UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALINE MARCA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO MÉDIO

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2015

ALINE MARCA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: João Biesdorf, Dr.

Co-orientador: Márcio Bennemann, Dr.

PATO BRANCO

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

M313c Marca, Aline
Construções geométricas como recurso pedagógico no ensino médio / Aline Marca.— 2015.
124 f. : il. ; 30 cm

Orientador: João Biesdorf
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2015.
Bibliografia: f. 114 - 116

1. Construções geométricas. 2. Geometria. 3. Régua e compasso. I. Biesdorf, João, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (21. ed.) 510

Ficha catalográfica elaborada por
Terezinha Aparecida Loch CRB 14/705

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 006

"Construções Geométricas Como Recurso Pedagógico No Ensino Médio"

por

Aline Marca

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 14h do dia 21 de maio de 2015. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. João Biesdorf, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. Vitor Jose Petry, Dr.
(UFFS/Chapecó)

Prof. Marcio Bennemann, Dr.
(UTFPR/Branco)

Prof. Carlos Alexandre Ribeiro Martins, Dr.
(UTFPR/Branco)

Profª. Janecler Aparecida Amorin Colombo, Dr.
(UTFPR/Branco)

Prof. João Biesdorf, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

Dedico este trabalho à minha filha Lara Marca Gottardi, pessoa mais importante em minha vida.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido realizar esse sonho.
- À minha mãe Vaneide Maria Toldo Marca pela colaboração em todos os momentos.
- Ao meu esposo Thiago Gottardi pela compreensão e pelo apoio.
- Aos meus orientadores Dr. João Biesdorf e Dr. Márcio Bennemann pelos conhecimentos que compartilharam.
- Aos colegas do PROFMAT que participaram comigo dessa etapa em minha vida.

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.”

Jacques Bernoulli

RESUMO

MARCA, Aline. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO MÉDIO. 124 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

Este trabalho tem como principal objetivo proporcionar aos alunos do ensino médio um crescimento em seus conhecimentos matemáticos e geométricos, através da utilização das Construções Geométricas como recurso pedagógico nas aulas de Matemática. Primeiramente foi realizada uma pesquisa bibliográfica para compreender como surgiu e evoluiu o campo da Geometria, bem como as Construções Geométricas. Também através da pesquisa bibliográfica foram diagnosticadas as formas como o ensino da Geometria aconteceu em nosso país, além disso foram estudadas algumas teorias relacionadas à aprendizagem e em particular a Teoria Van Hiele que trata sobre a aprendizagem geométrica. São analisadas duas formas de abordagem das Construções Geométricas em sala de aula: através dos instrumentos manuais de desenho - régua e compasso - e através do instrumento computacional - software geométrico - sendo que optamos por abordar utilizando os instrumentos régua e compasso. É proposta uma oficina com nove atividades de Construções Geométricas que foi aplicada com uma turma da 3ª série do ensino médio, da Escola de Educação Básica Professor Anacleto Damiani, na cidade de Abelardo Luz, estado de Santa Catarina. Cada atividade da oficina conta com os seguintes tópicos: Objetivos da Atividade, Folha da Atividade, Passos da Construção, Justificativa da Atividade e Solução da Atividade. Após a aplicação da oficina os dados foram analisados através da Análise de Conteúdo segundo três categorias: Instrumentos de Desenho, Ângulos e suas Implicações e Paralelas e suas Implicações. Foi possível perceber que a maioria dos alunos conseguiu atingir os objetivos da pesquisa, e tiveram uma melhora em seus conhecimentos matemáticos e geométricos, o que pode ser percebido através da análise de questionários aplicados com os alunos, gravações de áudio, observações feitas durante a oficina e principalmente através da melhora apresentada pelos alunos no desenvolvimento das atividades propostas.

Palavras-chave: Construções Geométricas, Geometria, régua e compasso.

ABSTRACT

MARCA, Aline. GEOMETRIC CONSTRUCTIONS AS A TEACHING RESOURCE IN HIGH SCHOOL. 124 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

This work aims to provide high school students an development in his mathematical and geometrical knowledge, through the use of Geometric Constructions as a teaching resource in Mathematics classes. First a literature search to understand how it emerged and evolved the field of geometry was carried out and the Geometric Constructions. The ways in which the teaching of geometry happened in our country, also were studied some theories related to learning and in particular the Van Hiele theory which deals with the geometric learning also through the literature search were diagnosed. Two forms of the Geometric Constructions approach are analyzed in class: through the design of hand tools - ruler and compass - and through the computational tool - geometric software - being that we chose to approach using the ruler and compass instruments. It is proposed a workshop with nine Geometric Construction activities which was applied with a group of 3rd year of high school, the Escola de Educação Básica Professor Anacleto Damiani in the city of Abelardo Luz, Santa Catarina. Each workshop activity includes the following topics: Activity Goals, Activity Sheet, Steps of Construction Activity Background and activity of the solution. After application of the workshop, the data were analyzed through content analysis according to three categories: Drawing Instruments, angles and their implications and Parallel and its Implications. Was observed that most of the students managed to achieve the research objectives, and had an development in their mathematical and geometrical knowledge, which can be perceived through the analysis of questionnaires administered to students, audio recordings, observations made during the workshop and especially through the improvement of the students in the development of the proposed activities.

Keywords: Geometric Constructions, Geometric, ruler and compass.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde a pré-história os seres humanos são motivados a manusear objetos e transformá-los em outros que possam ser úteis em seu dia a dia. Com o desenvolvimento das cidades tornou-se necessária a construção de estabelecimentos e moradias, então a Geometria começou a desenvolver-se de forma efetiva, tornando-se cada vez mais presente na vida das pessoas. Podemos perceber nas construções de antigas civilizações a evidência das formas geométricas, como, por exemplo, nas Pirâmides do Egito e no Partenon da Grécia.

De acordo com Machado (2004) a palavra Geometria tem origem grega e significa Geo-terra e Metria-medida, pois teria sido originada da medição de terrenos. Na Geometria são estudadas as figuras com suas formas e propriedades. Por se consolidar das necessidades de relações com o mundo, podemos facilmente associar os conteúdos geométricos com nosso cotidiano. Já dizia Lopes et al. que:

> A geometria desempenha um papel central no currículo da Matemática dos ensinos fundamental e médio [...] O domínio dos conhecimentos geométricos básicos - como formas, medidas de comprimento, áreas e volumes - é essencial para a integração de um indivíduo à vida moderna. (LOPES et al., 2007, p. 81)

Os estímulos visuais podem auxiliar no aprendizado da Geometria. O recurso do Desenho Geométrico é uma ferramenta de fácil aplicabilidade tanto no ensino infantil até os níveis superiores, podendo auxiliar na compreensão de conceitos e na visualização de propriedades das figuras geométricas. Na atual matriz curricular da disciplina de Matemática para o estado de Santa Catarina, não é obrigatório o ensino do Desenho Geométrico, cabendo ao professor optar ou não por sua utilização.

As construções com régua e compasso, também chamadas de Construções Geométricas, possuem as mesmas aplicações do Desenho Geométrico, sendo apresentadas na forma de passos a serem seguidos ou descobertos, a fim de se construir uma determinada figura, dadas suas propriedades ou definições. De acordo com Wagner:

> As Construções Geométricas devem, em nossa opinião, acompanhar qualquer curso de Geometria na escola secundária. Os problemas são motivadores, às

> vezes intrigantes e frequentemente conduzem a descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade de dados. (WAGNER, 2007, p. 19)

Podemos encontrar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Médio algumas habilidades que podem ser desenvolvidas com o estudo da Geometria:

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (BRASIL, 2000, p. 123)

Sendo assim, a ferramenta do desenho na forma de Construções Geométricas, pode ser utilizada para criar situações onde o aluno desenvolva uma melhor visualização geométrica plana e espacial.

Na disciplina de Matemática existem vários recursos didáticos que podem ser utilizados pelos professores para uma melhor aprendizagem dos alunos. Para trabalhar os conteúdos sobre Geometria uma das alternativas é a utilização das Construções Geométricas com régua e compasso. **Partindo desse princípio, a pergunta de pesquisa questiona se as Construções Geométricas são capazes de desenvolver o pensamento matemático e elevar o nível de aprendizagem geométrica dos alunos do Ensino Médio?**

O objetivo principal deste trabalho é proporcionar aos alunos um crescimento em seus conhecimentos matemáticos e geométricos, através da utilização das Construções Geométricas como recurso pedagógico nas aulas de Matemática. É proposta uma oficina de atividades que foi aplicada com alunos do Ensino Médio, através da utilização dos instrumentos régua e compasso para a realização das Construções Geométricas.

Alguns objetivos específicos da pesquisa são:

- Realizar uma pesquisa bibliográfica sobre a origem e o desenvolvimento da Geometria.
- Compreender a forma como os conteúdos de Geometria foram transmitidos aos alunos ao passar dos anos, em nosso país.
- Pesquisar na Proposta Curricular do estado de Santa Catarina quais as orientações sobre os conteúdos de Matemática referentes à Geometria.
- Analisar as principais teorias desenvolvidas em relação a aprendizagem geométrica.

- Criar e aplicar com alunos do Ensino Médio uma oficina sobre Construções Geométricas, através da utilização dos instrumentos manuais de desenho régua e compasso.
- Analisar o desenvolvimento dos alunos em relação ao estágio em que se encontravam antes da aplicação da oficina, relacionado ao nível de aprendizagem geométrica.

Os conhecimentos matemáticos e geométricos são importantes para que o sujeito consiga compreender as formas no mundo que o cerca, além de poder utilizar esses conhecimentos da maneira adequada para lhe auxiliar a resolver problemas ao longo da vida. Segundo os PCNs:

> Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. (BRASIL, 2000, p. 111)

Nessa perspectiva, o estudo da Geometria e das Construções Geométricas, busca propiciar uma melhor interação do homem com o mundo e uma melhor compreensão dos objetos que o cercam.

No capítulo **Justificativa** são ressaltados autores utilizados como referência para a pesquisa, afim de destacar os pontos que a justificam. O capítulo sob o título **Da Geometria às Construções Geométricas** é dividido em seções. Na seção **A Origem da Geometria** são apresentados alguns pontos interessantes da história da Geometria, desde seu surgimento no Egito, passando pela Grécia, berço das Construções Geométricas até o surgimento das Geometrias Não Euclidianas. Na seção **A Geometria nas Escolas Brasileiras** descrevemos a evolução no ensino da Geometria em nosso país. Na seção **A Aprendizagem da Geometria** são destacadas algumas teorias relacionadas à aprendizagem geométrica. Na seção **Recursos Didáticos no Ensino de Construções Geométricas** são tratados os recursos disponíveis para a abordagem das Construções Geométricas em sala de aula, em particular é destacado o uso dos instrumentos de desenho régua e compasso e também o uso das tecnologias. No capítulo **Metodologia e Procedimentos** são apresentamos os procedimentos e recursos metodológicos pelos quais a pesquisa foi desenvolvida. No capítulo **Proposta de Oficina sobre Construções Geométricas** é apresentada uma proposta com nove atividades, juntamente com seus objetivos, passos da construção, justificativa e solução, que foi aplicada com uma turma da 3 série do Ensino Médio. No capítulo **Análise de Dados** os dados coletados durante a aplicação da oficina são codificados e analisados, em relação a metodologia escolhida para a apresentação do trabalho. Por último são destacadas as **Considerações Finais** em relação ao trabalho desenvolvido e aplicado.

2 JUSTIFICATIVA

Neste capítulo trazemos alguns pontos que justificam a pesquisa realizada, sobre a utilização de Construções Geométricas como recurso pedagógico nas aulas de Matemática do Ensino Médio. São referenciados alguns autores que incentivam a utilização das Construções Geométricas com régua e compasso e também é ressaltada a importância do ensino da disciplina de Matemática e dos conteúdos sobre Geometria nas escolas.

O desenvolvimento da Matemática através dos tempos deu-se de forma natural, ou seja, a Matemática surgiu da necessidade cotidiana do ser humano. O surgimento do número deu-se pela necessidade da contagem, o desenvolvimento da Geometria deu-se pela relação entre objetos e formas. Na medida em que a ciência e a Matemática evoluíram, foram sendo desenvolvidas novas técnicas de trabalho em sala de aula, além do aprimoramento das técnicas antigas.

Podemos perceber que a Matemática é uma ciência extremamente importante, sendo trabalhada em todas as escolas do Brasil como disciplina obrigatória no currículo. Segundo Machado:

> Em todos os lugares do mundo, independentemente de raças, credos ou sistemas políticos, desde os primeiros anos de escolaridade, a Matemática faz parte dos currículos escolares, ao lado da Linguagem Natural, como uma disciplina básica. Parece haver um consenso com relação ao fato de que seu ensino é indispensável e sem ele é como se a alfabetização não se tivesse completado. (MACHADO, 1994, p. 8)

Já de acordo com Ávila: “a razão mais importante para justificar o ensino da Matemática é o relevante papel que esta disciplina desempenha na construção de todo o edifício do conhecimento humano” (AVILA, 2010, p. 6). Foi através do desenvolvimento da Matemática, em especial do desenvolvimento da Geometria, que o homem conseguiu calcular a distância entre a Terra e a lua ou a circunferência do nosso planeta, por exemplo.

De acordo com Soares:

> A geometria é essencialmente uma criação humana, ou um conjunto de criações

> que resultam de maneiras que o ser humano encontra para:
>
> - transformar e representar o espaço em que vive,
> - planejar uma intervenção nesse espaço,
> - planejar a construção de um objeto,
> - exprimir ideias sobre o que percebe no ambiente,
> - promover o embelezamento de um objeto, de uma superfície ou de um ambiente,
> - representar o mundo em linguagem científica. (SOARES, 2010, p. 96)

Nesse contexto, a Geometria pode e deve ser empregada para a resolução de problemas cotidianos. É possível notar a existência de relações entre elementos e fórmulas geométricas e objetos reais, mas para que essas relações sejam compreendidas da forma correta é preciso conhecer as propriedades dos elementos geométricos.

O aprendizado da Geometria está intimamente ligado a ferramenta do desenho. Torna-se difícil ministrar uma aula sobre Geometria no ensino básico sem precisar fazer um desenho sequer na lousa. Com o auxílio dos desenhos, as aulas sobre Geometria tornam-se mais acessíveis, o que gera maior interesse dos alunos pela Matemática.

Segundo Januário: "O ensino do desenho geométrico nas escolas do ensino fundamental, médio e superior instrumentaliza o futuro profissional das mais diversas áreas e serve de preâmbulo aos outros gêneros de desenho" (JANUÁRIO, 2000, p. 11). O autor também define Desenho Geométrico como sendo um conjunto de técnicas utilizadas para que o traçado das figuras seja feito da forma correta, de acordo com suas definições e propriedades.

A abordagem do Desenho Geométrico em sala de aula pode ser feita de duas maneiras principais: no papel com o auxílio de instrumentos como régua, compasso e lápis, ou no computador com o auxílio de um *software* que realize o traçado de figuras. A ferramenta do *software* por si só, já é uma interessante maneira para o entendimento dos elementos da Geometria, porém se realizada a interação com desenhos construídos manualmente através das Construções Geométricas, a aprendizagem pode se tornar mais efetiva.

Existem vários estudos que ressaltam a importância da utilização das Construções Geométricas com régua e compasso, e também analisam as contribuições de sua utilização como recurso pedagógico nas aulas de Matemática. Dentre eles podemos destacar os estudos de Itzcovich:

> [...] as construções com os instrumentos clássicos da geometria permitem explorar, identificar, conjecturar e validar propriedades das figuras [...] Em consequência, analisar os dados com os quais deve ser construída uma figura, determinar se a construção é possível ou não, estabelecer relações entre os dados

> conhecidos e o desenho a obter etc., resultam em uma experiência extremamente útil no caminho para entender uma figura como o conjunto de relações que a caracterizam e que podem ser enunciadas num texto. (ITZCOVICH, 2012, p. 7)

Os estudos de Zuin (2001) apontam que nas últimas décadas, com a criação dos PCNs, foi percebido um incentivo ao ensino da Geometria nas escolas do Brasil. Segundo a autora, é possível notar uma preocupação maior nos livros didáticos, que procuram proporcionar uma Geometria mais prática e aplicável, inclusive com a utilização das construções com régua e compasso em alguns livros e materiais fornecidos aos professores e às escolas.

Nesse sentido, é possível perceber a grande importância de se utilizar instrumentos como a régua e o compasso para ensinar Construções Geométricas, além de aprenderem a função de cada instrumento e seu manuseio correto, os alunos estarão desenvolvendo-se intelectualmente. Como cada pessoa aprende de forma diferente, existem alunos capazes de realizar abstrações e deduções, mas também há aqueles que sentem dificuldades em visualizar os elementos geométricos, aos quais o desenho pode ser uma ferramenta importante na construção de seus conhecimentos matemáticos.

3 DA GEOMETRIA ÀS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo são apresentados os principais resultados da pesquisa bibliográfica realizada, sendo que o capítulo está dividido em seções. Na seção 3.1 A Origem da Geometria, são apresentados alguns pontos interessantes da história da Geometria, desde seu surgimento no Egito, passando pela Grécia, berço das Construções Geométricas até o surgimento das Geometrias Não Euclidianas. Na seção 3.2 A Geometria nas Escolas Brasileiras, descrevemos como aconteceu e acontece o ensino da Geometria em nosso país. Na seção 3.3 A Aprendizagem da Geometria, são destacadas algumas teorias relacionadas à aprendizagem, e em especial a Teoria Van Hiele sobre a aprendizagem geométrica. Na seção 3.4 Recursos Didáticos no Ensino de Construções Geométricas, são tratados os recursos disponíveis para a abordagem das Construções Geométricas em sala de aula, em particular é destacado o uso dos instrumentos de desenho régua e compasso e também o uso das tecnologias.

3.1 A ORIGEM DA GEOMETRIA

Desde os tempos mais remotos o homem utiliza a Matemática a seu favor. O desenvolvimento de técnicas de contagem, a percepção da Geometria e as relações com o mundo que o cerca, desenvolveram o pensamento humano. Podemos encontrar em diversos livros e dicionários a definição para a palavra Matemática. De acordo com Machado:

> O termo *matemática* é de origem grega; significa 'o que se pode aprender' (mathema quer dizer aprendizagem). Quem procura o significado deste termo em um dicionário, possivelmente é levado a outras concepções:
> *Matemática:* 'Ciência que investiga relações entre entidades definidas abstrata e logicamente' (Aurélio)
> *Matemática:* 'Ciência que lida com relações e simbolismos de números e grandezas e que inclui operações quantitativas e soluções de problemas quantitativos' (Enc. Britânica) (MACHADO, 1994, p. 7)

As antigas civilizações desenvolveram-se matematicamente de forma independente, tanto que conhecemos diversos sistemas de numeração com bases numéricas diferentes da decimal. Com a Geometria não foi diferente, cada povo desenvolveu suas técnicas de forma conveniente para auxiliar na resolução de problemas. Segundo Longen:

> Precisar o exato momento em que uma grande idéia surgiu é um ato extremamente difícil e arriscado [...] Poderíamos, quando muito, arriscar não uma data exata, muito menos um ano exato, mas talvez alguns milênios ou séculos em torno dos quais a Geometria teve sua origem. (LONGEN, 2004, p. 30)

Sendo assim, é praticamente impossível estimar uma data para o surgimento da Geometria, a hipótese mais provável é que tenha surgido no Egito, relacionada a necessidade de repartição de terras, após cada cheia do rio Nilo. Segundo Machado (2004) no Egito existiam medidores de terras "que usavam fórmulas e cordas para calcular a área de triângulos e quadriláteros" (MACHADO, 2004, p. 49). Uma parte da Matemática realizada pelos egípcios está registrada em papiros, que estão guardados em museus pelo mundo.

Existem vários livros que tratam da história da Matemática e relatam seu desenvolvimento ao passar dos séculos. Dentre eles, um bastante reconhecido é o livro de Boyer, segundo ele:

> Durante muito tempo se supôs que os gregos aprenderam os rudimentos de geometria com os egípcios, e Aristóteles argüiu que a geometria teria surgido no vale do rio Nilo porque lá os sacerdotes tinham o lazer necessário para desenvolver o conhecimento teórico. Que os gregos de fato emprestaram do Egito alguma matemática elementar é provável [...] mas evidentemente a extensão desse empréstimo foi exagerada. O conhecimento revelado nos papiros é quase todo prático e o elemento principal nas questões eram cálculos. (BOYER, 1974, p. 16)

Foi na Grécia antiga que a Matemática, inclusive o campo da Geometria, teve seu desenvolvimento acelerado. O matemático e filósofo grego Pitágoras, que viveu entre os séculos V e IV antes de Cristo, contribuiu muito para isso sendo apontado como fundador de uma escola onde se estudava Matemática, que ficou conhecida como Escola Pitagórica. O Pentagrama, uma estrela de cinco pontas, é considerada símbolo dos pitagóricos e sua escolha seria atribuída a sua beleza e perfeição. De acordo com Barbosa (2006) os pitagóricos se interessavam pela Ciência, Filosofia e Matemática e desenvolveram a Teoria dos Números, além da descoberta da existência dos Números Irracionais.

O matemático grego Euclides de Alexandria, que viveu durante o século III antes de Cristo, teve a brilhante ideia de juntar todo o conhecimento matemático até sua época em uma única obra chamada Os Elementos, ou simplesmente Elementos. Essa coletânea consistia em treze livros referentes a assuntos sobre Geometria, Álgebra e Aritmética. Foi a primeira vez que alguém organizou as ideias matemáticas através do chamado Método Axiomático, que segundo Ávila consiste na "organização dos fatos num encadeamento dedutivo, em que um reduzido número de proposições, conceitos primitivos e definições iniciais são utilizadas para demonstrar, uns após outros, todos os teoremas considerados" (AVILA, 2010, p. 57). A obra elaborada por Euclides influenciou pensadores da época e ainda influencia a forma como trabalhamos.

Elementos de Euclides foi uma das obras mais importantes publicadas até o momento, já dizia Barbosa:

> Ao lado da Bíblia é sem dúvida o livro mais reproduzido e estudado de todos os tempos que já foram escritos na história do mundo ocidental [...] Certamente Euclides não criou toda a geometria contida nos seus "Elementos". Seu trabalho foi muito mais aquele de um compilador, desejoso de colocar em um único texto, três das grandes descobertas gregas. (BARBOSA, 2006, p. 59-60)

As três grandes descobertas gregas as quais o autor se refere são os estudos sobre triângulos, sobre paralelas e sobre áreas. Euclides descreveu em sua obra algumas noções iniciais para desenvolver o Método Axiomático, os Postulados e os Axiomas ou Noções Comuns. É possível encontrar vários livros que trazem os Postulados e Axiomas conforme definidos por Euclides, porém há uma controvérsia sobre quais seriam os Postulados e quais seriam os Axiomas. De acordo com Boyer:

> Aristóteles tinha feito uma forte distinção entre axiomas (ou noções comuns) e postulados; as primeiras, ele dizia, devem ser convincentes por elas mesmas - verdades comuns a todos os estudos - mas os postulados são menos óbvios e não pressupõem o assentimento do estudante, pois dizem respeito somente ao assunto em discussão. Alguns autores posteriores distinguiram entre os dois tipos de pressuposições aplicando a palavra axioma somente a algo conhecido ou aceito como evidente, enquanto a palavra postulado se referia a alguma coisa a ser 'requerida' [...] Os matemáticos modernos não vêem diferença entre axioma e postulado. (BOYER, 1974, p. 77)

Segue abaixo a lista de Postulados e Axiomas de acordo com o livro de Barbosa (2006):

Postulados:

1. É possível traçar um segmento de reta por dois pontos quaisquer distintos.
2. É possível prolongar um segmento de reta infinitamente.
3. É possível traçar uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Axiomas:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados serão iguais.
3. Se iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra.
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Esses Axiomas definidos por Euclides são exclusivos para o desenvolvimento das teorias sobre Geometria. Particularmente, o Quinto Postulado foi muito criticado pela comunidade Matemática da época. É possível perceber que ele é mais extenso que os outros, sendo que durante séculos, muitos matemáticos tentaram demonstrá-lo, mas sem sucesso.

De acordo com Neto:

> Então, ocorreu que, no início do século XIX, o húngaro János Bolyai e o russo Nikolai Lobatchevsky mostraram independentemente que era, de fato, necessário *assumir* a unicidade da paralela como um postulado. O que eles fizeram foi construir outro tipo de geometria, denominada *geometria hiperbólica*, na qual ainda são válidos os quatro primeiros postulados de Euclides, mas tal que, por um ponto fora de uma reta qualquer, é possível traçar *infinitas* retas paralelas à reta dada. (NETO, 2012, p. 51)

A Geometria Hiperbólica é um modelo que funciona na superfície hiperbólica, diferentemente da Geometria Euclidiana, que possui como modelo o plano. Além da Geometria Hiperbólica, existe a Geometria Elíptica, que funciona na superfície elíptica, a mais comum é a esfera. Sobre a origem da Geometria Elíptica, Dario afirma que:

> [...] Riemann (1826-1866), estudou a variação em que dada uma reta e um ponto fora dela, não há reta paralela à reta dada que passe pelo ponto. Esta hipótese contradiz alguns dos primeiros postulados de Euclides, como o conceito de que por dois pontos distintos passa uma única reta e que a reta pode ser prolongada infinitamente. Porém, de acordo com Eves (2011), Riemann mostrou que se fosse descartada a infinitude da reta, mas admitindo-se que a reta é ilimitada e com outros ajustes necessários, esta outra geometria torna-se totalmente consistente e acima de tudo, muito útil. Esta geometria, anos depois recebeu o nome de Geometria Elíptica. (DARIO, 2014, p. 25)

Embora de início tenham sido mal aceitas pela maioria dos matemáticos, com o passar dos anos eles ficaram convencidos de que as Geometrias Não Euclidianas são tão importantes quanto a Geometria Euclidiana. Cada tipo de Geometria possui um papel particular no desenvolvimento da Matemática, sendo assim, todas são essenciais.

3.2 A GEOMETRIA NAS ESCOLAS BRASILEIRAS

Ensinar e aprender são ações praticadas pelo homem desde o início de sua existência. Desde o nascimento uma criança aprende a interagir com o mundo que a cerca e, com o passar do tempo, essas interações devem ser estimuladas, inclusive quando ela chega a escola. Devemos ter consciência de que o ato de aprender não se dá de forma simples, nele estão envolvidas relações complexas. Segundo Assmann (1998) a aprendizagem não se trata de uma junção sucessiva de informações, pelo contrário, trata-se de uma rede de interações muito complexa e dinâmica que faz gerar no cérebro humano a aquisição e a concretização dos novos conhecimentos.

Na Matemática escolar os conteúdos normalmente são divididos em campos ou áreas. Uma das divisões que pode ser adotada, de acordo com Santos e Lima (2010) é: Números e Operações, Geometria, Álgebra, Grandezas e Medidas, Estatística - Probabilidade - Combinatória. Pode-se notar que a Geometria é de suma importância, assumindo o papel de um dos campos estudados pela Matemática escolar. De acordo com Pavanello:

> Em vários países, inúmeras pesquisas estão sendo realizadas, procurando determinar o "que" ensinar de geometria e "como" fazê-lo. Grandes esforços têm sido empreendidos na capacitação de docentes, visando a permitir-lhes realizar um trabalho de qualidade em relação a esse tema. (PAVANELLO, 1993, p. 8)

Kopke (2006) realizou uma pesquisa histórica sobre o ensino da Geometria e do desenho nas escolas do Brasil. Constatou-se que a partir da década de 30 o ensino da Geometria e do desenho receberam um destaque, porém com o passar dos anos foram perdendo importância. Tanto que atualmente, o ensino do Desenho Geométrico não é obrigatório e em alguns livros didáticos os conteúdos sobre Geometria ficam restritos a parte final.

Pavanello (1993) descreve sobre o desenvolvimento da Geometria no Brasil, e diz que o país vivia da agricultura no início do século XX, onde apenas alguns poucos tinham acesso a educação secundária e superior. Na educação primária, buscava-se aprimorar as técnicas para o trabalho comercial. Ainda segundo a autora, o ensino secundário era pago e os professores eram, geralmente, autodidatas, militares ou engenheiros e os campos da Matemática eram subdivididos e ensinados por professores diferentes.

As guerras mundiais também influenciaram no processo educativo do Brasil, e segundo Pavanello:

> Em 1930, no rastro dessas mudanças, o governo federal provisório toma sua primeira medida relativa à educação: cria o Ministério da Educação e Saúde

> [...] Decretos do Ministério estabelecem a reestruturação do ensino superior, adotando-se para ele o regime universitário, e a reorganização do ensino comercial (médio e superior) e do secundário, buscando transformar esse último em um curso predominantemente formativo. (PAVANELLO, 1993, p. 9)

De acordo com Pavanello (1993) o ensino da Matemática e da Geometria no Brasil teve um avanço na década de 30 com as instalações das Universidades de São Paulo e do Rio de Janeiro. Ainda segundo a autora, nas escolas o ensino da disciplina de Matemática ficou responsável por um único professor, que deveria integrar seus diversos campos de ensino, inclusive a Geometria, que seguia ideias intuitivas até as formalizações. Segundo Pavanello (1993) na década de 40 o ensino da Geometria sofreu algumas alterações e passou a ter um enfoque intuitivo nas séries iniciais e dedutivo nas séries finais do Ensino Fundamental, além de ser abordada também em todas as séries do Ensino Médio.

A partir da década de 60 o Brasil se tornou mais industrializado e economicamente ativo, segundo Pavanello (1993) nesse período surgiu o movimento da Matemática Moderna, cujas ideias em relação a Geometria eram de ressaltar as definições das figuras e caracterizá-las, de acordo com a Teoria dos Conjuntos, como pontos no plano. De acordo com os estudos de Pires:

> Veiculada principalmente nos livros didáticos, sem adequada preparação dos educadores nem suficiente discussão de seus propósitos, a Matemática Moderna surgiu entre nós como substituta definitiva da velha Matemática, com a qual parecia não manter relação alguma. (PIRES, 2000, p. 31)

O movimento da Matemática Moderna defendia a ideia de que os conteúdos deveriam ser repassados aos alunos com certo rigor e formalidade. Segundo Pires (2000) no Brasil a Matemática Moderna foi difundida principalmente nos congressos realizados em Salvador, Porto Alegre, Rio de Janeiro e Belém nos respectivos anos de 1955, 1957, 1962 e 1967. Existiam muitos professores adeptos ao movimento e muitos que criticavam seus ideais.

Tanto os alunos quanto os professores nas escolas do Brasil não conseguiam acompanhar a visão formalizada da Matemática trazida pelo movimento da Matemática Moderna, e de acordo com Lopes et al.:

> Como consequência dessa visão, observamos uma generalizada inadequação do tratamento dado à geometria pelos textos didáticos até a década passada. Um tratamento excessivamente formal e, consequentemente, árido demais para o principiante, além de não ter conexão com outros tópicos matemáticos [...] Outra, e mais sutil, manifestação de despreço dos livros pela geometria pode ser inferida pela prática, muito comum, de colocar os capítulos que tratam desse assunto no final dos livros, aos quais o professor quase nunca consegue chegar por falta de tempo hábil. (LOPES et al., 2007, p. 83)

Também encontramos no texto de Neves (BRASIL, 2008d) alguns parâmetros de como esse movimento influenciou e ainda influencia o modo como ensinamos Geometria nas escolas:

> [...] ocorre uma “algebrização” da geometria, distanciando-se da geometria prática [...] Essa orientação, aliada ao despreparo dos professores, contribuiu para que a geometria não fosse ensinada. Os professores, não conseguindo transpor para o contexto didático as novas orientações, abandonaram a anterior, passando a enfatizar, nas escolas, o ensino da álgebra em detrimento do ensino da geometria. (BRASIL, 2008d, p. 57)

Zuin (2001) realizou uma análise histórica sobre o desenvolvimento das Construções Geométricas, desde as antigas civilizações até chegar nas escolas do Brasil. Anteriormente a década de 70 o Desenho Geométrico era disciplina obrigatória nas escolas brasileiras. Com a promulgação da lei LDB 5692 de 11 de agosto de 1971 as escolas adquiriram liberdade para compor sua grade curricular, sendo assim muitas optaram por não mais trabalhar o Desenho Geométrico. Essa lei trouxe algumas consequências para o ensino da Geometria, segundo Pavanello:

> O ensino da geometria passa a ser feito - quando não é eliminado - apenas no 2º grau, com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e suas representações porque o Desenho Geométrico é substituído , nos dois graus do ensino, pela Educação Artística. (PAVANELLO, 1993, p. 13)

Atualmente o ensino da Geometria se dá desde o Educação Infantil até o Ensino Médio. São ensinadas nas escolas Geometria Euclidiana Plana, Geometria Euclidiana Espacial e Geometria Analítica. O estudo da Geometria Euclidiana Plana inicia ainda na Educação Infantil estendendo-se até o Ensino Médio. Nela são tratados os conteúdos sobre as figuras geométricas planas, desde as mais simples como pontos ou retas e suas propriedades até as mais complexas como curvas ou polígonos e suas propriedades.

Os conteúdos sobre Geometria Euclidiana Espacial também perduram da Educação Infantil ao Ensino Médio, em níveis diferentes de abstrações. Ao passo que nos primeiros anos do Ensino Fundamental são apresentados aos alunos alguns sólidos geométricos espaciais, no Ensino Médio o estudo desses sólidos se torna bem mais avançado. Os alunos aprendem a calcular áreas e volumes desses sólidos e desenvolvem uma visão geométrica espacial.

Na Geometria Analítica, estudada apenas no Ensino Médio, é utilizado o sistema de coordenadas cartesianas para representar os elementos geométricos. Essa modalidade da Geometria utiliza os princípios da Álgebra para desenvolver equações de retas, calcular a distância entre pontos, equações de circunferências, entre outras. Há ainda as Geometrias Não Euclidianas, como a Geometria Elíptica e a Geometria Hiperbólica, que já foram citadas anteriormente.

Estas por sua vez, só fazem parte do currículo escolar obrigatório da disciplina de Matemática em alguns estados, como é o caso do estado do Paraná.

Na proposta ou diretriz curricular elaborada por cada estado estão as ações norteadoras do trabalho do professor em sala de aula, referente a cada disciplina da matriz. Encontramos também os conteúdos a serem trabalhados no ensino básico (infantil, fundamental e médio). Na Figura 1 estão os conteúdos sobre Geometria referente à Proposta Curricular de Santa Catarina, os quais devem ser trabalhados nas escolas estaduais de educação básica.

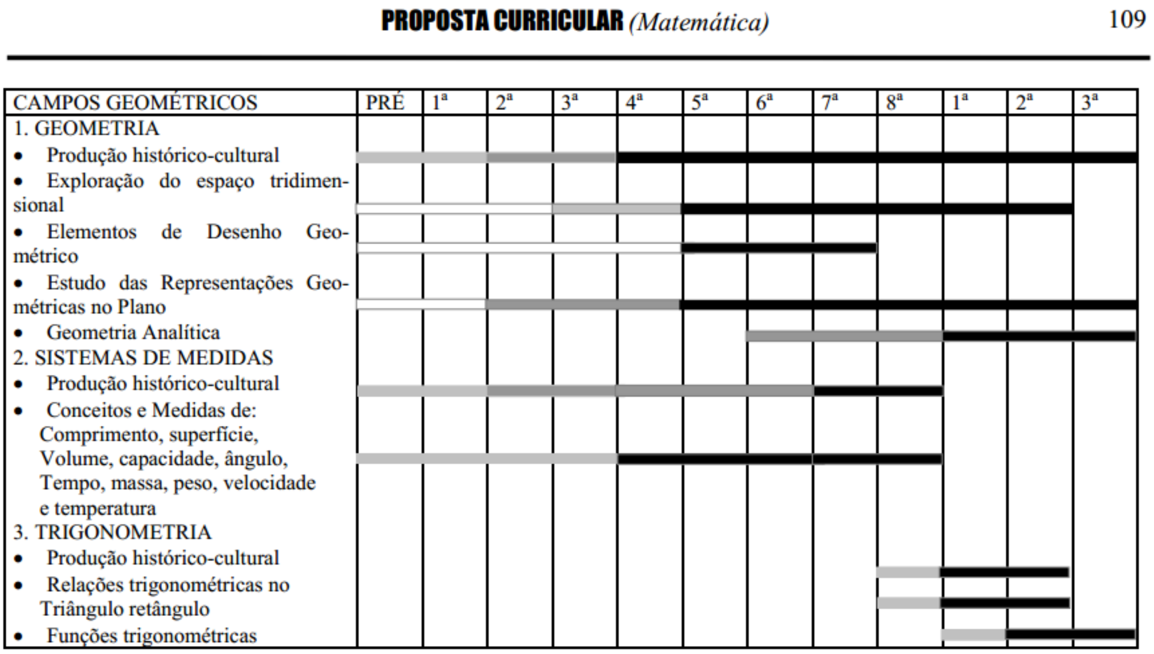


Figura 1: Proposta Curricular de Santa Catarina, 1998, p. 109

Na proposta curricular do estado de Santa Catarina há uma preocupação com o ensino da Geometria, tanto que são citadas várias características que contribuem para o desenvolvimento de habilidades geométricas nos alunos:

- estudo ou exploração do espaço físico e das formas;
- orientação, visualização e representação do espaço físico;
- visualização e representação das formas geométricas;
- denominação e reconhecimento das formas, segundo suas características;
- classificação de objetos segundo suas formas;
- estudo das propriedades das figuras e das relações entre elas;
- construção de figuras ou modelos geométricos;
- medição do espaço geométrico uni, bi e tridimensional (conceito e cálculo de perímetro, de área, de volume e capacidade);

- construção e justificação de relações e proposições tendo como base o raciocínio hipotético dedutivo. (SANTA CATARINA, 1998, p. 109)

Além de saber quais conteúdos devem ser ensinados aos alunos é importante que o professor faça a Transposição Didática desses conteúdos. No caso da Geometria, não basta saber se o conteúdo consta ou não na proposta estadual, faz-se necessário adaptar e sistematizar os conteúdos geométricos ao nível do aluno, para que este possa se sentir motivado. De acordo com Muniz (BRASIL, 2008a):

> [...] requer dos responsáveis e envolvidos no processo escolar uma transformação desse saber matemático, que cabe também ao professor, adequando-o aos interesses e necessidades do aluno. Essa transformação é denominada de transposição didática. A transposição aparece como um elemento de ligação entre o conhecimento científico da matemática e a matemática que o aluno, no seu nível de desenvolvimento psicológico, é capaz de aprender e produzir. (BRASIL, 2008a, p. 191)

Podemos notar que o processo de ensinar e aprender Geometria passou por várias transformações ao longo do tempo. Atualmente, a vasta quantidade de recursos disponíveis, dentre eles recursos manipulativos, lúdicos e digitais, fazem com que o trabalho do professor seja, também, de um investigador, à procura da forma mais adequada de se ensinar Geometria de acordo com a realidade à qual está inserido. Desse modo as Construções Geométricas podem representar uma importante alternativa ao processo de ensino e aprendizagem.

