UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WILIAN RODRIGO GALEAZZI

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DO RACIOCÍNIO LÓGICO-DEDUTIVO

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2015

WILIAN RODRIGO GALEAZZI

PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DO RACIOCÍNIO LÓGICO-DEDUTIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Márcio Alexandre de Oliveira Reis, Dr.

Co-orientadora: Janecler Aparecida Amorin Colombo, Dra.

PATO BRANCO

2015

G151p Galeazzi, Wilian Rodrigo
Proposta de ensino de Geometria Euclidiana Plana para o sexto ano do ensino fundamental sob a ótica do raciocínio lógico-dedutivo / Wilian Rodrigo Galeazzi. -- 2015.
71 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Prof. Dr. Márcio Alexandre de Oliveira Reis
Co-orientador: Prof. Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, 2015.
Bibliografia: f. 64-65.

1. Matemática. 2. Geometria Plana. 3. Ensino Fundamental. I. Reis, Márcio Alexandre de Oliveira, orient. II. Colombo, Janecler Aparecida Amorin, co-orient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22 ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Paulo Rogério de Mendonça - CRB9/1.335
Biblioteca da UTFPR Câmpus Francisco Beltrão

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 007

"Proposta De Ensino De Geometria Euclidiana Plana Para O Sexto Ano Do Ensino Fundamental Sob A Ótica Do Raciocínio Lógico-Dedutivo"

por

Wilian Rodrigo Galeazzi

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 08h30min do dia 22 de maio de 2015. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Marcio Alexandre de Oliveira Reis, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. Tânia Stella Bassoi, Dra.
(UNIOESTE/Cascavel)

Prof. Cristina Spohr Reis, Dra.
(UTFPR/Branco)

Prof.Janecler Aparecida Amorin Colombo, Dra.
(UTFPR/Branco)

Prof. João Biesdorf, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

AGRADECIMENTOS

- À minha esposa pela paciência e persistência, principalmente nos momentos em que estive ausente.
- Aos meus pais pelo incentivo permanente à educação.
- Ao meus colegas que dividiram comigo as angústias da avaliações nacionais e do exame de qualificação.
- Aos meus professores que contribuíram ao longo desta caminhada.
- Ao meu orientador e co-orientadora pela disponibilidade e total disposição em favor do desenvolvimento deste trabalho.
- À UTFPR Câmpus Francisco Beltrão pelo apoio na capacitação do corpo técnico-administrativo.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

GALEAZZI, Wilian Rodrigo. PROPOSTA DE ENSINO DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA PARA O SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL SOB A ÓTICA DO RACIOCÍNIO LÓGICO-DEDUTIVO. 72 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

Este trabalho apresentará um breve histórico do desenvolvimento da Geometria, com foco no surgimento da sua organização na forma lógico-dedutiva efetuado por Euclides. Na sequência será discutida a situação do ensino e aprendizagem dos tópicos de geometria desde a antiguidade até os dias atuais, onde observaremos que a mesma não se dá sob a ótica lógico-dedutiva. Após essa contextualização, proporemos a realização de uma oficina de geometria para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, com vistas ao desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Aplicada a oficina, foram observadas mudanças na organização do pensamento dos alunos participantes da pesquisa, favorecendo a compreensão dos conceitos e propriedades da geometria euclidiana plana.

Palavras-chave: Geometria, Raciocínio dedutivo, Pensamento lógico, Proposta de Ensino, Ensino Fundamental

ABSTRACT

GALEAZZI, Wilian Rodrigo. PROPOSAL TEACHING ON EUCLIDEAN PLANE GEOMETRY FOR SIXTH GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL ABOUT THE PERSPECTIVE OF LOGICAL DEDUCTIVE REASONING. 72 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

This study will introduce a brief history of the Geometry development, focused in the appearing of the organization in the logical deductive structure achieved by Euclid. Following will be discussed the situation of the learning and teaching of geometry topics since antiquity until the present day, where we will notice that it does not happen with the logical-deductive perspective. After this contextualization, we will propose the realization of a geometry workshop for students of the sixth grade of elementary school, focusing to the development of logical-deductive reasoning. Applied to workshop, changes were observed in the organization of thought of the participating students in the research, furthering the understanding of the concepts and properties of flat euclidean geometry.

Keywords: Geometry, Logical thinking, Deductive reasoning, Proposal for Teaching, Elementary School

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É inerente ao professor da escola pública refletir acerca da aprendizagem de seus alunos. Costumeiramente, um mesmo professor leciona para várias turmas de uma mesma série, o que possibilita uma comparação dos níveis de conhecimento adquiridos pelos alunos em sua aula. Especialmente nos tópicos de geometria, é perceptível a existência de dificuldades semelhantes nos discentes mesmo de níveis de ensino diferentes. Essas dificuldades variam desde simples definições não compreendidas, como o caso da definição de quadrado, até encadeamentos lógicos dedutivos dos quais derivam as propriedades da geometria plana, como por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a cento e oitenta graus.

Não bastasse a dificuldade coletiva dos alunos observada em avançar o aprofundamento dos conteúdos geométricos no passar das séries, alguns colapsos individuais, oriundos da experiência do pesquisador, merecedores de atenção, precisam ser destacados: alunos do segundo ano do Ensino Médio, desafiados a construir uma circunferência de raio 10cm, permanecem imóveis frente à régua, compasso e papel, sem saber utilizar os instrumentos; alunos do nono ano do Ensino Fundamental, munidos de régua e transferidor, porém incapazes de construir um triângulo retângulo; alunos que não conseguem realizar uma representação pictórica de situações da vida real, como ilustrar a inclinação da *Torre de Pisa*, monumento histórico italiano.

Essas observações, realizadas enquanto professor da escola pública, motivaram algumas ações de minha parte:

• No ano de 2013, na Escola Estadual João Paulo II, município de Francisco Beltrão no Paraná, realizei uma oficina no contraturno para alunos do nono ano do Ensino Fundamental com o software Geogebra. Apesar de quinze alunos inscritos, apenas três conseguiram acompanhar a oficina. A sensação de fracasso desta atividade me levou a refletir acerca da superficialidade dos conhecimentos retidos pelo aluno ao longo da Educação Básica, e também me levou ao próximo ponto;

• No ano de 2014, no Colégio Estadual Mário de Andrade, município de Francisco

Beltrão no Paraná, dediquei duas aulas do planejamento anual em todas as minhas turmas regulares para prática e orientação sobre uso dos instrumentos régua, compasso e transferidor. Nesse momento me deparei com alunos que não conseguiam realizar construções básicas, como desenhar um triângulo retângulo.

A partir destas inquietações, sendo acadêmico do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, elaborei a ideia de desenvolver um projeto de pesquisa a fim de atuar junto ao conteúdo de Geometria, visando especificamente contribuir para o ensino e aprendizagem do mesmo, sob a luz da Geometria Euclidiana Plana, obra do matemático Euclides de Alexandria.

1.1 PROBLEMA

Pretendemos elaborar uma proposta de ensino de Geometria Euclidiana Plana que contribua para o desenvolvimento lógio-dedutivo do aluno do sexto ano ao longo do seu desenvolvimento matemático no Ensino Fundamental. Assim, consideramos a seguinte questão: apresentar a Geometria através de uma abordagem lógico-dedutiva promove aprendizagem do aluno?

Para realização desta pesquisa, delimitaremos nosso público alvo aos alunos regularmente matriculados no sexto ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Mário de Andrade, localizado no município de Francisco Beltrão. Ao trabalhar com a faixa etária do sexto ano, esperamos receber um aluno que não conheceu geometria nessa perspectiva.

1.2 OBJETIVOS

Nosso objetivo principal é auxiliar o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo nos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Para atingir esse objetivo, procuramos:

- elaborar uma proposta de ensino que propicie um primeiro contato com a geometria lógico-dedutiva.
- adotar definições adequadas ao nível de ensino, permitindo a compreensão pelos alunos.
- utilizar material concreto simultaneamente à discussão conceitual.
- promover um ambiente de aprendizagem coletiva analisando o desempenho dos alunos no decorrer da oficina.

Uma vez apresentados nossos objetivos, o capítulo seguinte apresentará um breve histórico do desenvolvimento da Geometria, com foco no surgimento da sua organização na forma lógico-dedutiva efetuado por Euclides. Na sequência será discutida a situação do ensino e aprendizagem dos tópicos de geometria desde a antiguidade até os dias atuais, onde observaremos que a mesma não se dá sob a ótica lógico-dedutiva. Após essa contextualização, proporemos a realização de uma oficina de geometria para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, com vistas ao desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Seguimos com a discussão dos resultados de cada atividade anteriormente proposta, e por fim apresentaremos os resultados gerais deste trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo situaremos o leitor quanto ao surgimento da geometria no antigo Egito, e de forma sucinta como se deu seu desenvolvimento até a época de Euclides. Na sequência, trataremos da mais importante obra do matemático Euclides de Alexandria, intitulada *Elementos*. Nesta obra, encontramos alicerces do método axiomático dedutivo, norte desta pesquisa. Em seguida, descrevemos o ensino e aprendizagem da geometria na atualidade, focado no Brasil, desde a década de 50 até os dias atuais. Por fim, apresentamos os termos Matemática Escolar e Matemática Científica, cuja caracterização nos permitirá elaborar esta proposta de ensino de geometria para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA

Para Roque e Pitombeira (2008), a hipótese do surgimento da geometria no antigo Egito, às bordas do Nilo como meio de controle da distribuição de terra assenta-se sobre os escritos de Herôdoto, e concorda com as anotações de Aristóleles, que afirma o surgimento da Matemática nos locais onde as pessoas dispunham de tempo para o lazer. Para ambos, o Egito foi o berço da Matemática.

Os povos Egípcios dispunham de cálculos com medidas de comprimento, áreas e volumes - ou seja, cálculos essencialmente numéricos. Os *escribas* eram responsáveis pelo registro, dentre outros, das técnicas matemáticas empregadas. O *Papiro de Rhind* e o *Papiro de Moscow* são, para Katz (2009, p 3), as maiores evidências que se tem da matemática Egípcia, e seu caráter prático. Estes documentos consistem de problemas do cotidiano do povo Egípcio, que deveriam ser resolvidos pelo Estado.

Especificamente na Geometria, sabemos que escribas Egípcios conseguiam cacular áreas de retângulos, triângulos, trapezoides e círculos, sendo que para este último utilizavam uma boa aproximação do valor de π $(3,16)$. Essas evidências são relatadas por Katz (2009, p. 9), e baseiam-se nos problemas e soluções encontradas nos Papiros citados.

Em contraponto, a Matemática praticada pelos Gregos era baseada em argumentações e demonstrações, por este fato considerada abstrata. O clássico problema de duplicação do cubo, que consiste em encontrar um novo cubo com o dobro do volume do original, não apresenta dificuldades no cálculo numérico. Mas os Gregos valorizavam a construção geométrica, e não o cálculo numérico como os Egípcios:

> To double a cube, that is, to find a new cube whose volume was twice that of the original one, is equivalent to determining the cube root of 2, and that was not a difficult problem numerically. The oracle, however, was not concerned with numerical calculation, but with geometric construction. That in turn depended on gemetric proof by some logical argument, the earliest manifestation of such in Greec beign attibuted to Thales. (KATZ, 2009, p. 33)

Para Roque e Pitombeira (2008) tal diferença no viés matemático decorria da organização das sociedades. Somente na Grécia encontramos as cidades estados, *pólis*, onde a persuasão - capacidade de convencer o outro de suas ideias através de argumentos - era um talento valorizado. Já a validade destes argumentos foi merecedora de atenção de Platão e Aristóteles, sendo este último responsável por desenvolver

> "... uma lógica na qual os critérios de verdade estarão mais ligados à pura coerência, ao rigor da demonstração. Ou seja, em uma cadeia de conclusões, tudo deve decorrer daquilo que antes foi dito, sem que haja contradição no interior do raciocínio." (ROQUE; PITOMBEIRA, 2008, p. 51)

Para Katz (2009, p. 43), Aristóteles acreditava que a argumentação lógica deveria basear-se em silogismos: uma afirmação deveria ser consequência de outra que a antecedia. Se alguém aceitasse as premissas como verdadeiras, deveria aceitar também as conclusões. Mas nem tudo poderia ser obtido através desta argumentação, ou seja, em algum momento no início haveriam afirmações que não dependeriam de fatos anteriores.

Roque e Pitombeira (2008) sugerem que próximo a 375 a.C. o descontentamento de Platão com os métodos empregados pelos geômetras da época o faz incentivar os pensadores com quem conviveu a formalizar conceitos e técnicas empregadas na Matemática usando a lógica de Aristóteles. Neste momento histórico, a descoberta dos incomensuráveis desponta uma crise na Matemática Grega, pois rompe com o concreto, palpável, e serve de estopim para o desenvolvimento de uma nova Matemática, organizada e coerente, sendo os "Elementos" de Euclides o resultado dos esforços para exposição organizada e sistemática de uma geometria consistente.

Essa forma de organização do pensamento, que viríamos a chamar de lógica, passaria a ser o cerne do desenvolvimento da Matemática, no trabalho do matemático Euclides de Alexandria.

2.2 A GEOMETRIA AXIOMÁTICA DE EUCLIDES

Euclides de Alexandria foi o matemático, provavelmente grego, responsável pela compilação da coleção intitulada **Elementos**, um aglomerado de proposições matemáticas de Geometria Plana, distribuídas em 13 volumes.

Muitos historiadores acreditam que Euclides foi um dos primeiros estudiosos do Museu e Biblioteca de Alexandria. A missão da Biblioteca de Alexandria seria a coleta e organização sistemática de toda obra da literatura de seu tempo. Comandantes de embarcações eram orientados a coletar conhecimento em todos os portos onde atracassem, agregando manuscritos de toda região em um único local Katz (2009, p. 51).

> The *Elements* of Euclid is the most important mathematical text of Greek times and probably of all time. It has appeared in more editions than any work other than the *Bible*. It has been translated into countless languages and has been continuously in print in one contry or another nearly since the beginning of printing. Yet to the modern reader the work is incredibly dull. There are no exemples; there is no motivation; there are no witty remarks; there is no calculation. There are simply definitions, axioms, theorems, and proofs. (KATZ, 2009, p 51)

Katz descreve o trabalho de Euclides como o mais importante trabalho matemático de todos os tempos. Para um leitor moderno, o texto é entediante: não há exemplos, não há motivação, não há cálculos. São simplesmente axiomas, teoremas e provas. A matemática na obra *Elementos* é completamente não aritmética (KATZ, 2009, p.52).

A coleção é construída a partir de um conjunto de premissas chamadas **definições, axiomas e postulados**. As definições determinam os objetos geométricos. Os axiomas são verdades universais, evidentes por si só. Os postulados seriam axiomas próprios da matemática, ou seja, verdades universais evidentes para os letrados em matemática.

Segundo Notare (2001), o Livro I da coleção Elementos aborda os fundamentos da Geometria Plana, sendo formado por 23 definições, 5 postulados, 5 axiomas, e 48 proposições. Agrupando postulados e axiomas, podemos considerar as 23 definições e 10 axiomas, aceitos como verdadeiros sem demonstração. As 48 proposições que seguem são dependentes dos anteriores, sendo obtidas através de deduções lógicas.

Quanto às definições, temos o entendimento que

> (...) é uma afirmação que requer apenas uma compreensão dos termos a serem usados. Porém, nada se afirma sobre a existência do termo que está sendo definido; isso deve ser provado separadamente. Ou seja, a definição de um termo não implica na sua existência. (NOTARE, 2001, p. 17)

Já as proposições, ou teoremas, são afirmações que não são aceitas como verdade sem que para isso exista uma decorrência direta dos axiomas e postulados. Ou seja, para cada afirmação há uma argumentação lógica que permite deduzir sua veracidade.

A lógica a que nos referimos é, para Aranha e Martins (2009, p. 131), "a investigação das condições em que a conclusão de um argumento se segue necessariamente de enunciados iniciais, chamados premissas". Para os autores, a lógica baseia-se em três princípios:

- Princípio de identidade: se uma proposição é verdadeira, então ela é verdadeira;
- Princípio de não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;
- Princípio do terceiro excluído: uma proposição é verdadeira ou falsa, não havendo uma terceira condição.

O desenvolvimento da lógica está profundamente ligado à Grécia Antiga, através dos matemáticos Platão, Aristóteles, seguidos por Euclides.

> Del año 600 aC hasta 300 aC se desarrollan en Grecia los principios formales de las matemáticas. Este periodo clásico lo protagonizan Platón, Aristóteles y Euclides. Platón propone ideas o abstracciones. Aristóteles resuelve el razonamiento deductivo y sistematizado. Euclides es el autor que establece el método axiomático. En los Elementos Euclides organiza las pruebas deductivas de que dispone dentro de una estructura sistemática, rigurosa, altamente eficaz. (LARRAZ, s.d.)

Aristóteles teria sugerido que "... um trabalho científico deve iniciar com definições e axiomas." Katz (2009, p.53). O que Euclides faz é compilar o conhecimento geométrico da época e organizá-lo na forma como Aristóteles sugere: primeiramente são postas as verdades universais, os axiomas e postulados. Em seguida, uma proposição matemática é enunciada e sua validade é posta à prova através da sua demonstração, onde são utilizados apenas os axiomas enunciados inicialmente para provar a validade da proposição. Após provada sua validade, a proposição é aceita universalmente como válida, e pode agora ser utilizada para demonstrar a validade de outras proposições mais complexas ou abrangentes. Ou seja, após validada uma proposição, a mesma junta-se aos axiomas como que num repositório de conhecimentos validados, disponíveis para justificar outras proposições que deles dependerem. A esse processo chamamos de **lógico-dedutivo**.

Os livros de Euclides apresentam as proposições encadeadas, ou seja, a proposição que se pretende provar depende da validade da proposição imediatamente anterior. Neste trabalho e assim como Kaleff (1994), o que chamamos **Geometria Euclidiana** deve ser entendido como a **forma de apresentação e encaminhamentos lógicos da geometria**. Nesta pesquisa, o termo *Geometria Euclidiana* significa a geometria organizada na forma lógico-dedutiva.

A geometria lógico-dedutiva utilizada por Euclides tornou-se modelo lógico-filosófico da cultura ocidental, como descreve Kaleff (1994). Seu ensino permaneceu inalterado através dos séculos. Foi agregada aos currículos escolares, inclusive no Brasil.

