

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE MATERIAIS**

**TAINAN GABARDO MIRANDA DOS SANTOS**

**ANÁLISE E MODELAGEM DO ESCOAMENTO TRANSITÓRIO DE  
FLUIDOS DE PERFURAÇÃO**

**DISSERTAÇÃO**

**CURITIBA  
2015**

**TAINAN GABARDO MIRANDA DOS SANTOS**

**ANÁLISE E MODELAGEM DO ESCOAMENTO TRANSITÓRIO DE  
FLUIDOS DE PERFURAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de Concentração: Ciências Térmicas.

Orientador: Prof. Cezar O. R. Negrão, Ph.D.

Co-Orientador: Me. Eng. Gabriel M. de Oliveira

**CURITIBA**

**2015**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

---

S237ana Santos, Tainan Gabardo Miranda dos  
2015 Análise e modelagem do escoamento transitório de fluidos de perfuração / Tainan Gabardo Miranda dos Santos.-- 2015. 169 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Curitiba, 2015.  
Bibliografia: f. 151-155.

1. Poços de petróleo - Fluidos de perfuração. 2. Modelos matemáticos. 3. Escoamento - Análise. 4. Pressão - Transmissão. 5. Transitórios (Dinâmica). 6. Tixotropia. 7. Métodos de simulação. 8. Engenharia mecânica - Dissertações. I. Negrão, Cezar Otaviano Ribeiro, orient. II. Oliveira, Gabriel Merhy de, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. IV. Título.

CDD: Ed. 22 -- 620.1

---

**Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba**

# TERMO DE APROVAÇÃO

TAINAN GABARDO MIRANDA DOS SANTOS

## ANÁLISE E MODELAGEM DO ESCOAMENTO TRANSITÓRIO DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, área de concentração em Engenharia de Ciências Térmicas e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais.

---

Prof. Paulo C. Borges, Dr.  
Coordenador do Programa

### Banca Examinadora

---

Prof. Cezar O. R. Negrão, Ph.D.  
PPGEM/UTFPR

---

Prof. Roney L. Thompson, Dr.  
PGMEC/UFF

---

Prof. Admilson T. Franco, Dr.  
PPGEM/UTFPR

---

Prof. Eduardo M. Germer, Dr.  
UTFPR

Curitiba, 25 de novembro de 2015

A todos aqueles que contribuíram  
para a realização deste trabalho,  
especialmente aos meus pais.

# Agradecimentos

Primeiramente, aos meus pais, Nilice e Miranda, por todo apoio, dedicação, carinho, incentivo e condições que me deram desde que eu era pequeno até o presente momento.

A minha família, que sempre foi meu porto seguro, lugar de conforto e carinho. Além do grande suporte, ela me proporcionou diversos momentos de descontração e diversão.

Aos meus amigos, pessoas incríveis, pelos momentos de diversão, pelas risadas, pela amizade, por serem a minha segunda família, ajudando-me nas horas de dificuldade e celebrando nos momentos de alegria.

Ao professor Negrão, por estar disposto a esclarecer dúvidas, por toda a orientação, pelo suporte contínuo, por me fazer ver a realidade e por acreditar no meu trabalho.

Ao meu co-orientador, Gabriel, pela infinita paciência, pelo suporte, pelas explicações, pelos incentivos e por estar presente sempre que solicitado.

Aos professores da banca, Roney, Admilson e Eduardo, pelas contribuições dedicadas a esta dissertação.

Aos professores e servidores da Universidade Tecnológica Federal do Paraná e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais - PPGEM, por todos os ensinamentos e lições aprendidas.

Ao Centro de Pesquisas em Reologia e Fluidos Não Newtonianos - CERNN, pela estrutura fornecida para que este trabalho fosse desenvolvido.

A Petrobras e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo suporte técnico e financeiro para o desenvolvimento do tema.

A Deus, por toda a força e por mais uma conquista.

"O cientista não é o homem que  
fornece as verdadeiras respostas;  
é quem faz as verdadeiras  
perguntas."

Claude Lévi-Strauss

# Resumo

SANTOS, Tainan Gabardo Miranda dos. Análise e Modelagem do Escoamento Transitório de Fluidos de Perfuração. 2015. 169 f. Dissertação - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Fluidos de perfuração apresentam comportamento tixotrópico e normalmente gelificam quando em repouso. A gelificação é fundamental para evitar que cascalhos provenientes da perfuração do poço se depositem sobre a broca em eventuais paradas no processo. Nessas condições são necessárias altas pressões para reiniciar o escoamento do fluido e, conseqüentemente, a perfuração. Por outro lado, pressões muito elevadas podem danificar as formações rochosas no fundo do poço. Dessa forma, um maior conhecimento sobre tixotropia e sobre o escoamento de materiais tixotrópicos se torna inevitável para melhor controle do processo. O mecanismo que controla o fenômeno de tixotropia ainda não é bem definido e a modelagem matemática representa um desafio. O objetivo do trabalho proposto é desenvolver um modelo matemático para o estudo da transmissão de pressão em fluidos de perfuração. A presente dissertação apresenta uma revisão de trabalhos encontrados na literatura aberta que abordam e modelam o fenômeno de tixotropia e o escoamento transitório de fluidos compressíveis. O problema é formulado como o escoamento entre o interior da coluna de perfuração e o espaço anular entre a parede externa da coluna de perfuração e a parede do poço. As equações que modelam o problema (conservação da massa, constitutiva do modelo tixotrópico, de estado e da quantidade de movimento) são discretizadas e resolvidas numericamente através de um algoritmo computacional em linguagem Fortran. O modelo é validado com resultados experimentais e numéricos obtidos da literatura. Comparações entre os dados de um fluido de perfuração utilizado em campo pela Petrobras medidos experimentalmente e calculados por três modelos viscoplásticos e um pseudoplástico são realizadas. Os fluidos viscoplásticos, devido à tensão limite de escoamento, não transmitem a pressão à saída do espaço anular. Análises de sensibilidade são realizadas mostrando o efeito da tixotropia do fluido na transmissão de pressão.

**Palavras-chave:** fluidos de perfuração, escoamento compressível, transitório, transmissão de pressão.



# Abstract

SANTOS, Tainan Gabardo Miranda dos. Analysis and Modeling of the Transient Flow of Drilling Fluids. 2015. 169 f. Dissertação - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Drilling fluids present a thixotropic behavior and they usually gel when at rest. The sol-gel transition is fundamental to prevent the deposit of rock fragments, generated by drilling the well, over the drill bit during eventual stops. Under those conditions, high pressures are then required in order to break-up the gel when circulation is resumed. Moreover, very high pressures can damage the rock formation at the bottom of the well. Thus, a better understanding of thixotropy and the behavior of thixotropic materials becomes increasingly important for process control. The mechanisms that control thixotropy are not yet well defined and modeling is still a challenge. The objective of this work is to develop a mathematical model to study the pressure transmission in drilling fluids. This work presents a review of thixotropy and of different mathematical models found in the literature that are used to predict such characteristic. It also shows a review of transient flows of compressible fluids. The problem is modeled as the flow between the drillpipe and the annular region (space between the wall and the external part of the drillpipe). The equations that describe the problem (mass conservation, momentum balance, constitutive and state) are then discretized and numerically solved by using a computational algorithm in Fortran. The model is validated with experimental and numerical data obtained from the literature. Comparisons between experimental data obtained from Petrobras and calculated by three viscoplastic and one pseudoplastic models are conducted. The viscoplastic fluids, due to the yield stress, do not fully transmit the pressure to the outlet of the annular space. Sensibility analyses are then conducted in order to evaluate the thixotropic effect in pressure transmission.

**Key-words:** drilling fluids, compressible flow, transient simulation, pressure transmission.

# Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Extração de petróleo da camada pré-sal. (Fonte: Petrobras (2007)) . . . . .	26
Figura 1.2 – Esquema de planta de perfuração de poços de petróleo. (Adaptado de: Schlumberger (2013)) . . . . .	27
Figura 2.1 – Resultados do teste de taxa de cisalhamento controlada para os modelos de: Houska (1981), Dullaert e Mewis (2006) e Mendes e Thompson (2013). (Fonte: Gabardo (2013)) . . . . .	35
Figura 3.1 – Geometria do problema: (a) vista em corte e (b) vista superior. . . . .	46
Figura 3.2 – Função Heaviside. . . . .	58
Figura 4.1 – Malha bidimensional utilizada na discretização das equações. . . . .	62
Figura 4.2 – Malha unidimensional axial utilizada na discretização das equações da conservação da massa e de estado. . . . .	62
Figura 4.3 – Malha unidimensional radial utilizada na discretização das equações. . . . .	64
Figura 4.4 – Detalhe da entrada com o meio volume na malha unidimensional axial utilizada na discretização das equações. . . . .	68
Figura 4.5 – Detalhe da saída com o meio volume na malha unidimensional axial utilizada na discretização das equações. . . . .	69
Figura 4.6 – Fluxograma do algoritmo computacional para o Modelo 1 (discretização pelo método dos volumes finitos). . . . .	75
Figura 4.7 – Sistema de malha para solução numérica com o Método das Características. . . . .	77
Figura 4.8 – Fluxograma do algoritmo computacional para o Modelo 2 (discretização pelo método das características). . . . .	86
Figura 5.1 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão ao longo da posição $z^* = 0,9$ (90% do espaço anular) para o Modelo 1. . . . .	91
Figura 5.2 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão ao longo da posição $z^* = -0,5$ (50% do comprimento do tubo) para o Modelo 1. . . . .	92
Figura 5.3 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão ao longo da posição $z^* = 0,9$ (90% do comprimento do espaço anular) para o Modelo 2. . . . .	93
Figura 5.4 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão ao longo da posição $z^* = 0,9$ (90% do comprimento do espaço anular) para o Modelo 2. . . . .	94
Figura 5.5 – Análise do resíduo máximo na evolução temporal da pressão ao longo da posição $z^* = 0$ (acoplamento) para o Modelo 1. . . . .	96
Figura 5.6 – Análise do efeito do $CFL$ na evolução temporal da pressão ao longo da posição $z^* = -1$ (entrada do tubo) para o Modelo 1. . . . .	97
Figura 5.7 – Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada do tubo para $\phi = 0,01$ . . . . .	99

Figura 5.8 – Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada do tubo para $\phi = 0,1$ . . . . .	99
Figura 5.9 – Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada do tubo para $\phi = 0,01$ . . . . .	100
Figura 5.10–Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada e no meio do tubo para $\phi = 1$ . . . . .	101
Figura 5.11–Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada e no meio do tubo para $\phi = 5$ . . . . .	101
Figura 5.12–Evolução temporal do perfil de tensões de cisalhamento ao longo do raio no meio do tubo para $\phi = 0,01$ . . . . .	102
Figura 5.13–Evolução temporal do perfil de tensões de cisalhamento ao longo do raio no meio do tubo para $\phi = 5$ . . . . .	103
Figura 5.14–Diagrama esquemático do experimento de golpe de aríete. Adaptado de: Holmboe e Rouleau (1967). . . . .	103
Figura 5.15–Evolução temporal dos valores medidos por Holmboe e Rouleau (1967) para água e calculados pelo modelo para a pressão na posição da válvula (Transdutor A). . . . .	105
Figura 5.16–Evolução temporal dos valores medidos por Holmboe e Rouleau (1967) para óleo e calculados pelo modelo para a altura adimensional na posição da válvula (Transdutor A). . . . .	106
Figura 5.17–Comparação dos resultados com a solução numérica de Wahba (2013) durante a evolução temporal da altura adimensional na posição da válvula para um fluido lei de potência com índice: (a) $n = 0,6$ , (b) $n = 0,8$ , (c) $n = 1,2$ e (d) $n = 1,4$ . . . . .	108
Figura 5.18–Diagrama esquemático da sonda experimental de Taquipe. Adaptado de: Oliveira et al. (2013) . . . . .	109
Figura 5.19–Evolução temporal da pressão medida e calculada para os ensaios de Taquipe na posição S1 para a vazão volumétrica de $1,122 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ . . . . .	111
Figura 5.20–Evolução temporal da pressão medida e calculada para os ensaios de Taquipe na posição S2 para a vazão volumétrica de $1,122 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ . . . . .	112
Figura 5.21–Evolução temporal da pressão medida e calculada para os ensaios de Taquipe na posição S3 para a vazão volumétrica de $1,122 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ . . . . .	112
Figura 5.22–Comparação da evolução temporal da pressão na posição $z^* = 0,9$ (90% do anular) para Modelo 2 (MOC com $200 \times 80$ células axiais e radiais) e Modelo 1 (MVF com $1.000 \times 40$ e $4.000 \times 40$ células axiais e radiais). . . . .	114
Figura 6.1 – Curva de tensão em função da taxa de deformação obtidas para um fluido de perfuração com viscosímetro Fann 35 no NUEX-Taquipe. . . . .	118

Figura 6.2 – Comparação de valores medidos e calculados e viscosidade em função da taxa de deformação para o fluido de perfuração utilizado no NUEX-Taquipe. . . . .	119
Figura 6.3 – Evolução temporal da pressão medida experimentalmente do fluido de perfuração nas posições S1, S2 e S3 para a vazão volumétrica de 0,952 l/s.	121
Figura 6.4 – Evolução temporal dos valores de pressão do fluido de perfuração medidos e calculados na posição S1 para a vazão volumétrica de 0,952 l/s. . . . .	123
Figura 6.5 – Evolução temporal dos valores de pressão do fluido de perfuração medidos e calculados na posição S2 para a vazão volumétrica de 0,952 l/s. . . . .	123
Figura 6.6 – Evolução temporal dos valores de pressão do fluido de perfuração medidos e calculados na posição S3 para a vazão volumétrica de 0,952 l/s. . . . .	124
Figura 6.7 – Evolução temporal da pressão na entrada do tubo ( $z^* = -1$ ) para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	129
Figura 6.8 – Evolução temporal da velocidade axial local na posição $z^* = -0,5$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	131
Figura 6.9 – Comparação da evolução temporal da pressão nas posições $z^* = -1, 0$ e $1$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	131
Figura 6.10 – Distribuição de pressão axial para tempos logo após a bomba ser ligada, $t^* = 0,1; 0,5; 1; e 2$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	132
Figura 6.11 – Distribuição de pressão axial para tempos logo após a bomba ser desligada, $t_{set}^* = +0,1; +0,5; +1; e +2$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	133
Figura 6.12 – Distribuição de pressão axial no último instante de tempo simulado ( $t^* = 84$ ) para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	133
Figura 6.13 – Evolução temporal do parâmetro estrutural nas posições $z^* = -1; -0,9; -0,5; -0,1; e 0$ na parede tubo para o fluido EVPT (com tixotropia). . . . .	135
Figura 6.14 – Evolução temporal do parâmetro estrutural nas posições $z^* = 0; 0,1; 0,5; 0,9; e 1$ na parede interna do espaço anular para o fluido EVPT (com tixotropia). . . . .	136
Figura 6.15 – Evolução temporal do parâmetro estrutural nas posições $z^* = 0; 0,1; 0,5; 0,9; e 1$ na parede externa do espaço anular para o fluido EVPT (com tixotropia). . . . .	136
Figura 6.16 – Evolução temporal dos perfis radiais de velocidade axial local na posição $z^* = -0,5$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	137

Figura 6.17–Evolução temporal dos perfis radiais de velocidade axial local na posição $z^* = 0,1$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	138
Figura 6.18–Evolução temporal dos perfis radiais de tensão de cisalhamento na posição $z^* = -0,9$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	139
Figura 6.19–Evolução temporal dos perfis radiais de tensão de cisalhamento na posição $z^* = 0,5$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). . . . .	139
Figura 6.20–Evolução temporal dos perfis radiais do parâmetro estrutural na posição $z^* = -0,5$ para o fluido EVPT (com tixotropia). . . . .	140
Figura 6.21–Evolução temporal dos perfis radiais do parâmetro estrutural na posição $z^* = -0,5$ para o fluido EVPT (com tixotropia). . . . .	141
Figura 6.22–Evolução temporal da pressão nas posições $z^* = -1, 0$ e $1$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de $t_{eq}^*$ . . . . .	142
Figura 6.23–Evolução temporal do parâmetro estrutural na parede tubo nas posições $z^* = -1$ e $0$ para o fluido EVPT (com tixotropia) para diferentes valores $t_{eq}^*$ . . . . .	143
Figura 6.24–Evolução temporal dos perfis radiais de tensão de cisalhamento na posição $z^* = -0,9$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes tempos característicos adimensionais. . . . .	144
Figura 6.25–Evolução temporal da pressão nas posições $z^* = -1$ e $1$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de $G_0^*$ . . . . .	145
Figura 6.26–Evolução temporal do parâmetro estrutural na parede tubo na posição $z^* = -0,5$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de $G_0^*$ . . . . .	146
Figura 6.27–Evolução temporal da pressão nas posições $z^* = -1, 0$ e $1$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de $\lambda_{t=0}$ . . . . .	147
Figura 6.28–Evolução temporal do parâmetro estrutural da parede na entrada e saída do tubo para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de $\lambda_{t=0}$ . . . . .	147
Figura 6.29–Evolução temporal dos perfis radiais de tensão na posição $z^* = -0,9$ para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes parâmetros estruturais iniciais. . . . .	148
Figura C.1 –Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	164
Figura C.2–Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	165
Figura C.3–Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	166
Figura C.4–Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	166

Figura C.5–Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	167
Figura C.6–Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	167
Figura C.7–Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	168
Figura C.8–Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	169
Figura C.9–Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	169
Figura C.10–Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência. . . . .	170

# Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Características dos principais modelos matemáticos de tixotropia. . . . .	32
Tabela 2.2 – Características dos principais modelos matemáticos dos escoamentos revisados . . . . .	40
Tabela 2.3 – Características dos principais modelos matemáticos dos escoamentos revisados (CERNN) . . . . .	43
Tabela 3.1 – Resumo das principais equações do problema para o primeiro modelo. .	60
Tabela 3.2 – Resumo das principais equações do problema para o segundo modelo.	60
Tabela 5.1 – Parâmetros utilizados para Análise de Sensibilidade de Malha, Análise do Critério de Convergência e Análise do Critério de Estabilidade. . . . .	90
Tabela 5.2 – Efeito do refino da malha axial na pressão máxima na posição $z^* = 0,9$ (90% do comprimento do espaço anular) e no tempo computacional para o Modelo 1. . . . .	91
Tabela 5.3 – Efeito do refino da malha radial no tempo computacional para o Modelo 1.	92
Tabela 5.4 – Efeito do refino da malha axial no tempo computacional para o Modelo 2.	94
Tabela 5.5 – Efeito do refino da malha radial no tempo computacional para o Modelo 2.	95
Tabela 5.6 – Efeito do resíduo máximo no tempo computacional para o Modelo 1. . . . .	95
Tabela 5.7 – Efeito do $CFL$ no tempo computacional para o Modelo 1. . . . .	97
Tabela 5.8 – Parâmetros utilizados para comparação com a solução analítica. . . . .	98
Tabela 5.9 – Propriedades da água e do óleo para o experimento de golpe de aríete de Holmboe e Rouleau (1967). . . . .	104
Tabela 5.10 – Parâmetros do escoamento da água e do óleo para o experimento de golpe de aríete de Holmboe e Rouleau (1967). . . . .	104
Tabela 5.11 – Propriedades do escoamento de fluidos lei de potência no experimento de golpe de aríete de Wahba (2013). . . . .	107
Tabela 5.12 – Propriedades da água para o experimento de Taquipe conforme Oliveira et al. (2013). . . . .	110
Tabela 5.13 – Geometria do experimento de Taquipe conforme Oliveira et al. (2013). .	111
Tabela 5.14 – Comparação do tempo computacional para o método dos volumes finitos e método das características . . . . .	114
Tabela 6.1 – Valores de tensão em função da taxa de deformação obtidas para um fluido de perfuração com viscosímetro Fann 35 no NUEX-Taquipe. . . . .	118
Tabela 6.2 – Parâmetros ajustados para os modelos Lei de Potência, Bingham e Herschel-Bulkley. . . . .	118
Tabela 6.3 – Parâmetros ajustados para o modelo VP. . . . .	120
Tabela 6.4 – Comparação entre viscosidade experimental e calculada através do tipo de fluido para parâmetros ajustados. . . . .	120

Tabela 6.5 – Comparação entre pressão inicial na entrada teórica e simulada para cada tipo de fluido ajustado. . . . .	124
Tabela 6.6 – Parâmetros adimensionais da geometria utilizada no estudo de caso e análise de sensibilidade. . . . .	127
Tabela 6.7 – Propriedades adimensionais utilizadas no estudo de caso e análise de sensibilidade. . . . .	127
Tabela 6.8 – Parâmetros adimensionais do escoamento utilizados no estudo de caso e análise de sensibilidade. . . . .	128
Tabela 6.9 – Comparação entre o valor inicial teórico e simulado da pressão na entrada da coluna para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). .	128



# Lista de siglas

Bi	Bingham
CERNN	Centro de Pesquisas em Reologia e Fluidos Não Newtonianos
CFL	<i>Courant–Friedrichs–Lewy Condition</i>
EVPT	Modelo de Mendes e Thompson (2013) com tixotropia e elasticidade (original)
Exp	Experimental
HB	Herschel-Bulkley
LP	Lei de Potência
MOC	<i>Method of Characteristics</i> – Métodos das características
MVF	<i>Finite Volume Method</i> – Método dos Volumes Finitos
NUEX	Núcleo Experimental
Num	Numérico
OLI2013	Oliveira et al. (2013)
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
VP	Modelo de Mendes e Thompson (2013) sem tixotropia

# Lista de símbolos

$a_i, b_i, c_i$	Coeficientes da Equação (4.5)	[-]
$\mathbf{a}_v$	Matriz das constantes para velocidade radial e pressão do MOC	
$A$	Área da seção transversal	[m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{A}$	Matriz dos coeficientes de pressão e velocidade radial do MOC	
$A_{I,j}, B_{I,j}, C_{I,j}, D_{I,j}, E_{I,j}, F_{I,j}$	Coeficientes da Equação (4.29)	[-]
$\mathbf{b}_u$	Matriz das constantes para velocidade axial do MOC	
$\mathbf{B}$	Matriz dos coeficientes de velocidade axial do MOC	
$c$	Velocidade de propagação da onda de pressão	[m/s]
$C_{q1}, C_{q1}$	Coeficientes da velocidade radial do MOC	[-]
$C_{u1}, C_{u2}, C_{u3}$	Coeficientes da velocidade axial do MOC	[-]
$C_{u2,int}, C_{u3,int}, C_{u1,ext}, C_{u2,ext}$	Coeficientes de contorno da velocidade axial do MOC	[-]
$D$	Diâmetro	[m]
$\mathbf{e}_{Pu}$	Matriz das constantes para condição de entrada de pressão do MOC	
$\mathbf{e}_{Vv}$	Matriz das constantes para condição de entrada de velocidade do MOC	
$\mathbf{E}_{Pu}$	Matriz dos coeficientes para condição de entrada de pressão do MOC	
$\mathbf{E}_{Vv}$	Matriz dos coeficientes para condição de entrada de velocidade do MOC	
$f$	Função de evolução temporal do parâmetro estrutural	[-]
$F$	Função da equação constitutiva	[-]
$g$	Aceleração da gravidade	[m/s <sup>2</sup> ]
$G_{I,j}, H_{I,j}, L_{I,j}, M_{I,j}$	Coeficientes da Equação (4.11)	[-]
$G$	Módulo de elasticidade	[Pa]
$h$	Função Heaviside	[-]
$H$	Razão diametral	[-]
$k$	Índice de consistência	[Pa.s <sup>n</sup> ]
$L$	Comprimento	[m]

$M$	Constante da solução analítica	[-]
$Ma$	Número de Mach	[-]
$n$	Índice de lei de potência	[-]
$N$	Constante da solução analítica	[-]
$N_R$	Número de volumes de controle finitos na direção radial	[-]
$N_Z$	Número de volumes de controle finitos na direção axial	[-]
$p$	Constante do modelo de Papanastasiou (1987)	[Pa]
$P$	Pressão	[Pa]
$q$	Variável que relaciona velocidade radial e raio	[m <sup>2</sup> /s]
$Q$	Vazão volumétrica	[m <sup>3</sup> /s]
$r$	Coordenada radial	[m]
$R$	Raio	[m]
$RA$	Razão de áreas	[m]
$Re$	Número de Reynolds	[-]
$Res$	Resíduo	[-]
$\mathbf{S}_{Pu}$	Matriz das constantes para condição de saída de pressão do MOC	
$\mathbf{S}_{Vv}$	Matriz das constantes para condição de saída de velocidade do MOC	
$\mathbf{S}_{Pu}$	Matriz dos coeficientes para condição de saída de pressão do MOC	
$\mathbf{S}_{Vv}$	Matriz dos coeficientes para condição de saída de velocidade do MOC	
$t$	Tempo	[s]
$T$	Temperatura	[K]
$u$	Componente axial da velocidade	[m/s]
$\mathbf{u}$	Vetor das incógnitas de velocidade axial	
$\mathbf{u}_E$	Vetor das incógnitas de velocidade axial para entrada	
$\mathbf{u}_S$	Vetor das incógnitas de velocidade axial para saída	
$v$	Componente radial da velocidade	[m/s]
$\mathbf{v}$	Vetor das incógnitas de velocidade radial e pressão	
$\mathbf{v}_E$	Vetor das incógnitas de velocidade radial e pressão para entrada	
$\mathbf{v}_S$	Vetor das incógnitas de velocidade radial e pressão para saída	
$V$	Velocidade média na direção axial	[m/s]
$w$	Componente angular da velocidade	[m/s]
$z$	Coordenada axial	[m]

## Letras Gregas

$\alpha$	Compressibilidade do fluido	[Pa <sup>-1</sup> ]
$\beta$	Propriedade qualquer	[-]
$\delta$	Razão de aspecto	[-]
$\Delta$	Diferença entre valor experimental e medido	[-]
$\Delta r$	Incremento de espaço na direção radial	[m]
$\Delta t$	Incremento de tempo	[s]
$\Delta z$	Incremento de espaço na direção axial	[m]
$\epsilon$	Espaçamento anular	[-]
$\phi$	Parâmetro dissipativo	[-]
$\Phi$	Razão de comprimentos	[-]
$\gamma$	Deformação	[-]
$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento	[s <sup>-1</sup> ]
$\ddot{\gamma}$	Taxa de variação temporal da taxa de cisalhamento	[s <sup>-2</sup> ]
$\eta$	Viscosidade dinâmica/absoluta	[kg/ms]
$\lambda$	Parâmetro estrutural	[-]
$\lambda_0$	Parâmetro estrutural completamente estruturado	[-]
$\mu$	Viscosidade dinâmica	[Pa.s]
$\mu_P$	Viscosidade plástica do modelo de Bingham	[Pa.s]
$\omega_t$	Coeficiente da solução analítica	[-]
$\Omega_t$	Coeficiente da solução analítica	[-]
$\theta$	Coordenada angular	[-]
$\rho$	Massa específica	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau$	Vetor tensão de cisalhamento	[Pa]
$\dot{\tau}$	Vetor taxa de variação da tensão cisalhamento	[Pa/s]
$\tau$	Tensão de cisalhamento	[Pa]
$\tau_0$	Tensão limite de escoamento	[Pa]
$\tau_{rz}$	Tensão de cisalhamento perpendicular à direção radial exercida axialmente	[Pa]
$\tau_{\theta z}$	Tensão de cisalhamento perpendicular à direção angular exercida axialmente	[Pa]
$\xi$	Multiplicador para combinação linear das equações da conservação no MOC	[m <sup>2</sup> .s/kg]
$\tau_{zz}$	Tensão normal na direção axial	[Pa]

## Subscritos

0	Referente à referência
1	Referente ao tubo
2	Referente à seção anular
2, <i>e</i>	Referente à parede externa do anular
2, <i>i</i>	Referente à parede interna do anular
<i>B</i>	Bomba
<i>calc</i>	Calculado
<i>d</i>	Referente ao termo de destruição da equação de evolução do parâmetro estrutural
<i>e</i>	Elástico
<i>ent</i>	Entrada
<i>exp</i>	Experimental
<i>eq</i>	Equilíbrio
<i>f</i>	Referente ao termo de recuperação da equação de evolução do parâmetro estrutural
<i>i</i>	Posição axial do volume de controle
<i>I</i>	Posição axial das fronteiras do volume de controle
<i>j</i>	Posição radial do volume de controle
<i>J</i>	Posição radial das fronteiras do volume de controle
<i>max</i>	Máximo
<i>r</i>	Referente ao estado de referência
<i>R</i>	Referente à direção radial
<i>s</i>	Estrutural
<i>sai</i>	Saída
<i>set</i>	Referente ao instante em que ocorre a mudança de condição de contorno
<i>T</i>	Total
<i>v</i>	Viscoso
<i>Z</i>	Referente à direção axial

## Sobrescritos

*	Propriedade adimensional
+	Referente à linha característica $C^+$
-	Referente à linha característica $C^-$

$k$	Instante de tempo atual
$k + 1$	Instante de tempo futuro

### **Simbolos especificos do Modelo de Mendes e Thompson (2013)**

$a, b, m$	Expoentes arbitrários	[-]
$G_0$	Módulo de elasticidade inicial	[Pa]
$G_s$	Módulo de elasticidade estrutural	[Pa]
$\dot{\gamma}_{yd}$	Taxa de cisalhamento da transição entre $\tau_y$ e $\tau_{yd}$	[s <sup>-1</sup> ]
$\eta_0$	Viscosidade do material completamente estruturado	[kg/ms]
$\eta_\infty$	Viscosidade correspondente ao estado completamente desestruturado	[kg/ms]
$\eta_s$	Viscosidade estrutural	[kg/ms]
$\eta_v$	Viscosidade	[kg/ms]
$K$	Índice de consistência	[Pa.s <sup>n</sup> ]
$\lambda (t = 0)$	Parâmetro estrutural inicial	[-]
$n$	Índice de lei de potência	[-]
$\theta_1$	Módulo de relaxação	[s]
$\theta_2$	Módulo de retardo	[s]
$\tau_y$	Tensão limite de escoamento estática	[Pa]
$\tau_{yd}$	Tensão limite de escoamento dinâmica	[Pa]
$t_{eq}$	Tempo característico	[s]

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>26</b>
1.1	Processo de Perfuração	26
1.2	Fluido de Perfuração	27
1.3	Problema	28
1.4	Objetivos	29
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>30</b>
2.1	Tixotropia	30
2.2	Modelagem de Escoamentos Transitórios em Tubulações	35
2.3	Síntese do Capítulo 2	38
<b>3</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>46</b>
3.1	Formulação do Problema	46
3.2	Equação de Estado	47
3.3	Equações da Conservação	48
3.3.1	Modelo 1	49
3.3.2	Modelo 2	50
3.4	Equações Constitutivas	51
3.4.1	Newtoniano	52
3.4.2	Lei de Potência	52
3.4.3	Bingham	53
3.4.4	Herschel-Bulkley	53
3.4.5	Tixotrópico - Mendes e Thompson (2013)	54
3.5	Condições Iniciais	55
3.6	Condições de Contorno	57
3.7	Síntese do Capítulo 3	59
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA DE SOLUÇÃO</b>	<b>61</b>
4.1	Solução do Modelo 1	61
4.1.1	Discretização das Equações	61
4.1.1.1	Equação da Conservação da Massa	62
4.1.1.2	Equação de Estado	63
4.1.1.3	Equação Constitutiva	63
4.1.1.4	Equação da Quantidade de Movimento	66
4.1.2	Condições de Contorno	68
4.1.3	Fluxograma	72

<b>4.2</b>	<b>Solução do Modelo 2</b> . . . . .	<b>74</b>
4.2.1	Discretização das Equações . . . . .	77
4.2.2	Condições de Contorno . . . . .	81
4.2.3	Fluxograma . . . . .	84
<b>4.3</b>	<b>Síntese do Capítulo 4</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>5</b>	<b>VALIDAÇÃO E VERIFICAÇÃO DOS MODELOS</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>5.1</b>	<b>Modelo Adimensionalizado</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>5.2</b>	<b>Análise de Sensibilidade de Malha</b> . . . . .	<b>89</b>
5.2.1	Modelo 1 – Método dos Volumes Finitos . . . . .	90
5.2.1.1	Malha Axial . . . . .	90
5.2.1.2	Malha Radial . . . . .	91
5.2.2	Modelo 2 – Método das Características . . . . .	93
5.2.2.1	Malha Axial . . . . .	93
5.2.2.2	Malha Radial . . . . .	94
<b>5.3</b>	<b>Análise do Critério de Convergência</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>5.4</b>	<b>Análise do Critério de Estabilidade</b> . . . . .	<b>96</b>
<b>5.5</b>	<b>Comparação com a Solução Analítica</b> . . . . .	<b>97</b>
<b>5.6</b>	<b>Comparação com Resultados Experimentais - Holmboe e Rouleau (1967)</b> . . . . .	<b>102</b>
5.6.1	Procedimentos dos Testes . . . . .	102
5.6.2	Resultados Experimentais . . . . .	104
<b>5.7</b>	<b>Comparação com Resultados Numéricos de Wahba (2013)</b> . . . . .	<b>106</b>
<b>5.8</b>	<b>Comparação com Resultados Experimentais de Taquipe</b> . . . . .	<b>107</b>
5.8.1	Procedimentos dos Testes . . . . .	107
5.8.2	Resultados Experimentais . . . . .	110
<b>5.9</b>	<b>Comparação dos Modelos Matemáticos</b> . . . . .	<b>113</b>
<b>5.10</b>	<b>Síntese do Capítulo 5</b> . . . . .	<b>115</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .	<b>117</b>
<b>6.1</b>	<b>Comparação com Resultados de Taquipe</b> . . . . .	<b>117</b>
6.1.1	Calibração dos Fluidos . . . . .	117
6.1.2	Comparação dos Resultados . . . . .	121
<b>6.2</b>	<b>Adimensionalização do Modelo</b> . . . . .	<b>125</b>
<b>6.3</b>	<b>Estudo de Caso</b> . . . . .	<b>127</b>
<b>6.4</b>	<b>Análise de Sensibilidade</b> . . . . .	<b>141</b>
6.4.1	Efeito do Tempo Característico, $t_{eq}^*$ . . . . .	141
6.4.2	Efeito do Módulo de Elasticidade, $G_0^*$ . . . . .	143
6.4.3	Efeito do Parâmetro Estrutural Inicial, $\lambda_{t=0}$ . . . . .	145



<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>149</b>
<b>7.1</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros . . . . .</b>	<b>151</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>152</b>
	<b>APÊNDICE A – ANÁLISE DE ESCALA . . . . .</b>	<b>157</b>
	<b>APÊNDICE B – SOLUÇÃO ANALÍTICA . . . . .</b>	<b>159</b>
	<b>APÊNDICE C – SENSIBILIDADE DE MALHA . . . . .</b>	<b>164</b>
<b>C.1</b>	<b>Lei de Potência . . . . .</b>	<b>164</b>
C.1.1	Malha Axial . . . . .	164
C.1.2	Malha Radial . . . . .	165
<b>C.2</b>	<b>Bingham . . . . .</b>	<b>165</b>
C.2.1	Malha Axial . . . . .	165
C.2.2	Malha Radial . . . . .	165
<b>C.3</b>	<b>Herschel-Bulkley . . . . .</b>	<b>166</b>
C.3.1	Malha Axial . . . . .	166
C.3.2	Malha Radial . . . . .	167
<b>C.4</b>	<b>Mendes e Thompson (2013) – Sem Tixotropia . . . . .</b>	<b>168</b>
C.4.1	Malha Axial . . . . .	168
C.4.2	Malha Radial . . . . .	168
<b>C.5</b>	<b>Mendes e Thompson (2013) – Com Tixotropia . . . . .</b>	<b>169</b>
C.5.1	Malha Axial . . . . .	169
C.5.2	Malha Radial . . . . .	169

# 1 INTRODUÇÃO

O petróleo é um recurso com grande demanda na sociedade. Além de se destacar como fonte energética, seus derivados podem ser usados em diversos produtos tais como, perfumes e plásticos, etc. (MACHADO, 2002). Apesar de ser uma fonte de energia não renovável, a descoberta de grandes reservas na região do pré-sal e em regiões de difícil acesso mantém boas perspectivas de utilização desse material ainda por algumas décadas.

Entretanto, os desafios tecnológicos para explorar essas novas descobertas são de considerável dificuldade. A Figura 1.1 ilustra um dos principais desafios tecnológicos advindos da descoberta do petróleo em camadas pré-sal: a dificuldade de perfurar abaixo de colunas d'água de 2000 m e camadas de sal de mais de 3000 m de profundidade (PETROBRAS, 2013). A complexidade da perfuração se deve às elevadas pressões no fundo do poço, aos diferentes tipos de rocha, ao elevado custo do processo e aos diversos tipos de fluido de perfuração necessários em cada etapa.

