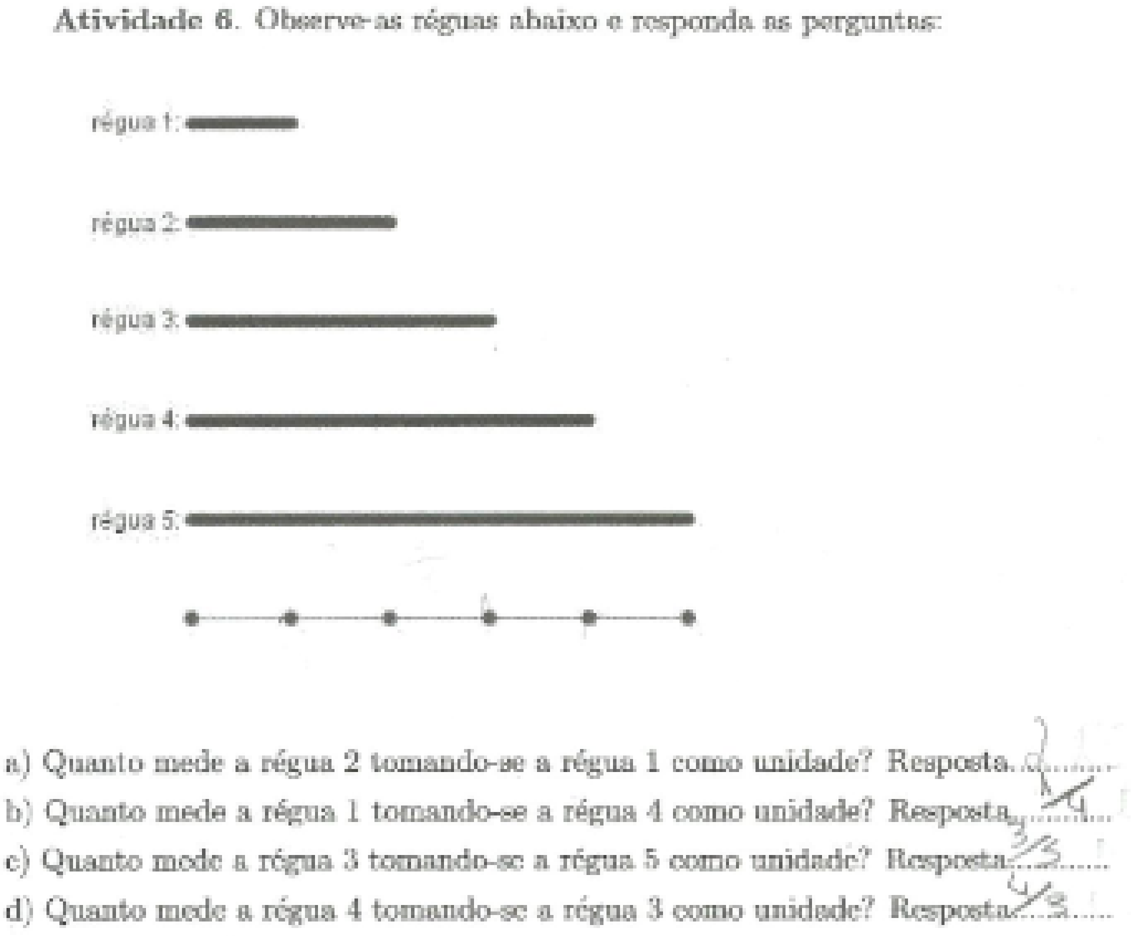


Figura 26: Solução da atividade 6 da sessão 3 dada por E8

Isto revela, como apuramos na análise prévia, a não familiaridade dos estudantes com a interpretação da medida dos números racionais pois, de acordo com Silva e Almouloud (2008), a representação de frações, na sua forma mista, decorre naturalmente do estudo de situações em contexto de medida.

Já vimos que, na atividade 6, os estudantes não tiveram dificuldades para resolver aos itens (a), (b) e (c), nos quais os segmentos de reta tomados como unidade de medida eram menores do que os segmentos de reta dados como o todo a serem medidos, mas encontraram obstáculos para solucionar ao item (d), no qual o segmento de reta tomado como unidade de medida é maior que o segmento de reta a ser medido (o todo). Isto sugere, assim como denotamos na análise prévia, a predominância da utilização da interpretação parte-todo no processo de ensino-aprendizagem dos números racionais vivenciado pelos estudantes pesquisados.

Podemos inferir, então, que trabalhar a divisão de números racionais por meio da interpretação como medida, assim como fizemos na atividade 6 deste trabalho, proporciona aos estudantes um entendimento mais profundo, se comparado com atividades pautadas na interpretação parte-todo, a respeito desta operação, bem como auxilia em uma aprendizagem mais significativa do conceito de número racional.

Elaboramos a atividade 7 na tentativa de trabalhar a noção de que a divisão de números racionais pode ter como resultado um número maior que o dividendo, diferentemente de quando esta operação é feita com números naturais ou inteiros. Apoiados em Amorim (2007), esperávamos auxiliar os estudantes na compreensão desse significado utilizando o enfoque geométrico de segmentos de reta. Frente à resposta do estudante E5, conforme Figura 27, acreditamos ter atingido o objetivo, pois o mesmo estudante escreveu:
– *É que quando nós dividimos o* 2 *por* $\frac{1}{2}$ *estamos contando quantas vezes cabe o* $\frac{1}{2}$ *no* 2*; que no caso é* 4.