2.3 ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NA ATUALIDADE

Os tópicos de geometria ensinados nas escolas brasileiras na década de 50 acompanhavam a abordagem lógico-dedutiva da coleção Elementos de Euclides. Para Fiorentini (1995, p. 5), a tendência pedagógica que vigorou no Brasil até meados de 1950 era chamada *Formalista Clássica*. Nela, a formalidade e o rigor das demonstrações eram valorizados, o que permitia à Geometria Euclidiana ocupar uma posição de destaque.

> ... o ensino nessa tendência pedagógica foi acentuadamente livresco e centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo através de preleções ou desenvolvimentos teóricos na lousa. A aprendizagem do aluno era considerada passiva e consistia na memorização e na reprodução precisa dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor ou pelos livros. (FIORENTINI, 1995, p. 5)

A partir da década de 1950, com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna (MMM), iniciam debates que levariam a adoção de um novo modelo de ensino para Matemática. “A ideia central da Matemática Moderna é adaptar o ensino às novas concepções surgidas com a evolução desse ramo do conhecimento, o que significa trabalhar a matemática do ponto de vista das estruturas.” (PAVANELLO, 1989, p. 162).

Assim a tendência de ensino *Formalista Clássica* ganha nova roupagem ao agregar estruturas algébricas e a linguagem formal da matemática contemporânea, por estes motivos sendo chamada por Fiorentini (1995, p. 14) de tendência *Formalista Moderna*.

Somente na década de 60, com a impressão dos primeiros livros didáticos na abordagem do MMM, ocorre uma progressiva substituição da Geometria Euclidiana ensinada nas escolas brasileiras por uma Geometria baseada nas estruturas, como relata Pavanello (1989, p. 163).

Neste momento a Geometria Euclidiana deixou de ser ensinada nas escolas brasileiras. Porém, a nova geometria proposta pelo MMM não tomou seu lugar: os professores evitavam os tópicos de geometria pois não se sentiam preparados para docência. Não haviam sido formados dentro do contexto da Matemática Moderna:

> A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores secundários, acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem (PAVANELLO, 1989, p. 165)

Na década de 1970, o MMM perde força por não apresentar bons resultados. Um de seus maiores disseminadores, Osvaldo Sangiorgi, relata segundo Ferreira et al. (2008) que o movimento não produziu os efeitos esperados, tendo agido no sentido oposto ao desejado, ou seja, afastando os professores e alunos das compreensões da matemática.

Em seguida, surge um novo movimento, agora de retomada do ensino de Geometria Euclidiana visando, dentre outros aspectos, “ (...) desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade” (KALEFF, 1994, p. 21).

Uma síntese desse processo de valorização do ensino de Geometria é dada por Pais e Freitas (1999, p. 64):

> (...) há uma tentativa imediata de valorização do ensino da geometria como sendo um conteúdo disciplinar importante à formação intelectual do aluno de primeiro grau: há também um certo reconhecimento de que esse ensino não tem sido desenvolvido de forma satisfatória e, finalmente, destaca-se que a percepção da importância de procedimentos lógico-dedutivos na construção do conhecimento geométrico não é normalmente manifestada pelos professores.

Pode-se perceber a preocupação dos autores com o desenvolvimento lógico-dedutivo, cerne da Geometria Euclidiana, no sentido de sua ausência nas sala de aula brasileiras. Apesar da constatação da necessidade de retorno, o que se observou na pesquisa de Pais e Freitas (1999) é que o ensino de geometria passou a ser secundarizado, simplificado e reduzido a exemplos e modelos numéricos.

Pais e Freitas (1999) realizaram um estudo investigativo a cerca da práxis de professores de matemática, onde constataram a predominância do aspecto experimental, material concreto e exemplos numéricos, em contraponto às deduções lógicas. Para os professores pesquisados, o ponto de partida para o ensino de geometria seria enunciar as propriedades gerais, e para que estas sejam aceitas pelos alunos como verdadeiras, deveriam ser comprovadas experimentalmente (material concreto ou exemplo numérico). Os autores verificaram que não se praticava nas aulas de geometria uma abordagem lógico-dedutiva.

Percebemos assim que não houve retorno da Geometria Euclidiana no ensino brasileiro. Pais e Freitas (1999) afirmam que o ensino de Geometria tem sido executado com base no concreto, no empírico, na experimentação.

Como consequência, o conteúdo de geometria encontra-se desarticulado, pois esvaziou-se do encadeamento lógico proposto por Aristóteles. Isso tem impacto negativo em sala de aula, como podemos acompanhar na pesquisa de Santos (2002), aplicada a alunos da oitava série do do Ensino Fundamental.

O autor observa dificuldades generalizadas nos alunos em dar o tratamento adequado às questões geométricas. Uma das categorias de análise que emergiram das suas observações foi **"Dificuldade de abstração e generalização no processo de formação de conceitos"**, como podemos observar:

> Nem sempre a educação escolar valoriza a aprendizagem de conceitos. Pelo contrário, dá mais valor à memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações. Dessa forma, o ensino fica mais voltado para a reprodução de modelos do que para a compreensão conceitual. (SANTOS, 2002, p. 131)

Já Serralheiro (2007), ao investigar um grupo de professores, identificou conhecimentos vagos e superficiais com relação às demonstrações em Matemática. Sua pesquisa, de caráter formativo, apresentou aos professores participantes a necessidade da argumentação no processo de demonstração formal. Foi possível verificar mudanças na didática dos professores participantes após o trabalho formativo, caminhando ao encontro do estudo de demonstrações em sala de aula.

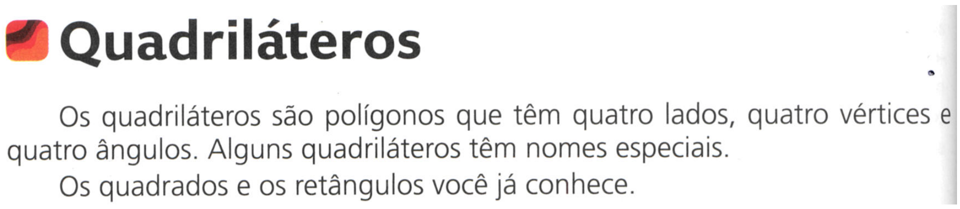
Durante este estudo bibliográfico, nos deparamos com dois fatores que, em tese, inviabilizariam um estudo de geometria na perspectiva lógico-dedutiva: a formação do professor, no sentido de estar capacitado para o ensino de provas e demonstrações em Geometria Euclidiana Plana; e a problemática do ensino de matemática em tempos pós MMM, não só do conteúdo de geometria, mas do baixo aproveitamento em geral da disciplina.

Nesse sentido, o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - tem colaborado para a superação do fato "formação do professor", especialmente através das disciplinas de Números e Funções Reais, Matemática Discreta e Geometria, onde em todas se exerce um estudo com o rigor matemático necessário para a autonomia do professor quanto ao desenvolvimento de demonstrações em Geometria Euclidiana.

2.3.1 LIVRO DIDÁTICO

O livro didático disponível na escola pesquisada é a coleção nacionalmente conhecida de Imenes e Lellis (2009). Inicialmente, os autores se propõe em apresentar primeiramente Geometria Espacial e, em um segundo momento, introduzem a Geometria Plana, através do estudo dos ângulos, seguido por paralelas, perpendiculares e por fim quadriláteros. Surpreendente é que em todo capítulo dedicado à Geometria Plana, em nenhum momento é explicado o significado de **perpendicular**.

Longe de ser um caso isolado, veja como os autores tratam quadriláteros:


Quadriláteros

Os quadriláteros são polígonos que têm quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos. Alguns quadriláteros têm nomes especiais.

Os quadrados e os retângulos você já conhece.

Figura 1: Livro didático - Coleção Matemática de Imenes e Lellis.

Partindo do pressuposto que os alunos já reconhecem quadrados e retângulos, os autores limitam-se a introduzir novos conceitos de paralelogramos, losango e trapézio. Não satisfeitos, levam ao aluno a responsabilidade de explicitar as características de quadrados e retângulos, através de um exercício:

> 38. Todo paralelogramo tem dois pares de lados paralelos. Essa é uma característica (ou propriedade) do paralelogramo. a) Cite uma propriedade do retângulo. b) Cite duas propriedades do quadrado. (IMENES; LELLIS, 2009, p. 90)

A responsabilidade da distinção entre paralelogramos é do aluno, que vai aprender através dos exercícios, mas sem material para consulta já que o livro didático não apresenta a informação. Imaginamos se o livro didático do quinto ano explica, afinal, o que é um quadrado e um retângulo.

A definição de unidade de área unitária em um centímetro é apresentada em Imenes e Lellis (2009, p. 211). O primeiro contato do aluno com áreas é através de contagem por quadriculamento, e em seguida é apresentada fórmula para área do retângulo. Em poucas linhas, uma nova fórmula, diferente da primeira, agora para área do quadrado. O livro segue com exercícios e é encerrado o conteúdo de Geometria Plana.

O livro possui forte apelo ao concreto, à aplicação da matemática na vida extraescolar. Contudo não percebemos nenhuma referência ao desenvolvimento lógico-dedutivo, bem como nos preocupamos com a forma de condução do tema áreas, através da introdução de fórmulas, sendo que o sexto ano não tem conhecimento de cálculo algébrico.

2.3.2 DOCUMENTOS OFICIAIS E O ENSINO DE GEOMETRIA

Quanto ao raciocínio lógico-dedutivo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) apontam:

> (...) os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria. (BRASIL, 1998, p. 86)

Os PCNs colocam de forma clara que é papel da Geometria aproximar o aluno do processo de demonstração. O documento também não deixa dúvidas que não se pretende retomar o ensino de Geometria Euclidiana pura e simplesmente. Deseja-se que o conteúdo de geometria a ser ensinado no Ensino Fundamental possua aspectos da Geometria Euclidiana, sem romper com a geometria do concreto, da experimentação, como já relatamos em Pais e Freitas (1999).

O documento norteador do currículo vigente no Estado do Paraná, as Diretrizes Curriculares, adota plenamente a Geometria Euclidiana, dividindo implicitamente o conteúdo entre Geometrias Euclidianas e Geometrias não Euclidianas. Acredita-se que a abordagem lógica e dedutiva favorece o desenvolvimento do pensamento do aluno para além de habilidades matemáticas. De acordo com Paraná (2008, p. 56):

> Em torno dos anos 300 a.C., Euclides sistematizou o conhecimento geométrico, na obra já citada *Elementos*. Seus registros formalizaram o conhecimento geométrico da época e deram cientificidade à Matemática. Nessa obra, o conhecimento geométrico é organizado com coesão lógica e concisão de forma, constituindo a Geometria Euclidiana que engloba tanto a geometria plana quanto a espacial.
>
> Pela maneira como são postas suas bases e pelo rigor das demonstrações, a geometria euclidiana se caracteriza como modelo lógico para as outras ciências físicas. A obra de Euclides tem uma importância excepcional na história da Matemática e exerce influência até os dias atuais, inclusive no âmbito escolar.

Novamente é evocada a presença da Geometria Euclidiana no Ensino Fundamental. Nos apoiamos nestas indicações para prover a fusão entre a geometria do concreto e o método lógico-dedutivo da Geometria Euclidiana. Durante a elaboração da Oficina constante nesta pesquisa, buscamos o equilíbrio entre o manipulável e o conceitual, utilizando o interesse dos alunos pelo material concreto como ponte para o conhecimento matemático, seja através de definições ou das propriedades dos objetos.

Se os documentos oficiais atribuem no ensino de Geometria algum papel, por menor que seja, da Geometria Euclidiana, nossa breve análise sobre o livro didático adotado na escola corrobora com os autores Serralheiro (2007), Pais e Freitas (1999), Pavanello (1989), Kaleff (1994) e Crescenti (2005), indicando que a realidade caminha no sentido oposto. O esvaziamento da Geometria Euclidiana proposto nos tempos de MMM permanece até hoje.

Ainda nas Diretrizes são listados os conhecimentos e habilidades a serem desenvolvidas em cada ano letivo do Ensino Fundamental, do qual extraímos apenas os conteúdos de geometria. Destacamos a passagem que abrange o sexto ano, público alvo desta pesquisa:

> 6° Ano
>
> - Reconheça e represente ponto, reta, plano, semirreta e segmento de reta;
> - Conceitue e classifique polígonos;
> - Identifique corpos redondos;
> - Identifique e relacione os elementos geométricos que envolvem o cálculo de área e perímetro de diferentes figuras planas;
> - Diferencie círculo e circunferência, identificando seus elementos;
> - Reconheça os sólidos geométricos em sua forma planificada e seus elementos.
>
> (PARANá, 2008, p. 79)

Tomando nosso relato sobre o livro didático adotado pela escola, podemos garantir com base em nossa análise, a total ausência dos elementos do plano: ponto, reta, semirreta e segmento. Da mesma forma, não aborda-se círculo ou circunferência e o cálculo de áreas é limitado ao retângulo (já que o quadrado é um caso particular). Entendemos que o livro não abrange as competências para o sexto ano, sendo inadequada sua escolha como livro didático. O que não podemos garantir, já que não foi objeto desta pesquisa, é o tratamento dado ao assunto por parte do professor, podendo este ter abordado estes tópicos.

Por outro lado, nosso trabalho não tem limitações curriculares, pois ultrapassa, em profundidade, os conteúdos para o ano em questão. Vale ressaltar que o currículo como se apresenta nos documentos oficiais não é integralmente seguido no interior da escola.

2.4 A MATEMÁTICA ESCOLAR E MATEMÁTICA ACADÊMICA

Moreira e David (2005, p. 20) nos dão um entendimento sobre o significado de Matemática, nos termos **Matemática Científica** e **Matemática Escolar**:

> (...) Matemática Científica, ou **Matemática Acadêmica** se referem à Matemática como um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais. E **Matemática Escolar** referir-se-á ao conjunto dos saberes "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática.

Estes termos nos esclarecem que a matemática praticada pelo matemático por profissão difere-se da matemática praticada no seio da escola. Enquanto numa o rigor lógico-dedutivo, a linguagem e as estruturas abstratas imperam, na outra encontramos definições mais descritivas, formas alternativas para demonstrações, argumentações menos formais. O termo Matemática Escolar também abrange pesquisas, artigos, materiais desenvolvidos para o ensino de matemática e outras produções correlatas, ligadas à profissão professor.

Nesse entendimento, as definições, por exemplo, serviriam a propósitos distintos.

> Enquanto na Matemática Científica a caracterização através da definição formal é central para o desenvolvimento rigoroso da teoria, na Matemática Escolar, muitas vezes, não é adequado utilizar esse tipo de identificação do objeto.(MOREIRA; DAVID, 2005, p. 29).

Essa flexibilização que a Matemática Escolar permite recai sobre o que é necessário, e principalmente, o que é **conveniente**, no contexto escolar. Para os autores, citando o matemático Poincaré, uma boa definição - para a Matemática Escolar - é aquela que pode ser entendida pelos alunos. Parece plausível que ao longo da vida escolar do aluno ele se apodere de diferentes definições para um mesmo objeto, e que a mesma evolua em complexidade acompanhando seu desenvolvimento.

O mesmo ocorre com as demonstrações, que possuiriam papéis diversos na Matemática Científica e Matemática Escolar. Para a Matemática Acadêmica, uma demonstração determina a validade de uma proposição, que passa a ser aceita pela comunidade científica. Para a Matemática Escolar, a demonstração tem papel essencialmente pedagógico, visando o desenvolvimento da argumentação e da linguagem e também o entendimento de que os saberes matemáticos não são postos como válidos arbitrariamente, mas sim construídos ao longo do desenvolvimento da Matemática enquanto ciência. (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 28)

Compreendendo esta separação, é papel do professor buscar o conhecimento da Matemática Acadêmica e adaptá-lo à sua realidade escolar, transformando-o em Matemática Escolar. A esse processo, Chevallard (1991) chama de Transposição Didática:

> ... um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O "trabalho" que transforma um

> saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática. (CHEVALLARD, 1991 apud MOREIRA; DAVID, 2005, p 18)

A Matemática Escolar, contudo, não se restringe à mera adaptação da Matemática Científica para aplicação no interior da escola, como a transposição didática de Chevallard. Compreende todo o aparato que circunda a profissão professor, e talvez o mais importante deles: a aprendizagem.

> A questão fundamental para a Matemática Escolar - esse é o segundo elemento, sempre presente no cenário educativo - refere-se à aprendizagem, portanto ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando a compreensão do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extra-escolar. (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 23)

Dessa maneira, tomando a aprendizagem como norte, nossa pesquisa pretende levar conceitos e deduções lógicas, elementos típicos da Matemática Científica, até o alcance dos alunos, na Matemática Escolar, e com isso, numa perspectiva *sócioetnocultural*, superar a tendência formalista.

Para compreender a tendência *Sócioetnocultural*, buscamos em Fiorentini (1995) a compreensão do termo etnomatemática como sendo a técnica de explicar, conhecer ou entender matemática nos diversos contextos culturais. "A matemática, por exemplo, só adquire validade e significado no interior de um grupo cultural - que tanto pode ser uma comunidade indígena, uma classe de alunos ou até uma comunidade científica. (FIORENTINI, 1995, p. 25)". Nesta pesquisa, identificamos o grupo como sendo alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, mas não nos limitamos a esta característica. Também consideramos que são alunos de escola pública, cuja localização geográfica é periférica e não central, enquadrados na faixa de renda média-baixa. Elaboramos a Oficina de Geometria considerando as características de seu publico alvo.

A tendência sócioetnocultural não admite um currículo único e universal. Cada grupo pode definir seu currículo baseado em suas necessidade. Para Fiorentini (1995, p. 26), a relação professor-aluno é dialógica, pois ocorre a troca de conhecimento entre ambos.

O professor de matemática é o profissional que possui a liberdade de realizar a ponte entre o conhecimento científico e o saber a ser ensinado. Sendo um processo subjetivo, as atividades propostas na Oficina de Geometria integrante desta pesquisa foram desenvolvidas no contexto das dificuldades históricas e atuais do ensino de matemática, trajadas com vistas à Geometria Euclidiana.

3 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Enquadrado no tema **Geometria**, este trabalho é categorizado como Pesquisa-Ação, pois segundo Fiorentini e Lorezanto (2006), na Pesquisa-Ação o pesquisador se inclui no ambiente a ser estudado não só para compreendê-lo, mas principalmente para proporcionar a melhoria das práticas onde está inserido.