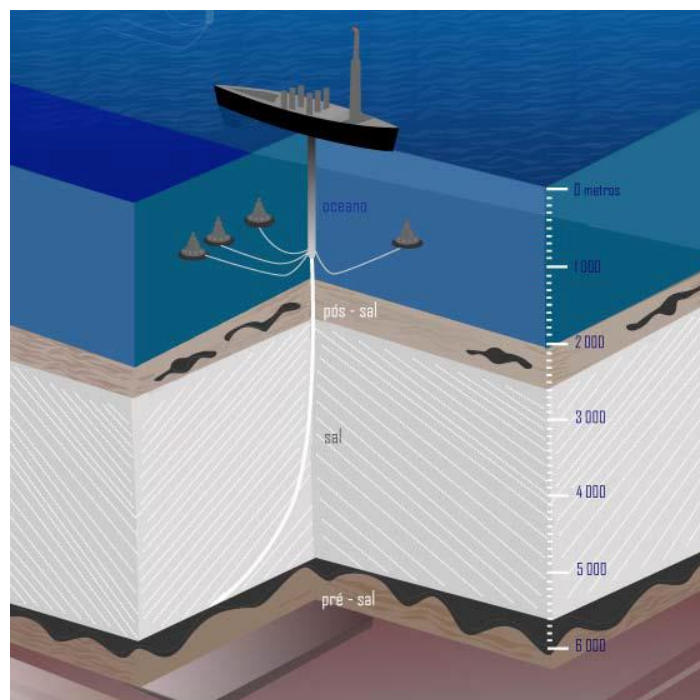


Figura 1.1 – Extração de petróleo da camada pré-sal. (Fonte: Petrobras (2007))

## 1.1 Processo de Perfuração

Atualmente, utiliza-se um processo de perfuração de poços de petróleo com sonda de perfuração rotativa, no qual a rocha é perfurada devido ao movimento de rotação de uma broca e ao peso de uma coluna de perfuração. A Figura 1.2 ilustra o processo de perfuração

de um poço (1). O movimento rotativo da broca (2) gera fragmentos de rocha, que são removidos pelo escoamento axial do fluido de perfuração. Esse fluido se encontra em um tanque (3) e é injetado para o interior da coluna de perfuração (4) através de bombas (5) e retorna à superfície pelo espaço anular (6) formado pela parede do poço e pela coluna. O fluido de perfuração, em seguida, é separado dos fragmentos de rocha e outras impurezas (7) e fica apto a ser reutilizado (THOMAS, 2001).

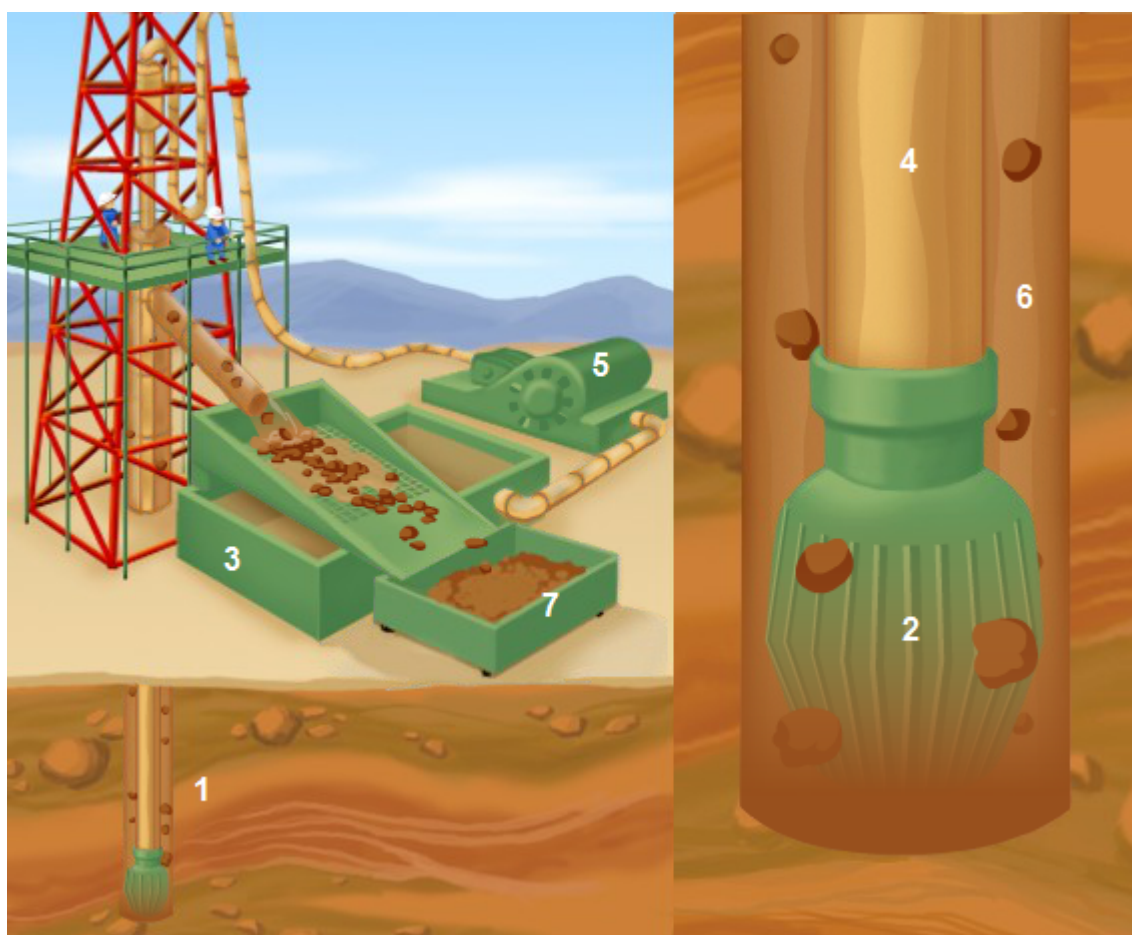


Figura 1.2 – Esquema de planta de perfuração de poços de petróleo. (Adaptado de: Schlumberger (2013))

## 1.2 Fluido de Perfuração

O fluido de perfuração é uma mistura de base líquida (água, óleo ou sintética) ou gasosa utilizado para remover os cascalhos e auxiliar na perfuração de poços de petróleo. A escolha do fluido a ser empregado é fundamental para garantir a segurança durante a perfuração. Entre as principais funções de um fluido de perfuração, destacam-se (Lummus e Azar (1986); Darley e Gray (1988)):

- (a) Transportar detritos da perfuração e permitir sua separação na superfície;

- (b) Resfriar, limpar e lubrificar a broca;
- (c) Reduzir o atrito entre a coluna de perfuração e as paredes do poço;
- (d) Manter a estabilidade do poço;
- (e) Retirar os detritos do fundo do poço;
- (f) Prevenir o escoamento do fluido para as formações;
- (g) Formar um filme de baixa permeabilidade nas paredes do poço;
- (h) Gelificar quando o escoamento é interrompido.

A última característica citada é muito importante, pois a gelificação do material permite que, durante eventuais paradas do processo de perfuração, os cascalhos fiquem em suspensão ao longo do poço. Dessa forma, evita-se a deposição dos cascalhos no fundo do poço, o que poderia causar uma obstrução da broca e o colapso do poço no reinício do processo.

A tixotropia<sup>1</sup> do fluido faz com que o material se transforme em gel quando não estiver sendo solicitado mecanicamente. Esse fenômeno é reversível e apresenta dependência temporal. Alguns dos modelos de tixotropia presentes na literatura serão abordados no Capítulo 2.

### 1.3 Problema

Nessa seção, dois problemas que ocorrem durante a perfuração são descritos: o reinício do escoamento e a transmissão de pressão.

A estrutura gelificada formada após uma interrupção do escoamento confere ao fluido de perfuração uma maior resistência ao cisalhamento. Portanto, pressões de bombeio elevadas são necessárias no reinício do escoamento de forma a fraturar o gel formado e assim garantir a circulação normal do fluido. Estas pressões, se não controladas, podem danificar a parede do poço permitindo perdas contínuas de fluido para a formação. Por outro lado, pressões abaixo da pressão de poros podem provocar o *kick*, que é o influxo da formação para o interior do poço. Caso o influxo não seja controlado, pode ocorrer um *blowout*, ou seja, o fluxo descontrolado na superfície, o que pode acarretar num grande prejuízo econômico e ambiental. A faixa entre a pressão de poros e a pressão de fratura define a janela operacional da pressão durante a perfuração. Para manter a pressão dentro dessa janela, realiza-se o controle da massa específica e das vazões e pressões de bombeio (SANTOS, 2006).

<sup>1</sup> Entende-se tixotropia como a diminuição da viscosidade de um material quando uma solicitação (tensão de cisalhamento ou taxa de deformação) é aplicada e um subsequente aumento de viscosidade quando essa solicitação é descontinuada.

Um fluido newtoniano em repouso dentro de uma tubulação horizontal deve apresentar a mesma pressão ao longo de toda a tubulação, uma vez que qualquer gradiente de pressão causará uma movimentação do fluido. Quando o fluido está na vertical em repouso, o gradiente de pressão se deve apenas ao peso da coluna de fluido.

Em algumas situações envolvendo fluidos de perfuração, há relatos (OLIVEIRA et al., 2012) de que o fluido pode estar em repouso mesmo havendo um gradiente de pressão. Segundo Oliveira et al. (2012), o escoamento em um fluido viscoplástico cessa quando o gradiente de pressão não é capaz de superar a tensão limite de escoamento do material. Em outras palavras, a pressão imposta em uma extremidade da tubulação não é transmitida para a outra extremidade. Este fato pode provocar alguns problemas em operações de perfuração. Em aberturas de válvulas operadas hidraulicamente, a pressão imposta na cabeça do poço não se transmite completamente para a posição da válvula. É usual substituir o fluido de perfuração por água para completar a operação.

A compreensão dos fenômenos de quebra de gel do fluido de perfuração e da transmissão de pressão é de grande importância para melhorar o controle dos processos de perfuração. Esses fenômenos podem ser estudados através da modelagem matemática e de aparatos experimentais que buscam reproduzir a situação real.

## 1.4 Objetivos

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo matemático para estudar o reinício do escoamento e da transmissão da pressão de um fluido de perfuração tixotrópico ao longo de um poço de petróleo. O fluido escoar através de um tubo acoplado a uma seção anular e o escoamento é considerado unidimensional, compressível, isotérmico e transitório. A formulação matemática é realizada através das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento, uma equação de estado para a pressão e uma equação constitutiva para representar o comportamento tixotrópico do fluido. O modelo tixotrópico é selecionado da literatura e calibrado a partir de dados experimentais. Ao final da dissertação, o modelo matemático proposto deverá ser capaz de avaliar a transmissão de pressão e a propagação da onda de pressão de um fluido de perfuração com o intuito de verificar a influência da tixotropia ao longo do poço.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta a revisão bibliográfica do trabalho, que está dividida em duas partes: tixotropia e escoamento transitório. Na primeira parte, o conceito de tixotropia é introduzido e estudos anteriores de trabalhos relacionados à modelagem de fluidos tixotrópicos são apresentados. Em seguida, trabalhos que modelam matematicamente o escoamento transitório em tubulações são revisados.

### 2.1 Tixotropia

O objetivo dessa seção é compreender melhor o fenômeno de tixotropia e apresentar algumas formas de modelá-lo. Assim, essa seção apresenta uma breve introdução de modelos matemáticos de tixotropia seguida de uma revisão de trabalhos, em ordem cronológica, relacionados à modelagem.

A compreensão da tixotropia é de elevada complexidade, pois as propriedades mecânicas estão intrinsecamente ligadas à estrutura do material. No sentido microscópico, é altamente complexa a contabilização das estruturas e do estado em que se encontram. Contudo, existem vários modelos que utilizam uma metodologia diferente, a macroscópica, para determinar as propriedades através de uma variável escalar que representa o nível de estruturação do material – Moore (1959) apud Mujumdar et al. (2002) e Barnes (1997). Na maior parte dos modelos, esse parâmetro varia de zero (estado completamente desestruturado) até a unidade (estado totalmente estruturado). A exceção ocorre no modelo de Mendes e Thompson (2013) que possui o estado completamente estruturado dado por um valor finito positivo. A evolução do parâmetro estrutural é normalmente modelada por uma equação diferencial no seguinte formato:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = f(\lambda, \dot{\gamma}, \tau, t) = -f_d(\lambda, \dot{\gamma}, \tau, t) + f_f(\lambda, \dot{\gamma}, \tau, t) \quad (2.1)$$

sendo  $\lambda$  o parâmetro estrutural,  $t$  o tempo,  $\dot{\gamma}$  e  $\tau$  a solicitação a qual o material está sujeito na forma de taxa ou tensão de cisalhamento, respectivamente. A equação de evolução do parâmetro temporal é composta de dois termos competitivos: um de destruição ou quebra ( $f_d$ ), que depende do carregamento o qual o material é submetido, e outro de reconstrução ( $f_f$ ), que leva em consideração as forças entre as partículas que compõe o material.

As propriedades mecânicas são dependentes do nível de estruturação do material, ou seja, as equações constitutivas que representam essas propriedades também são dependentes do parâmetro estrutural do material. Diversos tipos de equação constitutiva

podem ser encontrados na literatura. De forma geral, essas equações são do formato:

$$\tau = \eta(\lambda, \dot{\gamma}, \tau, t) \dot{\gamma} = F(\lambda, \dot{\gamma}, \tau, t) \quad (2.2)$$

sendo  $\eta$  a viscosidade aparente. A partir das equações de evolução do parâmetro estrutural e constitutiva, pode-se modelar a tixotropia de um material.

Na literatura, os modelos que representam o comportamento tixotrópico normalmente são pseudoplásticos, como Coussot et al. (2002), viscoplásticos, como Houska (1981), Roussel (2006) e Ardakani et al. (2011), ou elasto-viscoplásticos, como Dullaert e Mewis (2006), Mendes (2011), Mendes e Thompson (2013) e Deus e Dupim (2013). A Tabela 2.1 apresenta em ordem cronológica alguns dos principais modelos de tixotropia com o tipo de fluido estudado e as equações que modelam o fenômeno.

Os modelos de Coussot et al. (2002) e Roussel et al. (2004) são pseudoplásticos. Os autores modelaram a equação de evolução do parâmetro estrutural através de dois termos: um de reconstrução que depende apenas do tempo característico do material e outro de quebra dependente da sollicitação e do parâmetro estrutural.

Um dos primeiros modelos viscoplásticos foi o de Houska (1981) no qual o autor propôs uma equação cinética com termos de quebra e reconstrução como função do parâmetro estrutural. O comportamento mecânico do material foi modelado por uma equação constitutiva com um termo de tensão limite de escoamento dependente e outros dois termos de Lei de Potência dependente e independente da tixotropia.

Roussel (2006) usou o modelo de Coussot et al. (2002), porém propôs uma equação constitutiva com base em um fluido de Bingham com uma parcela dependente e outra independente da tixotropia e em um fluido de Lei de Potência sem dependência do parâmetro estrutural. A presença da tensão limite de escoamento tornou o modelo viscoplástico.

Ardakani et al. (2011) atualizou o modelo de Houska (1981) através da regularização de Papanastasiou (1987). Um termo exponencial foi multiplicado à tensão limite de escoamento e, assim, a continuidade da equação constitutiva foi garantida. Além disso, utilizou um valor de índice de potência igual a unidade e removeu a tixotropia do termo de Bingham. Alexandrou et al. (2013) continuou as modificações ao reinserir a tixotropia no termo de tensão limite de escoamento e retirar o parâmetro estrutural da parcela da viscosidade plástica.

Os modelos de fluidos elasto-viscoplásticos introduzem o efeito elástico através da soma de uma parcela elástica na equação constitutiva ou ao utilizar um modelo de viscoelasticidade com propriedades dependentes da tixotropia. No primeiro grupo encontram-se os trabalhos de Coussot et al. (1993) e Dullaert e Mewis (2006). Uma equação diferencial para a tensão ou a deformação elástica é utilizada. No segundo, os modelos de viscoelasticidade de Jeffreys, como em Yziquel et al. (1999) e Mendes e Thompson (2013), e Maxwell, como em Deus e Dupim (2013), são comumente utilizados na modelagem da elasticidade.

Tabela 2.1 – Características dos principais modelos matemáticos de tixotropia.

Modelo	Fluido	Equação do Parâmetro Estrutural	Equação Constitutiva	Equação Elástica
Houska (1981)	Viscoplástico: alimentos líquidos	$\frac{d\lambda}{dt} = -k_1 \dot{\gamma}^a \lambda + k_3 (1 - \lambda)$	$\tau = \lambda (\tau_{y,0} + K_{st,0} \dot{\gamma}^n) + K_\infty \dot{\gamma}^n$	
Coussot et al. (1993)	Elasto- viscoplástico: suspensões	$\chi \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\eta_{st,0}}{\tau_{y,0}} \dot{\gamma} \lambda + (1 - \lambda)$	$\tau = \sigma_e + \eta_\infty \dot{\gamma}$	$\frac{1}{G_0} \frac{d\sigma_e}{dt} + \frac{\lambda^{-n}-1}{n} \frac{\sigma_e}{\eta_{st,0}} = \dot{\gamma}$
Yziquel et al. (1999)	Elasto- viscoplástico: suspensões	$\frac{\lambda_0}{k_1} \frac{d\lambda}{dt} = (1 - \lambda) - \frac{\lambda_0^2 k_2}{\eta_0 k_1} \lambda  \tau : \dot{\gamma} $	$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\tau}{G} + \frac{\tau}{\eta} = \left(1 + \frac{\eta_\infty}{\eta}\right) \dot{\gamma} + \eta_\infty \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{\gamma}}{G}$	
Mujumdar et al. (2002)	Elasto- viscoplástico: suspensões	$\frac{d\lambda}{dt} = -k_1 \dot{\gamma} \lambda + k_2 (1 - \lambda)$	$\tau = \lambda G \gamma_e + (1 - \lambda) K \dot{\gamma}^n$	$\frac{d\gamma_e}{dt} = \dot{\gamma}$
Coussot et al. (2002)	Pseudoplástico: suspensões e géis	$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} - \alpha \lambda \dot{\gamma}$	$\tau = \eta_0 (1 + \lambda^n) \dot{\gamma}$	
Roussel et al. (2004)	Pseudoplástico: suspensões	$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} - \alpha \lambda \dot{\gamma}$	$\tau = \eta_0 (1 + \lambda^n) \dot{\gamma}$	
Roussel (2006)	Viscoplástico: concreto fresco	$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} - \alpha \lambda \dot{\gamma}$	$\tau = (1 + \lambda) \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}$	
Dullaert e Mewis (2006)	Elasto- viscoplástico: suspensões	$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t^\beta} [(k_2 \dot{\gamma}^{0,5} + k_3) (1 - \lambda) - k_1 \dot{\gamma} \lambda]$	$\tau = \lambda G \gamma_e + (\lambda \eta_{st,0} + \eta_\infty) \dot{\gamma}$	$\frac{d\gamma_e}{dt} = \left(\frac{k_4}{t}\right)^\beta (\tau \gamma_c - \tau_{rp} \gamma_e)$

(continua)



(continuação da Tabela 2.2)

Modelo	Fluido	Equação do Parâmetro Estrutural	Equação Constitutiva	Equação Elástica
Ardakani et al. (2011)	Viscoplástico: pasta de dente	$\frac{d\lambda}{dt} = -k_1 \dot{\gamma}^a \lambda + k_2 (1 - \lambda)$	$\tau = \tau_y [1 - \exp(-m\dot{\gamma})] + (1 + \lambda) \eta_\infty \dot{\gamma}$	
Mendes (2011)	Elasto-viscoplástico: fluidos estruturados	$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} \left[ (1 - \lambda)^a - (1 - \lambda_{rp})^a \left( \frac{\lambda}{\lambda_{rp}} \right)^b \left( \frac{\tau}{\eta_v \dot{\gamma}} \right)^c \right]$	$\tau + \theta_1 \dot{\tau} = \eta_v (\dot{\gamma} + \theta_2 \ddot{\gamma})$	
Mendes e Thompson (2013)	Elasto-viscoplástico: fluidos estruturados	$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} \left[ \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^a - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{rp}} \right)^b \left( \frac{1}{\lambda_{rp}} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^a \right]$	$\tau + \theta_1 \dot{\tau} = \eta_v (\dot{\gamma} + \theta_2 \ddot{\gamma})$	
Alexandrou et al. (2013)	Viscoplástico: lamas	$\frac{d\lambda}{dt} = k_1 (1 - \lambda) - k_2 \lambda \dot{\gamma} \exp(k_3 \dot{\gamma})$	$\tau = \tau_y [1 - \exp(-m\dot{\gamma})] \lambda + \mu \dot{\gamma}$	
Deus e Dupim (2013)	Elasto-viscoplástico: fluidos estruturados	$\frac{d\lambda}{dt} = 4G \left[ \frac{1}{3} M_3 (1 - \lambda) + \frac{1}{N_0} M_2 \rho \right] + \frac{4N_0 kT}{3\mu} (1 - \lambda)^2 - \frac{\lambda G_0 \dot{\gamma}}{\tau_c}$	$\eta_v \dot{\gamma} = \tau + \frac{\eta_v}{G} \dot{\tau}$	

Como o foco do trabalho são os fluidos de perfuração, a seguir, são apresentados dois trabalhos que utilizaram alguns dos modelos acima citados para modelar a tixotropia do fluido de perfuração.

Rocha (2010) fez um trabalho sobre a modelagem do reinício do escoamento de um fluido de perfuração tixotrópico. Através de dados experimentais fornecidos pela PETROBRAS, o autor fez o ajuste do modelo de Dullaert e Mewis (2006). Segundo os resultados obtidos por Rocha, o modelo ajustado não é capaz de representar o comportamento de um fluido de perfuração com os parâmetros fixados. Dessa forma, o expoente presente na equação de evolução do parâmetro estrutural se torna dependente da taxa de cisalhamento. Assim, o modelo consegue prever bem o pico de quebra da estrutura do material para ensaios de taxa de cisalhamento controlada. Contudo, simulações de testes de tensão de cisalhamento controlada não foram realizados.

Gabardo (2013) fez uma revisão de modelos matemáticos de tixotropia e formulou uma metodologia para o ajuste, em regime permanente e em regime transiente, desses modelos a resultados experimentais. Também apresentou os resultados para um fluido de perfuração de base sintética, submetido a testes de taxa de cisalhamento controlada e tensão de cisalhamento controlada. Em seguida, utilizou os resultados experimentais de taxa de cisalhamento controlada para calibrar os modelos matemáticos de Houska (1981), Dullaert e Mewis (2006) e Mendes e Thompson (2013). A partir dos parâmetros calibrados, fez a avaliação desses três modelos mediante a comparação dos resultados de cada modelo com os experimentais tanto para testes de taxa de cisalhamento controlada quanto para tensão de cisalhamento controlada. A comparação dos resultados mostrou que o modelo de Houska (1981) não foi capaz de representar o comportamento transiente do fluido de perfuração, pois os parâmetros foram ajustados somente em regime permanente. O modelo de Dullaert e Mewis (2006) também não representou bem o comportamento transiente, porém, ao forçar a dependência de um dos parâmetros com a taxa de cisalhamento, conforme Rocha (2010), resultados satisfatórios foram obtidos para o ensaio de taxa de cisalhamento controlada. Contudo, observou-se uma diferença significativa tanto na deformação quanto no tempo de quebra. Além do que, para o teste de tensão de cisalhamento controlada, nem a região de predominância elástica, nem a deformação de quebra são bem representadas, sendo a última sempre superior à experimental. Percebe-se pela Figura 2.1 que os resultados do modelo de Mendes e Thompson (2013) representam melhor os valores experimentais do que os demais modelos. Para ensaios de taxa de cisalhamento controlada, o tempo e a tensão de quebra são muito próximos aos experimentais para uma faixa de ajuste entre 5 e  $100 \text{ s}^{-1}$ . Porém, para testes de tensão de cisalhamento controlada, os mesmos problemas vistos com o modelo de Dullaert e Mewis (2006) foram observados. As principais limitações do trabalho de Gabardo (2013) foram: i) a deformação de quebra não foi bem representada; e ii) os parâmetros foram calibrados para ajustar uma curva e não com o intuito de dar sentido físico aos parâmetros.

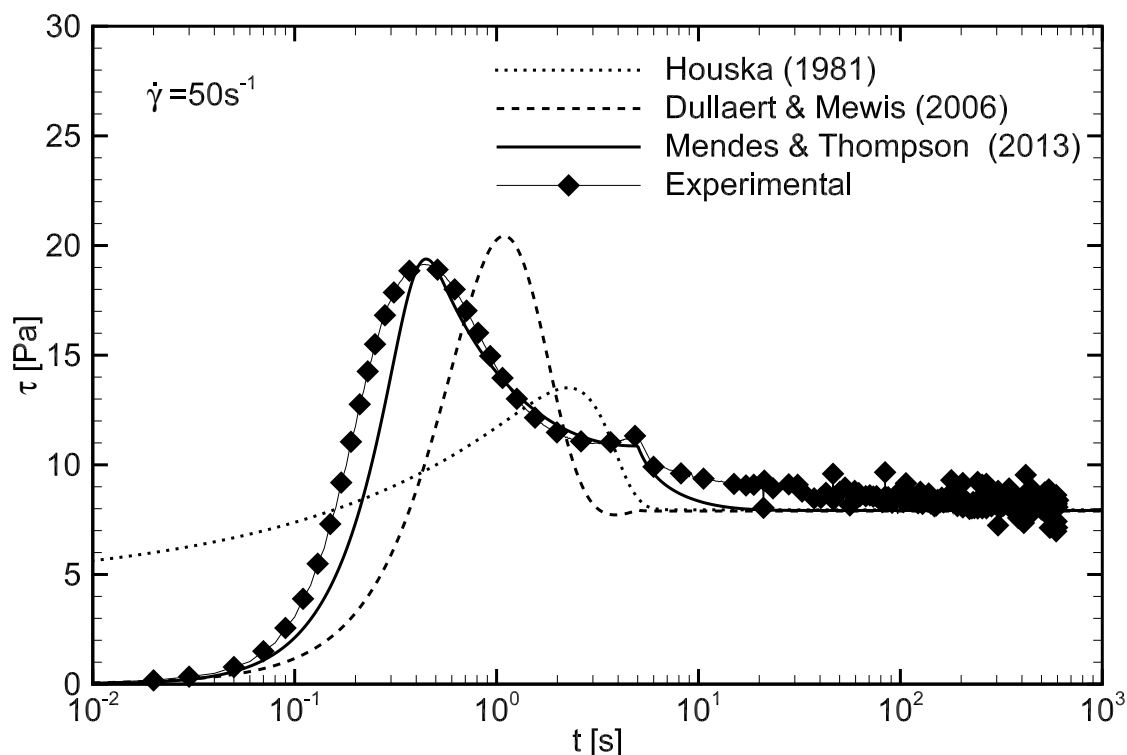


Figura 2.1 – Resultados do teste de taxa de cisalhamento controlada para os modelos de: Houska (1981), Dullaert e Mewis (2006) e Mendes e Thompson (2013). (Fonte: Gabardo (2013))

## 2.2 Modelagem de Escoamentos Transitórios em Tubulações

Essa seção apresenta uma discussão dos trabalhos de modelagem do reinício de escoamento e de transmissão de pressão. A maior parte dos trabalhos nessa área são voltados para óleo parafínicos e fluidos de perfuração e os fluidos são modelados como de Bingham.

Streeter e Lai (1962) estudaram o problema de golpe de aríete para a água através de ensaio experimental e modelagem matemática. O experimento consiste num reservatório mantido à pressão constante, conectado a uma tubulação na qual água escoava em regime permanente. Admite-se que a pressão na entrada da tubulação é constante. Na extremidade do tubo encontra-se uma válvula do tipo solenoide que pode ser fechada subitamente. O teste consiste em bloquear a passagem do fluido na saída e medir a pressão resultante. Os autores modelaram o escoamento como unidimensional num tubo horizontal e utilizaram o método das características para discretizar as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento. A tensão de cisalhamento na parede é avaliada a partir do fator de atrito.

Holmboe e Rouleau (1967) também estudaram o golpe de aríete e realizam testes experimentais para água e para um óleo viscoso. Um modelo baseado nas equações da conservação da massa e da quantidade de movimento foi proposto e simplificado

considerando o escoamento como unidimensional e laminar. Adotou-se a hipótese de que a viscosidade é dependente da frequência e o modelo foi resolvido através da transformada de Laplace. Os autores afirmaram que utilizar um modelo sem fator de atrito só é válido em casos de baixa dissipação. Além disso, concluem que a resposta similar ao observado experimentalmente se deve à dependência da viscosidade com a frequência de oscilação.

Chang et al. (1999) consideraram o problema de um óleo gelificado (fluido de Bingham dependente do tempo) num tubo horizontal deslocado por outro óleo não gelificado (fluido de Bingham independente do tempo). Os autores propuseram um modelo unidimensional isotérmico no qual desprezaram os efeitos de inércia da equação da quantidade de movimento e consideraram o fluido como incompressível. Nesse modelo, em qualquer instante de tempo, verifica-se um equilíbrio de forças entre a diferença de pressão e a tensão de cisalhamento na parede do tubo. Portanto, a variação temporal do escoamento é dada pela mudança das propriedades reológicas do óleo gelificado, as quais são dependentes do tempo.

Zhao e Ghidaoui (2003) propuseram um modelo quasi-bidimensional (a equação da quantidade de movimento na direção radial não é resolvida) para resolver o problema do golpe de aríete para um fluido newtoniano. As velocidades radial e axial são dependentes das posições axial e radial. Porém, a pressão depende somente da posição axial. O modelo foi resolvido pelo método das características. Os autores mostraram uma resolução que visa reduzir o tempo computacional ao dividirem a matriz resultante em duas matrizes tridiagonais principais que podem ser resolvidas pelo método de eliminação de Gauss.

Davidson et al. (2004) mostraram uma evolução do trabalho de Chang et al. (1999), pois consideraram a compressibilidade do fluido. Porém, os efeitos de inércia, o gradiente de temperatura, a transferência de calor e a transitoriedade do escoamento são desprezados. Novamente, os efeitos tixotrópicos são contabilizados pela variação das propriedades com o tempo.

Vinay et al. (2006) consideraram o problema transitório do reinício do escoamento isotérmico de um óleo gelificado numa tubulação. O modelo de Bingham foi utilizado para descrever a característica viscoplástica do fluido. Além disso, o escoamento foi considerado compressível e bidimensional. Os autores utilizaram o método dos volumes finitos para discretizar o problema e observaram dependência do tempo computacional para convergência com a compressibilidade do fluido.

Vinay et al. (2007) apresentaram um modelo unidimensional resolvido através do método dos volumes finitos e o compararam com o modelo bidimensional de Vinay et al. (2006). Os resultados mostraram boa concordância. Porém, os autores mostram que o modelo unidimensional é mais eficiente computacionalmente que o bidimensional, pois se reduz o tempo computacional da ordem de dias e horas para a ordem de minutos e segundos.

Oliveira (2008) propôs um modelo unidimensional com geometria anular para representar o reinício da circulação de fluidos de perfuração em espaços anulares. Nesse estudo, o

autor considerou o escoamento como horizontal, transitório e compressível, e levou em conta os termos inerciais. Porém, o autor admitiu que a tensão de cisalhamento variava linearmente com o raio e avaliou a tensão de cisalhamento na parede como a média dos valores nas superfícies interna e externa. Os efeitos viscosos foram modelados pelo fator de atrito. O fluido de perfuração foi modelado como fluido de Bingham. Para discretizar o sistema de equações, utilizou-se o método dos volumes finitos.

Wachs et al. (2009) – os mesmos autores de Vinay et al. (2006) e Vinay et al. (2007) – apresentaram um modelo 1,5D, que mescla os modelos unidimensional e bidimensional. Esse modelo apresentou resultados tão bons quanto do modelo bidimensional, porém o tempo computacional foi significativamente menor.

Oliveira et al. (2010) – os mesmos autores de Oliveira (2008) – inclinaram o tubo e dessa forma incluíram o termo gravitacional na equação da quantidade de movimento. Para obter resultados adequados, malhas de até 5.000 volumes de controle foram utilizadas. Os autores ainda verificaram o modelo através da comparação com a solução analítica para um fluido newtoniano.

Rocha (2010) e Negrão et al. (2011) apresentaram uma evolução dos trabalhos de Oliveira (2008) e Oliveira et al. (2010), pois utilizaram o modelo tixotrópico de Dullaert e Mewis (2006) para modelar o fluido de perfuração e avaliar a tensão de cisalhamento ao longo do raio.

Oliveira et al. (2012) apresentaram um modelo matemático para simular a transmissão de pressão em um fluido de Bingham pressurizado num tubo horizontal fechado. O modelo foi considerado unidimensional, isotérmico, fracamente compressível e laminar, e desprezava os termos advectivos (não lineares). O método das características foi utilizado para resolver o problema, pois a solução requer uma malha menos refinada em relação ao método dos volumes finitos, reduzindo o tempo computacional.

Oliveira (2011) e Oliveira et al. (2013) utilizaram o modelo de Oliveira et al. (2012) e incluíram o termo gravitacional na equação da quantidade de movimento. O problema estudado consiste no bombeamento, em um poço fechado, de fluido de perfuração para o interior da coluna de perfuração com retorno pelo espaço entre a parede do poço e a coluna de perfuração. Assim a geometria modelada é a de um tubo acoplado a um espaço anular. Destaca-se que Oliveira et al. (2013) comparou resultados do modelo com valores experimentais para a água (fluido newtoniano) e para um fluido de perfuração (fluido de Bingham). Inicialmente, a água e o fluido de perfuração oscilam com mesma frequência e amplitude verificadas experimentalmente. Porém, no caso da água, assim que a bomba é desligada, a onda de pressão se dissipa mais rapidamente nos resultados experimentais do que no modelo.

Wahba (2013) analisou o efeito do fechamento brusco de uma válvula no escoamento de fluidos lei de potência em tubos circulares. Nesse trabalho, o autor utilizou um modelo bidimensional que considera a compressibilidade do fluido e a elasticidade do tubo, porém

os termos não lineares da equação da quantidade de movimento são desprezados. Os termos espaciais são discretizados por diferenças centrais de segunda ordem e o modelo é integrado numericamente no tempo através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Tazraei et al. (2015) e Tazraei e Riasi (2016) apresentaram um modelo bidimensional para modelar o problema de golpe de aríete no sangue escoando pela artéria cerebral. Como o sangue possui comportamento pseudoplástico, os efeitos não newtonianos foram incorporados utilizando o modelo de Carreau (1968) e o fluido foi considerado compressível. A equação da quantidade de movimento na direção radial foi desprezada. Os autores resolveram o conjunto de equações diferenciais resultante pelo método das características e utilizaram o método de Newton-Kantorovich (BOYD, 2001) para linearizar o termo de tensão de cisalhamento da equação da quantidade de movimento.

Oliveira e Negrão (2015) apresentaram um modelo matemático para simular o reinício do escoamento de óleos gelificados em tubulações horizontais. Os autores consideraram o escoamento como unidimensional e laminar e o fluido como fracamente compressível. O modelo de Mendes e Thompson (2013) foi utilizado para descrever a tixotropia presente no fluido. Considerou-se que a tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial. O conjunto de equações (conservação da massa, quantidade de movimento e estado) foi resolvido pelo método das características. Duas condições de contorno para entrada, pressão e vazão constante, foram estudadas.

Oliveira et al. (2016) modelaram o experimento do golpe de aríete para um fluido viscoplástico representado por um plástico de Bingham. As demais considerações foram as mesmas apresentadas por Oliveira e Negrão (2015).

## 2.3 Síntese do Capítulo 2

Nesse capítulo foi apresentada uma revisão bibliográfica dividida em duas partes: modelos de tixotropia e modelagem de escoamento transitório. Na primeira parte, um breve histórico de tixotropia e alguns modelos tixotrópicos foram apresentados. Desses modelos, o de Mendes e Thompson (2013) foi o que exibiu comportamento mais próximo ao esperado para um fluido de perfuração. Na segunda parte, foram apresentados trabalhos que modelam o reinício do escoamento e a transmissão de pressão ao longo de tubulações. As Tabela 2.2 e Tabela 2.3 mostram, de forma resumida, as principais características de cada trabalho de modelagem matemática do escoamento. Percebe-se que a maior parte dos trabalhos tem o objetivo de modelar o reinício do escoamento, enquanto que somente os trabalhos de Oliveira et al. (2012) e Oliveira et al. (2013) modelam e a transmissão de pressão. Destaca-se que somente os trabalhos de Rocha (2010), Negrão et al. (2011) e Oliveira e Negrão (2015) utilizaram um modelo tixotrópico, Dullaert e Mewis (2006) e Mendes e Thompson (2013), para representar o fluido. Porém, os autores utilizam a hipótese de variação linear da tensão de cisalhamento na seção transversal da tubulação. Os outros

trabalhos consideraram o fluido como de Bingham com propriedades dependentes ou independentes do tempo. Contudo, Gabardo (2013) mostrou que o modelo de Dullaert e Mewis (2006) não é o mais adequado para modelar um fluido tixotrópico. Além disso, ressalta-se que a maior parte dos modelos é unidimensional, apesar de apresentarem menor precisão quando comparados a modelos bidimensionais.

Dessa forma, o presente trabalho utilizará o modelo de Mendes e Thompson (2013) para representar a tixotropia do fluido de perfuração na modelagem matemática do escoamento. Procurando melhorar a precisão dos resultados, o modelo matemático relaxa a hipótese de variação linear da tensão de cisalhamento na seção transversal da tubulação, além de não desprezar os termos não lineares das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento.