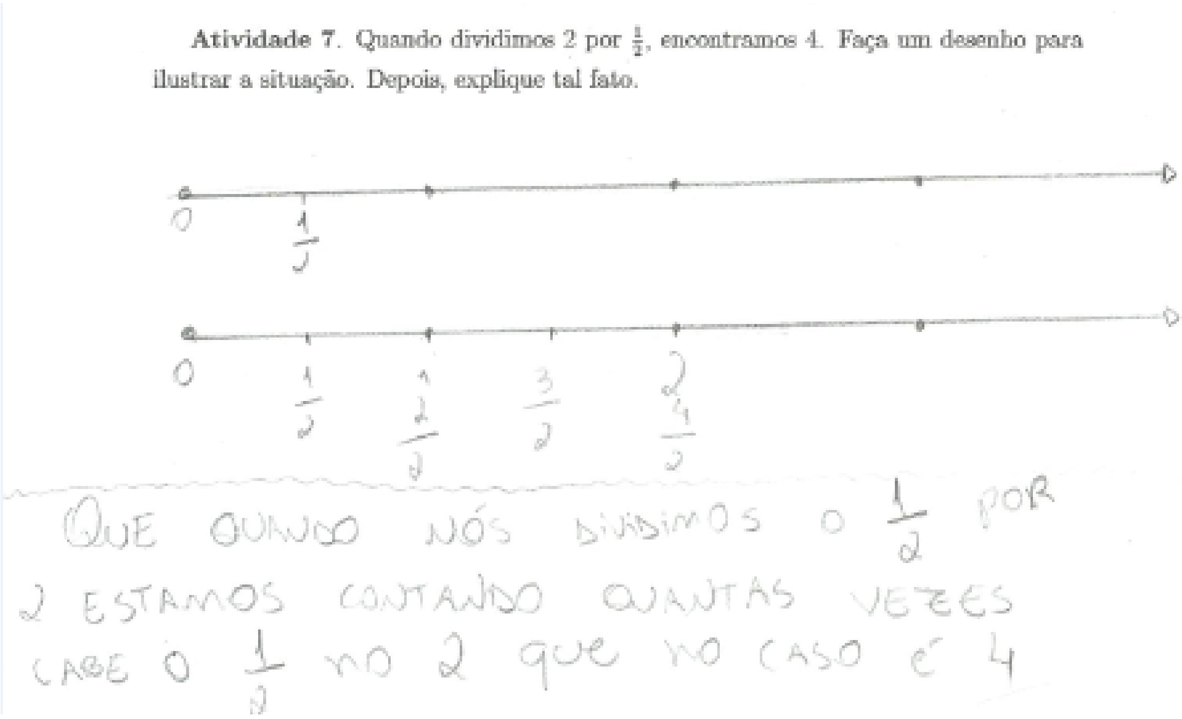
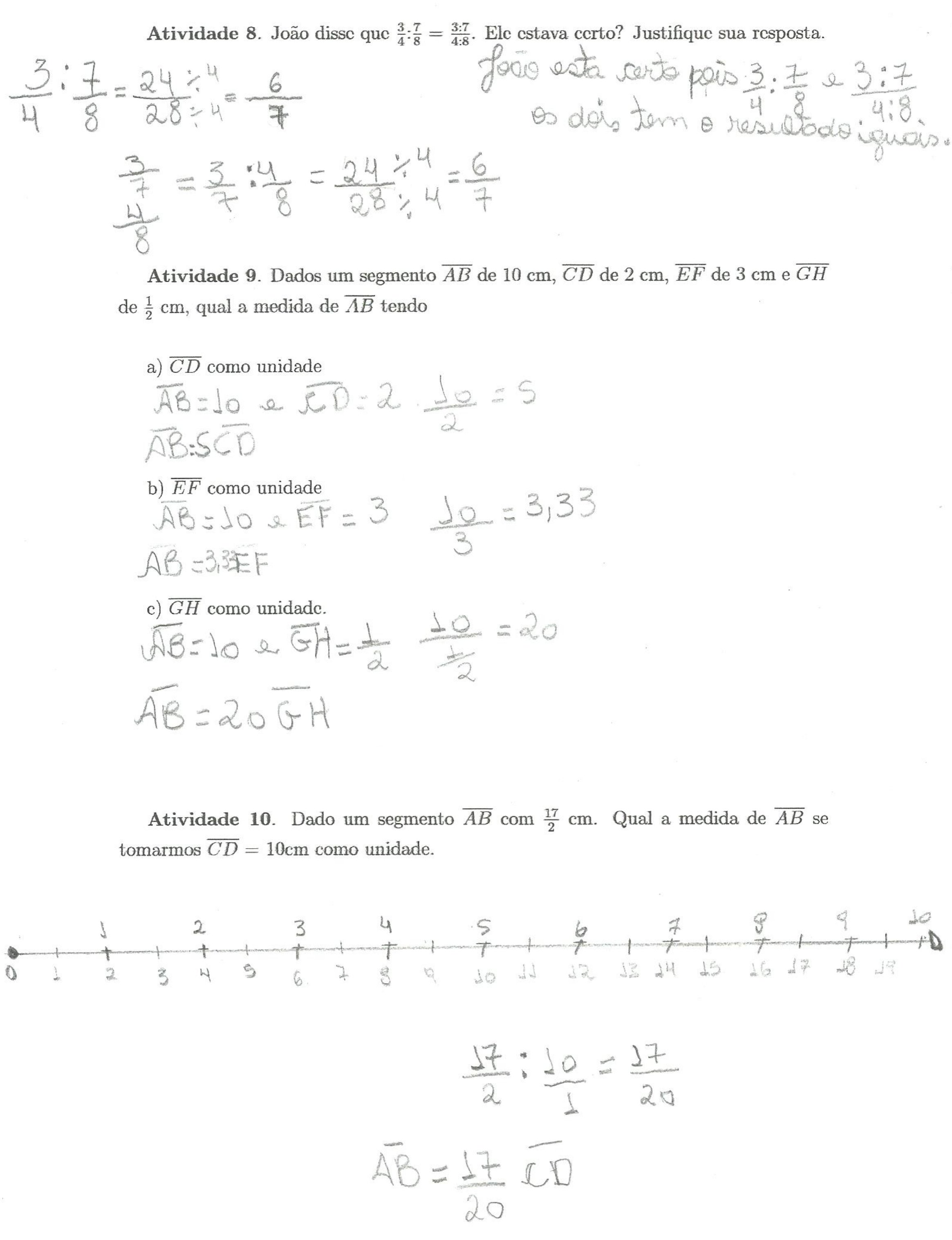


Figura 27: Solução da atividade 7 da sessão 3 expressa por E5

A descrição do estudante E5, a respeito da divisão de 2 por $\frac{1}{2}$, ilustrado na Figura 27, sugere o entendimento da operação de divisão de números racionais fundamentada na interpretação da medida de número racional.

Analisando as respostas do estudante E7 relativas às atividades 8, 9 e 10 da sessão 3, conforme Figura 28, observamos o quanto os estudantes se apropriaram do significado da operação de divisão de números racionais, principalmente relacionando à interpretação de me-



Atividade 8. João disse que $\frac{3}{4}:\frac{7}{8}=\frac{3:7}{4:8}$. Ele estava certo? Justifique sua resposta.

$\frac{3}{4}:\frac{7}{8}=\frac{24\div 4}{28\div 4}=\frac{6}{7}$

João esta certo pois $\frac{3}{4}:\frac{7}{8}$ e $\frac{3:7}{4:8}$ os dois tem o resultado iguais.

$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{8}}=\frac{3}{7}:\frac{4}{8}=\frac{24\div 4}{28\div 4}=\frac{6}{7}$

Atividade 9. Dados um segmento $\overline{AB}$ de 10 cm, $\overline{CD}$ de 2 cm, $\overline{EF}$ de 3 cm e $\overline{GH}$ de $\frac{1}{2}$ cm, qual a medida de $\overline{AB}$ tendo

a) $\overline{CD}$ como unidade

$\overline{AB}=10$ e $\overline{CD}=2$ $\frac{10}{2}=5$

$\overline{AB}=5\overline{CD}$

b) $\overline{EF}$ como unidade

$\overline{AB}=10$ e $EF=3$ $\frac{10}{3}=3{,}33$

$AB=3{,}33EF$

c) $\overline{GH}$ como unidade.

$\overline{AB}=10$ e $\overline{GH}=\frac{1}{2}$ $\frac{10}{\frac{1}{2}}=20$

$\overline{AB}=20\overline{GH}$

Atividade 10. Dado um segmento $\overline{AB}$ com $\frac{17}{2}$ cm. Qual a medida de $\overline{AB}$ se tomarmos $\overline{CD}=10$cm como unidade.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

$\frac{17}{2}:\frac{10}{1}=\frac{17}{20}$

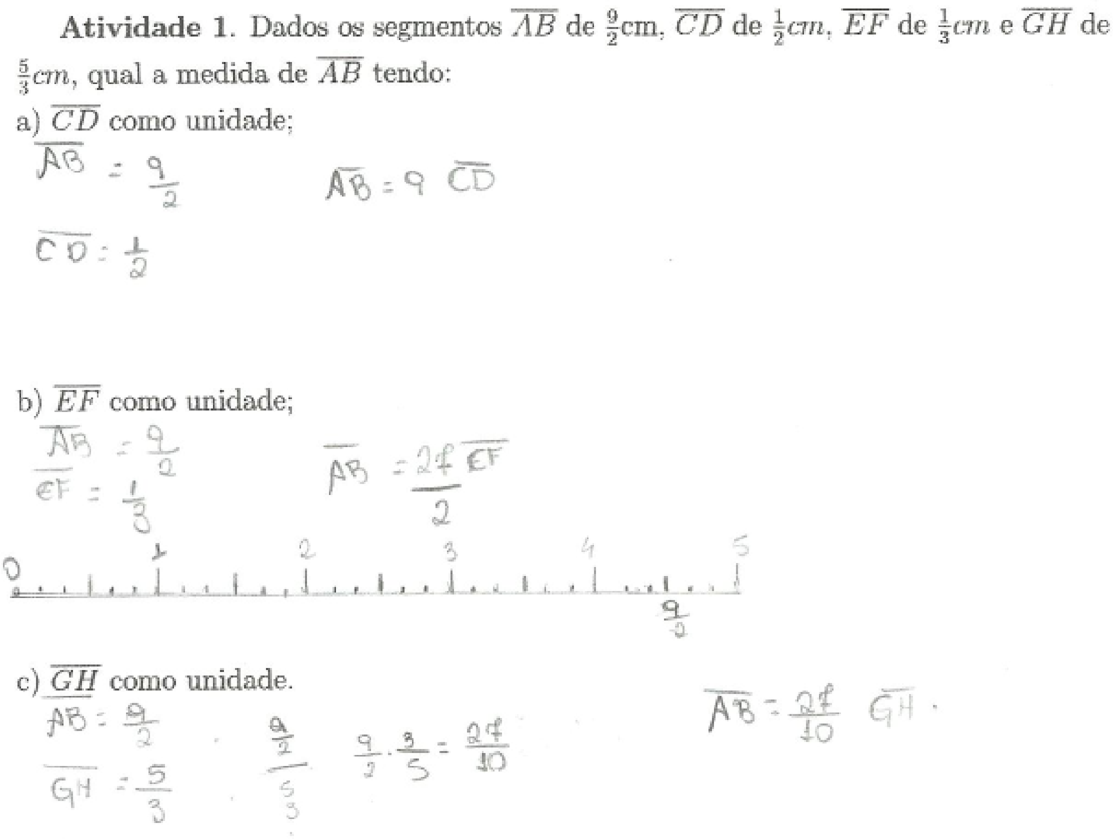
$\overline{AB}=\frac{17}{20}\overline{CD}$