Em relação à abordagem, a nossa pesquisa carateriza-se como Pesquisa Qualitativa, onde os dados foram coletados no trabalho de campo, com especial atenção ao sentido dado pelos participantes às atividades e tarefas propostas.

Delimitamos nosso trabalho ao Colégio Estadual Mário de Andrade (CEMA), localizado na região periférica do município de Francisco Beltrão, no Paraná. Com cinquenta anos de história, o CEMA está entre as maiores escolas públicas do município. Cerca de cento e vinte alunos encontravam-se matriculados no sexto ano do Ensino Fundamental de nove anos, todos no período vespertino, para os quais foi ofertada uma Oficina de Geometria no contraturno, com duração de seis encontros de uma hora e trinta minutos, iniciados às 08h30, às terças-feiras.

Inicialmente ofertamos dez vagas, sendo que a Coordenação Pedagógica da escola distribui treze fichas de autorização prévia para pais e responsáveis, para os alunos que demonstraram interesse, por ordem de chegada, visando uma margem de desistência de até três alunos. Todos os treze alunos participaram do primeiro encontro, havendo duas desistências no segundo encontro, ou seja, onze alunos participaram. No terceiro encontro novamente treze alunos se fizeram presentes, sendo que dois foram repostos de forma autônoma pela Coordenação Pedagógica da escola, sem consulta ao pesquisador. A partir desse momento não houve alteração nos alunos participantes da pesquisa.

Todos os alunos encaminharam para seus pais e responsáveis os documentos oficiais **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido** e **Autorização de uso de Imagem**. Ambos documentos encontram-se disponíveis nos **Anexos** A e B.

Com a ocupação total dos ambientes da escola, foi nos disponibilizada a sala de informática, onde a oficina foi desenvolvida. Neste ambiente contávamos com lousa e duas mesas grandes para trabalho em grupo. Devido à grande extensão do ambiente, nos concentramos ao fundo da sala, que permaneceu aberta para passagem de funcionários e ocasionalmente alunos, já que neste local são feitas as impressões da escola, fato este que não causou transtornos para a realização da oficina.

Os dados foram coletados através dos seguintes instrumentos:

- Folhas de Atividade: material impresso em A4 constando as atividades propostas pelo pesquisador para o dia, recolhida após resolução;
- Gravação de Áudio: em todos os encontros houve captação de áudio;
- Gravação de Vídeo: em poucos momentos foram captados vídeos, visando registrar ações que não pudessem ser descritas utilizando somente o áudio.
- Registro Fotográfico: alguns momentos aleatórios foram registrados com fotografia para arquivo e embasamento durante as discussões e resultados.
- Diário de Campo: registro das observações do professor pesquisador; dos encaminhamentos da oficina; imprevistos e tomadas de decisões frente às situações da oficina.

Finalizadas as atividades, trechos úteis dos áudios foram transcritos para uso no texto, e as atividades realizadas foram escaneadas para compor o corpo deste trabalho, enriquecendo as discussões a cerca do desenvolvimento da pesquisa.

Após a coleta de dados, a fase seguinte é o tratamento e análise das informações obtidas. Nesta pesquisa utilizamos para a análise dos dados a Análise de Conteúdo, uma vez que nossa intenção era observar a presença dos elementos: as palavras utilizadas nas respostas; as ideias ou opiniões expressas e as interpretações e justificativas apresentadas com vistas a perceber se houve ou não a evolução do pensamento lógico-dedutivo na realização das tarefas propostas. Tais elementos podem ser traduzidos segundo Fiorentini e Lorezanto (2006) como critérios para a interpretação dos registros escritos dos sujeitos das pesquisas sob Análise do Conteúdo.

Optamos por entender cada atividade como uma categoria a ser analisada. Tal fato justifica-se, uma vez que desde o início da elaboração da oficina, as atividades foram pensadas com objetivos específicos que foram sendo encadeados e completados no decorrer da investigação com o intuito de desenvolver o pensamento lógico dedutivo dos sujeitos da pesquisa.

As categorias de análise são:

1. Categoria: Definições - Dicionário Matemático;
2. Categoria: Figuras de três lados;
3. Categoria: Explorando ângulos;
4. Categoria: Triângulo isósceles;
5. Categoria: Triângulo equilátero;
6. Categoria: Figuras de quatro lados;
7. Categoria: Um triângulo, três alturas;
8. Categoria: Área do retângulo;
9. Categoria: Paralelas e paralelogramo;
10. Categoria: Área do paralelogramo;
11. Categoria: Área do triângulo.

4 ESTRUTURA DA OFICINA DE GEOMETRIA

Neste capítulo apresentamos a organização da Oficina de Geometria, elaborada e aplicada durante a realização desta pesquisa, servindo de referência para o professor que pretende desenvolver trabalho correlato.

4.1 DESCRIÇÃO DA OFICINA DE GEOMETRIA

No primeiro contato com os alunos, o professor faz uma explanação acerca da oficina e seu funcionamento. Como incentivo, cada aluno recebe um kit de geometria, composto por: pasta, lápis, canetas coloridas, borracha, apontador, régua, transferidor e esquadro. Na sequência são apresentadas as atividades propostas para cada encontro da oficina.

4.1.1 PRIMEIRO ENCONTRO

Atividade 4.1.1. *Dicionário Matemático.*

Objetivo: perceber a necessidade de definições formais para a Matemática.

Conceitos: triângulo, quadrilátero.

Desenvolvimento: O professor disponibiliza alguns recortes em E.V.A. (etil vinil acetato, popularmente conhecido como “emborrachado”) sobre uma mesa central. Os alunos exploram sem direcionamentos. São diversas figuras geométricas (quadrados, triângulos, retângulos, pentágonos, losangos). O professor questiona se há alguma forma de organização (classificação) para as figuras. Possivelmente algum aluno saberá o nome de alguma figura, e fará proposta de organizar por “tipo”. Com fita adesiva, cada recorte é fixado no quadro branco pelos alunos, agrupados de acordo com a classificação sugerida (pode-se aceitar qualquer classificação), que é escrita no quadro. Havendo mais de uma classificação, discute-se.

O professor questiona como essas figuras são chamadas na aula de matemática, e propõe a classificação por quantidade de lados. Na lousa, escreve-se “figuras de três lados”, “figuras de quatro lados”, etc, e as figuras são devidamente alocadas de acordo com a classificação.

O professor direciona a discussão através de perguntas-chave: ”Como eu sei que uma figura é um triângulo?” ou “Como que eu sei quando uma figura é um quadrado?”. Uma resposta esperada é que “um quadrado é uma figura de quatro lados” ou “quatro lados iguais”.

Usando a régua do kit de geometria, os alunos medem os lados para encontrar os “quadrados”, o que possibilitará ao professor chamar um recorte em formato de losango de “quadrado”, possivelmente gerando desconforto nos alunos. O professor media a discussão entre os alunos, que possivelmente tentarão resolver o entrave. O professor sugestiona “seria bom se na aula de matemática houvesse um dicionário de coisas matemáticas, assim poderíamos saber o que é um triângulo, ou um quadrado, e as outras figuras.”

O professor explica que precisamos ter um consenso, e que a matemática nos propõe que as figuras geométricas recebam seus nomes de acordo com as propriedades que possuem. Distribui-se a Folha de Atividade, na qual é feita a criação de um Dicionário Matemático. É necessário que cada dupla de alunos escreva com suas palavras qual característica a figura deve ter para receber um determinado nome matemático. É importante destacar que não serão induzidos a chamar de triângulo, quadrado, etc.

Ao término, apresentam aos colegas, que podem concordar ou não. O professor media o debate. As Folhas de Atividade são recolhidas e arquivadas, pois apresentarão conceitos prévios dos alunos, os quais serão comparados com a **Atividade 4.1.12 Final**. A conclusão da atividade se dará com o professor acrescentando no quadro negro os nomes triângulos e quadriláteros sob as classificações três lados e quatro lados, respectivamente.

A partir deste momento, os alunos deverão estar convencidos de que qualquer figura que possua a propriedade citada na definição receberá o nome à ela atribuída. Ou seja, a partir de agora, qualquer figura de três lados receberá o nome de triângulo, e qualquer figura de quatro lados receberá o nome de quadrilátero.

A atividade de construção do dicionário será permanente, ou seja, conceitos novos que forem sendo construídos na coletividade serão agregados ao dicionário. O professor deverá recorrer a suas anotações sempre que for necessário relembrar a turma os conceitos construídos coletivamente. Cabe ao professor garantir que não sejam permitidos erros teóricos.

O professor se encarrega de registrar a construção coletiva dos conceitos que formam o dicionário matemático, fotografando a lousa.

Atividade 4.1.2. *Figuras de três lados.*

Objetivo: Perceber a existência de vários tipos de triângulos e classificá-los.

Conceitos: triângulo isósceles, triângulo escaleno, triângulo equilátero.

Desenvolvimento: Nesta atividade, os alunos recebem novamente figuras geométricas recortadas em EVA, contudo agora são apenas triângulos, em seus tipos (supostamente desconhecido aos alunos): isósceles, escalenos e equiláteros. Primeiramente, todos devem se convencer que as figuras apresentadas são triângulos, pois cumprem a definição da atividade anterior. Os alunos são desafiados a propor uma organização (classificar) como na atividade anterior. Podem usar seus kits de geometria. Não é esperado que saibam usar transferidor, por isso acredita-se que sejam feitas classificações quanto aos lados. Pode ocorrer de não haver sugestões, e neste caso, com a régua, o professor incentiva que comparem os tamanhos dos lados.

Terminada a classificação, distribui-se a Folha de Atividade para ampliação do nosso dicionário matemático: os alunos escrevem no grupo a classificação proposta por eles, socializam, e recolhe-se a folha. No coletivo, a atividade segue com o direcionamento do professor (caso seja divergente da proposta dos alunos) em identificar e classificar os triângulos, colando no quadro as figuras abaixo dos dizeres “todos os lados iguais”, “todos os lados diferentes” e “dois lados iguais”. Pode haver discussão em torno do triângulo equilátero, que pode ser classificado como isósceles.

O professor se encarrega de registrar a construção coletiva dos conceitos que formam o dicionário matemático, fotografando a lousa.

Atividade 4.1.3. *Explorando ângulos.*

Objetivo: definir ângulo e instrumentalizar o aluno para o uso do transferidor.

Conceitos: ângulo, semirreta.

Desenvolvimento: Essa atividade visa preparar os alunos para utilização do conceito de ângulo e suas medidas ou construções, necessárias nas atividades seguintes. O professor fará duas representações no quadro negro: um ângulo formado por duas semirretas de comprimento longo, e outro ângulo formado por duas semirretas de comprimento curto. Os alunos são questionados: “o que está desenhado no quadro?”, “qual ângulo é maior?”, e também “como podemos medir os ângulos?”. Os alunos debatem e registram seu entendimento na Folha de Atividade.

Após a discussão, o professor apresenta a definição de ângulo como região compreendida entre duas semirretas de mesma origem. Os alunos deverão compreender que a noção de ângulo não tem ligação com o comprimento das semirretas que o formam, e sim com a abertura da região.

A atividade segue com a construção e aferimento de ângulos dados.

4.1.2 SEGUNDO ENCONTRO

Atividade 4.1.4. *Triângulo Isósceles*

Objetivo: Deduzir que os ângulos da base de qualquer triângulo isósceles tem a mesma medida.

Conceitos: não foram agregados novos conceitos durante esta atividade.

Desenvolvimento: O professor distribui um triângulo isósceles a cada aluno em EVA, e solicita que os alunos os investiguem usando régua e transferidor. Com a régua, os alunos deverão verificar que se tratam de triângulos isósceles. Com o transferidor, deverão identificar que dois ângulos são iguais, e o outro é sempre diferente. Após o momento exploratório, na Folha de Atividade o professor solicita que seja desenhado um triângulo isósceles do tamanho que cada um quiser. Com a régua, deve-se anotar a medida de cada lado. Com o transferidor, anota-se o ângulo. Socializam-se os resultados, e espera-se que percebam os ângulos da base iguais. O professor questiona o fato: "será que isso sempre vai acontecer?"

No recorte inicial, o professor pede que, com a régua, cada aluno identifique o lado diferente do seu triângulo isósceles. Medindo este lado, o aluno deve marcar a metade do comprimento. Com a régua, deve traçar com lápis o segmento que liga o ponto marcado ao vértice não adjacente. Com a tesoura, deverá cortar a linha traçada a lápis, obtendo dois triângulos. Os triângulos obtidos são muito parecidos. "Será que são iguais?" Com essa pergunta, pretende-se que os alunos tentem sobrepor os recortes, concluindo que os triângulos são iguais.

Sendo iguais, as medidas dos lados e ângulos são equivalentes. Usando canetas coloridas, o professor solicita que sejam pintados (contornados) os lados iguais com cores iguais, e os ângulos iguais também. Agora basta recompor a figura original (formato anterior ao corte) para perceberem que, em todos os triângulos da classe, os ângulos da base dos triângulos isósceles são iguais.

Distribuindo a folha de atividade, os alunos deverão responder:

- qual era a classificação do triângulo inicial?

- depois de usar a régua e transferidor, o que foi descoberto sobre esse triângulo?

- existe alguma condição especial no triângulo para que a descoberta funcione?

- você se convenceu que essa descoberta vale para qualquer triângulo isósceles?

Distribuindo um triângulo escaleno, o professor solicita aos alunos que refaçam a atividade, encontrando uma posição de corte que proporcione obter dois triângulo iguais. Não sendo possível tal feito, é dado ênfase na condição inicial da atividade, ou seja, partiu-se do triângulo isósceles. A demonstração deste fato encontra-se no Apêndice B.0.4.

Atividade 4.1.5. *Triângulo Equilátero*

Objetivo: Deduzir que todos os ângulos do triângulo equilátero são iguais.

Conceitos: não foram agregados novos conceitos durante esta atividade.

Desenvolvimento: O professor distribui um triângulo equilátero a cada aluno, e indaga ”esse triângulo é isósceles?” e espera-se que os alunos utilizem a régua para medir dois dos lados do triângulo. Neste caso o professor solicitará que seja medido o terceiro lado, levando os alunos a descobrir que o triângulo é equilátero. Nesse ponto, relembrando a **Atividade 4.1.4 Triângulo Isósceles**, o professor questiona aos alunos se os triângulos possuem dois lados iguais. Se isso acontece, então, pela atividade anterior, os ângulos da base são sabidamente iguais. Solicita que os alunos pintem os ângulos iguais do triângulo com cores iguais.

Em seguida, o professor pede que todos girem seu triângulo, usando um lado diferente como base. Novamente o professor pede que sejam medidos os lados, para confirmar que o triângulo é isósceles. Assim, relembrando a **Atividade 4.1.4 Triângulo Isósceles**, o professor solicita que os alunos pintem os ângulos iguais da base do triângulo, com cores iguais, porém nesse momento um dos ângulos da base já estará pintado de uma cor, então obrigatoriamente o outro lado deverá ser pintado da mesma cor, já que são iguais.

Ao final da atividade espera-se que o triângulo esteja com todos os ângulos pintados da mesma cor.

Atividade 4.1.6. *Figuras de quatro lados*

Objetivo: classificar quadriláteros em subgrupos

Conceitos: retângulo, losango, quadrado.

Desenvolvimento: Essa atividade difere das anteriores por ser o professor quem apresentará a sugestão de classificação das figuras. Justifica-se esse fato pela pretensão de direcionar a atividade para um momento de ruptura de conhecimento nos alunos: após a distribuição de recortes de quadriláteros diversos, será dada uma definição para retângulo (quadrilátero que possui quatro ângulos retos) e losango (quadrilátero que possui quatro lados iguais). Havendo apenas estas duas classificações possíveis no quadro negro, solicita-se que os alunos distribuam suas figuras de acordo com a classificação proposta. Espera-se que utilizem o transferidor para aferir os ângulos, e régua para aferir os lados. Pode ocorrer que os alunos:

- Identifiquem que o quadrado cumpre qualquer das definições dadas, portanto pode ser enquadrado em ambas definições. Neste caso, o professor dará ênfase na possibilidade de duplo enquadramento da figura. Por fim, anotará no quadro negro a definição de quadrado "ser retângulo e losango ao mesmo tempo".
- Retenham as figuras quadradas, esperando por um momento onde o professor coloque a definição de quadrado no quadro negro. Nesse caso o professor estimulará que os alunos recorram à definição. Se a figura em suas mãos tem quatro lados iguais, deverá ser classificada como losango. Se a figura possuir quatro ângulos retos, deverá ser classificada como retângulo. Somente agora o professor dará ênfase na possibilidade de duplo enquadramento da figura. Por fim, anotará no quadro negro a definição de quadrado "ser retângulo e losango ao mesmo tempo".

Na Folha de Atividade, os alunos deverão explicar a diferença entre quadrado e retângulo.

O professor se encarrega de registrar a construção coletiva dos conceitos que formam o dicionário matemático, fotografando a lousa.

4.1.3 TERCEIRO ENCONTRO

Atividade 4.1.7. *Um triângulo, três alturas*

Objetivo: Construir as três alturas relativas às bases de um triângulo qualquer;

Associar a tomada da altura com o ângulo reto.

Conceitos: ângulo reto, altura, base relativa.

Desenvolvimento: O professor indaga "como se mede a altura de uma pessoa?" e posiciona-se próximo a uma parede qualquer, com o cuidado de não ficar ereto. "Qual é minha altura?” Espera-se que os alunos solicitem que o professor fique reto. O professor aproveita-se desse fato para introduzir o conceito de altura ligado ao conceito de perpendicularismo de forma natural.

São distribuídos triângulos diversos recortados em papel cartão. Os alunos são inqueridos a classificá-los quanto aos lados, e em seguida, o professor questiona “qual a altura desse triângulo?” seguido de “como medimos a altura de um triângulo?”. O professor esclarece que a pergunta não tem sentido matemático, pois a altura é a distância da perpendicular entre um vértice e o lado oposto. Portanto a pergunta adequada seria “no triângulo ABC, qual a altura do vértice A?” No caso das figuras de três lados, podemos escolher qualquer um dos três vértices e traçar sua perpendicular à reta que contém o lado oposto, obtendo assim a altura do vértice escolhido. O lado oposto geralmente é chamado de base, e por costume, é ilustrado embaixo.