Tabela 2.2 – Características dos principais modelos matemáticos dos escoamentos revisados

Modelo	Porblema	Variação da Pressão	Configuração	Método de Solução	Fluido	Considerações
Streeter e Lai (1962)	Golpe de aríete	Equações da conservação da massa (CM) e da quantidade de movimento (QM)	Tubo horizontal; Modelo unidimensional	Método das características	Compressível; Newtoniano	Isotérmico, despreza os termos não lineares e os efeitos de inércia
Holmboe e Rouleau (1967)	Golpe de aríete	Equações CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo unidimensional	Transformada de Laplace	Compressível; Newtoniano	Isotérmico, despreza os termos não lineares e os efeitos de inércia
Chang et al. (1999)	Reinício do escoamento	Equilíbrio de forças de pressão e tensão	Tubo horizontal; Modelo unidimensional	Métodos das diferenças finitas	Incompressível; Bingham com tensão limite de escoamento dependente do tempo	Incompressível, isotérmico, quase-estacionário, despreza os efeitos de inércia
Zhao e Ghidaoui (2003)	Golpe de aríete	Equações CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo misto (1,5D)	Métodos das características	Compressível; Newtoniano	Isotérmico, despreza os termos não lineares e os efeitos de inércia

(continua)



(continuação da Tabela 2.2)

Modelo	Problema	Variação da Pressão	Configuração	Método de Solução	Fluido	Considerações
Davidson et al. (2004)	Reinício do escoamento	Equilíbrio de forças de pressão e tensão	Tubo horizontal; Modelo unidimensional	Métodos das diferenças finitas	Compressível; Bingham com tensão limite de escoamento dependente do tempo	Isotérmico, quase-estacionário, despreza os efeitos de inércia
Vinay et al. (2006)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo bidimensional	Método dos volumes finitos com esquema TVD para termos convectivos	Compressível, Fluido de Bingham	Elevado tempo computacional
Vinay et al. (2007)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo unidimensional	Método dos volumes finitos com esquema TVD para termos convectivos	Compressível, Fluido de Bingham	Despreza termo de inércia na equação da quantidade de movimento
Wachs et al. (2009)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo misto (1,5D)	Método dos volumes finitos com esquema TVD para termos convectivos	Compressível, Fluido de Bingham com propriedades dependentes do tempo	Despreza termo de inércia na equação da quantidade de movimento

(continua)

(continuação da Tabela 2.2)

Modelo	Problema	Variação da Pressão	Configuração	Método de Solução	Fluido	Considerações
Wahba (2013)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo bidimensional	Método dos volumes finitos com esquema MTVDLF para termos convectivos	Compressível, Fluido Lei de Potência	Despreza termos de inércia e não lineares
Tazraei et al. (2015)	Golpe de aríete	Equações CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo bidimensional	Método das características e Newton-Kantarovich	Compressível; Carreau	Isotérmico, despreza os termos não lineares e os efeitos de inércia
Tazraei e Riasi (2016)	Golpe de aríete	Equações CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo bidimensional	Método das características e Newton-Kantarovich	Compressível; Carreau	Isotérmico, despreza os termos não lineares e os efeitos de inércia

Tabela 2.3 – Características dos principais modelos matemáticos dos escoamentos revisados (CERNN)

Modelo	Problema	Variação da Pressão	Configuração	Método de Solução	Fluido	Considerações
Oliveira (2008)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo unidimensional	Método dos volumes finitos	Compressível, Bingham	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial
Oliveira et al. (2010)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo inclinado; Modelo unidimensional	Método dos volumes finitos	Compressível, Bingham	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial
Rocha (2010)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo inclinado; Modelo unidimensional	Método dos volumes finitos	Compressível, Tixotrópico (DULLAERT; MEWIS, 2006)	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial
Negrão et al. (2011)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo inclinado; Modelo unidimensional	Método dos volumes finitos	Compressível, Tixotrópico (DULLAERT; MEWIS, 2006)	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial

(continua)

(continuação da Tabela 2.3)

Modelo	Problema	Variação da Pressão	Configuração	Método de Solução	Fluido	Considerações
Oliveira (2011)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo vertical; Modelo unidimensional	Método das características	Compressível, Bingham	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial, fracamente compressível, despreza termos não lineares e os efeitos de inércia
Oliveira et al. (2012)	Transmissão de pressão	Equações da CM e da QM	Tubo vertical; Modelo unidimensional	Método das características	Compressível, Bingham	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial, fracamente compressível, despreza termos não lineares
Oliveira et al. (2013)	Transmissão de pressão	Equações da CM e da QM	Tubo vertical; Modelo unidimensional	Método das características	Compressível, Bingham	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial, fracamente compressível, despreza termos não lineares

(continua)

(continuação da Tabela 2.3)

Modelo	Problema	Variação da Pressão	Configuração	Método de Solução	Fluido	Considerações
Oliveira e Negrão (2015)	Reinício do escoamento	Equações da CM e da QM	Tubo vertical; Modelo unidimensional	Método das características	Compressível, Bingham	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial, fracamente compressível, despreza termos não lineares
Oliveira et al. (2016)	Golpe de aríete	Equações da CM e da QM	Tubo horizontal; Modelo unidimensional	Método das características	Compressível, Bingham	Tensão de cisalhamento varia linearmente na direção radial, fracamente compressível, despreza termos não lineares

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo são apresentadas a modelagem matemática do problema e as equações que representam o fenômeno, juntamente com as hipóteses simplificadoras. Por fim, as condições iniciais e de contorno são descritas.

#### 3.1 Formulação do Problema

Durante a perfuração de um poço de petróleo, o fluido de perfuração é bombeado pelo interior da coluna de perfuração, passa pela broca e retorna através do espaço anular entre a coluna de perfuração e a parede do poço removendo os cascalhos da perfuração. Apesar de haver variações de diâmetros tanto na coluna de perfuração quanto na parede do poço, a geometria do problema é formulada com base no escoamento através de um tubo acoplado a um espaço anular com áreas de seção transversal constantes. A Figura 3.1 mostra um esquema da geometria do problema em coordenadas cilíndricas, onde  $r$  representa a direção radial,  $z$  a axial e  $\theta$  a angular. A Figura 3.1(a) é uma vista em corte longitudinal do poço de perfuração, ao passo que a Figura 3.1(b) é um corte transversal. O tubo, que representa a coluna de perfuração, possui diâmetro interno constante  $D_1$  e comprimento  $L_1$ , e o espaço anular formado entre a coluna de perfuração e a parede do poço é representado pela região com diâmetros interno e externo,  $D_{2,i}$  e  $D_{2,e}$ , e comprimento  $L_2$ .

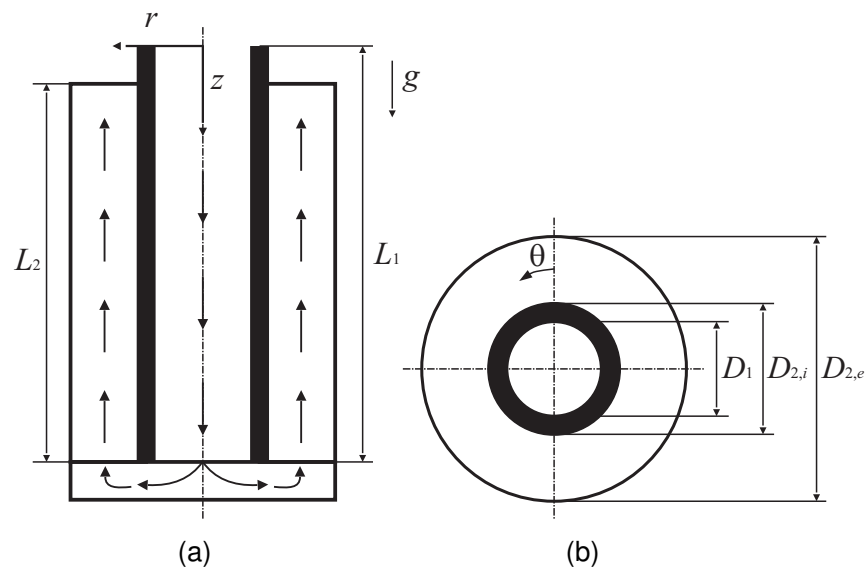


Figura 3.1 – Geometria do problema: (a) vista em corte e (b) vista superior.

O domínio em análise é definido como a região no interior da coluna de perfuração e o espaço anular. Dessa forma, o comprimento total do domínio é  $L_T = L_1 + L_2$ . Assume-se que a coluna de perfuração está posicionada concentricamente em relação ao poço,

conforme Figura 3.1(b), e que ambos são perfeitamente rígidos. Dessa forma o escoamento é considerado axissimétrico e não há deformação da geometria. A região no fundo do poço é desprezada, portanto ocorre apenas mudança de seção transversal e inversão de sentido de escoamento do fluido. Por questões de simplicidade na apresentação do modelo as perdas de carga localizadas nos orifícios e nos acoplamentos da broca não serão consideradas e o escoamento será admitido como laminar. Por fim, a presença de cascalhos ao longo do domínio é desprezada.

Considerando a grande razão de aspecto,  $L/D$ , do tubo ou do espaço anular, o escoamento será considerado unidimensional. Porém, a hipótese de variação linear da tensão de cisalhamento na seção transversal é relaxada. Assume-se que o escoamento é isotérmico. Admite-se que o fluido de perfuração é tixotrópico e utiliza-se o modelo de Mendes e Thompson (2013) para representá-lo. Contudo, outros modelos de fluido (Newtoniano, Lei de Potência, Bingham e Herschel-Bulkley) são utilizados para conduzir a validação e verificação numérica do modelo.

Dois modelos são propostos para estudar o problema. O primeiro admite que pela hipótese de razão de aspecto muito grande, a velocidade radial pode ser negligenciada e, de forma a tornar o modelo mais abrangente, considera os termos não lineares. O segundo foi proposto conforme o trabalho de Zhao e Ghidaoui (2003), no qual o autor propôs um modelo mais eficiente (em questão de tempo computacional) que negligencia os termos não lineares e considera a velocidade radial. Ambos modelos consideram que a velocidade axial depende tanto da posição axial quanto da posição radial. Porém, a pressão é constante em cada seção transversal.

Nas próximas seções são descritas e simplificadas as equações que modelam o problema: a equação de estado, a equação da conservação da massa, a equação da quantidade de movimento e as equações constitutivas.

## 3.2 Equação de Estado

A compressibilidade isotérmica do fluido é definida como a variação relativa da massa específica,  $\rho$ , do fluido em relação à pressão,  $P$ , considerando a temperatura constante (CALLEN, 1985):

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T \quad (3.1)$$

sendo  $\alpha$  a compressibilidade do fluido e  $T$  a temperatura.

Como a massa específica é uma função da pressão e da temperatura,  $\rho = \rho(P, T)$ , para uma variação de  $\rho$ :

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T dP + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P dT \quad (3.2)$$

Pela definição de compressibilidade, Equação (3.1), e com a hipótese de escoamento isotérmico, a Equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$d\rho = \alpha \rho dP \quad (3.3)$$

Considerando que a compressibilidade é constante para a faixa avaliada e integrando a Equação (3.3) de um estado de referência até outro estado qualquer:

$$\int_{\rho_r}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \alpha \int_{P_r}^P dP \quad (3.4)$$

sendo  $\rho_r$  a massa específica de referência e  $P_r$  a pressão de referência.

O resultado da integração fornece a pressão em função da massa específica:

$$P = P_r + \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{\rho}{\rho_r} \right) \quad (3.5)$$

### 3.3 Equações da Conservação

Nessa seção serão apresentadas as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento. Em seguida, cada uma dessas equações será simplificada para os dois modelos propostos.

#### Conservação da Massa

A equação da conservação da massa em coordenadas cilíndricas é dada por (BIRD et al., 1987):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) = 0 \quad (3.6)$$

$r$  a coordenada radial,  $\theta$  a coordenada angular,  $z$  a coordenada axial,  $t$  o tempo e  $v$ ,  $w$  e  $u$  as componentes radial, angular e axial da velocidade, respectivamente.

Com a hipótese de escoamento axissimétrico, a equação da conservação da massa se reduz à:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) = 0 \quad (3.7)$$

#### Equação da Quantidade de Movimento

A equação da quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas na direção axial é dada por (BIRD et al., 1987):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho w u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u u) = \\ - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g \end{aligned} \quad (3.8)$$



sendo  $\tau_{rz}$  a tensão de cisalhamento perpendicular à direção radial exercida na direção  $z$ ,  $\tau_{\theta z}$  a tensão de cisalhamento perpendicular à direção angular exercida na direção  $z$ ,  $\tau_{zz}$  a tensão normal na direção axial e  $g$  a gravidade na direção axial.

Aplicando a hipótese de escoamento axissimétrico:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u u) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rz}) - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g \quad (3.9)$$

Uma análise de escala apresentada no Apêndice A mostra que a tensão normal na direção axial pode ser negligenciada, dessa forma chega-se à:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u u) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rz}) + \rho g \quad (3.10)$$

### 3.3.1 Modelo 1

Retomando a equação da conservação da massa, Equação (3.7), e considerando que não ocorre escoamento na direção radial, chega-se à:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) = 0 \quad (3.11)$$

Integrando a Equação (3.11) na seção transversal  $dA = 2\pi r dr$  entre 0 e  $R$ , obtém-se:

$$\int_0^R \frac{\partial \rho}{\partial t} 2\pi r dr + \int_0^R \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) 2\pi r dr = 0 \quad (3.12)$$

Rearranjando a Equação (3.12):

$$\int_0^R \frac{\partial \rho}{\partial t} 2\pi r dr + \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_0^R \rho u 2\pi r dr \right) = 0 \quad (3.13)$$

Como a massa específica é constante na direção radial, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \int_0^R 2\pi r dr + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \int_0^R 2\pi u r dr \right) = 0 \quad (3.14)$$

Sabendo que a área da seção transversal é  $A = \int_0^R 2\pi r dr$  e que a vazão volumétrica é  $Q = \int_0^R 2\pi u r dr$ , chega-se à:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} A + \frac{\partial}{\partial z}(\rho Q) = 0 \quad (3.15)$$

A velocidade média na direção axial é definida por:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_0^R 2\pi ur dr \quad (3.16)$$

Como a seção transversal independe da coordenada axial e da definição de velocidade média na direção axial da Equação (3.16), obtém-se a equação da conservação da massa simplificada para o escoamento médio:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V) = 0 \quad (3.17)$$

A simplificação da equação da quantidade de movimento para o primeiro modelo, Equação (3.10), utilizando a hipótese de escoamento unidimensional (velocidade radial nula), resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u u) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho g \quad (3.18)$$

Diferentemente da equação da conservação da massa, não é possível extrair a média desta equação devido ao termo não linear da Equação (3.18).

### 3.3.2 Modelo 2

Neste caso, a equação da conservação da massa, Equação (3.7), é retomada e simplificada para o segundo modelo. Para tanto, uma nova variável que relaciona velocidade radial e raio,  $q = vr$ , é introduzida na Equação (3.7):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho q) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) = 0 \quad (3.19)$$

Trabalhos anteriores mostram que em casos nos quais a compressibilidade do fluido é baixa, as variações de massa específica nas direções axial e radial podem ser desprezadas (OLIVEIRA et al., 2010). Dessa forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

Derivando a Equação (3.3) em relação ao tempo, encontra-se uma relação entre a derivada da massa específica e da pressão que pode ser substituída na Equação (3.20):

$$\alpha \rho \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.21)$$

A velocidade de propagação,  $c$ , é definida como:

$$c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_T = \frac{1}{\alpha \rho} \quad (3.22)$$

A partir dessa definição, a compressibilidade isotérmica pode ser substituída na Equação (3.21), resultando na seguinte equação:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.23)$$

Retomando a equação da quantidade de movimento, Equação (3.10), introduz-se a variável,  $q$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (q \rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u u) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho g \quad (3.24)$$

Considerando escoamento fracamente compressível, chega-se à:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (u) + \rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (qu) + \rho \frac{\partial}{\partial z} (uu) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho g \quad (3.25)$$

Uma análise de escala da Equação (3.25) apresentada no Apêndice A e os trabalhos de Ghidaoui et al. (2005) e Wahba (2006) mostram que os termos de inércia são proporcionais ao número de Mach,  $Ma = V/c$ . Como esse número é muito pequeno, os termos de inércia podem ser negligenciados, o que resulta em:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + g \quad (3.26)$$

### 3.4 Equações Constitutivas

As equações constitutivas representam as equações de fechamento do problema e são necessárias para resolver o balanço da quantidade de movimento. Cada modelo de fluido possui uma equação que relaciona a tensão com a cinemática do material.

Os seguintes modelos foram utilizados para representar os fluidos de perfuração: Newtoniano, Lei de Potência, Bingham, Herschel-Bulkley e Mendes e Thompson (2013). Os quatro primeiros são utilizados para conduzir a validação e a verificação numérica, enquanto que o último modelo é utilizado para avaliar a influência da tixotropia no comportamento do modelo matemático proposto. Essa seção apresenta os modelos de fluido utilizados e suas respectivas equações constitutivas.

Fluidos não newtonianos são complexos, pois podem apresentar tensão limite de escoamento, dependência temporal e nem sempre a relação entre tensão e taxa de deformação é linear. Devido a complexidade desses materiais, esses fluidos podem ser divididos em independentes e dependentes do tempo. No primeiro grupo, encontram-se os fluidos Lei de

Potência, Bingham e Herschel-Bulkley, enquanto que os materiais tixotrópicos e reopéticos fazem parte do segundo grupo.

De forma geral tanto os fluidos newtonianos quanto os não newtonianos podem ser representados por um Fluido Newtoniano Generalizado (FNG - (BIRD et al., 1987)):

$$\tau = \eta(\dot{\gamma}, t) \dot{\gamma} \quad (3.27)$$

sendo  $\tau$  o tensor tensão,  $\dot{\gamma}$  o segundo invariante do tensor deformação e  $\eta$  a viscosidade aparente do fluido que pode ser dependente da taxa de deformação e/ou do tempo. Como o escoamento é cisalhante somente a componente  $rz$  será utilizada. Assim, futuras referências de tensão e taxa de deformação estão relacionadas com a componente  $rz$ . Portanto, a taxa de deformação,  $\dot{\gamma}$ , pode ser calculada como:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.28)$$

A análise de escala da Equação (3.28), considerando que  $u \sim V_Z$ ,  $v \sim V_R$ ,  $r \sim D$  e  $z \sim L$  e que a velocidade radial e o diâmetro são muito menores do que a velocidade axial e o comprimento, resulta na conclusão de que o primeiro termo dessa equação é significativamente maior do que o segundo. Assim, da simplificação, chega-se à:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.29)$$

A seguir, as equações constitutivas dos fluidos Newtonianos e dos quatro fluidos não newtonianos utilizados nesse trabalho são apresentadas.

### 3.4.1 Newtoniano

Nos casos de fluido newtoniano a viscosidade aparente é uma constante (BIRD et al., 1987):

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = \mu \quad (3.30)$$

sendo  $\mu$  a viscosidade dinâmica.

### 3.4.2 Lei de Potência

O modelo de Lei de Potência é o mais conhecido e utilizado em aplicações de engenharia, pois uma variedade de problemas podem ser resolvidos analiticamente através desse modelo (BIRD et al., 1987). A equação para a viscosidade aparente é descrita por:

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.31)$$

sendo  $k$  o índice de consistência e  $n$  o índice de lei de potência. Se  $n = 1$ , o fluido torna-se Newtoniano. Se  $n < 1$ , o fluido é chamado pseudoplástico ou *shear-thinning*, ou seja, a viscosidade do fluido decresce com o aumento da taxa de deformação. Se  $n > 1$ , o fluido é chamado dilatante ou *shear-thickening*, ou seja, a viscosidade cresce com a taxa de deformação.

### 3.4.3 Bingham

O modelo de Bingham é normalmente utilizado para descrever líquidos com grandes quantidades de suspensões e representa um material viscoplástico (BIRD et al., 1987). Por definição, esse tipo de fluido possui uma tensão limite de escoamento,  $\tau_0$ ; se a tensão aplicada ao fluido for menor do que esse limite, não ocorre escoamento. Dessa forma, o material se comporta como um corpo rígido quando submetido a baixas taxas de deformação.

A viscosidade aparente de um fluido de Bingham é descrita por (BIRD et al., 1987):

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = \begin{cases} \infty & \tau < \tau_0 \\ \mu_p + \tau_0/\dot{\gamma} & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

sendo  $\mu_p$  a viscosidade plástica.

Quando simulações numéricas são conduzidas, autores, como Tang e Kalyon (2004) e Soto et al. (2010), indicam uma regularização do modelo de Bingham através da inclusão de um termo exponencial junto à tensão limite de escoamento para evitar que a viscosidade tenda ao infinito quando baixas taxas são empregadas e, assim, as simulações apresentem problemas numéricos. Um modelo de regularização é o de Papanastasiou (1987), no qual a viscosidade aparente do modelo de Bingham é escrita da seguinte forma:

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-p\dot{\gamma})] + \mu_p \quad (3.33)$$

sendo  $p$  uma constante denominada parâmetro de regularização.

### 3.4.4 Herschel-Bulkley

O modelo de Herschel e Bulkley (1926) é uma combinação dos modelos de Bingham e Lei de Potência. Dessa forma, possui o comportamento de sólido rígido à baixas taxas de deformação e um comportamento pseudoplástico/dilatante à altas taxas.

Assim, a viscosidade aparente é representada por (BIRD et al., 1983):

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = \begin{cases} \infty & \tau < \tau_0 \\ k\dot{\gamma}^{n-1} + \tau_0/\dot{\gamma} & \tau \geq \tau_0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Utilizando a regularização de Papanastasiou (1987) na viscosidade aparente de Herschel-Bulkley, resulta-se em:

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = \left( \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\dot{\gamma}^{n-1} \right) [1 - \exp(-p\dot{\gamma})] \quad (3.35)$$

### 3.4.5 Tixotrópico - Mendes e Thompson (2013)

Para representar o escoamento de um fluido de perfuração com tixotropia, utilizou-se o modelo de Mendes e Thompson (2013) cuja equação constitutiva é:

$$\dot{\gamma} + \theta_2 \ddot{\gamma} = \frac{\theta_2}{\eta_\infty} \left( \frac{\tau}{\theta_1} + \dot{\tau} \right) \quad (3.36)$$

sendo  $\tau$  a tensão de cisalhamento,  $\dot{\gamma}$  a taxa de cisalhamento,  $\dot{\tau}_{rz}$  a taxa de variação da tensão de cisalhamento,  $\ddot{\gamma}_{rz}$  a taxa de variação da taxa de cisalhamento,  $\eta_\infty$  a viscosidade correspondente ao estado completamente desestruturado,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são, respectivamente, os tempos de relaxação e de retardo que são representados por:

$$\theta_1 = \left( 1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_v} \right) \frac{\eta_v}{G_s} \quad (3.37)$$

$$\theta_2 = \left( 1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_v} \right) \frac{\eta_\infty}{G_s} \quad (3.38)$$

sendo  $G_s$  o módulo de elasticidade estrutural,  $\eta_v = \eta_s + \eta_\infty$  e  $\eta_s$  uma função que descreve a viscosidade estrutural.

Tanto  $\eta_v$  quanto  $G_s$  são funções da estrutura do material e as equações propostas para esta dependência são:

$$\eta_v = \eta_\infty \exp(\lambda) \quad (3.39)$$

$$G_s = G_0 \exp \left[ m \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \right] \quad (3.40)$$

sendo  $\lambda$  o parâmetro estrutural que varia de 0 (estado completamente desestruturado) a  $\lambda_0$  (estado completamente estruturado),  $G_0$  o módulo de elasticidade para o material completamente estruturado e  $m$  um expoente do sistema. Rearranjando a Equação (3.39), o parâmetro estrutural pode ser expresso por:

$$\lambda = \ln \left( \frac{\eta_v}{\eta_\infty} \right) \quad (3.41)$$

Através da equação acima, o parâmetro estrutural máximo,  $\lambda_0$ , e o parâmetro estrutural de equilíbrio,  $\lambda_{eq}$ , são representados, respectivamente, por:

$$\lambda_0 = \ln \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \quad (3.42)$$

$$\lambda_{eq} = \ln \left( \frac{\eta_{eq}}{\eta_\infty} \right) \quad (3.43)$$

sendo  $\eta_0$  a viscosidade do material completamente estruturado e  $\eta_{eq}$  a viscosidade de equilíbrio que é representada por (MENDES, 2009):

$$\eta_{eq} = \frac{\tau_{eq}}{\dot{\gamma}_{eq}} = \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_{eq}}{\tau_y} \right) \right] \left[ \frac{\tau_y - \tau_{yd}}{\dot{\gamma}_{eq}} \exp \left( -\frac{\dot{\gamma}_{eq}}{\dot{\gamma}_{yd}} \right) + \frac{\tau_{yd}}{\dot{\gamma}_{eq}} + K \dot{\gamma}_{eq}^{n-1} \right] + \eta_\infty \quad (3.44)$$

sendo  $\tau_y$  a tensão limite de escoamento estática;  $\tau_{yd}$  a tensão limite de escoamento dinâmica;  $\dot{\gamma}_{yd}$  a taxa de cisalhamento da transição de  $\tau_y$  para  $\tau_{yd}$ ;  $K$  o índice de consistência; e  $n$  o índice de lei de potência. Porém, o autor afirma que o parâmetro estrutural de equilíbrio é dependente apenas da tensão aplicada ao fluido. Dessa forma, é necessário utilizar a Equação (3.44) para encontrar a taxa de deformação de equilíbrio e, assim, determinar o estado de equilíbrio.

A equação que modela a evolução do parâmetro estrutural é dada por:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} \left[ \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^a - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right)^b \left( \frac{1}{\lambda_{eq}} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^a \right] \quad (3.45)$$

sendo  $t_{eq}$  o tempo de equilíbrio.  $a$  e  $b$  são expoentes do sistema.

Finalmente, substituindo a Equação (3.29) na Equação (3.36), obtém-se a equação constitutiva:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\theta_2}{\eta_\infty} \left( \frac{\tau}{\theta_1} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \quad (3.46)$$

### 3.5 Condições Iniciais

O fluido de perfuração que preenche o poço está inicialmente em repouso. Assim, pode-se afirmar que para as condições iniciais, os campos de velocidade local axial e médio e velocidade local radial são nulos:

$$u(r, z, t = 0) = 0 \quad (3.47)$$

$$V(r, z, t = 0) = 0 \quad (3.48)$$

$$v(r, z, t = 0) = 0 \quad (3.49)$$

Como o tubo é vertical, a pressão estática varia com a posição vertical:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \quad (3.50)$$

Substituindo a compressibilidade, Equação (3.1), na Equação (3.50) e considerando escoamento isotérmico:

$$\frac{\partial \rho}{\rho^2} = \alpha g \partial z \quad (3.51)$$

Com a hipótese de escoamento fracamente compressível, o segundo modelo possui campo inicial de massa específica igual ao valor de referência. Já o campo inicial de massa específica do primeiro modelo é obtido através da integração da Equação (3.51) da entrada do tubo a uma posição qualquer, resultando em:

$$\rho(z, t = 0) = \frac{\rho_r}{1 - \alpha \rho_r g z} \quad (3.52)$$

Assim, a partir da Equação (3.5) e admitindo que a pressão de referência seja a atmosférica, o campo de pressão inicial é dado por:

$$P(z, t = 0) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{1}{1 - \alpha \rho_r g z} \right) \quad (3.53)$$

Nota-se que a pressão atmosférica foi admitida igual à zero, ou seja, com a equação acima é possível calcular a pressão manométrica em qualquer posição no instante inicial. Além disso, como não há escoamento, os campos iniciais da tensão de cisalhamento e taxa de cisalhamento são nulos:

$$\tau(r, z, t = 0) = 0 \quad (3.54)$$

$$\dot{\gamma}(r, z, t = 0) = 0 \quad (3.55)$$

O campo do parâmetro estrutural inicial é representado pelo valor inicial do parâmetro estrutural,  $\lambda_{t=0}$  – pode variar de zero a  $\lambda_0$ :

$$\lambda(r, z, t = 0) = \lambda_{t=0} \quad (3.56)$$



### 3.6 Condições de Contorno

Para iniciar a circulação do fluido de perfuração em repouso na tubulação, duas situações são possíveis:

(a) Pressão constante na entrada da tubulação:

$$P(z = 0, t) = P_{ent} = P_B h(t) \quad (3.57)$$

$$v(z = 0, r, t) = 0 \quad (3.58)$$

(b) Vazão constante na entrada da tubulação:

$$Q(z = 0, t) = Q_{ent} = Q_B h(t) \quad (3.59)$$

Como a área de entrada é constante, a Equação (3.59) pode ser escrita em função da velocidade média na entrada:

$$V(z = 0, t) = V_{ent} = \frac{Q_B}{A} h(t) \quad (3.60)$$

sendo os subscritos *ent* e *B* a entrada e a bomba, respectivamente,  $h(t)$  é a função heaviside representada na Figura 3.2 e definida por:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

A função heaviside representa o início da operação de bombeio: inicialmente a bomba encontrava-se desligada e, a partir de determinado instante, a chave é ligada e o bombeio começa.

Como não foi possível obter solução analítica para o perfil de velocidade completamente desenvolvido dos fluidos em análise, o perfil de entrada foi admitido como o completamente desenvolvido para um fluido Lei de Potência, que para um tubo pode ser escrito como:

$$u(z = 0, r, t) = V_{ent} \frac{1 + 3n}{1 + n} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_1} \right)^{\frac{1}{n} + 1} \right] \quad (3.62)$$

No acoplamento no fundo do poço formado pelo fim do tubo e início do espaço anular, utiliza-se a hipótese de que não existe perda de fluido para a formação. Assim, a vazão que

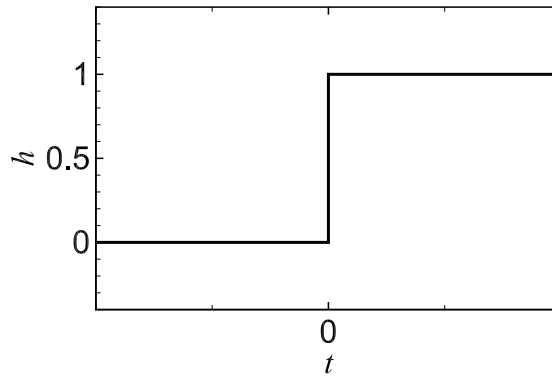


Figura 3.2 – Função Heaviside.

sai da coluna de perfuração é igual à que entrada na região anular:

$$Q_1 = Q_2 \rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (3.63)$$

Logo, obtém-se a velocidade média da entrada do anular em função das áreas de cada região e da velocidade média de saída da coluna de perfuração:

$$V_2(z = L_1, t) = V_1(z = L_1, t) \frac{A_1}{A_2} = V_1(z = L_1, t) \frac{R_1^2}{R_{2,e}^2 - R_{2,i}^2} \quad (3.64)$$

Além disso, considera-se que a pressão no fundo do poço é igual para a coluna de perfuração e para o espaço anular:

$$P_2(z = L_1, t) = P_1(z = L_1, t) \quad (3.65)$$

Para a saída do fluido de perfuração na tubulação, considerando que  $L_1 \geq L_2$ , duas situações são possíveis:

- (a) Poço aberto - a pressão e a massa específica na saída são constantes e iguais aos valores iniciais:

$$\rho(z = L_T, t) = \frac{\rho_r}{1 - \alpha \rho_r g (L_1 - L_2)} \quad (3.66)$$

$$P(z = L_T, t) = \frac{1}{1 - \alpha \rho_r g (L_1 - L_2)} \quad (3.67)$$

$$v(z = L_T, r, t) = 0 \quad (3.68)$$

(b) Poço fechado - a velocidade média na saída é nula:

$$V(z = L_T, t) = 0 \quad (3.69)$$

$$u(z = L_T, r, t) = 0 \quad (3.70)$$

Nas paredes do tubo e do espaço anular, considera-se a condição de não deslizamento:

$$\begin{aligned} u(r = R_1, z, t) &= 0 & 0 \leq z \leq L_1 \\ u(r = D_{2,i}, z, t) &= 0 & L_1 \leq z \leq L_T \\ u(r = R_{2,e}, z, t) &= 0 & L_1 \leq z \leq L_T \end{aligned} \quad (3.71)$$

Para o centro do tubo, considera-se a condição de simetria:

$$\tau(r = 0, z, t) = 0 \quad 0 \leq z \leq L_1 \quad (3.72)$$

### 3.7 Síntese do Capítulo 3

Neste capítulo, definiu-se a geometria do problema como um tubo concêntrico acoplado a uma região anular representando, respectivamente, o interior da coluna de perfuração e o espaço anular entre a parede de poço e a coluna de perfuração. Adotaram-se então algumas hipóteses simplificadoras, como: escoamento laminar, isotérmico, unidimensional, axissimétrico, fracamente compressível, sem presença de cascalhos, tensão normal na direção  $z$  desprezível e pressão dependente somente da direção axial. A partir dessas hipóteses, as equações da conservação da massa, quantidade de movimento, de estado e constitutiva foram desenvolvidas para dois modelos. O Modelo 1 admite que a razão de aspecto é muito grande, portanto a velocidade radial é negligenciada, e considera os termos advectivos da equação da conservação da massa. O Modelo 2 baseia-se no trabalho de Ghidaoui et al. (2005), a velocidade radial não é desprezada e, através de uma análise de escala, os termos advectivos são negligenciados. Por fim, as condições iniciais e de contorno para os modelos foram definidas. As Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam um resumo das principais equações do problema para o primeiro e segundo modelos, respectivamente.

No próximo capítulo, os modelos numéricos utilizados para a solução do problema proposto serão apresentados e discutidos.

Tabela 3.1 – Resumo das principais equações do problema para o primeiro modelo.

Equação	Expressão	Referência
Equação de Estado	$P = P_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)$	Equação (3.5)
Conservação da Massa	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V) = 0$	Equação (3.17)
Quantidade de Movimento	$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u u) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho g$	Equação (3.10)
Equação Constitutiva	$\tau = \eta (\dot{\gamma}, t) \dot{\gamma}$	Equação (3.27)

Tabela 3.2 – Resumo das principais equações do problema para o segundo modelo.

Equação	Expressão	Referência
Conservação da Massa	$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$	Equação (3.23)
Quantidade de Movimento	$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + g$	Equação (3.26)
Equação Constitutiva	$\tau = \eta (\dot{\gamma}, t) \dot{\gamma}$	Equação (3.27)

## 4 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

O sistema de equações diferenciais não lineares propostos nos modelos matemáticos descritos no Capítulo 3 não possuem solução exata. Por isso, os modelos matemáticos serão resolvidos numericamente através do Método dos Volumes Finitos (PATANKAR, 1980) e do Método das Características (WYLIE; STREETER, 1978), respectivamente. As metodologias de solução serão apresentadas nesse capítulo.

### 4.1 Solução do Modelo 1

A seguir, as equações e condições de contorno do primeiro modelo matemático são discretizadas pelo Método dos Volumes Finitos e as malhas correspondentes são apresentadas. Por fim, mostra-se um fluxograma para facilitar a compreensão do processo de solução.

#### 4.1.1 Discretização das Equações

Nota-se que serão resolvidas quatro equações – conservação da massa, conservação da quantidade de movimento, equação de estado e equação constitutiva – para se obter as seguintes variáveis:  $u(z, r, t)$ ,  $P(z, r, t)$  e  $\tau_{rz}(z, r, t)$ . Para tanto, as equações precisam ser discretizadas em duas dimensões espaciais,  $z$  e  $r$ , e no tempo. O domínio é dividido axialmente em  $N_Z$  volumes finitos regulares de dimensão  $\Delta z = L_T/N_Z$  e radialmente em  $N_R$  volumes finitos de dimensão  $\Delta r_1 = R_1/N_{R,1}$  no tubo e  $\Delta r_2 = (R_{2,e} - R_{2,i})/N_{R,2}$  no espaço anular.

Na direção axial, a malha de pressão e massa específica é deslocada em relação à malha de velocidade e na direção radial, a malha de velocidades é deslocada em relação à malha de tensões. A Figura 4.1 mostra a tubulação disposta horizontalmente para facilitar a visualização. Nota-se que na direção axial os valores de pressão e massa específica são avaliados no centro de cada volume e os valores de velocidade nas fronteiras dos volumes de controle. Na direção radial, a velocidade passa a ser avaliada no centro dos volumes de controle enquanto que as tensões são avaliadas nas fronteiras dos volumes de controle. Como pressão e massa específica dependem apenas da coordenada axial, a representação da posição é denotada pelo índice minúsculo  $i$ , ao passo que a velocidade média é indicada pelo índice  $I$ . Contudo, as velocidades locais são indicadas pelos índices  $I$  e  $j$  (radial), enquanto que as tensões são avaliadas nas posições denotas por  $I$  e  $J$ .