Figura 28: Soluções das atividades 8, 9 e 10 da sessão 3 dadas por E7

dida destes números. Participamos como mediadores na resolução destas atividades. Por isso, salientamos o cuidado despendido pelo docente para não contar as respostas e auxiliar os estudantes a trilharem o caminho até atingirem o objetivo.

Confirmamos isto com a aplicação da sessão 4 de ensino. Esta atividade foi desenvolvida na biblioteca e, novamente com a organização da sessão precedente, participaram os estudantes E1, E2, E4, E5, E7, E8, E9 e E12.

Ao entregarmos uma folha A4 contendo as atividades 1 e 2 da sessão 4, conforme apêndice E, um estudante logo comentou que elas eram iguais às da semana anterior. De fato, na atividade 1, conforme Figura 29, deveria ser medido um segmento de reta de comprimento $\frac{9}{2}cm$ por outros segmentos de medida racional e, na atividade 2, conforme Figura 30, vemos que o estudante E5 compreendeu o significado da operação de divisão com frações.


Atividade 1. Dados os segmentos $\overline{AB}$ de $\frac{9}{2}$cm, $\overline{CD}$ de $\frac{1}{2}cm$, $\overline{EF}$ de $\frac{1}{3}cm$ e $\overline{GH}$ de $\frac{5}{3}cm$, qual a medida de $\overline{AB}$ tendo:

a) $\overline{CD}$ como unidade;

$\overline{AB} = \frac{9}{2}$ $\quad$ $\overline{AB} = 9\ \overline{CD}$

$\overline{CD} = \frac{1}{2}$

b) $\overline{EF}$ como unidade;

$\overline{AB} = \frac{9}{2}$ $\quad$ $\overline{AB} = \frac{27\ \overline{EF}}{2}$

$\overline{EF} = \frac{1}{3}$

0 1 2 3 4 5 $\frac{9}{2}$

c) $\overline{GH}$ como unidade.

$\overline{AB} = \frac{9}{2}$ $\quad$ $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{3}}$ $\quad$ $\frac{9}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{10}$ $\quad$ $\overline{AB} = \frac{27}{10}\ \overline{GH}$

$\overline{GH} = \frac{5}{3}$

Figura 29: Respostas de E1 à atividade 1 da sessão 4

No item (b), da atividade 1, o estudante E1 tomou $\frac{1}{2}$ (unidade de medida de $\frac{9}{2}$) e dividiu por 3 e, no mesmo segmento de reta, conseguiu visualizar que $\frac{1}{3}$ foi dividido por 2; concluindo corretamente que $\frac{9}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{27}{2}$, como podemos visualizar na Figura 29. Muitos dos estudantes participantes desta sessão de ensino recorreram à representação geométrica com segmento de reta para compreenderem a atividade 1. Em geral, fizeram a representação do item (b) e depois resolveram o item (c) de forma direta, sem contratempos.

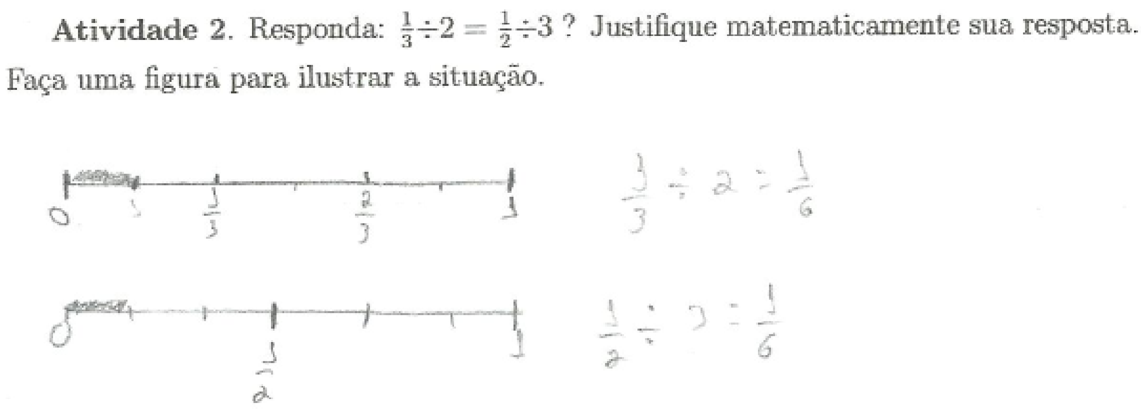


Figura 30: Solução geométrica de E5 na atividade 2 da sessão 4

Percebemos, de modo geral, que os estudantes começaram a utilizar segmentos de reta sem uma orientação prévia do professor, ou seja, por conta própria. Isto revela, ao confrontarmos estes resultados com os da análise prévia, o progresso dos estudantes em relação à aprendizagem do conceito de divisão de número racional, haja vista terem conquistado a autonomia para construírem representações geométricas, bem como para resolverem aritmeticamente os exercícios utilizando os algoritmos apropriados.

Em relação às atividades 3 e 4, conforme apêndice E, mais uma vez se confirmou a afirmação de Damico (2007) de que situações-problema ajudam os estudantes a entenderem com maior facilidade as operações entre números racionais. Todos os estudantes conseguiram solucionar de forma correta as atividades propostas.

Vale ressaltar, ainda, a opção majoritária dos estudantes de resolverem as atividades 3 e 4 por meio de uma figura antes de fazerem a resolução algorítmica. Ao ser questionado pelo professor acerca dessa escolha, E9 disse: – *Porque é mais fácil!*. Isso sugere, assim como já observaram Amorim (2007), Santos (2013), Rosa (2012) e NEPEM (2004), a importância em associar, no processo de ensino e aprendizagem de frações, o desenvolvimento do conceito de número racional com sua representação geométrica por segmentos de reta.

Analogamente, nas atividades 5 e 6 (conforme apêndice E), os estudantes não tiveram contratempos.

Nas atividades 7 e 8, os estudantes utilizaram as representações gráficas apresentadas nas questões para interpretar a operação de divisão de números racionais como medida. Analisando a resposta dada pelo estudante E9, conforme Figura 31, vemos no item (a) da atividade 7 a resposta $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Notamos, neste caso, a falta de recursos matemáticos, por parte do estudante, para expressar sua resposta. Apesar de parecer saber que o segmento de reta de comprimento $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia no segmento de reta de comprimento $\frac{1}{2}$, não conseguiu expressar esse número na forma de fração mista $(1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2})$. Frente a isso, trabalhamos novamente o significado de fração mista na lousa, utilizando a interpretação geométrica em segmentos de reta.