3.3 A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

O processo de aprendizagem não é tarefa simples, e o conhecimento adquirido na escola deve desenvolver nos alunos as habilidades e competências necessárias para que ele possa interagir socialmente e continuar aprendendo ao longo da vida. De acordo com os PCNs:

> A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta. Alunos que não falam sobre matemática e não tem a oportunidade de produzir seus próprios textos nessa linguagem dificilmente serão autônomos nessa área. (BRASIL, 2000, p. 120)

A aprendizagem da Geometria também têm suas particularidades, além de cada pessoa aprender de maneira diferente, cada campo da Matemática escolar possui uma forma diferenciada de ser captada e aprendida pelos alunos. Segundo Muniz (BRASIL, 2008e):

> Na verdade, há uma grande diferença entre aprender Álgebra ou Análise e aprender Geometria [...] enquanto a aprendizagem da Álgebra se sustenta em um "olhar para dentro", a aprendizagem de conceitos geométricos apoia-se em um "olhar para fora"[...] Enquanto a fonte de produção dos conhecimentos algébricos sustenta-se na lógica, na reflexão, na abstração de conceitos formais, ao contrário, a fonte primária e primeira da construção do conhecimento geométrico pelo homem é a observação de seu meio ambiente e a ação efetiva na conservação e na transformação da natureza na busca da própria preservação, proliferação, sobrevivência, desenvolvimento e transcendência da vida humana. (BRASIL, 2008e, p. 95)

Cada campo da Matemática é importante para o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático dos alunos, inclusive o campo da Geometria. De acordo com Souza:

> O desenvolvimento do conhecimento geométrico é parte de grande relevância do currículo de Matemática do ensino fundamental, pois através dele o educando desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite interpretar, compreender, descrever de forma gráfica e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O desenho possui papel essencial no desenvolvimento do conhecimento geométrico, uma vez que se trata da representação gráfica, da informação visual, acerca da realidade apresentada. (SOUZA, 2013, p. 6)

Existem várias teorias que tratam da aprendizagem em geral e também em particular sobre a aprendizagem Matemática ou geométrica. Uma teoria bastante conhecida sobre a aprendizagem é a do suíço Jean Piaget (1896 - 1980). Ele elaborou a ideia de que o aprendizado acontece através de etapas e desenvolveu a Teoria da Epistemologia Genética. A teoria de Piaget defende que o conhecimento acontece através das interações que o sujeito realiza com o meio, ou seja, para adquirir o conhecimento sobre um objeto é necessária a interação com o objeto, seja construindo-o ou transformando-o.

De acordo com Gravina e Santarosa (1998), na Teoria da Epistemologia Genética de Piaget o aprendizado acontece em três etapas: o estágio Pré-Operatório, onde as crianças aprendem as primeiras noções matemáticas apoiando-se em objetos concretos e sensoriais, no estágio Operatório Concreto surgem as operações, porém ainda há a necessidade de apoio em objetos concretos, já o estágio Operatório Formal acontece quando os alunos adquirem a habilidade de realizar abstrações. Neste sentido podemos perceber que a aprendizagem da Geometria pode ser facilitada através das interações, seja com objetos da vida cotidiana do aluno ou instrumentos de desenho e medição, como lápis, compasso e régua. Ainda segundo as autoras: "Os estudos de Piaget evidenciam já nos primeiros anos de vida os primórdios destas habilidades. Sua teoria, procura explicar o complexo processo através do qual se dá o desenvolvimento das funções cognitivas da inteligência"(GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 4).

No texto de Muniz (BRASIL, 2008e) também são tratados os estágios pelos quais os alunos aprendem Matemática, e sobretudo, aprendem Geometria. De acordo com ele, o conceito geométrico também é apresentado com experiências físicas ou sensoriais, fazendo com que o aluno realize experimentos, levante hipóteses, planeje ações e avalie os possíveis resultados. Segundo Muniz:

> [...] é errado pensar que o conceito em nível sensorial somente está presente no início da infância, pois mesmo no adulto, professor ou não, em situações espaciais, o sistema nervoso central apela inicialmente às estruturas sensoriais [...] Com isso, queremos dizer (e que fique bem claro) que o conceito geométrico, em nível perceptivo, tem fundamental importância no processo na construção do conhecimento matemático e, por conseqüência, deve ser valorizado e respeitado no processo da aprendizagem escolar da Geometria mediada pelo educador. (BRASIL, 2008e, p. 96)

Após o surgimento das ideias de Piaget, outros estudiosos também compartilharam teorias sobre o desenvolvimento cognitivo. Uma teoria bastante interessante que trata particularmente da aprendizagem da Geometria é a Teoria Van Hiele, a qual sugere um modelo onde é possível desenvolver o pensamento geométrico, com cinco níveis de aprendizagem. De acordo com Gonçalves et al.: "O casal de pesquisadores holandeses Dina e Pierre Van Hiele desenvolveram e publicaram, entre os anos de 1950 e 1980, um modelo explicativo de como se desenvolve o pensamento geométrico" (GONÇALVES et al., 2012, p. 25). Ainda segundo as autoras, se trata de um processo sequencial, assim o aluno deve passar por todos os níveis, onde para conseguir se apropriar dos conhecimentos de um determinado nível, deve ter compreendido os conceitos dos níveis anteriores.

Os cinco níveis da Teoria Van Hiele, citados por Crowley (LINDQUIST, 1994) são: Visualização, Análise, Dedução Informal, Dedução Formal e Rigor. Cada nível possui suas especificidades, e de acordo com Gonçalves et al. (2012) podem ser caracterizados basicamente por:

- **Nível 1 - Visualização:** o aluno é capaz de conhecer visualmente as figuras geométricas.
- **Nível 2 - Análise:** o aluno já consegue identificar as propriedades das figuras.
- **Nível 3 - Dedução Informal:** o aluno é capaz de acompanhar a uma prova formal e compreender as definições.
- **Nível 4 - Dedução Formal:** o aluno é capaz de construir sozinho uma prova formal.
- **Nível 5 - Rigor:** o aluno é capaz de comparar sistemas dedutivos com axiomáticas diferentes.

No processo da aprendizagem geométrica, a escolha da metodologia a ser utilizada para desenvolver as competências nos alunos deve ser feita com muito cuidado e planejamento por parte dos professores. De acordo com Gonçalves et al.:

> Um método de ensino pode acentuar ou impedir o progresso entre níveis [...] Cada nível tem um conjunto de saberes essencial para o pensar no nível seguinte e cada um deles possui uma linguagem com seus termos e símbolos que pode ser provisória até o progresso para o nível seguinte. (GONÇALVES et al., 2012, p. 26)

No nível da Visualização os alunos conseguem reconhecer visualmente as figuras e trocar ideias sobre elas. Também são capazes de classificá-las em grupos que possuem alguma semelhança. Crowley (LINDQUIST, 1994) afirma que “Neste estágio inicial, os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em torno deles” (LINDQUIST, 1994, p. 2), ainda segundo o autor nesse nível os alunos já são capazes de reproduzir figuras, identificar as formas e aprender um vocabulário geométrico. Segundo Gonçalves et al.:

> Entretanto, todas essas habilidades estão pautadas na visualização, nas características globais e visuais das formas, e isso faz com que as aparências possam prevalecer sobre as propriedades de uma figura. Nesse nível a compreensão de uma forma está muito ligada aos objetos com as quais ela se parece. Os alunos conseguem perceber como as formas são parecidas ou diferentes, mas tendo como critério sua aparência, o que significa o reconhecimento da forma como um todo e não por suas partes ou propriedades. (GONÇALVES et al., 2012, p. 27)

No nível da Análise os alunos são capazes de identificar nas formas suas propriedades e classificá-las de acordo com isso. Crowley (LINDQUIST, 1994) afirma que nesse estágio os alunos começam a distinguir as características das figuras, através da observação e posterior experimentação. De acordo com Gonçalves et al.:

> No nível 2, ou da Análise, os objetos de pensamento são todas as formas dentro de uma classe, bem mais do que analisar apenas uma única forma, ou seja, identificar uma forma, não por seu aspecto, mas pelas propriedades das figuras [...] No entanto, no nível 2 os alunos ainda não entendem que uma classe de figuras pode ser subclasse da outra [...] Quando os alunos começam a estabelecer relações entre as propriedades de objetos geométricos sem a restrição de um objeto em particular, isso significa que seu pensamento geométrico se encontra no nível 3, ou nível da Dedução Informal. (GONÇALVES et al., 2012, p. 27)

No nível da Dedução Informal os alunos são capazes de acompanhar o passo a passo de uma prova Matemática formal, porém ainda não são capazes de reproduzir sozinhos os passos de uma demonstração. Além disso, Crowley (LINDQUIST, 1994) afirma que: “Nesse nível os alunos conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras [...] quanto entre figuras" (LINDQUIST, 1994, p. 3), sendo assim, os alunos já são capazes de compreender as definições geométricas. Nesse nível, segundo Gonçalves et al.:

> As observações vão além das próprias propriedades e começam a enfocar os argumentos lógicos que envolvem propriedades de figuras. Para os alunos nesse nível, a apreciação de um argumento lógico é necessária, mas as estruturas axiomáticas de um sistema dedutivo formal ainda são superficiais [...] a percepção da necessidade de uma definição precisa e de que uma propriedade pode decorrer de outra. (GONÇALVES et al., 2012, p. 28)

No nível da Dedução Formal os alunos são capazes de reproduzir uma prova Matemática de maneira autônoma. Sendo assim, já possuem o entendimento de um sistema dedutivo em sua totalidade. De acordo com Crowley (LINDQUIST, 1994):

> Neste nível compreende-se o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. São percebidos a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações. Neste nível, a pessoa é capaz de construir demonstrações, e não apenas de memorizá-las; enxerga a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreende a interação das condições necessárias e suficientes; é capaz de fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca. (LINDQUIST, 1994, p. 4)

O nível do Rigor, de acordo com Crowley (LINDQUIST, 1994) dificilmente é alcançado por alunos do ensino básico, por esse motivo muitos dos trabalhos desenvolvidos com alunos privilegiam os quatro primeiros níveis de aprendizagem geométrica. Ainda segundo a autora: "Neste estágio o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes" (LINDQUIST, 1994, p. 4).

A pesquisa de Vieira (2010) é embasada pela Teoria Van Hiele, e de acordo com a autora, a identificação do nível em que cada aluno se esquadra pode ser feita através da aplicação dos Testes dos Níveis de Van Hiele, que consistem em identificar nos alunos, seja através de uma conversa, um questionamento ou até mesmo de um questionário, em qual dos níveis os alunos se enquadram.

A pesquisa de Villiers (2010) faz referência a Teoria Van Hiele e analisa experiências feitas em vários países do mundo, em relação à aprendizagem geométrica. O autor ressalta que a aprendizagem de Geometria em alguns países sofre uma descontinuidade relacionada ao Currículo de Matemática. Sendo que nos anos iniciais, os alunos aprendem as noções geométricas de forma intuitiva e quando chegam ao Ensino Médio, não conseguem transpor com a formalidade necessária as propriedades vistas no Ensino Fundamental. O autor ainda faz uma adaptação da Teoria Van Hiele para outros campos da Matemática, tais como Trigonometria, Funções e Álgebra Booleana.

Na Teoria Van Hiele também são apresentadas as fases que o professor deve seguir para que o aprendizado geométrico aconteça de maneira adequada. De acordo com Crowley (LINDQUIST, 1994) as fases são: Interrogação, Orientação Dirigida, Explicação, Orientação Livre e Integração. Segundo a autora: “No final da quinta fase, os alunos alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os alunos estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte” (LINDQUIST, 1994, p. 8). Segue abaixo as especificidades de cada fase, de acordo com a autora.

- **Fase 1 - Interrogação:** nessa fase o professor pode desenvolver com os alunos atividades orais ou escritas, afim de saber quais são os conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre o assunto e de informar aos alunos quais atividades serão realizadas posteriormente.
- **Fase 2 - Orientação Dirigida:** nessa fase o professor disponibiliza aos alunos materiais previamente planejados, afim de que eles se interessem pelo assunto e desenvolvam pequenas tarefas com respostas específicas.
- **Fase 3 - Explicação:** Nessa fase os alunos devem trocar informações sobre as fases anteriores e expressar suas visões e entendimentos das atividades desenvolvidas.
- **Fase 4 - Orientação Livre:** Nessa fase são apresentadas aos alunos tarefas mais complexas, que podem ser concluídas de várias formas ou que possuem um final em aberto ou até mesmo mais de uma solução.
- **Fase 5 - Integração:** Nessa fase é feito um apanhado geral de tudo o que foi aprendido nas fases anteriores, onde o professor deve auxiliar os alunos retomando pontos importantes do trabalho realizado.

A oficina proposta por este trabalho para ser aplicada com alunos do Ensino Médio, através da utilização das Construções Geométricas com régua e compasso foi aplicada de acordo com a Teoria Van Hiele. O desenvolvimento das atividades aplicadas com os alunos, às quais foi possível relacionar com as fases da Teoria Van Hiele, são especificadas nos capítulos 5 Proposta de Oficina sobre Construções Geométricas e 6 Análise de Dados.

3.3.1 DESENVOLVENDO HABILIDADES GEOMÉTRICAS

Existem várias habilidades que podem ser desenvolvidas com o ensino da Geometria, tais como visualização, resolução de problemas geométricos, percepção do mundo que nos cerca e representação de objetos matemáticos. Essas habilidades podem ser estimuladas nas aulas de Matemática a fim de que os alunos construam seus conhecimentos geométricos propiciando o desenvolvimento das competências oriundas da Geometria.

A habilidade de visualização pode ser estimulada ao longo dos anos escolares. De acordo com Bertoni (BRASIL, 2008d) o matemático Polya desenvolveu uma técnica para facilitar a resolução de problemas que consistia em compreender o problema, traçar um plano, colocar o plano em prática e comprovar os resultados. Porém, durante a resolução do problema, Polya sempre aconselhava seus alunos a fazer um desenho para estimular a visualização e facilitar sua resolução.

De acordo com Meier (2012) a habilidade de visualização é classificada como o primeiro hábito de pensamento descrito por Paul Goldenberg como essencial para a aprendizagem de Matemática. De acordo com a autora, Paul Goldenberg define hábitos de pensamento como sendo formas de pensar incorporadas tão bem que se tornam hábitos mentais.

Também existem textos matemáticos nos quais as estratégias para a resolução de problemas geométricos, são muito mais os desenhos e visualizações do que as palavras. Segundo Miller (2012) esse tipo de prova não é considerada por alguns estudiosos da área, porém "Para a maioria das pessoas, a memória visual é mais poderosa do que a memória linear de passos em uma prova" (MILLER, 2012, p. 23). Neste sentido, ao ser utilizada em sala de aula, poderá auxiliar no desenvolvimento da visualização nos alunos.

Nas aulas sobre Geometria devemos estimular nos alunos, além da visualização, a habilidade de percepção do mundo que o cerca. Nele existe muita Geometria, já dizia Neves (BRASIL, 2008c) que: "não podemos falar de geometria para alguém, devemos deixar que os indivíduos/alunos sintam, vejam, observem, deduzam, validem e sistematizem a geometria presente em sua volta" (BRASIL, 2008c, p. 58).

Neste sentido os alunos estarão percebendo que a Geometria está em toda parte, não apenas nos cadernos e livros de Matemática. Neves (BRASIL, 2008c) ainda afirma que:

> O renascimento e a reformulação do ensino da geometria não é apenas uma questão didático-pedagógica, é também epistemológica e social. A geometria exige do aprendiz uma maneira específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir [...] a geometria desempenha papel integrador entre as diversas partes da matemática, além de ser um campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. (BRASIL, 2008c, p. 59)

É possível perceber que, tanto na Matemática quanto em outros campos do conhecimento, um objeto pode ser descrito ou representado de várias maneiras diferentes. Por exemplo um quadrado, pode ser descrito como o quadrilátero que possui os quatro lados e os quatro ângulos congruentes, ou pode ser descrito como a intersecção entre o conjunto dos retângulos com o conjunto dos losangos, ou ainda ser representado por um desenho de quatro lados com uma marcação (para representar que têm a mesma medida) e com a identificação de quatro ângulos retos. Essas diferentes formas de descrever um objeto matemático podem ser associadas a representações mentais:

> Associadas às experiências temos as representações mentais: o que o sujeito constrói mentalmente a partir das ações bem ou mal sucedidas. Tais representações têm a ver com a forma com que o sujeito concebe mentalmente as suas experiências; com o modo como se dá a interiorização do espaço nas estruturas mentais. Isso nos leva aos objetos geométricos construídos mentalmente que servem como instrumento para as representações mentais do espaço circundante. As formas geométricas são exemplos disso; aparecem como forma de representação do mundo e dos objetos a ele pertencentes. Uma vez concebidos no sistema nervoso central, os objetos geométricos são por ele utilizados para assimilação e representação do espaço. Círculo, quadrado, retângulo, esferas e pirâmides passam a servir para um novo olhar sobre a natureza. Utilizamo-nos das formas geométricas para representar o mundo a nossa volta e, por meio de sua representação, expressar nossos pensamentos e sentimentos. Essas representações servem, também, a partir de certo nível de desenvolvimento, como instrumento de nosso pensamento matemático. (BRASIL, 2008e, p. 96)

Considerando então a familiarização dos conteúdos geométricos com o cotidiano do aluno, é preciso dispôr ao mesmo o maior número de representações possíveis de um mesmo objeto geométrico. Segundo Neves (BRASIL, 2008c):

> As diferentes representações são estímulos para que tanto o aluno quanto o professor usem a criatividade e a imaginação presentes na construção conceitual. Portanto, o conceito é construído nas diversas situações de aprendizagem mediada pelos instrumentos, através da manipulação do objeto geométrico nas suas diferentes representações. (BRASIL, 2008c, p. 60)

Sendo assim, as Construções Geométricas servem como uma das formas que podem ser utilizadas para representar e caracterizar os elementos geométricos. Com isso os alunos devem ser capazes de associar as representações já interiorizadas às novas representações e compreender melhor o conceito de cada objeto geométrico e suas propriedades.

3.4 RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Existem vários recursos que podem ser utilizados nas aulas sobre Geometria para facilitar o entendimento por parte dos alunos. Entre eles existe o recurso das Construções

Geométricas, que possivelmente desperta o interesse dos alunos por se tratar de uma ferramenta desafiadora e interessante. Além disso, as Construções Geométricas apresentam grande praticidade e aplicabilidade na resolução de problemas relacionados à Geometria.

As Construções Geométricas podem ser trabalhadas de várias maneiras, uma delas é com a utilização de instrumentos como a régua e o compasso, outra com a utilização de *softwares* que realizam o traçado de figuras. Essas duas formas de abordagem das Construções Geométricas em sala de aula são especificadas nos itens que seguem.

3.4.1 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

Podemos definir desenho, de acordo com Januário (2000), como sendo a maneira de expressar a forma de um dado objeto, que para poder ser representado com exatidão, deve ser conhecido e estar bem definido. Como qualquer outra técnica de desenho, o Desenho Geométrico possui alguns entes primitivos, são eles o ponto, a reta e o plano. Segundo Januário (2000) os instrumentos necessários para aulas de Desenho Geométrico são: papel, lápis, borracha, escala, esquadros, compasso, transferidor e flanela.

O Desenho Geométrico é uma modalidade mais abrangente do que as Construções Geométricas, e, como já citado, era disciplina obrigatória nas escolas brasileiras anteriormente a década de 70. Trata-se de um conjunto de técnicas pelas quais é possível o traçado de qualquer figura, sendo indispensável à alguns cursos de graduação como Arquitetura, Engenharias, *Design*, entre outros. Já as Construções Geométricas foram desenvolvidas pelos gregos e repassadas através dos tempos, como uma forma de resolver problemas geométricos, pois torna mais fácil a visualização das propriedades das figuras envolvidas na resolução. As Construções Geométricas podem ser encontradas mais facilmente como componente curricular nos cursos de graduação em Matemática e são desenvolvidas apenas com o uso da régua e do compasso, diferentemente do Desenho Geométrico, que utiliza vários outros recursos além destes. Então, para a realização da oficina foram utilizados apenas papel, lápis ou lapiseira, borracha, compasso e régua.

O desenvolvimento das Construções Geométricas com régua e compasso teve início na Grécia, servindo de ferramenta para o desenvolvimento da Geometria. Segundo Wagner (2007) as Construções Geométricas permaneceram imunes ao tempo, diferentemente de outros campos da Matemática que se desenvolveram ou foram modificados, e são tão úteis hoje como na Grécia antiga, para o aprendizado de Matemática. O matemático grego Euclides utilizava instrumentos para visualizar as demonstrações e compreender melhor os problemas que precisava resolver. De acordo com Rezende e Queiroz:

> Consta que Euclides, em suas construções geométricas, usava um "compasso dobradiço", que se fechava assim que uma de suas pontas fosse retirada do papel. Com isso, nos parece impossível a simples construção do transporte de um segmento [...] Euclides nunca descreveu, em seus trabalhos, como essas construções eram feitas. O fato de que elas teriam sido efetuadas com o uso de um compasso e de uma régua sem escalas tem sido atribuído a Platão (c. 390 a.C.). A régua e o compasso dobradiço deveriam ter uso equivalente ao compasso e régua com os quais trabalhamos hoje. (REZENDE; QUEIROZ, 2010, p. 144)

Varhidy (2010) faz resgates históricos sobre a Geometria e também sobre o Desenho Geométrico, ressaltando que, apesar dos elementos geométricos já serem conhecidos e utilizados desde as antigas civilizações, foi na Grécia que as construções com régua e compasso se desenvolveram, e também foi a partir da civilização grega que o homem passou a utilizar o recurso das construções com régua e compasso para resolver problemas e equações.

Podemos nos perguntar qual o motivo dos gregos terem dado um enfoque tão grande às construções feitas com régua e compasso, e a resposta pode estar ligada à perfeição que eles desejavam obter nas formas geométricas desenhadas. De acordo com Roque:

> A régua e o compasso, apesar de serem instrumentos de construção, podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, figuras geométricas com alto grau de perfeição. Na realidade, nos Elementos, as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato [...] Euclides não afirma explicitamente, em lugar nenhum de sua obra, que as construções tenham de ser efetuadas com retas e círculos. Simplesmente elas são, de fato, realizadas desse modo. (ROQUE, 2012, p. 127)

Ainda segundo a autora há dois motivos principais para justificar a utilização da régua e do compasso na obra Elementos de Euclides: a facilidade da utilização dos instrumentos e uma necessidade de ordenação na Matemática da época. De acordo com Roque:

> [...] uma das explicações para o uso da régua e do compasso nessa obra pode ter sido de ordem pedagógica. As construções feitas desse modo são mais simples e não exigem nenhuma teoria adicional (como seria o caso das construções por meio de cônicas). Desse ponto de vista, a restrição não seria consequência de uma proibição, mas de uma otimização: deve-se usar a régua e o compasso sempre que possível para simplificar a solução dos problemas de construção [...] Uma segunda explicação para o uso exclusivo da régua e do compasso seria a necessidade de uma ordenação e de uma sistematização da geometria com vistas a uma melhor arquitetura da matemática. Na época de Euclides, o conjunto dos conhecimentos dos geômetras já estava bastante desenvolvido e era necessário ordená-lo. (ROQUE, 2012, p. 128-129)

Existem vários trabalhos realizados com o objetivo de resgatar as construções com régua em compasso no ensino básico. Em Souza (2013) encontramos um resgate do uso das

Construções Geométricas, trabalhando os conteúdos geométricos de maneira concreta e com apoio em materiais de fácil aquisição. São ressaltadas as dificuldades encontradas pelos professores em conseguir os materiais necessários para realizar as Construções Geométricas. Também avalia uma série de instrumentos disponíveis no mercado, inclusive faz uma adaptação em um compasso de madeira, a princípio para uso em quadro de giz, ao qual fica apto para ser usado também em quadro branco por conta da colocação de uma ponta de borracha. São propostas atividades à serem aplicadas com alunos do Ensino Fundamental, afim de desenvolver as Construções Geométricas em sala de aula. Cada atividade consta com os tópicos: conteúdo abordado, objetivos, texto orientador, compreensão do processo de construção, representação simplificada da construção e explorando a atividade. O autor justifica o uso da régua e compasso para a realização das Construções Geométricas pelos três primeiros postulados da obra Elementos de Euclides e ainda define Construção Geométrica com sendo "uma sequência finita de pelo menos um desses postulados" (SOUZA, 2013, p. 6). Souza ainda afirma que:

> As construções geométricas possibilitam o desenvolvimento das habilidades motoras do educando, através do manuseio do material de desenho e representação dos traçados. Possibilita também o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, da organização e da construção de estratégias pautadas nos conhecimentos prévios, além de propiciar a materialização de situações abstratas. (SOUZA, 2013, p. 7)

Júnior (2013) faz um resgate das construções com régua e compasso, trabalhando paralelamente outros conteúdos matemáticos como frações, conjuntos numéricos, funções, áreas e Geometria. São apresentadas sequências de atividades propostas em livros didáticos do 6º, 7º, 8º e 9º ano do ensino básico, que podem ser melhoradas com a utilização de Construções Geométricas. Em algumas atividades o autor sugere a substituição da régua graduada e do transferidor pela utilização da régua não graduada e do compasso. Em outras atividades sobre números irracionais na reta numérica, o autor sugere a construção dos racionais com régua e compasso, entre outras sugestões. Segundo Júnior:

> As construções geométricas utilizando uma régua não graduada e um compasso devem seguir algumas regras básicas:
>
> - Conhecendo-se dois pontos distintos, é possível traçar uma reta utilizando a régua.
> - Com o compasso, é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto conhecido e que passa por um segundo ponto determinado.
>
> É permitido obter pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações: intersecções de retas, intersecções de circunferências e intersecções de retas com circunferências. Com esses pontos obtidos, podemos traçar novas retas e novas circunferências e assim sucessivamente. (JÚNIOR, 2013, p. 6)

Ao utilizar as Construções Geométricas o professor pode beneficiar os alunos no desenvolvimento de seu raciocínio lógico e matemático. Já dizia Wagner que:

> As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas. (WAGNER, 2009, p. 5)

A utilização de materiais que permitem manipulação, como a régua e o compasso, auxiliam no processo de aprendizagem da Matemática. Existem vários trabalhos que relacionam a utilização de materiais concretos e manipulativos com o ensino da Matemática, em particular, com o ensino da Geometria. Segundo os estudos de Gonçalves et al.:

> No passado, dizia-se que os materiais facilitariam a aprendizagem por estarem próximos da realidade da criança. Atualmente, uma das justificativas comumente usadas para o trabalho com materiais didáticos nas aulas de matemática é a de que tal recurso torna o processo da aprendizagem significativo [...] Os pressupostos da aprendizagem significativa são:
>
> - o aluno é o verdadeiro agente e responsável último por seu próprio processo de aprendizagem;
> - a aprendizagem dá-se por descobrimento ou reinvenção;
> - a atividade exploratória é um poderoso instrumento para a aquisição de novos conhecimentos porque a motivação para explorar, descobrir e aprender está presente em todas as pessoas de modo natural.
>
> (GONÇALVES et al., 2012, p. 11)

Itzcovich (2012) cita as principais características que uma situação deve conter para ser considerada um problema geométrico: para resolver a situação devem ser utilizadas as propriedades das figuras; deve proporcionar a interação com objetos do espaço conceitual; as figuras não devem ser construídas apenas pelas constatações sensoriais; as respostas devem ser validadas pelas propriedades dos objetos, e não apenas empiricamente. Sendo assim podemos dizer que uma alternativa que pode ser utilizada para a resolução de um problema geométrico é o recurso das Construções Geométricas com régua e compasso.

As atividades que compõe a oficina sobre Construções Geométricas desenvolvida e aplicada no Ensino Médio podem ser consideradas problemas geométricos, pois cumprem os requisitos estabelecidos por Itzcovich (2012), já que utilizam as propriedades das figuras para o desenvolvimento das construções, além de desenvolver o conceito de cada elemento da Geometria, serem construídas através das regras básicas das Construções Geométricas e serem validadas através de teoremas e proposições da Geometria Plana.

Outro fator importante, e que deve ser ressaltado, é que cada pessoa aprende e vê as figuras geométricas com seus próprios olhos. Sendo assim, o professor desenvolve as atividades com os alunos, mas nem sempre as expectativas esperadas pelo professor serão correspondidas. De acordo com Itzcovich:

> É imperioso esclarecer que os alunos não identificam as propriedades das figuras pelo simples fato de olhar os desenhos que as representam. Aquilo que um aluno pode reconhecer ao observar o desenho de uma figura nem sempre é o mesmo que o pretendido pelo docente que esse aluno identifique com o olhar, já que ambos, docente e aluno, partem de um volume de conhecimento bem diferentes. [...] Por esse motivo, as situações que forem propostas aos alunos com a finalidade de indagar, identificar ou reconhecer propriedades das figuras devem fomentar os processos intelectuais que permitam tornar explícitas as características e as propriedades dos objetos geométricos, para além dos desenhos que os alunos utilizem para representar tais figuras. (ITZCOVICH, 2012, p. 10)

Na utilização das Construções Geométricas como recurso de aprendizagem da Geometria, muitas vezes é necessário relembrar conhecimentos já adquiridos pelos alunos. Para que se consiga resolver um problema através de uma Construção Geométrica, são necessárias idas e vindas, avanços e retrocessos, afim de identificar os elementos geométricos e propriedades que podem ser utilizadas na resolução. Segundo Itzcovich:

> [...] não basta apresentar aos alunos os nomes, as particularidades ou os elementos e as propriedades que caracterizam as figuras. Deve fazer parte do processo ir identificando estas questões no conjunto de problemas que será proposto aos alunos para ser resolvido. E esta trama não é linear, nem está determinada completamente por tais problemas. Apela-se constantemente a relações entre os conhecimentos que os alunos dispõem, as atividades de construção propostas, os palpites, os ensaios, os erros, os acertos apresentados, os aportes do docente, as discussões entre os alunos etc. (ITZCOVICH, 2012, p. 11)

O autor também ressalta que na utilização das construções com régua e compasso é necessário promover entre os alunos uma discussão sobre a construção que será realizada, decidindo em conjunto qual instrumento deve ser utilizado, em qual momento deve ser utilizado, se a solução encontrada é única ou não, etc. Outra questão importante é a justificativa do porque aquela construção que foi realizada é verdadeiramente a solução do problema proposto. Para justificar às construções podemos recorrer à Álgebra, ou ainda aos teoremas e propriedades da Geometria. De acordo com Itzcovich:

> Em geral, o problema principal não é o de se desenhar o que se solicita, mas de demonstrar que, mediante o uso da régua e do compasso, a solução pode

> ser encontrada. E é neste ponto que o recurso à álgebra pode mostrar sua fertilidade. Efetivamente, é apelando a determinadas expressões algébricas - que identificam as relações que são colocadas em jogo - que se podem apresentar as condições de possibilidade da construção, da validade do construído, da quantidade de soluções. (ITZCOVICH, 2012, p. 55)

Também é importante lembrar que, de nada adianta deixar os alunos utilizarem esse tipo de material sem um planejamento, uma ação norteadora das atividades em sala de aula. Para que o aprendizado seja, de fato, significativo, o professor necessita orientar o aluno no desenvolver das atividades. De acordo com Gonçalves et al.:

> Dessa forma, os significados que o aluno constrói são o resultado do trabalho do próprio aluno, sem dúvida, mas também dos conteúdos de aprendizagem e da ação do professor. Assim é que de nada valem materiais didáticos na sala de aula se eles não estiverem atrelados a objetivos bem claros e se seu uso ficar restrito apenas à manipulação ou o manuseio que o aluno quiser fazer dele. (GONÇALVES et al., 2012, p. 11)

Neste sentido, cada atividade apresenta seus objetivos claros e definidos previamente. Além disso são apresentados os passos necessários para a efetivação das construções e as justificativas que tornam a construções válidas e importantes.

É importante, sempre que quisermos trabalhar as Construções Geométricas nas aulas de Matemática, ter claras quais são as construções possíveis de serem realizadas, de acordo com Carneiro (WAGNER, 2007):

> Para abordar o problema de quais construções são possíveis com régua e compasso, comecemos por lembrar que as construções "permitidas" são: traçar uma reta, conhecendo dois de seus pontos; traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo; determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos. Não são permitidos: traçar um círculo de raio ou centro "arbitrários"; usar uma graduação previamente preparada da régua ou do compasso; tomar sobre uma reta um ponto "arbitrário"; deslizar a régua até uma certa posição; etc. (WAGNER, 2007, p. 105)

O ato de desenhar por si só já é interessante, imaginemos agora desenhar e construir com nossas próprias mãos e utilizando as ferramentas necessárias, as principais figuras geométricas, e a partir daí conseguir entender suas propriedades. É uma ótima forma de prender a atenção dos alunos, fazendo-os interagir com a Matemática utilizando as ferramentas de desenho. Porém, nem todos os problemas geométricos são possíveis de resolver através das Construções Geométricas. Alguns problemas que não podem ser resolvidos através de uma Construção Geométrica estão em destaque na próxima seção.

3.4.1.1 CURIOSIDADES SOBRE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Existem alguns fatos e curiosidades interessantes que estão relacionados ao desenvolvimento das Construções Geométricas. Uma das curiosidades é o fato de que todas as construções desenvolvidas utilizando régua e compasso, poderem ser realizadas apenas com o uso do compasso ou com o uso da régua e circunferências com um único raio. Segundo Carneiro (WAGNER, 2007):

> Um fato digno de nota é que todas as construções que podem ser feitas com régua e compasso podem também ser feitas apenas com o compasso! Essa afirmativa foi provada por Mascheroni, em 1797 [...] Em 1928, foi encontrado, numa livraria de Copenhagen, um livro de Mohr, datado de 1672, onde este fato já aparecia, mas tinha passado despercebido pelo público matemático [...] Além disso, poderia ser suscitada a questão se as construções possíveis com régua e compasso poderiam também ser feitas apenas com a régua. Basta rever a discussão feita na seção 3, para ver que a resposta é negativa [...] No entanto, de forma bastante surpreendente, o grande geômetra Steiner (1796-1863) mostrou que é possível efetuar todas as construções, utilizando apenas a régua e um único círculo fixo, juntamente com seu centro. (WAGNER, 2007, p. 121-122)

Outra curiosidade que envolve as Construções Geométricas está relacionada a três famosos problemas gregos: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trisseção do ângulo. Esses três problemas foram questionados na antiguidade sobre sua solução mediante às construções com régua e compasso, sendo que nenhum deles é possível de ser resolvido com as regras básicas das Construções Geométricas.

Sobre a duplicação do cubo, Boyer (1974) afirma que uma peste assolava a cidade de Atenas no século V antes de Cristo e seus habitantes consultaram um oráculo para saber o que poderia ser feito a fim de afastar a peste. O oráculo teria respondido que deveriam duplicar o volume de seu altar, o qual tinha o formato de um cubo. Porém, os atenienses duplicaram a medida da aresta do cubo, o qual ficou com o volume octuplicado. Sendo assim, não conseguiram resolver o problema da peste, pois não atenderam às exigências do oráculo. Na verdade para que o volume do cubo fosse duplicado eles deveriam multiplicar a aresta do cubo inicial por raiz cúbica de 2.

Além desse, outros problemas gregos que envolvem as Construções Geométricas estão relacionados a acontecimentos e fatos envolvendo os matemáticos da época, por esse motivo se tornaram tão famosos e difundidos pela Europa. De acordo com Carneiro (WAGNER, 2007):

> Na realidade, a dificuldade por eles encontrada testemunha a favor de sua perspicácia, isto é, eles perceberam que havia aí um problema, o que algumas pessoas até hoje não percebem, confundindo construções aproximadas ou

> mecânicas com construções exatas com régua e compasso. No entanto eles não tinham ainda o instrumento matemático que lhes permitisse mostrar que tais construções eram, na verdade, *impossíveis*, o que só viria a ocorrer na virada do século XVIII para o XIX d.C. (WAGNER, 2007, p. 104)

No livro **Construções Geométricas** de Eduardo Wagner (2007) existe um apêndice elaborado por José Paulo Q. Carneiro, onde são explicados com detalhes cada um dos três famosos problemas gregos. Sendo que é justificado por que esses problemas não são possíveis de serem resolvidos através das Construções Geométricas. No texto, ser construtível significa ser possível de construir com régua e compasso. O autor afirma que todos os números racionais são construtíveis, e além deles existem números irracionais que também são construtíveis, sendo que o conjunto de todos os números construtíveis forma um corpo: "expressão esta que significa exatamente que se trata de um conjunto de números reais que possui 0 e 1 e é fechado para a adição, multiplicação, e cálculo de simétricos e de inversos" (WAGNER, 2009, p. 109).