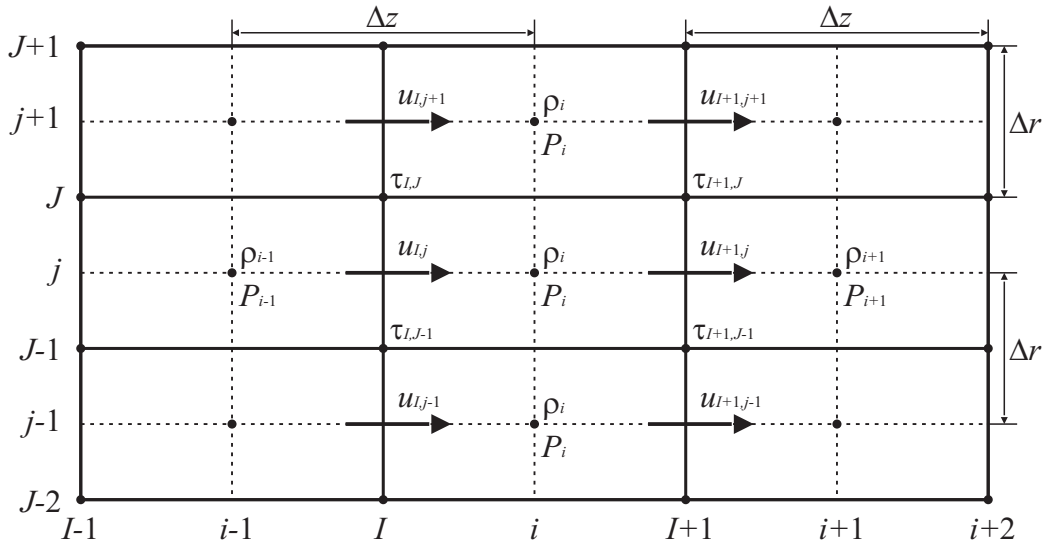


Figura 4.1 – Malha bidimensional utilizada na discretização das equações.

#### 4.1.1.1 Equação da Conservação da Massa

A equação da conservação da massa, Equação (3.17), depende apenas da posição axial e do tempo, por isso uma malha unidimensional pode ser utilizada, conforme a Figura 4.2. Integrando a equação da conservação da massa, Equação (3.17), no volume finito  $i$ , entre as fronteiras  $I$  e  $I + 1$ , com um incremento de tempo  $\Delta t = t^{k+1} - t^k$ , tem-se:

$$\int_I^{I+1} \int_k^{k+1} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dz + \int_k^{k+1} \int_I^{I+1} \frac{\partial}{\partial z} (\rho V) dz dt = 0 \quad (4.1)$$

sendo  $k$  o instante de tempo atual e  $k + 1$  o instante de tempo futuro.

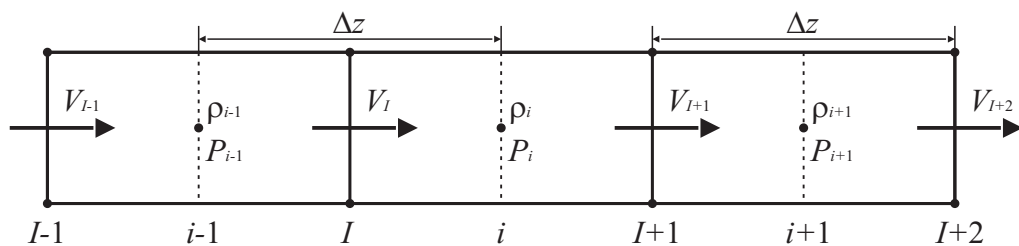


Figura 4.2 – Malha unidimensional axial utilizada na discretização das equações da conservação da massa e de estado.

Realizando a primeira integração da Equação (4.1) resulta em:

$$\int_I^{I+1} (\rho^{k+1} - \rho^k) dz + \int_k^{k+1} [(\rho V)_{I+1} - (\rho V)_I] dt = 0 \quad (4.2)$$

Considerando a massa específica como um valor médio no centro do volume de controle

e utilizando a formulação totalmente implícita (PATANKAR, 1980), chega-se à:

$$(\rho_i^{k+1} - \rho_i^k) \Delta z + [(\rho V)_{I+1}^{k+1} - (\rho V)_I^{k+1}] \Delta t = 0 \quad (4.3)$$

Utilizando a aproximação *Upwind* de primeira ordem (PATANKAR, 1980) para avaliar a massa específica em  $I$  e  $I + 1$ ,  $\rho_I^{k+1} = \rho_{i-1}^{k+1}$  e  $\rho_{I+1}^{k+1} = \rho_i^{k+1}$ , tem-se:

$$(\rho_i^{k+1} - \rho_i^k) \frac{\Delta z}{\Delta t} + \rho_i^{k+1} V_{I+1}^{k+1} - \rho_{i-1}^{k+1} V_I^{k+1} = 0 \quad (4.4)$$

Rearranjando a Equação (4.4), chega-se à:

$$\rho_i^{k+1} = \frac{b_i \rho_i^k + c_i \rho_{i-1}^{k+1}}{a_i} \quad (4.5)$$

sendo  $a_i = V_{I+1}^{k+1} + \Delta z / \Delta t$ ,  $b_i = \Delta z / \Delta t$  e  $c_i = V_I^{k+1}$ .

Conhecendo a velocidade média nas posições  $I$  e  $I + 1$ , e a massa específica nas posições  $i$  no tempo atual e  $i - 1$  no tempo futuro, pode-se avaliar o campo de massa específica ao longo de todo o domínio.

#### 4.1.1.2 Equação de Estado

Conhecendo o campo de massa específica ao longo do domínio, pode-se determinar a pressão em todo domínio através da equação de estado (Equação (3.5)):

$$P_i^{k+1} = P_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{\rho_i^{k+1}}{\rho_0} \right) \quad (4.6)$$

#### 4.1.1.3 Equação Constitutiva

A equação constitutiva é resolvida radialmente. Para facilitar a visualização, a malha radial no volume de controle transversal finito  $I$  foi desenhada na Figura 4.3.

Para obter o campo de tensões na posição axial  $I$  e radial  $J$ , integra-se a equação constitutiva de Mendes e Thompson (2013), Equação (3.46), no volume finito  $I$  e  $J$  da Figura 4.1, entre as faces  $i - 1$  e  $i$  e entre  $j$  e  $j + 1$ , com incremento de tempo  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \int_j^{j+1} \int_{i-1}^i \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi r dz dr dt + \int_j^{j+1} \int_k^{k+1} \int_{i-1}^i \theta_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) 2\pi r dz dt dr = \\ \int_k^{k+1} \int_j^{j+1} \int_{i-1}^i \frac{\theta_2}{\eta_\infty} \frac{\tau}{\theta_1} 2\pi r dz dr dt + \int_j^{j+1} \int_k^{k+1} \int_{i-1}^i \frac{\theta_2}{\eta_\infty} \frac{\partial \tau}{\partial t} 2\pi r dz dt dr \end{aligned} \quad (4.7)$$

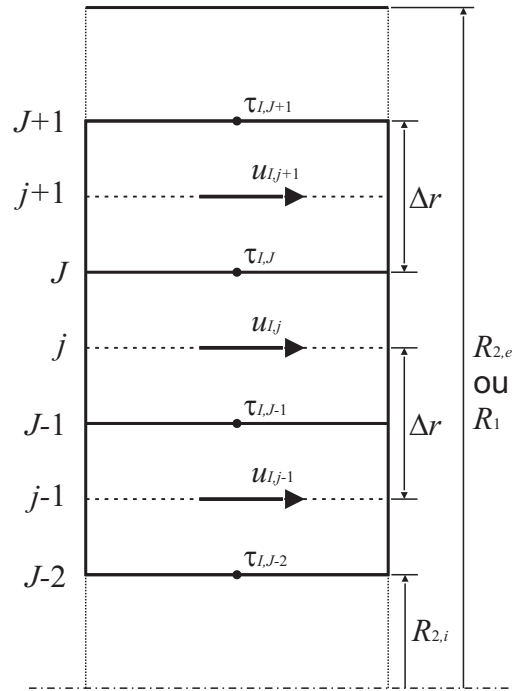


Figura 4.3 – Malha unidimensional radial utilizada na discretização das equações.

Realizando a primeira e a segunda integração, analisando as propriedades médias no centro do volume  $I$  e  $J$ , tem-se:

$$\int_k^{k+1} (u_{I,j+1} - u_{I,j}) 2\pi r_J dt + \int_j^{j+1} \theta_{2,I}^{k+1} \left[ \left( \frac{\partial u_I}{\partial r} \right)^{k+1} - \left( \frac{\partial u_I}{\partial r} \right)^k \right] 2\pi r dr =$$

$$\int_k^{k+1} \frac{\theta_{2,I,J}}{\eta_\infty} \frac{\tau_{I,J}}{\theta_{1,I,J}} 2\pi r_J \Delta r dt + \int_j^{j+1} \frac{\theta_{2,I}^{k+1}}{\eta_\infty} (\tau_I^{k+1} - \tau_I^k) 2\pi r dr$$
(4.8)

Utilizando a formulação totalmente implícita:

$$(u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}) 2\pi r_J \Delta t + \theta_{2,I,J}^{k+1} [(u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}) - (u_{I,j+1}^k - u_{I,j}^k)] 2\pi r_J =$$

$$\frac{\theta_{2,I,J}^{k+1}}{\eta_\infty} \frac{\tau_{I,J}^{k+1}}{\theta_{1,I,J}^{k+1}} 2\pi r_J \Delta r \Delta t + \frac{\theta_{2,I,J}^{k+1}}{\eta_\infty} (\tau_{I,J}^{k+1} - \tau_{I,J}^k) 2\pi r_J \Delta r$$
(4.9)

Reescrevendo a Equação (4.9), obtém-se a tensão na posição axial  $I$  e radial  $J$  no instante  $k + 1$ :

$$\tau_{I,J}^{k+1} \left( 1 + \frac{\Delta t}{\theta_{1,I,J}^{k+1}} \right) = \tau_{I,J}^k + \frac{\eta_\infty}{\Delta r} \left( 1 + \frac{\Delta t}{\theta_{2,I,J}^{k+1}} \right) (u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}) - \frac{\eta_\infty}{\Delta r} (u_{I,j+1}^k - u_{I,j}^k)$$
(4.10)



Rearranjando a Equação (4.10), chega-se a:

$$\tau_{I,J}^{k+1} = \frac{H_{I,J}\tau_{I,J}^k + L_{I,J}(u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}) + M_{I,J}(u_{I,j+1}^k - u_{I,j}^k)}{G_{I,J}} \quad (4.11)$$

sendo  $G_{I,J} = 1 + \Delta t/\theta_{1,I,J}^{k+1}$ ,  $H_{I,J} = 1$ ,  $L_{I,J} = (1 + \Delta t/\theta_{2,I,J}^{k+1})\eta_\infty/\Delta r$  e  $M_{I,J} = -\eta_\infty/\Delta r$ . Conhecendo a velocidade nas posições radiais  $j$  e  $j + 1$  nos instantes atual e futuro, a tensão no instante atual, e os valores do tempo de relaxação e de retardo futuro, pode-se obter a tensão futura em todas as posições.

Os tempos de relaxação e retardo são dependentes do parâmetro estrutural, que pode ser obtido através da integração da equação de evolução temporal do parâmetro estrutural, Equação (3.45). A integração dessa equação no volume  $I, J$ , assim como as demais, pode ser realizada utilizando o método totalmente implícito. Porém, como no segundo modelo as propriedades são calculadas com base no instante atual, opta-se por utilizar o método explícito (PATANKAR, 1980), resultando em:

$$\lambda_{I,J}^{k+1} = \lambda_{I,J}^k + \frac{\Delta t}{t_{eq}} \left[ \left( \frac{1}{\lambda_{I,J}^k} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^a - \left( \frac{\lambda_{I,J}^k}{\lambda_{eq,I,J}^k} \right)^b \left( \frac{1}{\lambda_{eq,I,J}^k} - \frac{1}{\lambda_0} \right)^a \right] \quad (4.12)$$

Conforme a equação acima, necessita-se do parâmetro estrutural de equilíbrio para calcular o parâmetro estrutural futuro. O parâmetro estrutural de equilíbrio corresponde à situação em que a tensão atual instantânea é mantida constante até que o escoamento atinja o equilíbrio. Para isto, substitui-se a tensão  $\tau_{I,J}^k$  na Equação (3.44) para se obter a taxa de cisalhamento de equilíbrio correspondente.

$$\tau_{I,J}^k = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_{eq,I,J}^k}{\tau_y}\right) \right] \left[ (\tau_y - \tau_{yd}) \exp\left(-\frac{\dot{\gamma}_{eq,I,J}^k}{\dot{\gamma}_{yd}}\right) + \tau_{yd} + K (\dot{\gamma}_{eq,I,J}^k)^n \right] + \eta_\infty \dot{\gamma}_{eq,I,J}^k \quad (4.13)$$

A Equação (4.13) é então resolvida pelo método da secante. Finalmente,  $\eta_{eq,I,J}^k$  é substituído na Equação (3.43) para se obter  $\lambda_{eq,I,J}^k$ :

$$\lambda_{eq,I,J}^k = \ln \left( \frac{\eta_{eq,I,J}^k}{\eta_\infty} \right) \quad (4.14)$$

Com o valor de  $\lambda_{eq,I,J}^k$ , a Equação (4.12) pode ser resolvida. Substituindo nas Equações 3.39 e 3.40, a viscosidade  $\eta_v$  e o módulo de elasticidade futuros podem ser calculados para cada posição axial e radial:

$$\eta_{v,I,J}^{k+1} = \eta_\infty \exp(\lambda_{I,J}^{k+1}) \quad (4.15)$$

$$G_{s,I,J}^{k+1} = G_0 \exp \left[ m \left( \frac{1}{\lambda_{I,J}^{k+1}} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \right] \quad (4.16)$$

Substituindo as Equações 4.15 e 4.16 nas definições dos tempos de relaxação e retardo, Equações 3.37 e 3.38, chega-se a:

$$\theta_{1,I,J}^{k+1} = \left( 1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_{v,I,J}^{k+1}} \right) \frac{\eta_{v,I,J}^{k+1}}{G_{s,I,J}^{k+1}} \quad (4.17)$$

$$\theta_{2,I,J}^{k+1} = \left( 1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_{v,I,J}^{k+1}} \right) \frac{\eta_\infty}{G_{s,I,J}^{k+1}} \quad (4.18)$$

A discretização das equações constitutivas para os modelos: Newtoniano, Lei de Potência, Bingham e Herschel-Bulkley proporcionam as seguintes equações, respectivamente:

$$\tau_{I,J}^{k+1} = \eta \frac{u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}}{\Delta r} \quad (4.19)$$

$$\tau_{I,J}^{k+1} = k \left( \frac{u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}}{\Delta r} \right)^n \quad (4.20)$$

$$\tau_{I,J}^{k+1} = \tau_0 \left[ 1 - \exp \left( -m \frac{u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}}{\Delta r} \right) \right] + \mu_\infty \frac{u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}}{\Delta r} \quad (4.21)$$

$$\tau_{I,J}^{k+1} = \tau_0 \left[ 1 - \exp \left( -m \frac{u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}}{\Delta r} \right) \right] + k \left( \frac{u_{I,j+1}^{k+1} - u_{I,j}^{k+1}}{\Delta r} \right)^n \quad (4.22)$$

#### 4.1.1.4 Equação da Quantidade de Movimento

Para obter-se o campo de velocidades na posição axial  $I$  e radial  $j$ , integra-se a equação da quantidade de movimento, Equação (3.10), no volume finito  $I$  e  $j$  da Figura 4.1, entre as faces  $i - 1$  e  $i$  e entre  $J - 1$  e  $J$ , com incremento de tempo  $\Delta t$ , para obter-se:

$$\begin{aligned} & \int_{J-1}^J \int_{i-1}^i \int_k^{k+1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) 2\pi r dt dz dr + \int_k^{k+1} \int_{J-1}^J \int_{i-1}^i \frac{\partial}{\partial z} (\rho u u) 2\pi r dz dr dt \\ & + \int_k^{k+1} \int_{J-1}^J \int_{i-1}^i \frac{\partial P}{\partial z} 2\pi r dz dr dt + \int_k^{k+1} \int_{i-1}^i \int_{J-1}^J \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) 2\pi r dr dz dt \\ & - \int_k^{k+1} \int_{J-1}^J \int_{i-1}^i \rho g 2\pi r dz dr dt = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Realizando a primeira integração, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{J-1}^J \int_{i-1}^i [(\rho u)^{k+1} - (\rho u)^k] 2\pi r dz dr + \int_k^{k+1} \int_{J-1}^J [(\rho u u)_i - (\rho u u)_{i-1}] 2\pi r dr dt \\
& + \int_k^{k+1} \int_{J-1}^J (P_i - P_{i-1}) 2\pi r dr dt + \int_k^{k+1} \int_{i-1}^i (r_J \tau_J - r_{J-1} \tau_{J-1}) 2\pi dz dt \\
& - \int_k^{k+1} \int_{J-1}^J \rho_I \Delta z g 2\pi r dr dt = 0
\end{aligned} \quad (4.24)$$

Utilizando a formulação totalmente implícita e avaliando as propriedades médias no centro do volume  $I$  e  $J$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
& [(\rho u)_{I,j}^{k+1} - (\rho u)_{I,j}^k] \pi (r_J^2 - r_{J-1}^2) \Delta z + (P_i^{k+1} - P_{i-1}^{k+1}) \pi (r_J^2 - r_{J-1}^2) \Delta t \\
& + [(\rho u)_{i,j}^{k+1} u_{i,j}^{k+1} - (\rho u)_{i-1,j}^{k+1} u_{i-1,j}^{k+1}] \pi (r_J^2 - r_{J-1}^2) \Delta t \\
& + (r_J \tau_{I,J}^{k+1} - r_{J-1} \tau_{I,J-1}^{k+1}) 2\pi \Delta t \Delta z - \rho_I^{k+1} g \pi (r_J^2 - r_{J-1}^2) \Delta t \Delta z = 0
\end{aligned} \quad (4.25)$$

Sabendo que  $(r_J^2 - r_{J-1}^2) = 2r_j \Delta r$  e utilizando a aproximação *Upwind* de primeira ordem para avaliar as velocidades nas faces do volume  $I$  e  $j$ , chega-se a:

$$\begin{aligned}
& [(\rho u)_{I,j}^{k+1} - (\rho u)_{I,j}^k] 2\pi r_j \Delta r \Delta z + [(\rho u)_{i,j}^{k+1} u_{i,j}^{k+1} - (\rho u)_{i-1,j}^{k+1} u_{i-1,j}^{k+1}] 2\pi r_j \Delta r \Delta t \\
& + (P_i^{k+1} - P_{i-1}^{k+1}) 2\pi r_j \Delta r \Delta t + (r_J \tau_{I,J}^{k+1} - r_{J-1} \tau_{I,J-1}^{k+1}) 2\pi \Delta t \Delta z \\
& - \rho_I^{k+1} g 2\pi r_j \Delta r \Delta t \Delta z = 0
\end{aligned} \quad (4.26)$$

Reescrevendo a Equação (4.26):

$$\begin{aligned}
& (\rho_I^{k+1} u_{I,j}^{k+1} - \rho_I^k u_{I,j}^k) \frac{\Delta z}{\Delta t} + (\rho_i^{k+1} u_{i,j}^{k+1} u_{i,j}^{k+1} - \rho_{i-1}^{k+1} u_{i-1,j}^{k+1} u_{i-1,j}^{k+1}) + (P_i^{k+1} - P_{i-1}^{k+1}) \\
& + \frac{r_J \tau_{I,J}^{k+1} - r_{J-1} \tau_{I,J-1}^{k+1}}{r_J} \frac{\Delta z}{\Delta r} - \rho_I^{k+1} g \Delta z = 0
\end{aligned} \quad (4.27)$$

Como algumas massas específicas e velocidades não estão disponíveis nas posições avaliadas, as médias dos seus valores são calculadas e utilizadas:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\rho_i^{k+1} + \rho_{i-1}^{k+1}}{2} u_{I,j}^{k+1} - \frac{\rho_i^k + \rho_{i-1}^k}{2} u_{I,j}^k \right) \frac{\Delta z}{\Delta t} \\
& + \left( \rho_{i,j}^{k+1} \frac{u_{I+1,j}^{k+1} + u_{I,j}^{k+1}}{2} u_{I,j}^{k+1} - \rho_{i-1,j}^{k+1} \frac{u_{I,j}^{k+1} + u_{I-1,j}^{k+1}}{2} u_{I-1,j}^{k+1} \right) \\
& + (P_i^{k+1} - P_{i-1}^{k+1}) + \frac{r_J \tau_{I,J}^{k+1} - r_{J-1} \tau_{I,J-1}^{k+1}}{r_J} \frac{\Delta z}{\Delta r} - \frac{\rho_i^{k+1} + \rho_{i-1}^{k+1}}{2} g \Delta z = 0
\end{aligned} \quad (4.28)$$

Rearranjando a Equação (4.28), tem-se:

$$u_{I,j}^{k+1} = \frac{B_{I,j}u_{I,j}^k + C_{I,j}u_{I,j-1}^{k+1} + D_{I,j}\tau_{I,j}^{k+1} + E_{I,j}\tau_{I,j-1}^{k+1} + F_{I,j}}{A_{I,j}} \quad (4.29)$$

sendo  $A_{I,j} = (\rho_i^{k+1} + \rho_{i-1}^{k+1}) \Delta z / (2\Delta t) + \rho_{i,j}^{k+1} (u_{I+1,j}^{k+1} + u_{I,j}^{k+1}) / 2$ ,  $B_{I,j} = (\rho_i^k + \rho_{i-1}^k) \Delta z / (2\Delta t)$ ,  $C_{I,j} = \rho_{i-1,j}^{k+1} (u_{I,j}^{k+1} + u_{I-1,j}^{k+1}) / 2$ ,  $D_{I,j} = -(r_j \Delta z) / (r_j \Delta r)$ ,  $E_{I,j} = (r_{j-1} \Delta z) / (r_j \Delta r)$  e  $F_{I,j} = -(P_i^{k+1} - P_{i-1}^{k+1}) + (\rho_i^{k+1} + \rho_{i-1}^{k+1}) g \Delta z / 2$ .

A equação acima é válida para todo o domínio.

#### 4.1.2 Condições de Contorno

##### Entrada do tubo

Para as condições de velocidade ou pressão especificada na entrada, a equação da conservação da massa, Equação (3.17), pode ser integrada no primeiro meio volume de controle finito, conforme a Figura 4.4, de *ent* a *I*, para obter-se:

$$\left[ \rho_{(ent+I)/2}^{k+1} - \rho_{(ent+I)/2}^k \right] \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \rho_I^{k+1} V_I^{k+1} - \rho_{ent}^{k+1} V_{ent}^{k+1} = 0 \quad (4.30)$$

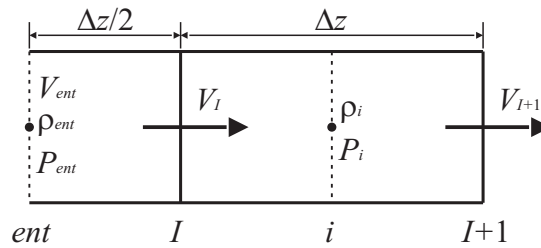


Figura 4.4 – Detalhe da entrada com o meio volume na malha unidimensional axial utilizada na discretização das equações.

Aproximando as massas específicas desconhecidas pelas médias, chega-se à:

$$\left( \frac{3\rho_{ent}^{k+1} + \rho_i^{k+1}}{4} - \frac{3\rho_{ent}^k + \rho_i^k}{4} \right) \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{\rho_{ent}^{k+1} + \rho_i^{k+1}}{2} V_I^{k+1} - \rho_{ent}^{k+1} V_{ent}^{k+1} = 0 \quad (4.31)$$

Para a condição de velocidade conhecida na entrada, resolve-se a Equação (4.31) e obtém-se a massa específica na entrada:

$$\left( \frac{3}{4} \frac{\Delta z}{\Delta t} + V_I^{k+1} - 2V_{ent}^{k+1} \right) \rho_{ent}^{k+1} = \left( \frac{3}{4} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) \rho_{ent}^k + \left( \frac{1}{4} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) \rho_i^k - \left( \frac{1}{4} \frac{\Delta z}{\Delta t} + V_I^{k+1} \right) \rho_i^{k+1} \quad (4.32)$$

Rearranjando a Equação (4.32), chega-se à:

$$\rho_{ent}^{k+1} = \frac{b_{ent}\rho_{ent}^k + c_{ent}\rho_i^k + d_{ent}\rho_i^{k+1}}{a_{ent}} \quad (4.33)$$

sendo  $a_{ent} = 3\Delta z/4\Delta t + V_I^{k+1} - 2V_{ent}^{k+1}$ ,  $b_{ent} = 3\Delta z/4\Delta t$ ,  $c_{ent} = \Delta z/4\Delta t$  e  $d_{ent} = -\Delta z/4\Delta t - V_I^{k+1}$ .

A pressão de entrada é obtida pela aplicação da equação de estado, Equação (4.6):

$$P_{ent}^{k+1} = P_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{\rho_{ent}^{k+1}}{\rho_0} \right) \quad (4.34)$$

Para a condição de pressão conhecida na entrada, utiliza-se a equação de estado, Equação (3.5), para obter a massa específica em função da pressão de entrada:

$$\rho_{ent}^{k+1} = \rho_0 \exp [\alpha (P_{ent}^{k+1} - P_0)] \quad (4.35)$$

Resolvendo a Equação (4.31) para a velocidade média na entrada, sabendo que a massa específica na entrada é conhecida, obtém-se a velocidade na entrada:

$$V_{ent}^{k+1} = \frac{1}{2}V_I^{k+1} \left( 1 + \frac{\rho_i^{k+1}}{\rho_{ent}^{k+1}} \right) + \left( 1 - \frac{\rho_{ent}^k}{\rho_{ent}^{k+1}} \right) \frac{3}{8} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \left( \frac{\rho_i^{k+1} - \rho_i^k}{\rho_{ent}^{k+1}} \right) \frac{1}{8} \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (4.36)$$

Para o perfil de velocidades na entrada, adota-se a hipótese de que o fluido entra com perfil de Lei de Potência completamente desenvolvido. Portanto, o perfil obedece a Equação (4.37) para o tubo.

$$u_{ent,j}^{k+1} = V_{ent}^{k+1} \frac{1 + 3n}{1 + n} \left[ 1 - (r_j/R_1)^{\frac{1}{n}+1} \right] \quad (4.37)$$

#### Saída do Espaço Anular

Para obter a massa específica e pressão na saída, integra-se a equação da conservação da massa no volume de controle finito entre  $I + 1$  e  $sai$ , conforme mostra a Figura 4.5.

$$\left( \frac{3\rho_{sai}^{k+1} + \rho_i^{k+1}}{4} - \frac{3\rho_{sai}^k + \rho_i^k}{4} \right) \frac{1}{2} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \rho_{sai}^{k+1} V_{sai}^{k+1} - \frac{\rho_{sai}^{k+1} + \rho_i^{k+1}}{2} V_{I+1}^{k+1} = 0 \quad (4.38)$$

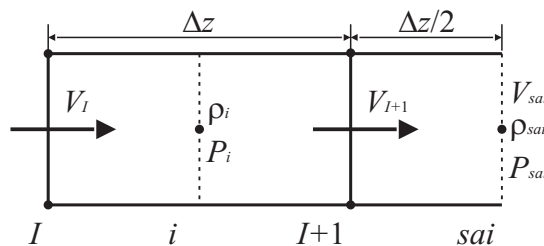


Figura 4.5 – Detalhe da saída com o meio volume na malha unidimensional axial utilizada na discretização das equações.

A pressão de saída é obtida aplicação da equação de estado, Equação (4.6):

$$P_{sai}^{k+1} = P_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{\rho_{sai}^{k+1}}{\rho_0} \right) \quad (4.39)$$

Caso a condição na saída seja de poço fechado (velocidade nula na saída), utiliza-se a Equação (4.38) para obter a massa específica na saída:

$$\left( \frac{3 \Delta z}{4 \Delta t} - V_{I+1}^{k+1} \right) \rho_{sai}^{k+1} = \left( \frac{3 \Delta z}{4 \Delta t} \right) \rho_{sai}^k + \left( \frac{1 \Delta z}{4 \Delta t} \right) \rho_i^k - \left( \frac{1 \Delta z}{4 \Delta t} - V_{I+1}^{k+1} \right) \rho_i^{k+1} \quad (4.40)$$

Rearranjando a Equação (4.40), tem-se:

$$\rho_{sai}^{k+1} = \frac{b_{sai} \rho_{sai}^k + c_{sai} \rho_i^k + d_{sai} \rho_i^{k+1}}{a_{sai}} \quad (4.41)$$

sendo  $a_{sai} = 3\Delta z/4\Delta t + 2V_{sai}^{k+1} - V_{I+1}^{k+1}$ ,  $b_{sai} = 3\Delta z/4\Delta t$ ,  $c_{sai} = \Delta z/4\Delta t$  e  $d_{sai} = -\Delta z/4\Delta t + V_{I+1}^{k+1}$ .

Caso a condição na saída seja de poço aberto (pressão igual à pressão atmosférica), utiliza-se a equação de estado para determinar a massa específica:

$$\rho_{k+1}^{sai} = rho_0 \exp [\alpha (P_{k+1}^{sai} - P_0)] \quad (4.42)$$

A Equação (4.38) é então empregada para determinar a velocidade média na saída:

$$V_{sai}^{k+1} = \frac{1}{2} V_{I+1}^{k+1} \left( 1 + \frac{\rho_i^{k+1}}{\rho_{sai}^{k+1}} \right) + \left( \frac{\rho_{sai}^k}{\rho_{sai}^{k+1}} - 1 \right) \frac{3 \Delta z}{8 \Delta t} + \left( \frac{\rho_i^k - \rho_i^{k+1}}{\rho_{sai}^{k+1}} \right) \frac{1 \Delta z}{8 \Delta t} \quad (4.43)$$

Para o perfil de velocidades na saída do anular, assume-se que a velocidade local é proporcional à velocidade média e usa-se a Equação (4.43) para determinar a velocidade local:

$$u_{sai,j}^{k+1} = \frac{1}{2} u_{I+1,j}^{k+1} \left( 1 + \frac{\rho_i^{k+1}}{\rho_{sai}^{k+1}} \right) + \left( \frac{\rho_{sai}^k}{\rho_{sai}^{k+1}} - 1 \right) \frac{3 \Delta z}{8 \Delta t} + \left( \frac{\rho_i^k - \rho_i^{k+1}}{\rho_{sai}^{k+1}} \right) \frac{1 \Delta z}{8 \Delta t} \quad (4.44)$$

#### Acoplamento Tubo-Anular

Para o acoplamento no fundo do poço, considera-se que a pressão é uniforme na seção transversal e que a velocidade de saída obedece a equação da continuidade, Equação (3.63). O perfil de velocidades na saída do tubo é calculado conforme a Equação (4.44) e o perfil de velocidades na entrada do espaço anular também é proporcional à velocidade média:

$$u_{ent,j}^{k+1} = \frac{1}{2} u_{I,j}^{k+1} \left( 1 + \frac{\rho_i^{k+1}}{\rho_{ent}^{k+1}} \right) + \left( 1 - \frac{\rho_{ent}^k}{\rho_{ent}^{k+1}} \right) \frac{3 \Delta z}{8 \Delta t} + \left( \frac{\rho_i^{k+1} - \rho_i^k}{\rho_{ent}^{k+1}} \right) \frac{1 \Delta z}{8 \Delta t} \quad (4.45)$$

#### Paredes do tubo e do espaço anular

Na parede interna do anular foi utilizada uma aproximação polinomial de segunda ordem para melhorar o resultado próximo à parede. Dessa forma, a condição de não deslizamento é representada por:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_I^{k+1} = \frac{7u_{I,j}^{k+1} - u_{I,j+1}^{k+1} - 6u_{I,int}^{k+1}}{2\Delta r} \quad (4.46)$$

A partir do procedimento descrito na subseção 4.1.1.3 e com a consideração de que a taxa de cisalhamento na parede interna do espaço anular é discretizada conforme a Equação (4.46), as equações constitutivas para os modelos Newtoniano, Lei de Potência, Bingham, Herschel-Bulkley e Mendes e Thompson (2013) são representadas, respectivamente, por:

$$\tau_{I,int}^{k+1} = \eta \frac{7u_{I,j}^{k+1} - u_{I,j+1}^{k+1} - 6u_{I,int}^{k+1}}{2\Delta r} \quad (4.47)$$

$$\tau_{I,int}^{k+1} = k \left( \frac{7u_{I,j}^{k+1} - u_{I,j+1}^{k+1} - 6u_{I,int}^{k+1}}{2\Delta r} \right)^n \quad (4.48)$$

$$\tau_{I,int}^{k+1} = \tau_0 \left[ 1 - \exp \left( -m \frac{7u_{I,j}^{k+1} - u_{I,j+1}^{k+1} - 6u_{I,int}^{k+1}}{2\Delta r} \right) \right] + \mu_\infty \frac{7u_{I,j}^{k+1} - u_{I,j+1}^{k+1} - 6u_{I,int}^{k+1}}{2\Delta r} \quad (4.49)$$

$$\tau_{I,int}^{k+1} = \tau_0 \left[ 1 - \exp \left( -m \frac{7u_{I,j}^{k+1} - u_{I,j+1}^{k+1} - 6u_{I,int}^{k+1}}{2\Delta r} \right) \right] + k \left( \frac{7u_{I,j}^{k+1} - u_{I,j+1}^{k+1} - 6u_{I,int}^{k+1}}{2\Delta r} \right)^n \quad (4.50)$$

$$\tau_{I,int}^{k+1} = \frac{H_{I,int} \tau_{I,int}^k + L_{I,int} (7u_{I,j}^{k+1} - u_{I,j+1}^{k+1} - 6u_{I,int}^{k+1}) + M_{I,int} (7u_{I,j}^k - u_{I,j+1}^k - 6u_{I,int}^k)}{G_{I,int}} \quad (4.51)$$

sendo  $G_{I,int} = 1 + \Delta t / \theta_{1,I,int}^{k+1}$ ,  $H_{I,int} = 1$ ,  $L_{I,int} = (1 + \Delta t / \theta_{2,I,int}^{k+1}) \eta_\infty / 2\Delta r$  e  $M_{I,int} = -\eta_\infty / 2\Delta r$ . Pela condição de não deslizamento, a velocidade na parede interna do anular é zero, ou seja,  $u_{I,int}^{k+1} = 0$ .

A parede externa do espaço anular e interna do tubo também possuem a condição de não deslizamento, que pode ser escrita como:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_I^{k+1} = \frac{u_{I,j-1}^{k+1} - 7u_{I,j}^{k+1} + 6u_{I,ext}^{k+1}}{2\Delta r} \quad (4.52)$$

Dessa forma, repetindo o procedimento apresentado acima no volume de controle das paredes externa do espaço anular e interna do tubo, as equações constitutivas para os modelos Newtoniano, Lei de Potência, Bingham, Herschel-Bulkley e Mendes e Thompson

(2013) são representadas, respectivamente, por:

$$\tau_{I,ext}^{k+1} = \eta \frac{u_{I,j-1}^{k+1} - 7u_{I,j}^{k+1} + 6u_{I,ext}^{k+1}}{2\Delta r} \quad (4.53)$$

$$\tau_{I,ext}^{k+1} = k \left( \frac{u_{I,j-1}^{k+1} - 7u_{I,j}^{k+1} + 6u_{I,ext}^{k+1}}{2\Delta r} \right)^n \quad (4.54)$$

$$\tau_{I,ext}^{k+1} = \tau_0 \left[ 1 - \exp \left( -m \frac{u_{I,j-1}^{k+1} - 7u_{I,j}^{k+1} + 6u_{I,ext}^{k+1}}{2\Delta r} \right) \right] + \mu_\infty \frac{u_{I,j-1}^{k+1} - 7u_{I,j}^{k+1} + 6u_{I,ext}^{k+1}}{2\Delta r} \quad (4.55)$$

$$\tau_{I,ext}^{k+1} = \tau_0 \left[ 1 - \exp \left( -m \frac{u_{I,j-1}^{k+1} - 7u_{I,j}^{k+1} + 6u_{I,ext}^{k+1}}{2\Delta r} \right) \right] + k \left( \frac{u_{I,j-1}^{k+1} - 7u_{I,j}^{k+1} + 6u_{I,ext}^{k+1}}{2\Delta r} \right)^n \quad (4.56)$$

$$\tau_{I,ext}^{k+1} = \frac{H_{I,ext} \tau_{I,ext}^k + L_{I,ext} (u_{I,j-1}^{k+1} - 7u_{I,j}^{k+1} + 6u_{I,ext}^{k+1}) + M_{I,ext} (u_{I,j-1}^k - 7u_{I,j}^k + 6u_{I,ext}^k)}{G_{I,ext}} \quad (4.57)$$

sendo  $G_{I,ext} = 1 + \Delta t / \theta_{1,I,ext}^{k+1}$ ,  $H_{I,ext} = 1$ ,  $L_{I,ext} = (1 + \Delta t / \theta_{2,I,ext}^{k+1}) \eta_\infty / 2\Delta r$  e  $M_{I,ext} = -\eta_\infty / 2\Delta r$ . Pela condição de não deslizamento, a velocidade na parede interna do anular é zero, ou seja,  $u_{I,ext}^{k+1} = 0$ .

Finalmente, a condição de simetria no centro do tubo é representada por:

$$\tau_{I,meio} = 0 \quad (4.58)$$

### 4.1.3 Fluxograma

Nota-se que a equação para obtenção do campo de massa específica depende do campo de velocidades e que a equação para obtenção do campo de velocidades depende tanto dos campos de massa específica quanto de pressão e tensão. Dessa forma, não é possível atingir a solução diretamente e um processo iterativo é necessário.