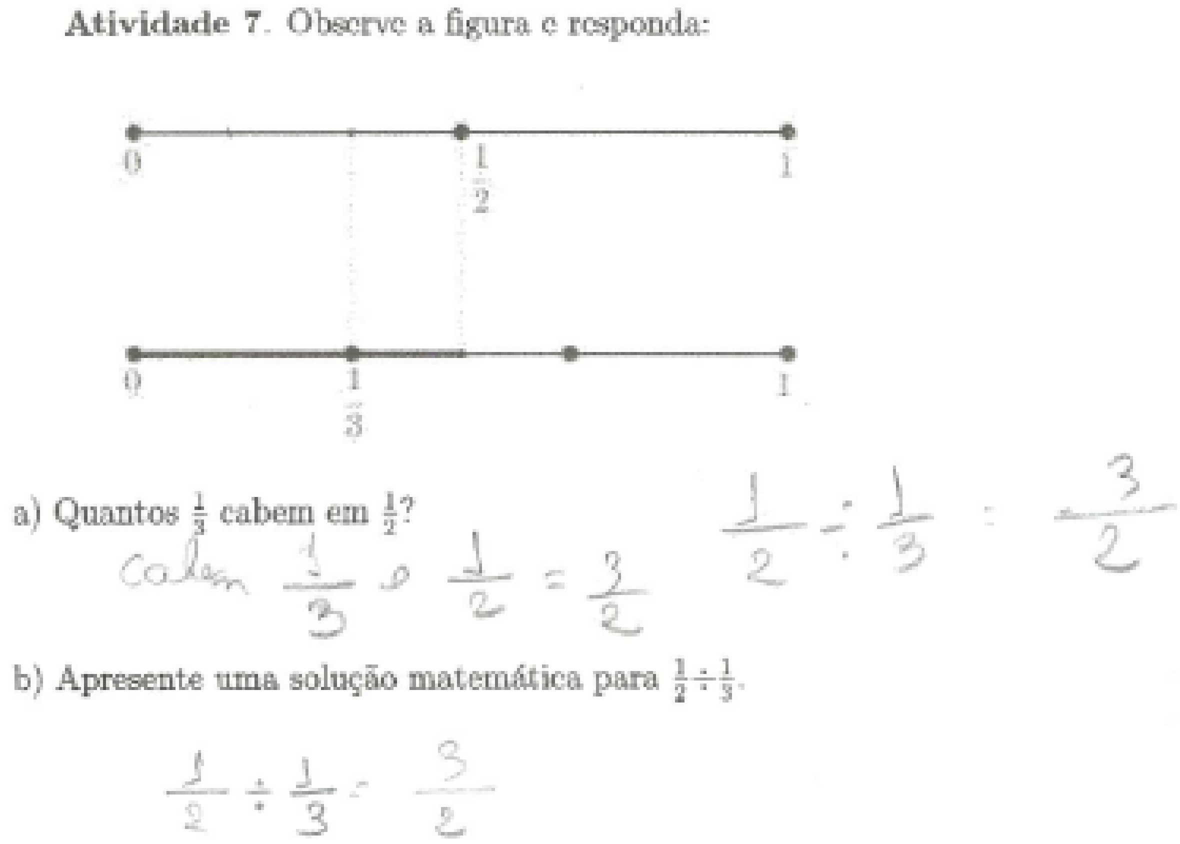


Figura 31: Respostas aos itens da atividade 7 dadas pelo estudante E9

Na atividade 8, conforme apêndice E, três estudantes responderam corretamente que cabem 40% do segmento de comprimento $\frac{5}{4}$ no segmento de comprimento $\frac{1}{2}$. Esse fato reforça o potencial do uso da representação geométrica com segmentos de reta no processo de ensino e aprendizagem de números racionais.

Para finalizar a sessão de ensino, os estudantes receberam a última folha contendo as atividades 9 e 10 (que podem ser visualizadas no apêndice E). A atividade 9 foi realizada com muita facilidade pelos estudantes. Isso permite que reconheçamos a importância do uso de tarefas pautadas na interpretação como medida dos números racionais no momento de ensinar a operação de divisão de frações. Vale ressaltar que os estudantes foram demonstrando um ganho significativo de confiança, na abordagem das atividades, a cada nova sessão. Alguns que iniciaram, na primeira sessão, se dizendo incapazes e "fracos" em Matemática, estavam alegres e satisfeitos por conseguirem entender os conceitos trabalhados. Eles discutiam suas propostas de solução com os outros colegas sem receio de estarem errados, pois sabiam do que estavam falando.

Entretanto, a atividade 10, conforme apêndice E, só foi respondida pelos estudantes com o auxílio do professor. No entanto, acompanharam com naturalidade as explicações sobre grandezas comensuráveis e incomensuráveis, entendendo o significado de número irracional. Vemos, com isso, a importância de um processo de ensino e aprendizagem dos números racionais ser feito considerando a sua interpretação como medida, em especial, recorrendo ao modelo geométrico da reta. Trilhando esse caminho os estudantes conseguiram ampliar o conceito de número ao perceberem a impossibilidade de expressar as medidas de todos os segmentos existentes com os números racionais, ou seja, a existência de segmentos incomensuráveis, conforme Lima *et al* (2012), manifesta a conveniência da construção dos números reais para solucionar o problema teórico da medida. Porém, como uma análise mais aprofundada desta questão ultrapassa os objetivos da nossa pesquisa, deixamos essa lacuna para ser estudada em outra oportunidade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os números racionais permeiam a vida escolar dos estudantes da Educação Básica bem como estão presentes em seu cotidiano. Era de se esperar, então, que fosse um assunto de fácil aprendizado. Porém, baseados em nossas observações com a realização deste trabalho, verficamos que não é essa a realidade vivida nas instituições de ensino.

Muitos são os fatores apontados nos estudos referentes ao ensino e aprendizagem dos números racionais, como denotamos no desenvolvimento desta pesquisa, como prováveis causas das dificuldades encontradas no ensino deste tema. Sem pretensão de esgotar essa lista, podemos citar:

- O predomínio de um ensino mecanizado, desenvolvido por meio da memorização, pautado no método algorítmico e na definição de fórmulas;
- A desconexão com o desenvolvimento histórico do conceito de número racional e a falta de situações contextualizadas em seu ensino;
- A hegemonia da interpretação parte-todo na prática pedagógica para ensinar os números racionais, principalmente no Ensino Fundamental;
- A formação inadequada dos professores para trabalharem esse conteúdo com os estudantes.

Com essas considerações em mente e tendo em vista, devido à prática docente, que a operação de divisão dos números racionais não é compreendida pelos estudantes, a ponto de muitos deles apenas decorarem a fórmula para efetuarem as operações, nossa pesquisa teve como objetivo *investigar a possibilidade de desenvolver o processo de ensino e aprendizagem da divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida.*

Uma análise geral dos resultados desta investigação aponta, apesar da operação de divisão de números racionais ser reconhecida como um conhecimento complexo para se aprender e ensinar, uma gama de pontos favoráveis ao uso da interpretação como medida no seu processo de ensino e de aprendizagem.

Em linhas gerais, o estudo das atividades propostas nas sessões de ensino (conforme apêndices B, C, D e E) potencializou o entendimento, por parte dos estudantes, do conceito da divisão de números racionais bem como contribuiu para eles aprofundarem a compreensão de outras questões relacionadas ao conceito de número racional, tais como ordem, equivalência e densidade. Estes conhecimentos foram, ao longo da aplicação da sequência didática proposta na pesquisa, assumidos com maior naturalidade pelos estudantes. Isto nos permite afirmar que ocorreram avanços consideráveis no entendimento conceitual de número racional pelos participantes.