O andamento da atividade depende de apoio do professor, que deverá introduzir o esquadro como instrumento adequado para tomada da altura. Primeiramente, o professor deve se certificar que todos os alunos tenham decidido de qual vértice tomarão a altura. Em seguida, é preciso identificar o lado oposto - a base relativa - ao vértice escolhido. Nesse momento, o professor orienta que se alinhe o esquadro à base. Por fim, sem perder o alinhamento da base, alinha-se o esquadro ao vértice que se pretende medir a altura. Agora basta usar a régua e aferir a altura solicitada.

Auxiliando individualmente, o professor garante que todos compreendam o uso do novo instrumento. Em seguida, o professor questiona “se escolhermos outro vértice do mesmo triângulo, o que acontecerá com a altura? Aumenta ou diminui?”. Os alunos podem tomar a altura novamente, ou responder que não se altera.

Para facilitar a percepção, o professor pede que seja pintado o lado que serve de base para o triângulo. Em seguida, posicionando o esquadro corretamente, pede que seja traçada a altura com a mesma cor. Ao girar o triângulo, o professor orienta que a nova base seja pintada de cor diferente, assim como a nova altura. Como foram distribuídos vários triângulos diferentes, espera-se que em alguns casos as alturas sejam iguais (equilátero ou caso especial de isósceles), e em outros sejam diferentes (escaleno). De qualquer maneira, o professor solicita que realizem a terceira medida de altura.

Ao final da atividade, distribui-se a Folha de Atividade onde os alunos deverão responder:

- Qual a classificação do seu triângulo?

- Qual a altura do seu triângulo?

- Quantas alturas pode ter um triângulo?

Ainda na Folha de Atividade, os alunos deverão aferir altura de diversos triângulos, dispostos também em posição não usual (nenhum lado alinhado à horizontal).

Essa atividade possui a pretensão de possibilitar o cálculo de área, proposto na **Atividade 4.1.11 Área do Triângulo**.

Atividade 4.1.8. *Área do retângulo*

Objetivos: Compreender o conceito de área;

Calcular a área do retângulo.

Conceitos: área.

Desenvolvimento: O professor mostra alguns recortes em papel cartão de formas retas e também arredondadas, e questiona "quanto papel eu gastei para confeccionar essas figuras?", e em outras palavras, "quanto mede a superfície dessas figuras?". O professor pode se valer da mesa como exemplo para a palavra superfície, caso necessário. Na discussão dos alunos, apresenta a área como unidade de medida de superfícies, mostrando um recorte quadrado de $1x1cm$, chamado unitário, como definição de uma unidade de área, sem contudo utilizar a referência "centímetro quadrado".

Para responder as questões anteriores, basta que saibamos dizer quantas dessas unidades de área são necessárias para cobrir a superfície. Assim, o professor fornece 24 recortes da unidade de área para que os alunos realizem superposição sobre as figuras iniciais, medindo assim sua área.

A primeira figura retilínea é um retângulo de $4x6cm$, criada com o cuidado de apresentar área exata, ou seja, uma quantidade natural de unidades de área serão usados para preencher toda a sua superfície, coisa que a figura arredondada não permite. O professor esclarece que nesta atividade vamos usar apenas quadriláteros, sem identificar quais, e a figura arredondada será descartada, não deixando resposta para como medir sua superfície.

A segunda figura é um retângulo $3x8cm$ preparada para ter a mesma área que a primeira. O professor aproveita-se desse fato para questionar "qual das figuras tem maior área?". A terceira figura é um quadrado $5x5cm$ cuja área excede a quantidade de unidades de área disponibilizada para realizar sobreposição. Da falta de unidades de área, o professor solicita "qual a área da mesa?", que sendo maior que as figuras até então analisadas, igualmente não permitirá a contagem por superposição. Com essa justificativa, o professor questiona a turma qual a maneira de conhecer a área de uma superfície sem precisar sobrepor quadrados de área unitária, pois é um método muito trabalhoso e não é viável para figuras de grandes dimensões.

Um método de contagem de área sem utilizar sobreposição é o quadriculamento. Na lousa, o professor desenha: a quarta figura, um quadrado $6x6cm$; a quinta figura: retângulo $10x14cm$; a sexta figura: retângulo $30x20cm$, sem anotar as dimensões. Em seguida solicita a estimativa de algum aluno sobre a área ocupada pela figura. Após a estimativa, o aluno é convidado a quadricular a figura na lousa, onde o professor e colegas o auxiliam. Aumentando o tamanho da figura, cresce a quantidade de trabalho necessário para responder a área ocupada por quadriculamento. O professor deve convencer a turma que quadricular a figura também é um processo trabalhoso, se empregado em figuras de grandes proporções.

Uma alternativa viável à sobreposição ou quadriculamento é a contagem das unidades de área por meio do produto de linhas por colunas, método utilizado nos Anos Iniciais para introduzir o uso da multiplicação. Quadriculando a figura que se deseja conhecer a área, basta contar o número de linhas e número de colunas, pois o produto representa a soma dos m quadrados de cada linha, dispostos em n linhas. Após compreendido o processo, não é mais necessário quadricular a figura, bastando medir o comprimento e altura, que formam a colunas e linhas, respetivamente.

Após a contagem da área, o professor reforça que conhecendo as medidas dos lados do quadrado ou retângulo, podemos dizer sua área sem precisar sobrepor quadrados unitários ou mesmo quadricular a figura, ou seja, que basta realizar o produto entre o comprimento e a altura. Assim, abaixo de cada figura, o professor anota **Área = base x altura** , seguido do cálculo. Deve-se dar ênfase na sexta figura, que pelas dimensões apresentadas tem $\text{Área} = 20x30 = 600cm^2$ o que significa que seriam necessários 600 quadrados de uma unidade de área para contagem por sobreposição, ou mesmo para quadriculá-la, ficando evidente a inviabilidade.

Na Folha de Atividade, os alunos realizam cálculo de áreas de quadrados e retângulos.

4.1.4 QUARTO ENCONTRO

Atividade 4.1.9. *Paralelas e Paralelogramo*

Objetivo: Reconhecer segmentos paralelos e identificar paralelogramos.

Conceitos: paralelas, paralelogramos e ângulos colaterais.

Desenvolvimento: O professor apresenta um recorte em formato de paralelogramo com lados de comprimentos obviamente diferentes de forma que a olho nu o paralelogramo não seja classificado como losango ou retângulo. "Qual a classificação dessa figura?" acredita-se que os alunos classifiquem apenas como quadrilátero. "Essa figura tem uma propriedade especial, e como sabemos, propriedades matemáticas permitem nomear as figuras. O nome dessa figura é paralelogramo. Alguém já ouviu esse nome? Sabe dizer que propriedade a figura tem que permite receber esse nome?"

O professor distribui a Folha de Atividade, onde os alunos respondem as perguntas anteriores.

Como não foram encontradas referências de paralelismo no livro didático do sexto ano, pressupõem-se que os alunos desconheçam. "A figura é um paralelogramo porque possui dois pares de lados paralelos. O que significa paralelo?" Neste trabalho diremos que dois segmentos são paralelos se:

- Seus lados, quando prolongados ao infinito, nunca se interceptam;
- Quando interceptados por uma transversal seus ângulos colaterais internos somam 180 graus.

Ângulos colaterais são os que estão na mesma região do plano, quando uma reta transversal secciona outras duas retas dadas. Na Figura 2, os ângulos em destaque são colaterais. O professor realiza essa representação na lousa para a explicação.

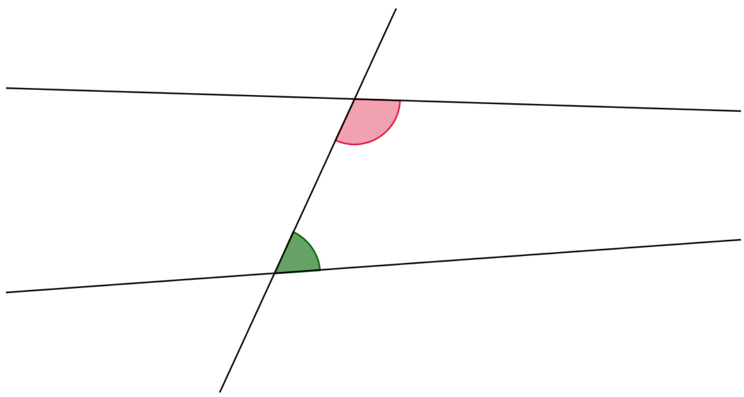


Figura 2: Ângulos colaterais

Em seguida, representando um quadrilátero qualquer na lousa, o professor exemplifica como podemos determinar se lados opostos do quadrilátero representado são paralelos, anotando os ângulos colaterais para que os alunos percebam com mais facilidade quais ângulos são colaterais.

Na Folha de Atividade encontram-se quadrados, retângulos, losangos e trapézios, e pede-se que os alunos identifiquem quais são os paralelogramos, utilizando o transferidor para medir os ângulos colaterais internos e verificando se somam 180°.

Espera-se que os alunos consigam perceber que os quadrados, retângulos e losangos possuem dois pares de lados paralelos, sendo portanto classificados como paralelogramos.

Atividade 4.1.10. *Área do Paralelogramo*

Objetivo: Generalizar a área de paralelogramos.

Conceitos: não foram agregados novos conceitos durante esta atividade.

Desenvolvimento: O professor apresenta um recorte em formato de paralelogramo com lados de comprimentos suficientemente diferentes de forma que a olho nu o paralelogramo não seja classificado como losango ou retângulo. “Qual a classificação dessa figura?” acredita-se que os alunos percebam que é um paralelogramo.

“Se eu cortar essa ponta, colar em outro lugar e montar uma nova figura, a área da inicial vai ser alterada?” Traçando a perpendicular a um dos vértices, o professor constrói um triângulo, recortando-o. Movendo o triângulo adequadamente até o lado oposto, uma nova figura é formada, um retângulo, cuja área agora se sabe calcular. A Figura 3 descreve o procedimento realizado. A demonstração deste fato encontra-se no Apêndice B.0.3.

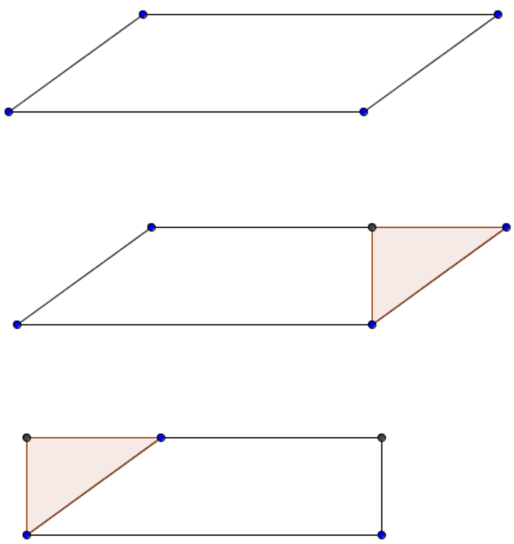


Figura 3: Área do Paralelogramo

Sabendo calcular a área de retângulos, a área de qualquer paralelogramo poderá ser obtida por meio da mesma relação base x altura. Os alunos recebem um paralelogramo qualquer, e na Folha de Atividade são convidados a realizar o procedimento de corte e realocação do triângulo, colando o retângulo resultante e calculando sua área.

O professor enfatiza que não precisamos realizar o procedimento de corte e colagem toda vez que for necessário calcular uma área de paralelogramo. Basta que se compreenda a ideia, e usando o esquadro, realize a tomada da altura da figura.

Na Folha de Atividade os alunos calculam áreas de paralelogramos sem auxílio de recorte e colagem. O professor neste momento vai se certificar que os alunos não tomem o lado do paralelogramo pela altura, evitando assim o erro teórico.

4.1.5 QUINTO ENCONTRO

Atividade 4.1.11. *Área do triângulo*

Objetivo: Obter a área do triângulo.

Conceitos: não foram agregados novos conceitos durante esta atividade.

Desenvolvimento: Os alunos são convidados a desenhar um triângulo qualquer, e usando canetas coloridas, contornar lados que por ventura sejam iguais com a mesma cor. Caso todos os lados sejam diferentes, cada um deve ser contornado com uma cor diferente. O professor pede então que o triângulo seja recortado. “Qual a área do triângulo que você recortou?” Usando como modelo, o professor pede que seja feito um segundo triângulo, igual ao primeiro. Os lados iguais devem ser contornados com a mesma cor.

“Cada um fez seu próprio triângulo. E em seguida, uma cópia dele. Qual dos dois triângulos tem maior área?” Acredita-se que digam que as áreas são iguais. “Se colarmos esses triângulo um ao lado do outro, teremos uma nova figura. Qual a área dessa nova figura, se comparada à área do triângulo original?”. O professor solicita que sejam juntados dois lados iguais dos triângulo, lada a lado, conforme a Figura 4.

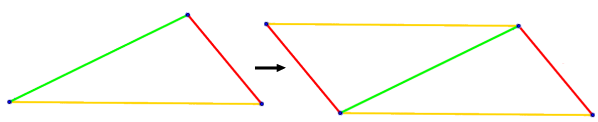


Figura 4: Área do Triângulo

“Imaginem que colamos esses triângulos lado a lado, formando uma nova figura. Que figura é essa?” Fornecendo fita desiva, os alunos colam os triângulos como indicado pelo professor. O professor identifica facilmente um paralelogramo, pois por construção, temos lados opostos congruentes. Os alunos, usando instrumentos, podem verificar que os ângulos colaterais internos somam 180°, portanto os lados opostos são paralelos, o que define um paralelogramo.

Sendo um paralelogramo, pela atividade anterior sabemos calcular a área dessa figura. “Como esse fato pode nos ajudar a dizer a área do triângulo inicial?”. Espera-se que os alunos percebam que o paralelogramo é composto por dois triângulos idênticos, ou seja, de mesma área, e desse fato argumentem que a área do triângulo inicial é metade da área do paralelogramo.

O professor deve dar ênfase na vantagem que esse raciocínio nos dá, pois sabendo calcular apenas a área do retângulo, podemos responder com poucos ajustes a área de qualquer paralelogramo ou triângulo. Na Folha de Atividade, os alunos calculam a área de diversos triângulos propostos pelo professor.

4.1.6 SEXTO ENCONTRO

Atividade 4.1.12. *Final*

Objetivo: Verificar o desenvolvimento dos alunos que participaram da Oficina através de uma atividade individual.

Conceitos: não foram agregados novos conceitos durante esta atividade.

Desenvolvimento: Nesta última atividade, o professor apresenta uma coletânea de exercícios abrangendo toda a Oficina. Os alunos terão cerca de uma hora para realização da mesma. Ao final, o professor faz o encerramento das atividades, agradecendo a presença e o empenho de todos.

4.2 OBSERVAÇÕES AO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DA OFICINA

Esta seção é voltada ao Professor de Matemática, leitor deste trabalho. Buscamos sedimentar nossa pesquisa no estudo de Geometria Euclidiana Plana escrito por Barbosa (2006), de onde seguem as definições, axiomas e propriedades apresentadas ou utilizados, ainda que implicitamente. As definições utilizadas com os alunos participantes desta pesquisa foram listadas no **Apêndice A**.

Ao desenvolver esta pesquisa, tomamos como norte a habilidade de calcular área de triângulos. Justificamos essa escolha por entendermos que o cálculo de áreas trata-se de um instrumento matemático valioso tanto no desenvolvimento do aluno ao longo da Educação Básica quanto para aplicação fora da escola. Ao considerarmos o cálculo de área de polígonos, sempre conseguimos decompor a figura em questão em uma composição de triângulos. Deste fato, é relevante que os alunos consigam calcular a área do triângulo, pois a partir dela se consegue calcular a área de qualquer polígono dado.

A área, nas abordagens de Neto (2013) e Barbosa (2006), é uma função, que associa qualquer superfície à um número real, sendo o conjunto das regiões poligonais o domínio, e os reais positivos o contradomínio. Quando consideramos decompor uma superfície em diversos triângulos, devemos nos precaver da situação de sobreposição. Considere dois polígonos A e B, parcialmente sobrepostos. Como calcular a área de $A \bigcup B$? Não podemos simplesmente somar as áreas, pois sendo parcialmente sobrepostas, alguma parte seria contada em duplicidade. De fato, da teoria de conjuntos compreendemos a união como:

$$| A \bigcup B | = | A | + | B | - | (A \bigcap B) |$$

No nosso caso, decompor uma superfície em triângulos não define áreas sobrepostas, ou seja, a interseção é vazia: os lados dos triângulo, formados por segmentos de reta, tem apenas uma dimensão - o comprimento - não possuindo espessura, portanto por convenção com área zero. Assim garantimos que a área de qualquer polígono é equivalente à soma das áreas dos triângulos nos quais o polígono foi decomposto.

Seguem outros comentários e detalhamentos necessários ao Professor de Matemática que pretenda reproduzir esta Oficina.

Primeiro Encontro

Os conceitos utilizados referem-se aos nomes Triângulo e Quadriláteros, que para Barbosa (2006, p 41) são dados aos polígonos convexos, de acordo com o número de lados, de três a dez. Antes disso, caso lhe falte, Barbosa (2006, p 38) define polígono e, na sequência, polígono convexo.

Para a classificação de triângulos, importante salientar que o termo “base” é ligado ao triângulo isósceles por definição, como faz Barbosa (2006, p 48): “Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados laterais, e o terceiro lado é chamado de base.”

As definições e axiomas relativos à ângulos concordam com Barbosa (2006, p 29).

Segundo Encontro

Esta atividade tem a intenção de induzir, ou estimular, o pensamento lógico-dedutivo no aluno do sexto ano. A sua construção passo-a-passo com material concreto-manipulável é de fácil reprodução e entendimento, ou seja, é acessível ao aluno público alvo desta pesquisa. O professor deve perceber que os recortes distribuídos para manipulação dos alunos não possuem qualquer preparo especial, sendo apenas triângulos, de dimensões variadas. É interessante exagerar as discrepâncias, fazendo recortes bem variados, para que os alunos observem que seus colegas possuem triângulos diferentes dos deles.