A seguir um fluxograma para a solução iterativa do problema é apresentado. Contudo, primeiramente é necessário demonstrar o critério que deve ser obedecido para cálculo do passo de tempo e critério de convergência.

Fortuna (2000) afirma que é necessário ser cauteloso na escolha das malhas espaciais e temporais, pois soluções de equações hiperbólicas, como a do modelo desenvolvido, podem apresentar instabilidades e dispersões numéricas. Dessa forma, um critério de estabilidade que relaciona a malha axial, a malha temporal e a velocidade de propagação da onda de pressão, deve ser obedecido (COURANT et al., 1928):

$$CFL = c \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1 \quad (4.59)$$



sendo *CFL* (*Courant–Friedrichs–Lewy Condition*) o critério de estabilidade. Fortuna (2000) infere que valores próximos da unidade garantem a estabilidade do problema. Portanto, o passo de tempo a ser utilizado será avaliado em função do *CFL* da seguinte maneira:

$$\Delta t = \frac{CFL \Delta z}{c} \quad (4.60)$$

Na seção 5.4 o efeito do *CFL* é avaliado.

A soma dos resíduos da equação da conservação da massa para todos os volumes de controle axiais pode ser calculada por:

$$Res = \sum_{i=1}^{NZ} |a_i \rho_i^{k+1} - b_i \rho_i^k - c_i \rho_{i-1}^{k+1}| \quad (4.61)$$

sendo *Res* o resíduo absoluto. O resíduo relativo, *Res\**, é utilizado como critério de convergência e representa a razão entre o resíduo absoluto e a vazão mássica que entra na tubulação:

$$Res^* = \frac{R}{\rho_{ent}^{k+1} V_{ent}^{k+1}} \quad (4.62)$$

O fluxograma da Figura 4.6 mostra a solução iterativa das equações do modelo matemático e obedece a seguinte sequência:

1. Leitura dos dados de entrada e inicialização das variáveis: condição de contorno (pressão ou velocidade na entrada; poço aberto ou fechado), comprimentos ( $L_1$  e  $L_2$ ), diâmetros ( $D_1$ ,  $D_{2,i}$  e  $D_{2,e}$ ), massa específica de referência ( $\rho_0$ ), compressibilidade ( $\alpha$ ), tempo máximo ( $t_{max}$ ), número de divisões transversais ( $N_Z$ ), número de divisões radiais ( $N_R$ ), parâmetros do fluido ( $\eta_\infty$ ,  $\eta_0$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_{yd}$ ,  $\dot{\gamma}_{yd}$ ,  $K$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $t_{eq}$ ,  $G_0$ ,  $m$ , e  $\lambda(t=0)$ ), campo de velocidades inicial (nulo), e uma estimativa para o campo de velocidades para o primeiro passo de tempo. Com o número de divisões transversais e radiais, calcula-se a dimensão de cada volume ( $\Delta z$  e  $\Delta r$ ). Com a dimensão transversal e a velocidade de propagação da onda de pressão, calcula-se  $\Delta t$ .
2. Cálculo dos coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  da equação da conservação da massa, Equação (4.5).
3. Determinação de  $\rho_i^{k+1}$  através dos coeficientes obtidos em 2.
4. Determinação de  $P_i^{k+1}$  em função da massa específica calculada em 3, através da equação de estado, Equação (4.6).
5. Cálculo dos coeficientes  $G_{I,j}$ ,  $H_{I,j}$ ,  $L_{I,j}$  e  $M_{I,j}$  da equação constitutiva, Equação (4.11).

6. Determinação  $\tau_{I,j}^{k+1}$  através dos coeficientes obtidos em 5.
7. Cálculo dos coeficientes  $A_{I,j}$ ,  $B_{I,j}$ ,  $C_{I,j}$ ,  $D_{I,j}$ ,  $E_{I,j}$  e  $F_{I,j}$  da equação da quantidade de movimento, Equação (4.29).
8. Determinação de  $u_{I,j}^{k+1}$  através dos coeficientes obtidos em 7.
9. Testa-se se o comprimento radial total ( $R_1$  ou  $R_{2,e}$ ) foi atingido. Caso tenha sido, parte-se para o passo seguinte. Caso contrário, incrementa-se o valor da posição radial e volta-se ao passo 5.
10. Testa-se se o comprimento total ( $L_T$ ) foi atingido. Caso tenha sido, parte-se para o passo seguinte. Caso contrário, incrementa-se o valor da posição transversal e volta-se ao passo 2.
11. Testa-se a convergência para todo o campo de velocidades conforme a Equação (4.62). Caso tenha ocorrido, parte-se para o passo seguinte. Caso contrário, volta-se para o passo 2.
12. Testa-se se o tempo máximo foi atingido. Caso tenha sido, encerra-se o programa. Caso contrário, incrementa-se o passo de tempo e volta-se ao passo 2.

## 4.2 Solução do Modelo 2

As equações da conservação da massa, Equação (3.23), e da quantidade de movimento, Equação (3.26), formam um conjunto de equações diferenciais parciais hiperbólicas que possuem como incógnitas a pressão, as velocidades axial e radial e como variáveis independentes o tempo, a posição axial e radial. Esse problema pode ser resolvido utilizando o método das características de forma a transformar o conjunto de equações diferenciais parciais em totais. Essas equações podem então ser integradas e, então, discretizadas por diferenças finitas (ZHAO; GHIDAOU, 2003).

Primeiramente, as Equações 3.23 e 3.26 são combinadas linearmente utilizando o multiplicador  $\xi$ :

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) - g \right] + \xi \left[ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0 \quad (4.63)$$

Rearranjando os termos da Equação (4.63):

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \xi \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \xi \left[ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\xi \rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right] + \xi \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) - g = 0 \quad (4.64)$$

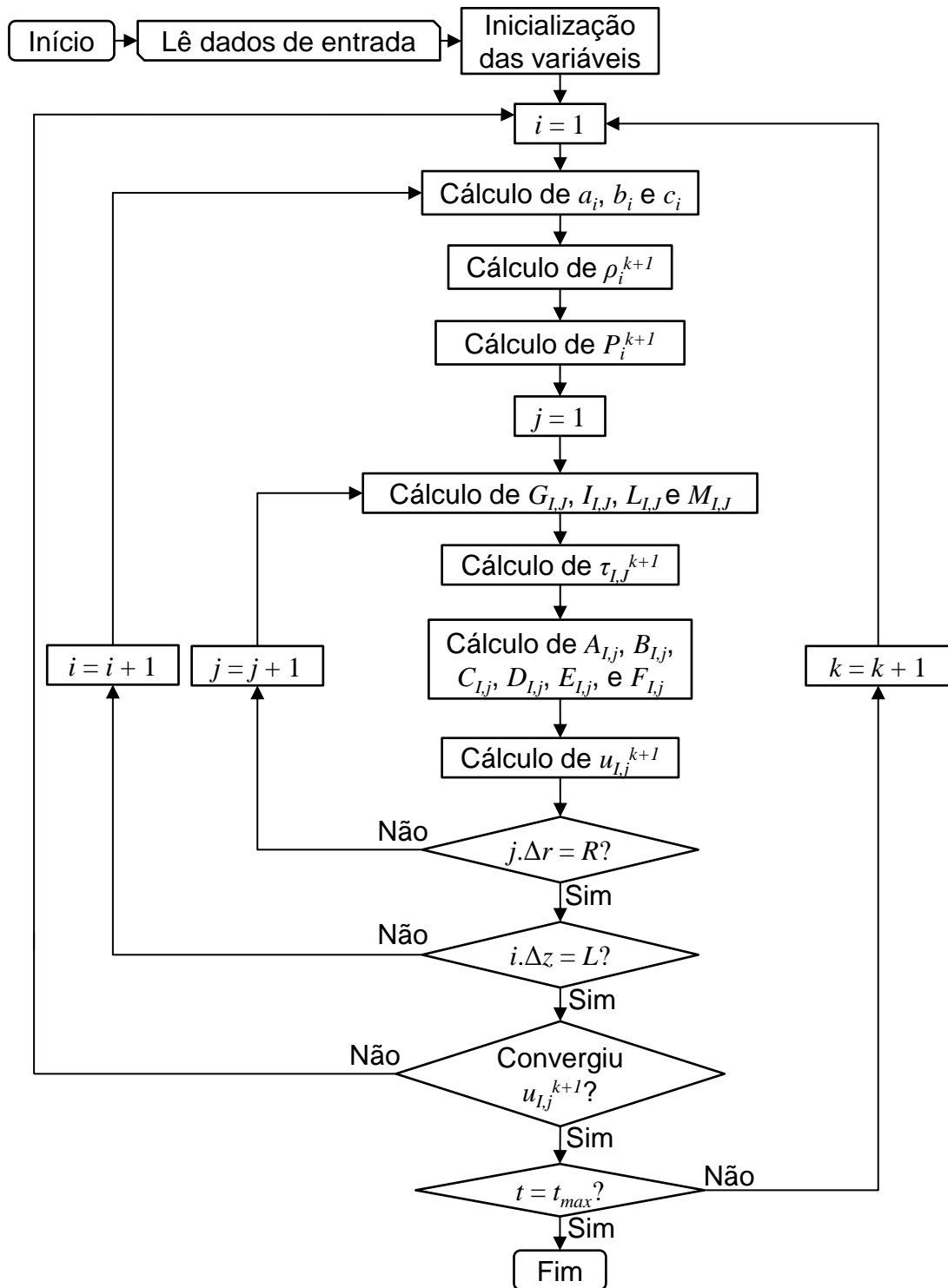


Figura 4.6 – Fluxograma do algoritmo computacional para o Modelo 1 (discretização pelo método dos volumes finitos).

As derivadas totais da pressão e da velocidade axial podem ser escritas, respectiva-

mente, como:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (4.65)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (4.66)$$

Comparando as Equações 4.65 e 4.66 com o primeiro e o segundo termo da Equação (4.64), respectivamente, pode-se concluir que:

$$\frac{dz}{dt} = \xi \rho c^2 = \frac{1}{\xi \rho} \quad (4.67)$$

e que portanto,  $\xi = \pm 1/\rho c$ .

Substituindo o valor das derivadas totais na Equação (4.64), chega-se à:

$$\frac{dP}{dt} + \frac{1}{\xi} \frac{du}{dt} + \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{\xi \rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) - \frac{1}{\xi} g = 0 \quad (4.68)$$

Substituindo a expressão de  $\xi$  na Equação (4.68), obtém-se:

$$\frac{dP}{dt} \pm \rho c \frac{du}{dt} + \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \pm \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \mp \rho c g = 0 \quad (4.69)$$

Da Equação (4.67), sabe-se que:

$$\frac{dz}{dt} = \pm c \quad (4.70)$$

Dessa forma, o sinal mais e menos das Equações 4.69 e 4.70 geram dois pares de equações:

$$C^+ \begin{cases} \frac{dP}{dt} + \rho c \frac{du}{dt} + \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) - \rho c g = 0 \\ \frac{dz}{dt} = c \end{cases} \quad (4.71)$$

$$C^- \begin{cases} \frac{dP}{dt} - \rho c \frac{du}{dt} + \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \rho c g = 0 \\ \frac{dz}{dt} = -c \end{cases} \quad (4.72)$$

sendo  $C^+$  e  $C^-$  as linhas características que representam o caminho sobre o qual acontece a evolução temporal entre um instante atual nas posições anterior e posterior, respectivamente, até um instante futuro na posição atual. Nessas linhas, a razão entre o tamanho da célula axial e o passo de tempo é representada pela velocidade de propagação da onda de pressão.

### 4.2.1 Discretização das Equações

Conhecendo as equações diferenciais totais, pode-se integrá-las ao longo das linhas características  $C^+$  e  $C^-$  por um passo de tempo  $\Delta t = t^{k+1} - t^k$ . Sabendo os campos de pressão, velocidade axial e velocidade radial num instante de tempo inicial, pode-se determinar seus valores num tempo futuro. Para tanto, utiliza-se uma malha uniforme axial com número par de células totais  $N_{Z,T} = N_{Z,1} + N_{Z,2}$ , sendo  $N_{Z,1}$  e  $N_{Z,2}$  o número de células axiais, respectivamente, no tubo e no espaço anular. O tamanho de cada célula é representado por  $\Delta z = L_T/N_{Z,T}$ . Além disso, devido a dependência dos campos de velocidade da direção perpendicular ao escoamento, necessita-se de uma malha radial que possui  $N_{R,1}$  células no tubo e  $N_{R,2}$  no espaço anular. Dessa forma, o comprimento de cada célula nessas duas regiões é calculado por  $\Delta r_1 = R_1/N_{R,1}$  e  $\Delta r_2 = (R_{2,e} - R_{2,i})/N_{R,2}$ . A Figura 4.7 ilustra as malhas axial e radial empregadas na solução numérica do problema. Repare que a evolução temporal acontece ao longo de uma linha característica. A Figura 4.7(b) mostra que as malhas da velocidade radial e da tensão estão deslocadas da malha de velocidade axial.

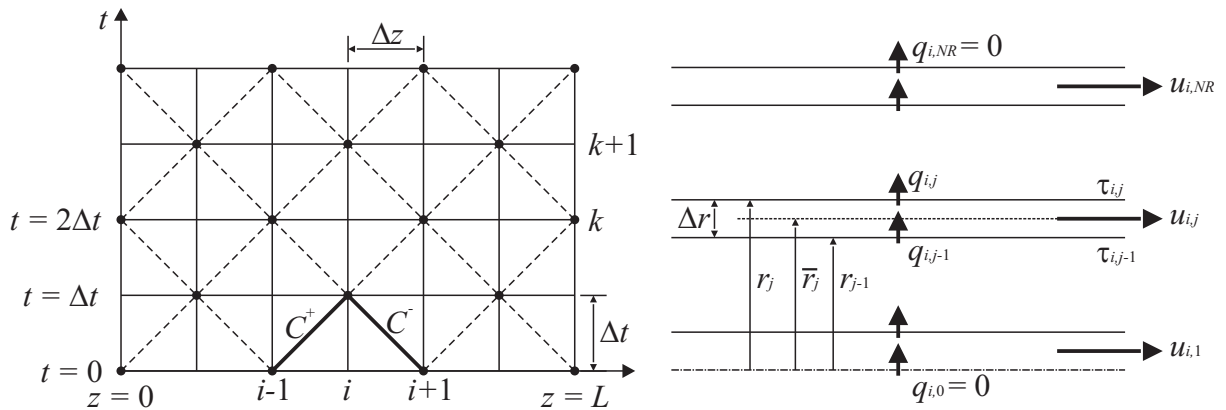


Figura 4.7 – Sistema de malha para solução numérica com o Método das Características.

A integração da Equação (4.71) na linha das características de  $i - 1$  a  $i$  e na direção radial de  $j - 1$  a  $j$  no intervalo de  $k$  a  $k + 1$  resulta em:

$$\begin{aligned}
 & \int_{i-1}^i \int_{j-1}^j \int_k^{k+1} \frac{dP}{dt} 2\pi r dt dr dz + \int_{i-1}^i \int_{j-1}^j \int_k^{k+1} \rho c \frac{du}{dt} 2\pi r dt dr dz + \int_{i-1}^i \int_k^{k+1} \int_{j-1}^j \frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} 2\pi r dr dt dz \\
 & + \int_{i-1}^i \int_k^{k+1} \int_{j-1}^j \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) 2\pi r dt dz - \int_{i-1}^i \int_k^{k+1} \int_{j-1}^j \rho c g 2\pi r dt dz = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

Resolvendo as integrais:

$$\begin{aligned} & (P_i^{k+1} - P_{i-1}^k) \pi (r_j^2 - r_{j-1}^2) \Delta z + \rho c (u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^k) \pi (r_j^2 - r_{j-1}^2) \Delta z \\ & + \rho c^2 (q_{i,j}^{k+1} - q_{i,j-1}^{k+1}) 2\pi \Delta t \Delta z + c \left[ (r\tau)_{i,j}^{k+1} - (r\tau)_{i,j-1}^{k+1} \right] 2\pi \Delta z \Delta t \\ & - \rho c g \pi (r_j^2 - r_{j-1}^2) \Delta z \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Sabendo que  $r_j^2 - r_{j-1}^2 = (r_j - r_{j-1})(r_j + r_{j-1}) = 2\Delta r_j \bar{r}_j$  e rearranjando a Equação (4.74):

$$\begin{aligned} & (P_i^{k+1} - P_{i-1}^k) + \rho c (u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^k) + \rho c^2 (q_{i,j}^{k+1} - q_{i,j-1}^{k+1}) \frac{\Delta t}{\Delta r_j \bar{r}_j} \\ & + c (r_j \tau_{i,j}^{k+1} - r_{j-1} \tau_{i,j-1}^{k+1}) \frac{\Delta t}{\Delta r_j \bar{r}_j} - \rho c g \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

As tensões  $\tau_{i,j-1}^{k+1}$  e  $\tau_{i,j}^{k+1}$  podem ser substituídas pela equação constitutiva de um FNG, Equação (3.27), resultando em:

$$\tau_{i,j-1}^{k+1} = \eta_{i,j-1}^{k+1} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{i,j-1}^{k+1} = \eta_{i,j-1}^{k+1} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1}}{\bar{r}_j - \bar{r}_{j-1}} \quad (4.76)$$

$$\tau_{i,j}^{k+1} = \eta_{i,j}^{k+1} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{i,j}^{k+1} = \eta_{i,j}^{k+1} \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}}{\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_j} \quad (4.77)$$

sendo  $\bar{r}$  o radio localizado na posição da velocidade axial.

Substituindo as Equações 4.76 e 4.77 na Equação (4.75), obtém-se:

$$\begin{aligned} & (P_i^{k+1} - P_{i-1}^k) + \rho c (u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^k) + \rho c^2 (q_{i,j}^{k+1} - q_{i,j-1}^{k+1}) \frac{\Delta t}{\Delta r_j \bar{r}_j} \\ & + c \left( r_j \eta_{i,j}^{k+1} \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}}{\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_j} - r_{j-1} \eta_{i,j-1}^{k+1} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1}}{\bar{r}_j - \bar{r}_{j-1}} \right) \frac{\Delta t}{\Delta r_j \bar{r}_j} - \rho c g \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\begin{aligned} & (P_i^{k+1} - P_{i-1}^k) + \rho c (u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^k) + C_{q2}(j) q_{i,j}^{k+1} - C_{q1}(j) q_{i,j-1}^{k+1} \\ & + C_{u3}(i,j) (u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}) - C_{u1}(i,j) (u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1}) - \rho c g \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

sendo os coeficientes:

$$C_{q1}(j) = C_{q2}(j) = \rho c^2 \frac{\Delta t}{\Delta r_j \bar{r}_j} \quad (4.80)$$

$$C_{u1}(i,j) = c \eta_{i,j-1}^{k+1} \frac{r_{j-1}}{\bar{r}_j - \bar{r}_{j-1}} \frac{\Delta t}{\Delta r_j \bar{r}_j} \quad (4.81)$$

$$C_{u3}(i, j) = c\eta_{i,j}^{k+1} \frac{r_j}{\bar{r}_{j+1} - \bar{r}_j} \frac{\Delta t}{\Delta r_j \bar{r}_j} \quad (4.82)$$

$$C_{u2}(i, j) = C_{u1}(i, j) + C_{u3}(i, j) \quad (4.83)$$

Finalmente, obtém-se a equação integrada de  $C^+$ :

$$\begin{aligned} C^+ : P_i^{k+1} - C_{q1}(j) q_{i,j-1}^{k+1} + C_{q2}(j) q_{i,j}^{k+1} + C_{u1}(i, j) u_{i,j-1}^{k+1} \\ + [\rho c - C_{u1}(i, j) - C_{u3}(i, j)] u_{i,j}^{k+1} + C_{u3}(i, j) u_{i,j+1}^{k+1} = P_{i-1}^k + \rho c u_{i-1,j}^k + \rho c g \Delta t \end{aligned} \quad (4.84)$$

Procedendo de maneira semelhante para a equação característica de  $C^-$  (Equação (4.72)), integrando entre as posições  $i + 1$  e  $i$ , chega-se à:

$$\begin{aligned} C^- : P_i^{k+1} - C_{q1}(j) q_{i,j-1}^{k+1} + C_{q2}(j) q_{i,j}^{k+1} - C_{u1}(i, j) u_{i,j-1}^{k+1} \\ - [\rho c - C_{u1}(i, j) - C_{u3}(i, j)] u_{i,j}^{k+1} - C_{u3}(i, j) u_{i,j+1}^{k+1} = P_{i+1}^k - \rho c u_{i+1,j}^k - \rho c g \Delta t \end{aligned} \quad (4.85)$$

Note que as incógnitas das Equações 4.84 e 4.85 são  $P_i^{k+1}$ ,  $u_{i,j}^{k+1}$  e  $q_{i,j}^{k+1}$ . A pressão é dependente apenas da posição axial, enquanto que as velocidades axial e radial também são dependentes da posição radial. Isso resultaria em  $2N_R + 2$  incógnitas para cada posição axial. Porém, sabe-se das condições de contorno na seção 3.6 que a variável  $q$  assume o valor zero quando localizada na parede (condição de não deslizamento) ou no centro do tubo (condição de raio nulo). Portanto, basta-se somar e subtrair as Equações 4.84 e 4.85 de forma a obter o número de equações correspondente ao número de variáveis.

A soma das Equações 4.84 e 4.85 resulta em:

$$C^+ + C^- : P_i^{k+1} - C_{q1}(j) q_{i,j-1}^{k+1} + C_{q2}(j) q_{i,j}^{k+1} = \frac{P_{i-1}^k + P_{i+1}^k}{2} + \rho c \frac{u_{i-1,j}^k - u_{i+1,j}^k}{2} \quad (4.86)$$

Ao passo que a subtração das Equações 4.84 e 4.85 resulta em:

$$\begin{aligned} C^+ - C^- : C_{u1}(i, j) u_{i,j-1}^{k+1} + [\rho c - C_{u1}(i, j) - C_{u3}(i, j)] u_{i,j}^{k+1} \\ + C_{u3}(i, j) u_{i,j+1}^{k+1} = \frac{P_{i-1}^k - P_{i+1}^k}{2} + \rho c \frac{u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k}{2} + \rho c g \Delta t \end{aligned} \quad (4.87)$$

Dessa forma, pode-se montar dois sistemas de dimensão  $N_R \times N_R$  resultantes da soma e subtração das linhas características  $C^+$  e  $C^-$ . Como a pressão é igual em todas as posições radiais, uma matriz pode ser escrita subtraindo a linha  $j - 1$  da linha  $j$  da Equação (4.86) para  $j = 2, \dots, N_R$ , resultando em um sistema cujo formato é  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{a}_v$ . Sendo  $\mathbf{v} = [P_i^{k+1}, q_{i,1}^{k+1}, \dots, q_{i,j}^{k+1}, \dots, u_{i,N_R-1}^{k+1}]$  o vetor das incógnitas pressão e velocidade radial;  $\mathbf{A}$  uma matriz tridiagonal conhecida de dimensão  $N_R \times N_R$ , dependente apenas da posição radial e do instante atual, apresentada na Equação (4.88); e  $\mathbf{a}_v$  um vetor conhecido,

Equação (4.89), dependente dos valores de  $P$  e  $u$  no instante de tempo  $k$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & C_{q2}(1) & \cdots & \\ 0 & -C_{q1}(2) - C_{q2}(1) & C_{q2}(2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & C_{q2}(j-1) & -C_{q1}(j) - C_{q2}(j-1) & C_{q2}(j) \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \cdots & C_{q2}(N_R - 1) & -C_{q1}(N_R) - C_{q2}(N_R - 1) \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

$$\mathbf{a}_v = \begin{bmatrix} \frac{P_{i-1}^k + P_{i+1}^k}{2} + \rho c \frac{u_{i-1,1}^k - u_{i+1,1}^k}{2} \\ \rho c \frac{u_{i-1,2}^k - u_{i+1,2}^k - u_{i-1,1}^k + u_{i+1,1}^k}{2} \\ \vdots \\ \rho c \frac{u_{i-1,j}^k - u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j-1}^k + u_{i+1,j-1}^k}{2} \\ \vdots \\ \rho c \frac{u_{i-1,N_R}^k - u_{i+1,N_R}^k - u_{i-1,N_R-1}^k + u_{i+1,N_R-1}^k}{2} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

A partir da Equação (4.87) é possível formar outro sistema de formato  $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{b}_u$ . Sendo  $\mathbf{u} = [u_{i,1}^{k+1}, \dots, u_{i,j}^{k+1}, \dots, u_{i,N_R}^{k+1}]$  o vetor de incógnitas da velocidade axial;  $\mathbf{B}$  uma matriz tridiagonal conhecida de dimensão  $N_R \times N_R$  dependente das posições radial e axial apresentada na Equação (4.90); e  $\mathbf{b}_u$  um vetor conhecido, Equação (4.91), dependente dos valores de  $P$  e  $u$  no instante de tempo  $k$ .

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho c - C_{u2}(i, 1) & C_{u3}(i, 1) & & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & C_{u1}(i, j) & \rho c - C_{u2}(i, j) & C_{u3}(i, j) & \cdots \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & & C_{u1}(i, N_R) & \rho c - C_{u2}(i, N_R) \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

$$\mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} \frac{P_{i-1}^k - P_{i+1}^k}{2} + \rho c \frac{u_{i-1,1}^k + u_{i+1,1}^k}{2} + \rho c g \Delta t \\ \vdots \\ \frac{P_{i-1}^k - P_{i+1}^k}{2} + \rho c \frac{u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k}{2} + \rho c g \Delta t \\ \vdots \\ \frac{P_{i-1}^k - P_{i+1}^k}{2} + \rho c \frac{u_{i-1,N_R}^k + u_{i+1,N_R}^k}{2} + \rho c g \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

Antes das matrizes serem válidas para o cálculo ao longo do domínio (exceto entrada e saída) é necessário tratar as fronteiras do tubo (centro e parede) e do espaço anular



(parede interna e externa).

## 4.2.2 Condições de Contorno

Assim, como feito na subseção 4.1.1 para a condição de parede interna do espaço anular, uma aproximação polinomial de segunda ordem é utilizada para discretizar a taxa de cisalhamento na parede, Equação (4.46). Assim, as Equações 4.71 ( $C^+$ ) e 4.72 ( $C^-$ ) podem ser integradas para a primeira célula radial, resultando, respectivamente, em:

$$\begin{aligned} C^+ : P_i^{k+1} + C_{q2}(1) q_{i,1}^{k+1} + \left[ \rho c - \frac{7}{2} C_{u1}(i, 1) - C_{u3}(i, 1) \right] u_{i,1}^{k+1} \\ + \left[ \frac{1}{2} C_{u1}(i, 1) + C_{u3}(i, 1) \right] u_{i,2}^{k+1} = P_{i-1}^k + \rho c u_{i-1,1}^k + \rho c g \Delta t \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned} C^- : P_i^{k+1} + C_{q2}(1) q_{i,1}^{k+1} - \left[ \rho c - \frac{7}{2} C_{u1}(i, 1) - C_{u3}(i, 1) \right] u_{i,1}^{k+1} \\ - \left[ \frac{1}{2} C_{u1}(i, 1) + C_{u3}(i, 1) \right] u_{i,2}^{k+1} = P_{i+1}^k - \rho c u_{i+1,1}^k - \rho c g \Delta t \end{aligned} \quad (4.93)$$

Pela definição de  $C_{u1}(j)$ , Equação (4.81), verifica-se que para  $j = 1$  num tubo, o valor de  $C_{u1}(1) = 0$ , ou seja, a condição de simetria no meio do tubo é respeitada pelas Equações 4.92 e 4.93. Portanto, ambas são válidas tanto para o espaço anular quanto para o tubo.

Para a condição de parede externa do tubo ou do espaço anular, a mesma aproximação polinomial de segunda ordem é utilizada. Assim, as Equações 4.71 ( $C^+$ ) e 4.72 ( $C^-$ ) são integradas e podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} C^+ : P_i^{k+1} - C_{q1}(N_R) q_{i,N_R-1}^{k+1} + \left[ C_{u1}(i, N_R) + \frac{1}{2} C_{u3}(i, N_R) \right] u_{i,N_R-1}^{k+1} \\ + \left[ \rho c - C_{u1}(i, N_R) - \frac{7}{2} C_{u3}(i, N_R) \right] u_{i,N_R}^{k+1} = P_{i-1}^k + \rho c u_{i-1,N_R}^k + \rho c g \Delta t \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} C^- : P_i^{k+1} - C_{q1}(N_R) q_{i,N_R-1}^{k+1} - \left[ C_{u1}(i, N_R) + \frac{1}{2} C_{u3}(i, N_R) \right] u_{i,N_R-1}^{k+1} \\ - \left[ \rho c - C_{u1}(i, N_R) - \frac{7}{2} C_{u3}(i, N_R) \right] u_{i,N_R}^{k+1} = P_{i+1}^k - \rho c u_{i+1,N_R}^k - \rho c g \Delta t \end{aligned} \quad (4.95)$$

Dessa forma, as condições de contorno podem ser substituídas na matriz tridiagonal

para cálculo das velocidades axiais,  $\mathbf{B}$ , o que resulta em:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} C_{u2,int}(i) & C_{u3,int}(i) & & & & & \\ & \ddots & \vdots & & & & \\ \cdots & C_{u1}(i,j) & \rho c - C_{u2}(i,j) & C_{u3}(i,j) & \cdots & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & & & C_{u1,ext}(i) & C_{u2,ext}(i) & \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

sendo  $C_{u2,int}(i)$ ,  $C_{u3,int}(i)$ ,  $C_{u1,ext}(i)$  e  $C_{u2,ext}(i)$  representados, respectivamente, pelas Equações 4.97, 4.98, 4.99 e 4.100.

$$C_{u2,int}(i) = \rho c - \frac{7}{2}C_{u1}(i,1) - C_{u3}(i,1) \quad (4.97)$$

$$C_{u3,int}(i) = \frac{1}{2}C_{u1}(i,1) + C_{u3}(i,1) \quad (4.98)$$

$$C_{u1,ext}(i) = C_{u1}(i, N_R) + \frac{1}{2}C_{u3}(i, N_R) \quad (4.99)$$

$$C_{u2,ext}(i) = \rho c - C_{u1}(i, N_R) - \frac{7}{2}C_{u3}(i, N_R) \quad (4.100)$$

Note que as condições de contorno de simetria e não deslizamento não afetam o cálculo da pressão e das velocidades radiais. Dessa forma a matriz  $\mathbf{A}$  permanece como a da Equação (4.88).

Conforme a Figura 4.7, para encontrar as incógnitas na entrada e na saída, deve-se conhecer a condição de contorno e utilizar, respectivamente, as linhas características  $C^-$  e  $C^+$ .

Para o caso de velocidade na entrada, assim como na subseção 4.2.2, adota-se a hipótese de que o perfil de entrada é equivalente ao de um fluido Lei de Potência completamente desenvolvido. Portanto, ou o perfil de entrada do tubo, Equação (4.37) é utilizado em conjunto com a linha das características  $C^-$ , Equação (4.72), para formar um sistema de equações no formato  $\mathbf{E}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}\mathbf{v}_{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ . Sendo que  $\mathbf{v}_{\mathbf{E}} = \mathbf{v}(i=1, j)$ ,  $\mathbf{E}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{A}$  e  $\mathbf{e}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$  é

representada por:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} P_2^k - \rho c u_{2,1}^k - C_{u2,int}(1) u_{1,1}^{k+1} - C_{u3,int}(1) u_{1,2}^{k+1} \\ \rho c (u_{2,1}^k - u_{2,2}^k) - [C_{u1}(1,2) - C_{u2,int}(1,1)] u_{1,1}^{k+1} - C_{u3}(1,2) u_{1,3}^{k+1} \\ \quad - [C_{u2}(1,2) - C_{u3,int}(1,1)] u_{1,2}^{k+1} \\ \vdots \\ \rho c (u_{2,j-1}^k - u_{2,j}^k) - [C_{u1}(1,j) - C_{u2}(1,j-1)] u_{1,j-1}^{k+1} - C_{u3}(1,j) u_{1,j+1}^{k+1} \\ \quad - [C_{u2}(1,j) - C_{u3}(1,j-1)] u_{1,j}^{k+1} \\ \vdots \\ \rho c (u_{2,N_R-1}^k - u_{2,N_R}^k) - [C_{u1,ext}(N_R) - C_{u2}(1,N_R-1)] u_{1,N_R-1}^{k+1} \\ \quad - [C_{u2,ext}(N_R) - C_{u3}(1,N_R-1)] u_{1,N_R}^{k+1} \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

A obtenção das matrizes para a condição de pressão específica na entrada é similar à de velocidade. A diferença é que para garantir que o número de equações seja igual ao de incógnitas, faz-se a hipótese de que a velocidade radial é nula na entrada. Assim, tem-se que  $q_{1,j}^{k+1} = 0$  e sabe-se que  $P_1^{k+1} = P_{ent}$ .

Repetindo o procedimento anterior, o sistema resultante para condição de contorno de pressão na entrada é  $\mathbf{E}_{\mathbf{P}\mathbf{u}}\mathbf{u}_{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_{\mathbf{P}\mathbf{u}}$ . Sendo que  $\mathbf{E}_{\mathbf{P}\mathbf{u}} = -\mathbf{B}$  ( $i = 1, j$ ),  $\mathbf{u}_{\mathbf{E}} = \mathbf{u}$  ( $i = 1, j$ ) e  $\mathbf{e}_{\mathbf{P}\mathbf{u}}$  é representada por:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{P}\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} P_2^k - P_1^{k+1} - \rho c u_{2,1}^k - \rho c g \Delta t \\ \vdots \\ P_2^k - P_1^{k+1} - \rho c u_{2,j}^k - \rho c g \Delta t \\ \vdots \\ P_2^k - P_1^{k+1} - \rho c u_{2,N_R}^k - \rho c g \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

A metodologia para obtenção das matrizes para as condições de saída são similares a de entrada, porém a linha característica  $C^+$  é utilizada ao invés da  $C^-$ .

Assim, o formato do sistema resultante para condição de poço fechado (vazão nula na saída) é  $\mathbf{S}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}\mathbf{v}_{\mathbf{S}} = \mathbf{s}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ . Sendo que  $\mathbf{S}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{v}_{\mathbf{S}} = \mathbf{v}$  ( $i = N_Z, j$ ) e  $\mathbf{s}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$  é representada por:

$$\mathbf{s}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} P_2^k - \rho c u_{2,1}^k \\ \rho c (u_{2,1}^k - u_{2,2}^k) \\ \vdots \\ \rho c (u_{2,j-1}^k - u_{2,j}^k) \\ \vdots \\ \rho c (u_{2,N_R-1}^k - u_{2,N_R}^k) \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Para a condição de contorno de poço aberto (pressão específica na saída), o sistema resultante tem formato  $\mathbf{S}_{\mathbf{P}_u} \mathbf{u}_S = \mathbf{s}_{\mathbf{P}_u}$ . Sendo que  $\mathbf{S}_{\mathbf{P}_u} = \mathbf{B}$  ( $i = N_Z, j$ ),  $\mathbf{u}_S = \mathbf{u}$  ( $i = N_Z, j$ ) e  $\mathbf{s}_{\mathbf{P}_u}$  é representada por:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{P}_u} = \begin{bmatrix} P_{N_Z-1}^k - P_{N_Z}^{k+1} + \rho c u_{N_Z-1,1}^k + \rho c g \Delta t \\ \vdots \\ P_{N_Z-1}^k - P_{N_Z}^{k+1} + \rho c u_{N_Z-1,j}^k + \rho c g \Delta t \\ \vdots \\ P_{N_Z-1}^k - P_{N_Z}^{k+1} + \rho c u_{N_Z-1,N_R}^k + \rho c g \Delta t \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

O acoplamento entre o fim do tubo e o início do espaço anular no fundo do poço é realizado a partir da hipótese de que a pressão no fundo do poço é constante e que a vazão que sai da tubulação é a mesma que entra na região anular. Dessa forma, calculam-se as velocidades axiais na saída do tubo a partir da pressão do espaço anular e na entrada do anular a partir da pressão no tubo. Verifica-se a equação da continuidade, Equação (3.63), e utiliza-se o método da secante para iterar uma nova pressão até que o resultado seja idêntico ao anterior e a vazão no fundo do poço seja a mesma.

### 4.2.3 Fluxograma

Nota-se que os sistemas para obtenção do campo de pressão e de velocidades axial e radial dependem somente dos campos calculados no instante  $k$  e da viscosidade aparente que pode ser calculada no instante  $k$  ou  $k + 1$ . Ao avaliar a viscosidade aparente no instante  $k + 1$ , o problema torna-se iterativo. Porém, uma análise mostrou que os resultados utilizando viscosidade aparente no instante  $k$  são quase idênticos aos de  $k + 1$ , apresentando diferenças inferiores a 0,1%. Portanto, para diminuir o tempo computacional, todavia sem comprometer os resultados, utiliza-se um processo que não é iterativo no qual os campos de viscosidades aparentes são calculados no instante  $k$ . O único processo iterativo do problema acontece no cálculo da pressão no fundo do poço devido ao acoplamento, nesse caso o método da secante é utilizado. A velocidade na saída do tubo e na entrada do tubo é calculada a partir de um valor inicial da pressão. A correção na pressão é realizada através do resíduo entre a vazão mássica que sai do tubo e a que entra no espaço anular (esses valores devem ser iguais). Assim, um novo valor de pressão é calculado pelo método da secante até que não exista diferença em relação ao anterior.