Prosseguindo com os critérios de construtibilidade, Carneiro afirma que: "todo número construtível é raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros. [...] os números que são raízes de polinômios com coeficientes inteiros são ditos *algébricos*, enquanto os outros são ditos *transcendentes*" (WAGNER, 2007, p. 113). Provar que um número é transcendente não é uma tarefa fácil. Já foi provado que o π e o número e são transcendentes. O autor conclui que: "todo número transcendente não é construtível" (WAGNER, 2007, p. 113), o que basta para justificar o problema da quadratura do círculo, ou seja, construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado. Por não ser possível, mediante régua e compasso, a construção do número π, então a quadratura do círculo também não é possível.

Além disso, Carneiro afirma que nem todo número algébrico é construtível: "um número só será construtível se for algébrico, de grau igual a uma potência de 2" (WAGNER, 2007, p. 114). Isso justifica o fato da não quadratura do cubo, já que raiz cúbica de 2 possui índice igual a 3, sendo que 3 não é uma potência de 2, portanto o número não pode ser construído com régua e compasso.

Para justificar por que não é possível tri-seccionar um ângulo qualquer primeiramente o autor define que um ângulo é construtível quando seu cosseno ou seu seno for um número construtível, pois sabemos da relação trigonométrica fundamental que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Por exemplo, o ângulo de 180 graus é facilmente tri-seccionado, pois tem seno e cosseno valendo 0 e -1 respectivamente, e também é possível construir com régua e compasso um ângulo de 60 graus, que é a tri-secção do ângulo de 180 graus.

3.4.2 *SOFTWARES* SOBRE GEOMETRIA

Podemos definir tecnologia, de acordo com o dicionário Aurélio como sendo: “Ciência cujo objeto é a aplicação do conhecimento técnico e científico para fins industriais e comerciais” (DICIONÁRIO AURÉLIO, 2014). Jamais foi possível ver a tecnologia tão presente na vida do ser humano como nos dias atuais. Estamos intimamente ligados às tecnologias em casa, no trabalho, na rua, nos carros. É possível perceber que na maioria das escolas, também estão acontecendo mudanças em relação a inserção e utilização de novas tecnologias.

As tecnologias, em particular o computador pode ser utilizado em sala de aula como uma ferramenta didática, tornando-se aliado do professor. Segundo o texto de Farias (BRASIL, 2008d): “As tecnologias informáticas são muito mais do que máquinas, pois significam uma reestruturação do pensamento humano no mundo de possibilidades da linguagem e da comunicação” (BRASIL, 2008d, p. 120).

Os professores formandos para ministrar aulas no ensino básico precisam dominar os recursos tecnológicos que pretendem utilizar, pois para que possam ser inseridos como ferramenta pedagógica precisam produzir efeitos positivos. Torna-se difícil ensinar algo que não se conhece, ou ensinar utilizando uma metodologia que não se domina. Nesse sentido há uma preocupação das universidades em desenvolver habilidades tecnológicas em acadêmicos dos cursos de licenciatura. Já dizia Gravina e Santarosa sobre os ambientes informatizados que:

> [...] não garantem a construção do conhecimento. Para que haja avanço no conhecimento matemático, é importante que o professor projete as atividades a serem desenvolvidas [...] Não basta colocar a disposição do aluno um programa de construção em Geometria; o aluno certamente vai aprender alguma coisa. Mas a apropriação de ideias matemáticas significativas nem sempre acontecem de forma espontânea, mesmo nestes ambientes, e assim um trabalho de orientação por parte do professor, se faz necessário. São os desafios propostos pelo professor que vão orientar o trabalho, desafios estes que se tornam de genuíno interesse dos alunos, desde que não sejam eles privados de suas ações e explorações. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 21)

Em relação aos conteúdos de Geometria, uma ferramenta que pode ser utilizada é um *software* que faça traçado de figuras. Dentre os vários disponíveis, o *software* GeoGebra é muito interessante pois alia Geometria, Álgebra e Aritmética em uma mesma interface gráfica. Segundo Gerônimo et al.:

> O software GeoGebra pode substituir satisfatoriamente o caderno de desenho geométrico. Podemos utilizar sua interface gráfica e suas ferramentas para traçar retas, ângulos, circunferências etc. Uma das vantagens do uso do GeoGebra é que as construções são dinâmicas, isto é, podem ser modificadas sem a perda dos vínculos geométricos. (GERÔNIMO et al., 2010, p. 11)

É possível perceber que além da abordagem tradicional das Construções Geométricas com os instrumentos régua e compasso, também podemos contar com o recurso computacional, através dos *softwares* computacionais matemáticos. Para o desenvolvimento e planejamento das atividades da oficina e também para a solução de cada atividade propostas foi utilizado o *software* GeoGebra e seus recursos de traçado de figuras. Esse *software* é um dos muitos disponíveis, é de livre acesso e também possui ferramentas que auxiliam na resolução de problemas algébricos, trigonométricos, entre outros. O GeoGebra foi utilizado apenas para auxiliar na criação das atividades que iriam compor a oficina sobre Construções Geométricas. Além disso nos trabalhos acadêmicos que aliam a Geometria ao recurso computacional, o GeoGebra foi o *software* utilizado com maior frequência, dentre os trabalhos analisados para a elaboração da nossa pesquisa. Sendo que uma abordagem das Construções Geométricas através do recurso computacional também seria possível de ser realizada com alunos do Ensino Médio, pois possibilitaria rapidez e dinâmica no momento da realização das construções.

Podemos entender melhor o que é Geometria Dinâmica através dos estudos de Gravina:

> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. (GRAVINA, 1996, p. 6)

Independente do tipo de abordagem utilizada, o importante é que o professor planeje antecipadamente suas ações, afim de desenvolver nos alunos os conhecimentos necessários e estimulá-los para que consigam compreender os conceitos matemáticos que estão sendo trabalhados.

4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Neste capítulo é destacada a forma como a pesquisa foi desenvolvida, de acordo com os recursos metodológicos utilizados. A pesquisa é classificada e são destacadas as formas de coletas de dados, bem como a forma de análise dos dados que foi utilizada para a compreensão das informações coletadas no desenvolvimento da pesquisa.

Metodologia significa estudar os métodos, no caso da metodologia de pesquisa estamos falando dos métodos utilizados para o desenvolvimento do projeto de pesquisa. Podemos entender melhor quais são os objetivos da metodologia em um pesquisa através dos estudos de Thiollent:

> Seu objetivo consiste em analisar as características dos vários métodos disponíveis, avaliar suas capacidades, potencialidades, limitações ou distorções e criticar os pressupostos ou as implicações de sua utilização. Ao nível mais aplicado, a metodologia lida com a avaliação de técnicas de pesquisa e com a geração ou a experimentação de novos métodos que rementem aos modos efetivos de captar e processar informações e resolver diversas categorias de problemas teóricos e práticos da investigação. [...] é também considerada como modo de conduzir a pesquisa. Neste sentido, a metodologia pode ser vista como conhecimento geral e habilidade que são necessários ao pesquisador para se orientar no processo de investigação, tomar decisões oportunas, selecionar conceitos, hipóteses, técnicas e dados adequados. (THIOLLENT, 2011, p. 31-32)

A principal forma de caracterizar uma pesquisa é em relação a sua abordagem. De acordo com Creswell (2010) as pesquisas podem ser classificadas em qualitativas, quantitativas ou mistas, como segue abaixo:

> Os métodos quantitativos envolvem o processo de coleta, análise, interpretação e redação dos resultados de um estudo [...] As abordagens qualitativas de coleta, análise, interpretação e redação do relatório de dados diferem das abordagens quantitativas tradicionais. A amostragem intencional, a coleta de dados abertos, a análise de textos ou de imagens, a representação de informações em figuras e em quadros e a interpretação pessoal dos achados informam procedimentos qualitativos [...] Os procedimentos de métodos mistos empregam aspectos dos métodos quantitativos e dos procedimentos qualitativos. (CRESWELL, 2010, p. 21)

Nas pesquisas qualitativas os dados analisados devem ser coletados de uma forma variada e proporcionar aos participantes da pesquisa exprimirem suas opiniões em relação as questões levantadas. De acordo com Thiollent a pesquisa qualitativa:

> [...] não deixa de ser uma forma de experimentação em situação real, na qual os pesquisadores intervêm conscientemente. Os participantes não são reduzidos a cobaias e desempenham um papel ativo. Além disso, na pesquisa em situação real, as variáveis não são isoláveis. Todas elas interferem no que está sendo observado. Apesar disso, trata-se de uma forma de experimentação na qual os indivíduos ou grupos mudam alguns aspectos da situação pelas ações que decidiram aplicar. Da observação e da avaliação dessas ações, e também pela evidenciação dos obstáculos encontrados no caminho, há um ganho de informação a ser captado e restituído como elemento de conhecimento. (THIOLLENT, 2011, p. 28)

Existem vários autores que fazem referência às pesquisas qualitativas, alguns ainda mais precisos fazem pontuações sobre as pesquisas qualitativas em educação. De acordo com Bogdan e Biklen (apud LÜDKE; ANDRÉ, 1986) as pesquisas qualitativas em educação apresentam cinco características básicas:

1. Tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento, pressupondo o pesquisador em contato direto com o ambiente e a situação investigada.

2. Os dados coletados são, na sua maioria, descritivos. Sendo assim, o material deve conter descrições de situações, pessoas ou acontecimentos. O pesquisador deve buscar as mais variadas formas de obtenção de dados.

3. Existe uma preocupação maior com o processo do que com o produto final, sendo interesse do pesquisador verificar como o problema da pesquisa se manifesta nas interações realizadas.

4. O sentido que os participantes dão às coisas são focos da atenção do pesquisador. Dessa maneira, sempre é buscado captar a forma de pensar dos participantes.

5. Na análise dos dados o processo é intuitivo, ou seja, as abstrações se consolidam da inspeção dos dados.

De acordo com Bauer e Gaskell (2010) o delineamento da pesquisa pressupõe algumas etapas básicas, sendo a primeira delas a definição em relação às estratégias adotadas, em segundo lugar estão os métodos de coletas de dados, em terceiro estão os tratamentos que serão feitos aos dados, de forma analítica, e por último estão os interesses em relação ao conhecimento, o fruto do trabalho propriamente dito. Os autores ainda citam os modos pelos quais os dados podem ser coletados, entre eles destacam os textos, imagens e sons.

Para realizar a coleta de dados podemos utilizar recursos como a observação, diário de campo, entrevistas, questionários, etc. Segundo Thiollent (2011) na pesquisa convencional os instrumentos como questionários e formulários têm papel importante na obtenção de dados e informações sobre os participantes da pesquisa. Em nossa pesquisa, foram aplicados aos alunos do Ensino Médio dois questionários, um anterior a realização da oficina e outro após sua realização.

O Questionário 1 (Apêndice B) foi aplicado anteriormente a realização da oficina e com a finalidade de constatar o nível de aprendizagem em Geometria dos alunos, verificar se os alunos conhecem os instrumentos de desenho utilizados na oficina, no caso a régua e o compasso e se já utilizaram tais instrumentos nas aulas de Matemática. Este questionário é composto por seis perguntas, a primeira referente à idade dos alunos, as demais referentes aos instrumentos de desenho e à construções feitas com régua e compasso. Nelas existe a opção de responder sim ou não para cada questão, e em caso afirmativo há um espaço para o aluno descrever ou justificar.

O Questionário 2 (Apêndice C) foi aplicado após a realização da oficina, afim de constatar se houve melhora no nível de aprendizagem geométrica e qual a influência da oficina no conhecimento dos alunos, além de avaliar a oficina. Este questionário é composto de oito perguntas, as quatro primeiras referentes à avaliação dada pelos alunos à oficina no geral, à professora pesquisadora, aos materiais utilizados e sua autoavaliação, todas continham uma pontuação de 1 a 5 onde os alunos deveriam assinalar 1 para sua total insatisfação e 5 para sua total satisfação. As demais perguntas eram referentes aos instrumentos de desenho, à sua aprendizagem geométrica e às construções com régua e compasso.

Segundo Lüdke e André (1986) o trabalho de campo precisa ser registrado detalhadamente, contendo descrição dos sujeitos, reconstrução de diálogos, descrição de locais, descrição de eventos especiais, os comportamentos do observador, com anotações sobre suas reflexões. Uma forma de registrar essas informações inerentes do processo de pesquisa pode ser feito através de um diário de campo, que segundo o site Conceito.de, é definido como:

> O diário de campo é um instrumento utilizado pelos investigadores para registar/anotar os dados recolhidos susceptíveis de serem interpretados. Neste sentido, o diário de campo é uma ferramenta que permite sistematizar as experiências para posteriormente analisar os resultados. Cada investigador tem a sua própria metodologia na hora de levar a cabo o seu diário de campo. Neste,

> pode-se incluir ideias desenvolvidas, frases isoladas, transcrições, mapas e esquemas, por exemplo. O que importa mesmo é que o investigador possa apontar no diário aquilo que vê/observa ao longo do seu processo de investigação para depois analisar e estudar. (CONCEITO.DE, 2011)

O diário de campo foi utilizado como outra fonte de informações inerentes a aplicação da oficina. Nele está registrado como foi dado o encaminhamento da aula, as tomadas de decisões feitas entre a professora pesquisadora e os alunos, os imprevistos que aconteceram ao longo da aplicação da oficina, entre outras observações.

Outro ponto crucial em uma pesquisa qualitativa é a observação dos fatos e posterior análise dessa observação. De acordo com Lüdke e André (1986) para que a observação seja um instrumento científico de coleta de dados, ela precisa ser controlada e sistemática. Isso significa que o observador precisa planejar previamente suas ações, determinando o quê e como irá observar. Ainda segundo as autoras "Os focos de observação nas abordagens qualitativas de pesquisa são determinados basicamente pelos propósitos específicos do estudo [...] o observador inicia a coleta de dados buscando sempre manter uma perspectiva de totalidade" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 30).

As observações feitas pela professora pesquisadora durante a aplicação da oficina também serviram de instrumento de coleta de dados para a análise do trabalho realizado. Porém, para auxiliar nesse processo foram utilizadas, ainda, as gravações em áudio da aplicação da oficina. A finalidade das gravações em áudio é de contrastar com as atividades escritas pelos alunos e com as informações de campo coletadas pela professora pesquisadora, a fim de acrescentar à pesquisa informações importantes.

Em todo esse caminho de planejar as ações e aplicá-las em sala de aula, o papel do professor pesquisador é muito importante. De acordo com Lüdke e André:

> O papel do pesquisador é justamente o de servir como veículo inteligente e ativo entre esse conhecimento acumulado na área e as novas evidências que serão estabelecidas a partir da pesquisa. [...] Não há, portanto, possibilidade de se estabelecer uma separação nítida e asséptica entre o pesquisador e o que ele estuda e também os resultados do que ele estuda. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 5)

Após a coleta dos dados, outra parte importante da pesquisa é fazer a análise dos dados coletados. Essa análise pode ser feita de várias maneiras, e de acordo com Lüdke e André:

> Analisar os dados qualitativos significa "trabalhar" todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevistas, as análises de documentos e as demais informações disponíveis. A tarefa

> de análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados, buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 45)

Para realizar a análise dos dados obtidos pela pesquisa utilizamos a análise de conteúdo. A análise de conteúdo, de acordo com Ander-Egg (1978), possui três fases principais que podem ser caracterizadas como:

- **Estabelecer a Unidade de Análise:** analisando todo o material obtido na pesquisa, você estabelece as palavras chaves, que estão presentes com mais frequência no trabalho. Em nosso caso, podemos destacar: Geometria, Construções Geométricas, régua, compasso, ângulo, paralela, perpendicular, triângulo, polígono, círculo, circunferência e arco.
- **Determinar as Categorias de Análise:** devemos agora classificar os dados analisados por categorias. Em nosso caso temos três categorias principais: Instrumentos de Desenho, Ângulos e suas Implicações, Paralelas e suas Implicações.
- **Selecionar uma Amostra do Material para Análise:** em nossa pesquisa foram analisados todos os dados coletados.

Segundo Bardin (apud RAMOS; SALVI, 2009) a análise de conteúdo é um conjunto de instrumentos metodológicos que está em constante aperfeiçoamento. Além disso, serve para desvendar o que está escondido e pode ser aplicada em várias formas de pesquisa. Segundo Ramos e Salvi o método da análise de conteúdo consiste em:

> [...] tratar a informação a partir de um roteiro específico, iniciando com (a) pré-análise, na qual se escolhe os documentos, se formula hipóteses e objetivos para a pesquisa, (b) na exploração do material, na qual se aplicam as técnicas específicas segundo os objetivos e (c) no tratamento dos resultados e interpretações. Cada fase do roteiro segue regras bastante específicas, podendo ser utilizado tanto em pesquisas quantitativas quanto em pesquisas qualitativas. (RAMOS; SALVI, 2009, p. 3)

Nossa pesquisa se caracteriza como pesquisa qualitativa pois os dados foram coletados de modo que permitisse aos alunos expor suas opiniões. Sendo que também foram realizadas análises através da participação e fala dos alunos durante o desenvolvimento da oficina, além das respostas nos questionários e das observações durante a aplicação da oficina.

Quanto aos instrumentos de coleta de dados foram empregados os questionários, a gravação em áudio, as produções dos alunos no desenvolvimento das atividades, o diário de campo e as observações feitas pela professora pesquisadora.

Em relação a análise dos dados utilizamos a análise de conteúdo a partir das três categorias que seguem: A primeira categoria, Instrumentos de Desenho, aparece fortemente em todas as fontes de coleta de dados. Ela se justifica pelo fato dos alunos terem obtido uma compreensão melhor do que são e para que servem os instrumentos de desenho régua e compasso, além de aprenderem funções novas para esses instrumentos. A segunda categoria, Ângulos e suas Implicações, se justifica pelo fato de várias atividades desenvolvidas na oficina remeterem a ideia de ângulo ou estarem relacionadas com ângulos. Assim também acontece com a terceira categoria, Paralelas e suas Implicações, pois algumas atividades da oficina remetem a ideia de paralelas ou estão relacionadas com paralelismo.

5 PROPOSTA DE OFICINA SOBRE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo estão descritas as atividades de Construções Geométricas que foram aplicadas com alunos do Ensino Médio, para uma melhor compreensão dos conteúdos geométricos. Ao todo são nove atividades que foram construídas com a utilização dos recursos manuais de desenho régua e compasso. Cada atividade contém os seguintes tópicos: Objetivos da Atividade, Folha da Atividade, Passos da Construção, Justificativa da Atividade e Solução da Atividade.

A posposta desse trabalho é uma oficina de atividades para ser aplicada com alunos do Ensino Médio, nas aulas de Matemática, através da utilização das Construções Geométricas para a resolução dos problemas propostos. A duração da oficina é de aproximadamente seis horas e foi aplicada no 3º ano do Ensino Médio, no período matutino e em dois momentos, três horas no dia 24 de outubro e outras três horas no dia 06 de novembro de 2014. Os materiais necessários para a aplicação da oficina foram: 20 compassos, 20 réguas, 20 lápis de escrever, 20 borrachas, folhas de ofício, apostilas impressas com as atividades de Construções Geométricas que foram realizadas pelos alunos, slides para projeção, projetor de slides, máquina digital para gravação do áudio, régua e compasso de madeira, giz, entre outros.

Partimos do pressuposto de que os alunos do Ensino Médio já possuem alguns conhecimentos básicos de Geometria, pois esse assunto já foi abordado no Ensino Fundamental. Os entes primitivos ponto, reta e plano, além das definições geométricas de semirreta, segmento de reta, polígonos, congruência, triângulos, classificação dos triângulos, círculos, ponto médio, entre outras definições, que foram necessárias para o desenvolvimento das atividades da oficina, não foram especificadas no texto. Remetemos o leitor aos livros **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana** de Antonio Caminha Muniz Neto (2012) e **Geometria Euclidiana Plana** de João Lucas Marques Barbosa (2006), onde todas as definições sobre Geometria são abordadas de maneira detalhada.

Durante o desenvolvimento das atividades propostas na oficina sobre Construções Geométricas, os alunos foram instigados sobre os conceitos relacionados a Geometria Plana que faziam-se necessários para realizar as construções. Os alunos eram questionados, afim de resgatar conceitos e também tinham liberdade de expor suas ideias e opiniões a respeito de cada elemento da Geometria. Quando algum aluno definia de forma correta um elemento da Geometria, sua ideia era confirmada e abordada com detalhes, caso contrário era esclarecido para a turma por que aquela definição estava incorreta, assim era possível outro aluno socializar suas ideias. O mesmo acontece durante a realização das construções, os alunos realizavam a atividade proposta, tentavam encontrar uma possível solução utilizando a régua e o compasso, em seguida eram desenvolvidos os passos para chegar a construção e ao final, as construções também eram realizadas no quadro, utilizando régua e compasso de madeira (próprios para o quadro de giz) onde os alunos tinham a oportunidade de conferir se suas construções estavam corretas. Quando os alunos apresentavam dificuldades em compreender ou realizar a construção solicitada eles eram auxiliados pela professora pesquisadora, na tentativa de retomar o caminho da construção correta.

A seguir são descritas as atividades desenvolvidas na oficina sobre Construção Geométrica. As atividades foram desenvolvidas de forma individual, onde cada aluno tinha em mãos régua (sendo que não foram utilizadas as graduações), compasso, lápis, borracha e a apostila de atividades. Porém os alunos foram dispostos em grupos, onde tinham a oportunidade de realizar sua construção e também auxiliar e ser auxiliado pelos colegas durante o desenvolvimento das atividades.

5.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

Nos itens que seguem estão as descrições de cada uma das atividades desenvolvidas na oficina sobre Construções Geométricas: Atividade 1 - Construção da mediatriz de um segmento de reta; Atividade 2 - Operações com segmentos de reta; Atividade 3 - Transporte de um ângulo e construção da bissetriz; Atividade 4 - Construção da reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela; Atividade 5 - Divisão de um segmento de reta em partes congruentes; Atividade 6 - Construção de um triângulo equilátero; Atividade 7 - Construção de um triângulo com os comprimentos dos lados dados; Atividade 8 - Pontos notáveis do triângulo; Atividade 9 - Circunferências inscrita e circunscrita em polígonos regulares.

5.1.1 CONSTRUÇÃO DA MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO DE RETA

Objetivos da Atividade:

- Resgatar os conceitos de segmento de reta, ponto médio, mediatriz e reta perpendicular.
- Aprender a construir um ângulo reto com régua e compasso.
- Utilizar as propriedades dos triângulos isósceles para justificar a construção.
- Construir a mediatriz de um segmento de reta.

Folha da Atividade: Na Figura 2 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 1.

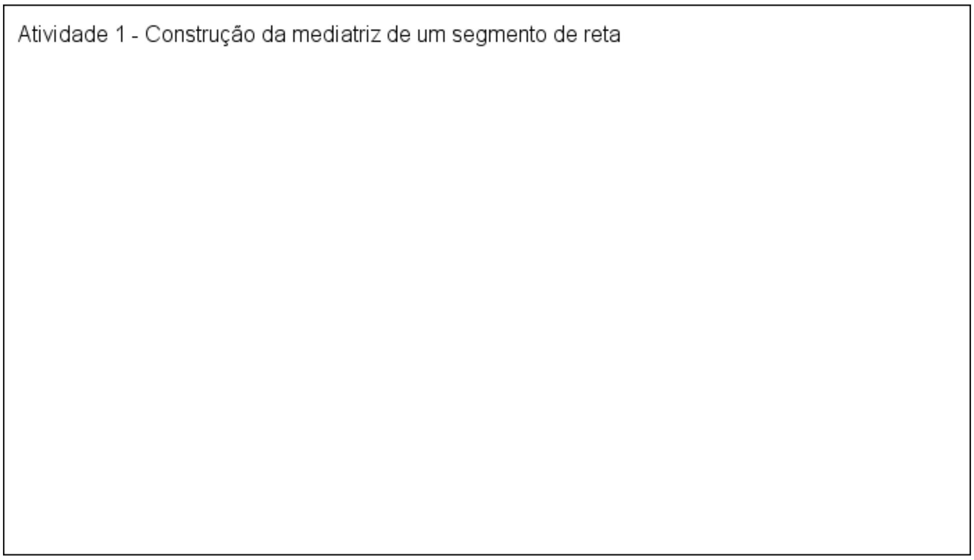

Atividade 1 - Construção da mediatriz de um segmento de reta

Figura 2: Atividade 1

Passos da Construção:

1. Marque no plano dois pontos distintos e indique pelas letras A e B.
2. Ligue os pontos A e B e obtenha o segmento de reta AB.
3. Com abertura do compasso maior que a metade do segmento AB e centro em A trace um arco de circunferência no sentido do ponto B.
4. Com a mesma abertura do compasso e centro em B trace outro arco de circunferência que encontre o arco anterior em dois pontos.

5. Marque os pontos de encontro entre os dois arcos traçados e indique pelas letras C e D.

6. Trace a reta que passa pelos pontos C e D, a reta CD é a mediatriz do segmento AB.

7. Marque o ponto de encontro da reta CD com o segmento AB e indique pela letra M.

8. O ponto M é o ponto médio do segmento AB.

Justificativa da Atividade:

Através da construção da mediatriz do segmento AB, também estaremos encontrando seu ponto médio, ou seja, estaremos aprendendo a dividir um segmento de reta ao meio. Para justificar a construção podemos usar o fato dos triângulos ACB e ADB serem isósceles por construção e congruentes pelo caso lado-lado-lado, assim como os triângulos ACD e BCD, isso garante que os ângulos A$\hat{C}$M e B$\hat{C}$M sejam congruentes. Então, pelas propriedades do triângulo isósceles, temos que os segmentos CM e DM são bissetrizes, medianas e alturas dos respectivos triângulos ACB e ADB. Portanto, os ângulos A$\hat{M}$C, B$\hat{M}$C, A$\hat{M}$D, B$\hat{M}$D são retos e a reta que passa por CD é mediatriz do segmento AB, sendo M o ponto médio do segmento AB. Relembrando esses conceitos com os alunos, estaremos retomando as propriedades dos triângulos e também podemos ressaltar que o lugar geométrico mediatriz é formado pelos pontos do plano que são equidistante de dois outros pontos dados. Além disso, devemos ressaltar que com esse procedimento, também estamos traçando uma perpendicular ao segmento de reta, o que é bastante importante, pois estaremos aprendendo a construir um dos ângulos notáveis, o ângulo reto.

Solução da Atividade: Na Figura 3 está a solução da Atividade 1 construída no GeoGebra.

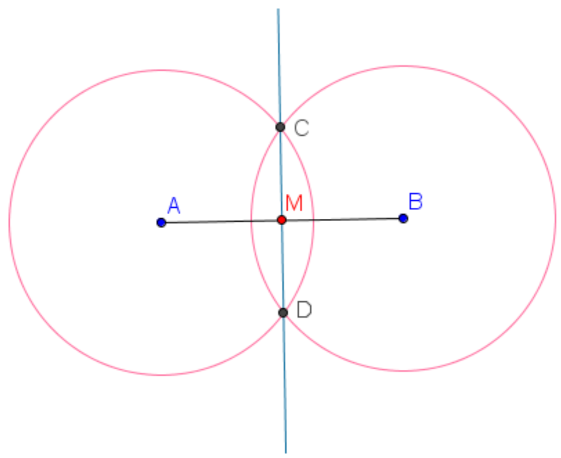


Figura 3: Solução da Atividade 1

5.1.2 OPERAÇÕES COM SEGMENTOS DE RETA

Objetivos da Atividade:

- Descrever o processo utilizado pelos gregos para a soma e multiplicação por escalar natural.
- Compreender como pode ser realizado o transporte de um segmento de reta.

Folha da Atividade: Na Figura 4 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 2.

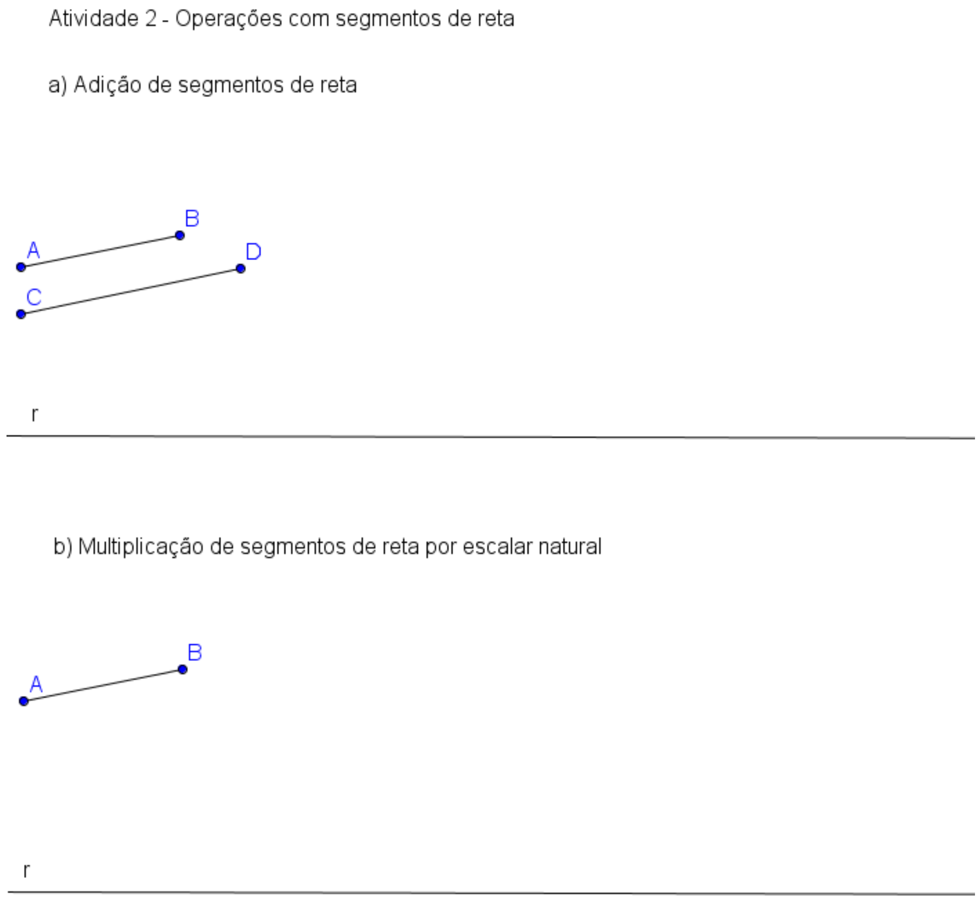


Figura 4: Atividade 2

Passos da Construção:

a) Adição de Segmentos de Reta

1. Sobre a reta r marque um ponto qualquer A'.
2. Com abertura do compasso AB e centro em A', marque sobre a reta r o ponto B'.

3. Com abertura do compasso CD e centro em B’, marque sobre a reta r o ponto C’, tal que B’ pertença ao segmento A’C’.

4. O segmento de reta A’C’ possui medida igual a soma das medidas dos segmentos AB e CD.

b) Multiplicação de Segmento de Reta por Escalar Natural

1. Primeiramente devemos fixar um número natural n.

2. Sobre a reta r marque um ponto qualquer A’.

3. Com abertura do compasso AB e centro em A’, marque sobre a reta r o ponto B’.

4. Com a mesma abertura do compasso e centro em B’, marque o ponto C sobre r, tal que B’ pertença ao segmento A’C.

5. Com a mesma abertura do compasso e centro em C, marque o ponto D sobre r, tal que C pertença ao segmento B’D. Faça este procedimento n vezes.

6. O segmento de reta A’D possui medida igual a n vezes o segmento AB. Esse processo pode ser realizado para multiplicar um segmento de reta por qualquer número natural.

Justificativa da Atividade:

Através dessa atividade os alunos podem ter ideia de como os gregos trabalhavam para realizar as operações entre os números, já que os gregos acreditavam que cada número natural podia ser associado a um segmento de reta e cada segmento de reta podia ser associado a um número natural. Também é possível aprender a realizar o transporte de segmentos de reta com uma dada medida, processo esse que será necessário em outras construções da oficina. Além disso, caso seja o objetivo do professor, é possível fazer uma ligação entre a Geometria e a Álgebra.

Solução da Atividade: Nas Figuras 5 e 6 estão as soluções da Atividade 2 construídas no GeoGebra.

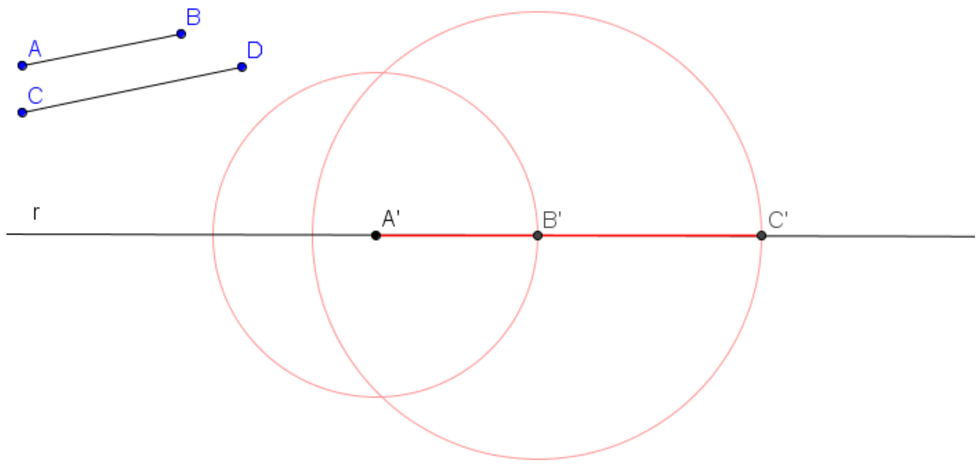


Figura 5: Solução da Atividade 2 item a

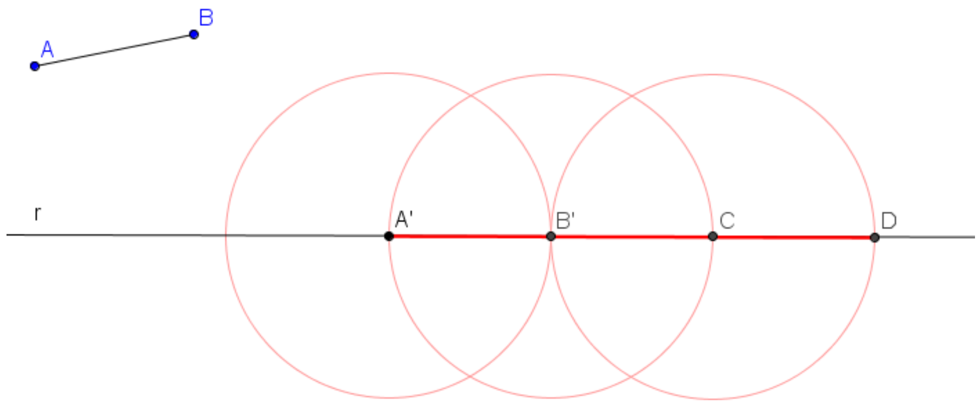


Figura 6: Solução da Atividade 2 item b

5.1.3 TRANSPORTE DE UM ÂNGULO E CONSTRUÇÃO DA BISSETRIZ

Objetivos da Atividade:

- Resgatar os conceitos de semirreta, ângulo e bissetriz.
- Compreender o processo do transporte de um ângulo, utilizando régua e compasso.
- Utilizar a congruência de triângulos para justificar a construção da bissetriz.
- Construir a bissetriz de um ângulo dado.
- Perceber que se traçarmos a bissetriz de um ângulo reto, teremos outro ângulo notável, o ângulo de 45 graus.

Folha da Atividade: Na Figura 7 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 3.