Denotamos, ainda, a aprendizagem dos estudantes frente à representação geométrica, por meio de segmentos de reta, de figuras retratando frações impróprias. Tínhamos observado, na análise prévia, que eles não conseguiam fazer isso anteriormente. Porém, com o desenvolvimento das sessões de ensino propostas na sequência didática desta pesquisa (Apêndices B, C, D e E), os estudantes passaram a realizar essas tarefas utilizando segmentos de reta e, dessa forma, recorrendo à interpretação como medida de número racional. Não temos como mensurar a aprendizagem ocorrida, mas certamente podemos afirmar, sem receio de produzirmos uma análise infundada, que isto foi fundamental para muitos destes estudantes compreenderem o campo numérico dos racionais como distinto do campo numérico dos inteiros.

Também conseguimos acompanhar, com o desenvolvimento das sessões 3 e 4, conforme apêndices D e E, respectivamente, o progresso dos estudantes em relação à aprendizagem do conceito da divisão de números racionas. Observamos, portanto, que a utilização de tarefas pautadas na interpretação da medida dos números racionais, por meio da sua representação geométrica em segmentos de reta, potencializou esse aprendizado, haja vista que os estudantes passaram a entender o conceito envolvido na resolução aritmética, por meio de algoritmo próprio desta operação.

Além disso, esta vinculação entre número e grandeza, presente na interpretação da medida dos números racionais, faz a ponte de ligação entre o processo histórico da gênese desses números. Logo, seu estudo possibilita aos estudantes compreenderem a razão pela qual foram desenvolvidos tais números, contribuindo na aprendizagem do conceito de número.

O uso da interpretação da medida no processo de aprendizagem dos números racionais, apoiado na representação geométrica de segmentos de reta, conduz a uma aprendizagem ativa, por parte do estudante, sobre a operação de divisão deste tipo de número. Defendemos esse argumento com base nos resultados desta pesquisa. Ao se depararem com atividades dessa natureza, os estudantes se defrontaram com situações-problema nas quais precisaram identificar a unidade de medida e o todo a ser medido para, a partir disso, efetuarem a comparação e obterem a medida. Isso ajuda os estudantes a identificarem a unidade quando se deparam com números racionais, passando a compreenderem esses números como um campo numérico distinto dos números inteiros.

No entanto, isto conduz à necessidade de uma mudança ou alteração na prática pedagógica desenvolvida na maioria das escolas. Como vimos com o desenvolvimento da pesquisa, os números racionais fracionários recebem ênfase no Ensino Fundamental, quando este tema é trabalhado principalmente com base na concepção parte-todo. Dado que os estudantes do nível de escolarização do Ensino Fundamental, em geral, não possuem maturidade matemática para aprofundarem o estudo dos números racionais com base na interpretação da medida, com representação geométrica em segmento de reta, assim como procedemos no decorrer deste estudo, para possibilitar aos estudantes uma aprendizagem mais significativa e sólida acerca dos números racionais, anterior ao término do período demarcado pela Educação Básica, é preciso investir, no nível médio de escolarização desta etapa de ensino, em um estudo no qual seja dado ênfase à interpretação da medida destes números.

Esta ideia ainda é reforçada pelo fato de que o estudo dos números racionais, tendo por base sua interpretação como medida, por meio da representação geométrica em segmentos de reta, “abre as portas” para um caminho frutífero de ensino do conceito de número real, haja vista a gênese dos números racionais ter sido motivada para solucionar o problema prático da medida e os números reais solucionarem o problema teórico da medida.

Vale ressaltar, ainda, que a interpretação como medida da operação de divisão de números racionais pode ser realizada utilizando-se representações geométricas com medidas lineares, de áreas ou de volumes. Neste trabalho, optamos pela medida linear, em segmentos de reta, por acreditarmos ser está a opção mais “fácil” para trabalhar com os estudantes. Como o foco da nossa pesquisa foi na aprendizagem da operação de divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida, optamos em não trabalhar com medidas de área e volume, pois acreditamos que isso conduziria a necessidade da mobilização da discussão de conhecimentos geométricos o que, inevitavelmente, demandaria maior tempo para observarmos o nosso real interesse.

Em relação às sessões de ensino, podemos destacar sua função organizativa da aula. Sua confecção é, ao mesmo tempo, um planejamento e uma metodologia de ensino. Além disso, da forma como organizamos a sequência didática (conforme apêndices B, C, D e E) para este estudo, os estudantes conseguiram desenvolver uma aprendizagem ativa, na qual foram sujeitos do seu próprio processo de aprendizagem. Ao professor, por sua vez, cabe assumir o papel de mediador entre os estudantes e o conhecimento científico. Isto evidencia o papel facilitador das sessões de ensino na relação professor-aluno-conhecimento.

Também foram fundamentais para o desenvolvimento da sequência didática, o tempo de duração das sessões de ensino, bem superior se comparado ao tempo de uma aula normal, e a presença de um número “reduzido” de estudantes, média de nove por sessão de ensino. Em linhas gerais, o professor/pesquisador conseguiu desenvolver o papel de mediador no processo de aprendizagem, pois conseguiu dedicar atenção individualizada e coletiva aos estudantes, sempre que necessário. Apesar de nosso estudo não ter explorado esse aspecto, podemos conjecturar que é fundamental a redução do número de estudantes nas turmas normais, que possuem em média trinta estudantes ou mais, para melhorarmos a qualidade do ensino e da aprendizagem, em particular, da Matemática.

Diante disso, observamos que apesar de os resultados do nosso trabalho sugerirem vantagens em se trabalhar a divisão de números racionais com tarefas pautadas na interpretação da medida, tendo por base uma sequência didática desenvolvida em uma organização pedagógica distinta da vivenciada por professores e estudantes todos os dias, acreditamos na possibilidade de trabalhar essa sequência didática em aulas normais. Contudo, devido ao tempo de aula e ao número de estudantes em sala, deve-se fazer alguns ajustes, como reduzir o número de atividades propostas em cada sessão de ensino e trabalhar questões referentes às operações de divisão e multiplicação em uma mesma sessão.

Como os resultados de nosso estudo evidenciam a importância em usar a interpretação da medida para ensinar a divisão de números racionais, bem como para o ensino conceitual de número racional, ficamos com alguns questionamentos para pesquisas futuras: Quais as possibilidades do uso da interpretação da medida de número racional para seu ensino nos Níveis Fundamental e Superior? Como seria o processo de ensino dos números racionais, com base na interpretação da medida, recorrendo ao uso da História da Matemática? A vinculação entre número e grandeza, presente na interpretação como medida dos números racionais, contribui na aprendizagem do conceito de número?

Por fim, frisamos a importância do estudo desse tema na nossa formação bem como pontuamos a necessidade do desenvolvimento de outras pesquisas acerca dessa temática. Acreditamos ser este um dos pontos fundamentais, além da transformação das condições pedagógicas (número de estudantes por classe, duração da aula, disponibilidade de carga horária para os professores participarem de pesquisas, entre outros) para superarmos, em particular, as dificuldades inerentes ao ensino dos números racionais e, em geral, ao ensino da Matemática no Brasil.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. de Q. S. Engenharia didática: Características e seus usos em trabalhos apresentados no gt - 19 / anped. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Matmática**, v. 3, n. 6, p. 62–77, 2008.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. In: **Bolema - Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro - SP: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, 2008. p. 55–78. ISBN 0103-636x. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221883005>. Acesso em: 08 abr. 2014.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. da. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22–52, 2012.

AMORIN, M. P. **Apropriação de significações do conceito de números racionais:** um enfoque histórico-cultural. 2007. 154 f. Criciúma: Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade do Extremo Sul Catarinense, 2007.

BIFFI, D. de L. **Conceito de frações através do estudo dos registros de representação**. 2001. 179 f. Lages: Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC/SC, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2014.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito de número racional. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Matemática**, v. 2, n. 4, p. 68–93, 2007.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 6. ed. Lisboa: Gradiva, 2005.

COLOGNESE, S. A.; MÉLO, J. L. B. A técnica de entrevista na pesquisa social. **Cadernos de Sociologia**, v. 9, p. 143–159, 1998.