A partir da Equação (4.70), o passo de tempo pode ser definido como:

$$\Delta t = \Delta z / c. \quad (4.105)$$

Como os sistemas de equações formam matrizes tridiagonais, essas são resolvidas através do Algoritmo de Matriz Tridiagonal - TDMA (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

O algoritmo para solução das equações do modelo matemático do problema é apresentado a seguir. O fluxograma da Figura 4.8 baseia-se na seguinte sequência:

1. Leitura dos dados de entrada e inicialização das variáveis: condição de contorno (pressão ou velocidade na entrada; poço aberto ou fechado), comprimentos ( $L_1$  e  $L_2$ ), diâmetros ( $D_1$ ,  $D_{2,i}$  e  $D_{2,e}$ ), massa específica de referência ( $\rho_0$ ), compressibilidade ( $\alpha$ ), tempo máximo ( $t_{max}$ ), número de divisões transversais ( $N_Z$ ), número de divisões radiais ( $N_R$ ), parâmetros do fluido ( $\eta_\infty$ ,  $\eta_0$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_{yd}$ ,  $\dot{\gamma}_{yd}$ ,  $K$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $t_{eq}$ ,  $G_0$ ,  $m$ , e  $\lambda(t=0)$ ), campo de velocidades inicial (nulo), e uma estimativa para o campo de velocidades para o primeiro passo de tempo. Com o número de divisões transversais e radiais, calcula-se a dimensão de cada volume ( $\Delta z$  e  $\Delta r$ ). A partir da Equação (4.105), calcula-se  $\Delta t$ .
2. Cálculo dos coeficientes  $C_{q1}(j)$  e  $C_{q2}(j)$ ,  $C_{u1}(i,j)$ ,  $C_{u2}(i,j)$ ,  $C_{u3}(i,j)$ ,  $C_{u2,int}(i,1)$ ,  $C_{u3,int}(i,1)$ ,  $C_{u1,ext}(i,N_R)$  e  $C_{u2,ext}(i,N_R)$  para todas as posições axiais e radiais, através, respectivamente, das Equações 4.80, 4.81, 4.83, 4.82, 4.97, 4.98, 4.99 e 4.100.
3. Cálculo das matrizes **A**, **a<sub>v</sub>**, **B**, **b<sub>u</sub>**, **E<sub>pu</sub>**, **e<sub>pu</sub>**, **E<sub>vv</sub>**, **e<sub>vv</sub>**, **S<sub>pu</sub>**, **s<sub>pu</sub>**, **S<sub>vv</sub>** e **s<sub>vv</sub>** para resolver os sistemas conforme a posições axial e radial e as condições de contorno.
4. Cálculos de  $P_i^{k+1}$ ,  $q_{i,j}^{k+1}$  e  $u_{i,j}^{k+1}$  através da resolução do sistema de equações pelo TDMA para todas as posições radiais.
5. Testa-se se o comprimento total ( $L_T$ ) foi atingido. Caso tenha sido, parte-se para o passo seguinte. Caso contrário, incrementa-se o valor da posição transversal e volta-se ao passo 2.
6. Testa-se se o tempo máximo foi atingido. Caso tenha sido, encerra-se o programa. Caso contrário, incrementa-se o passo de tempo e volta-se ao passo 2.

### 4.3 Síntese do Capítulo 4

Neste capítulo foram apresentadas as metodologias de solução do conjunto de equações resultantes do Capítulo 3. As equações da conservação da massa, da quantidade de movimento, de estado e constitutiva foram discretizadas utilizando dois métodos: volumes finitos (Modelo 1) e das características (Modelo 2).

O modelo discretizado através do método dos volumes finitos gera um conjunto de equações que deve ser resolvido iterativamente para obter a solução em cada instante de tempo. Por isso, foi proposto um critério de convergência baseado no resíduo da equação da conservação da massa. Além disso, um critério de estabilidade relacionando o passo de tempo e as malhas axial e temporal deve ser respeitado para garantir que não ocorram

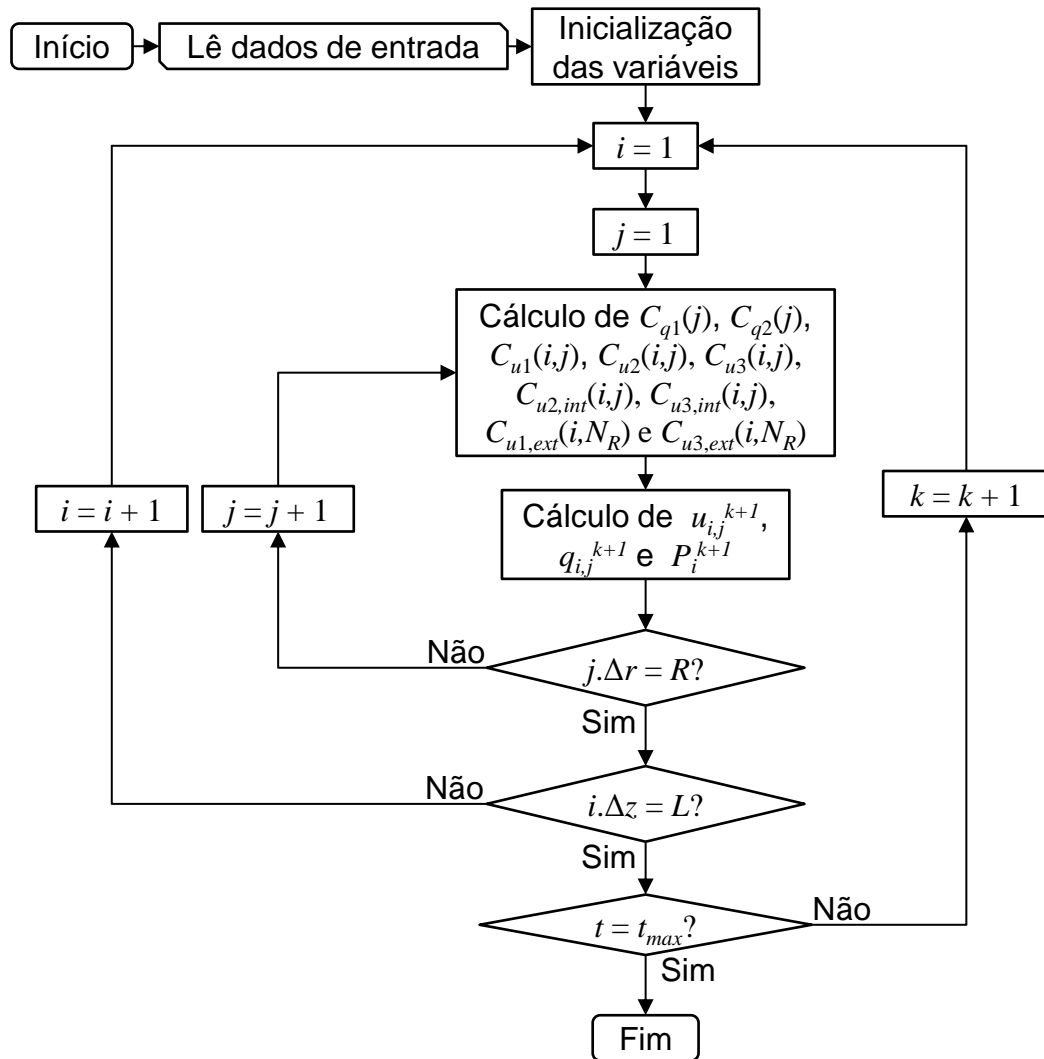


Figura 4.8 – Fluxograma do algoritmo computacional para o Modelo 2 (discretização pelo método das características).

oscilações ou dispersões numéricas. Para resolver o problema, apresentou-se um algoritmo iterativo.

O modelo discretizado pelo método das características foi resolvido através da combinação linear das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento. Assim, obteve-se um conjunto de duas equações que devem ser resolvidas sobre duas linhas características,  $C^+$  e  $C^-$ . Essas relacionam o instante futuro com o instante atual em posições axiais, respectivamente, anterior e seguinte. A soma e subtração dessas equações produz duas matrizes tridiagonais que são resolvidas através do método TDMA. Nesse caso, o processo não é iterativo. Um algoritmo de solução também foi apresentado para resolver este conjunto de equações.

# 5 VALIDAÇÃO E VERIFICAÇÃO DOS MODELOS

Nesse capítulo, a validação e verificação dos modelos matemáticos apresentados nos Capítulos 3 e 4 são mostradas. Primeiramente, as equações que representam o fenômeno são adimensionalizadas e os principais parâmetros para caracterizar o escoamento e a geometria são definidos. Em seguida, análises de sensibilidade das malhas radial e axial, do critério de convergência e do critério de estabilidade são realizadas para garantir a independência da solução numérica em relação a esses itens. Então, uma comparação com a solução analítica é efetuada para evidenciar sobre quais circunstâncias os modelos se aproximam ou se afastam dessa solução. Na sequência, os modelos são validados a partir dos resultados experimentais do campo NUEX-Taquipe e dos dados obtidos de Holmboe e Rouleau (1967) no experimento de golpe de aríete. Então, uma comparação com os resultados numéricos de Wahba (2013) é realizada para verificar o modelo desenvolvido para fluidos lei de potência. Finalmente, uma comparação entre os Modelos 1 e 2, discretizados pelo Método dos Volumes Finitos e Método das Características, respectivamente, é realizada para avaliar qual deles será utilizado no capítulo de resultados.

## 5.1 Modelo Adimensionalizado

As variáveis do problema para o primeiro modelo são adimensionalizadas conforme os valores de referência:

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_r}, & u^* &= \frac{u}{V_r}, & V^* &= \frac{V}{V_r}, & t^* &= \frac{c}{L}t \\ z^* &= \frac{z}{L}, & r^* &= \frac{r}{D}, & P^* &= \frac{P}{P_r}, & \tau^* &= \frac{\tau}{\tau_r} \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo  $\rho_r$  a massa específica de referência,  $L$  o comprimento da tubulação,  $P_r$  e  $V_r$  a pressão e a velocidade de referência (condições de contorno),  $D$  o diâmetro hidráulico,  $c$  a velocidade de propagação da onda de pressão e  $\tau_0$  tensão de cisalhamento de referência (tensão de cisalhamento na parede). Dessa forma, as equações da conservação da massa, Equação (3.17), e da quantidade de movimento, Equação (3.10), são reescritas:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + Ma \frac{\partial}{\partial z^*} (\rho^* V^*) = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* u^*) + Ma \frac{\partial}{\partial z^*} (\rho^* u^* u^*) = -\phi \frac{\partial P^*}{\partial z^*} - \frac{\phi}{4} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau^*) + \phi \rho^* g^* \quad (5.3)$$

sendo  $Ma$  o número de Mach, Equação (5.4),  $\phi$  um parâmetro que representa a razão entre as forças de inércia e as forças de dissipação da onda de pressão, Equação (5.5), e  $g^*$  a gravidade adimensional, Equação (5.6).

$$Ma = \frac{V_r}{c} \quad (5.4)$$

$$\phi = 32 \frac{Ma}{\delta Re} \quad (5.5)$$

$$g^* = \frac{\rho_0 g L}{P_r} \quad (5.6)$$

sendo  $\delta$  a razão de aspecto, Equação (5.7), e  $Re$  o número de Reynolds, Equação (5.8).

$$\delta = \frac{D}{L} \quad (5.7)$$

$$Re = \frac{\rho_R V_r D_h}{\mu} \quad (5.8)$$

sendo  $\mu$  a viscosidade dinâmica constante de um fluido Newtoniano,  $D_h$  o diâmetro hidráulico da tubulação –  $D_1$  para o tubo e  $D_{2,e} - D_{2,i}$  para o espaço anular.

A relação entre a pressão e a velocidade de referência é obtida através dos valores em regime permanente do escoamento de um fluido newtoniano completamente desenvolvido:

$$P_r = 32 \frac{\mu L}{D^2} V_r \quad (5.9)$$

A relação entre pressão e tensão de referência é obtida por um balanço de forças para um escoamento completamente desenvolvido:

$$P_r = 4 \frac{\mu L}{D} \tau_r \quad (5.10)$$

Para o segundo modelo, as variáveis são adimensionalizadas conforme os valores da Equação (5.1). Porém, a massa específica é constante e portanto não é adimensionalizada. Além disso, propõe-se uma adimensionalização para a velocidade radial:

$$q^* = \frac{q}{V_r D} \quad (5.11)$$

Assim, as equações da conservação da massa, Equação (3.23), e da quantidade de



movimento, Equação (3.26), são reescritas como:

$$\frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{1}{4\phi\delta} \frac{1}{r^*} \frac{\partial q^*}{\partial r^*} + \frac{1}{4\phi} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -4\phi \frac{\partial P^*}{\partial z^*} - \phi \frac{1}{\rho r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau^*) + 4\phi g^* \quad (5.13)$$

Outros parâmetros são necessários para caracterizar a geometria do problema:

i Razão diametral,  $H$ :

$$H = \frac{D_1}{D_{2,e} - D_{2,i}} \quad (5.14)$$

ii Razão de áreas,  $RA$ :

$$RA = \frac{D_1^2}{D_{2,e}^2 - D_{2,i}^2} \quad (5.15)$$

iii Razão de comprimentos,  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{L_1}{L_2} \quad (5.16)$$

iv Espaçamento anular,  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \frac{D_{2,i}}{D_{2,e}} \quad (5.17)$$

A seguir, as análises de sensibilidade de malha e a comparação com a solução analítica serão apresentadas de forma adimensional. O posicionamento ao longo da direção axial é representado como um tubo seguido de um espaço anular. Considera-se que o acoplamento está localizado na posição  $z^* = 0$ , a entrada do tubo em  $z^* = -1$  e a saída do espaço anular em  $z^* = 1$ .

## 5.2 Análise de Sensibilidade de Malha

A análise de sensibilidade de malha foi realizada para determinar o número de células axiais e radiais necessárias para assegurar a independência da malha.

Quatro casos foram estudados nas análises de sensibilidade de malha, do critério de convergência e do critério de estabilidade:

1. Pressão constante na entrada e saída aberta, ou seja, pressão na saída igual à atmosférica (sem variação de pressão);
2. Pressão constante na entrada e saída fechada, ou seja, vazão nula na saída;
3. Vazão constante na entrada e saída aberta, ou seja, pressão na saída igual à atmosférica (sem variação de pressão);
4. Vazão constante na entrada e saída fechada, ou seja, vazão nula na saída.

As análises a seguir mostram somente o resultado para o Caso 3, pois esse foi considerado o mais crítico e apresentou as maiores diferenças entre os resultados para sensibilidade de malha.

Para verificar os efeitos da dimensão da malha, do critério de convergência e do critério de estabilidade, utilizam-se os parâmetros da Tabela 5.1 e as condições de contorno de vazão na entrada e poço aberto na saída (Caso 3). Para todas as simulações realizadas, o tempo adimensional simulado foi até  $t^* = 100$ .

Tabela 5.1 – Parâmetros utilizados para Análise de Sensibilidade de Malha, Análise do Critério de Convergência e Análise do Critério de Estabilidade.

$Ma$	$\phi$	$g^*$	$\delta$	$H$	$RA$	$\Phi$	$\epsilon$
$10^{-4}$	0,1	0	$10^{-4}$	1	0,1	1	0,818

A seguir, a análise de sensibilidade será dividida em duas partes: a primeira para o método dos volumes finitos e a segunda para o método das características. Em cada uma serão avaliadas a sensibilidade das malhas axial e radial.

## 5.2.1 Modelo 1 – Método dos Volumes Finitos

### 5.2.1.1 Malha Axial

O número de células radiais, o critério de convergência e o critério de estabilidade utilizados na análise axial foram, respectivamente,  $N_R = 40$ ,  $Res^* = 10^{-3}$  e  $CFL = 1$ . Na direção axial, a malha foi dividida em  $N_Z$  volumes de controle. Esse número foi variado em  $N_Z = 500, 1.000, 2.000$  e  $4.000$  proporcionando os passos de tempo de, respectivamente,  $\Delta t = 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}$  e  $2,5 \times 10^{-4}$  s. A Figura 5.1 ilustra o resultado da evolução temporal da pressão para cada número de células axiais. Observa-se que o refino de malha produz gradientes mais acentuados e aumenta os valores de picos e vales de pressão adimensional.

Na Figura 5.1, a pressão máxima na posição  $z^* = 0,9$  (90% do comprimento do espaço anular) com uma malha de 500 células é 14,3% inferior à obtida com 4.000 células. Para a malha de 1.000 volumes de controle essa diferença cai para 6,8% e com 2.000 volumes de

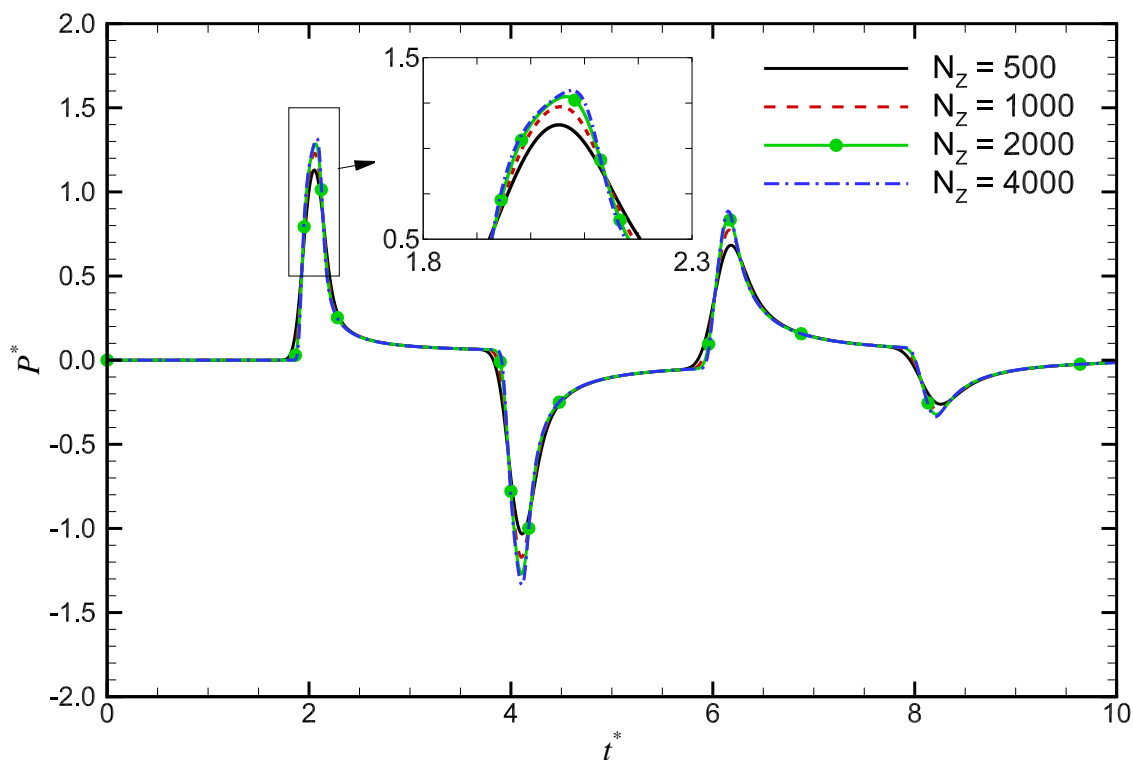


Figura 5.1 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão ao longo da posição  $z^* = 0,9$  (90% do espaço anular) para o Modelo 1.

controle a diferença é menor que 2,6%. O refino da malha pode parecer ser o ideal, porém ao analisar a Tabela 5.2 percebe-se que o tempo computacional aumenta quase três vezes e meio quando a malha é duas vezes mais refinada. Um dos principais objetivos desse trabalho é avaliar a propagação de pressão, verifica-se através da Figura 5.1 que apesar da malha ter grande influência nos picos (reflexões da onda), durante o restante da simulação os valores de pressão são próximos. Portanto, determina-se a malha com 1.000 volumes de controle como a mínima para avaliar a propagação de pressão.

Tabela 5.2 – Efeito do refino da malha axial na pressão máxima na posição  $z^* = 0,9$  (90% do comprimento do espaço anular) e no tempo computacional para o Modelo 1.

Número de células axiais [ $N_z$ ]	500	1.000	2.000	4.000
Pressão Máxima em $z^* = 0,9$	1,130	1,223	1,285	1,319
Tempo computacional [s]	1.375	3.907	13.579	42.325

### 5.2.1.2 Malha Radial

Com base na malha axial de 1.000 células determinada na seção anterior e nos mesmos valores de critério de convergência ( $Res^* = 10^{-3}$ ) e critério de estabilidade ( $CFL = 1$ ), quatro valores para o número de células radiais,  $N_R$ , foram avaliados: 10, 20, 40 e 80. Como

o passo de tempo depende somente da malha axial, o valor para todas as simulações foi de  $\Delta t = 10^{-3}$  s. A Figura 5.2 ilustra os resultados da evolução temporal da pressão ao longo da posição  $z^* = -0,5$  (50 % do comprimento do tubo). Percebe-se que, diferentemente da malha axial, na qual o refino da malha produz alterações no valor da pressão, no caso radial, as diferenças aumentam com o tempo. Assim, nota-se que uma malha mais grosseira aumenta o tempo de propagação da onda de pressão.

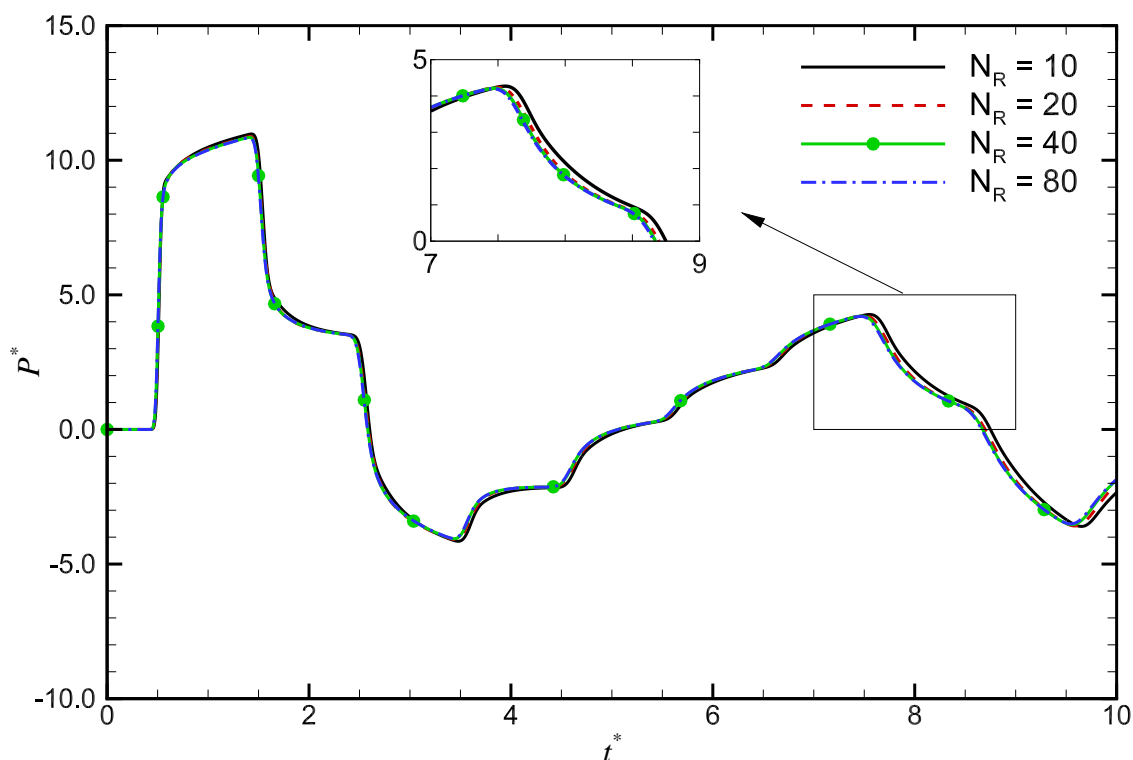


Figura 5.2 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão ao longo da posição  $z^* = -0,5$  (50% do comprimento do tubo) para o Modelo 1.

A Figura 5.2 evidencia que as malhas com 10 e 20 células tem contribuição no aumento do tempo de propagação. No instante  $t^* = 8$  a pressão em  $z^* = -0,5$  com 10 volumes de controle é 21,3% inferior à obtida com 80 células. Para os casos de 20 e 40 volumes, esse valor cai para, respectivamente, 4,5 e 0,6%. Analisando a Tabela 5.3, nota-se que o tempo computacional é diretamente proporcional ao número de células. Dessa forma, a transmissão de pressão pode ser avaliada adotando uma malha de 40 células radiais.

Tabela 5.3 – Efeito do refino da malha radial no tempo computacional para o Modelo 1.

Número de células radiais [ $N_R$ ]	10	20	40	80
Tempo computacional [s]	1.087	1.812	3.907	6.892

## 5.2.2 Modelo 2 – Método das Características

### 5.2.2.1 Malha Axial

Conforme a análise de sensibilidade de malha axial para o método dos volumes finitos, quatro divisões axiais distintas foram estudadas,  $N_z = 200, 500, 1.000$  e  $2.000$ . Para cada um desses casos, o passo de tempo utilizado foi de, respectivamente,  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-4}$  e a malha axial foi mantida constante,  $N_R = 80$ . A Figura 5.3 ilustra o resultado da evolução temporal da pressão para cada número de células axiais. Observa-se que, ao contrário do verificado para o método dos volumes finitos, o efeito do refino de malha é muito menor nos gradientes e picos de pressão.

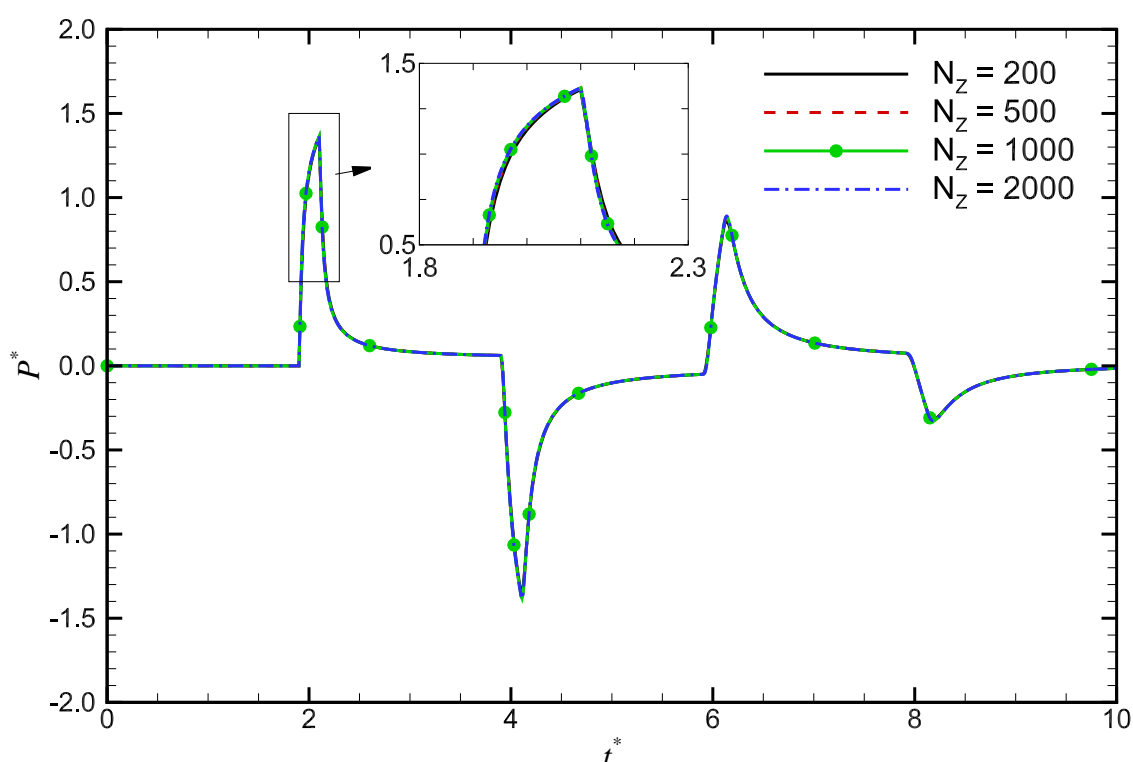


Figura 5.3 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão ao longo da posição  $z^* = 0,9$  (90% do comprimento do espaço anular) para o Modelo 2.

Na Figura 5.3, a pressão máxima na posição  $z^* = 0,9$  (90% do comprimento do espaço anular) com a malha mais grosseira (200 células) é apenas 0,4% inferior à obtida com a malha mais refinada (2.000 células). Para as malhas de 500 e 1.000 volumes de controle essa diferença não se altera significativamente, caindo para 0,2 e 0,1%, respectivamente. Analisando a Tabela 5.4, percebe-se que o tempo computacional aumenta quadraticamente com o refino de malha. Dessa forma, conclui-se que a malha mais grosseira, com 200 células axiais, produz resultados independentes da malha.

Tabela 5.4 – Efeito do refino da malha axial no tempo computacional para o Modelo 2.

Número de células axiais [ $N_Z$ ]	200	500	1.000	2.000
Pressão Máxima em $z^* =$	1,357	1,362	1,364	1,365
Tempo computacional [s]	199	1.041	4.600	14.436

### 5.2.2.2 Malha Radial

Com base na malha axial de 200 células determinada na seção anterior (passo de tempo de  $5 \times 10^{-3}$  s), três valores para o número de células radiais,  $N_R$ , foram avaliados: 40, 80 e 160. A Figura 5.4 ilustra os resultados da evolução temporal da pressão ao longo da posição  $z^* = 0,9$  (90 % do comprimento do espaço anular). Percebe-se que, ao contrário do verificado no método dos volumes finitos, o refino da malha radial tem pouco efeito na propagação da onda de pressão. Os principais resultados são mudanças nos valores de pico de pressão.

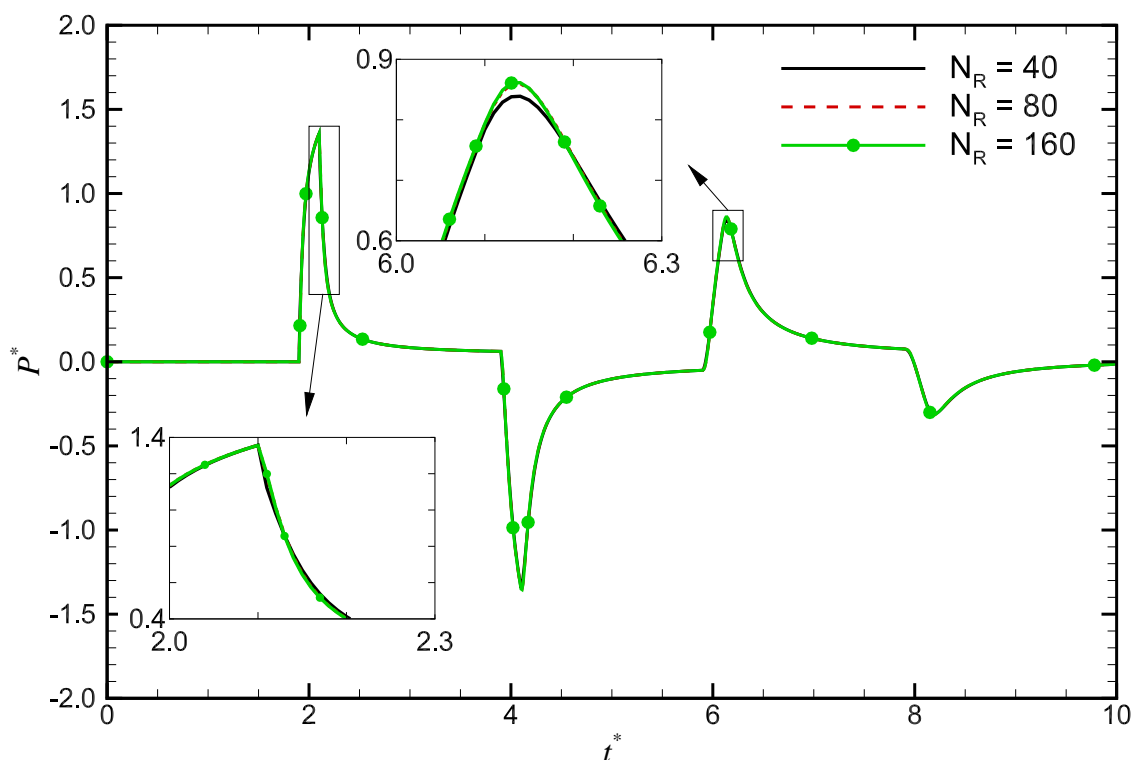


Figura 5.4 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão ao longo da posição  $z^* = 0,9$  (90% do comprimento do espaço anular) para o Modelo 2.

O detalhe aumentado superior da Figura 5.4 evidencia que para a malha de 40 células o valor de pico é inferior ao de 80 e 160 células. O segundo detalhe, entre os instantes 2 e 2,3, da Figura 5.4 destaca as pequenas nuances na propagação de pressão. No instante  $t^* = 2,12$  a pressão em  $z^* = 0,9$  com 40 volumes de controle é 3,1% inferior à obtida com 160 células. Para o caso de 80 volumes, esse valor cai para 0,1%. Analisando a Tabela 5.3, nota-se que o tempo computacional é diretamente proporcional ao número de células.

Dessa forma, a transmissão de pressão pode ser avaliada com uma malha de 80 células radiais.

Tabela 5.5 – Efeito do refino da malha radial no tempo computacional para o Modelo 2.

Número de células radiais [ $N_R$ ]	40	80	160
Tempo computacional [s]	52	199	355

### 5.3 Análise do Critério de Convergência

Como o processo para cálculo dos campos de velocidade média e local e pressão é iterativo com o primeiro modelo (discretizado pelo método dos volumes finitos), necessita-se da análise do critério de convergência para garantir que a solução seja independente do critério adotado.

Como descrito na seção 5.2, os parâmetros utilizados são os da Tabela 5.1. As condições de contorno são de vazão constante na entrada da tubulação e poço aberto na saída do espaço anular. As malhas axial e radial possuem, respectivamente, 1.000 e 40 células. O critério de estabilidade adotado foi  $CFL = 1$  e, dessa forma, o passo de tempo utilizado foi  $5 \times 10^{-3}$  s.

Conforme descrição na subseção 4.1.3, o critério de convergência é obtido através do resíduo da equação da conservação da massa. Esse parâmetro foi variado em  $Res^* = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  e  $10^{-4}$ . A Figura 5.5 ilustra a evolução temporal da pressão no acoplamento entre o tubo e a região anular. Nota-se que para o resíduo máximo de  $10^{-1}$  ocorrem oscilações numéricas.

Analisando o detalhe da Figura 5.5 percebe-se que o critério de convergência  $10^{-2}$  também possui oscilações. No acoplamento, a pressão máxima para resíduo  $10^{-2}$  é 1,8% superior à obtida com critério de convergência  $10^{-4}$ . Esse valor cai para 0,4% quando o resíduo de  $10^{-3}$  é empregado.

A Tabela 5.6 mostra que o tempo computacional aumenta consideravelmente quando o critério de convergência muda de  $10^{-3}$  para  $10^{-4}$ . Como o resultado é satisfatório e não ocorrem oscilações, o resíduo máximo adotado foi o de  $10^{-3}$ .

Tabela 5.6 – Efeito do resíduo máximo no tempo computacional para o Modelo 1.