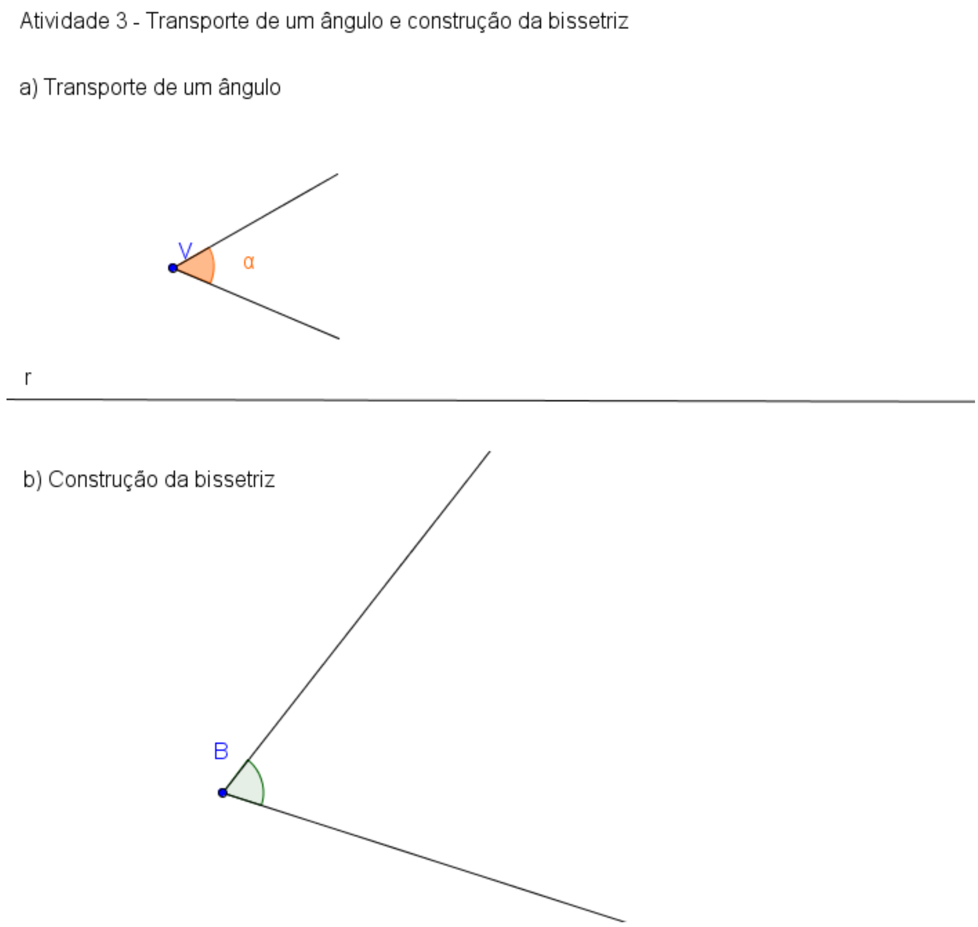


Figura 7: Atividade 3

Passos da Construção:

a) Transporte de um Ângulo

1. Com centro do compasso em V e raio qualquer, trace um arco de circunferência sob o ângulo α.
2. Marque os pontos de intersecções entre o arco traçado e os lados do ângulo α, indicando pelas letras A e B.
3. Marque sobre a reta r um ponto C qualquer.
4. Com abertura do compasso VA (ou VB) e centro em C, trace uma circunferência.
5. Marque um dos pontos de intersecção da circunferência com a reta r e indique pela letra D.
6. Com abertura do compasso AB e centro em D, trace um arco que encontra a circunferência, indique um dos pontos de intersecção pela letra E.
7. Trace a semirreta de origem em C que passa pelo ponto E.
8. O ângulo D$\hat{C}$E tem medida igual a α.

b) Construção da Bissetriz de um Ângulo

1. Com centro em B e abertura qualquer do compasso, trace um arco de circunferência sob o ângulo.
2. Marque os pontos de intersecção entre o arco e os lados do ângulo, e indique pelas letras A e C.
3. Trace o segmento de reta AC. A mediatriz do segmento AC é a bissetriz do ângulo B.
4. Utilize as instruções da Atividade 1, para construir a mediatriz do segmento de reta AB, e indique pela letra r.
5. A reta r é a bissetriz do ângulo A$\hat{B}$C.

Justificativa da Atividade:

Os ângulos são elementos importantes da Geometria, sendo possível estabelecer várias relações onde eles estão presentes, por isso é importante o aluno saber transportá-lo com régua e compasso e também traçar sua bissetriz. Para justificar a bissetriz podemos perceber que os triângulos BEA e BEC são congruentes, pois os segmentos BA e BC são congruentes por construção, assim como os segmentos EA e EC. Como o segmento de reta BE é comum aos dois triângulos, pelo caso de congruência lado-lado-lado, os triângulos são congruentes. Sendo assim, fica claro que o ângulo A$\hat{B}$C foi dividido ao meio, já que os ângulos C$\hat{B}$E e A$\hat{B}$E são congruentes. Além disso, podemos ressaltar que bissetriz é o lugar geométrico dos pontos equidistante de duas retas (ou semirretas) dadas, e que se construirmos a bissetriz de um ângulo de 90 graus, que já aprendemos a construir, podemos obter o ângulo notável de 45 graus.

Solução da Atividade: Nas Figuras 8 e 9 estão as soluções da Atividade 3 construídas no GeoGebra.

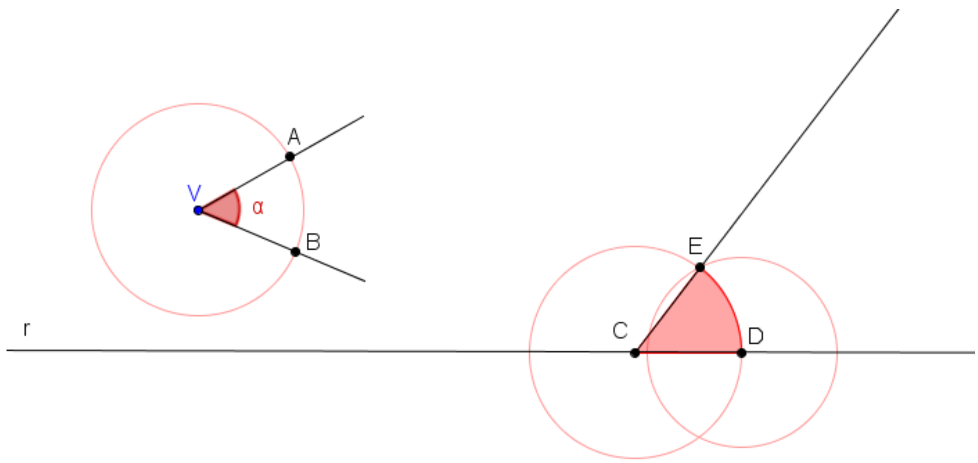


Figura 8: Solução da Atividade 3 item a

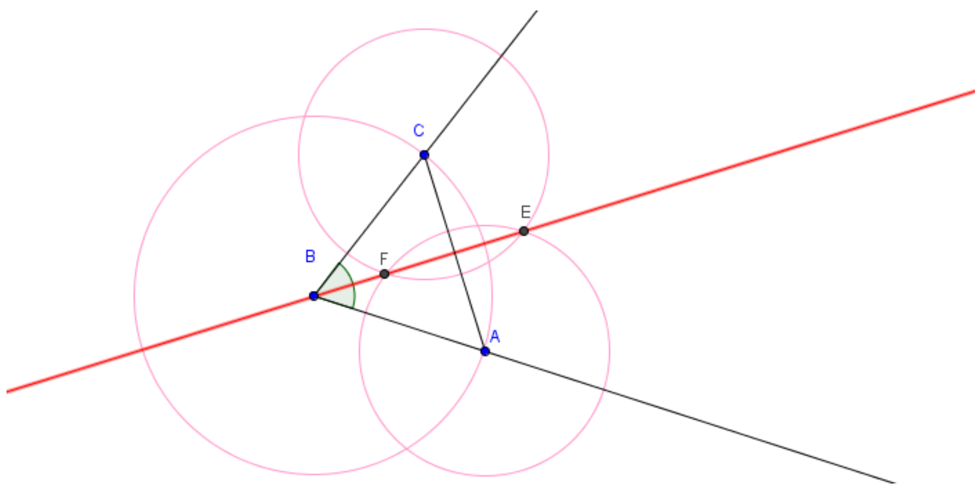


Figura 9: Solução da Atividade 3 item b

5.1.4 CONSTRUÇÃO DA RETA PARALELA A UMA RETA DADA PASSANDO POR UM PONTO FORA DELA

Objetivos da Atividade:

- Resgatar os conceitos de reta paralela, feixe de paralelas, reta transversal, ângulos alternos e colaterais.
- Utilizar a paralela traçada para concluir que a soma dos ângulos internos de todo triângulo sempre é 180 graus.
- Construir a reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela.

Folha da Atividade: Na Figura 10 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 4.

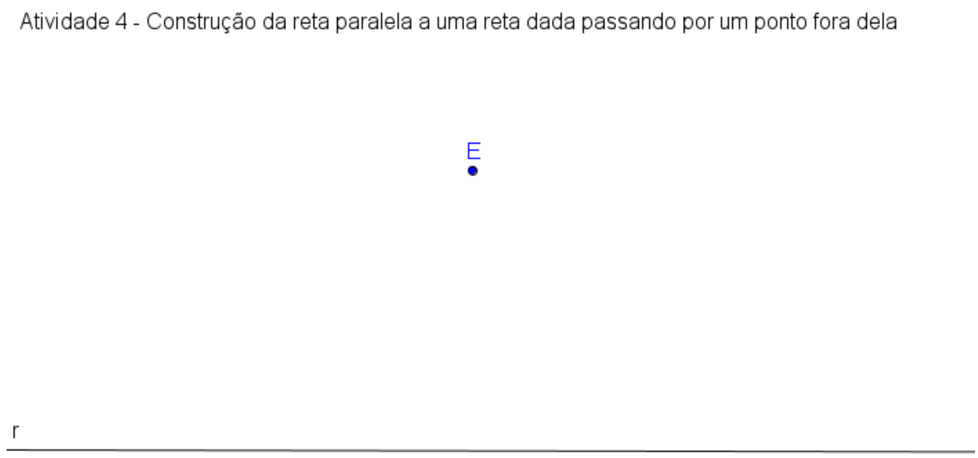


Figura 10: Atividade 4

Passos da Construção:

1. Sobre a reta r marque um ponto A qualquer.
2. Trace a reta que passa pelos pontos A e E.
3. Com centro em A e raio qualquer trace uma circunferência.
4. Marque um dos pontos de intersecção da circunferência com a reta r e indique pela letra C.

5. Basta agora transportar o ângulo EÂC para o ponto E, tornando o ângulo transportado alterno interno do original.

6. Utilize as instruções da Atividade 3, item a, para realizar o transporte do ângulo EÂC para o vértice E e obter o ponto G.

7. A reta EG é a paralela a reta r que passa pelo ponto E.

Justificativa da Atividade:

Os conceitos de paralela e perpendicular são fundamentais na Geometria. Para justificar a construção da reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto fora dela, podemos retomar os conceitos de ângulos alternos internos. Quando possuímos um feixe de retas paralelas, os ângulos alternos internos são sempre congruentes. Assim, como construímos o ângulo GÊF congruente ao ângulo CÂD, por consequência, as retas r e s são paralelas. Nesse ponto também é possível justificar por que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180 graus, bastaria traçar o segmento de reta EC, assim teríamos o triângulo AEC, onde os ângulos CÂE e A$\hat{C}$E são congruentes respectivamente aos ângulos GÊA e HÊC, sendo que estes dois últimos ângulos, juntamente com o ângulo AÊC são suplementares, ou seja, somam 180 graus.

Solução da Atividade: Na Figura 11 está a solução da Atividade 4 construída no GeoGebra.

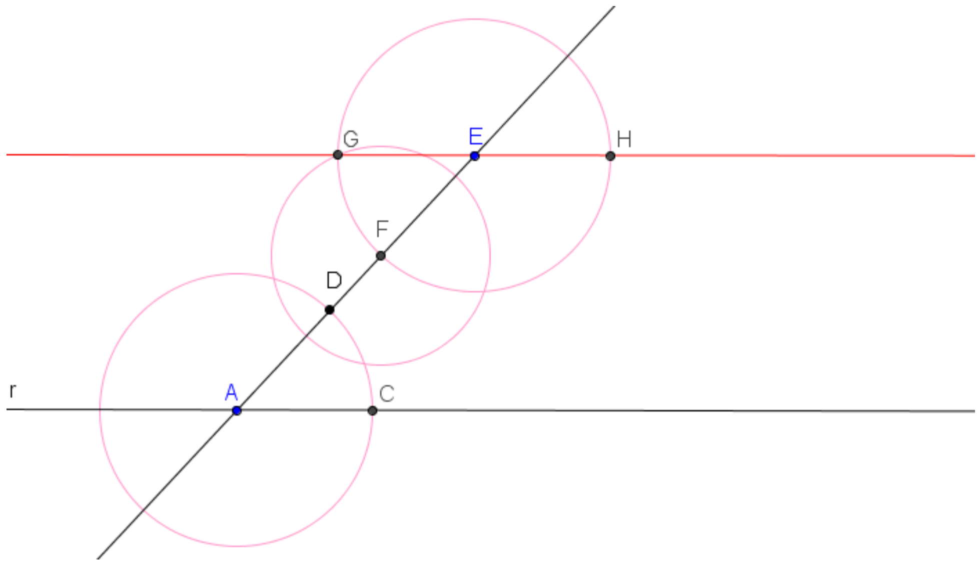


Figura 11: Solução da Atividade 4

5.1.5 DIVISÃO DE UM SEGMENTO DE RETA EM PARTES CONGRUENTES

Objetivos da Atividade:

- Resgatar os conceitos de congruência e semelhança entre figuras planas e espaciais.
- Utilizar o teorema de Tales para justificar a construção de segmentos congruentes.
- Dividir um segmento de reta em partes congruentes.

Folha da Atividade: Na Figura 12 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 5.

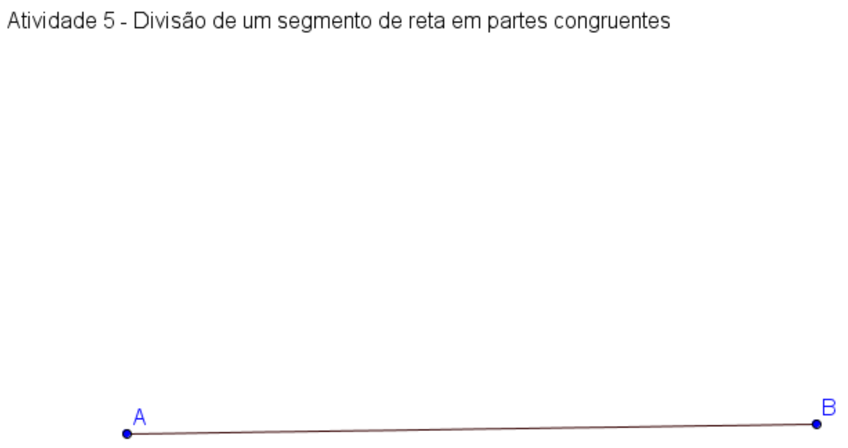


Figura 12: Atividade 5

Passos da Construção:

1. Trace uma semirreta qualquer com origem em A, que não passe pelo ponto B.
2. Com centro em A e abertura qualquer do compasso, marque sob a semirreta o ponto C.
3. Com centro em C e mesma abertura do compasso marque sob a semirreta o ponto D, tal que C pertença ao segmento AD. Faça o mesmo processo e encontre os pontos E, F e G.
4. Ligue o ponto G ao ponto B obtendo o segmento de reta BG.
5. Basta traçar as retas paralelas a reta BG passando pelos pontos F, E, D e C obtendo sobre o segmento de reta AB os pontos M, L, K e H, respectivamente.
6. Utilize as instruções da Atividade 4 para traçar as paralelas.

7. Dividimos o segmento AB em cinco partes congruentes. Esse processo é válido para a divisão de um segmento de reta em qualquer número natural de partes congruentes.

Justificativa da Atividade:

Para justificar a divisão de um segmento de reta em partes congruentes basta relembrarmos o Teorema de Tales: o qual afirma que quando um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, as paralelas determinam nas transversais segmentos proporcionais. Então, quando construímos em uma das transversais os segmentos congruentes (pois usamos sempre o mesmo raio para traçar as circunferências), pelo teorema de Tales, determinamos na outra reta também segmentos congruentes, já que os segmentos de reta que traçamos posteriormente são todos paralelos, ou seja, as retas que eles determinam serão um feixe de paralelas. Lembrando que o Teorema de Tales é importante não apenas para a Geometria Plana, mas também para a Geometria Espacial, principalmente quando trabalhamos com sólidos geométricos semelhantes, como pirâmides, prismas, cilindros ou cones, pois suas proporções são mantidas, e também pode ser empregado em atividades de ampliação e redução de figuras.

Solução da Atividade: Na Figura 13 está a solução da Atividade 5 construída no GeoGebra.

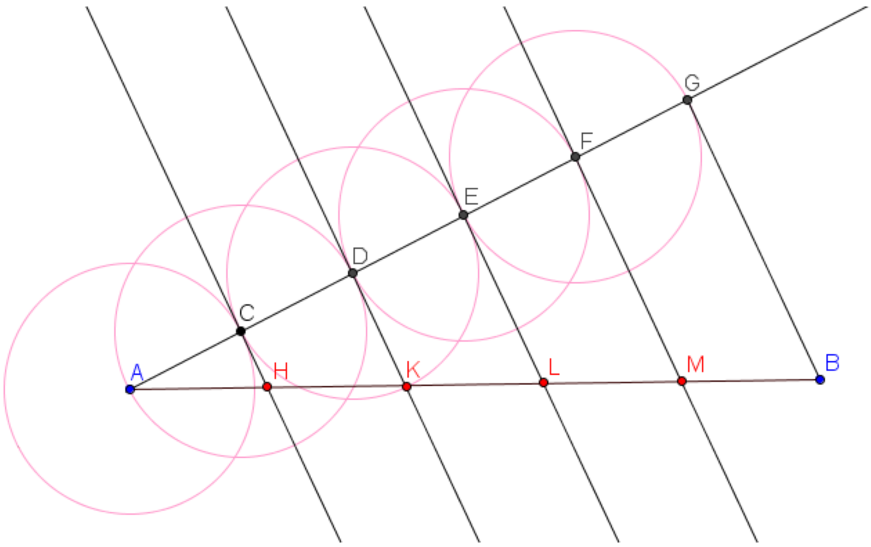


Figura 13: Solução da Atividade 5

5.1.6 CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Objetivos da Atividade:

- Relembrar a classificação dos triângulos, quanto a medida dos lados e ângulos.
- Resgatar o conceito de polígonos regulares.
- Construir um triângulo equilátero com régua e compasso.
- Perceber a existência de duas possíveis soluções para o problema.
- Aprender a construir o ângulo notável de 60 graus.
- Perceber que através da construção da bissetriz do ângulo de 60 graus podemos obter o ângulo notável de 30 graus.

Folha da Atividade: Na Figura 14 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 6.

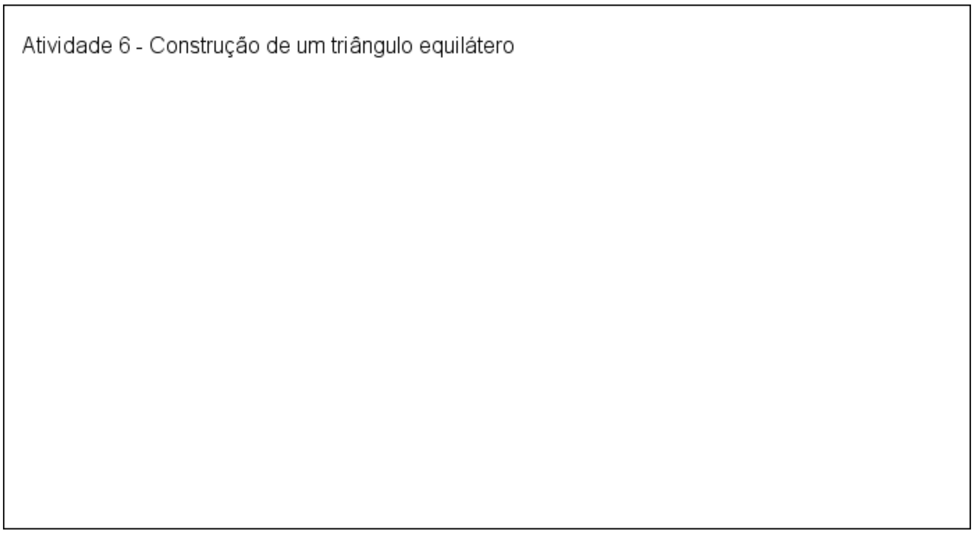

Atividade 6 - Construção de um triângulo equilátero

Figura 14: Atividade 6

Passos da Construção:

1. Marque no plano dois pontos distintos e indique pelas letras A e B.
2. Ligue os pontos A e B e obtenha o segmento de reta AB, esse será um dos lados do triângulo equilátero.
3. Com abertura do compasso AB e centro em A, trace uma circunferência.

4. Com a mesma abertura do compasso e centro em B, trace outra circunferência.

5. Marque os pontos de intersecção entre as circunferências traçadas e indique pelas letras C e D.

6. Os triângulos ABC e ABD são equiláteros.

Justificativa da Atividade:

Os triângulos são figuras elementares da Geometria. Com a construção de um triângulo equilátero podemos retomar as classificações dos triângulos em relação a medida de seus lados: equilátero (os três lados do triângulo possuem a mesma medida), isósceles (dois lados do triângulo possuem a mesma medida) e escaleno (os três lados do triângulo possuem medidas diferentes). Além disso, podemos relembrar que em um polígono regular todos os lados e todos os ângulos possuem a mesma medida. Sendo assim, cada ângulo do triângulo equilátero deve medir 60 graus. Também podemos perceber que nessa construção existem duas possíveis soluções, os triângulos ABC e ABD. Outra questão importante que podemos revisar com os alunos é a classificação de um triângulo em relação a medida de seus ângulos: acutângulo (todos os ângulos internos do triângulo têm medidas menores que 90 graus), obtusângulo (a medida de um ângulo do triângulo é maior que 90 graus) e retângulo (o triângulo possui um ângulo medindo exatamente 90 graus). Com a construção do triângulo equilátero estamos aprendendo a construir um dos ângulos notáveis, o ângulo de 60 graus, sendo que para obter o ângulo notável de 30 graus basta construir a bissetriz de um ângulo de 60 graus. Assim, aprendemos a construir todos os ângulos notáveis tão importantes para a Geometria e também para outros campos da Matemática.

Solução da Atividade: Na Figura 15 está a solução da Atividade 6 construída no GeoGebra.

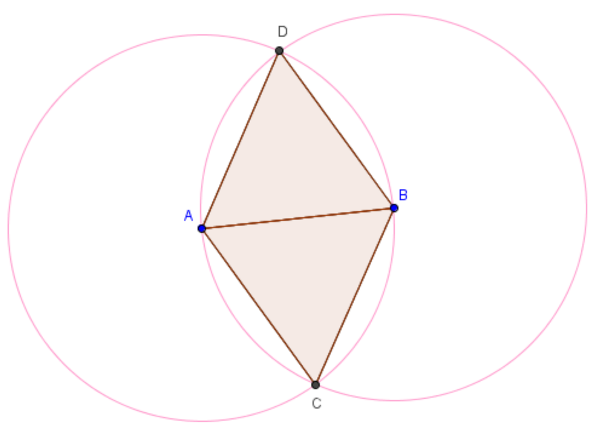


Figura 15: Solução da Atividade 6

5.1.7 CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO COM OS COMPRIMENTOS DOS LADOS DADOS

Objetivos da Atividade:

- Perceber a desigualdade triangular, através da construção do item a.
- Escrever o enunciado da desigualdade triangular, juntamente com os alunos.
- Conferir se é possível a construção do triângulo com as medidas dadas no item b, de acordo com a desigualdade triangular.
- Construir um triângulo com os comprimentos dos lados dados, de acordo com o item b e perceber duas possíveis soluções para o problema.

Folha da Atividade: Na Figura 16 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 7.

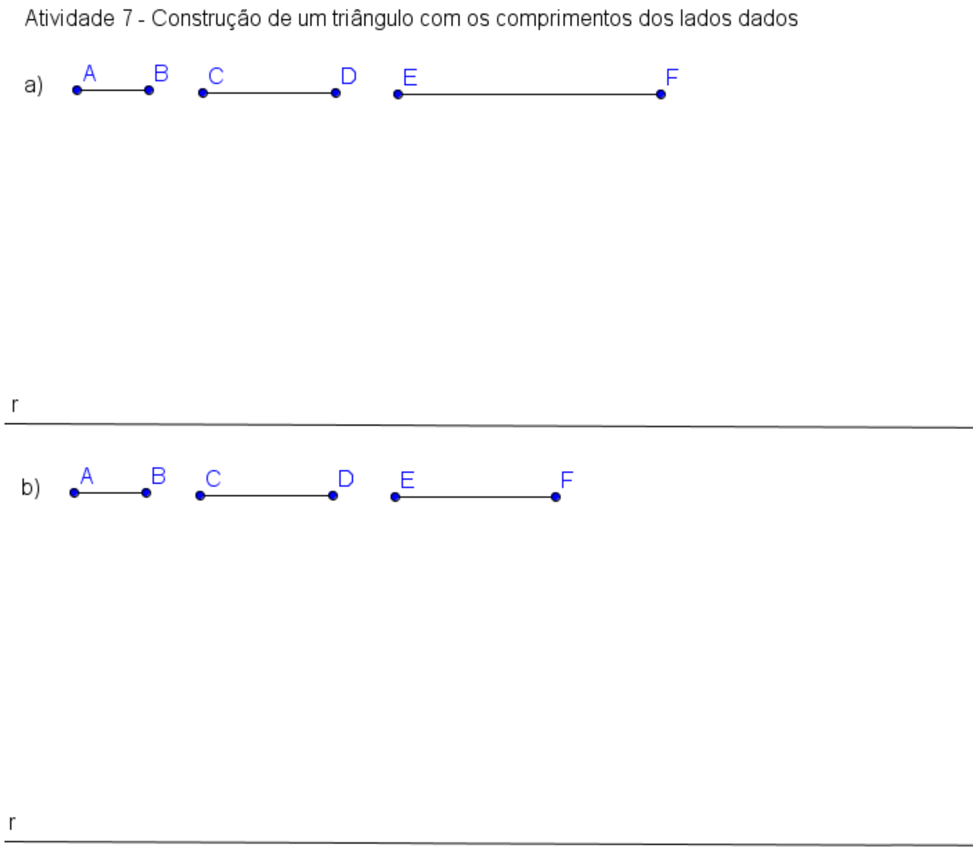


Figura 16: Atividade 7

Passos da Construção:

1. Marque um ponto qualquer sobre a reta r e indique pela letra I.
2. Com abertura do compasso EF e centro em I, marque sobre a reta r o ponto J.
3. Os pontos I e J são dois vértices do triângulo, agora vamos encontrar o terceiro vértice.
4. Com abertura do compasso AB e centro em I, trace uma circunferência.
5. Com abertura do compasso CD e centro em J, trace outra circunferência.
6. O ponto de encontro entre as duas circunferências traçadas é o terceiro vértice do triângulo.
7. Porém, no item a, como as circunferências não possuem intersecção, não é possível realizar essa construção. Já no item b, existem dois pontos de intersecção, indicando-os pelas letras K e L, temos duas possíveis soluções, o triângulo IJK e o triângulo IJL.

Justificativa da Atividade:

No item a, não é possível construir um triângulo com as medidas dos segmentos dados, pois a soma das medidas dos segmentos AB e CD é menor do que o comprimento do segmento EF. Sendo assim, pela Desigualdade Triangular, não é possível realizar a construção de um triângulo tendo como lados os segmentos AB, CD e EF. Com base nisso, os alunos podem ser questionados sobre o que é preciso para que a construção possa ser realizada, espera-se que eles percebam que a soma de dois dos lados de um triângulo sempre deve ser maior que o terceiro lado (Desigualdade Triangular). No item b, o exercício faz a substituição do segmento EF por outro de menor comprimento, assim a construção é possível de ser realizada, e os alunos podem verificar a validade da desigualdade triangular.

Solução da Atividade: Nas Figuras 17 e 18 estão as soluções da Atividade 7 construídas no GeoGebra.

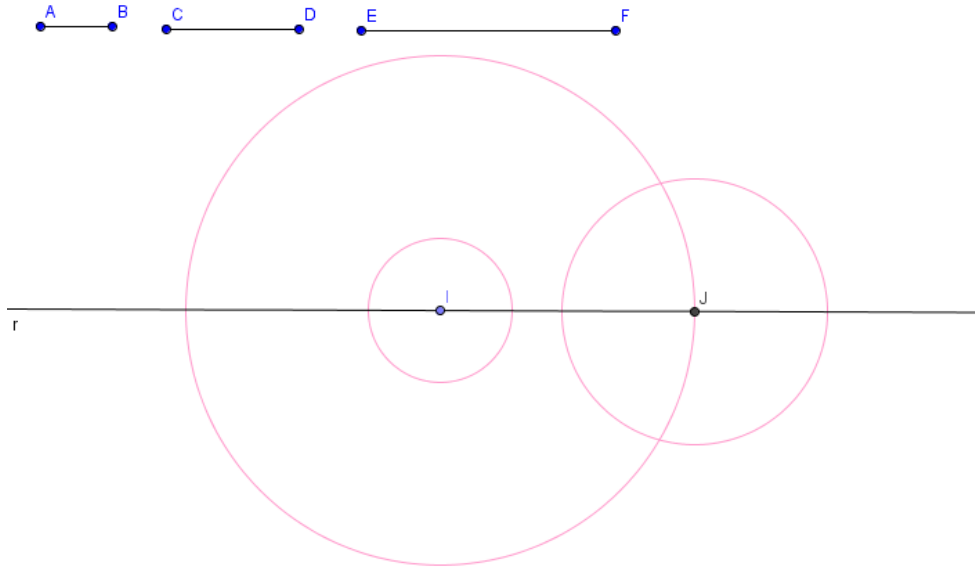


Figura 17: Solução da Atividade 7 item a

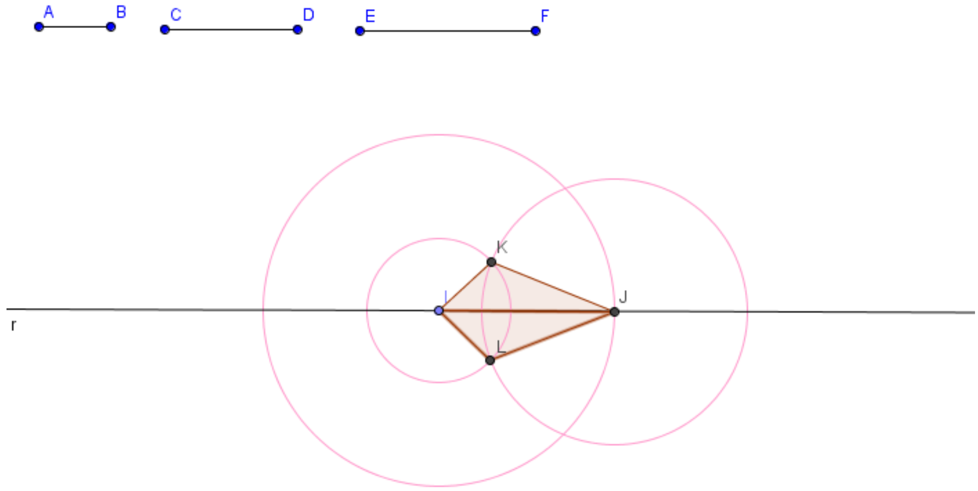


Figura 18: Solução da Atividade 7 item b

5.1.8 PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Objetivos da Atividade:

- Resgatar os conceitos de bissetriz, altura, mediana e mediatriz.
- Perceber que as três bissetrizes de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de Incentro.
- Perceber que as três alturas de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de Ortocentro.
- Perceber que as três medianas de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de Baricentro.
- Perceber que as três mediatrizes de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de Circuncentro.
- Construir com régua e compasso o Incentro, o Ortocentro, o Baricentro e o Circuncentro de um triângulo.
- Construir a circunferência inscrita e circunscrita aos respectivos triângulos das letras a e c da Atividade 8.
- Notar que não é preciso traçar as três bissetrizes, medianas, alturas e mediatrizes para encontrar os respectivos pontos notáveis.

Folha da Atividade: Na Figura 19 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 8.

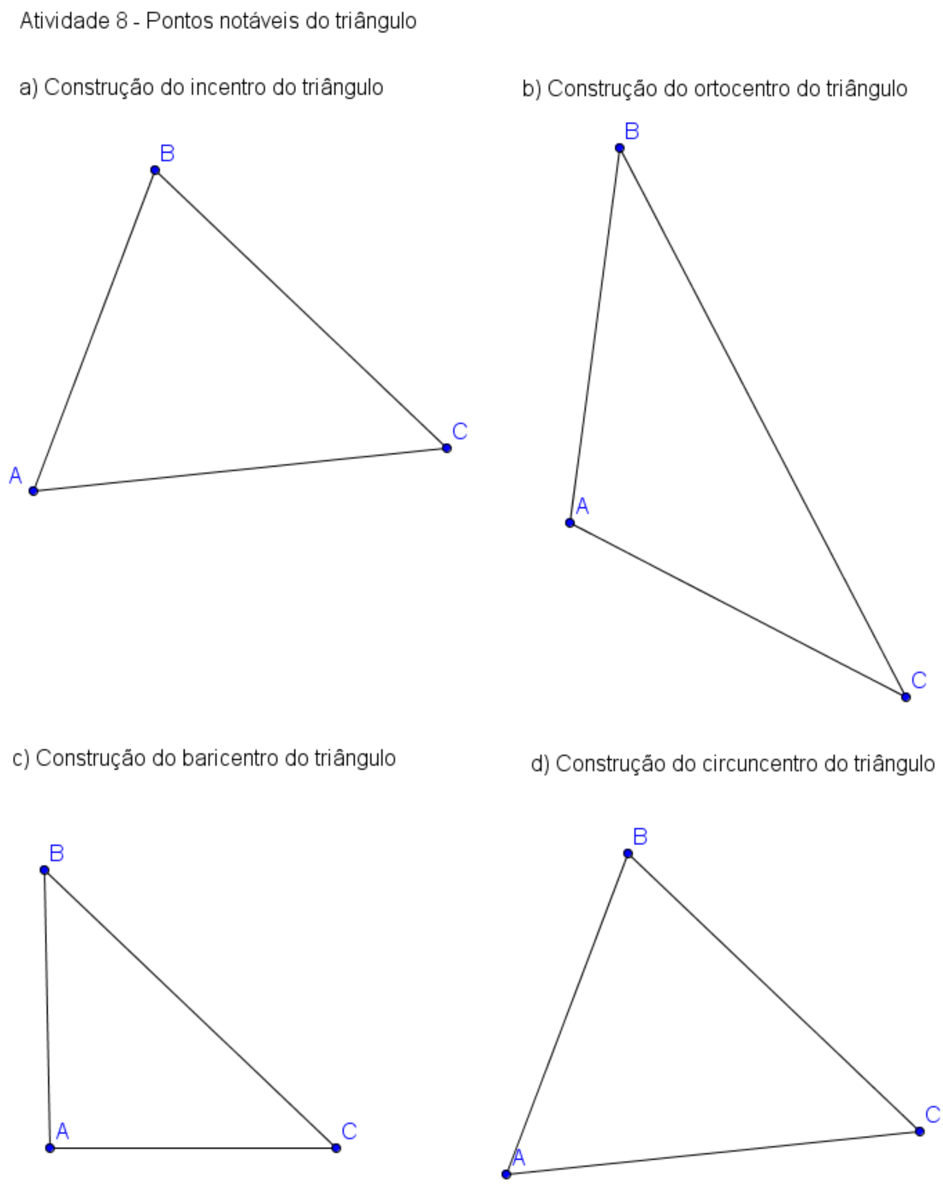


Figura 19: Atividade 8

Passos da Construção:

a) Construção do Incentro do Triângulo

1. Trace a bissetriz de cada ângulo do triângulo, ou seja, do ângulo A, do ângulo B e do ângulo C.
2. Utilize as instruções da Atividade 3, item b, para realizar a construção das bissetrizes.
3. Perceba que as três bissetrizes tem intersecção em um único ponto, indique esse ponto pela letra I.
4. O ponto I é o Incentro do triângulo ABC.

5. Note que o Incentro é equidistante dos três lados do triângulo ABC, logo é o centro da circunferência inscrita ao triângulo, portanto, sempre é interno ao triângulo.

6. Marque o ponto de intersecção entre a bissetriz do ângulo A, B e C e seu respectivo lado oposto, indicando pelas letras D, E e F.

7. Com centro em I e raio ID (ou IE, ou IF) trace a circunferência inscrita ao triângulo ABC.

b) Construção do Ortocentro do Triângulo

1. Trace a altura relativa a cada lado do triângulo, ou seja, a reta perpendicular a cada um dos lados, que passa pelo vértice oposto.

2. Utilize as instruções da Atividade 1, para realizar a construção das alturas.

3. Perceba que as três alturas tem intersecção em um único ponto, indique esse ponto pela letra O.

4. O ponto O é o Ortocentro do triângulo ABC.

5. Note que o Ortocentro pode ser interno ao triângulo (quando o triângulo é acutângulo), externo ao triângulo (quando o triângulo é obtusângulo) ou ainda estar sobre os lados do triângulo (quando o triângulo é retângulo).

c) Construção do Baricentro do Triângulo

1. As medianas de um triângulos são os segmentos de reta que unem o ponto médio de um lado do triângulo ao vértice oposto. Encontre o ponto médio dos três lados do triângulo, ou seja, dos lados BC, AC e AB.

2. Utilize as instruções da Atividade 1, para realizar a construção dos pontos médios e indique por D, E e F, respectivamente.

3. Trace as três medianas do triângulo, ligando os pontos D, E e F aos respectivos vértices opostos, A, B e C.

4. Perceba que as três medianas tem intersecção em um único ponto, indique esse ponto pela letra G.

5. O ponto G é o Baricentro do triângulo ABC, também chamado de centro de gravidade, pois é o ponto que mantém em equilíbrio a massa de um triângulo homogêneo. Assis (2008) define formalmente centro de gravidade como sendo o ponto pelo qual o polígono pode ser suspenso preservando sua posição inicial.

d) Construção do Circuncentro do Triângulo

1. Trace as mediatrizes referentes aos três lados do triângulo, ou seja, aos lados AB, BC e AC.
2. Utilize as instruções da Atividade 1, para construir as mediatrizes do triângulo e indique o ponto de intersecção entre cada mediatriz e seu respectivo lado por D, E e F.
3. Perceba que as três mediatrizes tem intersecção em um único ponto, indique esse ponto pela letra T.
4. O ponto T é o Circuncentro do triângulo ABC e está equidistante dos vértices do triângulo. Sendo assim, ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.
5. Com centro em T e raio TA (ou TB, ou TC) trace a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.
6. Note que o Circuncentro pode ser interno ao triângulo (quando o triângulo é acutângulo), externo ao triângulo (quando o triângulo é obtusângulo) ou ainda estar sobre a hipotenusa do triângulo (quando o triângulo é retângulo).