DALLABRIDA, N. A reforma francisco campos e a modernização nacionalizada do ensino secundário. In: **Educação**. Porto Alegre - RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUC/RS, 2009. p. 185–191. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/viewFile/5520/4015>. Acesso em: 15 out. 2014.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. 2007. 313 f. São Paulo: Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, 2007.

DOBROWOLSKI, E. N.; PINTO, N. B. Movimentos da matemática moderna nas práticas escolares e suas repercurssões na maneira de ensinar. In: **Anais do IX Congresso Nacional de Educação - EDUCERE:** Políticas e práticas educativas: Desafios da aprendizagem; Anais do III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia. Curitiba - PR: Champagnat, 2009. p. 4164–4171. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3038_1678.pdf>. Acesso em: 16 out. 2014.

ESCOLANO, R.; GAIRÍN, J. M. Modelos de medida para la enseñanza del número racional em educación primaria. In: **Revista Iberoamericana de Educación matemática - UNIÓN**. Zaragoza - Espanha: [s.n.], 2005. p. 17–35. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2005/1/Union_001_006.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2014.

EVARISTO, J.; PERDIGÃO, E. **Introdução à Álgebra Abstrata**. 1. ed. Maceió: Edufal, 2002.

GARCEZ, W. R. **Tópicos sobre o ensino de frações:** equivalência. 2013. 78 f. Rio de Janeiro: Dissertação (Mestrado em Matemática) Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2013.

GOMES, M. L. M. Os números racionais em três momentos da história da matemática escolar brasileira. In: **Bolema - Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro - SP: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, 2006. p. 17–44. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221859003.pdf>. Acesso em: 06 mai. 2014.

IFRAH, G. **Os números:**. a história de uma grande invenção. 7. Tradução: Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1994.

LIMA, E. L. **Análise Real:** funções de uma variável - Vol. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NEPEM/USF. Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. **Horizontes**, v. 22, p. 53–64, 2004.

NIVEN, I. **Números:** racionais e irracionais. 1. ed. Tradução de Renate Watanabe. São Paulo: SBM, 2012.

PAIZ, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PINTO, H. G. Desenvolvendo o sentido da multiplicação e divisão de números racionais. In: **Actas do XIX EIEM:** Grupo de discussão 1. Vila Real - Espanha: [s.n.], 2009. Disponível em: <http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2009/GD1/2009_03_HPinto.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2014.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo - estabelecendo relações. **Revista Professor de Matemática Online, Sociedade Brasileira de Matemática**, v. 2, n. 1, 2014.

RODRIGUES, W. R. **Números Racionais:** um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. 2005. 247 f. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, 2005.

ROSA, J. E. da. **Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. 244 f. Curitiba: Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal do Paraná - UFPR, 2012.

SANTOS, M. C. S. dos. **Tópicos sobre o ensino de frações:** divisão de frações. 2013. 82 f. Rio de Janeiro: Dissertação (Mestrado em Matemática) Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2013.

SILVA, M. J. F. da. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 302 f. São Paulo: Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, 2005.

SOUZA, V. F. de. **Uma abordagem aos números racionais na forma decimal:** suas operações, representações e aplicações. 2013. 88 f. Rio de Janeiro: Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF/RJ, 2013.

APÊNDICE A – ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA

1. Você lembra em que ano/série estudou fração pela primeira vez? Consegue descrever como aprendeu?

2. E hoje, o que é uma fração para você? Você tem alguma dificuldade para trabalhar com frações? Quais? Por quê?

3. O que é um número racional para você? Quais são suas maiores dificuldades no trato com os números racionais?

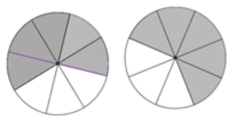
4. Represente a fração $\frac{1}{4}$ por meio de uma figura. Por que você escolheu esta figura? $\frac{1}{4}$ pode ser representado por outra figura?

5. O número $0,5$ pode ser escrito como fração? Por quê? Qual fração? Posso escreve-lo como outra fração? Por que isso é possível?

6. O número 5 é um número racional? Ele pode ser expresso como uma fração? Represente tal número por meio de uma figura.

7. Observando a figura, expresse por um número a quantidade de pizza consumida.

8. Observando a figura, expresse por um número qual foi a quantidade de pizza consumida?



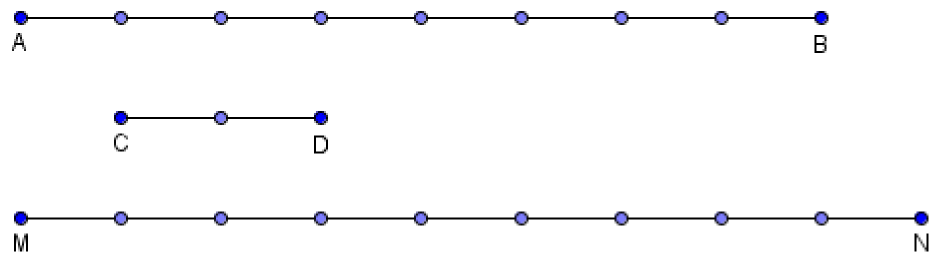
9. Quem é maior, $\frac{3}{2}$ ou $\frac{3}{4}$? Por quê? Existe algum número entre esses dois? Existem outros? Quantos?

10. Represente por meio de uma figura e dê o resultado das expressões: a) $\frac{1}{2} \div 2$, b) $4 \div \frac{1}{2}$ e c) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

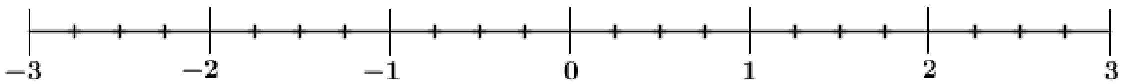
11. Responda: Um agricultor possui 6 silos de ração animal completamente cheios em uma propriedade. Ele vendeu esta propriedade e pretende transferir a ração para outra propriedade que acabou de comprar, mas os silos dessa nova propriedade tem ¾ da capacidade dos silos da propriedade vendida. Quantos silos serão necessários para armazenar toda a ração nesta nova propriedade?

APÊNDICE B – SESSÃO 1

Atividade 1. Qual é a medida do segmento $\overline{AB}$, tendo como unidade de medida o segmento $\overline{CD}$? E do segmento $\overline{MN}$, se a unidade é $\overline{CD}$?

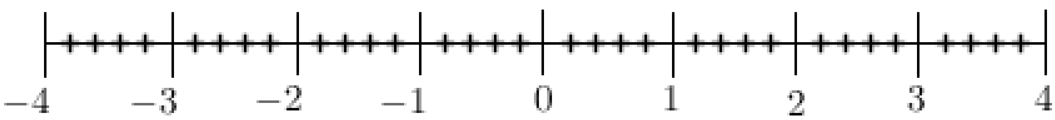


Atividade 2. No segmento de reta abaixo, localize os números racionais: $\frac{5}{2}$, -$\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$ e -$\frac{7}{4}$



Atividade 3. Expresse cada número racional abaixo na sua forma fracionária e depois marque-os na reta numérica

a) 0,6	b) -1,4	c) 2,25
d) -1,25	e) 3,20	f) -0,200
G) 1,5	H) 2,5	



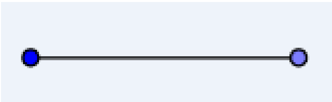
Atividade 4.Escreva os números da atividade 3 em ordem crescente.

Atividade 5. Represente num diagrama em forma de barra vertical (retângulo) o número racional $\frac{2}{5}$. Faça o mesmo com o número $\frac{4}{10}$. O que você observa? Explique.

Atividade 6. Complete os espaços vagos em cada caso:

a) $\frac{1}{3}=\frac{2}{\ }$ b) $\frac{5}{10}=\frac{1}{\ }$

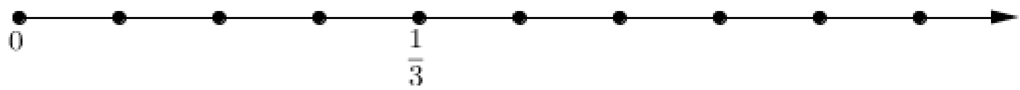
c) $\frac{2}{5}=\frac{\ }{10}=\frac{14}{\ }$ d) $\frac{7}{\ }=\frac{21}{9}$

Atividade 7. Dado que a figura seguinte representa 20% do todo, desenhe a figura completa. 