$Res^*$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
Tempo computacional [s]	2.651	2.874	3.907	10.396

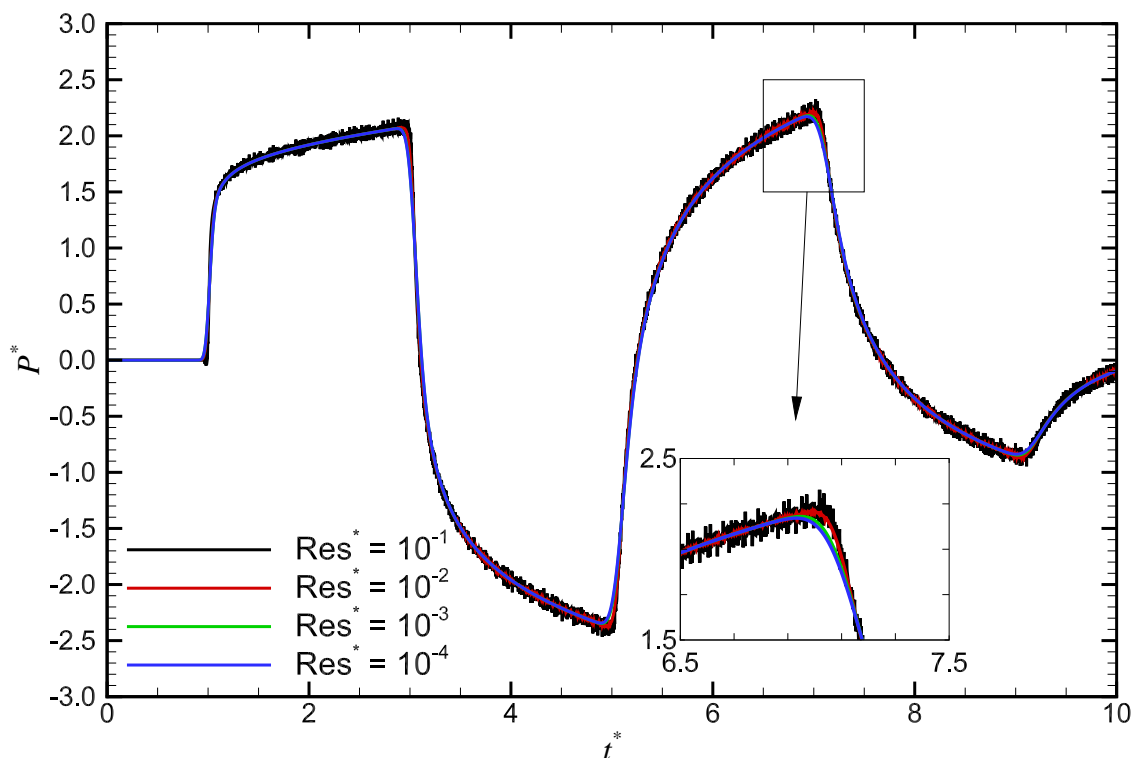


Figura 5.5 – Análise do resíduo máximo na evolução temporal da pressão ao longo da posição  $z^* = 0$  (acoplamento) para o Modelo 1.

## 5.4 Análise do Critério de Estabilidade

Conforme explicado na subseção 4.1.3, quando utiliza-se o método dos volumes finitos é necessário tomar cuidado na escolha das malhas espaciais e temporais de forma a evitar instabilidades e dispersões numéricas. Dessa forma, o critério de estabilidade  $CFL$ , Equação (4.59), que relaciona a malha axial, a malha temporal e a velocidade de propagação da onda de pressão, deve ser obedecido de acordo com a Equação (4.59).

As simulações foram realizadas fixando as malhas axial e radial em 200 e 40 células, respectivamente, e utilizando um critério de convergência  $Res^* = 10^{-3}$ . Assim, o efeito do critério de estabilidade foi verificado através da sua variação em 0,125; 0,25; 0,5 e 1 proporcionando os passos de tempo de, respectivamente,  $\Delta t = 6,25 \times 10^{-4}$ ,  $1,25 \times 10^{-3}$ ,  $2,5 \times 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-3}$  s. A Figura 5.6 mostra a influência do  $CFL$  na evolução temporal da pressão na entrada da tubulação. Verifica-se que para o critério de estabilidade de 0,125 o pico de pressão inicial foi 32,1% superior ao obtido com  $CFL = 1$ . Os casos intermediários de  $CFL = 0,25$  e 0,5; os valores foram, respectivamente, 20,7% e 6,8% maiores.

A Tabela 5.7 evidencia o aumento do tempo computacional com a diminuição do  $CFL$ , isso pode ser explicado pelo fato da malha temporal ser refinada a medida que o critério de estabilidade diminui.

O valor do critério de estabilidade foi escolhido considerando o menor tempo computacional (apesar da malha ser menos refinada) e a menor instabilidade do pico de pressão



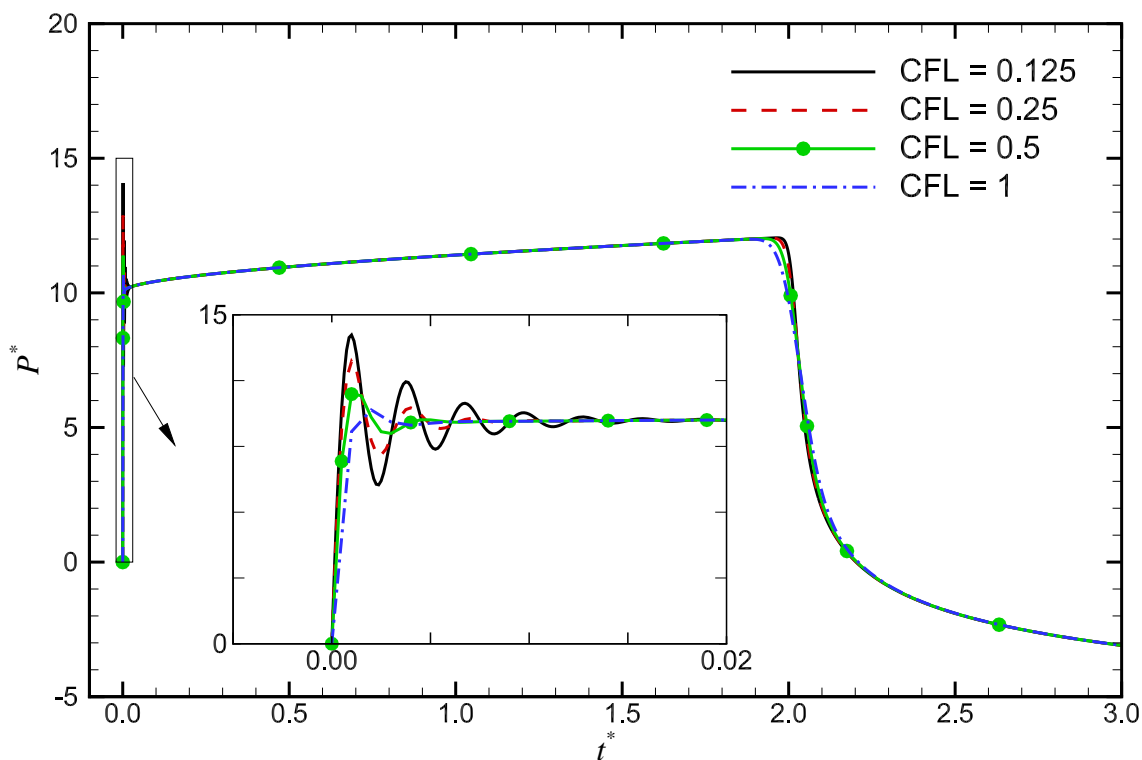


Figura 5.6 – Análise do efeito do  $CFL$  na evolução temporal da pressão ao longo da posição  $z^* = -1$  (entrada do tubo) para o Modelo 1.

Tabela 5.7 – Efeito do  $CFL$  no tempo computacional para o Modelo 1.

$CFL$	0,125	0,25	0,5	1
Tempo computacional [s]	17.972	12.451	7.225	3.907

na entrada. Dessa forma, para evitar falsas difusões e oscilações numéricas,  $CFL = 1$  foi selecionado para as simulações.

Como o método das características fixa o valor do passo de tempo em  $\Delta t = \Delta z/c$  devido às linhas características, não é necessário analisar a estabilidade do segundo modelo.

## 5.5 Comparação com a Solução Analítica

Nessa seção, os modelos são comparados à solução analítica de um fluido newtoniano escoando em um tubo de seção circular com vazão constante na entrada e variação de pressão temporal nula na saída (poço aberto). As hipóteses e procedimentos necessários para obtenção da solução analítica são descritos no Apêndice B.

As soluções analíticas para os campos de pressão e velocidade são:

$$P(z, t) = \frac{2V_{ent}}{M\alpha c^2} (L - z) + \frac{2V_{ent}}{\alpha c^2 L} e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Omega_l^2} \cos \Omega_l z \left[ \left( \omega_l - \frac{1}{M^2 \omega_l} \right) \sin \omega_l t - \frac{2}{M} \cos \omega_l t \right] \right\} \quad (5.18)$$

$$V(z, t) = V_{ent} \left\{ 1 - \frac{2}{L} e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\Omega_l} \sin \Omega_l z \left( \cos \omega_l t + \frac{1}{M \omega_l} \sin \omega_l t \right) \right] \right\} \quad (5.19)$$

sendo  $M = \rho D^2 / 16\mu$ ,  $\Omega_l = (l - 1/2) \pi / L$  e  $\omega_l^2 = (c\Omega_l)^2 - (1/M)^2$ .

Utilizou-se os parâmetros da Tabela 5.8 para a comparação com a solução analítica. De forma a verificar a influência da dissipação da onda de pressão nessa comparação, o parâmetro dissipativo foi variado em  $\phi = 0,01; 0,1; 1$  e  $5$ .

Tabela 5.8 – Parâmetros utilizados para comparação com a solução analítica.

$Ma$	$g^*$	$\delta$	$H$	$RA$	$\Phi$	$\epsilon$
$10^{-4}$	$0$	$10^{-4}$	$1$	$0,1$	$1$	$9/11$

As Figuras 5.7 e 5.8 ilustram a comparação entre os resultados do modelo e da solução analítica para a evolução temporal da pressão com parâmetro dissipativo  $\phi = 0,01$  e  $0,1$  (fluido pouco dissipativo) na entrada do tubo de seção circular. Observa-se que no 1º ciclo, de  $t^* = 0$  a  $4$ , os valores máximo e mínimo de pressão adimensional são próximos. Porém, ao longo da evolução temporal, percebe-se que a solução analítica demora mais tempo para dissipar a onda de pressão. Além disso, os modelos apresentam períodos de oscilação crescente, enquanto que na solução analítica essa oscilação é fixa.

A Figura 5.9 mostra o detalhe no início do teste para o caso com parâmetro dissipativo  $\phi = 0,01$ . Nota-se que para o primeiro modelo (que foi discretizado pelo MVF) ocorre uma oscilação logo que a vazão se inicia. Conforme descrito na seção 5.4, isso acontece por causa do método dos volumes finitos, mesmo com o valor máximo de  $CFL = 1$ , as oscilações geram um pico de pressão ao começar a simulação. Porém, esse pico inicial não influencia o restante do resultado numérico. Observa-se que inicialmente a solução analítica e o segundo modelo (discretizado pelo MOC) apresentam resultados similares.

Aumentando o valor do parâmetro dissipativo para  $\phi = 1$ , aumenta-se a dissipação do fluido. A Figura 5.10 ilustra o resultado para esse novo caso. Observa-se um aumento contínuo de pressão adimensional, mais acentuado do que para os casos de  $\phi = 0,01$  e  $0,1$ , e um menor número de ciclos necessários para que o valor de regime permanente seja alcançado. Ainda assim, é possível verificar que a atenuação da onda na solução analítica é mais rápida do que no modelo e que o período de oscilação é mais curto. Ressalta-se que os valores de equilíbrio são iguais. Observa-se que para as duas posições do tubo

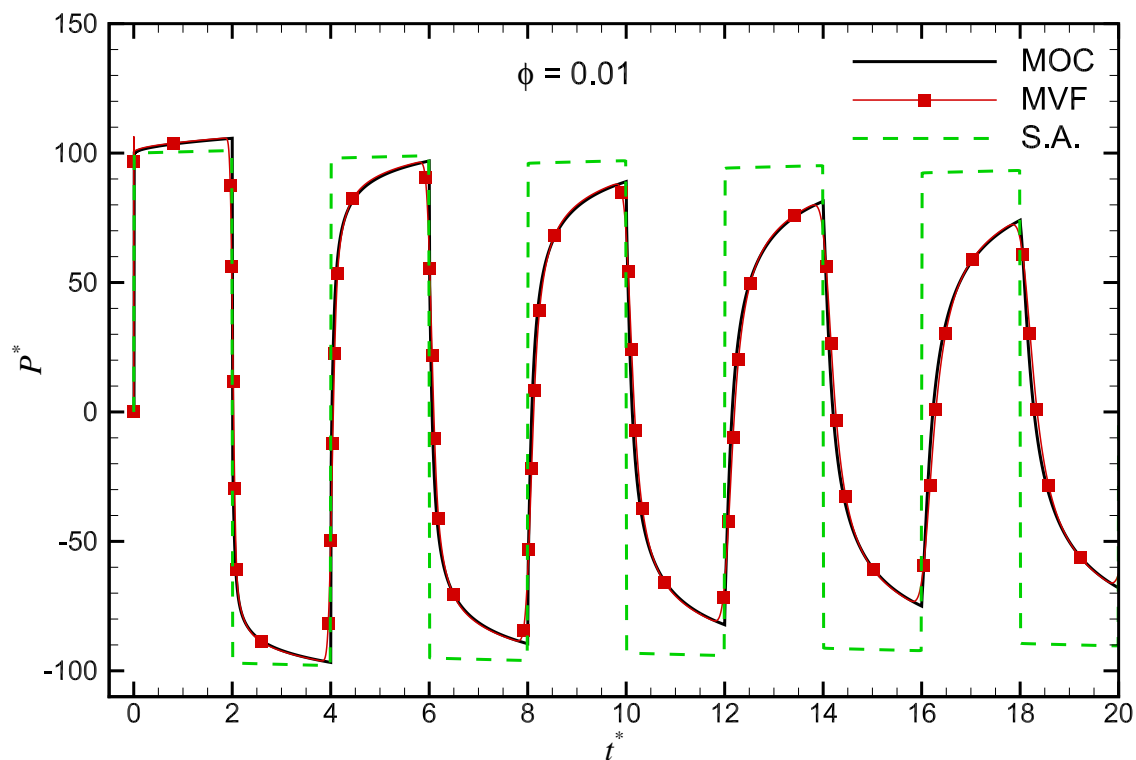


Figura 5.7 – Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada do tubo para  $\phi = 0,01$ .

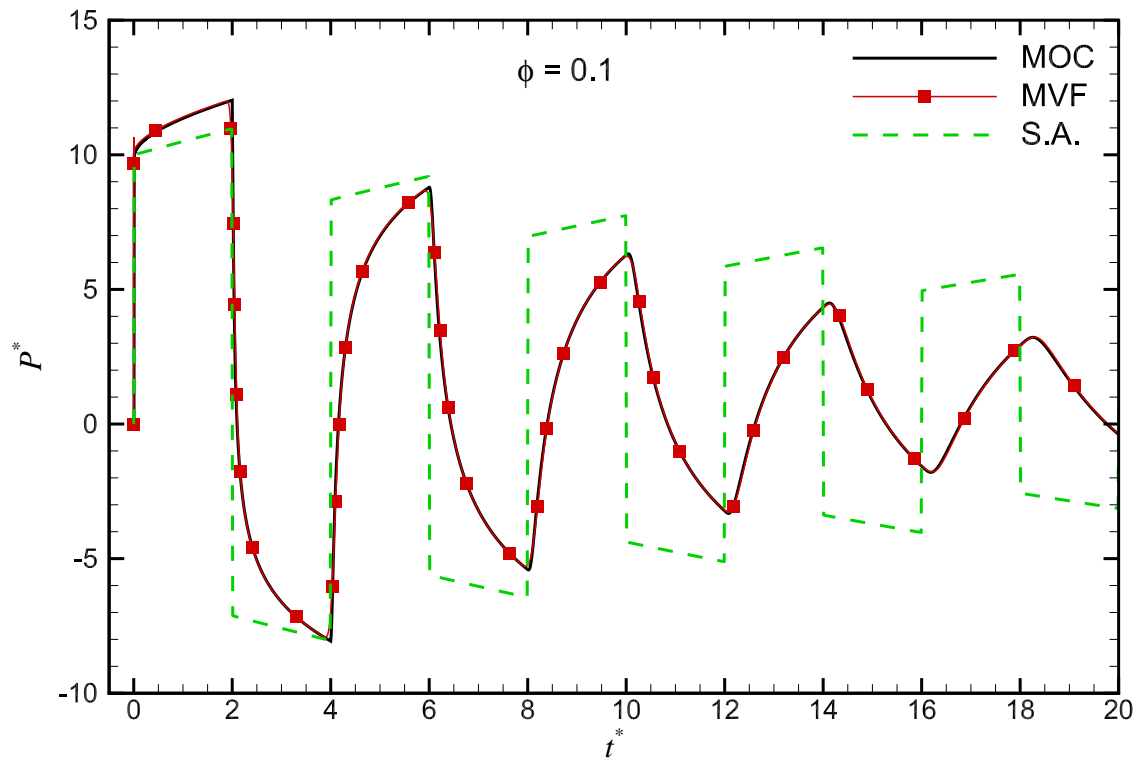


Figura 5.8 – Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada do tubo para  $\phi = 0,1$ .

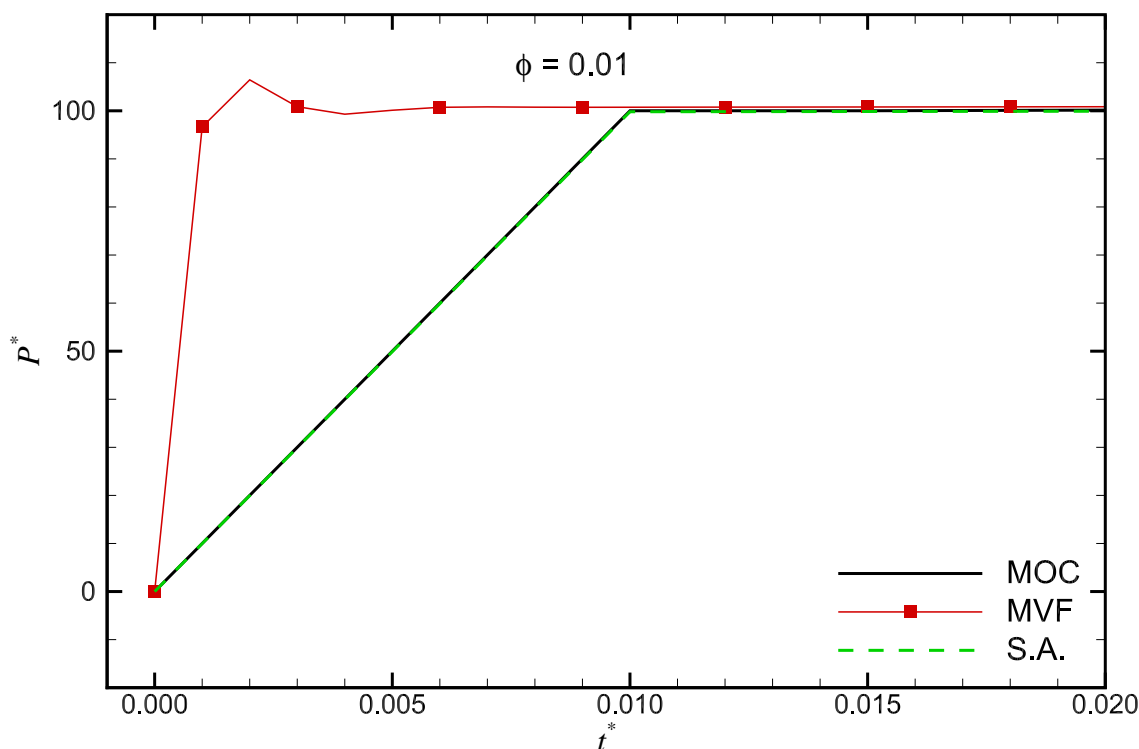


Figura 5.9 – Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada do tubo para  $\phi = 0,01$ .

analisadas, a solução do modelo se encontra mais próxima da analítica do que nos outros casos menos dissipativos.

O caso em que  $\phi = 5$  não se encontra dentro da validade da solução analítica, porém como as simulações numérica e analítica se mostraram próximas, a comparação será apresentada. As respostas para o parâmetro dissipativo  $\phi = 5$  são ilustradas na Figura 5.11. Observa-se excelente concordância entre as soluções, tanto para o regime transiente quanto para o regime permanente.

A solução analítica e dos modelos é diferente, pois as hipóteses para chegar em cada uma dessas soluções são distintas. Assim, pode-se concluir que para casos mais dissipativos, os modelos encontram-se próximos da solução analítica. Porém, para casos em que a dissipação da onda de pressão é menor, ocorre divergência entre as soluções. Isso se deve à melhor representação da dissipação viscosa dos modelos propostos, pois a hipótese de variação linear da tensão de cisalhamento foi relaxada.

As Figuras 5.12 e 5.13 apresentam a evolução do perfil de tensão de cisalhamento ao longo do raio no meio do tubo para, respectivamente,  $\phi = 0,01$  (menos dissipativo) e 5 (mais dissipativo). Nota-se que no caso menos dissipativo, o perfil de tensão de cisalhamento começa a oscilar próximo à parede e vai se transmitindo para o centro do tubo. Mesmo assim, em  $t^* = 100$ , a tensão não varia linearmente com o raio na região da parede. Contudo, para o caso mais dissipativo percebe-se que mesmo para o primeiro instante apresentado ( $t^* = 1$ ) forma-se uma reta da tensão de cisalhamento entre zero no centro

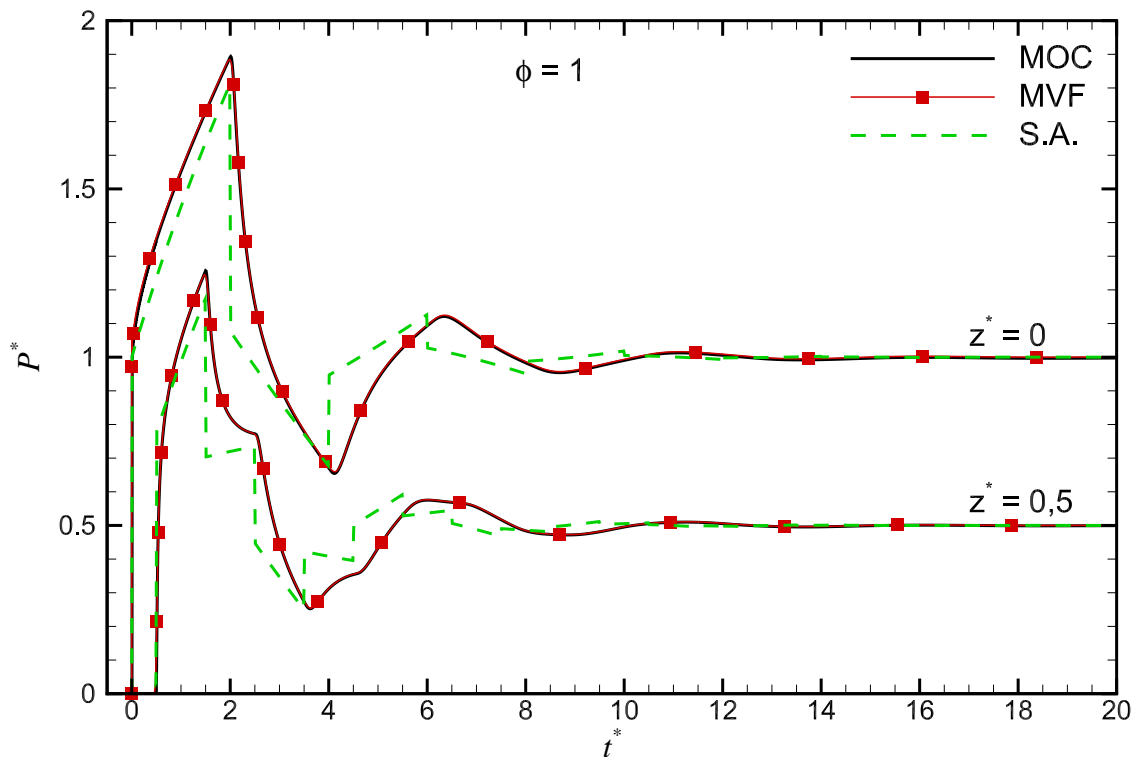


Figura 5.10 – Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada e no meio do tubo para  $\phi = 1$ .

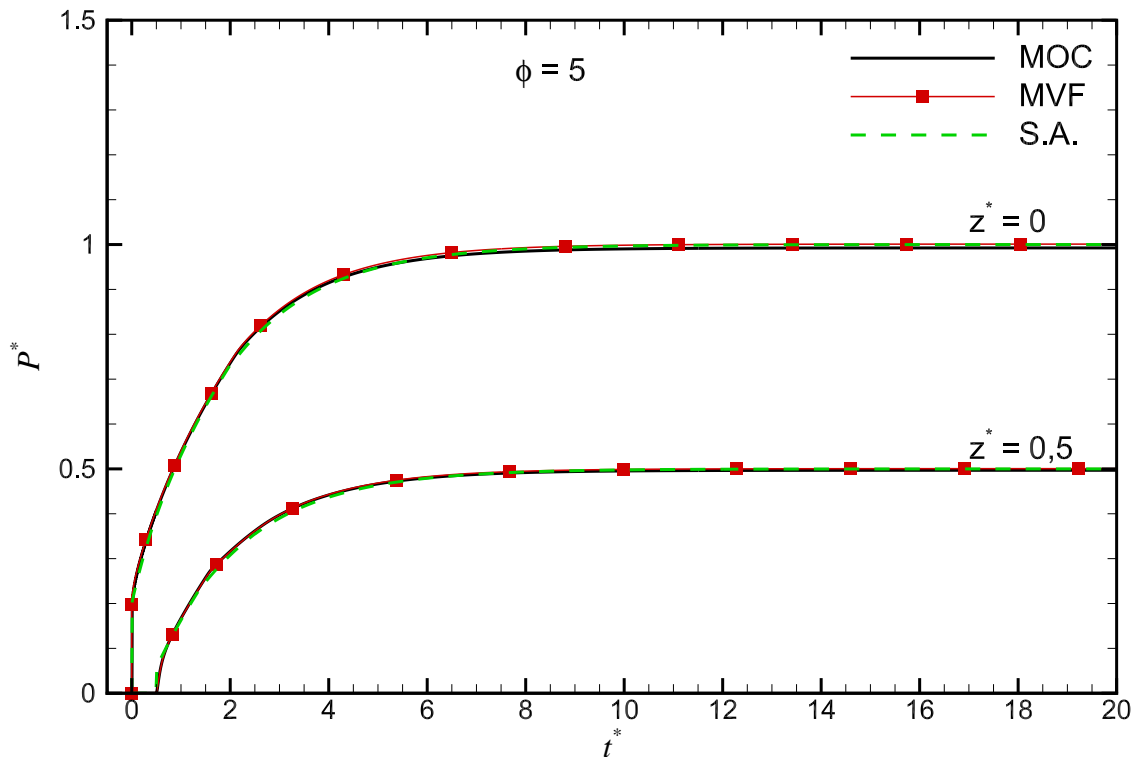


Figura 5.11 – Comparação dos resultados com a solução analítica durante a evolução temporal da pressão na entrada e no meio do tubo para  $\phi = 5$ .

do tubo e o valor máximo na parede. Dessa forma, conclui-se que para baixos casos de dissipação a hipótese de distribuição linear da tensão de cisalhamento varia ao longo do raio não é uma boa simplificação. Para casos de alta dissipação, essa hipótese representa bem o problema.

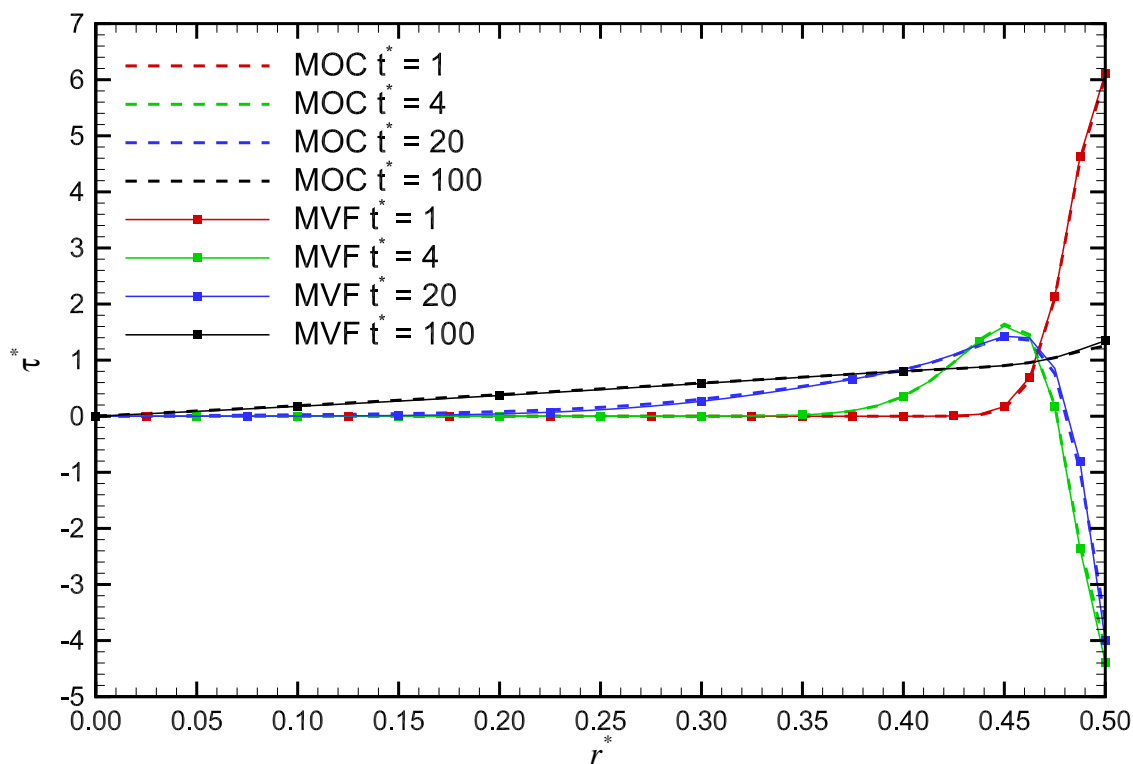


Figura 5.12 – Evolução temporal do perfil de tensões de cisalhamento ao longo do raio no meio do tubo para  $\phi = 0,01$ .

## 5.6 Comparação com Resultados Experimentais - Holmboe e Rouleau (1967)

Esta etapa do processo de validação do modelo matemático desenvolvido consiste em comparar os resultados obtidos com valores experimentais. Estes valores foram obtidos por Holmboe e Rouleau (1967) para o escoamento de água e de um óleo num experimento de golpe de aríete em uma tubulação.

### 5.6.1 Procedimentos dos Testes

A expressão “golpe de aríete” é comumente utilizada para a geração de escoamentos transientes em tubulações como resultado de mudanças abruptas nas condições de escoamento. Essas mudanças podem ser ocasionadas pelo repentino fechamento de uma válvula ou bomba (WATTERS, 1984).

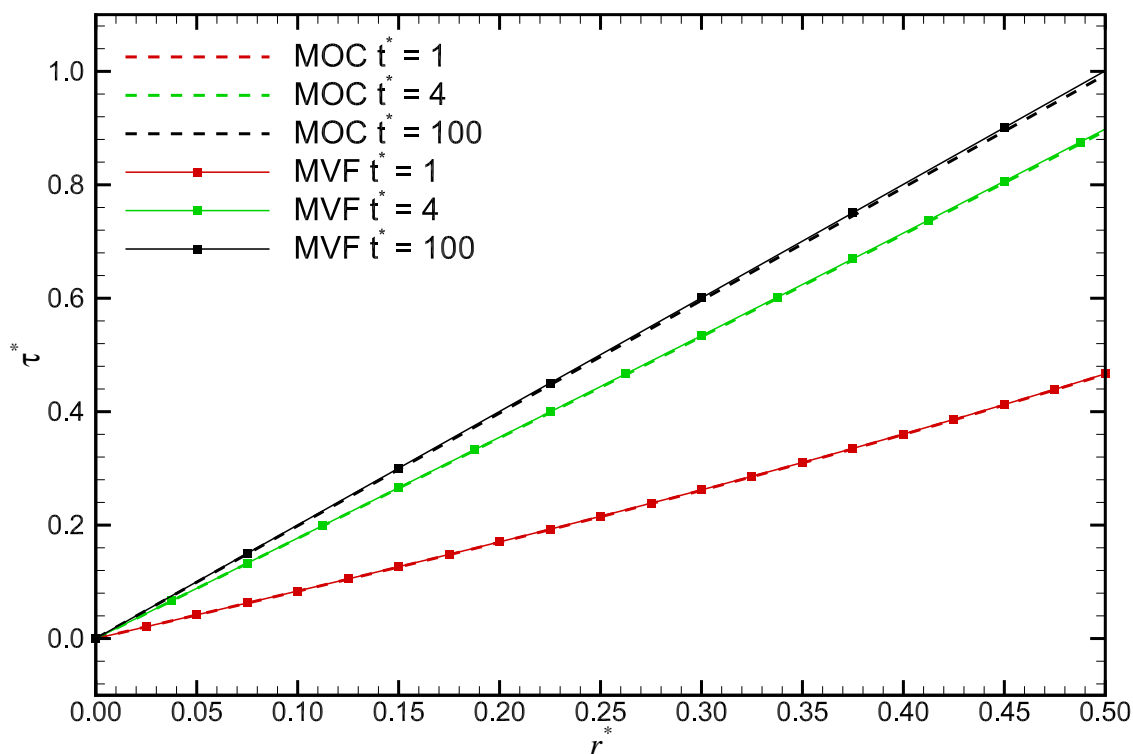


Figura 5.13 – Evolução temporal do perfil de tensões de cisalhamento ao longo do raio no meio do tubo para  $\phi = 5$ .

O aparato experimental para gerar o golpe de aríete de Holmboe e Rouleau (1967) é ilustrado na Figura 5.14. Uma válvula especial de rápido fechamento foi montada na extremidade da tubulação de cobre com 36,09 m (118,4") de comprimento e 25,4 mm (1") de diâmetro. A válvula utilizada como bobina deslizante é acionada pelo impacto da massa acelerada pelo ar comprimido. O tubo estava envolvido em concreto para reduzir as vibrações. Um tanque de 60 galões, mantido à pressão constante por ar comprimido, representa um reservatório infinito no início da tubulação. Dois transdutores de pressão do tipo *Norwood* foram posicionados, um no meio (B; 18,045 m) e outro no fim da tubulação (A; 36,09 m). Os resultados foram amplificados por amplificadores portáteis *Honeywell* e gravados por um *Visicoder Honeywell*.

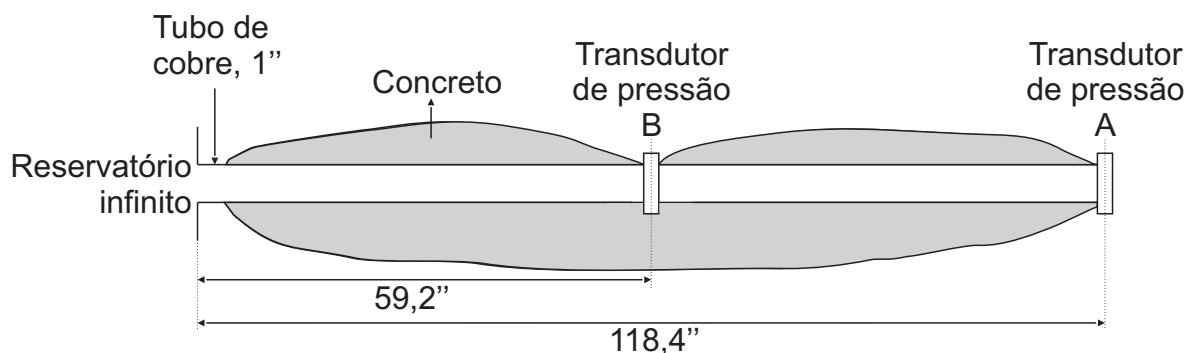


Figura 5.14 – Diagrama esquemático do experimento de golpe de aríete. Adaptado de: Holmboe e Rouleau (1967).

O seguinte procedimento foi utilizado para a realização dos testes:

- (i) Escoamento desenvolvido na tubulação;
- (ii) Fechamento da válvula na extremidade da tubulação;
- (iii) Estabilização da pressão e repouso do fluido.

Dessa forma, como condição inicial do sistema foi considerado que o fluido encontra-se em movimento ao longo do domínio. Ou seja, os campos de velocidade local e médio inicial são iguais aos de um escoamento completamente desenvolvido com velocidade média,  $V_{ent}$ . Como o tubo se encontra na horizontal, desconsidera-se o termo hidrostático e a pressão inicial equivale à queda de pressão de um escoamento newtoniano completamente desenvolvido. Como a tubulação é mantida fechada ao longo do experimento, a velocidade de saída é nula,  $u(r, z = L_T, t) = 0$  e  $V(z = L_T, t) = 0$ . Durante o experimento, a pressão na entrada se mantém constante,  $P(z = 0, t) = P_{ent}$  e  $q(r, z = 0, t) = 0$ .

## 5.6.2 Resultados Experimentais

Os testes foram executados para água e óleo. As propriedades desses fluidos foram obtidas, respectivamente, de White (2003) e de Wahba (2013), como mostra a Tabela 5.9. As propriedades do escoamento são listadas na Tabela 5.10, as velocidades médias iniciais são de 0,244 m/s (0,8 ft/s) e 0,128 m/s (0,42 ft/s) e as pressões iniciais são calculadas através da Equação (5.9).

Tabela 5.9 – Propriedades da água e do óleo para o experimento de golpe de aríete de Holmboe e Rouleau (1967).

Propriedades	Água	Óleo
$\rho_0$ [kg/m <sup>3</sup> ]	997	876
$\mu$ [Pa.s]	$8,6 \times 10^{-4}$	$3,484 \times 10^{-2}$
$c$ [m/s]	1.465	1.324

Tabela 5.10 – Parâmetros do escoamento da água e do óleo para o experimento de golpe de aríete de Holmboe e Rouleau (1967).