Justificativa da Atividade:

Já foi dito que os triângulos são figuras elementares da Geometria, e já sabemos construir um triângulo com os comprimentos dos lados dados, traçar uma bissetriz, um ponto médio e uma perpendicular, agora será possível construir os Pontos Notáveis do triângulo: Incentro (ponto de encontro das três bissetrizes), Ortocentro (ponto de encontro das três alturas), Baricentro (ponto de encontro das três medianas) e Circuncentro (ponto de encontro das três mediatrizes). A existência dos Pontos Notáveis do triângulo é garantida por proposições da Geometria Plana. De acordo com Neto (2012) temos que: As mediatrizes dos lados de um triângulo passam todas pelo mesmo ponto, denominado Circuncentro do triângulo; As alturas dos lados de um triângulo passam todas pelo mesmo ponto, denominado Ortocentro do triângulo; As bissetrizes dos ângulos de um triângulo passam todas pelo mesmo ponto, denominado Incentro do triângulo; As medianas dos lados de um triângulo passam todas pelo mesmo ponto, denominado Baricentro do triângulo. Além disso, de acordo com Barbosa (2006) todo triângulo possui uma circunferência inscrita e uma circunferência circunscrita. Então, como o Incentro está equidistante dos três lados do triângulo, ele é o centro da circunferência inscrita e o Circuncentro que está equidistante dos três vértices do triângulo é o centro da circunferência circunscrita. Neste momento será possível relembrar as definições de bissetriz, altura, mediana e mediatriz de um triângulo. Os alunos podem construir as bissetrizes, alturas, medianas e mediatrizes referentes a cada lado/vértice do triângulo e podem ser questionados da necessidade de construção dos três elementos para a obtenção do Ponto Notável, já que para localizar um ponto basta a intersecção de dois elementos. Outro questionamento possível é sobre a localização dos Pontos Notáveis, se estão sempre dentro ou se podem estar localizados fora do triângulo. Pelas construções realizadas foi possível perceber que alguns Pontos Notáveis podem estar localizados fora do triângulo ou até mesmo sobre os lados ou vértices do triângulo.

Solução da Atividade: Nas Figuras 20, 21, 22 e 23 estão as soluções da Atividade 8 construídas no GeoGebra.

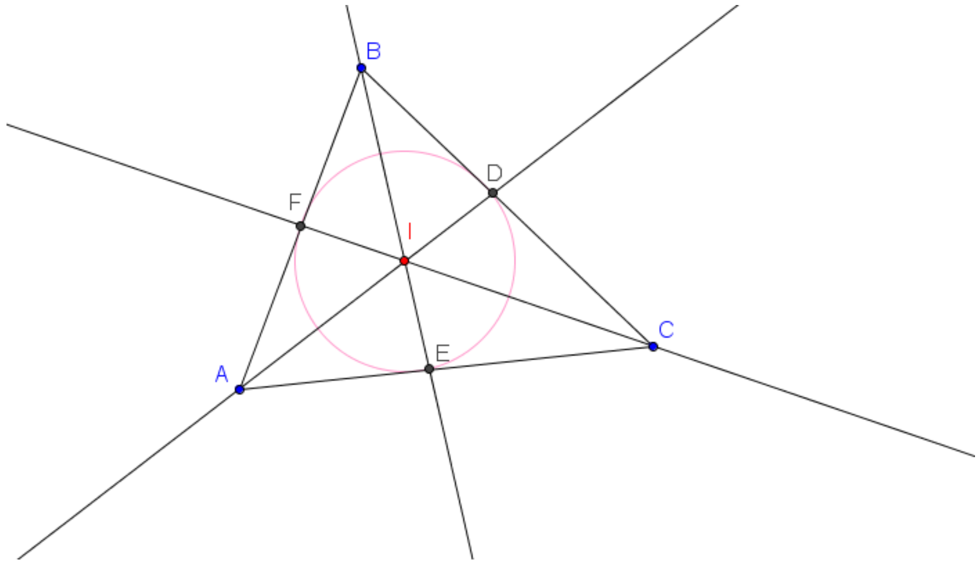


Figura 20: Solução da Atividade 8 item a

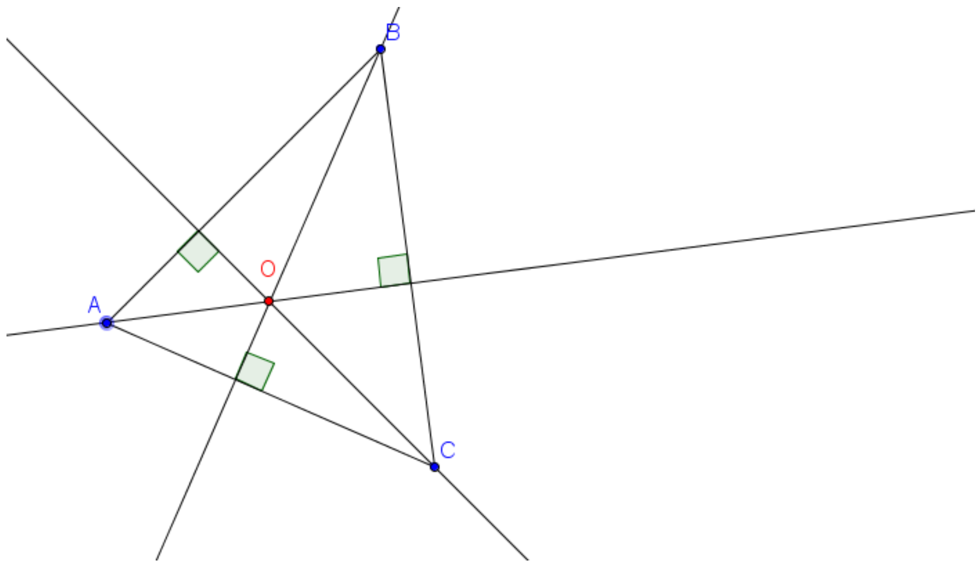


Figura 21: Solução da Atividade 8 item b

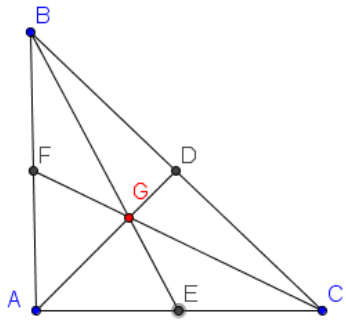


Figura 22: Solução da Atividade 8 item c

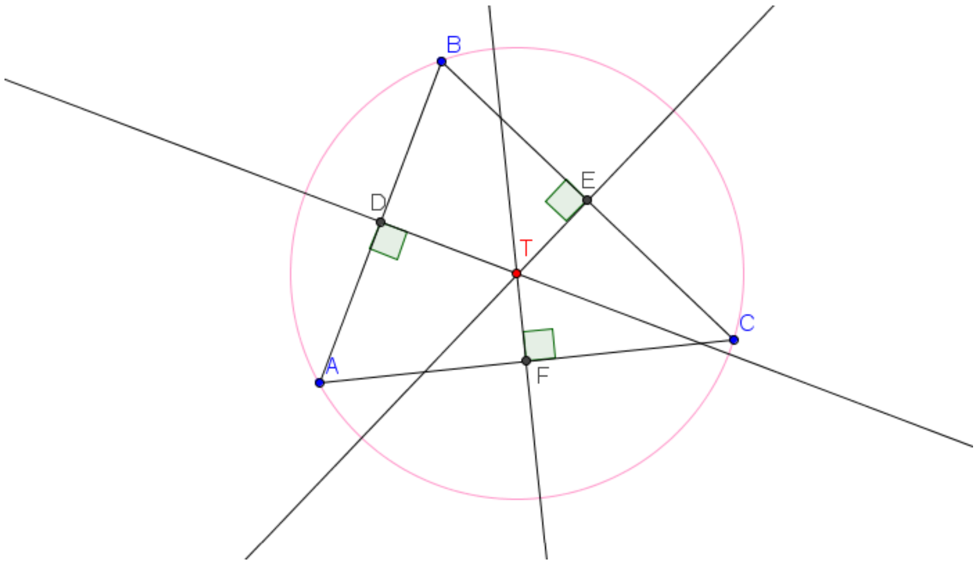


Figura 23: Solução da Atividade 8 item d

5.1.9 CIRCUNFERÊNCIAS INSCRITA E CIRCUNSCRITA EM POLÍGONOS REGULARES

Objetivos da Atividade:

- Resgatar os conceitos de polígonos regulares, circunferência inscrita ao polígono e circunferência circunscrita ao polígono.
- Perceber que o centro das circunferências inscrita e circunscrita a um polígono regular, sempre é interno ao polígono e coincidem.
- Relembrar que na atividade anterior já aprendemos a construir as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo.
- Construir as circunferências inscrita e circunscrita em um quadrado, pentágono regular e

hexágono regular.

- Conjecturar uma forma de encontrar o centro e os raios das circunferências inscrita e circunscrita, com base nas construções realizadas, para um polígono de n lados, quando n é par e também quando n é ímpar.

Folha da Atividade: Na Figura 24 está a folha entregue aos alunos para a realização da Atividade 9.

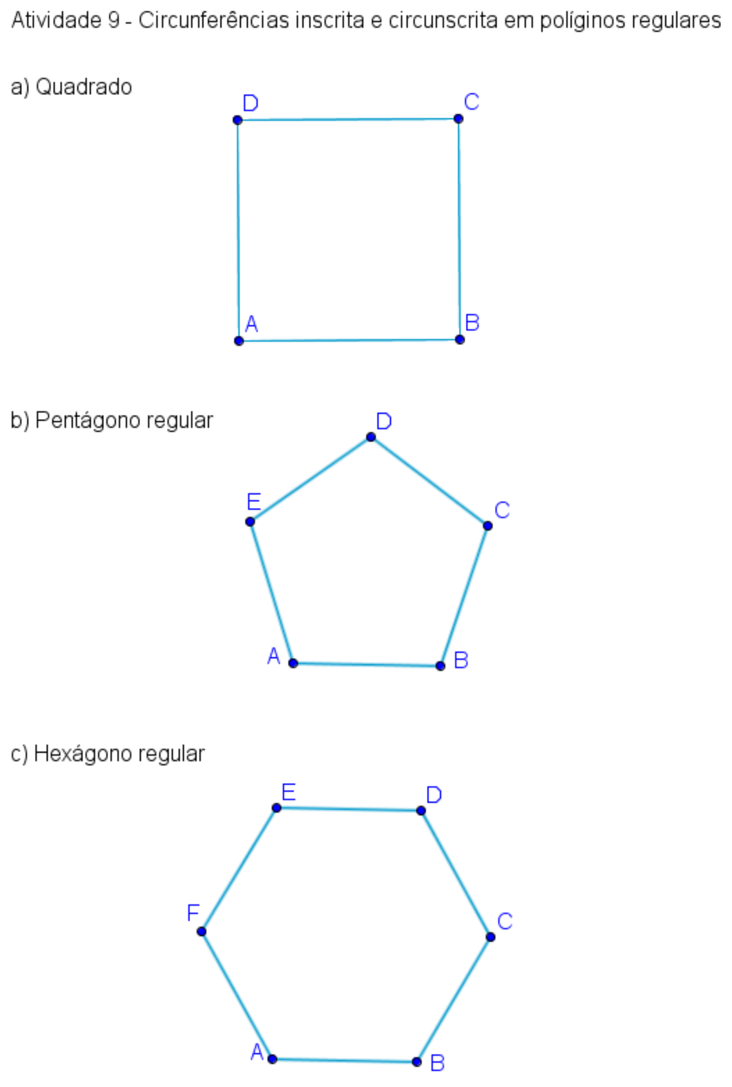


Figura 24: Atividade 9

Passos da Construção:

a) Quadrado

1. Trace as duas diagonais AC e BD, do quadrado.

2. Marque o ponto de intersecção entre as diagonais e indique pela letra E.
3. Encontre o ponto médio de um dos lados do quadrado, e indicamos pela letra F.
4. Ligue o ponto E ao ponto F obtendo o segmento de reta EF.
5. Temos que EF é o raio da circunferência inscrita e a metade da diagonal, EC é o raio da circunferência circunscrita.
6. Com centro em E, e raio EF trace a circunferência inscrita.
7. Com centro em E, e raio EC trace a circunferência circunscrita.

b) Pentágono Regular

1. Trace o ponto médio de dois lados do pentágono e indique pelas letras F e G.
2. Ligue cada ponto médio ao vértice oposto e encontre os segmentos GB e FC.
3. Marque o ponto de intersecção entre os segmentos GB e FC, e indique pela letra H.
4. Temos que HG é o raio da circunferência inscrita e HC é o raio da circunferência circunscrita.
5. Com centro em H, e raio HG trace a circunferência inscrita.
6. Com centro em H, e raio HC trace a circunferência circunscrita.

c) Hexágono Regular

1. Trace duas diagonais EB e FC do hexágono.
2. Marque o ponto de intersecção entre as diagonais e indique pela letra G.
3. Encontre o ponto médio de um dos lados do hexágono, e indicamos pela letra H.
4. Ligue os pontos H e G e obtenha o segmento HG.
5. Temos que HG é o raio da circunferência inscrita e a metade da diagonal, GC é o raio da circunferência circunscrita.
6. Com centro em G, e raio HG trace a circunferência inscrita.
7. Com centro em G, e raio GC trace a circunferência circunscrita.

Justificativa da Atividade:

O conceito de polígono regular é muito importante, além disso esses polígonos possuem várias propriedades que podem auxiliar no entendimento de conceitos geométricos. A existência da circunferência inscrita e da circunferência circunscrita em polígonos regulares é garantida por uma proposição e por um corolário, respectivamente. Segundo Barbosa (2006) Todo polígono regular está inscrito em uma circunferência e Todo polígono regular possui uma circunferência inscrita. Através do desenvolvimento dessa atividade podemos construir e entender elementos dos polígonos, como o lado, o apótema e até mesmo a área, elementos esses que são importante tanto para a compreensão da Geometria Plana quanto da Geometria Espacial. Outro fator importante, e que pode ser relembrado com o desenvolvimento dessa atividade, é a soma dos ângulos internos dos polígonos. Como qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos, e já sabemos que a soma dos ângulos internos de todo triângulo é 180 graus, podemos calcular a soma dos ângulos internos de qualquer polígono. Assim, se o polígono for regular, basta dividir o valor da soma de seus ângulos internos pela quantidade de ângulos que ele possui, e sabemos qual a medida de cada ângulo interno.

Solução da Atividade: Na Figura 25 está a solução da Atividade 9 construída no GeoGebra.

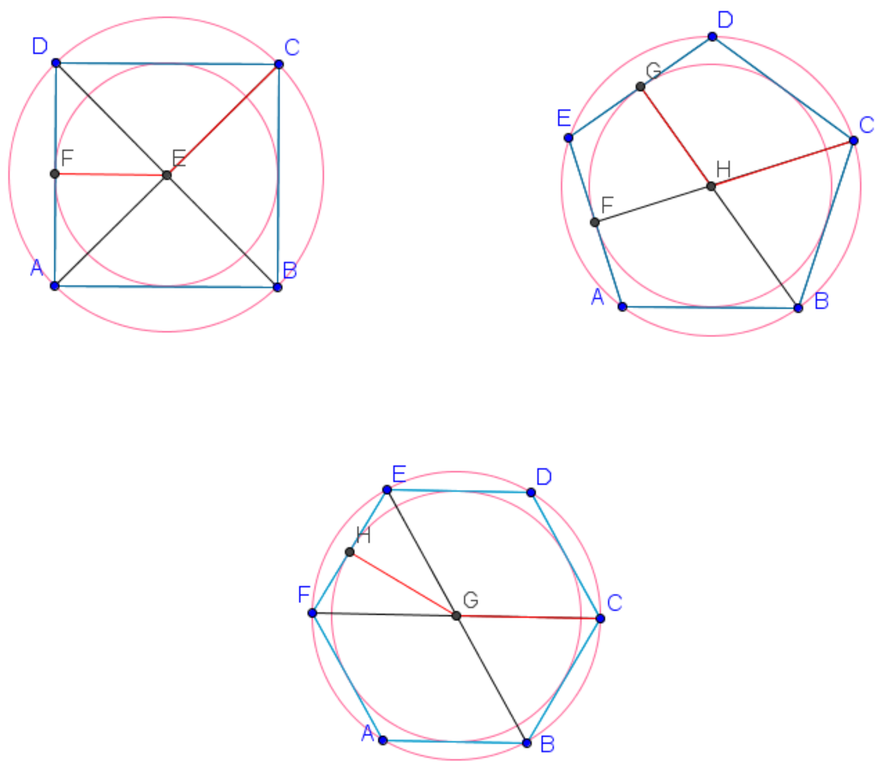


Figura 25: Solução da Atividade 9

5.2 APLICAÇÃO DA OFICINA SOBRE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

A posposta de oficina sobre Construções Geométricas teve duração de seis horas e foi aplicada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio no período matutino, na Escola de Educação Básica Professor Anacleto Damiani na cidade de Abelardo Luz, estado de Santa Catarina.

O primeiro encontro aconteceu no dia 24 de outubro de 2014, tendo início às 7h45min e término às 11h, sendo que neste dia estavam presentes 18 alunos da turma. No primeiro momento os alunos foram agradecidos pela disposição em participar da pesquisa, em seguida foram repassados aos alunos alguns slides (Apêndice A) que tratavam da história da Geometria e das Construções Geométricas. Os slides são considerados parte da **Fase 2 - Orientação Dirigida** da Teoria Van Hiele, pois foram previamente preparado para que os alunos se sentissem motivados e interessados pelo conteúdo que seria abordado na oficina. Além disso, foram destacados os entes primitivos da Geometria (o ponto, a reta e o plano) e relembrado como esses entes geométricos devem ser representados em uma folha de papel. Por volta das 8h30min foram distribuídos os materiais necessários para a realização das atividades da oficina (lápis, borracha, régua, compasso, folhas de atividades) e os alunos foram dispostos em grupos para a realização das atividades. Neste encontro foram realizadas: Atividade 1, Atividade 2 e Atividade 3. As construções realizadas pela professora pesquisadora no quadro foram feitas com o auxílio de uma régua e um compasso de madeira. O compasso continha uma ponta para a colocação do giz e a régua continha graduação, porém no momento das construções a graduação não foi utilizada.

O segundo encontro aconteceu no dia 06 de novembro de 2014, tendo início às 7h45min e término às 11h, sendo que neste dia estavam presentes 16 alunos da turma. No primeiro momento foi solicitado aos alunos que formassem grupos e na sequência foram entregues os materiais necessários para a realização das atividades da oficina. Neste encontro foram realizadas: Atividade 4, Atividade 5, Atividade 6, Atividade 7, Atividade 8 e Atividade 9. Ao final, foram recolhidas as folhas das atividades e os materiais e os alunos foram agradecidos novamente pela colaboração. Além disso, os alunos foram orientados que na semana seguinte a professora pesquisadora retornaria para a aplicação do último questionário com a turma.

6 ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo está a análise dos dados levantados durante a aplicação da oficina sobre Construções Geométricas. Na seção 6.1 Codificação das Informações, são feitas as codificações necessárias para interpretar e transcrever os dados obtidos durante a pesquisa. Na seção 6.2 Questionário 1 - Diagnóstico da Turma, está a análise do questionário aplicado anteriormente a realização da oficina. Na seção 6.3 Categorias de Análise, é realizada a análise das três categorias que emergiram dos dados obtidos: Instrumentos de Desenho, Ângulos e suas Implicações, Paralelas e suas Implicações. Na seção 6.4 Questionário 2 - Avaliação da Oficina, está a análise do questionário aplicado após a realização da oficina. Seguem abaixo os dados obtidos e as seções descritas acima.

6.1 CODIFICAÇÃO DAS INFORMAÇÕES

Primeiramente os dados obtidos através dos questionários, gravações de áudio, registro das atividades dos alunos, observações feitas durante a aplicação das atividades, foram codificados da seguinte maneira:

- Qi - Questionário i, onde i$\in \{1,2\}$
- Pi - Pergunta i, onde i$\in \{1,2,...,8\}$
- Ai - Atividade i, onde i$\in \{1,2,...,9\}$
- Si - Sujeito i, onde i$\in \{1,2,...,20\}$
- Ss - Sujeitos (representa mais de um sujeito)
- Pp - Professora Pesquisadora

A escolha dos recortes feitos nas respostas dos alunos, tanto nos questionários quanto nas atividades, foi levado em consideração as respostas que melhor evidenciavam os objetivos da nossa pesquisa.

6.2 QUESTIONÁRIO 1 - DIAGNÓSTICO DA TURMA

Os primeiros dados levantados sobre a turma em que foi aplicada a oficina se deu através de um questionário aplicado no dia 21 de outubro de 2014, sendo que 18 alunos responderam ao Questionário 1 - Diagnóstico da Turma. Esta forma de contato com os alunos pode ser vista como a **Fase 1 - Interrogação** da Teoria Van Hiele, pois foi possível identificar nos alunos seus conhecimentos prévios sobre os conteúdos matemáticos que seriam trabalhados. Segue abaixo os dados coletados em relação à este questionário.

A primeira pergunta foi referente a idade dos alunos. As idades variam entre 16 e 23 anos, com uma média de 17,2 anos.

A segunda pergunta foi referente ao instrumento compasso, sendo que todos os alunos responderam conhecer o compasso e também descreveram para que é utilizado. Na Figura 26 estão as respostas apresentadas por S4, S5 e S13 respectivamente, sobre a utilidade do compasso.

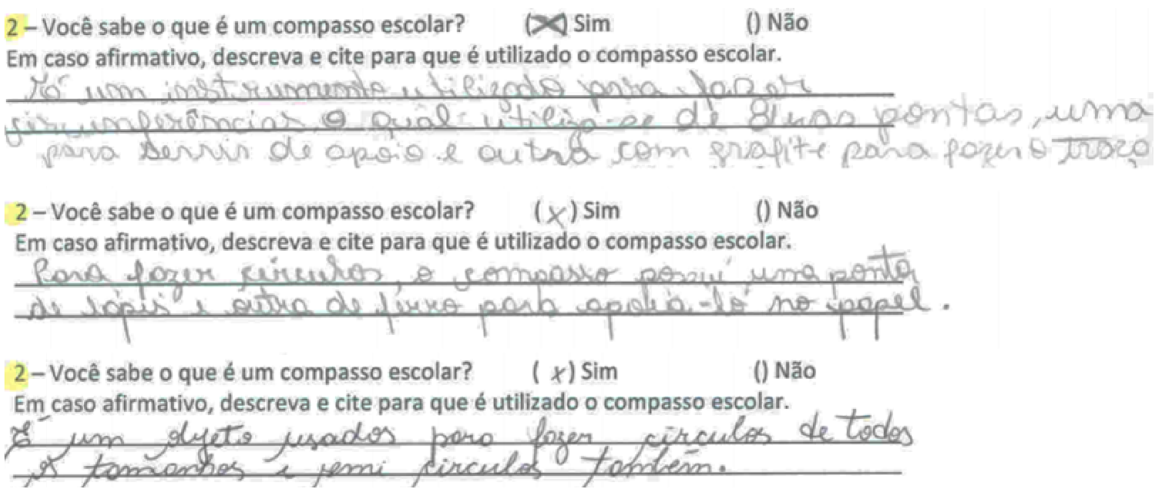
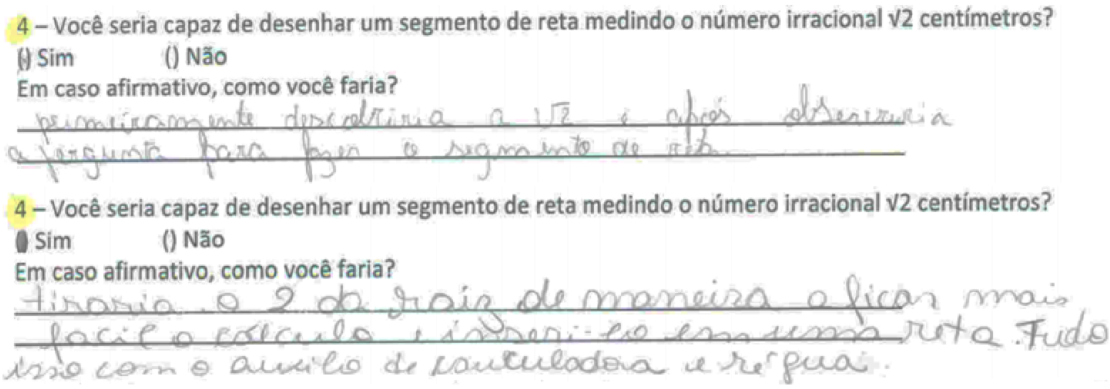


Figura 26: Respostas para P2: S4, S5, S13

Através das respostas apresentadas pelos alunos foi possível perceber que já possuem conhecimentos prévios sobre o instrumento de desenho denominado compasso. Além disso, todos os alunos sabem a sua utilidade e alguns alunos também conseguiram descrever o compasso da forma correta. Esse fator é importante pois facilitou a aplicação da oficina sobre Construções Geométricas, uma vez que não foi preciso apresentar os instrumentos necessários no desenvolvimento da oficina.

A terceira pergunta foi referente a utilização dos instrumentos régua e compasso nas aulas de Matemática. Sendo que 17 alunos reponderam já terem utilizado régua ou compasso durante as aulas, destes 7 alunos responderam que a iniciativa em utilizar o material foi sua e 10 alunos responderam que a iniciativa em utilizar o material foi do professor. Através das respostas apresentadas pelos alunos é possível perceber que já existe uma iniciativa em utilizar instrumentos de desenho nas aulas de Matemática, seja por iniciativa do professor ou dos próprios alunos. Esse fator é importante no sentido de que sem a utilização desses instrumentos os desenhos seriam traçados com menor precisão, o que poderia dificultar a identificação das figuras e a visualização de suas propriedades.

A quarta pergunta foi referente a capacidade de desenhar um segmento de reta medindo raiz quadrada de dois centímetros. Sendo que 3 alunos disseram conseguir desenhar tal segmento. Na Figura 27 estão as justificativas apresentadas por S1 e S4 respectivamente.


4 – Você seria capaz de desenhar um segmento de reta medindo o número irracional √2 centímetros?
(x) Sim () Não
Em caso afirmativo, como você faria?
primeiramente descobriria a √2 e após desenharia a pergunta para fazer o segmento de reta.

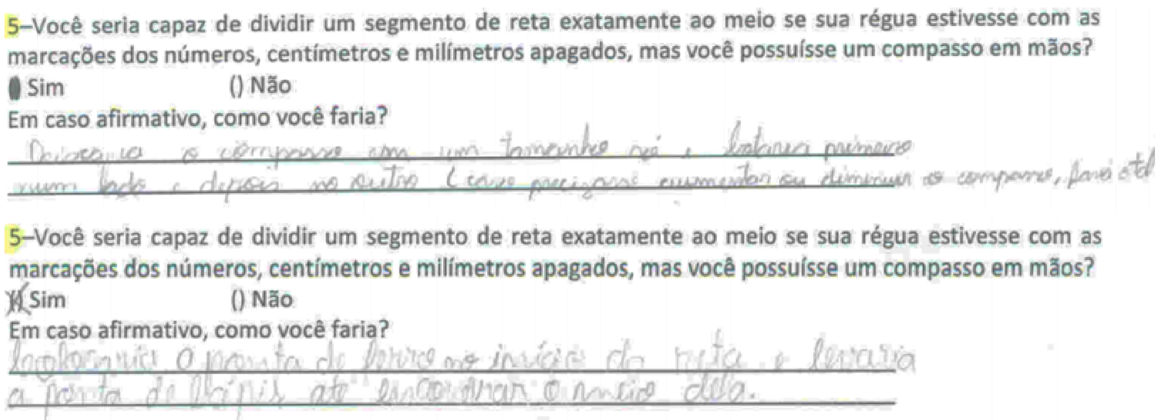
4 – Você seria capaz de desenhar um segmento de reta medindo o número irracional √2 centímetros?
(x) Sim () Não
Em caso afirmativo, como você faria?
tiraria o 2 da raiz de maneira a ficar mais facil o calculo e inseri-lo em uma reta. Tudo isso com o auxilio de calculadora e régua.

Figura 27: Respostas para P4: S1, S4

Através das respostas dos alunos foi possível perceber que não descreveram um processo geométrico para a construção do segmento de reta solicitado. A forma descrita pelos alunos não resultaria em um segmento com a medida exata para a raiz quadrada de dois, eles apenas conseguiriam desenhar um segmento cuja medida é uma aproximação do valor solicitado. Esse fator pode ser justificado pela forma com que os alunos costumam trabalhar com raízes não exatas em sala de aula, sempre encontrando uma aproximação através da calculadora e não trabalhando com o número na forma de raiz.

A quinta pergunta foi referente a capacidade de dividir um segmento de reta ao meio utilizando régua e compasso. Sendo que 7 alunos responderam conseguir realizar a construção. Na Figura 28 estão as justificativas apresentadas por S2 e S3 respectivamente.

Através das respostas dos alunos foi possível perceber que utilizariam o processo de tentativa e erro para conseguir encontrar o meio do segmento de reta. Com esse processo possivelmente conseguiriam encontrar uma boa aproximação para o ponto médio, porém levariam mais tempo do que se utilizassem as Construções Geométricas para esse fim.


5–Você seria capaz de dividir um segmento de reta exatamente ao meio se sua régua estivesse com as marcações dos números, centímetros e milímetros apagados, mas você possuísse um compasso em mãos?

(X) Sim () Não

Em caso afirmativo, como você faria?

Deixaria o compasso com um tamanho só e botaria primeiro num lado e depois no outro (caso precisasse aumentar ou diminuir o compasso, faria até

5–Você seria capaz de dividir um segmento de reta exatamente ao meio se sua régua estivesse com as marcações dos números, centímetros e milímetros apagados, mas você possuísse um compasso em mãos?

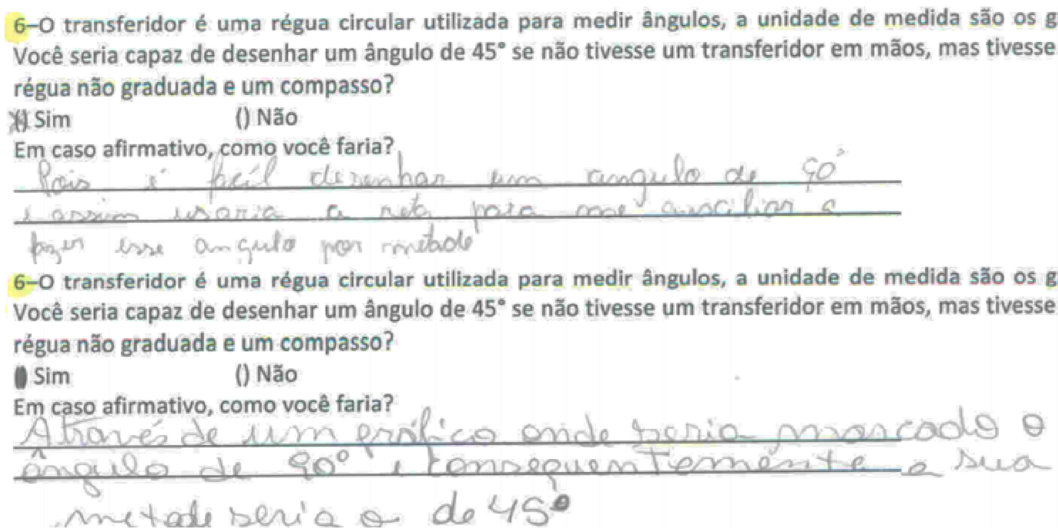
(X) Sim () Não

Em caso afirmativo, como você faria?

Colocaria a ponta de ferro no início da reta e levaria a ponta de lápis até encontrar o meio dela.

Figura 28: Respostas para P5: S2, S3

A última pergunta era sobre a capacidade de construir um ângulo de 45 graus utilizando régua e compasso. Sendo que 5 alunos responderam conseguir realizar a construção. Na Figura 29 estão as justificativas apresentadas por S1 e S4 respectivamente, que responderam conseguir construir o ângulo solicitado.


6–O transferidor é uma régua circular utilizada para medir ângulos, a unidade de medida são os graus. Você seria capaz de desenhar um ângulo de 45° se não tivesse um transferidor em mãos, mas tivesse uma régua não graduada e um compasso?

(X) Sim () Não

Em caso afirmativo, como você faria?

Pois é fácil desenhar um ângulo de 90° e assim usaria a reta para me auxiliar a fazer esse ângulo por método

6–O transferidor é uma régua circular utilizada para medir ângulos, a unidade de medida são os graus. Você seria capaz de desenhar um ângulo de 45° se não tivesse um transferidor em mãos, mas tivesse uma régua não graduada e um compasso?

(X) Sim () Não

Em caso afirmativo, como você faria?

Através de um gráfico onde seria marcado o ângulo de 90° e consequentemente a sua metade seria o de 45°

Figura 29: Respostas para P6: S1, S4

Através das respostas dos alunos foi possível perceber que já possuem uma ideia correta de como realizar a construção solicitada, porém ainda não compreendem o processo pelo qual se desenha um ângulo reto e posteriormente se divide o ângulo ao meio, através da construção de sua bissetriz.

De acordo com os dados obtidos pelo Questionário 1 foi possível perceber que a maioria dos alunos já possuía algum conhecimento sobre os elementos da Geometria. Além disso, os alunos já conheciam os instrumentos que iriam utilizar na oficina sobre Construções Geométricas, alguns até já haviam utilizado régua e compasso durante as aulas de Matemática.

Como já citado anteriormente, esses fatores são pontos favoráveis à aplicação da oficina sobre Construções Geométricas.

Pela análise dos questionários também foi possível perceber que a maioria dos alunos já é capaz de identificar propriedades de figuras e compreender algumas definições. Pelas respostas dos alunos que responderam saber realizar as construções solicitadas nas perguntas P4, P5 e P6, foi possível perceber que alguns já possuíam uma ideia intuitiva de Construção Geométrica, porém não compreendiam corretamente a execução dos passos necessários para a realização das construções.

6.3 CATEGORIAS DE ANÁLISE

A partir da leitura dos dados foi possível perceber a existência de três categorias principais a serem analisadas: Instrumentos de Desenho, Ângulos e suas Implicações, Paralelas e suas Implicações. A primeira categoria, Instrumentos de Desenho, aparece fortemente em todas as formas de coleta de dados. Ela se justifica não pelo fato dos alunos já conhecerem os instrumentos de desenho régua e compasso, mas sim por terem compreendido melhor para que servem esses instrumentos e aprendido novas funções para a régua e para o compasso. A segunda categoria, Ângulos e suas Implicações, se justifica pelo fato de várias atividades desenvolvidas na oficina remeterem a ideia de ângulo ou estarem relacionadas com ângulos. Assim também acontece com a terceira categoria, Paralelas e suas Implicações, pois algumas atividades da oficina remetem a ideia de paralelas ou estão relacionadas com paralelismo de retas ou segmentos de reta.

Segue abaixo a análise específica de cada uma das categorias, fazendo relações entre cada categoria, as atividades desenvolvidas na oficina sobre Construções Geométricas que remetem a cada uma das categorias e os autores que referenciam e justificam as ideias descritas.

6.3.1 CATEGORIA 1 - INSTRUMENTOS DE DESENHO

Os instrumentos de desenho régua e compasso são indispensáveis para a realização das Construções Geométricas, como já afirmava Januário (2000), portanto são muito importantes e estão presentes como a primeira das categorias à ser analisada. Essa categoria visa justificar a melhora apresentada pelos alunos, antes e após a realização da oficina sobre Construções Geométricas, em relação à utilidade dos instrumentos de desenho.

De acordo com os questionários respondidos pelos alunos constatou-se que a maioria já conhecia a régua e o compasso e também já haviam utilizado os instrumentos nas aulas de Matemática. Porém, no decorrer da aplicação da oficina foi possível perceber que alguns alunos não sabiam manusear corretamente esses instrumentos. Como as atividades da oficina foram desenvolvidas em grupos, esse impasse foi facilmente resolvido, pois os próprios alunos auxiliavam quem tinha dificuldade de manusear os instrumentos, principalmente o compasso.

Os alunos questionaram o por que de não se utilizar as marcações dos centímetros das réguas, mas no desenvolver das atividades perceberam que a régua é um instrumento que pode ser utilizado para se traçar uma reta (e também segmentos de reta ou semirretas) quando já se conhece dois pontos pelos quais ela passa, e não apenas um instrumento para realizar medições. Quanto ao compasso, que antes acreditavam servir apenas para traçar círculos ou circunferência, em nossas construções foi utilizado também para marcar e transferir medidas para outros pontos nas folhas de atividade.

Na sequência são apresentadas transcrições de áudio e recortes feitos nas atividades realizadas pelos alunos que fazem referência a Categoria 1.