Atividade 8. Complete as sentenças com os símbolos $=$, $>$ ou $<$, em cada caso.

a) $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$ b) $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{8}$ c) $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$ d) $\frac{3}{4}$ $\frac{18}{24}$

Atividade 9. Associe um número a cada ponto da reta numérica abaixo:



Complete com dois desses números:

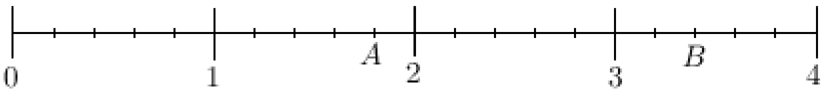
i) ....$<$....... ii) ....$>$.......

Atividade 10. Qual a distância entre o X e o zero na figura abaixo?

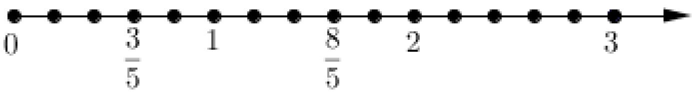
APÊNDICE C – SESSÃO 2

Atividade 1. Considere a figura abaixo. (a) Qual é a distância de 0(zero) a A? (b) E de A a B?

Você consegue escrever a letra (a) como uma adição de fração? E a letra (b) como uma subtração?



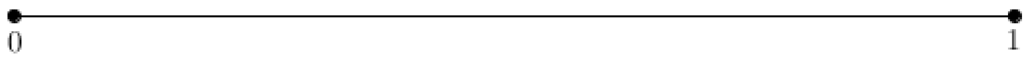
Atividade 2. Dado o segmento de reta abaixo, pinte (destaque) a parte que corresponde a operação $\frac{8}{5}$ - $\frac{3}{5}$.



Atividade 3. (a) Pinte (destaque) $\frac{1}{2}$ do segmento abaixo. Depois, pinte (destaque) mais $\frac{1}{6}$ do mesmo segmento (do todo). Que parte do segmento (todo) ficou destacada após a última operação?

(b) Calcule $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

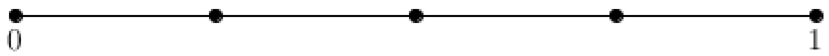
(c) Pinte (destaque) $\frac{3}{4}$ do segmento abaixo. Depois pinte (destaque) mais $\frac{1}{5}$ do mesmo segmento (de todo o segmento). Que parte do segmento (todo) foi destacada?



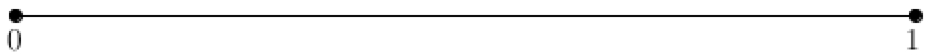
(d) Calcule $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

(e) Escreva uma regra para a adição de duas frações quaisquer.

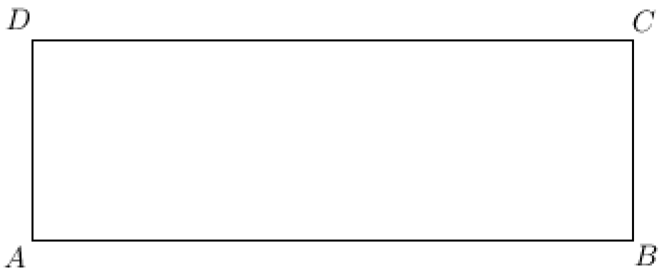
Atividade 4. Represente, no segmento de reta abaixo, a operação $3 \cdot \frac{1}{4}$. Qual o resultado desta multiplicação?



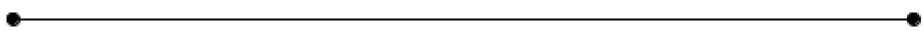
Atividade 5. Pinte (destaque) a metade de dois terços do segmento abaixo e determine o número fracionário que representa a parte destacada. Você consegue expressar tal resultado como uma multiplicação de frações? Se sim, expresse.



Atividade 6. Hachure a metade de dois terços do retângulo abaixo. Que parte do retângulo foi hachurada? Dê a sentença matemática que representa o que você fez.



Atividade 7. Pinte (destaque) $\frac{2}{3}$ do segmento abaixo. Em seguida, pinte (destaque) $\frac{3}{4}$ da parte do segmento que você destacou anteriormente. Essa última parte destacada corresponde a quanto do todo? Você consegue expressar isso por meio de uma operação com números racionais na forma fracionária? Se sim, expresse.



Atividade 8. Dos alunos que estudam no primeiro ano B, $\frac{2}{5}$ gostam de jogar futsal. Desses estudantes, $\frac{3}{7}$ participaram dos jogos escolares. Qual fração dos alunos dessa turma participaram dos jogos escolares? Represente tal situação no retângulo abaixo. Supondo que tal turma tenha 35 alunos, quantos foram para os jogos escolares?

Atividade 9. Uma caixa de água tem uma régua lateral que marca a quantidade de água contida nela. Quando a água atinge a marca de $\frac{4}{5}$ dessa régua, a caixa esta com 340 litros.

(a) Qual a quantidade de água na caixa quando ela cobre (atinge) $\frac{1}{5}$ dessa régua? E quando atinge $\frac{3}{5}$?

(b) Quantos litros são necessários para encher a caixa?

Atividade 10.

(a) Efetue os cálculos abaixo:

i) $6 \cdot \frac{4}{5}$ ii) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$ iii) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{4}$

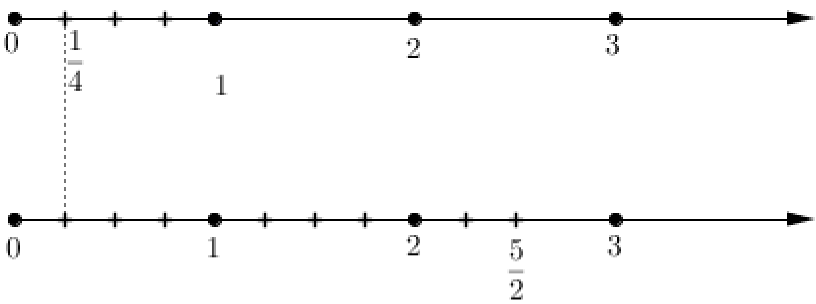
iv) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$

(b) Expresse uma regra (generalização) para o produto de duas frações quaisquer.

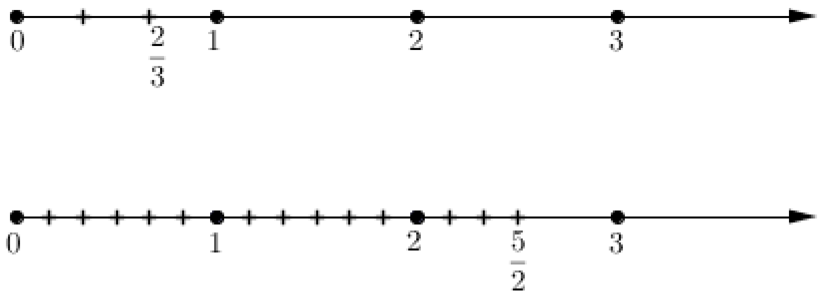
APÊNDICE D – SESSÃO 3

Atividade 1. João tem 40 bolitas e quer dividi-las com 8 amigos. Com quantas bolitas cada amigo ficará? Represente tal situação em uma figura.