Toda a sequência reproduzida no material concreto atende à demonstração da primeira implicação (informalmente chamada de *ida*) da propriedade “Em todo triângulo isósceles dois ângulos internos são congruentes”. No momento de sobreposição dos recortes, está se utilizando o caso de Congruência de Triângulos lado-lado-lado. Os casos de congruência são detalhados em Barbosa (2006, p 45). Apesar de ser conteúdo do nono ano, a congruência visualizada pela sobreposição, que equivale ao caso lado-lado-lado, é acessível ao aluno do sexto ano. Uma demonstração completa da propriedade em questão (das implicações de *ida* e *volta* na linguagem informal) pode ser vista no **Apêndice B**.

Esta propriedade dos triângulo isósceles deveria ser lembrada pelos alunos para a realização da atividade seguinte, repassando a sensação de encadeamento de saberes, ou seja, da necessidade de se partir de algo conhecido, válido, para a construção do novo.

No triângulo equilátero, apenas será deduzido que seus ângulos internos necessariamente são congruentes, sem contudo revelar que a medida é 60°. Isso se deve ao fato de não ter sido planejado trabalhar a soma dos ângulos internos dos triângulos, necessária para provar esta medida.

As definições de retângulo, losango e quadrado são obtidas em Barbosa (2006, p 98), sendo equivalentes às apresentadas aos alunos, constantes no **Apêndice A**.

Terceiro Encontro

Ao que chamamos *altura*, Barbosa (2006, p 65) considera distância entre um ponto e uma reta dados. Como por dois pontos passa uma única reta, podemos considerar que a altura de um dos três pontos de qualquer triângulo é dada pela distância entre este ponto e a reta que contém os outros dois. Vale reafirmar ao aluno que a altura é tomada através da perpendicular.

A área do retângulo é tratada por Barbosa (2006, p 177) como axiomas:

- “A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.”
- “Se ABCD é um retângulo então sua área é dada pelo produto $\overline{AB}.\overline{CD}$.”

Nossa abordagem propõe ao aluno um entendimento do conceito de área através da contagem, sendo restrita aos número naturais e decimais. Para isso definimos a área do quadrado de lado $1cm$ como sendo $1cm^2$, assim como faz Neto (2013). Ambas as abordagens são corretas, embora acreditamos que nossa proposta seja mais adequada à faixa etária que nos propomos trabalhar.

Quarto Encontro

Barbosa (2006, p 63) define retas paralelas como aquelas que não se interceptam. Já paralelogramo é, para Barbosa (2006, p 91), um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Concordamos com Barbosa (2006, p 177) quando tratamos da área de paralelogramos através da desconstrução e reconstrução em uma figura de área equivalente, no caso um retângulo, que é detalhadamente demonstrado no **Apêndice B**: A área do paralelogramo equivale a a área de um retângulo de mesmo lado e altura relativa à este lado.

Quinto Encontro

Para área de triângulos, Barbosa (2006, p 178) mostra ser uma caso especial de área de paralelogramo. Assim como o autor, damos ênfase no processo dedutivo para obtenção de áreas derivadas sempre da área do paralelogramo, não exigindo que o aluno decore fórmulas, e sim pratique adaptações usando sua criatividade e conhecimentos matemáticos desenvolvidos até aqui.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os alunos participaram da oficina organizados em três mesas grandes, de até oito lugares de livre escolha, sendo possível discutir com o colega em qualquer tempo, ou mesmo mudar de lugar ou mesa, num ambiente dinâmico. Quando nos referimos a “grupo de alunos” devemos ter ciência que a coletividade que a expressão representa não condiz com o conceito de grupo fixo e organizado com o qual trabalhamos na sala regular. Para nós, grupo de alunos é uma organização momentânea, temporal, dinâmica, permitindo alteração no número de participantes, revezamento de participantes, e até mesmo discussões “de uma mesa a outra”, o que é totalmente desejável neste ambiente de aprendizagem que nos propomos trabalhar. Nosso “grupo de alunos” indica os alunos que, naquele momento, discutiram entre si para a realização da atividade, não sendo possível listar nominalmente ou mesmo enumerar os participantes.

5.1 ANÁLISE DA CATEGORIA: DEFINIÇÕES - DICIONÁRIO MATEMÁTICO.

Os nomes das figuras planas mais simples já são conhecidos pelos alunos, que desde os níveis pré-escolares acabam reconhecendo triângulos, círculos e quadriláteros. A atividade foi realizada com facilidade por todos os alunos, que cooperaram na classificação das figuras quanto ao número de lados, colando na lousa do triângulo ao hexágono. Quando questionados por quê de tanta facilidade, revelaram que haviam concluído o tópico de geometria na sala de aula regular a poucos dias, estando o conteúdo “fresco”, nas palavras do grupo.

Já na Folha de Atividade, constatamos duas peculiaridades. O aluno Ryan não completou toda a atividade, restringindo-se a desenhar e descrever o triângulo, de acordo com seu entendimento.

Percebe-se que o aluno associou o nome triângulo à figura clássica do triângulo isósceles (dois lados iguais), e mesmo após a atividade e a discussão com o grupo não reconstruiu sua definição. Contrastamos esse fato com a correta classificação das figuras feitas por Ryan no momento da atividade coletiva, demonstrando que compreende a definição usual de triângulo.

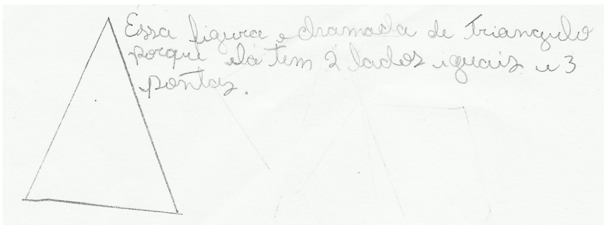


Figura 5: Triângulo, na visão do aluno Ryan

Por outro lado, a aluna Ana nos surpreende ao descrever os polígonos

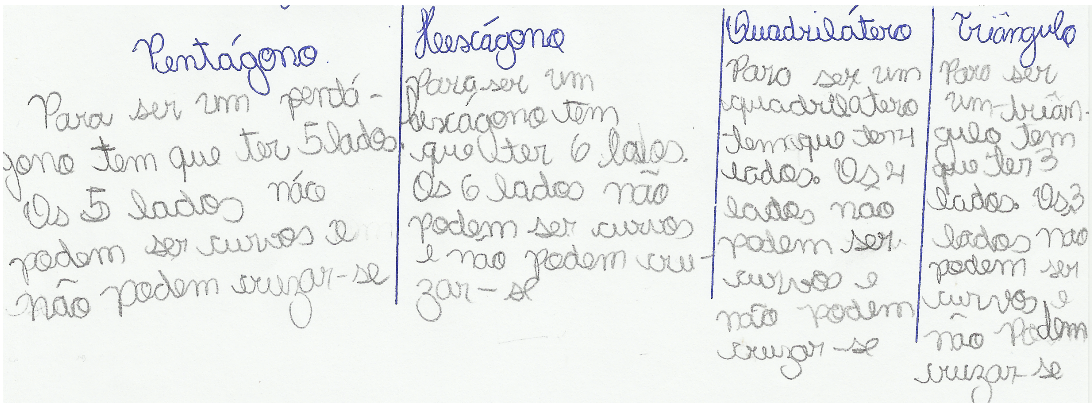


Figura 6: Triângulo, Quadrilátero, Pentágono e Hexágono, na concepção da aluna Ana

Para Ana, é clara a condição "para ser um triângulo **tem que ter** 3 lados" (grifo nosso). Na descrição dessa aluna percebemos que alguns conceitos mais formais da definição de polígono foram incorporados. Lados "não curvos" correspondem à segmentos de reta, e "não poder cruzar" significa sem interseções (ignorando o ponto final/inicial do segmento). Esta descrição não abrange completamente uma definição para polígono mas certamente está a frente da compreensão dos demais colegas do sexto ano.

5.2 ANÁLISE DA CATEGORIA: FIGURAS DE TRÊS LADOS.

Os alunos foram desafiados a propor uma classificação para os diferentes tipos de triângulos disponibilizados, onde esperava-se que emergisse o critério "lados", mas dois grupos de alunos propuseram, de forma independente, a classificação por ângulos. Não sendo prevista, foi necessário dar encaminhamento a partir da improvisação, e as duas formas de classificação foram analisadas pelo coletivo.

Os grupos de alunos que realizaram classificação por ângulo não recordavam os nomes dos triângulos nesta classificação, porém algumas tentativas foram registradas na Folha de Atividade, como o termo "agutangulo" por exemplo, tomado por Pâmela. Nenhum aluno utilizou instrumento para realizar medições nos objetos, realizando a classificação a olho nu.

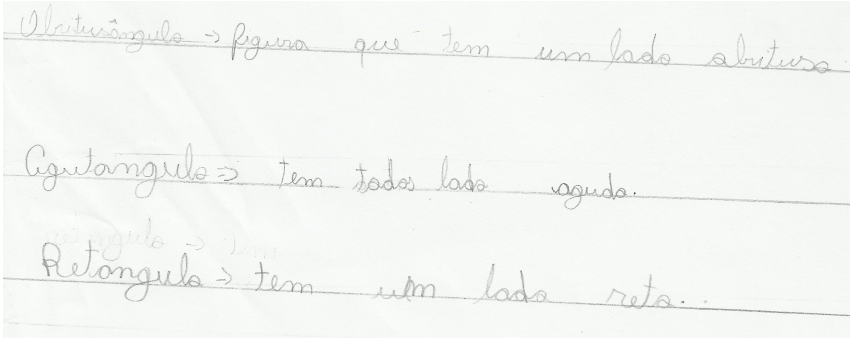


Figura 7: Pâmela propõe classificação para triângulos quanto aos ângulos

Percebemos vários registros confusos. Vários alunos cometeram os mesmos erros, tanto de ortografia como conceituais. Para Maria, "Acutângulo: tem todos os **lados** agudos", onde na verdade a aluna referia-se aos ângulos. O mesmo equívoco foi observado em vários alunos. A aluna Maria foi responsável por recordar a nomenclatura correta, colaborando com toda a turma.

A classificação por lados necessitou de intervenção do professor: por não usar instrumento de medida, alguns alunos insistiam na classificação de alguns triângulos como isósceles quando na verdade eram escalenos (planejadamente construídos para causar confusão). A partir desse instante alguns alunos passaram a não confiar na classificação dos colegas, conferindo as medidas dos lados dos triângulo já classificados na lousa usando a régua.

5.3 ANÁLISE DA CATEGORIA: EXPLORANDO ÂNGULOS.

Esta foi a primeira atividade onde se revelaram dificuldades generalizadas. Primeiramente, o coletivo de alunos não conseguiu explicar "o que é um ângulo?". Podemos observar a falta de entendimento pelas descrições dadas na Folha de Atividades, após a socialização. Destacamos

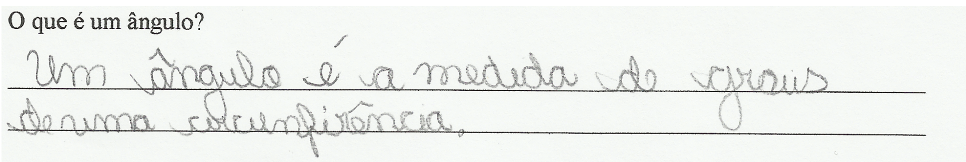


Figura 8: Ângulo, para aluna Ana

Alguns alunos, com vergonha de não saber explicar, preferiram copiar alguma explicação do colega. Foi necessária intermediação por parte do professor para nivelar o entendimento acerca da definição de ângulo.

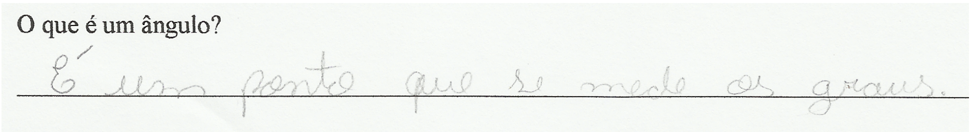


Figura 9: Ângulo, para aluna Annikelly

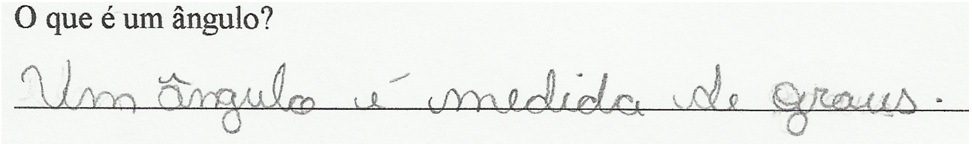


Figura 10: Ângulo, para aluna Gabriela

Na sequência, dois ângulos foram analisados, um de 30° e outro de 20°, onde perguntava-se qual era o maior. Quatro alunas registraram incorretamente o maio ângulo, conforme previsto na atividade, devido a associarem o maior ângulo com a maior semirreta que o compõe. Três destes alteraram seus registros após discussão com os colegas, corrigindo suas respostas, que eram a lápis.

A aluna Ana realiza três tentativas de resposta:

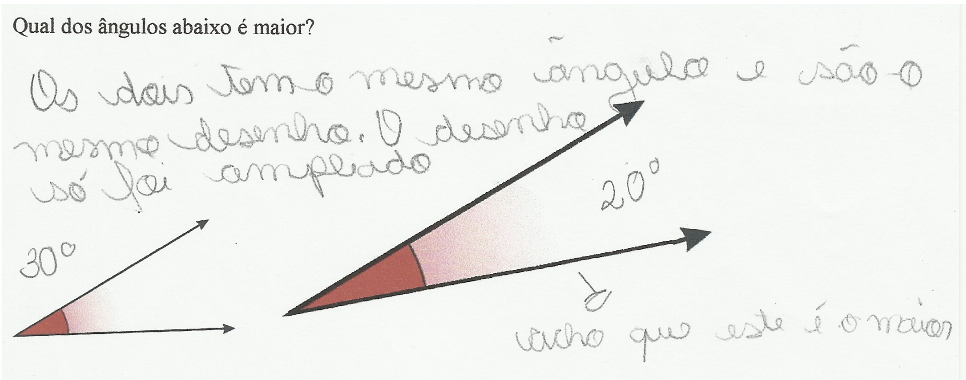


Figura 11: O maior ângulo, para Ana

Primeiramente, Ana acredita que o maior ângulo é o aquele construído com a maior semirreta. Após a intervenção do professor no coletivo, a aluna reconstrói sua resposta, mas mantem o registro inicial, a pedido, para composição desta análise. Agora, Ana acredita que os ângulos são iguais, sendo um a ampliação do outro, revelando uma associação com o conteúdo de simetria. Apenas no terceiro momento, com o uso do transferidor, Ana supera o senso comum e encontra a resposta correta.

Já Laura prefere apagar seu equívoco, mas podemos recuperar com o uso de ferramentas computacionais, sua primeira resposta identificava o ângulo de 20° como sendo maior.

Maria também omite seu erro, mas neste caso apresentamos sua resposta original à

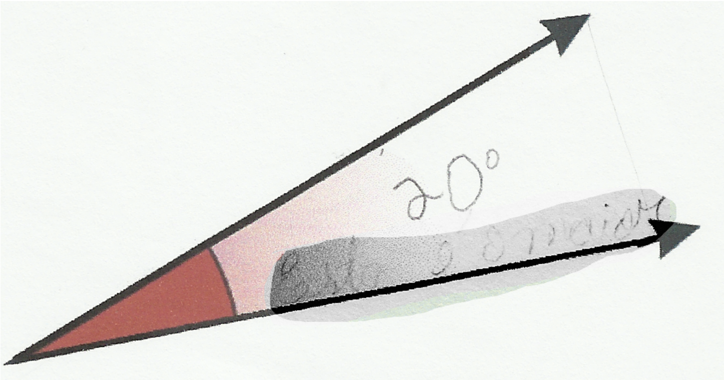


Figura 12: Laura omite seu erro

esquerda, e nossa sugestão de leitura, antes do uso da borracha, à direita.

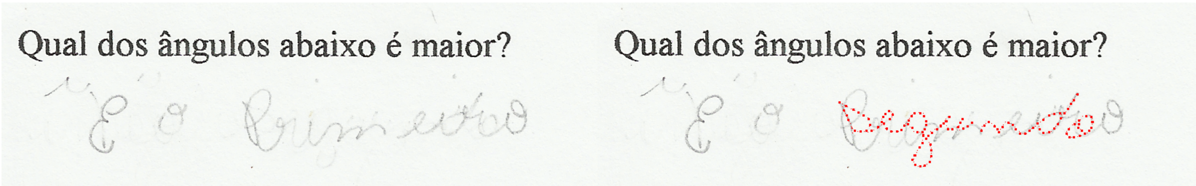


Figura 13: É o segundo - primeira reposta de Maria

A aluna Vitória mediu o complemento do ângulo devido a posição do transferidor que optou por utilizar. Devido a esse fato, registrou em sua Folha de Atividade a resposta incorreta. Após atendimento individual, a aluna negou-se a manter o primeiro registro e corrigiu sua resposta.

Seguiu-se com a explicação do professor sobre como utilizar o transferidor. A atividade seguinte solicitava a construção de dois ângulos, de 45 e 90 graus. Um aluno não utilizou régua no traçado dos ângulos, e outro não utilizou transferidor.

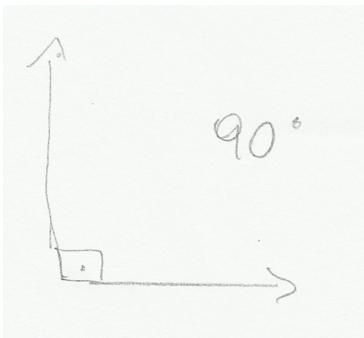


Figura 14: Mariana não utilizou os instrumentos, construindo o ângulo de 90° a olho nu

A atividade foi trabalhosa, já que os alunos não tinham conhecimentos mínimos esperados nem habilidade com instrumentos. Ao mesmo tempo, foi extremamente útil e participativa, pois os alunos "sabiam que não sabiam" e dessa forma dedicaram-se plenamente. Ao final

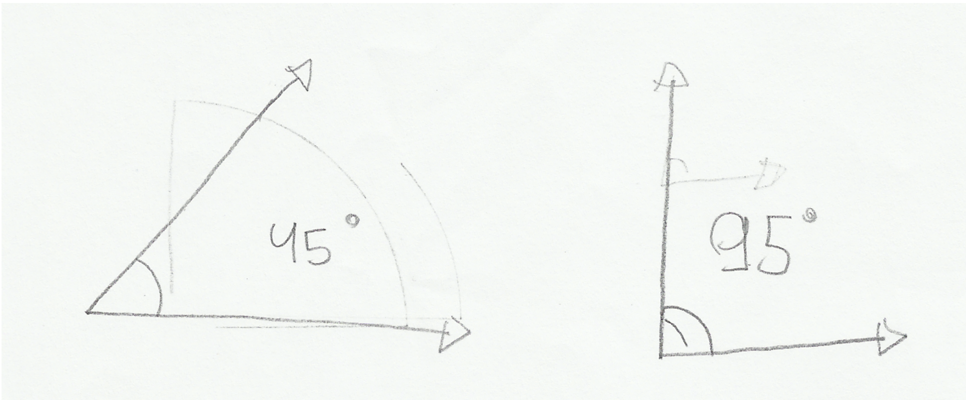


Figura 15: Pâmela não não utilizou transferidor

do tempo, para atender individualmente alguns alunos com dificuldades no uso do transferidor, o professor se propôs recepcionar os alunos 30 minutos antes no próximo encontro.