Segue abaixo um trecho da transcrição de áudio da **Atividade 1 - Construção da mediatriz de um segmento de reta**:

Pp - Um segmento de reta é um pedaço de uma reta, ele tem início e fim, por isso primeiro precisamos marcar dois pontos. O ponto médio divide o segmento de reta exatamente ao meio, certo?

Ss - Sim!

Pp - Mas a mediatriz não é o ponto médio! A mediatriz é uma reta perpendicular ao segmento de reta, que passa pelo ponto médio desse segmento. Vocês lembram o que é reta perpendicular?

S4 - Que faz 90 graus.

Pp - Isso! Vou marcar aqui o ponto A que vai ser o início do segmento de reta e aqui o ponto B que vai ser o fim do segmento de reta. Vou ligar os dois pontos. Agora eu preciso traçar uma reta que passe pelo ponto médio, ou seja, pelo meio desse segmento e que seja perpendicular, ou seja, que forme 90 graus com o segmento. Como eu posso fazer isso utilizando o compasso?

S7 - Tem que pegar e colocar aqui! [indicando que deveríamos colocar o centro do compasso no meio do segmento e girar para os lados desenhando um semicírculo]

Pp - Olha a ideia da colega, colocar a ponta de ferro, essa ponta é chamada de ponta seca ou centro do compasso, no meio do segmento e girar o compasso para os dois lados traçando um semicírculo. Será que é assim?

S8 - Não é pra fazer?

Pp - É uma ideia. Mas e aí como eu vou achar o ângulo de 90 graus? Teve alguém que res-

pondeu no Questionário 1, na pergunta sobre o ponto médio, assim: que colocaria o centro do compasso primeiro no ponto A e depois no ponto B, e poderia aumentar e diminuir a abertura do compasso até achar o meio.
S8 - Quem foi?
Pp - Não sei quem foi! Vamos traçar um arco aqui em A e outro aqui em B, de forma que esses arcos se cruzem em dois pontos e chamar esses pontos de C e D. Conseguem fazer isso?
Ss - Sim!
Pp - Então façam. Agora o que mais precisa ser feito?
S4 - Ligar os pontos C e D?
Pp - Isso mesmo, se ligarmos os pontos teremos uma reta que é perpendicular e passa pelo ponto médio. Liguem os pontos e depois, com o compasso confiram se passou no ponto médio.

Fica claro que os alunos entenderam a utilidade da régua para ligar pontos e também para encontrar a reta que passa por dois pontos do plano. Ainda é possível notar a percepção, por parte dos alunos, de que o compasso serve para localizar pontos que estão a uma dada distância de outro ponto. Além de estarem identificando a utilidade de cada instrumento de desenho, o manuseio desses instrumentos está desenvolvendo a coordenação motora dos alunos, como já afirmava Souza (2013). Na Figura 30 está a solução da Atividade 1 apresentada pelo S5.

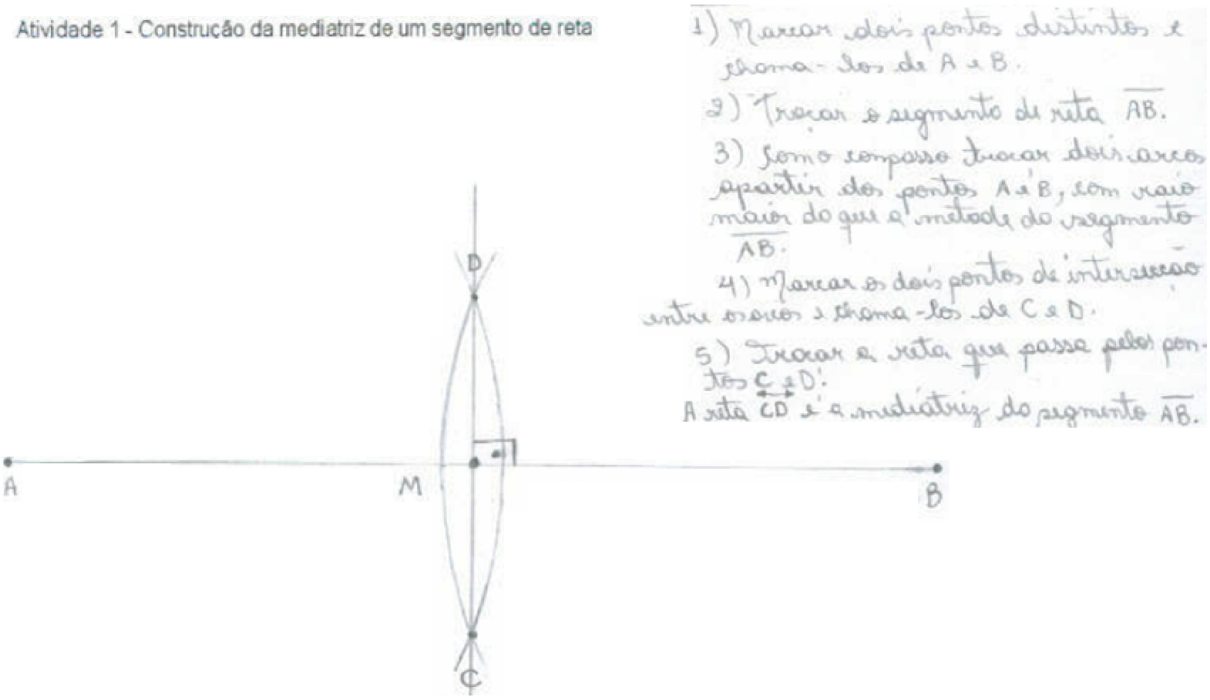


Figura 30: Solução da Atividade 1 - S5

Após a construção da mediatriz do segmento de reta AB na Atividade 1, foram desenvolvidos os passos necessários para efetivar a Construção Geométrica, que também constituem uma parte importante do processo de construção, pois possibilita, como dizia Itzcovich (2012), a enunciação da atividade em forma de um texto. Como os alunos eram iniciantes em Construções Geométricas, os passos foram relembrados e desenvolvidos no quadro, juntamente com os alunos, que posteriormente copiaram os passos em suas folhas da Atividade 1. Por esse motivo, todos os alunos obtiveram a mesma sequência de passos para essa atividade. A Atividade 1 pode ser considerada parte da **Fase 3 - Explicação** da Teoria Van Hiele, pois os alunos desenvolveram a atividade em grupos, de forma que puderam trocar informações sobre a construção a ser realizada. Além disso, nessa fase o papel do professor é de orientar os alunos e introduzir um vocabulário geométrico, como aconteceu no desenvolvimento dos passos executados para a construção dessa atividade.

Segue abaixo um trecho da transcrição de áudio da **Atividade 2 - Operações com segmentos de reta**:

Pp - Na Atividade 2 temos duas operações que podem ser feitas com segmentos de reta que são a soma e a multiplicação por escalar, ou seja, a multiplicação de um segmento de reta por um número natural. Na letra a precisamos somar os segmentos AB e CD tendo como base a reta r. Qual é a primeira coisa que precisamos fazer para transportar um dos segmentos para a reta r?

Ss - Um ponto!

Pp - Então vamos marcar um ponto aqui e precisamos indicar por alguma letra.

S13 - A'.

S3 - Mas por que A'?

Pp - Não precisa ser A', pode ser a letra que você quiser, note que já foram usadas as letras A, B, C e D, poderia ser letra E. Depois como podemos fazer para transportar o segmento AB para a reta r?

S3 - Com o compasso.

Pp - Isso, então com o compasso pegamos a medida AB e com centro em A' transportamos a medida para a reta r.

É possível perceber que os alunos estão descobrindo outra utilidade para o instrumento de desenho compasso: o transporte de medidas. Nas atividades seguintes os alunos utilizaram o compasso várias vezes com a finalidade de transportar medidas de um ponto para outro da folha de atividade. Na Figura 31 está a solução da Atividade 2 apresentada pelo S2.

Após efetivadas as construções da Atividade 2, os alunos foram orientados a desenvolver a sequência de passos que utilizaram. Nessa atividade a sequência de passos necessários para efetivar a construção foi desenvolvida pelos próprios alunos nos grupos. Quando algum

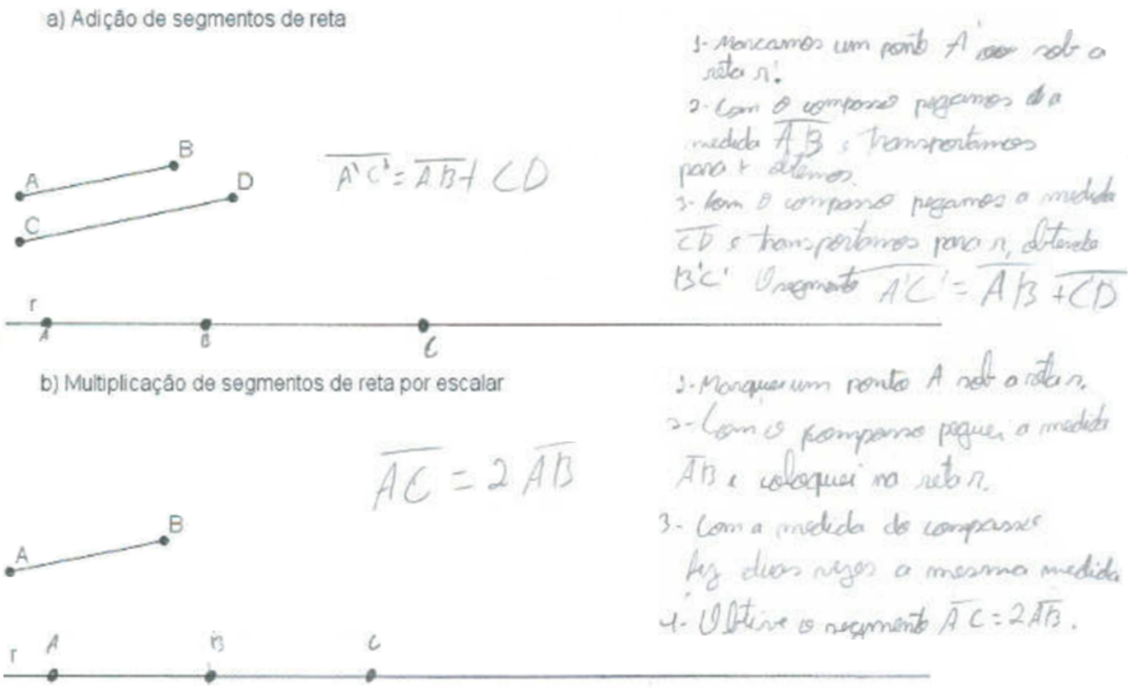


Figura 31: Solução da Atividade 2 - S2

aluno ficava com dúvida sobre o próximo passo ou se os passos estavam seguindo a sequência correta, eles eram orientados pela professora pesquisadora, do modo como Itzcovich (2012) afirmava ser importante o aporte do docente.

Segue abaixo um trecho da transcrição de áudio da **Atividade 4 - Construção da reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela**:

Pp - Então temos dois pontos onde a reta deve passar, ela deve passar no ponto E e no ponto F. Se sabemos dois pontos por onde a reta passa, é possível desenhar a reta? Quantos pontos precisamos para conseguir traçar uma reta?

Ss - Dois.

Pp - Então como já temos dois pontos é só traçar a reta. Retas são indicadas por letras minúsculas, então podemos indicar pela letra t, e a reta t é paralela a reta r.

Percebemos nesse diálogo que a atuação como professor às vezes se torna indutiva, levando os alunos a responderem aquilo que desejamos como resposta. Trata-se de um momento em que apresentamos as conclusões, limitando o raciocínio dos alunos. Apesar disso, pelo envolvimento e participação dos alunos nas construções, podemos inferir que eles compreenderam a principal utilidade da régua, além de relembrarem quantos pontos são necessários para se traçar uma determinada reta. Essas concepções são importantes para a realização das Construções Geométricas e estão presentes também em outras atividades da oficina.

De acordo com Januário (2000), na utilização de instrumentos de desenho como régua e compasso a qualidade dos instrumentos é importante, mas a precisão dos traços depende muito da forma com que cada pessoa manuseia o instrumento. Na **Atividade 5 - Divisão de um segmento de reta em partes congruentes** algo de inesperado aconteceu: ao realizar o transporte do ângulo para a construção da reta paralela, os pontos que deveriam ser ligados para a obtenção da primeira paralela ficaram muito próximos um do outro, sendo assim, pela precisão e pela grossura da ponta do lápis, ficava difícil conseguir traçar a paralela da forma correta. Então, na maioria das construções realizadas pelos alunos, o segmento que deveria ser dividido, pelas paralelas, em partes congruentes, acabou sendo dividido em partes com medidas diferentes. Esse fato não foi constatado durante a realização das atividades pelos alunos. A Atividade 5 foi a única que ficou prejudicada pela precisão dos instrumentos de desenho. Na Figura 32 está a solução da Atividade 5 apresentada pelo S6.

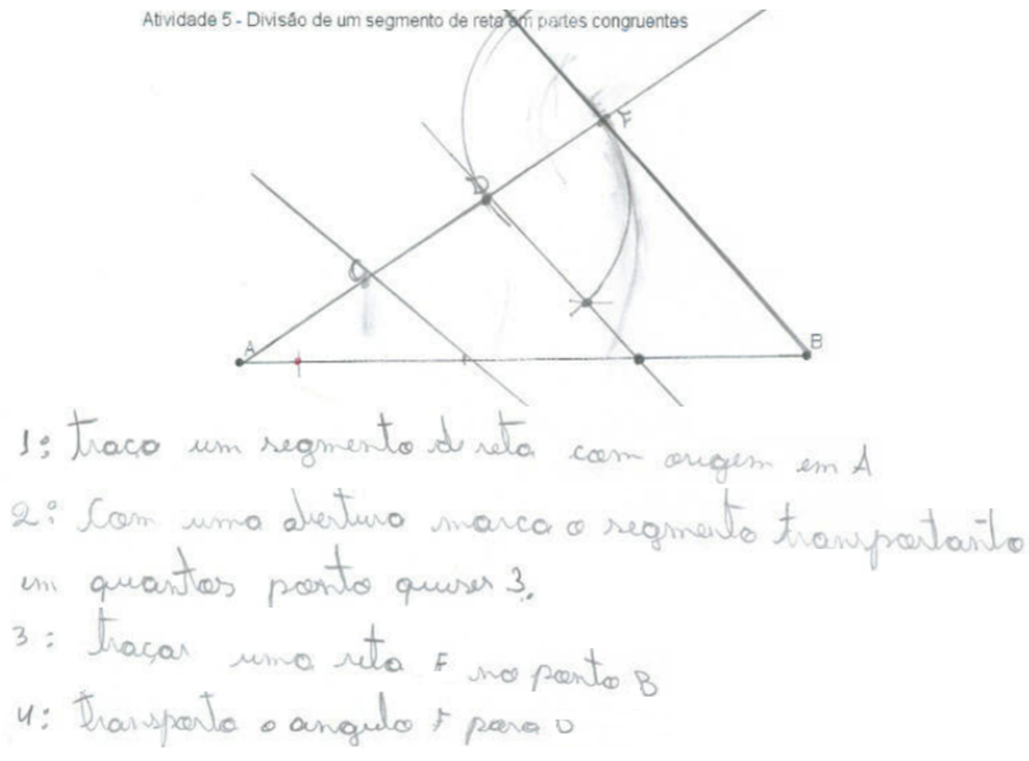


Figura 32: Solução da Atividade 5 - S6

É possível notar que os passos da construção estão descritos de maneira correta, porém o segmento AB ficou dividido em três partes com medidas diferentes, ao invés de três partes com medidas iguais. Nessa atividade a questão da precisão dos instrumentos de desenho acabou dificultando o processo de construção, sendo assim, a Atividade 5 não foi concluída da forma correta. Percebemos que poderíamos ter estimulado os alunos a utilizarem o compasso para verificar se os segmentos eram ou não congruentes, e através disso poderíamos retomar a construção e efetivá-la da maneira correta.

6.3.2 CATEGORIA 2 - ÂNGULOS E SUAS IMPLICAÇÕES

Os ângulos são elementos fundamentais da Geometria, seu entendimento por parte dos alunos é muito importante. O conceito de ângulo é indispensável para a compreensão de outros conceitos da Geometria Plana e Espacial, além de ser útil a outros campos da Matemática como a Trigonometria e a Álgebra. Saber traçar ângulos, especialmente os ângulos notáveis (30, 45, 60 e 90 graus) e, como já dizia Soares (2010), perceber a existência de ângulos em nosso ambiente é uma tarefa importante que os professores de Matemática podem estimular. Através das Construções Geométricas é possível traçar diversos ângulos, inclusive os ângulos notáveis. Na oficina sobre Construções Geométricas aplicada com alunos foram construídos vários elementos relacionados a ângulos.

Na sequência são apresentadas transcrições de áudio e recortes feitos nas atividades realizadas pelos alunos que fazem referência a Categoria 2.

Na **Atividade 3 - Transporte de um ângulo e construção da bissetriz**, os alunos aprenderam a realizar duas construções relacionadas a ângulos, construções essas que são elementares e necessárias para a execução de outras atividades da oficina. Foi possível perceber, durante a realização dessa atividade, que os alunos entenderam facilmente os conceitos geométricos que lhes foram apresentados, porém têm dificuldades em compreender os passos que devem ser executados para efetivar a construção e às vezes acabam por se confundir, mesmo após terem desenvolvido a construção de maneira correta. De acordo com Itzcovich (2012) as atividades de Construções Geométricas realizadas com alunos devem estimular o desenvolvimento de suas habilidades intelectuais, fazendo com que eles analisem as figuras e as construções e identifiquem propriedades nos desenhos realizados. Na Figura 33 está a solução apresentada pelo S4 para a Atividade 3.

É possível perceber, através das anotações feitas pelo S4 no item a da Atividade 3, que sua construção está correta e os passos necessários para realizar a construção também estão corretos. Porém, ao nomear os ângulos o aluno se equivocou, os ângulos deveriam estar descritos como DFC e AVB, ao invés de FCD e VBA. Já no item b da Atividade 3 os registros estão incompletos, apesar da construção estar correta. O S4 deveria ter concluído o último passo com o traçado da mediatriz do segmento AC, que por consequência será a bissetriz do ângulo B.

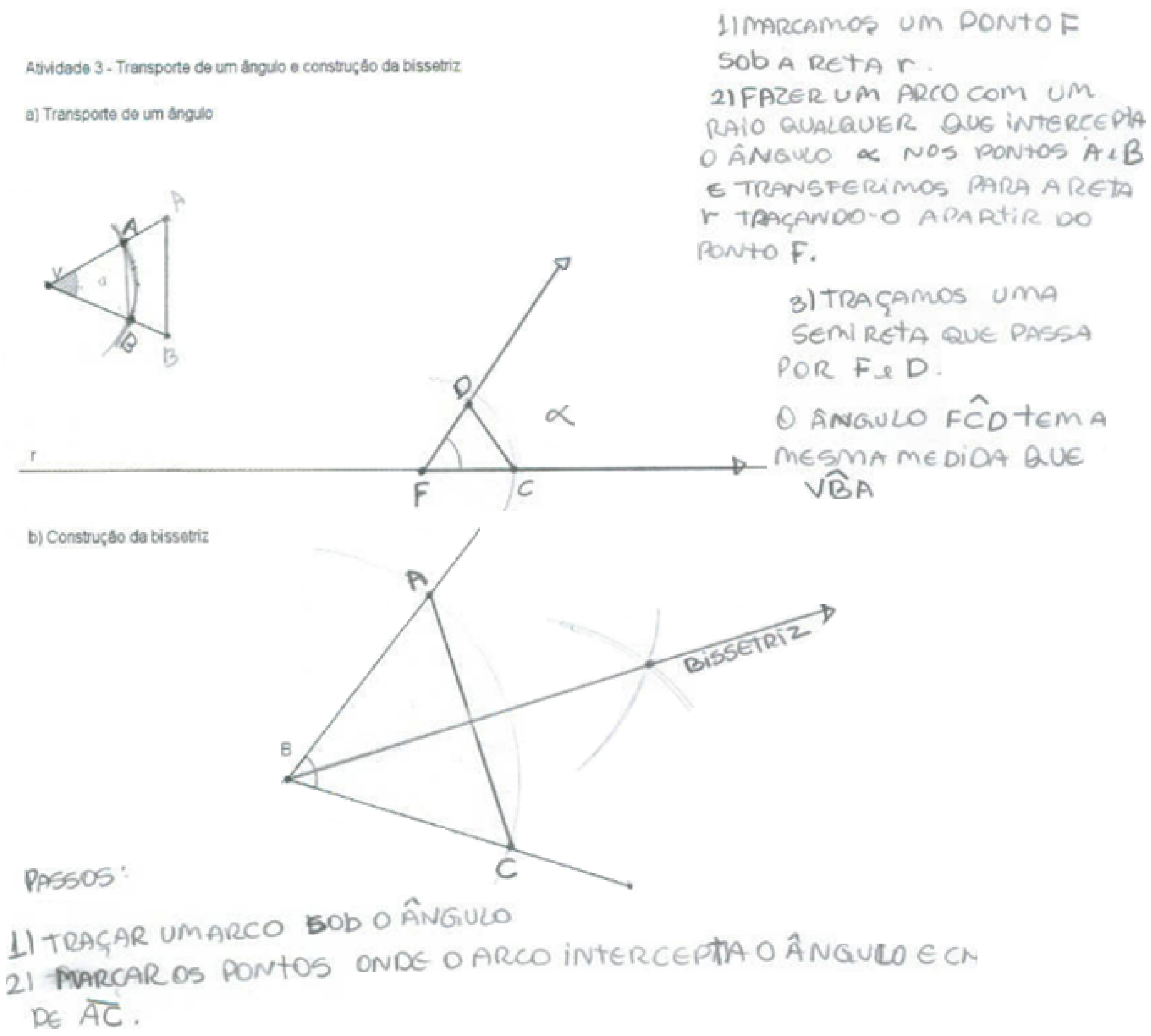


Figura 33: Solução da Atividade 3 - S4

Segue abaixo um trecho da transcrição de áudio da **Atividade 6 - Construção de um triângulo equilátero**:

Pp - Quando vocês estudamos geometria e trigonometria aprendemos os ângulos notáveis. Os ângulos notáveis são importantes, aprendemos a calcular seno, cosseno e tangente desses ângulos. Os ângulos notáveis são 30, 45, 60 e 90 graus. Quando aprendemos a traçar a reta perpendicular aprendemos a traçar um ângulo de quantos graus?

Ss - 90.

Pp - Então aprendemos a traçar um dos ângulos notáveis. Também aprendemos a traçar a bissetriz de um ângulo, que divide o ângulo no meio. Se traçarmos a bissetriz do ângulo de 90 vamos ter qual dos ângulos notáveis?

Ss - 45.

Pp - E agora que aprendemos a desenhar um triângulo equilátero, percebemos que nesse triângulo os três ângulos medem quantos graus?

Ss - 60.

Pp - Então aprendemos a construir o ângulo notável de 60 graus também, e como devo fazer para obter o ângulo notável de 30 graus?

S4 - Faz a bissetriz do de 60.

Pp - Isso mesmo. Então, através das construções geométricas, é possível construir todos os ângulos notáveis, que são muito utilizados na geometria e na trigonometria.

A Atividade 6 mostrou-se interessante, os alunos a resolveram com facilidade e praticamente sem o auxílio da professora pesquisadora. Além de aprenderem a construir um triângulo equilátero, os alunos também aprenderam a construir ângulos notáveis (60 graus) e foi possível retomar conceitos aprendidos nas atividades anteriores, como as definições de perpendicular e bissetriz, para evidenciar que através das Construções Geométricas é possível construir todos os ângulos notáveis. Como dizia Wagner (2007), nessa atividade foi possível discutir sobre o número de soluções para o problema, sendo que a maioria dos alunos apresentou duas possíveis soluções. Também nessa atividade surgiram entre as construções dos alunos, algumas mais elaboradas que chamaram a atenção. Na Figura 34 está a solução apresentada pelo S1 e na Figura 35 está a solução apresentada pelo S5 para a Atividade 6.

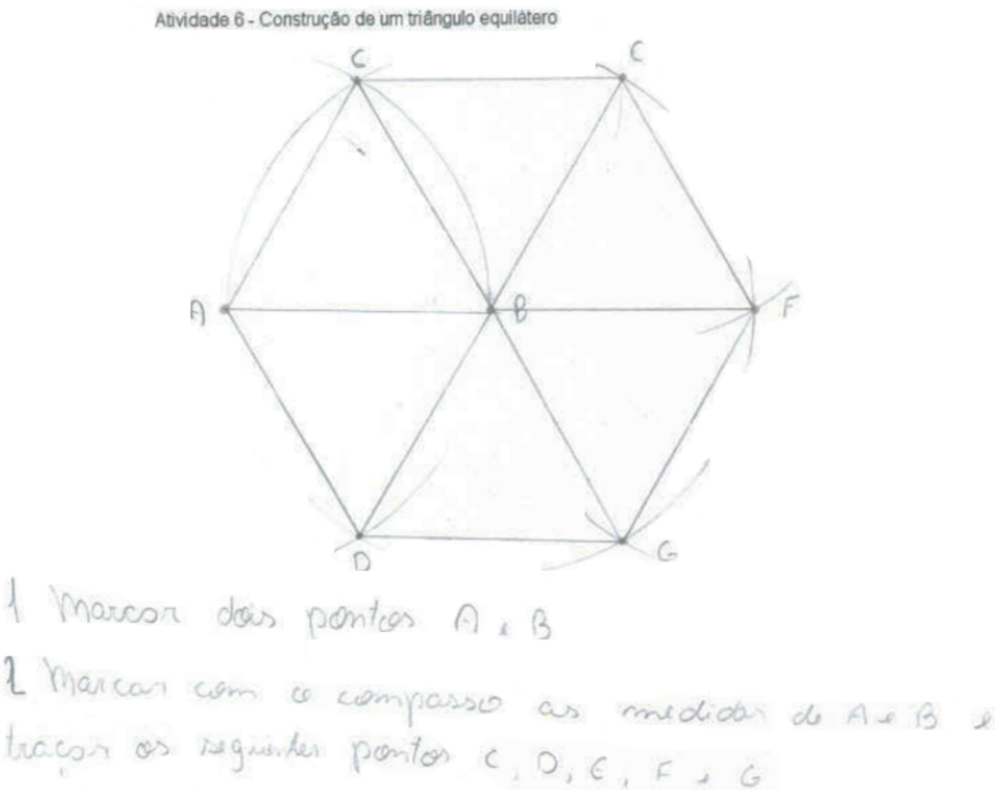


Figura 34: Solução da Atividade 6 - S1

Podemos notar, através da construção realizada pelo S1, que desenvolveu habilidades geométricas e percebeu a relação existente entre a figura do hexágono e do triângulo equilátero. Na figura podemos notar a construção de seis triângulos equiláteros formando um hexágono, sendo que mais nenhum outro alunos realizou uma construção semelhante. Então é possível afirmar que o S1 se encontra em um nível mais avançado de aprendizagem geométrica que a maioria dos alunos participantes da oficina.

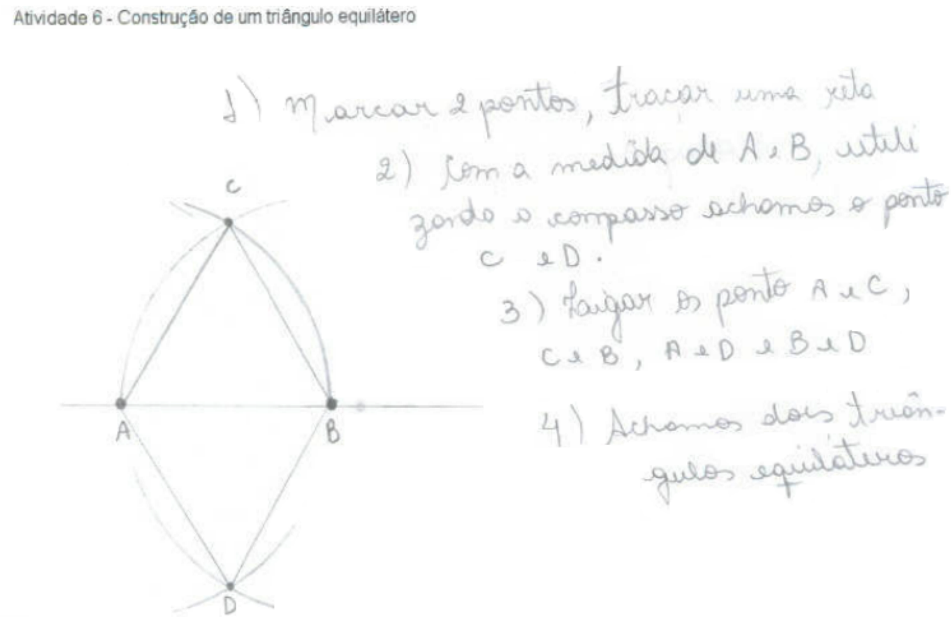


Figura 35: Solução da Atividade 6 - S5

Na construção realizada pelo S5 é possível perceber a conclusão de duas soluções diferentes para a construção solicitada. Essa constatação também é muito importante para a compreensão de como solucionamos uma Construção Geométrica, pois o problema pode não ter solução (como veremos na Atividade 7) ou apresentar mais de uma solução.

Segue abaixo um trecho da transcrição de áudio da **Atividade 7 - Construção de um triângulo com os comprimentos dos lados dados:**

Pp - Percebam que não teve ponto de encontro entre os arcos, vai ser possível traçar o triângulo?

S4 - Não!

S3 - Não sei!

S15 - Mas terá que dar professora?

Pp - Não necessariamente. Mas vocês precisam saber por que não foi possível traçar esse triângulo.

S4- Mas e se tivesse traçado a medida menor antes.

Pp - Querem tentar fazer? Podem tentar.

S1 - Também não vai dar.

Pp - Então o que precisamos para ser possível a construção do triângulo?

S3 - Lados iguais.

Pp - Não exatamente iguais, pois existem triângulos com a medida de todos os lados diferente. Já sabemos que se os três lados forem iguais o triângulo é chamado de equilátero. Se ele possuir dois lados iguais aí ele recebe o nome de isósceles. E se tiver todos os lados com medidas diferentes ele é chamado de escaleno. Mas o que é preciso para conseguir construir o triângulo nesse caso, o que deve acontecer com a medida desses dois lados para que haja um ponto de encontro entre os arcos que traçamos?

S4 - Que seja igual ao outro lado?

Pp - Se somar esses dois lados e a medida for igual ao outro lado vai acontecer isso [indicando para dois segmentos congruentes]. Na verdade o que precisamos é que a soma da medida desses dois lados seja maior que a medida do terceiro lado, então teremos um ponto de encontro. Se a soma de dois lados é menor que o outro lado, o que acontece na letra a, a soma dos segmentos AB e CD é menor que o segmento EF, não é possível traçar o triângulo. Isso se chama desigualdade triangular, é possível pegar qualquer triângulo e verificar que isso acontece.

S2 - E os passos da construção?

Pp - Nessa atividade não foi possível realizar a construção, então quero que justifiquem por que não foi possível, escrevendo o que entenderam sobre a desigualdade triangular.

S4 - É pra falar por que não deu certo?

S3 - Por que a soma das medidas eram menores.

Pp - Depois de justificar a letra a, façam a letra b e verifiquem se é possível realizar a construção agora que o segmento EF é menor.

S3 - A letra b deu certo.

S12 - Mas o meu ficou ao contrário.

S3 - Tem que escrever os passos professora?

Pp - Na letra b sim.

S13 - As meninas fizeram o triângulo também.

S3 - Quais são os passos gente?

S12 - Eu coloquei que pegamos a medida do EF e transportamos para a reta r.

S3 - Tá e depois.

S12 - Daí pegamos a medida CD e jogamos no ponto R. E a medida do AB jogamos no ponto S. Como é que podemos escrever isso? Pegamos a medida CD com o compasso...

S3 - E traçamos um semi círculo.

S13 - Daí pegamos a medida do AB e fizemos a mesma coisa?

S12 - É, e depois liguei os pontos. Pronto!

Através desse trecho é possível perceber duas relações importantes, a primeira é a constatação da desigualdade triangular que acontece no item a da Atividade 7. Como já afirmava Wagner (2007), as Construções Geométricas conduzem a descoberta de novas propriedades das figuras. A propriedade da desigualdade triangular é uma propriedade importante dos triângulos e pode ser verificada facilmente através da medição de seus lados. A segunda relação importante é a evolução no registro dos passos executados para a construção geométrica, é possível perceber que S3, S12 e S13 conversam e desenvolvem corretamente os passos, de uma forma cooperativa, o que é importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Na Figura 36 está a solução apresentada pelo S4 para o item a da Atividade 7 e na Figura 37 está a solução apresentada pelo S13 para o item b da Atividade 7.

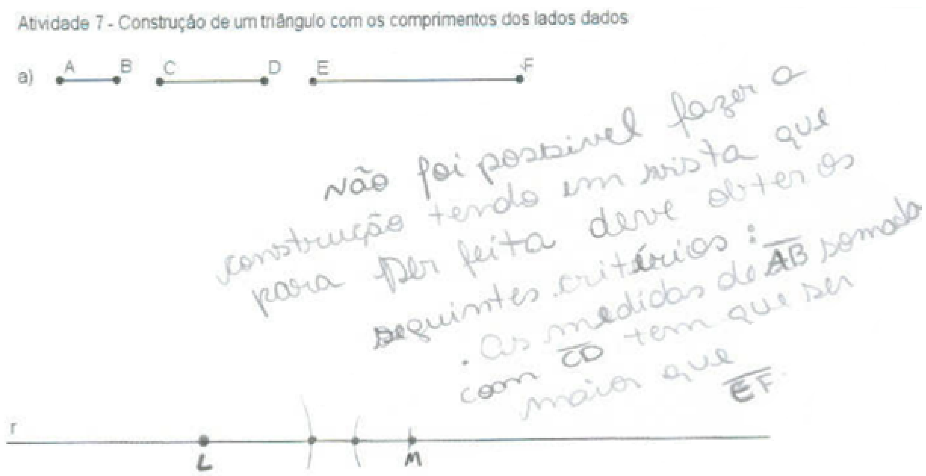


Figura 36: Solução da Atividade 7 item a - S4

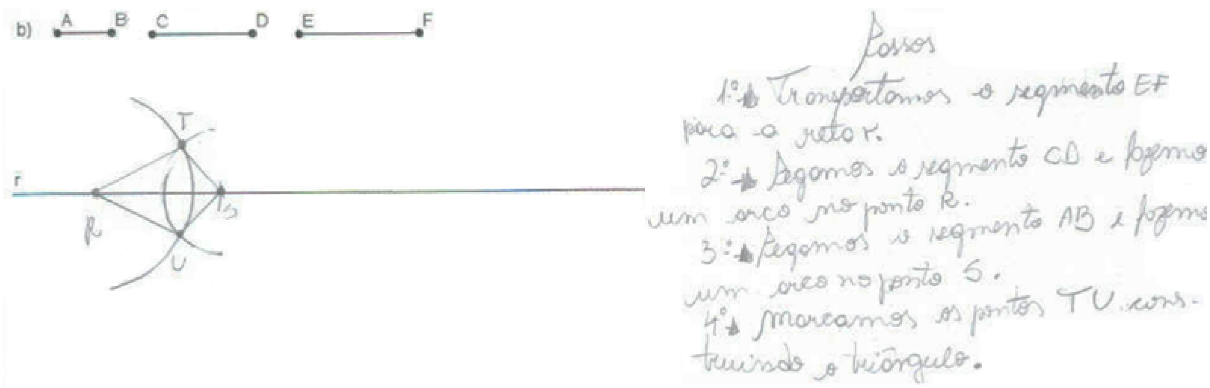


Figura 37: Solução da Atividade 7 item b - S13

Podemos notar que o S4 compreendeu o por que de não ser possível a construção do triângulo solicitado no item a, além disso ele foi capaz de transcrever seu entendimento para o papel. Esse fator é muito importante para o entendimento das Construções Geométricas, pois existem muitos alunos que possuem dificuldade de transcrever o que entenderam, principalmente quanto à Matemática.

É possível perceber que S13, que também faz parte do trecho da transcrição de áudio, conseguiu compreender o processo utilizado para a construção do triângulo e também descreveu corretamente os passos executados para essa construção. Além disso, podemos perceber a existência de duas soluções diferentes para o problema, assim como acontece na Atividade 6. Podemos dizer que a Atividade 7 pode ser considerada parte da **Fase 4 - Orientação Livre** da Teoria Van Hiele, pois o item a possui um final e aberto, já o item b possui mais de um solução para a construção solicitada.

Segue abaixo um trecho da transcrição de áudio da **Atividade 8 - Pontos notáveis do triângulo:**
Pp - Existe uma propriedade do incentro do triângulo que é muito importante. Já ouviram falar que todo triângulo possui uma circunferência inscrita e uma circunferência circunscrita?
Ss - Não!
Pp - Todo triângulo possui uma circunferência dentro dele, que toca seus lados e uma por fora dele que toca seus vértices. E o incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo, ou seja, dentro do triângulo. Com o centro do compasso no ponto I podemos pegar a medida até um dos lados do triângulo como raio e traçar a circunferência inscrita ao triângulo, tentem fazer isso.
S12 - Não pode sair para fora professora?
Pp - Se você traçou certo não vai sair.
S12 - O meu não saiu!
Pp - Será que o incentro pode ser fora do triângulo ou sempre será dentro?
S4 - Dentro do triângulo.
Pp - Por que sempre será dentro do triângulo?
S4 - Por causa da circunferência que está dentro.
Pp - Isso mesmo, se o incentro é o centro da circunferência inscrita, não tem como ficar fora do triângulo, pois a circunferência inscrita fica dentro do triângulo.