Atividade 2. Analise, em cada item, a figura e responda a questão sem fazer cálculos.



a) $\frac{5}{2}:\frac{1}{4}$



b) $\frac{5}{2}:\frac{2}{3}$

Atividade 3. Represente graficamente, como realizado na questão anterior, as seguintes divisões:

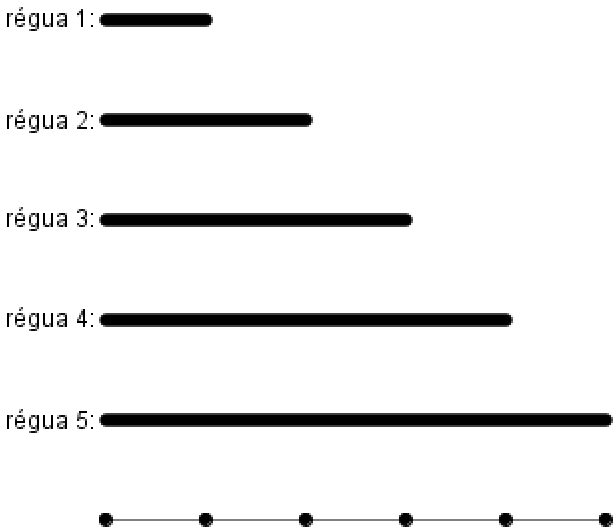
a) $\frac{7}{2}:\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{2}:\frac{3}{4}$

Atividade 4. Um padeiro pretende distribuir três bolos iguais entre um grupo de crianças de tal forma que cada criança ganhe $\frac{3}{5}$ de um bolo. Para quantas crianças ele pode distribuir o bolo? Escreva a solução da questão matematicamente. Além disso, faça uma representação gráfica da solução da questão.

Atividade 5. Queremos dividir 5 chocolates iguais entre 8 crianças. Qual a quantidade que caberá a cada criança. Escreva a sua solução matemática e faça um desenho para representar a situação.

Atividade 6. (adaptado de Damico(2007)) Observe as réguas abaixo e responda as perguntas:



a) Quanto mede a régua 2 tomando-se a régua 1 como unidade? Resposta...........

b) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 4 como unidade? Resposta...........

c) Quanto mede a régua 3 tomando-se a régua 5 como unidade? Resposta...........

d) Quanto mede a régua 4 tomando-se a régua 3 como unidade? Resposta...........

Atividade 7. Quando dividimos 2 por $\frac{1}{2}$, encontramos 4. Faça um desenho para ilustrar a situação. Depois, explique tal fato.

Atividade 8. João disse que $\frac{3}{4}:\frac{7}{8} = \frac{3:7}{4:8}$. Ele estava certo? Justifique sua resposta.

Atividade 9. Dados um segmento $\overline{AB}$ de 10 cm, $\overline{CD}$ de 2 cm, $\overline{EF}$ de 3 cm e $\overline{GH}$ de $\frac{1}{2}$ cm, qual a medida de $\overline{AB}$ tendo

a) $\overline{CD}$ como unidade

b) $\overline{EF}$ como unidade

c) $\overline{GH}$ como unidade.

Atividade 10. Dado um segmento $\overline{AB}$ com $\frac{17}{2}$ cm. Qual a medida de $\overline{AB}$ se tomarmos $\overline{CD}$ = 10cm como unidade.

APÊNDICE E – SESSÃO 4

Atividade 1. Dados os segmentos $\overline{AB}$ de $\frac{9}{2}$cm, $\overline{CD}$ de $\frac{1}{2}cm$, $\overline{EF}$ de $\frac{1}{3}cm$ e $\overline{GH}$ de $\frac{5}{3}cm$, qual a medida de $\overline{AB}$ tendo:
a) $\overline{CD}$ como unidade;
b) $\overline{EF}$ como unidade;
c) $\overline{GH}$ como unidade.

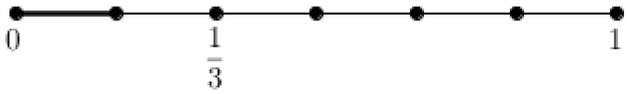
Atividade 2. Responda: $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{2} \div 3$? Justifique matematicamente sua resposta. Faça uma figura para ilustrar a situação.

Atividade 3. (adaptado de Rangel et al (2014)) Uma biblioteca, que tinha seus livros guardados em 6 estantes cheias, passou por uma reforma e trocou suas estantes. As estantes novas possuem $\frac{3}{4}$ da capacidade das antigas.
a) Apresente uma solução matemática de quantas estantes novas serão necessárias para acomodar todos os livros?
b) Represente a solução do problema graficamente.

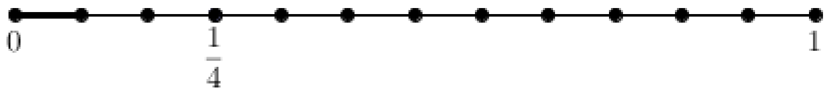
Atividade 4. João tem, como recordação, fotos da escola guardadas em 5 álbuns. Ele pretende guarda-las em novos álbuns, cuja capacidade é $\frac{5}{4}$ da capacidade dos álbuns antigos.
a) Apresente uma solução matemática de quantos novos álbuns serão necessários para guardar as fotos?
b) Represente a solução do problema graficamente.

Atividade 5. Observe às figuras abaixo e responda

a) $\frac{2}{3} \div 2 =$



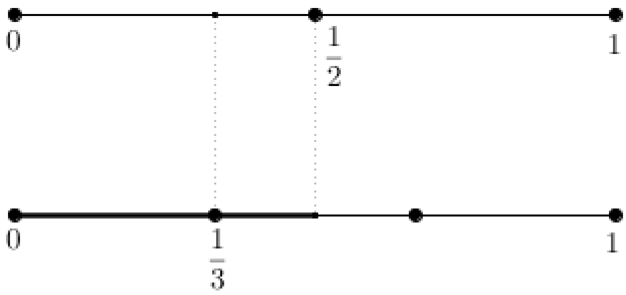
b) $\frac{1}{3} \div 2 =$



c) $\frac{1}{4} \div 3 =$

Atividade 6. Represente em uma figura a expressão $\frac{1}{5} \div 4$. Escreva que número representa.

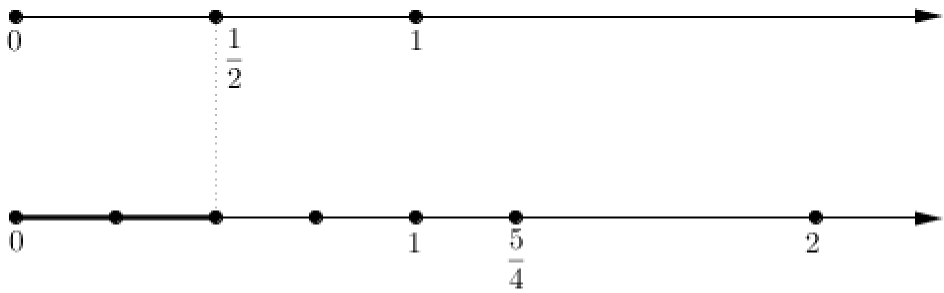
Atividade 7. Observe a figura e responda:



a) Quantos $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$?

b) Apresente uma solução matemática para $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$.

Atividade 8. Novamente, observe a figura e responda:



a) Quantos $\frac{5}{4}$ cabem em $\frac{1}{2}$?

b) Apresente uma solução matemática para $\frac{1}{2} \div \frac{5}{4}$.

Atividade 9. Responda:

a) $\frac{1}{7} \div 8$

b) $\frac{4}{5} \div \frac{3}{6}$

c) $\frac{5}{4} \div \frac{3}{7}$

d) $\frac{5}{4} \div \frac{2}{10}$

e) Escreva uma regra que mostre como dividir duas frações quaisquer.

Atividade 10. Sabendo que

(i) Dois segmentos são comensuráveis quando **podem** ser simultaneamente expressos como múltiplos inteiros de uma unidade em comum e

(ii) dois segmentos são incomensuráveis quando **não podem** ser simultaneamente expressos como múltiplos inteiros de uma unidade comum,

responda:

a) Quando medimos um segmento do caso (i) tendo o outro segmento do caso (i) como unidade, o resultado é um número ....

b) Quando medimos um segmento do caso (ii) tomando o outro segmento do caso (ii) como unidade, o resultado é um número ....

c) Dê um exemplo de (b).