5.4 ANÁLISE DA CATEGORIA: TRIÂNGULO ISÓSCELES.

Primeiramente os alunos deveriam construir com régua e compasso um triângulo isósceles, e para isto todos utilizaram a mesma estratégia: escolhido um comprimento para um lado de forma arbitrária, constrói-se o segmento correspondente; em seguida, a partir de um dos extremos do segmento construído, constrói-se outro segmento congruente ao primeiro, em qualquer direção. finalmente, liga-se os extremos dos segmentos inicial e final, obtendo-se um triângulo isósceles com lados iguais arbitrários mas sem qualquer controle sobre o comprimento da base. Todos os alunos conseguiram construir com sucesso.

Um caso curioso foi a tentativa da aluna Maria. Não contente em construir apenas um triângulo isósceles, ela questiona se poderia construir um triângulo retângulo e isósceles ao mesmo tempo. Para tal feito, o professor auxilia a refletir sobre o que seria necessário para o triângulo ser chamado isósceles, e o que seria necessário para ser chamado de retângulo. O resultado segue na Figura 16.

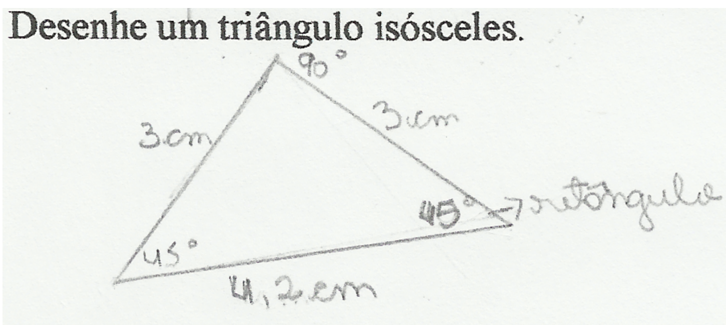


Figura 16: Maria constrói um triângulo isósceles retângulo

Apenas as alunas Maria e Ana compreenderam que em qualquer triângulo isósceles os ângulos da base são iguais, como podemos observar no registro da Figura 17. As mesmas alunas afirmam na sequência acreditar que isso ocorre em qualquer triângulo isósceles. A aluna Maria questionou se é possível reproduzir a atividade com o triângulo escaleno, ao que foi respondido que no final da atividade teria oportunidade de tentar.

Os demais alunos dividem-se entre os que observaram que no triângulo isósceles dois lados são iguais, e os que observaram que nenhum lado é igual. Ambos os grupos estão equivocados, pois a informação inicial é que o triângulo era isósceles. Vários alunos não conseguiram pintar os ângulos correspondentes com cores iguais. Os mais desatentos colaram no quadro segmentos incongruentes, criando quadrilátero ao invés do triângulo esperado.

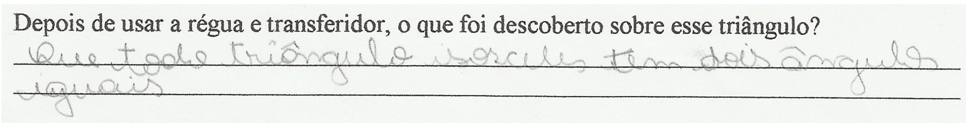

Depois de usar a régua e transferidor, o que foi descoberto sobre esse triângulo?
Que todo triângulo isósceles tem dois ângulos iguais

Figura 17: Maria finaliza com sucesso a atividade

A proposta final da atividade consiste em repetir a atividade em um triângulo escaleno para encontrar um ponto de corte de forma a obter uma congruência entre as figuras resultantes. Uma aluna imediatamente questiona o professor, sendo que transcrevemos o breve diálogo que se encontra registrado em vídeo:

Mariana - O professor, dá de cortar esse que dá o lado igual?

Pesquisador - Aí que tá... não dá!

Maria - Não dá? (decepcionada, acompanha o diálogo e faz suas próprias reflexões em voz alta)

Mariana - Nenhum? (indignada)

Pesquisador - Em nenhum triângulo escaleno (...)

Maria - Não dá... (decepcionada e reflexiva)

Pesquisador - (...) existe algum lugar onde cortando igual a gente fez neste exercício (...)

Maria - Só o triângulo isósceles... Não! Equilátero...

Pesquisador - (...) ele fique dois iguais. E a matemática consegue provar que não dá!

As duas alunas envolvidas no diálogo se mostram incomodadas com o fato de a atividade não ter solução. Mas é Maria que nos mostra a estruturação de seu pensamento, pois nesse momento se da conta que a condição de partida da atividade era um triângulo isósceles (com perdão da inversão dos nomes efetuada pela aluna no diálogo).

5.5 ANÁLISE DA CATEGORIA: TRIÂNGULO EQUILÁTERO.

Como a atividade Triângulo Isósceles era um pré-requisito para a resolução desta atividade, era de se esperar que as mesmas alunas que obtiveram sucesso anteriormente concluíssem-na. Mas desta vez, Ana e Vitória têm sucesso, compreendendo que em qualquer triângulo equilátero, os ângulos internos são congruentes.

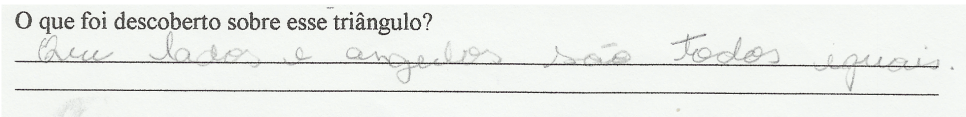


Figura 18: Resposta da aluna Vitória

Os demais alunos permanecem focados em lados e não compreendem a relação entre o triângulo equilátero e os ângulos internos. No momento em que ocorria a atividade, o pesquisador não identificou esta dificuldade, não realizando intervenções a fim de superá-la.

5.6 ANÁLISE DA CATEGORIA: FIGURAS DE QUATRO LADOS.

Com as definições de retângulo e losango expostas no quadro, os alunos classificaram corretamente as figuras distribuídas, até que um erro por desatenção permitiu que o professor pedisse que os alunos conferissem antes de colar seus recortes na lousa. Decorreu que o aluno Ryan, que, de posse da régua, passou a conferir os recortes já colados. Ryan buscava no grupo dos retângulos qualquer quadrilátero com lados iguais e transportava-os para o grupo dos losangos. Dessa forma, todos os quadrados foram removidos por Ryan para o grupo dos losangos.

Após um momento, a aluna Mariana iniciou também a conferência dos recortes, buscando no grupo dos losangos quadriláteros com ângulo internos iguais a 90° e transportando-os para o grupo dos retângulos. Como a turma tinha liberdade de ir e vir à lousa, haviam alunos em trânsito por todo tempo, fazendo com que Ryan e Mariana não perceberam um ao outro. Assim, Mariana movia os quadrados para o grupo dos retângulo, ao passo que Ryan os levava para o grupo do losango, num ciclo que se repetiu diversas vezes.

Maria percebe o fato e explica para Ryan que o quadrado poderia ser classificado em qualquer um dos grupos, encerrando a discussão.

Vitória consegue organizar o pensamento e explicar os diferentes tipos de quadriláteros, pelas suas características:

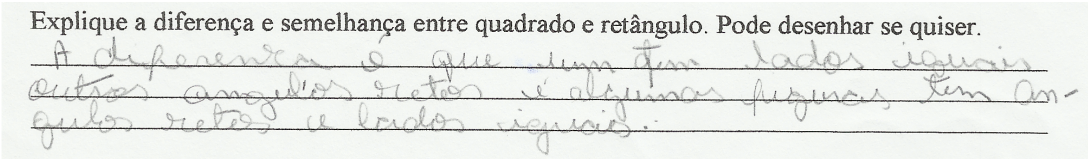


Figura 19: Tipos de quadriláteros, para Vitória

É a melhor descrição que a turma propõe.

Para maioria do grupo, quadrado e retângulo são quadriláteros "parecidos". Não há uma clareza como exposto por Vitória. A atividade consegue transtornar os alunos, mas eles ainda se mostram incapazes de elaborar definições mais elaboradas.

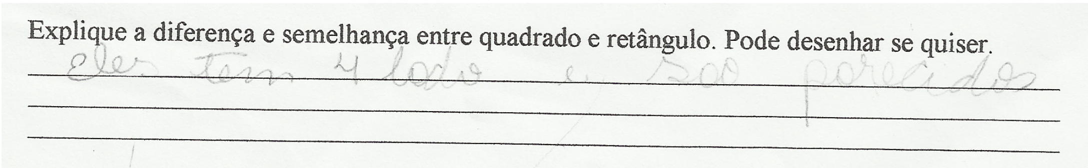


Figura 20: Quadrados e retângulos são parecidos

O termo "parecidos" nos revela que a aluna não estabeleceu a diferença entre as definições abordadas.

5.7 ANÁLISE DA CATEGORIA: UM TRIÂNGULO, TRÊS ALTURAS.

Necessário registrar que não houve aula normal neste dia, sendo que alguns alunos acharam que não haveria oficina. Participaram 7 alunos dos 13 matriculados. Dentre estes, 4 alunos conseguiram traçar as alturas, que se encontraram em um único ponto, fato merecedor de destaque.

O traçado e aferimento de altura é uma tarefa complexa mas necessária para o cálculo da área de triângulos, na forma como pretendemos. As dificuldades demonstraram que o uso do esquadro primeiramente é tomado com estranheza, mas em pouco tempo a facilidade no traçado de perpendiculares apresenta-se vantajosa. Na Figura 21, apresentamos os casos de sucesso das alunas Vitória, Laura e Ana, respectivamente.

Utilizamos os termos "altura relativa ao chão" diversas vezes durante a oficina, e no momento do registro na Folha de Atividades utilizamos o mesmo argumento, pedindo que os

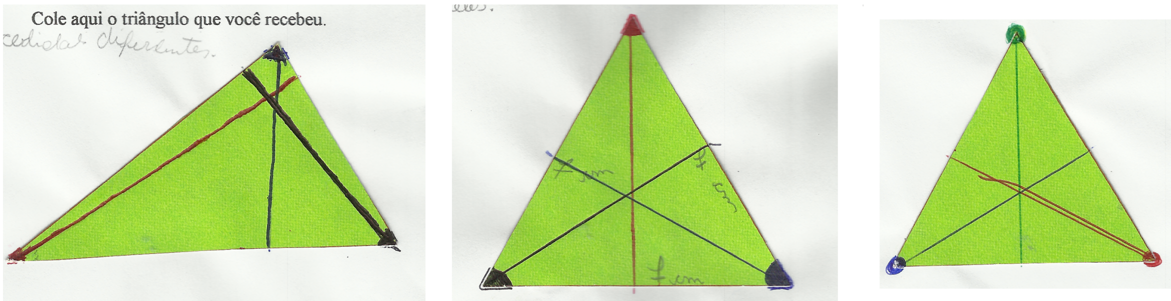


Figura 21: As três alturas do triângulo e o ortocentro.

alunos se certificassem sobre qual lado seria o seu “chão”. Inicialmente o uso do esquadro causou confusão, e muitos atendimentos individuais foram solicitados. Como todos os triângulos distribuídos eram diferentes, a possibilidade de copiar do colega foi afastada. Solicitamos que alunos adiantados auxiliassem os colegas, sempre sob nossa supervisão.

Apesar de não ser objetivo da atividade, percebemos que poderíamos abordar o conceito de ortocentro. Apesar de ser notado pelos alunos que conseguiram traçar as alturas com sucesso, o ponto de interseção das alturas foi tratado como uma curiosidade.

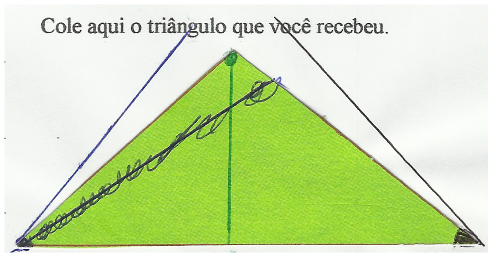


Figura 22: Annikelly e seu traçado de alturas

Durante o desenvolvimento da atividade, ficou claro o envolvimento e o crescimento dos alunos. Os casos mais complexos para traçado e aferimento de altura ficaram a cargo das alunas Annikelly e Mariana. Elas precisaram prolongar um dos lados para conseguir realizar o traçado. Os resultados surpreendem pelo fato que a projeção dos lados deu-se no campo abstrato, sem necessidade do registro.

Na Figura 22, perceba o alinhamento de um dos lados do triângulo com a horizontal. De fato, prolongando os traçados verde, azul e preto que representam as alturas relativas aos vértices, percebemos que convergem para uma interseção, o ortocentro, fato desconhecido dos alunos do sexto ano.

Mariana não alinha seu triângulo com a horizontal, e depende de ajuda para registrar a primeira altura, aquela em que prolonga um dos lados a caneta. Já a próxima, o faz sem necessidade de prolongamento do lado. As alturas se prolongadas também convergem a um

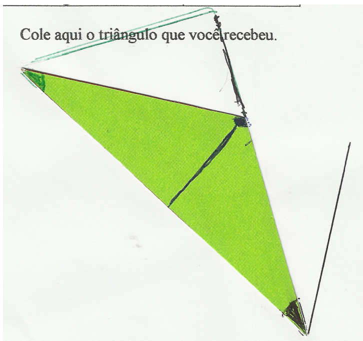


Figura 23: Mariana recebe auxílio no primeiro traçado, e tem sucesso individual no segundo.

único ponto.

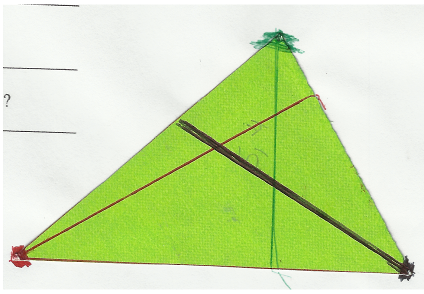


Figura 24: Um traçado errado atrapalha a visualização de Kamilly.

Um caso de sucesso parcial pode ser verificado na atividade de Kammilly, que comete um erro na altura registrada em preto.

5.8 ANÁLISE DA CATEGORIA: ÁREA DO RETÂNGULO.

O entendimento sobre o termo "Área" como superfície de uma figura plana recaiu sobre a maioria dos alunos. Para Julia, área é "a região de dentro de alguma figura", que nas palavras dela equivale a nossa definição. Já para Ryan:

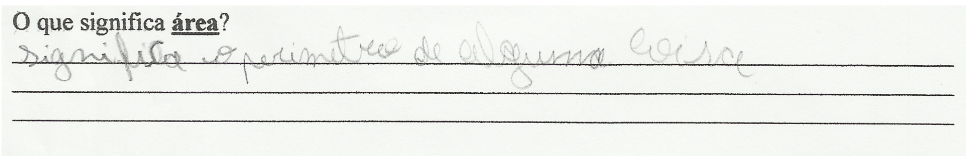


Figura 25: Área para o aluno Ryan.

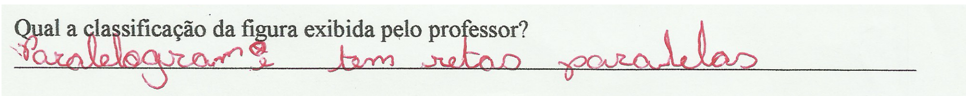
Em nenhum momento desta pesquisa foi apresentada a palavra "Perímetro", que curiosamente é usada pelo aluno Ryan.

No total de oito participantes, notamos que ao final da atividade a metade deles Julia, Kamilly, Laura e Ryan não realizaram o cálculo numérico de área como solicitado, entregando em branco. Os quatro alunos restantes calculam com sucesso, salvo equívocos de multiplicação irrelevantes para os objetivos da pesquisa.

Os alunos já haviam estudado cálculo de áreas de retângulo, logo não deveriam ter dificuldades, como de fato ocorreu com os alunos que efetivamente fizeram as atividades propostas. O caráter preparativo desta atividade determina a importância dos cálculos de área que seguirão nas atividades seguintes, para os quais os alunos não foram preparados na sala de aula regular.

5.9 ANÁLISE DA CATEGORIA: PARALELAS E PARALELOGRAMO.

Em geral, existia um entendimento sobre retas paralelas serem aquelas que nunca se encontram. Para os alunos, bastou a correspondência entre as palavras paralelas e paralelogramos para imediatamente ocorrer a ligação: paralelogramos são as figuras que contem lados paralelos.



Qual a classificação da figura exibida pelo professor?
Paralelogramo tem retas paralelas

Figura 26: O paralelogramo para Kamilly.

Todos os treze alunos identificaram corretamente os paralelogramos dispostos.

5.10 ANÁLISE DA CATEGORIA: ÁREA DO PARALELOGRAMO.

Dos treze alunos presentes no dia, quatro não realizaram a tentativa de cálculo de área solicitada. Dentre os nove que realizaram cálculo, dois alunos utilizaram o lado do paralelogramo no cálculo da área, ao invés da altura, errando o procedimento. Uma aluna errou o traçado da perpendicular, e outra errou a multiplicação com decimais, restando cinco respostas corretas.

Segundo relato do coletivo, o cálculo de área de paralelogramos não havia sido ensinado na turma regular, o que nos faz considerar um caso de sucesso em apenas uma oficina obter cinco acertos em treze.