Podemos notar que, apesar de já possuírem vários conhecimentos geométricos, ainda existiam conceitos que os alunos não conheciam, é o caso das circunferências inscrita e circunscrita aos triângulos. Porém, após as construções da Atividade 8 esse conceito ficou claro, tanto que alguns alunos, como é o caso do S4, souberam utilizar a circunferência inscrita para justificar porque o Incentro sempre é interno ao triângulo. Na Figura 38 está a solução apresentada pelo S3 para o item a, na Figura 39 está a solução apresentada pelo S4 para os itens b e c, e na

Figura 40 está a solução apresentada pelo S6 para o item d da Atividade 8.

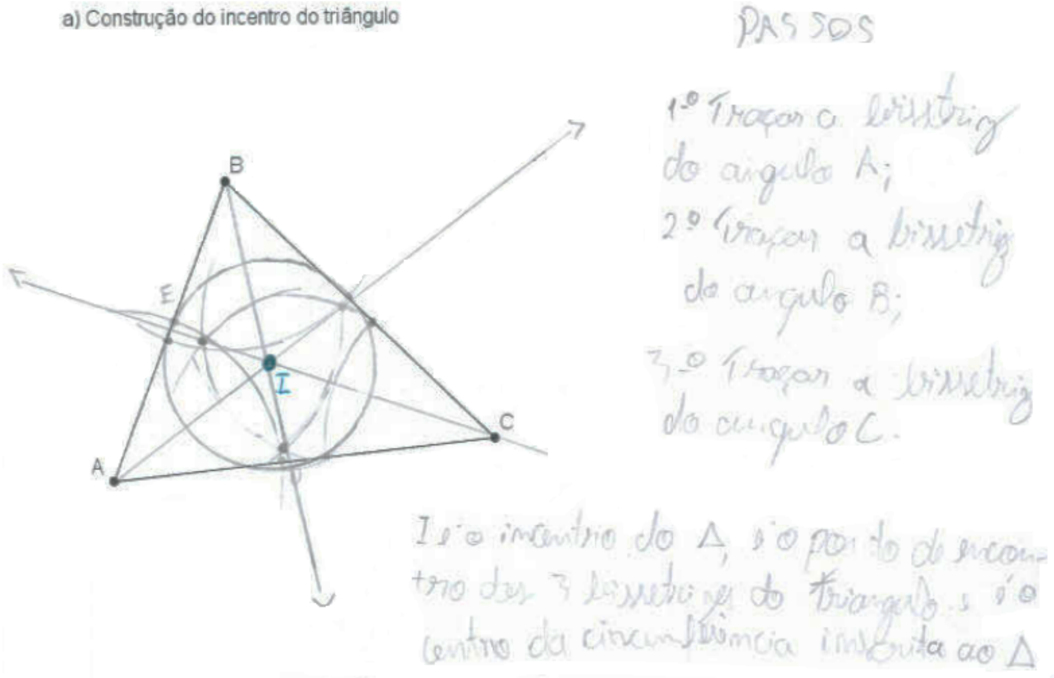


Figura 38: Solução da Atividade 8 item a - S3

Nessa construção os passos executados e as definições descritas pelo S3 em sua folha da Atividade 8 item a estão corretas. Isso sugere uma evolução em relação às Construções Geométricas, em relação ao nível em que se encontrava anteriormente a aplicação da oficina. Essa é mais uma evidência de que as Construções Geométricas podem ser empregadas como recurso pedagógico e tornar o processo de aprendizagem significativo para os alunos, de acordo com os pressupostos da aprendizagem significativa, descritos por Gonçalves et al.(2012).

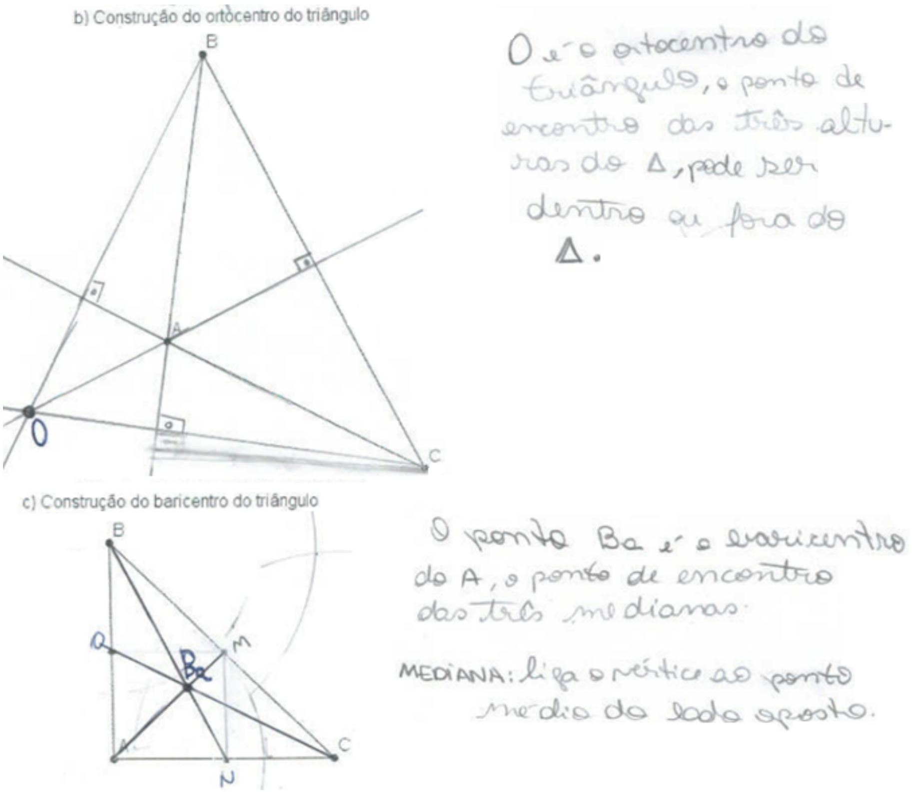


Figura 39: Solução da Atividade 8 itens b - c - S4

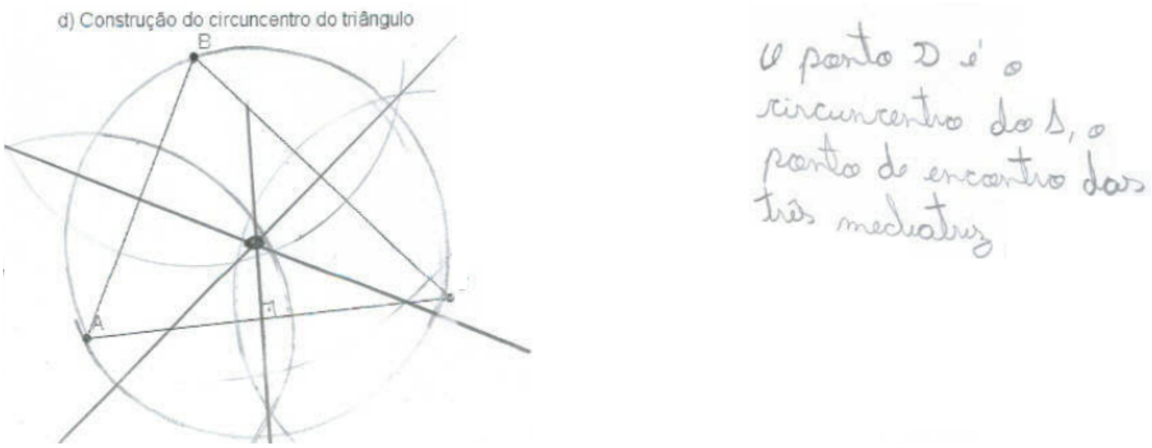


Figura 40: Solução da Atividade 8 item d - S6

Tanto no item b quanto no item c, o S4 demonstra compreender o processo de construção e a definição dos elementos geométricos envolvidos, porém não descreveu os passos executados na realização da Atividade 8. Assim como o S4, o S6 também construiu e definiu corretamente, mas não descreveu os passos do item d da Atividade 8.

Lembrando que, de acordo com a Teoria Van Hiele temos cinco níveis para o desenvolvimento do pensamento geométrico: Nível 1 - Visualização, Nível 2 - Análise, Nível 3 - Dedução Informal, Nível 4 - Dedução Formal e Nível 5 - Rigor, descritos na seção 3.3 A

Aprendizagem da Geometria.

Nesse momento foi possível perceber que a maioria dos alunos participantes da oficina já são capazes de conhecer visualmente as figuras geométricas (Nível 1), identificar as propriedades das figuras (Nível 2) e também de acompanhar uma prova formal e compreender definições (Nível 3). Esse estágio em que se encontravam os alunos é diferente do momento inicial da aplicação da oficina, durante a realização das primeiras atividades. Aconteceram avanços significativos, os alunos já se tornaram autônomos e conseguiram desenvolver as construções de maneira precisa e escrever os passos com uma linguagem adequada.

6.3.3 CATEGORIA 3 - PARALELAS E SUAS IMPLICAÇÕES

A definição de reta paralela, assim como a definição de reta perpendicular, é muito importante para a compreensão de conceitos geométricos planos e espaciais. Seu entendimento é fundamental, por exemplo, para a compreensão correta de quadriláteros como é o caso do paralelogramo, do losango, do retângulo e do quadrado. Além disso, nos estudos sobre Geometria Espacial, a noção de paralelismo é indispensável para a compreensão de sólidos geométricos como prismas, cilindros, troncos de pirâmides e cones e para o entendimento da Geometria de Posição. Emfim, o entendimento geométrico plano e espacial é indispensável para uma melhor relação com o espaço e com os objetos que nos cercam, como já afirmava Soares (2010). Na oficina sobre Construções Geométricas algumas atividades evidenciavam e concretizam a construção de retas paralelas.

Na sequência são apresentadas transcrições de áudio e recortes feitos nas atividades realizadas pelos alunos que fazem referência a Categoria 3.

Segue abaixo um trecho da transcrição de áudio da **Atividade 4 - Construção da reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela**:

Pp - O que significa traçar uma reta paralela a reta r passando pelo ponto E? Lembram o que é reta paralela?

Ss - Sim!

Pp - Quem sabe dizer a definição de retas paralelas?

S3 - A definição não, só sei que é assim [fez sinal com as mãos esticadas em linhas paralelas]

Pp - Ok, mas quais são as características que duas retas devem ter para serem paralelas?

S15 - Uma do lado da outra.

S1 - Na mesma direção que a outra.

S3 - Elas não se cruzam.

Pp - Exatamente, elas não se cruzam. Paralelas são duas retas que estão contidas no mesmo

plano e que não se cruzam, não tem pontos em comum. Elas estão sempre a mesma distância uma da outra. Aqui na sala de aula onde poderíamos encontrar retas paralelas?
S1 - No quadro.
S3 - No chão e no teto também.
S4 - Na mesa.
Pp - Isso, vocês já sabem o que são retas paralelas. O objetivo da atividade é traçar uma reta paralela a reta r passando pelo ponto E. Como poderíamos fazer isso de forma correta. Não é simplesmente traçar uma reta ali e dizer que é paralela tem que provar que é paralela, assim como fizemos na construção da bissetriz ou da mediatriz.
S4 - Traçar assim e assim! [indicando que deveríamos traçar duas perpendiculares e marcar a mesma distância]
Pp - É uma alternativa, não é como eu tinha planejado mas como você falou da para fazer também. Olha a ideia da colega, traçar uma perpendicular passando pelo ponto E e uma outra perpendicular qualquer e marcar nessa outra perpendicular a mesma distância do ponto E a reta r. Assim vamos conseguir traçar a paralela. Se alguém quiser fazer dessa forma é possível. Vou ensinar outra forma aqui no quadro, as duas estão corretas. Primeiro marcamos um ponto A qualquer na reta r. Agora ligamos o ponto A ao ponto E, temos o segmento AE. Esse segmento AE forma com a reta r um ângulo com uma certa medida, vamos dizer que mede α. Existe uma propriedade das retas paralelas que diz: se um feixe de retas paralelas é cortado por uma transversal, os ângulos aqui [apontando para os ângulos alternos internos] são congruentes. Esses ângulos são ditos alternos internos. Notem que a inclinação da reta transversal é sempre a mesma e como esses ângulos são ângulos opostos pelo vértice, também tem a mesma medida. Então a ideia da atividade 4 é traçar uma reta no ponto E tal que o ângulo seja alterno interno desse ângulo α, pois sabemos que se fizermos isso as retas serão paralelas. Já sabemos transportar um ângulo para outro ponto?
Ss - Sim!
Pp - Aprendemos a fazer isso na Atividade 3. Então o que precisamos fazer é transportar o ângulo α para o ponto E, ou seja, o ponto E será o vértice do novo ângulo. Então a reta que passa aqui em E será paralela a reta r.

Podemos notar que, embora alguns alunos não tenham conseguido definir corretamente o que são retas paralelas, possuem a noção do que as paralelas representam. Também é possível notar que os alunos são capazes de visualizar retas paralelas na sala de aula, isso é muito importante, como já diziam os PCNs (2000) para o desenvolvimento de habilidades geométricas. Outro fator interessante é a indicação dada pelo S4 para a construção da reta paralela, sendo que a ideia apresentada é totalmente correta e pode ser utilizada para efetivar a construção, mostrando que S4 teve um avanço significativo no decorrer das atividades propostas pela oficina. O motivo pelo qual não foi explorada no quadro a ideia sugerida por S4 é que a construção da reta paralela já havia sido planejada previamente e as ideias que a justificam no planejamento são os ângulos alternos internos, que também seriam utilizados em outras atividades da oficina. Portanto o entendimento de ângulos alternos internos é importante, sendo que deveria ser trabalhado com os alunos para ser possível avançar nas atividades. Na Figura 41 está a solução apresentada pelo S10 para a Atividade 4.

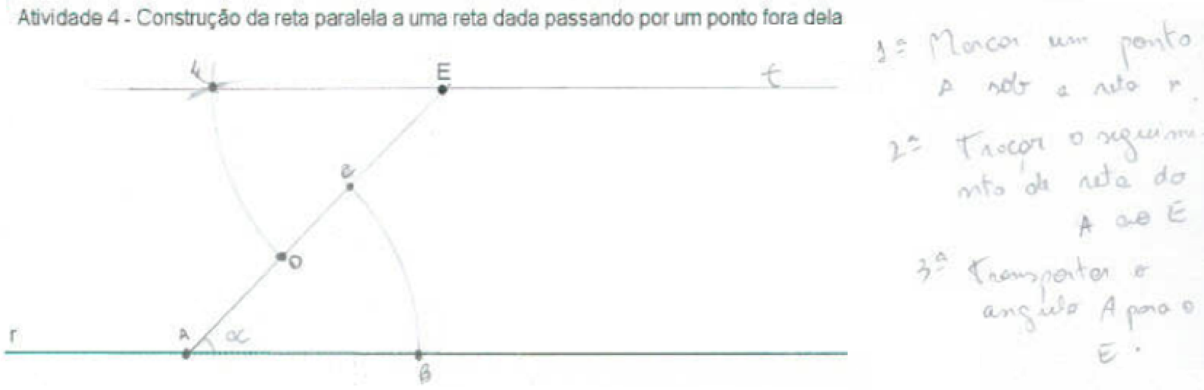


Figura 41: Solução da Atividade 4 - S10

É possível perceber que a solução apresentada pelo S10 está correta e os passos também estão desenvolvidos de maneira adequada, visto que na atividade anterior, Atividade 3, os alunos haviam aprendido a transportar um ângulo de um ponto para outro da folha de atividades. A única observação que poderia ser acrescentada nos passos desenvolvidos pelo S10 para a execução da Atividade 4 é que o ângulo deveria ser transportado de maneira a ser alterno interno do original, o que garantiria às retas serem paralelas. Uma consideração importante é que, como a Atividade 4 foi realizada treze dias depois da Atividade 3, foram necessários retomar os passos de como se transporta um ângulo, pois a maioria dos alunos não tinha certeza de como deveria executar essa parte da construção.

Segue abaixo um trecho da transcrição de áudio da **Atividade 5 - Divisão de um segmento de reta em partes congruentes:**

Pp - A Atividade 5 é para dividir o segmento de reta em partes congruentes. Lembram o que são partes congruentes?

Ss - Partes iguais.

Pp - Para justificar essa construção vamos lembrar do conteúdo que fala do Teorema de Tales, lembram o que diz o Teorema de Tales?

Ss - Não!

Pp - Diz que quando um feixe de paralelas é cortado por duas retas transversais, os segmen-

tos determinados pelas paralelas nas transversais são proporcionais. Por exemplo, se em uma transversal os segmentos determinados são congruentes, então os segmentos determinados na outra transversal também são congruentes. Normalmente vocês utilizavam a regra de três pra resolver problemas que envolvem o Teorema de Tales. O segmento que já está traçado na Atividade 5 será uma das transversais, está faltando traçar a outra transversal. Ela pode ser traçada à partir do ponto A. Estamos traçando uma semirreta com origem em A, lembram o que é uma semirreta?
Ss - Não!
S4 - Tem início mas não tem fim.
Pp - Isso mesmo, uma semirreta tem início mas não tem fim, é a metade de uma reta na verdade. Uma semicircunferência não é meia circunferência, então uma semirreta é meia reta.
S3 - Interessante.
Pp - Então se queremos dividir o segmento AB em partes congruentes, precisamos dividir essa semirreta em partes congruentes. Vamos escolher uma abertura do compasso e marcar na semirreta a abertura a partir do ponto A, é o mesmo que transportar um segmento de reta, vamos encontrar o ponto C. Fazendo o mesmo processo a partir de C, com a mesma abertura para que fiquem congruentes, encontramos o ponto D. Novamente com centro em D e encontramos o ponto E. Como fiz três vezes esse processo, então o segmento AB vai ficar dividido em três partes, se vocês fizerem quatro vezes, o segmento vai ficar dividido em quatro partes. Vamos ver os passos que fizemos até agora? Passo 1 - Traçar uma semirreta com origem no ponto A. Passo 2 - Com uma abertura qualquer do compasso e centro em A marcamos o ponto C sobre a semirreta. Com a mesma abertura do compasso e centro em C marcamos o ponto D, agora com centro em D e mesma abertura marcamos o ponto E.
S3 - Podemos escrever que transportamos o segmento AC na semirreta 3 vezes?
Pp - Podem, é exatamente isso que estamos fazendo. Já temos as duas transversais, já temos esse segmento dividido em partes iguais, o último ponto dessa transversal deve coincidir com o último ponto da outra para poder usar o Teorema de Tales?
Ss - Sim!
Pp - Então o terceiro passo é traçar o segmento de reta FB. Agora nosso objetivo é traçar paralelas ao segmento FB. Mas já aprendemos a traçar reta paralela na atividade anterior.

Através da transcrição de áudio é possível perceber que os alunos recordaram alguns pontos importantes da Geometria Plana, como é o caso do Teorema de Tales, para poder justificar a construção realizada na Atividade 5. Porém, apesar da atividade ter sido construída e justificada pelos teoremas da Geometria, como já foi citado na Categoria 1 - Instrumentos de Desenho, na Figura 32 da página 86, a solução final dessa atividade ficou prejudicada pela questão da precisão dos instrumentos de desenho.

Outra atividade importante em que podemos evidenciar a existência de ângulos e de segmentos de reta paralelos é a **Atividade 9 - Circunferências Inscritas e Circunscritas em Polígonos Regulares**. Na Atividade 9 não tivemos a transcrição gravada em áudio devido a problemas técnicos. Nessa atividade foi possível retomar vários conceitos aprendidos nas atividades anteriores, como as definições de segmento de reta, ângulos, paralelismo, circunferência inscrita, circunferência circunscrita, polígonos regulares, entre outras. Nas Figuras 42, 43 e 44 estão as soluções apresentadas por S1, S10 e S13 para a Atividade 9, respectivamente.

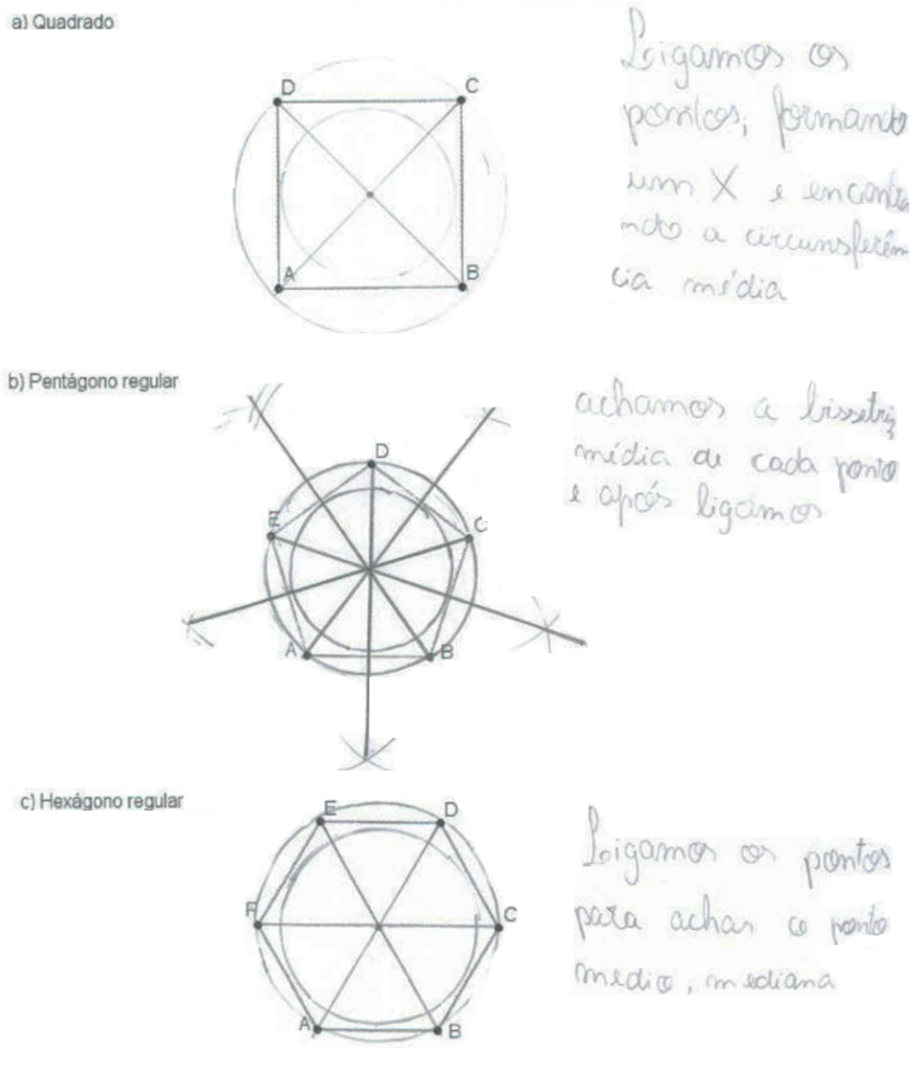


Figura 42: Solução da Atividade 9 - S1

Essa atividade se mostrou muito interessante, pois os alunos a desenvolveram com maior autonomia, o que gerou construções diferenciadas em alguns grupos. É possível perceber pela construção realizada no item a, que o S1 construiu as diagonais do quadrado, porém não as identificou como tais. Nas atividades anteriores não foi retomando o conceito de diagonal, o que poderia ter sido feito, afim de relembrar os alunos de mais esse conceito relacionado a Geometria Plana. No item b, apesar da construção estar correta, S1 identificou a bissetriz como sendo referente a cada ponto (vértice) do pentágono, quando deveria ter referenciado como a bissetriz de cada ângulo. Já no item c novamente é possível perceber as diagonais do hexágono traçadas, porém S1 as identificou como medianas. Podemos concluir que, através das construções realizadas no decorrer da oficina, os alunos aprimoraram seus conhecimentos sobre Geometria, porém ainda necessitam de um acompanhamento quanto aos termos utilizados para descrever corretamente os elementos geométricos.

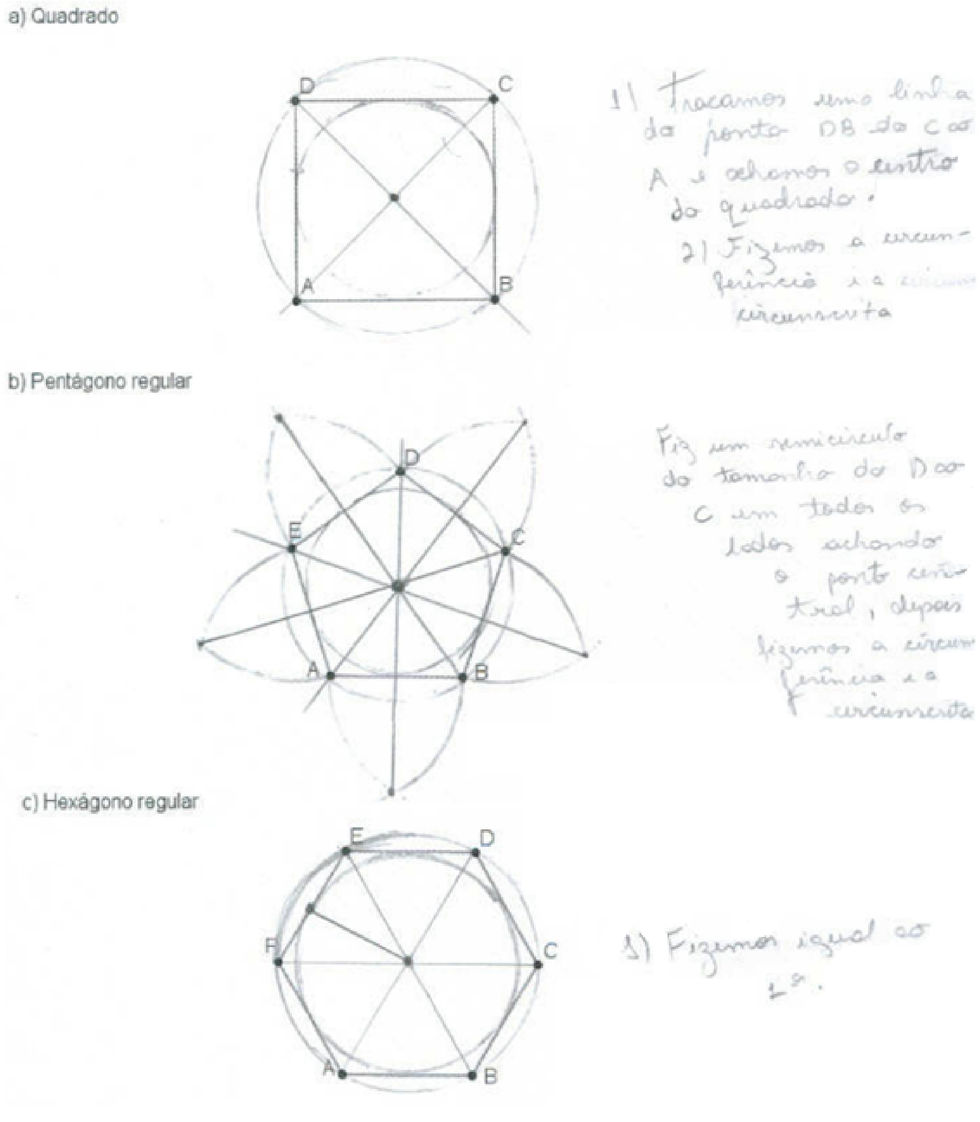


Figura 43: Solução da Atividade 9 - S10

A construção apresentada pelo S10 chamou bastante a atenção dos colegas, principalmente o item b, pois se assemelha a uma flor. Como as atividades da oficina foram desenvolvidas em grupos, alguns colegas que estavam no mesmo grupo de S10 também apresentaram soluções semelhantes, pois desenvolveram as construções de forma coletiva e cooperativa, sendo auxiliados pelos colegas e pela professora pesquisadora, sempre que necessário. Os passos descritos pelo S10 para a letra a estão corretos, porém não é mencionada a circunferência inscrita ao polígono, sendo que o mesmo acontece no item b da Atividade 9, conforme a Figura 43 acima.

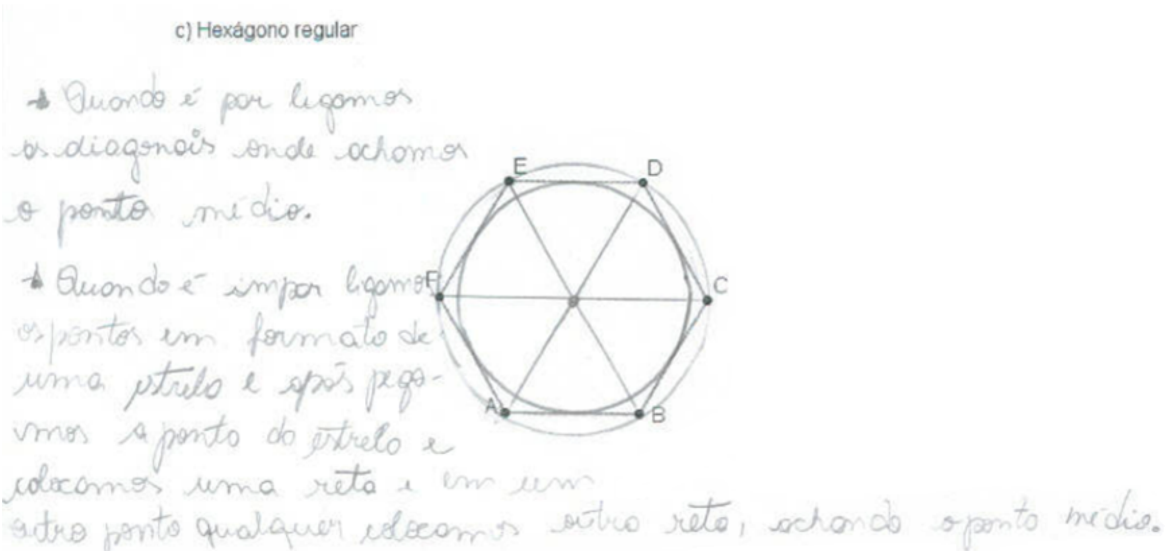


Figura 44: Solução da Atividade 9 - S13

Na descrição dos passos executados e apresentados pelo S13 é possível perceber a menção de diagonal, além de uma relação entre os polígonos com um número par de lados e outra relação para os polígonos com um número ímpar de lados. Esse fato é bastante interessante e mostra um avanço maior apresentado pelo S13, em relação aos colegas, como por exemplo S1 e S10. Esse avanço se justifica pelo fato de S13 ter conseguido perceber o que estava acontecendo com as circunferências inscrita e circunscrita aos polígonos regulares, além de saber diferenciar em relação a quantidade de lados apresentada pelos polígonos e conseguiu generalizar, mesmo que de forma simples, para os demais polígonos regulares.

Através dessa categoria aconteceu o fechamento da oficina, com a conclusão das atividades propostas. É possível perceber que a maioria dos alunos conseguiu entender o que são as Construções Geométricas, quais são os instrumentos de desenho necessários para realizá-las, como se manuseia esses instrumentos de desenho, além de aprenderem a realizar as Construções Geométricas elementares, ou seja, aquelas que são indispensáveis para a construção de elementos mais elaborados da Geometria. Além disso, foi possível retomar e aprofundar as definições de vários elementos da Geometria Plana e Espacial e elevar a aprendizagem geométrica da maioria dos alunos.

6.4 QUESTIONÁRIO 2 - AVALIAÇÃO DA OFICINA

Após a realização da oficina, no dia 10 de novembro de 2014 foi aplicado o segundo questionário com os alunos. Neste dia 20 alunos responderam ao questionário Avaliação da Oficina. Seguem abaixo os dados coletados em relação a este questionário.

Da primeira a quarta pergunta os alunos realizaram uma avaliação da oficina aplicada, dando um nota de 1 a 5 para cada item, sendo que 1 representava sua total insatisfação e 5 representava sua total satisfação. Esse último contato com os alunos pode ser considerado a **Fase 5 - Integração** da Teoria Van Hiele, pois foi possível retomar os conceitos vistos durante as atividades de uma forma mais geral. Isso se justifica pelo fato dos alunos relembrarem alguns conceitos geométricos para responder as perguntas, além de retomar algumas construções realizadas durante a aplicação da oficina.

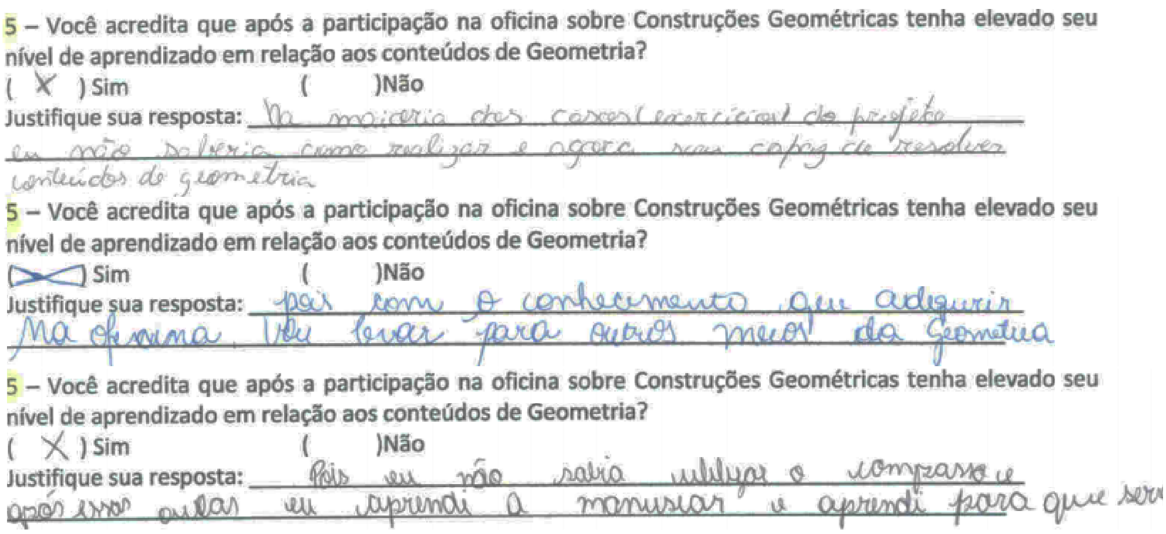
Na primeira pergunta os alunos deveriam avaliar a oficina no geral, sendo que 8 alunos deram nota 4 e 12 alunos deram nota 5 à oficina.

Na segunda pergunta os alunos deveriam avaliar a professora pesquisadora em relação a seu envolvimento com a turma, explicação dos conteúdos e desenvolvimento das atividades durante a aplicação da oficina. Nesta pergunta 3 alunos deram nota 4 e 17 alunos deram nota 5 à professora pesquisadora.

Na terceira pergunta os alunos deveriam avaliar os materiais utilizados na oficina. Nesta pergunta 5 alunos deram nota 3, 6 alunos deram nota 4 e 9 alunos deram nota 5 aos materiais utilizados na oficina.

Na quarta pergunta os alunos deveriam se autoavaliar em relação a participação na oficina sobre Construções Geométricas. Nesta pergunta 2 alunos deram nota 3, 13 alunos deram nota 4 e 5 alunos deram nota 5 à sua participação na oficina.

Na quinta pergunta os alunos foram questionados se após a aplicação da oficina sobre Construções Geométricas teriam elevado seu nível de aprendizado em relação aos conteúdos de Geometria. Todos os alunos responderam que sim, elevaram seu nível de aprendizado em relação aos conteúdos de Geometria. Na Figura 45 estão algumas justificativas apresentadas por S1, S9 e S17 para terem seu nível de aprendizado geométrico elevado.


5 – Você acredita que após a participação na oficina sobre Construções Geométricas tenha elevado seu nível de aprendizado em relação aos conteúdos de Geometria?
(X) Sim ( )Não
Justifique sua resposta: Na maioria dos casos (exercícios) do projeto eu não saberia como realizar e agora sou capaz de resolver conteúdos de geometria

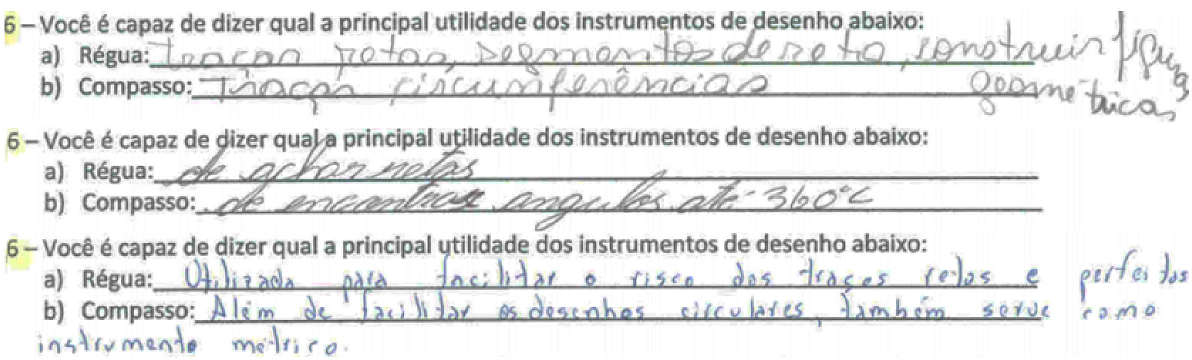
5 – Você acredita que após a participação na oficina sobre Construções Geométricas tenha elevado seu nível de aprendizado em relação aos conteúdos de Geometria?
(X) Sim ( )Não
Justifique sua resposta: pois com o conhecimento que adquiri na oficina vou levar para outros meios da Geometria

5 – Você acredita que após a participação na oficina sobre Construções Geométricas tenha elevado seu nível de aprendizado em relação aos conteúdos de Geometria?
(X) Sim ( )Não
Justifique sua resposta: Pois eu não sabia utilizar o compasso e após essas aulas eu aprendi a manusear e aprendi para que serve

Figura 45: Respostas para P5: S1, S9, S17

Através das respostas dos alunos foi possível perceber que acreditam ter ampliado seus conhecimentos sobre os conteúdos de Geometria abordados na oficina sobre Construções Geométricas. Também foi possível perceber que alguns alunos se sobressaíram em relação aos demais, demonstrando maiores habilidades geométricas e auxiliando os colegas durante a realização das atividades de construção, fato esse que foi constatado através das observações feitas pela professora pesquisadora.

Na sexta pergunta os alunos foram questionados sobre a utilidade dos instrumentos de desenho régua e compasso. Todos os alunos souberam responder a utilidade dos instrumento. Para a régua a maioria respondeu que serve para traçar retas e o compasso que serve para traçar circunferências e círculos. Na Figura 46 estão algumas utilidades citadas por S4, S11 e S18 para os instrumentos de desenho régua e compasso.


6 – Você é capaz de dizer qual a principal utilidade dos instrumentos de desenho abaixo:
a) Régua: traçar retas, segmentos de reta, construir figuras geométricas
b) Compasso: Traçar circunferências

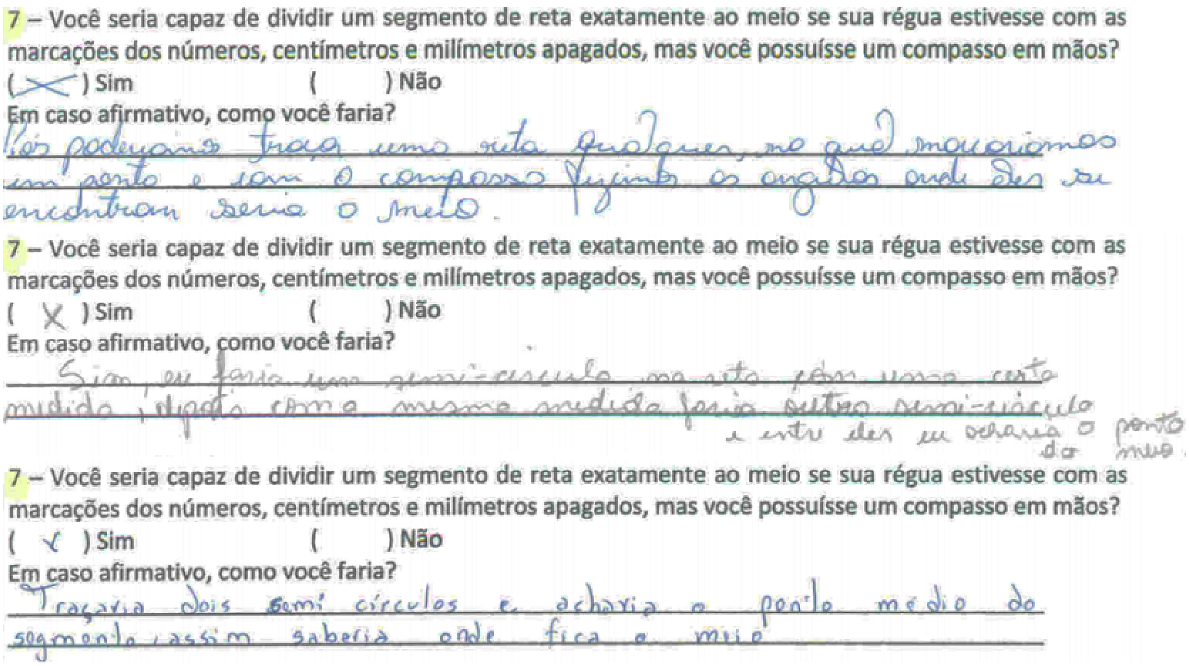
6 – Você é capaz de dizer qual a principal utilidade dos instrumentos de desenho abaixo:
a) Régua: de achar retas
b) Compasso: de encontrar angulos até 360°C

6 – Você é capaz de dizer qual a principal utilidade dos instrumentos de desenho abaixo:
a) Régua: Utilizada para facilitar o risco dos traços retos e perfeitos
b) Compasso: Além de facilitar os desenhos circulares, também serve como instrumento métrico.

Figura 46: Respostas para P6: S4, S11, S18

Através das respostas apresentadas foi possível perceber que os alunos aprenderam outras utilidades para o instrumento compasso, como é possível notar nas respostas de S4 e S11, os alunos relacionam o compasso com o traçado de ângulos e também temos que S18 relaciona o compasso como um instrumento métrico. Além disso, é possível perceber a utilização, por parte dos alunos, de termos geométricos que não se faziam presentes no Questionário 1 - Diagnóstico da turma. Esse é um fator que evidencia a evolução dos alunos em relação à aprendizagem geométrica.

Na sétima pergunta os alunos foram questionados se saberiam dividir um segmento de reta ao meio, utilizando os instrumentos de desenho régua e compasso. Sendo que 16 alunos disseram saber realizar a construção e apenas 4 alunos não saberiam. Na Figura 47 estão as justificativas apresentadas por S7, S10 e S18 para a divisão do segmento de reta ao meio.


7 – Você seria capaz de dividir um segmento de reta exatamente ao meio se sua régua estivesse com as marcações dos números, centímetros e milímetros apagados, mas você possuísse um compasso em mãos?

(X) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, como você faria?

Nós podemos traça uma reta qualquer, no qual marcamos um ponto e com o compasso fazendo os angulos onde eles se encontram seria o meio.

7 – Você seria capaz de dividir um segmento de reta exatamente ao meio se sua régua estivesse com as marcações dos números, centímetros e milímetros apagados, mas você possuísse um compasso em mãos?

(X) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, como você faria?

Sim, eu faria um semi-circulo na reta com uma certa medida, depois com a mesma medida faria outro semi-circulo e entre eles eu acharia o ponto do meio.

7 – Você seria capaz de dividir um segmento de reta exatamente ao meio se sua régua estivesse com as marcações dos números, centímetros e milímetros apagados, mas você possuísse um compasso em mãos?

(✓) Sim ( ) Não

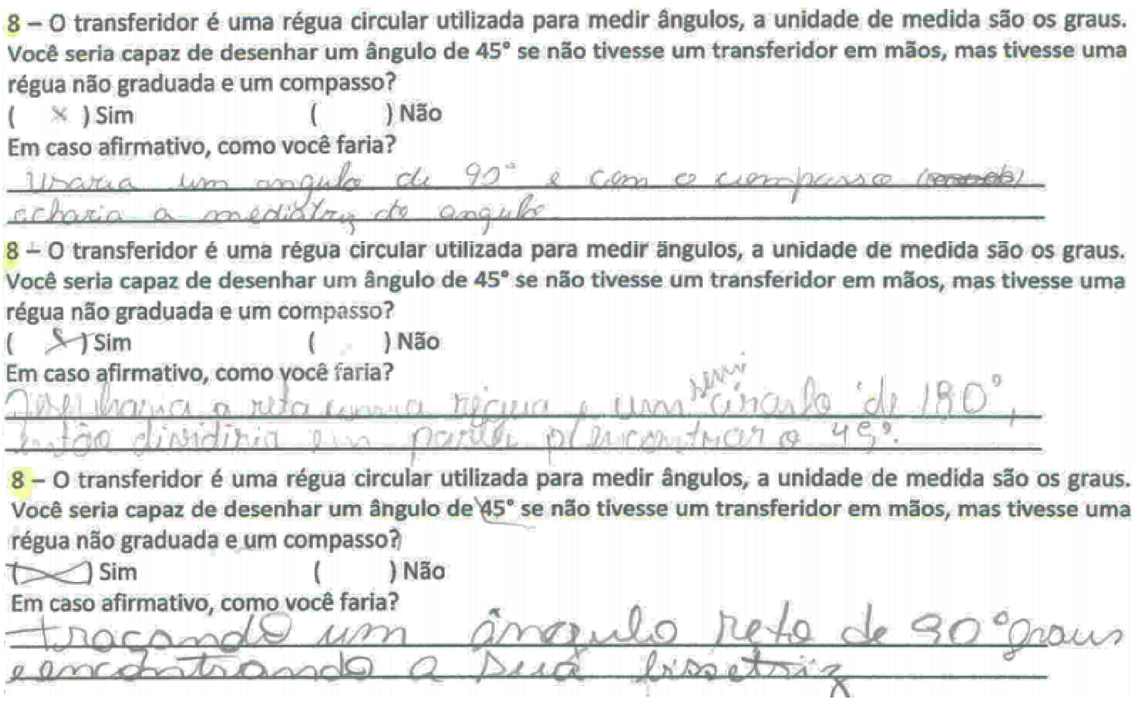
Em caso afirmativo, como você faria?

Traçaria dois semi circulos e acharia o ponto medio do segmento, assim saberia onde fica o meio

Figura 47: Respostas para P7: S7, S10, S18

Através das respostas apresentadas pelos alunos foi possível perceber que relacionaram a identificação do ponto médio com a Construção Geométrica realizada na Atividade 1. Esse fato mostra que foram capazes de compreender o processo de construção e perceber suas aplicações. Também é possível perceber, pelas respostas acima, que os alunos se encontram em níveis diferentes relacionados ao aprendizado geométrico. Temos que S10 e S18 descreveram o processo corretamente, porém não indicaram a marcação do ponto médio.

Na última pergunta os alunos foram questionados se saberiam construir um ângulo de 45 graus utilizando os instrumentos régua e compasso. Sendo que 11 alunos disseram saber realizar a construção e 9 alunos disseram que não saberiam. Na Figura 48 estão as justificativas apresentadas por S1, S3 e S4 para a construção do ângulo solicitado.



8 – O transferidor é uma régua circular utilizada para medir ângulos, a unidade de medida são os graus. Você seria capaz de desenhar um ângulo de 45° se não tivesse um transferidor em mãos, mas tivesse uma régua não graduada e um compasso?

(X) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, como você faria?

usaria um angulo de 90° e com o compasso acharia a mediatriz do angulo

8 – O transferidor é uma régua circular utilizada para medir ângulos, a unidade de medida são os graus. Você seria capaz de desenhar um ângulo de 45° se não tivesse um transferidor em mãos, mas tivesse uma régua não graduada e um compasso?

(X) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, como você faria?

Desenharia a reta com a régua e um semicírculo de 180°, então dividiria em partes p/ encontrar o 45°.

8 – O transferidor é uma régua circular utilizada para medir ângulos, a unidade de medida são os graus. Você seria capaz de desenhar um ângulo de 45° se não tivesse um transferidor em mãos, mas tivesse uma régua não graduada e um compasso?

(X) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, como você faria?

traçando um ângulo reto de 90° graus encontrando a sua bissetriz

Figura 48: Respostas para P8: S1, S3, S4

Através das respostas apresentadas pelos alunos foi possível perceber que compreenderam o processo utilizado para o traçado da bissetriz de um ângulo. Porém, podemos notar que S1 cometeu um equívoco ao citar a mediatriz, quando o termo correto seria bissetriz, como foi citado pelo S4.

Através da análise do questionário foi possível perceber que a maioria dos alunos conseguiram aprender a manusear corretamente os instrumentos de desenho régua e compasso. Além disso os alunos aprenderam outras utilidades diferentes para os instrumentos de desenho, por exemplo o compasso, não serve apenas para traçar circunferências ou círculos, mas também para construir ângulos e como instrumento métrico.

Também através das respostas apresentadas pelos alunos às perguntas P5, P7 e P8 foi possível perceber que tiveram seu nível de pensamento geométrico elevado após a participação na oficina sobre Construções Geométricas. Para justificar basta analisar a evolução nas respostas apresentadas pelos alunos para essas perguntas, que são iguais as do primeiro questionário. Temos por exemplo S4 que no Questionário 1- Diagnóstico da Turma respondeu que, para traçar um ângulo de 45 graus o faria através de um gráfico onde seria marcado o ângulo de 90 graus e consequentemente a sua metade seria o ângulo de 45 graus, já no Questionário 2 - Avaliação da Oficina, S4 responde que, para traçar o ângulo de 45 graus traçaria um ângulo reto de 90 graus e encontraria sua bissetriz. É possível perceber a existência de novos termos geométricos, como o ângulo reto e a bissetriz, isso comprova um entendimento maior dos elementos da Geometria e um avanço no aprendizado. Claro que não podemos afirmar que todos os alunos elevaram seu nível de pensamento geométrico da mesma maneira, afinal cada aluno apresentou um entendimento diferente para as atividades realizadas na oficina sobre Construções Geométricas.

Assim como em todas as atividades desenvolvidas por alunos em sala de aula, existem aqueles com dificuldades e também aqueles que se destacam. Porém, como registrado na pergunta 5, todos que participaram da oficina sobre Construções Geométricas acreditam que tiveram, de algum forma, uma melhora em seus conhecimentos geométricos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática aprendida na escola deve dar sentido às relações vividas pelos alunos em seu cotidiano, oportunizando o entendimento e justificando alguns aspectos da vida em sociedade. Além disso, deve desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo dos alunos, fazendo com que sejam capazes de conviver em sociedade e continuar aprendendo ao longo da vida. Neste sentido, é preciso levar os alunos a compreender o desenvolvimento da Matemática para que a sintam como instrumento fundamental a resolução de problemas, inclusive no campo da Geometria, fazendo relações entre os elementos da Matemática e objetos em situações reais. Segundo Klein e Gil:

> Fazer matemática é expor ideias próprias, escutar a dos outros, formular e comunicar procedimentos de resolução de problemas, confrontar, antecipar resultados de experiências não realizadas, aceitar erros, buscar dados que faltam para resolver problemas, entre outras coisas. Então, para que os alunos adquiram a habilidade de fazer matemática corretamente se torna necessário uma maior compreensão do que significa e para que serve a matemática, para que com o passar do tempo os alunos se tornem seres autônomos, capazes de determinar a qual ferramenta matemática recorrer e que lhe trará bons resultados. (KLEIN; GIL, 2012, p. 6)

De acordo com a pesquisa desenvolvida neste trabalho, que utiliza as Construções Geométricas como recurso pedagógico no Ensino Médio, foi possível perceber que os alunos envolvidos apresentaram um visível crescimento em seus níveis de aprendizagem geométrica. Isso pode ser comprovado pelo progresso que apresentaram no desenvolvimento das atividades da oficina, e também pelas respostas dos questionários anterior e posterior à aplicação da oficina. Também foi possível perceber que cada aluno possui um ritmo pessoal de aprendizagem, alguns aprendem de forma mais rápida que outros. Porém, esse fator não impediu que os alunos conseguissem desenvolver as atividades de Construções Geométricas, apenas precisaram de um tempo maior para chegar a solução de algumas atividades.

Também identificamos uma relação entre a Teoria Van Hiele e as Construções Geométricas:

- **Nível 1 - Visualização:** o aluno é capaz de conhecer visualmente as figuras geométricas e os instrumentos de desenho, além de saber a principal função de cada instrumento.

- **Nível 2 - Análise:** o aluno já consegue identificar algumas propriedades das figuras e também sabe utilizar os instrumentos de desenho de forma correta.

- **Nível 3 - Dedução Informal:** o aluno é capaz de efetivar construções, porém não compreende por que essas construções são válidas. Além disso, o aluno descobre outras funções para os instrumentos régua e compasso.

- **Nível 4 - Dedução Formal:** o aluno consegue compreender os elementos matemáticos que justificam as Construções Geométricas realizadas, além disso é capaz de descrever com clareza os passos executados para a efetivação das Construções Geométricas.

- **Nível 5 - Rigor:** O aluno é capaz de compreender e desenvolver sozinho uma Construção Geométrica mais elaborada, descreve os passos com clareza e justifica cada construção apoiado em teoremas, proposições e propriedades das figuras geométricas.

Através dessa adaptação na Teoria Van Hiele para atividades com Construções Geométricas, é possível afirmar que, anteriormente a aplicação da oficina, a maioria dos alunos se encontravam no **Nível 2 - Análise**. Também é possível perceber que, após a realização da oficina, a maioria os alunos atingiram o **Nível 3 - Dedução Informal**, e alguns alunos se destacaram, atingindo o **Nível 4 - Dedução Formal**. Nenhum aluno que participou da oficina demonstrou ter atingido o **Nível 5 - Rigor** da Teoria Van Hiele.

Voltando a pergunta de pesquisa, que questionava se as Construções Geométricas seriam capazes de desenvolver o pensamento matemático e elevar o nível de aprendizagem geométrica dos alunos do Ensino Médio, podemos responder que sim, apoiado nas justificativas que seguem: As Construções Geométricas foram capazes de desenvolver o pensamento matemático e elevar o nível de aprendizagem geométrica dos alunos envolvidos, sendo que elas representam uma excelente forma de retomar conceitos que os alunos já conhecem, servir como ferramenta para a introdução de novos conceitos geométricos, ensinar a forma correta do traçado das figuras, a utilização correta dos instrumentos de desenho, a percepção geométrica nos objetos e formas do ambiente e também, mediante atividades com Construções Geométricas é possível aproximar os alunos da Matemática, fazendo com que utilizem seus teoremas, propriedades e definições para construir e justificar as construções.

Em relação ao objetivo geral da pesquisa, de proporcionar aos alunos um crescimento em seus conhecimentos matemáticos e geométricos, através da utilização das Construções

Geométricas como recurso pedagógico nas aulas de Matemática, podemos afirmar que foi atingido. Tendo em vista que a oficina sobre Construções Geométricas foi planejada e aplicada, e tendo como base a análise dos dados obtidos durante a aplicação da oficina, podemos concluir que a maioria dos alunos conseguiu melhorar e aprender conceitos matemáticos e geométricos, através do desenvolvimento das atividades da oficina.

Quanto aos objetivos específicos podemos afirmar que a pesquisa bibliográfica sobre a origem e o desenvolvimento da Geometria foi realizada e está apresentada em forma de texto em nosso trabalho. Na compreensão das formas como os conhecimentos de Geometria foram e são transmitidos aos alunos em nosso país, foram encontrados poucos materiais para referenciar a pesquisa. O texto de Pavanello (1993) foi o que deu maior suporte para a compreensão e realização desse objetivo. A matriz curricular no estado de Santa Catarina, apresentada na Proposta Curricular (1998) está em transição, sendo que na nova **Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina: Formação Integral na Educação Básica** (2014) os conteúdos de Matemática pertencem a área das Ciências da Natureza e Matemática, dando um novo enfoque no trabalho em sala de aula, com caráter interdisciplinar.

Em relação as teorias sobre aprendizagem, ao longo da pesquisa foram encontradas várias teorias relacionadas, porém, a única teoria encontrada que tratava da aprendizagem geométrica foi a Teoria Van Hiele. Por esse motivo foi escolhida para embasar o planejamento e a aplicação da oficina sobre Construções Geométricas com alunos do Ensino Médio. Também foram destacadas as fases da Teoria Van Hiele na análise dos dados obtidos durante a aplicação da oficina, que, de acordo com Crowley (LINDQUIST, 1994) são:

- **Fase 1 - Interrogação:** nessa fase o professor pode desenvolver com os alunos atividades orais ou escritas, afim de saber quais são os conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre o assunto e de informar aos alunos quais atividades serão realizadas posteriormente.

- **Fase 2 - Orientação Dirigida:** nessa fase o professor disponibiliza aos alunos materiais previamente planejados, afim de que eles se interessem pelo assunto e desenvolvam pequenas tarefas com respostas específicas.

- **Fase 3 - Explicação:** Nessa fase os alunos devem trocar informações sobre as fases anteriores e expressar suas visões e entendimentos das atividades desenvolvidas.

- **Fase 4 - Orientação Livre:** Nessa fase são apresentadas aos alunos tarefas mais complexas, que podem ser concluídas de várias formas ou que possuem um final em aberto ou até mesmo mais de uma solução.

- **Fase 5 - Integração:** Nessa fase é feito um apanhado geral de tudo o que foi aprendido nas fases anteriores, onde o professor deve auxiliar os alunos retomando pontos importantes do trabalho realizado.

Destacamos também que as fases da Teoria Van Hiele na oficina não são apresentadas de forma dissociável, ou seja, algumas atividades podem contemplar mais de uma fase. A **Fase 1 - Interrogação** pode ser encontrada na aplicação do primeiro questionário, Questionário 1 - Diagnóstico da Turma, com os alunos. A **Fase 2 - Orientação Dirigida** pode ser encontrada na parte da oficina onde são repassados aos alunos os slides (Apêndice A). A **Fase 3 - Explicação** está presente em todas as atividades de Construções Geométricas desenvolvidas na oficina, pois possibilitaram a discussão entre alunos em relação as atividades desenvolvidas e também em relação aos conhecimentos sobre Geometria. A **Fase 4 - Orientação Livre** pode ser percebida nas últimas atividades da oficina. Podemos citar como exemplo para a Fase 4 a Atividade 7 - Construção de um triângulo com os comprimentos dos lados dados, tendo em vista que o item a dessa atividade não possui solução, e o item b possui duas soluções distintas, o que exige dos alunos uma compreensão melhor da Geometria para o entendimento correto dessa atividade. A **Fase 5 - Integração** pode ser percebida na aplicação do segundo questionário, Questionário 2 - Avaliação da Oficina, pois para responder algumas perguntas do questionário os alunos precisaram retomar conceitos e construções desenvolvidas no decorrer da oficina.

Sendo assim, podemos afirmar que através das experiências de Construções Geométricas com régua e compasso os alunos tiveram a oportunidade de dar sentido às principais propriedades dos elementos da Geometria, além de ser possível estabelecer relações entre as figuras geométricas e suas propriedades e visualizar onde podem ser empregadas para resolver problemas geométricos. De acordo com Muniz (apud Brasil, 2008e):

> Terminada a experiência, o que fica de mais significativo em termos de aprendizagem são os conceitos construídos na experiência - aquilo que a experiência permite ao aluno conceber em termos geométricos. A ação internalizada passa a fazer parte da estrutura conceitual, constituindo-se nas ferramentas utilizadas pelo sujeito para resolver problemas. (BRASIL, 2008e, p. 97)

Nesse sentindo, podemos dizer que as atividades com Construções Geométricas foram capazes de reconstruir conceitos que já haviam sido estudados pelos alunos, além da construção de conceitos novos. Também podemos destacar que, com a efetivação das construções os alunos foram capazes de visualizar e comprovar várias propriedades que podem ser utilizadas posteriormente, para a resolução de problemas reais que envolvam figuras geométricas.

REFERÊNCIAS

ANDER-EGG, E. **Introducción a Las Tecnicas de Investigación Social: para trabajadores sociales**. Buenos Aires: Editora Humanitas, 1978.

ASSIS, A. K. T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. Montreal: Roys Keys, 2008.

ASSMANN, H. **Reencantar a Educação: rumo a sociedade aprendente**. Petrópolis: Vozes, 1998.

AVILA, G. **Várias Faces da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BAUER, M. W.; GASKELL, G.; (ORGS.). **Pesquisa Qualitativa com Texto, Imagem e Som: um manual prático**. Petrópolis: Vozes, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais +**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 1 - TP1: matemática na alimentação e nos impostos**. Brasília: MEC SEB, 2008a.

BRASIL. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 2 - TP2: matemática nos esportes e nos seguros**. Brasília: MEC SEB, 2008b.

BRASIL. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 3 - TP3: matemática nas formas geométricas e na ecologia**. Brasília: MEC SEB, 2008c.

BRASIL. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 5 - TP5: diversidade cultural e meio ambiente - de estratégias de contagem às propriedades geométricas**. Brasília: MEC SEB, 2008d.

BRASIL. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 6 - TP6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos**. Brasília: MEC SEB, 2008e.

CONCEITO.DE. **Conceito de Diário de Campo**. 2011. Disponível em: <http://conceito.de/diario-de-campo>. Acesso em: 10 de agosto de 2014.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: métodos qualitativos, quantitativos e mistos**. Porto Alegre: SAGE, 2010.

DARIO, D. F. **Geometrias Não Euclidianas: elíptica e hiperbólica no ensino médio**. Pato Branco: Dissertação de Mestrado Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014.

DICIONÁRIO AURÉLIO. **Definição de Tecnologia**. 2014. Disponível em: <http://www.dicionariodoaurelio.com/tecnologia>. Acesso em: 26 de setembro de 2014.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. D. O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana Plana: um estudo com o software GeoGebra**. Maringa: UEM, 2010.

GONÇALVES, F. A.; GOMES, L. B.; VIDIGAL, S. M. P. **Materiais Manipulativos Para o Ensino de Figuras Planas**. São Paulo: Mathema, 2012.

GRAVINA, M. A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria**. Belo Horizonte: Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1996.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A Aprendizagem de Matemática em Ambientes Informatizados**. Brasília: IV Congresso RIBIE, 1998.

ITZCOVICH, H. **Iniciação ao Estudo Didático da Geometria: das construções às demonstrações**. São Paulo: Anglo, 2012.

JANUÁRIO, A. J. **Desenho Geométrico**. Florianópolis: UFSC, 2000.

JÚNIOR, L. P. D. S. **Construções Geométricas por Régua e Compasso e Números Construtíveis**. Campina Grande: Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Campina Grande, 2013.

KLEIN, A. M.; GIL, M. D. C. S. **Ensino da Matemática**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2012.

KOPKE, R. C. M. **Geometria, Desenho, Escola e Transdisciplinaridade: abordagens possíveis para a educação**. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

LINDQUIST, M. M. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

LONGEN, A. **Matemática Ensino Médio**. Curitiba: Positivo, 2004.

LOPES, S. R.; LOPES, S. V. D. A.; VIANA, R. L. **Metodologia do Ensino da Matemática**. Curitiba: IBPEX, 2007.

MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática**. São Paulo: Cortez, 1994.

MACHADO, N. J. **A Geometria na sua Vida**. São Paulo: Ática, 2004.

MEIER, M. **Modelagem Geométrica e o Pensamento Matemático no Ensino Fundamental**. Porto Alegre: Dissertação de Mestrado Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

MILLER, M. R. L. **On Proofs Without Words**. Washington: Whitman College, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências**. Campinas: Zetetiké, v. 1, 1993.

PIRES, C. M. C. **Currículo de Matemática: da organização linear à ideia de rede**. São Paulo: FTD, 2000.

RAMOS, R. D. C. S. S.; SALVI, R. F. **Análise do Conteúdo e Análise do Discurso em Educação Matemática: um olhar sobre a produção em periódicos qualis A1 e A2**. Brasília: SBEM - IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. D. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas: Unicamp, 2010.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTA CATARINA. **Proposta Curricular de Santa Catarina: Matemática**. Florianópolis: Secretária de Estado da Educação de Santa Catarina, 1998.

SANTA CATARINA. **Proposta Curricular de Santa Catarina: Formação Integral na Educação Básica**. Florianópolis: Secretária de Estado da Educação de Santa Catarina, 2014.

SANTOS, M. C.; LIMA, P. F. **Considerações Sobre a Matemática do Ensino Fundamental**. Belo Horizonte: Anais do I Seminário Nacional: currículo e movimento, 2010.

SOARES, E. S. **Ensinar Matemática: desafios e possibilidades**. Belo Horizonte: Dimensão, 2010.

SOUZA, R. D. **O resgate do Ensino das Construções Geométricas na Educação Básica**. Ilhéus: Dissertação de Mestrado Universidade Estadual de Santa Cruz, 2013.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez, 2011.

VARHIDY, C. G. J. L. **Desenho Geométrico: uma ponte entre a álgebra e a geometria, resolução de equações pelo processo euclidiano**. Ouro Preto: Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

VIEIRA, C. R. **Reinventando a Geometria no Ensino Médio: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a Teoria de Van Hiele**. Ouro Preto: Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

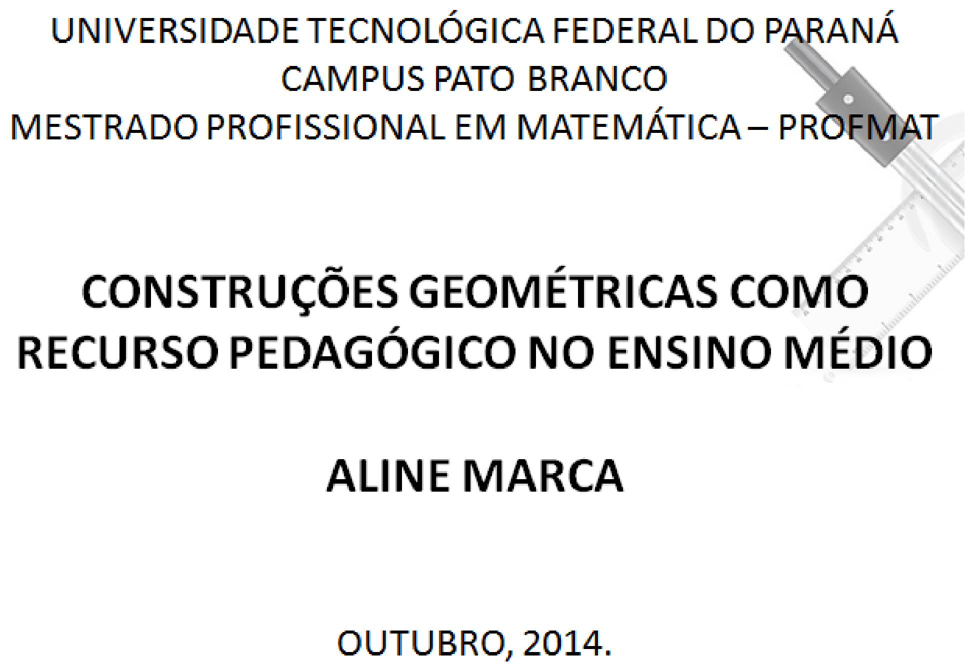
VILLIERS, M. D. **Algumas Reflexões Sobre a Teoria Van Hiele**. São Paulo: Revista Educação Matemática Pesquisa. Vol. 12, n. 3., 2010.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

WAGNER, E. **Uma Introdução às Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.

ZUIN, E. D. S. L. **Da Régua e do Compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Belo Horizonte: Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.

APÊNDICE A – SLIDES UTILIZADOS NA OFICINA



A HISTÓRIA DA GEOMETRIA

A palavra **Geometria** tem origem grega e significa **medida da terra**. Em matemática os conteúdos referentes a Geometria estudam as figuras, formas e suas propriedades.

A origem da Geometria aconteceu possivelmente no Egito, onde após cada cheia do rio Nilo, era necessário dividir as terras que haviam sido inundadas.

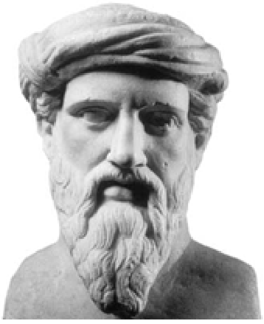
A HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Através do desenvolvimento das cidades tornou-se necessário a construção de estabelecimentos e moradias, então a Geometria começou a desenvolver-se de forma efetiva.

Podemos perceber nas construções de antigas civilizações a evidência das formas geométricas, como por exemplo nas **Pirâmides** do Egito ou no **Parthenon** da Grécia.

A HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Alguns matemáticos e geômetras famosos viveram na **Grécia**. É o caso de **Pitágoras**, que viveu entre os séculos V e IV a.C. e **Euclides** que viveu no século III a.C. Pitágoras desenvolveu seu famoso teorema sobre os triângulos retângulos e Euclides elaborou uma coleção de livros com 13 volumes chamada **Elementos**, muito utilizada e difundida em todo o mundo.



A HISTÓRIA DA GEOMETRIA

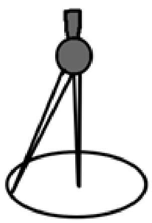
Nos **Elementos,** Euclides utilizou o recurso das construções com régua e compasso para facilitar a resolução de problemas geométricos. Posteriormente, esse tipo de desenho ficou conhecido como **Construção Geométrica**.

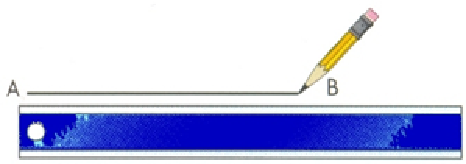
CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

As construções geométricas são técnicas de desenho que utilizam alguns instrumentos básicos para o traçado correto das figuras. Seu desenvolvimento aconteceu juntamente com o da Geometria. Os instrumentos necessários para realizar as Construções Geométricas são **régua**, **compasso** e **lápis**.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Na realização das **Construções Geométricas**, devemos estabelecer quais são os passos a serem desenvolvidos para que a figura final seja a figura desejada. Com o **compasso**, sempre é possível traçar um círculo, sabendo seu centro e seu raio e com a **régua**, sempre é possível traçar uma reta ou um segmento de reta que passa por dois pontos estabelecidos.

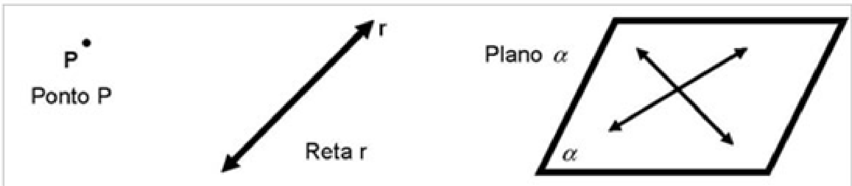




GEOMETRIA PLANA

A geometria plana é aquela que estuda as figuras e formas em duas dimensões. Existem alguns elementos básicos da geometria plana que devemos recordar antes de iniciar as construções geométricas com régua e compasso.

- PONTO: menor ente da geometria, não tem dimensão e é representado por letras maiúsculas.
- RETA: não tem espessura e é representada por letras minúsculas.
- PLANO: contém infinitos pontos e infinitas retas, é representado por letras gregas.



MÃOS A OBRA!

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

MACHADO, N. J. **A Geometria na Sua Vida.** São Paulo: Ática, 2004.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 1 - DIAGNÓSTICO DA TURMA

UNIVERSIDADE TECNÓLOGICA FEDERAL DO PARANÁ – UTFPR
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT
Mestranda: Aline Marca
Orientador: Prof. Dr. João Biesdorf

DIAGNÓSTICO DA TURMA

Caro aluno, estamos realizando uma pesquisa sobre a utilização de Construções Geométricas como Recurso Pedagógico no Ensino Médio. Para tanto, estamos desenvolvendo uma Oficina com atividades que serão realizadas pelos alunos dessa turma, ou seja, você e seus colegas de classe. No intuito de planejar as atividades da melhor forma possível, gostaríamos que respondesse o questionário abaixo, sem se identificar, mas de maneira sincera. Não fique com receio, responda da forma que achar melhor, estará colaborando para a melhoria do ensino da Matemática nas escolas de sua região. Nossos sinceros agradecimentos!

1 – Qual sua idade? ____

2 – Você sabe o que é um compasso escolar? ( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, descreva e cite para que é utilizado o compasso escolar.
____
____

3 – Alguma vez você já utilizou régua e compasso nas aulas de Matemática?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, a iniciativa em utilizar esses recursos foi:
( ) Sua ( ) Do professor

4 – Você seria capaz de desenhar um segmento de reta medindo o número irracional $\sqrt{2}$ centímetros?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, como você faria?
____
____

5 – Você seria capaz de dividir um segmento de reta exatamente ao meio se sua régua estivesse com as marcações dos números, centímetros e milímetros apagados, mas você possuísse um compasso em mãos?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, como você faria?
____
____

6 – O transferidor é uma régua circular utilizada para medir ângulos, a unidade de medida são os graus. Você seria capaz de desenhar um ângulo de 45° se não tivesse um transferidor em mãos, mas tivesse uma régua não graduada e um compasso?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, como você faria?
____
____

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO 2 - AVALIAÇÃO DA OFICINA

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ – UTFPR
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT
Mestranda: Aline Marca
Orientador: Prof. Dr. João Biesdorf

AVALIAÇÃO DA OFICINA

Caro aluno segue abaixo o último questionário sobre a oficina aplicada com sua turma, envolvendo a utilização das Construções Geométricas nas aulas de Matemática. Novamente solicitamos que responda as questões da maneira mais sincera possível. Obrigada por sua colaboração!

Para cada questão abaixo assinale uma nota de 1 a 5, sendo 1 sua total insatisfação e 5 sua total satisfação.

1 – Sua avaliação em relação à oficina no geral:
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5

2 – Sua avaliação em relação à professora aplicadora da oficina, em relação ao envolvimento com a turma, explicação dos conteúdos e desenvolvimento das atividades:
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5

3 – Sua avaliação em relação aos materiais utilizados na oficina:
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5

4 – Sua autoavaliação em relação à participação na oficina:
( )1 ( )2 ( )3 ( )4 ( )5

5 – Você acredita que após a participação na oficina sobre Construções Geométricas tenha elevado seu nível de aprendizado em relação aos conteúdos de Geometria?
( ) Sim ( ) Não
Justifique sua resposta: ____
____

6 – Você é capaz de dizer qual a principal utilidade dos instrumentos de desenho abaixo:
a) Régua:____
b) Compasso:____

7 – Você seria capaz de dividir um segmento de reta exatamente ao meio se sua régua estivesse com as marcações dos números, centímetros e milímetros apagados, mas você possuísse um compasso em mãos?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, como você faria?
____
____

8 – O transferidor é uma régua circular utilizada para medir ângulos, a unidade de medida são os graus. Você seria capaz de desenhar um ângulo de 45° se não tivesse um transferidor em mãos, mas tivesse uma régua não graduada e um compasso?
( ) Sim ( ) Não
Em caso afirmativo, como você faria?
____
____