O desafio de construir um retângulo de área 15, com um dos lados de comprimento 6 não foi realizado. Algumas tentativas demonstram confusão dos alunos, que ainda não podem contar com a álgebra para solução do problema.

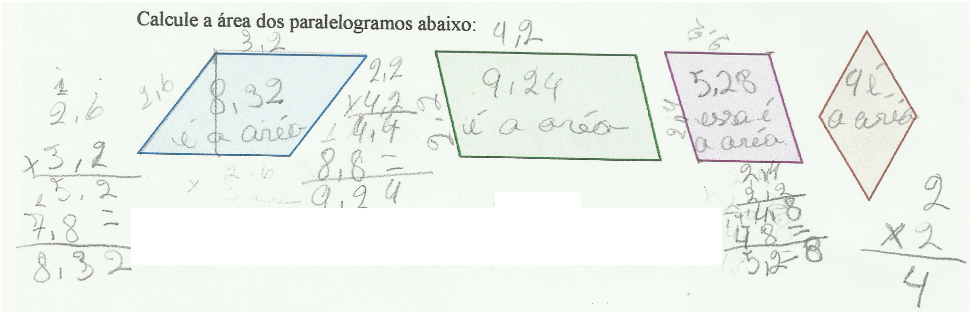


Figura 27: O registro de Vitória é confuso, mas correto.

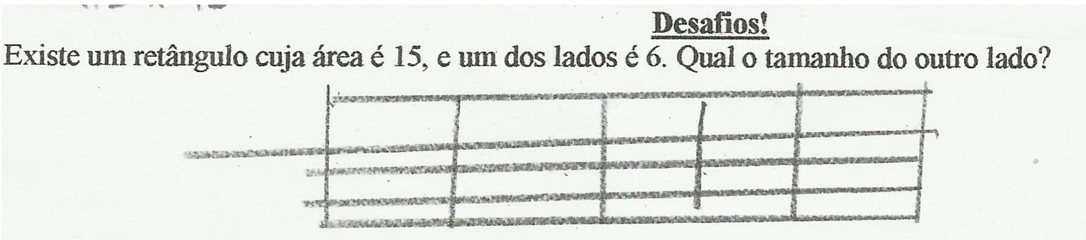


Figura 28: Julia e sua tentativa de representar um retângulo de área 15 com lado 6.

Na Figura 28 não conseguimos identificar se a construção apresentada representa desconhecimento da aluna ou desleixo para com a oficina. O pesquisador deveria ter conversado com a aluna e verificado os argumentos apresentados para esta construção.

Seis dos treze alunos conseguiram explicitar um retângulo de área dois, solicitado no desafio seguinte. Contudo, nenhum aluno construiu um quadrado de mesma área. Novamente sem álgebra, o problema parece ser insolúvel, ainda mais se considerar que o sexto ano não conhece os números irracionais. Todos entregam este desafio em branco.

5.11 ANÁLISE DA CATEGORIA: ÁREA DO TRIÂNGULO.

Descartamos de imediato os trabalhos das alunas Gabriela, Julia, Laura e Letícia pois o grupo não se apresentou disposto a participar da oficina, e limitaram-se a copiar uma ou outra anotação dos colegas para fins de validar presença. Os seis alunos restantes que participaram da oficina conseguiram, em diferentes graus de sucesso, calcular áreas de triângulos.

Todos precisaram utilizar os instrumentos para medir os lados e traçar alturas. Durante esse momento, alguns alunos mostraram-se desconfiados pois as medidas variavam em milímetros de diferença entre um aluno e outro, e o pesquisador informou que não se preocupassem com pequenas diferenças, mas tentassem fazer o mais correto possível, aos seus olhos.

Sendo medidas não inteiras, os alunos precisavam saber multiplicar com decimais, o que se mostrou um pequeno desafio para alguns, mas todos conseguiram superar este obstáculo apesar de alguns erros devido a esse fator.

Os quatro triângulos iniciais não apresentavam dificuldades, bastando uma escolha pensada para encontrar alturas de fácil obtenção. Vários alunos giraram a Folha de Atividades de forma a alinhar algum lado do triângulo com a horizontal, tendo uma melhor percepção do que seria altura. Esse truque logo foi difundido entre os alunos participantes.

As alunas não-participantes listadas no início deste análise repetiram traçados de altura sem compromisso com a perpendicularidade, como podemos notar na Figura 29 da aluna Laura:

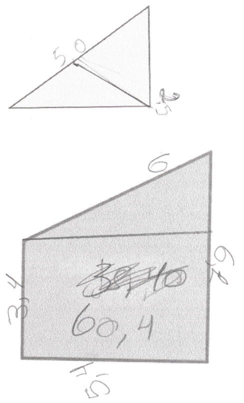


Figura 29: Laura não constrói perpendiculares no traçado da altura.

Em contraste, fazemos questão de expor a atividade completa da aluna Ana, exibida na Figura 30. Existe apenas um erro em toda atividade, que consiste no esquecimento da divisão por dois para obtenção da área do triângulo. Observe que a aluna traça as alturas com uso do esquadro.

No polígono, perceba a escolha da aluna pela diagonal para separação em dois triângulos. Agora considere o cálculo da área: a aluna soma as alturas dos dois triângulos obtidos pelo traçado da diagonal do polígono, e em sequência multiplica pelo comprimento da diagonal (que é a base de cada triângulo). Por fim, divide por dois.

Na Figura 31, duas formas diferentes para obtenção da área da mesma figura. Enquanto Anne opta pelo traçado de uma altura interior ao triângulo, Mariana prefere o prolongamento de um dos lados e o traça a altura externa ao triângulo. Em vermelho, grifo nosso.

As resoluções de ambas estão corretas, o que mostra que a opção de cálculo se deu pela facilidade de cada aluna, e não foi restringida à fórmulas ou receitas. Acreditamos que a nossa sequência apresentada na Atividade 4.1.5, que levou ao descobrimento da maneira de obter área de triângulos, seja responsável por tal independência de tratamento na questão.

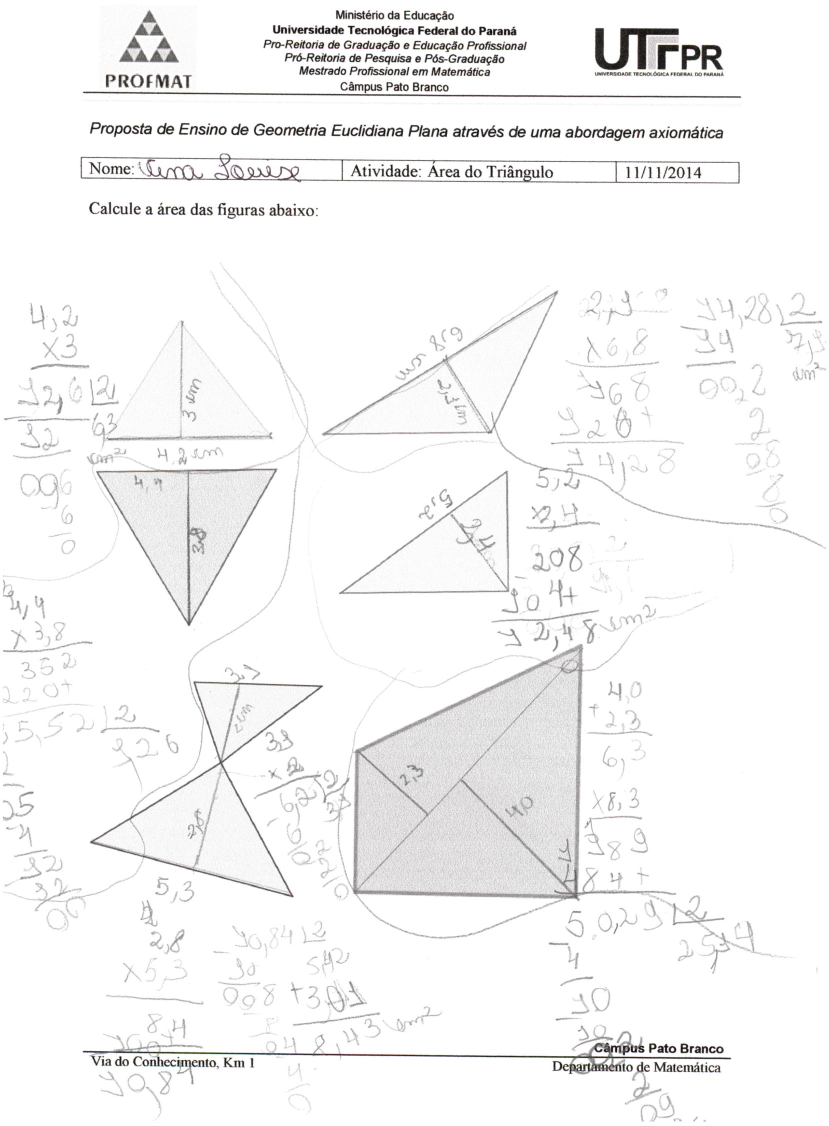


Figura 30: O caso de sucesso de Ana Louise.

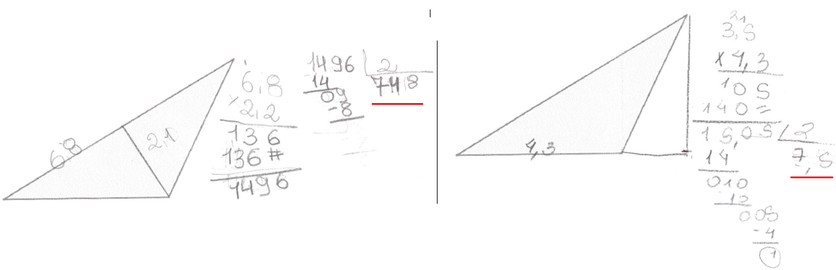


Figura 31: Anne Caroline à esquerda, e Mariana à direita: duas maneiras para obtenção da área.

5.12 ANÁLISE DA CATEGORIA: ATIVIDADE FINAL.

Apresentamos a transcrição das respostas da primeira questão, que solicitava o significado matemático das palavras. É uma alusão ao dicionário matemático criado por eles durante a oficina. Neste dia estavam presentes doze alunos.

Significado de *Retângulo*

> Vitória: Com um ângulo reto.
> Laura: Um quadrado com retas alongadas.
> Annikelly: É um quadrado com área mais alongada.
> Ana Louise: Retângulo é uma figura com 2 lados iguais e outros dois diferentes.
> Ryan: É uma figura que tem duas retas paralelas.
> Gabriela: É uma figura com as áreas mais alongadas.
> Maria: Uma figura de quatro lados que tem todos os ângulos retos.
> Mariana: É uma figura de 4 lados.
> Julia: Ele tem 2 lados iguais e outros 2 iguais ele tem todos os ângulos internos retos.
> Leticia: É uma figura de quatro lados.
> Anne: É uma figura de quatro lados e tem os ângulos retos.
> Kamilly: É um quadrado que tem áreas maiores.

Apenas as alunas Maria e Anne conseguiram descrever corretamente. Os demais permanecem com ideias confusas e pouco sabem afirmar características para além da figura possuir quatro lados. Percebemos que nenhum aluno confunde um retângulo como um tipo especial de quadrado, mas ao mesmo tempo nos faltou no planejamento uma questão que possibilitasse afirmar que o quadrado é, ou não, um tipo de retângulo, e esse entendimento parece ser falho.

Significado de *Paralelas*

> Vitória: São retas que não tem fim.
> Laura: 2 linhas que nunca se encontram.
> Annikelly: Duas linhas que nunca se encontram.
> Ana Louise: Retas paralelas são retas que nunca se cruzam.
> Ryan: Retas paralelas são retas que não se encontram.
> Gabriela: Duas linhas que nunca se encontram.
> Maria: Duas linhas que seguem sempre à mesma distância e não se cruzam.
> Mariana: São linhas que nunca se encontram.
> Julia: Retas paralelas é que elas nunca se encontram.
> Leticia: É uma linha que nunca se encontra.
> Anne: São retas que nunca se cruzam.
> Kamilly: Retas paralelas são retas que nunca se encontram.

O conceito de retas paralelas adotado pela coletividade foi que “retas paralelas são aquelas que nunca se encontram”. Ele foi amplamente aceito pela sua simplicidade de entendimento, mesmo pelos alunos que no primeiro momento não sabiam explicar o significado de retas paralelas.

Significado de *Triângulo Equilátero*

> Vitória: Tem três lados de medidas diferentes.
> Laura: Um triângulo de todos os lados iguais.
> Annikelly: Um triângulo de todos os lados iguais.
> Ana Louise: Tem todos os lados iguais.
> Ryan: Um triângulo equilátero é um triângulo que tem todos os lados iguais.
> Gabriela: *em branco*
> Maria: É um triângulo que tem todos os lados iguais.
> Mariana: Tem todos lados iguais.
> Julia: É um triângulo que tem os quatro lados iguais.
> Leticia: Eu não consegui.
> Anne: Ele tem todos os lados iguais.
> Kamilly: O (equi) e o (látero) são coisas diferentes pois os três são iguais.

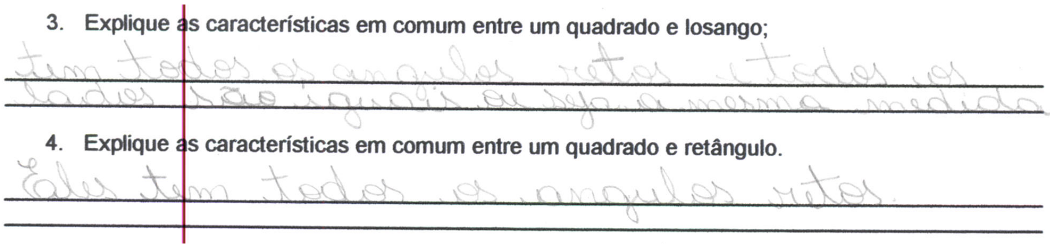
Os tipos de triângulo são conhecidos pelos alunos, como vimos na Atividade 4.1.1, as diferentes características são amplamente conhecidas. Já os termos que formalmente utilizamos não. Isso significa que os alunos reconhecem os "triângulos que tem todos os lados iguais" mas a palavra "equilátero" é vazia de significado. Nesse ponto acreditamos que a linguagem seja um fator limitador, sendo que alguns alunos possuem vocabulário adequado, enquanto outros ainda o estão desenvolvendo.

Significado de *Losango*

> Vitória: *em branco*
> Laura: *em branco*
> Annikelly: *em branco*
> Ana Louise: Não lembro.
> Ryan: É uma figura com todos os lados com a mesma medida.
> Gabriela: *em branco*
> Maria: É uma figura de quatro lados que tem todos os lados com a mesma medida.
> Mariana: Tem 4 lados.
> Julia: Ele tem todos os lados iguais.
> Leticia: Ele tem dois lados iguais.
> Anne: Tem todos os lados com a mesma medida.
> Kamilly: É uma figura com todos os lados com a mesma medida.

A confusão de conceitos quadrado x losango pode ter sido superada. Esperava-se que o público alvo tomasse a definição de losango pela definição de quadrado, um erro comum, cuja origem extrapola os interesses desta pesquisa. Para os alunos, o quadrado é a figura de quatro lados iguais, enquanto que o losango não tem nenhuma descrição de propriedade característica. A *Atividade 4.1.2 Figuras de quatro lados* previa uma ruptura conceitual, pois pela forma de condução não permitia essa associação errônea de conceitos. Obtivemos sucesso como podemos perceber nas seis respostas corretas. Um desses alunos que descreve losango corretamente é Ryan, participante ativo da Atividade 4.1.2 , analisada anteriormente.

As questões posteriores solicitam as características comuns entre quadrados e retângulos, e quadrados e losangos. A aluna Anne consegue descrever com facilidade, na Figura 32. Os demais continuam sem toda a clareza necessária para distinção entre os quadriláteros.


3. Explique as características em comum entre um quadrado e losango;

tem todos os angulos retos todos os lados são iguais ou seja a mesma medida

4. Explique as características em comum entre um quadrado e retângulo.

Eles tem todos os angulos retos.

Figura 32: O caso de sucesso de Anne.

A questão da sequência solicita que seja desenhado um triângulo isósceles e descritas suas propriedades. A Atividade 4.1.2 previa que os alunos percebessem que os ângulos da base do triângulo isósceles são iguais. Apesar de realizar a atividade com sucesso, nenhum aluno lembrou desta propriedade. Todos responderam apenas a definição (dois lados iguais).

O tema *Área* é abordado nas questões seguintes. Nove dos doze alunos construíram figuras com uma área pedida, sendo que apenas um dos alunos não utilizou quadriculamento. O quadriculamento foi apresentado na Atividade 4.1.3 como sendo um processo possível, mas oneroso, para cálculo de área. Nos surpreende saber que o coletivo permaneceu atrelado a esse processo.

Apenas quatro alunos conseguiram construir duas figuras diferentes com uma mesma área qualquer, e um aluno calculou corretamente a área do quarto apresentado. A área da suíte não foi descoberta. Percebemos quatro tentativas de decomposição do quadrilátero que representava a suíte, o que consideramos satisfatório. Na única tentativa que gerou cálculos, a aluna tomou as medidas com régua e não adotou as fornecidas pela planta, um pequeno deslize de atenção mas produzindo resultados satisfatórios na nossa análise.

6 CONCLUSÕES

Durante nossa pesquisa bibliográfica, constatamos que o ensino de geometria na atualidade não segue uma abordagem lógico-dedutiva. As atividades componentes da Oficina de Geometria foram pensadas para promover essa forma de pensamento. Para atingir esse objetivo, a mediação da oficina adotada pelo pesquisador permitiu trabalho em grupo, onde emergiu um ambiente de discussão e argumentação, que na nossa avaliação foi fator positivo para a pesquisa.

Os conteúdos escolhidos como componentes da Oficina de Geometria não foram limitados às competências listadas pelas Diretrizes Curriculares para o sexto ano. Buscamos organizar em um nível de crescente complexidade conteúdos geométricos os quais acreditamos serem possíveis de entendimento a um aluno da faixa etária do sexto ano.

Nas atividades iniciais da Oficina de Geometria, percebemos uma grande confusão conceitual. Os alunos aprendem "nomes" desassociados das características que motivam sua adoção. Esse fato não pode ser considerado isolado, já que, durante toda a pesquisa, a Atividade 4.1.1 "Dicionário Matemático" gerou discussão acerca do significado dos nomes dos entes geométricos. Perguntas como "o que é um ângulo?" ou "o que é um quadrado?" não obtiveram, inicialmente, nenhuma resposta válida. Após a aplicação da atividade proposta na Oficina de Geometria conseguimos constatar a evolução conceitual dos alunos.

Ainda na questão conceitual, quando buscamos no livro didático do sexto ano alguma explicação para o termo "quadrado" encontramos uma nota dizendo que este quadrilátero já era conhecido dos alunos, e dessa forma sua definição não foi apresentada. Pela forma de não-apresentação de outras definições, como já discutido na seção 2.3.1 Livro Didático, acreditamos que coube ao professor das series iniciais do ensino fundamental a apresentação do quadrado aos alunos.

Nos preocupa, e somos conscientes que não resolvemos esta questão, quando um aluno do sexto ano do Ensino Fundamental não sabe explicar o que é um quadrado, sendo esta uma figura trabalhada desde a pré-escola. Talvez, por estar presente desde a infância, a representação visual do quadrado tenha sido incorporada, e desse fato justificaríamos porque é mais fácil desenhar um do que explicar o que ele é.

A definição por nós utilizada diz que quadrado é um retângulo e losango ao mesmo tempo. Essa definição propicia o desenvolvimento da Atividade 4.1.2 *Figuras de Quatro Lados* na forma como foi apresentada nesta pesquisa. No entanto, um quadrado, para todos os alunos presentes na oficina, é uma figura de quatro lados iguais. Não pode ser considerado acaso que a compreensão prévia do conceito de quadrado seja compatível com a definição de losango. Por isso acreditamos que em algum momento entre o início da escolarização do aluno e o sexto ano do Ensino Fundamental alguém cometeu um equívoco teórico, confundindo os significados de quadrado e losango.

Esperávamos, após a conclusão da atividade, a compreensão total da definição de quadrado, no entanto percebemos que a mesma permanece muito presa a "definição" que quadrado tem lados iguais. Analisando a atividade *a posteriori*, consideramos que a escolha de outro caminho poderia ter levado a resultados diferentes. Um desses caminhos poderia ser a adoção de outra definição de quadrado. Por exemplo, quadrado poderia ser um caso particular de retângulo. Isso levaria a necessidade de desenvolvimento de outra atividade, em substituição aquela por nós apresentada neste trabalho.

A forma como os alunos resolveram e discutiram as atividades da Oficina como um todo nos leva a acreditar que, para estes alunos, os conteúdos de modo geral foram ensinados e aprendidos de forma isolada e sem conexões entre si. Consideramos em diversas passagens, durante as atividades da Oficina de Geometria, uma condição inicial, e a partir dela, consequências ou resultados. A totalidade dos alunos, num primeiro momento, ao ser questionados sobre os resultados finais da atividade, desconsideravam as premissas iniciais. Em outras palavras, as consequências eram consideradas por si só, ignorando as causas que as originaram.

Desde a segunda atividade, enfatizamos a condição suficiente para que algo se concretizasse. Veja o caso do nome "triângulo". A condição suficiente para que uma figura receba esse nome é que possua três lados (inserido no contexto trabalhado de polígonos). Da mesma forma para outras definições, ratificamos a condição suficiente como sendo o fator que nos permite chegar a uma conclusão.

Percebemos a evolução neste quesito ainda na Atividade 4.1.2 *Triângulo Isósceles* quando transcrevemos o pequeno diálogo entre pesquisador e alunas. A preocupação inicial era a obtenção do resultado desejado na atividade, mas logo o foco passa a ser as condições iniciais que permitiriam a obtenção do resultado.

Um segundo momento onde constatamos claramente o estabelecimento do pensamento lógico-dedutivo foi na construção da Atividade 4.1.5 *Área do Triângulo*. O fato do grupo aceitar a área do triângulo como metade da área do paralelogramo é suficiente para nos fazer crer no estabelecimento do pensamento lógico-dedutivo do grupo.

Em contrapartida, tomemos como exemplo a Atividade 4.1.2 “Triângulo Equilátero”. Nenhum aluno, por iniciativa própria, percebeu que tínhamos em mãos as mesmas condições da atividade imediatamente anterior, e que poderíamos repetir o que havíamos feito a cinco minutos atrás, obtendo o resultado desejado.

Os alunos participantes da pesquisa apresentaram-se inicialmente moldados a uma forma de pensamento mecânico. Propomos, em apenas cinco encontros, uma forma de pensar estruturada, que é adequada ao estabelecimento do pensamento lógico-dedutivo. Se cada aluno, em algum momento, rompeu a forma de pensamento mecânica, nos permitimos dizer que a oficina mostrou-se viável.

Iniciamos este trabalho com objetivo de auxiliar o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo nos alunos do sexto ano do ensino fundamental. Podemos considerar que o alcançamos.

REFERÊNCIAS

ARANHA, M. L. de A.; MARTINS, M. H. P. **Filosofando - Introdução à Filosofia**. Mato Grosso do Sul: Moderna, 2009. ISBN 9788516063924.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. ISBN 85-85818-02-6.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: 5ª a 8ª série**. Brasília: MEC, 1998.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica: del saber sabido al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique., 1991.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de Matematica e a Geometria: opiniões sobre a área e seu ensino**. Dissertação (Doutorado) — Centro de Educação e Ciências Humanas, UFSC, São Paulo, 2005. Disponível em: <www.bdtd.ufscar.br>.

FERREIRA, E. B.; SOARES, A. B.; LIMA, J. C. O resgate das demonstrações: uma contribuição da informática à formação do professor de matemática. **Psicologia Escolar e Educacional**, Scielo, v. 12, p. 381 – 389, 12 2008. ISSN 1413-8557. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-85572008000200009&nrm=iso>.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil**. São Paulo: Zetetiké, 1995.

FIORENTINI, D.; LOREZANTO, S. **Investigações em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos**. São Paulo: Autores Associados, 2006.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009.

KALEFF, A. M. Tomando o ensino da geometria em nossas mãos. **A Educação Matemática em Revista**, SBEM, v. 2, p. 19 – 25, 1994. Disponível em: <http://www.sbemrs.org/>.

KATZ, V. J. **A history of mathematics**. Boston: Pearson Education, 2009. ISBN 0-321-38700-7.

LARRAZ, J. D. Breve historia de la lógica. Euclides.org, s.d. Disponível em: <http://www.euclides.org/menu/articles/article101.htm>.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. ISBN 85-7526-151-7.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. ISBN 9788585818937.

NOTARE, M. R. **Um Sistema para aprendizagem de demonstrações dedutivas em geometria euclidiana**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado em Ciência da Computação, UFRGS, 2001. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/2414>.

PAIS, L. C.; FREITAS, J. L. M. de. **Um estudo dos processos de provas no ensino e na aprendizagem da geometria no ensino fundamental**. Mato Grosso do Sul: Bolema, Ano 12, nº13, 1999.

PARANá. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Paraná: Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2008.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria: uma visão histórica**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Educação, UNICAMP, São Paulo, 1989. Disponível em: <www.bibliotecadigital.unicamp.br>.

ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008. 269 p. ISBN 9788585818654.

SANTOS, L. P. dos. **Compreendendo dificuldades de aprendizagem de conceitos geométricos**. Mato Grosso do Sul: UFMS, 2002.

SERRALHEIRO, T. D. Formação de professores: Conhecimentos, discursos e mudanças na pratica de demonstrações. **EMP - Educação Matemática Pesquisa**, PUC, v. 9, 2007. ISSN 1983-3156. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/>.

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES - DICIONÁRIO MATEMÁTICO

Altura: comprimento do segmento que liga o vértice escolhido perpendicularmente ao seu lado oposto.

Ângulo: região entre duas semirretas de mesma origem.

Ângulo reto: ângulo cuja abertura é exatamente 90°

Ângulos Colaterais: ângulos que estão na mesma região do plano, quando uma reta transversal secciona outras duas retas dadas.

Área: quantidade de superfície.

Base relativa: lado oposto a um vértice escolhido.

Hexágono: figura fechada formada por seis segmentos de reta.

Losango: quadrilátero que possui os quatro lados iguais.

Paralelas: duas retas cuja interseção é vazia, ou quando interceptadas por uma transversal seus ângulos colaterais internos somam 180 graus.

Paralelogramo: quadrilátero cujos lados são paralelos dois a dois.

Pentágono: figura fechada formada por cinco segmentos de reta.

Quadrado: quadrilátero que é um losango e retângulo ao mesmo tempo.

Quadrilátero: figura fechada formada por quatro segmentos de reta.

Retângulo: quadrilátero formado por quatro ângulos retos.

Semirreta: um ponto A colocado sobre uma reta a divide em duas semirretas de mesma origem, que iniciam no ponto A e se estendem ao infinito em direções opostas.

Triângulo: figura fechada formada por três segmentos de reta.

Triângulo equilátero: triângulo com três lados de igual comprimento.

Triângulo escaleno: triângulo com três lados de diferentes comprimentos.

Triângulo isósceles: triângulo com dois lados de igual comprimento.

APÊNDICE B – TEOREMAS

Teorema B.0.1. *Em todo triângulo isósceles dois ângulos internos são congruentes*

Demonstração da primeira implicação: Se o triângulo é isósceles então dois ângulos internos são congruentes.

Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. A única informação que temos advém da definição de triângulo isósceles: os lados AB e BC são congruentes. Construiremos M, ponto médio de BC. Os triângulos AMB e AMC são congruentes pelo caso de congruência lado-lado-lado:

$$\begin{cases} AB = AC & \text{hipótese} \\ AM = AM & \text{pois é o mesmo segmento} \\ BM = MC & \text{por construção, pois M é o ponto médio.} \end{cases}$$

Dessa forma, os triângulos são congruentes, e vale a correspondência entre os ângulos:

$$\begin{cases} \mathrm{B\hat{A}M} = \mathrm{C\hat{A}M} \\ \mathrm{A\hat{M}B} = \mathrm{A\hat{M}C} \\ \mathrm{M\hat{B}A} = \mathrm{M\hat{C}A} \end{cases}$$

Assim os ângulos $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{C}}$, como se desejava.

Demonstração da segunda implicação: Se dois ângulos internos são congruentes então o triângulo é isósceles.

Seja ABC um triângulo tal que $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{C}}$. Construiremos a bissetriz de $\hat{\mathrm{A}}$, que intercepta a BC em P. Os triângulos APB e APC são congruentes pelo caso de congruência lado-ângulo-ângulo oposto:

$$\begin{cases} B\hat{A}P = C\hat{A}P & \text{pela construção da bissetriz} \\ AP = AP & \text{pois é o mesmo segmento} \\ \hat{B} = \hat{C} & \text{hipótese} \end{cases}$$

Portanto os triângulos são congruentes e vale a correspondência entre os lados:

$$\begin{cases} AP = AP \\ AB = AC \\ BP = PC \end{cases}$$

Dessa forma, $AB = AC$, como se desejava, concluindo assim a demonstração.

Teorema B.0.2. *Em todo triângulo equilátero os ângulos internos são congruentes entre si.*

Demonstração da primeira implicação: Se o triângulo é equilátero então os ângulos internos são congruentes entre si.

Seja ABC um triângulo equilátero. A única informação que temos advém da definição de triângulo equilátero: os lados AB, BC e AC são congruentes entre si. Sem perda de generalidade, o fato que AB = BC basta para que o triângulo seja isósceles. Sendo isósceles, o Teorema B.0.1 garante que dois dos ângulos internos são congruentes. Sem perda de generalidade, considere BC = AC, pelo teorema temos $\hat{B} = \hat{C}$ (1).

Agora, considere BC = BA, o que o teorema nos dá $\hat{A} = \hat{C}$ (2)

Assim, por (1) e (2), concluímos que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ e o triângulo é equilátero.

Demonstração da segunda implicação: Se um triângulo possui os ângulos internos congruentes então é equilátero.

Seja ABC um triângulo com os ângulos internos congruentes. Usaremos o Teorema B.0.1 duas vezes para deduzir que o triângulo é equilátero. Sem perda de generalidade, o fato que $\hat{B} = \hat{C}$ basta para que o triângulo seja isósceles e AB=AC. Agora usando que $\hat{A} = \hat{C}$, concluímos que o triângulo é isósceles com BA=BC. Destas duas constatações, temos que o os três lados são iguais, logo o triângulo é equilátero.

Teorema B.0.3. *A área do paralelogramo equivale a a área de um retângulo de mesmo lado e altura relativa à este lado.*

Seja ABCD um paralelogramo. Tome r a reta suporte do segmento AD. Traçando a perpendicular de B e C sobre r, obtemos a interseção B' e C', respectivamente. Afirmamos que ABB' é congruente à DCC'. Observe que AB̂B' = DĈC': AB̂C é congruente à AD̂C, ângulos opostos do paralelogramo; traçamos perpendicular à AD por D, obtendo D'. B'B̂D e DD̂'C são retos por construção.

AB̂D = AD̂C

AB̂B' + B'B̂D = AD̂D' + D'D̂C

AB̂B' = D'D̂C

Sendo DD' paralelo à CC' por construção, o segmento CD determina ângulos alternos internos congruentes entre D'D̂C e DĈC'.

$$\begin{cases} AB = DC & \text{lados opostos do paralelogramo} \\ BB' = CC' & \text{perpendiculares à duas retas paralelas} \\ A\hat{B}B' = D'\hat{D}C' & \end{cases}$$

Assim, por lado-lado-ângulo oposto, ABB' e DCC' são congruentes como se queria demonstrar. Portanto a área de ABCD é equivalente á área BB'CC'. Resta observar que o quadrilátero BB'CC' é um paralelogramo retângulo pois B̂, B̂' e Ĉ' são retos por construção, enquanto Ĉ é oposto à D̂, congruente a ele, e sendo D̂' e Ĉ' retos. pela soma dos ângulos internos do quadrilátero BB'CC'= 360°, tirando os retos D̂' e Ĉ', restam 180° entre B e C congruentes, logo os dois são retos, e BB'CC' é retângulo.

Teorema B.0.4. *Seja ABC um triângulo escaleno. Não existe P sobre BC tal que os triângulos APC e APC sejam congruentes.*

Demonstração por absurdo Suponha, por absurdo, que tal ponto P exista. Para satisfazer a congruência, pelo caso de congruência de triângulos lado-lado-lado, a seguinte correspondência deve ocorrer:

•$AP \equiv AP$; pois são o mesmo segmento,

•$AB \equiv PC$; pois $AB = \not\equiv AC$ já que ABC é escaleno,

•$BP \equiv AC$;

Mas se isso ocorre, temos $BC = BP + PC = AC + AB$, contradição com a desigualdade triangular. Esse fato decorreu de termos negado a inexistência de P, logo, a afirmação é verdadeira.

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pro-Reitoria de Graduação e Educação Profissional
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
Câmpus Pato Branco

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O estudante WILIAN RODRIGO GALEAZZI, regularmente matriculado no Mestrado Profissional em Matemática, da UTFPR campus Pato Branco, está executando uma atividade de investigação vinculada ao seu Projeto de Dissertação de Mestrado. O objetivo do referido projeto consiste em verificar o desenvolvimento dos alunos quando submetidos a uma abordagem axiomática da geometria euclidiana.

Sua colaboração na pesquisa será de suma importância para o desenvolvimento da mesma. Por isso, pedimos a sua participação e autorização para a realização de coleta de dados atinentes ao referido projeto através do fornecimento de informações por meio de: observação direta, documentos oficiais, questionário, entrevista, atividades, e capturas audiovisuais.

A participação na pesquisa não envolve risco físico, tampouco constrangimento de qualquer natureza. A identidade dos envolvidos será preservada em todas as fases da investigação e os mesmos terão pleno direito de censura sobre os conteúdos que forneceram individualmente.

Se a qualquer momento desejar informações adicionais sobre as pesquisas ou, se não querendo mais participar, desejar interromper sua participação, pode entrar em contato no horário comercial pelo telefone (46) 3220-2553, professor Marcio Alexandre de Oliveira Reis, orientador desta pesquisa.

____

Prof Dr Marcio Alexandre de Oliveira Reis
Orientador

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, ____________________, na condição de responsável pela aluna __________________________, declaro que fui devidamente esclarecido sobre a pesquisa, concordando em meu filho participar da mesma, fornecendo informações através de observação direta, documentos oficiais, questionário, entrevista, atividades, e capturas audiovisuais.

Francisco Beltrão, 06 de outubro de 2013.

____

Responsável pelo Aluno

Câmpus Pato Branco
Via do Conhecimento, Km 1
CEP 85503-390 - Pato Branco - PR – Brasil
Departamento de Matemática
Telefone: (46) 3220-2553

ANEXO B – TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pro-Reitoria de Graduação e Educação Profissional
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
Câmpus Pato Branco

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM

Eu, ________________, portadora da Cédula de Identidade RG nº ____________________, **AUTORIZO** o uso da imagem, nome e voz da aluna _____________________ em todo e qualquer material entre fotos, vídeos, áudios, documentos e outros meios de comunicação, em favor do pesquisador Wilian Rodrigo Galeazzi, para ser utilizado pelo Projeto de Pesquisa "*Proposta de Ensino de Geometria Euclidiana Plana através de uma abordagem axiomática para o Ensino Fundamental*", cuja coordenação está situada na Via do Conhecimento, Km 01, CEP 85503-390, Pato Branco -PR, inscrita no CNPJ sob o nº 75.101.873/0004-32, sejam essas destinadas à divulgação ao público em geral e/ou apenas para uso interno desta instituição, desde que não haja desvirtuamento da sua finalidade.

A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem, nome e voz, acima mencionada em todo território nacional e no exterior, em todas as suas modalidades e, em destaque, das seguintes formas: (I) folhetos em geral (encartes, mala direta, catálogo, etc.); (II) folder de apresentação; (III) anúncios em revistas e jornais em geral; (IV) home page; (V) cartazes; (VI) mídia eletrônica (painéis, vídeo-tapes, televisão, cinema, programa para rádio, entre outros).

Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à imagem ou a qualquer outro, e assino a presente autorização.

Francisco Beltrão, 06 de outubro de 2014.

____

Responsável Legal

Câmpus Pato Branco
Via do Conhecimento, Km 1
CEP 85503-390 - Pato Branco - PR – Brasil
Departamento de Matemática
Telefone: (46) 3220-2553