Propriedades	Água	Óleo
$V_{ent}$ [m/s]	0,244	0,128
$P_{ent}$ [Pa]	387,5	8.398



A seguir, os resultados são apresentados, conforme o artigo de Holmboe e Rouleau (1967), na forma de gráficos relacionando à altura adimensional,  $H^*$ , em função do tempo adimensional. A altura manométrica e a altura adimensional são expressas por:

$$H = \frac{P}{\rho g} \quad (5.20)$$

$$H^* = \frac{P}{\rho V_{ent} c} \quad (5.21)$$

Para o teste com a água, a velocidade média inicial utilizada foi de 0,244 m/s e a pressão na entrada foi mantida constante e igual a 387,5 Pa. A Figura 5.15 ilustra a altura adimensional para o sensor A (localizado na saída da tubulação) em função do tempo. Nota-se que a altura de pressão passa de 0 a 1 logo após o instante  $t^* = 0$ . Isso indica o fechamento da válvula no fim da tubulação. Observa-se também que tanto a frequência quanto a amplitude da pressão de ambos resultados numéricos estão de acordo com os dados experimentais. O formato quase quadrático dos ciclos indica pouca dissipação de energia.

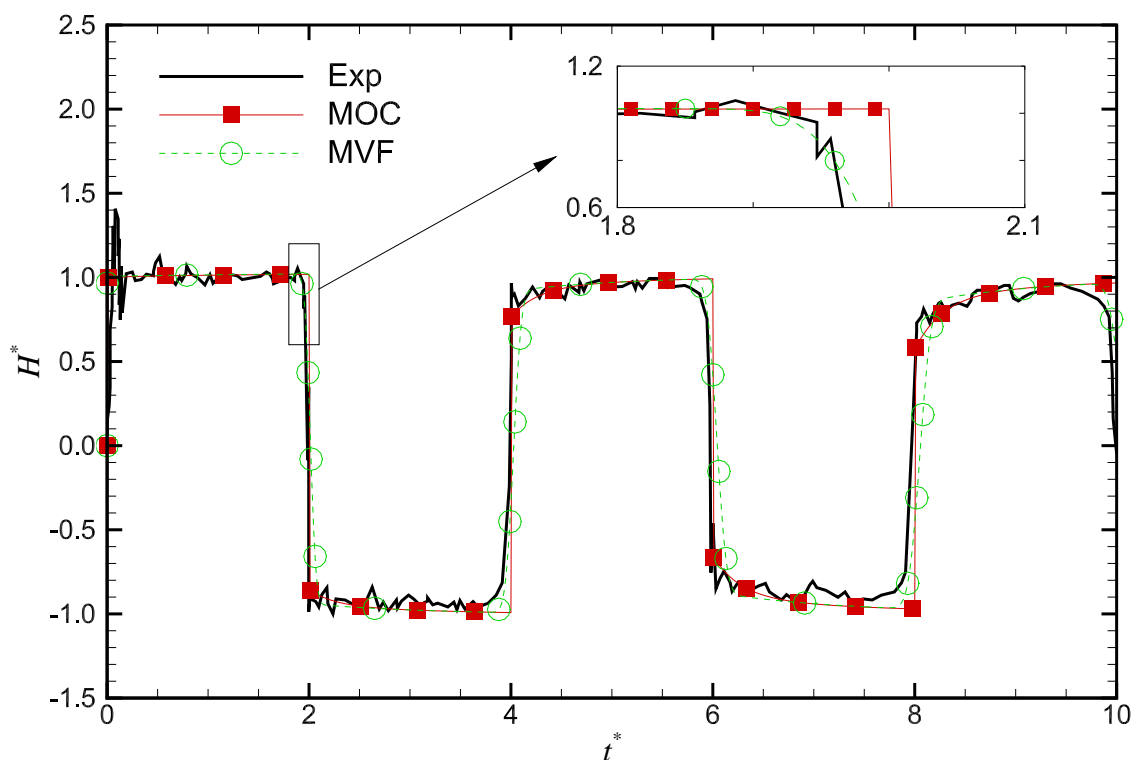


Figura 5.15 – Evolução temporal dos valores medidos por Holmboe e Rouleau (1967) para água e calculados pelo modelo para a pressão na posição da válvula (Transdutor A).

Para evidenciar o efeito viscoso, Holmboe e Rouleau (1967) escolheram um óleo com viscosidade cinemática igual a  $0,427 \times 10^{-3} \text{ ft}^2/\text{s}$  a  $80^\circ \text{ F}$  (50 vezes superior à da água). As

outras propriedades do fluido são listadas na Tabela 5.9. Os resultados para a saída da tubulação, sensor A, são ilustrados na Figura 5.16. Nota-se que o formato da curva é mais atenuada e que os ciclos são mais dissipativos, reduzindo os valores máximo atingidos em cada período. Observa-se que os resultados numéricos são novamente próximos ao experimental e que o período de oscilação é bem representado. Porém, ocorrem diferenças da ordem máxima de 10% na amplitude de oscilação.

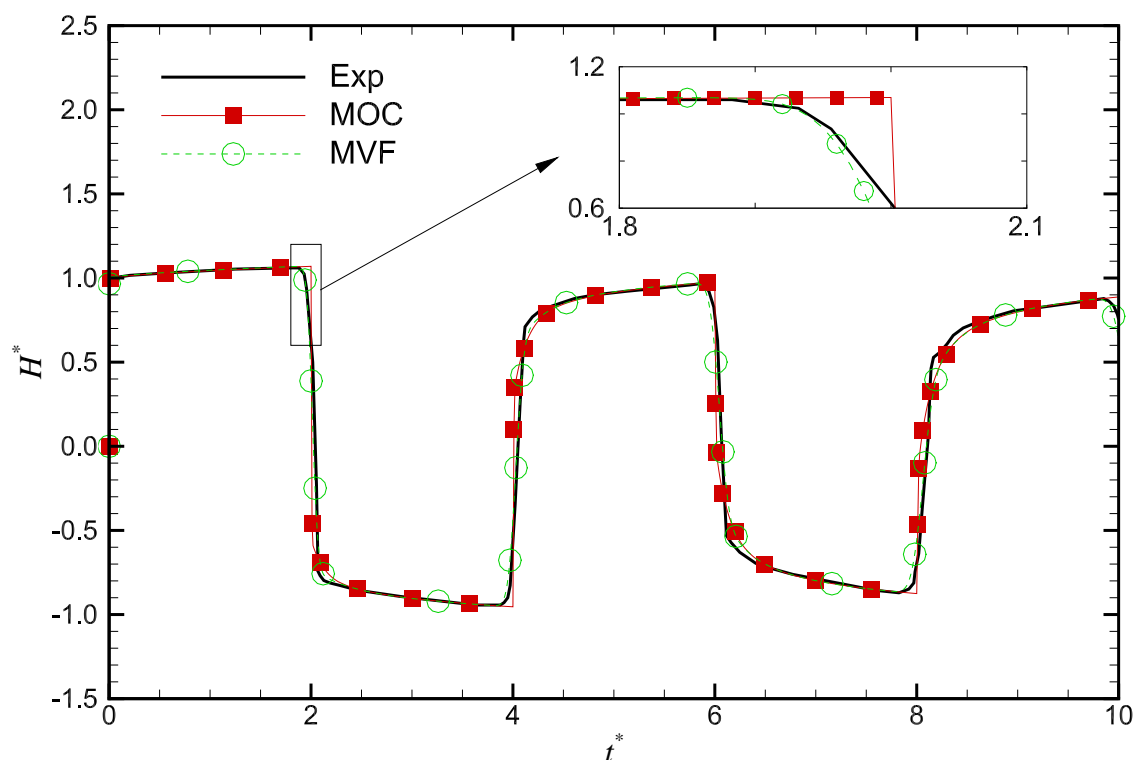


Figura 5.16 – Evolução temporal dos valores medidos por Holmboe e Rouleau (1967) para óleo e calculados pelo modelo para a altura adimensional na posição da válvula (Transdutor A).

## 5.7 Comparação com Resultados Numéricos de Wahba (2013)

Nessa seção os resultados numéricos do modelo de Wahba (2013) para um fluido lei de potência são comparados com os resultados dos modelos matemáticos desenvolvidos.

Como descrito no Capítulo 2, a partir do experimento realizado por Holmboe e Rouleau (1967), Wahba (2013) fez uma comparação com os resultados experimentais para validar seu modelo matemático e conduziu simulações numéricas para o caso de um fluido lei de potência. Dessa forma, os procedimentos de teste são os mesmos descritos na subseção 5.6.1.

Um fluido lei de potência é descrito pela viscosidade aparente, Equação (3.31), e

equação constitutiva:

$$\tau_{rz} = k\dot{\gamma}_{rz}^n \quad (5.22)$$

A geometria do problema é ilustrada na Figura 5.14 e as propriedades do óleo na Tabela 5.9. Ressalta-se que a unidade da viscosidade dinâmica passa a ser Pa.s<sup>n</sup>. De forma a obter um escoamento com número de Reynolds idêntico ao do óleo, 82, em regime permanente antes do fechamento da válvula, calculou-se os seguintes parâmetros mostrados na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Propriedades do escoamento de fluidos lei de potência no experimento de golpe de aríete de Wahba (2013).

$n$	0,6	0,8	1,2	1,4
$V_{ent}$ [m/s]	0,04799	0,07292	0,3111	1,321
$P_{ent}$ [kPa]	1,136	2,625	47,76	860,6

A Figura 5.17 ilustra a evolução temporal da altura adimensional para os casos em que  $n = 0,6; 0,8; 1,2$  e  $1,4$ . Nota-se uma excelente concordância entre os resultados dos modelos. Observa-se que a dissipação do modelo está ligada ao índice de lei de potência. Quanto maior esse valor, mais rápida é a dissipação da onda de pressão.

## 5.8 Comparação com Resultados Experimentais de Taquipe

Nessa seção os modelos matemáticos desenvolvidos são comparados com os valores experimentais obtidos pela Petrobras no Núcleo Experimental de Taquipe (NUEX-Taquipe), num experimento de pressurização de um poço através da coluna de perfuração.

### 5.8.1 Procedimentos dos Testes

A Petrobras possui uma sonda experimental de perfuração em São Sebastião do Passé – Ba (NUEX-Taquipe) que é utilizada para realizar ensaios de campo. O aparato experimental, conforme a Figura 5.18, consiste da coluna de perfuração com diâmetro externo e interno de, respectivamente, 88,9 mm e 76 mm, e poço revestido com diâmetro interno de 157 mm. Dois sensores de fibra óptica do tipo *Bragg* foram colocados na coluna de perfuração e seis no revestimento do poço, para medir temperatura e pressão. De maneira a simplificar a ilustração dos resultados, somente os resultados de três sensores (S1, S2 e S3), conforme mostra a Figura 5.18, são utilizados na comparação. O primeiro está localizado na coluna de perfuração e os dois últimos no espaço anular a uma distância de 29 m (S1), 1.192 m (S2) e 14,64 m (S3) abaixo da cabeça do poço.

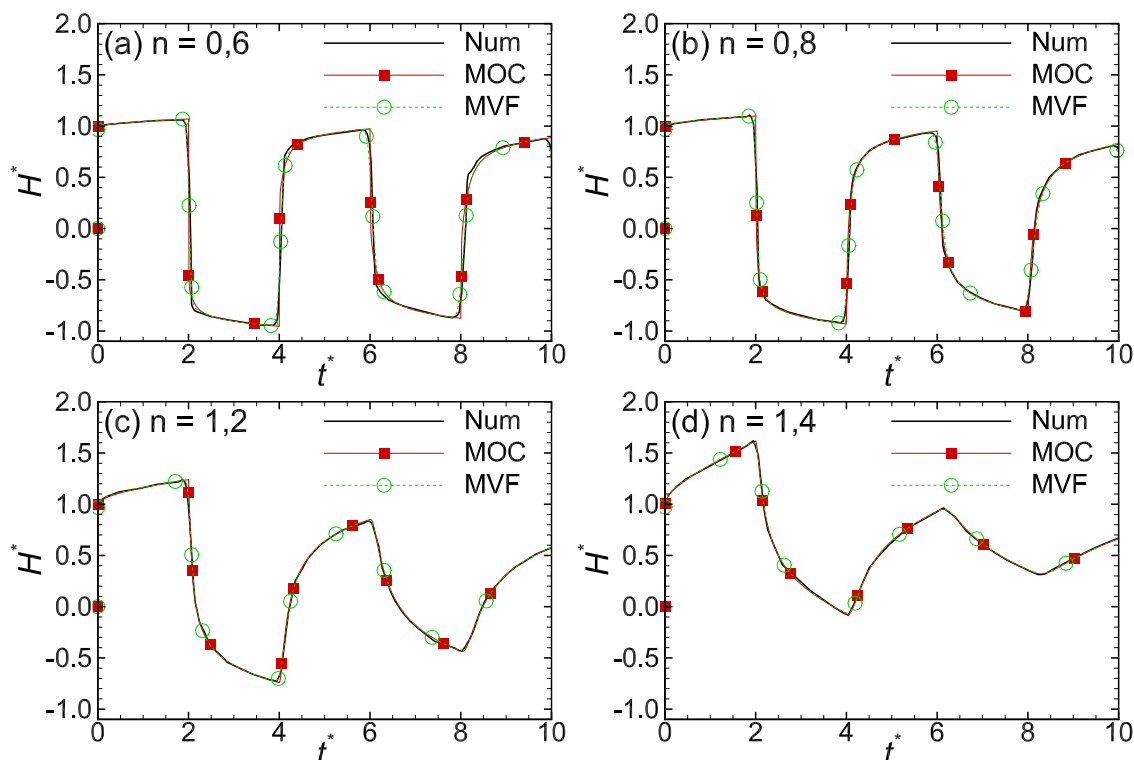


Figura 5.17 – Comparação dos resultados com a solução numérica de Wahba (2013) durante a evolução temporal da altura adimensional na posição da válvula para um fluido lei de potência com índice: (a)  $n = 0,6$ , (b)  $n = 0,8$ , (c)  $n = 1,2$  e (d)  $n = 1,4$ .

A coluna de perfuração foi posicionada no fundo do poço sem a broca. Dessa forma, tanto o comprimento da coluna de perfuração como do poço foi considerado 1.192 m. Durante os testes, o fluido é pressurizado através da coluna de perfuração e o espaço anular é mantido fechado. Os vetores verticais da Figura 5.18 ilustram a direção do deslocamento do fluido. O sistema de circulação estava conectado com a cabeça do poço através de um sistema de controle de pressão máxima e vazão da bomba de entrada. A pressão máxima é estabelecida conforme o peso do fluido no fundo do poço. Para adquirir os resultados, um sistema com taxa de aquisição de 1,0 Hz, compatível com a tecnologia de fibra óptica *Bragg* foi utilizado.

A seqüência seguida durante o teste foi:

- (i) Preenchimento do poço com água;
- (ii) Fechamento da linha de escoamento para evitar o retorno;
- (iii) Bombeamento do fluido no poço à vazão constante;
- (iv) Desligamento da bomba antes que a máxima pressão de trabalho seja atingida;
- (v) Estabilização da pressão;

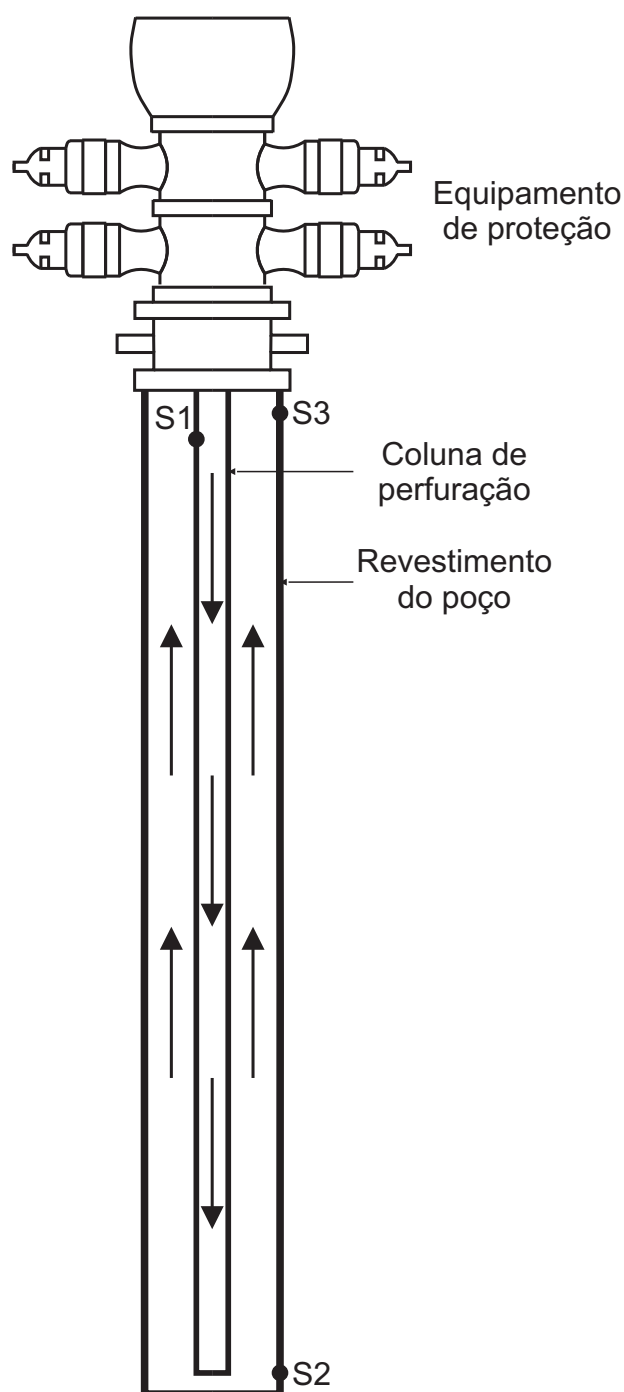


Figura 5.18 – Diagrama esquemático da sonda experimental de Taquipe. Adaptado de: Oliveira et al. (2013)

(vi) Despressurização do poço pela abertura da válvula.

Dessa forma, como condição inicial do sistema, o fluido foi considerado em repouso por todo o domínio, ou seja, os campos de velocidade local e médio inicial são zero,  $u(r, z, t = 0) = 0$  e  $V(z, t = 0) = 0$ . A pressão inicial é a hidrostática. Como o poço é mantido fechado ao longo do experimento, a velocidade de saída é nula,  $u(r, z = L_T, t) = 0$  e  $V(z = L_T, t) = 0$ . Conforme o fluido é injetado, a pressão aumenta continuamente até o

instante que a pressão de trabalho máxima,  $P_{max}$ , seja alcançada,  $t_{set}$ . Assim, a condição de contorno na entrada da coluna de perfuração é dada por:

$$V(z = 0, t) = \begin{cases} V_{ent} & t < t_{set} \\ 0 & t \geq t_{set} \end{cases} \quad (5.23)$$

O fluido injetado no experimento foi a água. A viscosidade, a velocidade de propagação e a massa específica do fluido são apresentadas na Tabela 5.12 e estão de acordo com o trabalho de Oliveira et al. (2013).

Tabela 5.12 – Propriedades da água para o experimento de Taquipe conforme Oliveira et al. (2013).

Propriedades	Água
$\rho_0$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1.000
$\mu$ [Pa.s]	0,001
$c$ [m/s]	1.350

## 5.8.2 Resultados Experimentais

A geometria do escoamento é descrita na Tabela 5.13. A bomba foi ligada com vazão constante de 1,122 l/s e desligada antes que a pressão de trabalho máxima no fundo do poço, 27,6 MPa, fosse atingida. Essa vazão foi selecionada de modo a fornecer um gradiente temporal de pressão igual ao dos resultados experimentais. Da mesma forma, a bomba foi desligada em uma pressão de 14,6 MPa (2118 psi) para assegurar que o instante de interrupção fosse o mesmo que no experimento de NUEX-Taquipe. As Figuras 5.19, 5.20 e 5.21 mostram a comparação dos valores calculados pelo modelo de Oliveira et al. (2013) – OLI2013 – e pelos dois modelos propostos e os valores medidos para a pressão, respectivamente, no primeiro (S1), segundo (S2) e terceiro (S3) sensores. Ressalta-se que a pressão hidrostática foi subtraída desses valores. Como o valor de vazão foi imposto para que as pressões medida e calculada fossem o mais próximo possível, não leva-se em consideração os primeiros 150 s. Depois que a bomba foi desligada, uma boa concordância entre os resultados dos modelos e os valores experimentais é verificada. Diferentemente do modelo de Oliveira et al. (2013), a pressão dos modelos se dissipa na mesma velocidade que o resultado medido. Porém, a frequência de oscilação não é a mesma. No fim da simulação (280 – 300 s) é interessante notar que embora a fase e o valor de oscilação sejam diferentes, a amplitude é a mesma.

Nota-se que, no instante 300 s das Figuras 5.19, 5.20 e 5.21 para os resultados medidos, o valor final da pressão nos sensores S1 e S2 oscila em torno de 14,6 MPa, enquanto que no sensor S3 a oscilação acontece ao redor de 14,8 MPa. Como a água é um fluido

Tabela 5.13 – Geometria do experimento de Taquipe conforme Oliveira et al. (2013).

$D_1$ [mm]	$L_1$ [m]	$D_{2,i}$ [mm]	$D_{2,e}$ [mm]	$L_2$ [m]
76	1.192	88,9	157	1.192

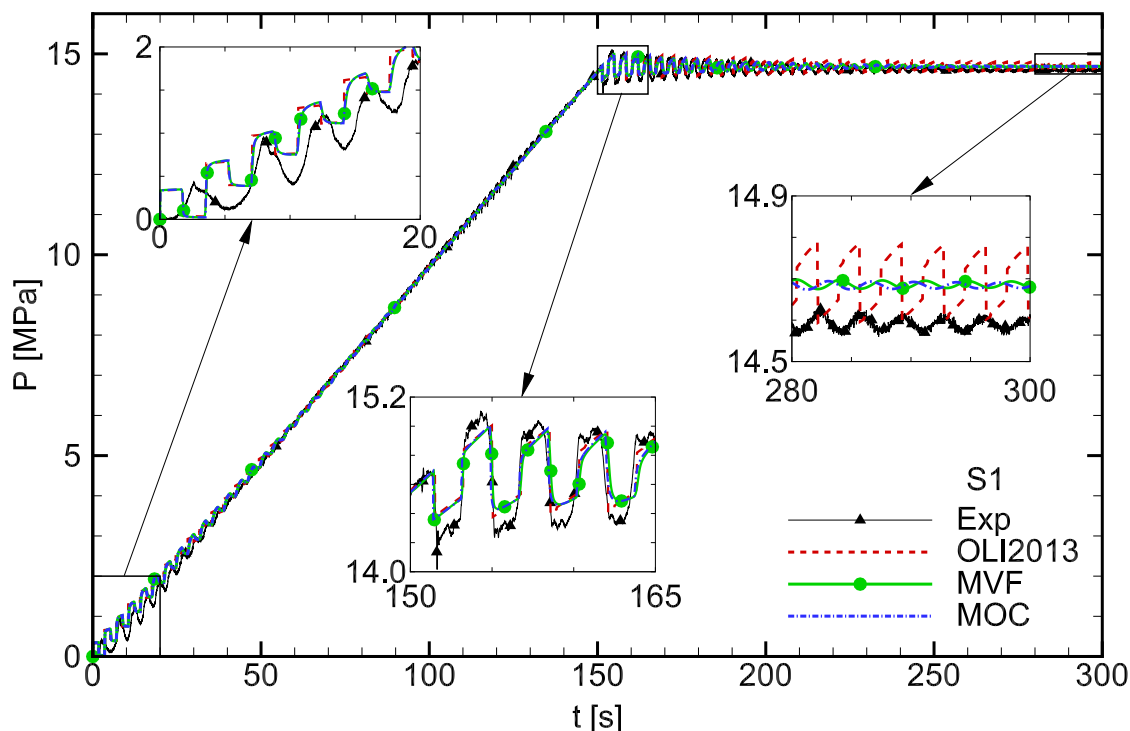


Figura 5.19 – Evolução temporal da pressão medida e calculada para os ensaios de Taquipe na posição S1 para a vazão volumétrica de  $1,122 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ .

newtoniano, a pressão deveria ser completamente transmitida depois que a bomba fosse desligada. Assim, esperava-se que a pressão ao longo de todo o poço fosse a mesma. O valor maior de pressão no sensor S3 pode ser explicado por incertezas ou erros na medição próximo à saída do espaço anular, pois a diferença dos valores medidos em S1 e S3 é inferior a 1,5%.

Os resultados calculados pelos dois modelos propostos e por Oliveira et al. (2013) mostram que a pressão foi completamente transmitida, oscilando em todos os sensores em torno de 14,7 MPa no instante 300 s. Nos sensores S1 e S2, a pressão oscila acima das medidas experimentais. Já no sensor S3 as pressões oscilam abaixo das medições experimentais. Os resultados apresentaram melhor concordância nos modelos propostos do que no trabalho de Oliveira et al. (2013), pois notou-se uma maior dissipação da onda de pressão.

A comparação entre os resultados experimentais e os calculados mostrou que, no caso da água (fluido pouco dissipativo), o modelo de Oliveira et al. (2013) apresentou resultados coerentes logo que a bomba é desligada. Porém, próximo ao fim do teste a onda de pressão não havia sido dissipada significativamente. Já os modelos propostos

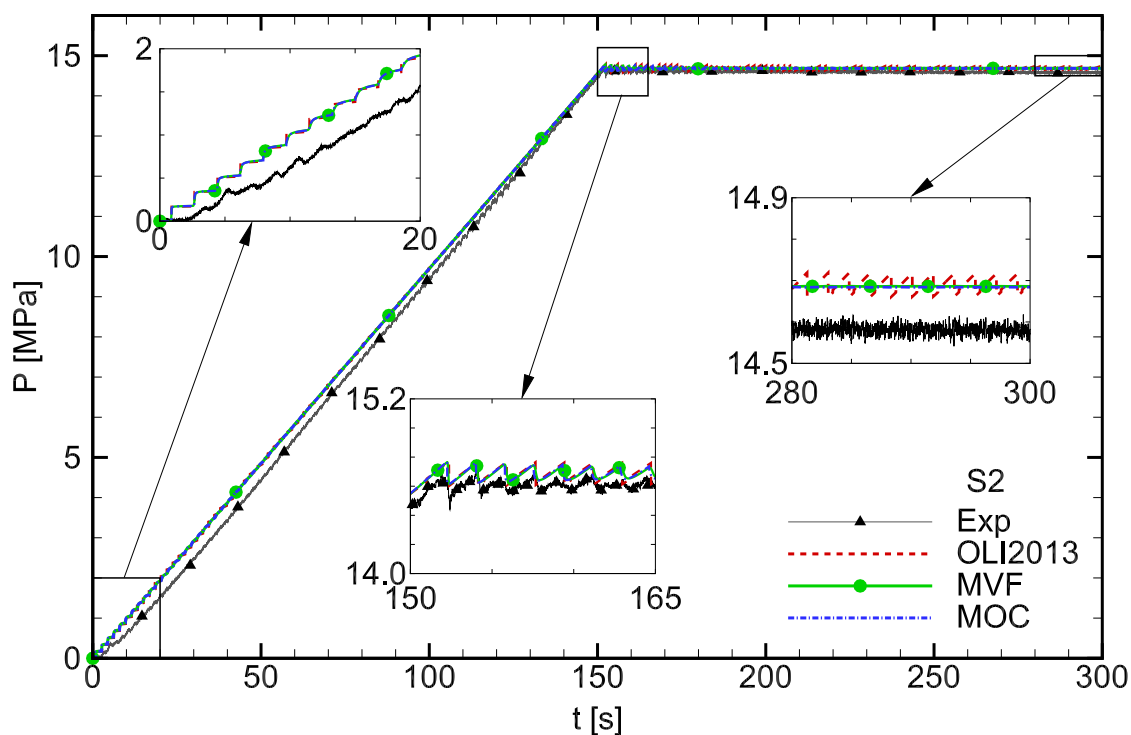


Figura 5.20 – Evolução temporal da pressão medida e calculada para os ensaios de Taquipe na posição S2 para a vazão volumétrica de  $1,122 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ .

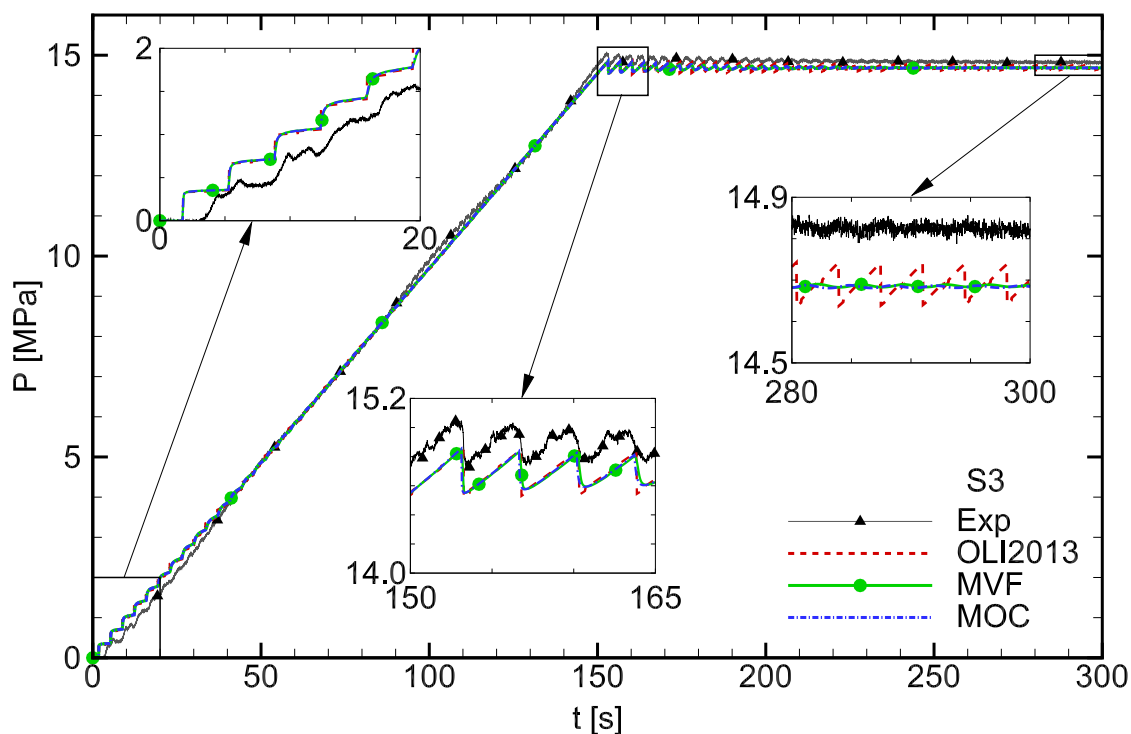


Figura 5.21 – Evolução temporal da pressão medida e calculada para os ensaios de Taquipe na posição S3 para a vazão volumétrica de  $1,122 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ .



nesse trabalho apresentaram uma dissipação mais coerente com o resultado experimental tanto após a bomba ser desligada, mas, principalmente, ao fim do teste (entre 280 e 300 s). Dessa forma, pode-se concluir que modelos que relaxam a hipótese de distribuição linear da tensão de cisalhamento ao longo do raio representam melhor fluidos pouco dissipativos.

## 5.9 Comparação dos Modelos Matemáticos

Após os dois modelos matemáticos terem sido validados experimentalmente e verificados numericamente, necessita-se escolher um deles para ser utilizado nas simulações do próximo capítulo.

O primeiro modelo (discretizado pelo do método dos volumes finitos) é resolvido através um processo iterativo no qual um critério de estabilidade deve ser respeitado e um critério de convergência baseado na equação da conservação da massa precisa ser alcançado. As iterações acoplam as equações da conservação da massa, da quantidade de movimento, de estado e constitutivas. Assim, o modelo é capaz de simular diversos diferentes tipo de fluido e apresentar resultados coerentes. Casos de baixa dissipação apresentam excelentes resultados, e, devido a relaxação da hipótese de distribuição linear de tensão ao longo do raio, se afastam da solução analítica. Casos de dissipação mais elevada podem apresentar dificuldades de convergência se uma malha mais refinada ou um fator de relaxação não forem empregados.

O segundo modelo (discretizado pelo do método das características) é resolvido pela inversão de duas matrizes: uma para velocidade radial e pressão e outra para velocidade axial. O modelo possui passo de tempo fixado pelas linhas características e como a solução não é iterativa, não é necessário adotar um critério de convergência. Os resultados mostram a mesma tendência observada no Modelo 1. Ao contrário do primeiro modelo, casos de alta dissipação não apresentam dificuldade de convergência. Portanto, malhas mais refinadas e fatores de relaxação não precisam ser empregados.

A Figura 5.22 ilustra a comparação da evolução temporal da pressão para a posição  $z^* = 0,9$  (90% do anular) para o método das características (Modelo 2) e dos volumes finitos (Modelo 1). Observa-se que para o caso MVF com  $1.000 \times 40$  células a pressão máxima é 6,7% inferior do que no caso MOC  $200 \times 80$  volumes. Porém, para o caso MVF com  $4.000 \times 40$  células esse valor cai para 0,5%. Dessa forma, fica evidente que uma malha muito mais refinada é necessária quando utiliza-se o método dos volumes finitos.

A Tabela 5.14 mostra uma comparação dos tempos computacionais para as mesmas malhas e métodos que na Figura 5.22. Observa-se que o tempo para o método das características é cerca de 20 vezes menor do que para a malha de  $1.000 \times 40$  com o método dos volumes finitos. Conforme comentado acima, para que os modelos apresentem resultados próximos, uma malha mais refinada deve ser utilizada. Nesse caso, o tempo computacional torna-se ainda mais elevado; 210 vezes maior do que com o a malha de

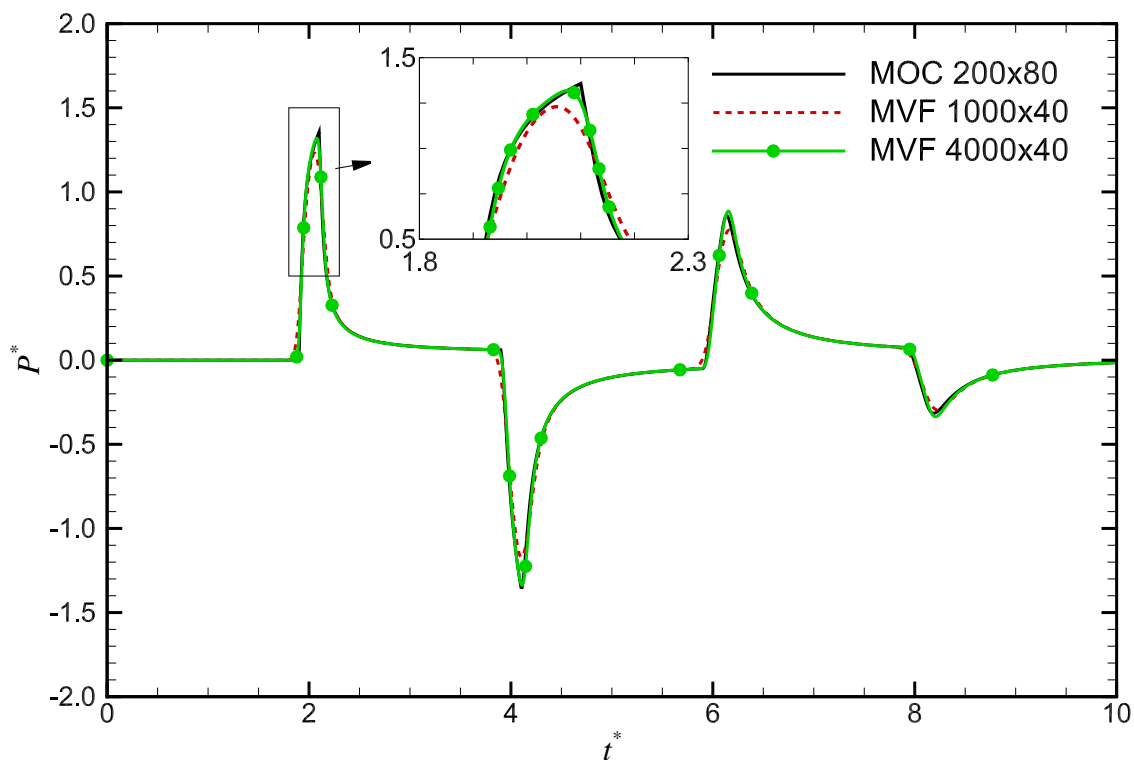


Figura 5.22 – Comparação da evolução temporal da pressão na posição  $z^* = 0,9$  (90% do anular) para Modelo 2 (MOC com  $200 \times 80$  células axiais e radiais) e Modelo 1 (MVF com  $1.000 \times 40$  e  $4.000 \times 40$  células axiais e radiais).

$200 \times 80$  do método das características.

Tabela 5.14 – Comparação do tempo computacional para o método dos volumes finitos e método das características

Caso	$200 \times 80$ MOC	$1.000 \times 40$ MVF	$4.000 \times 40$ MVF
Tempo computacional [s]	199	3.907	42.325

Além disso, conforme aumenta a dissipação do problema, uma malha ainda mais refinada deve ser utilizada nas simulações com o modelo discretizado pelo método dos volumes finitos. Em alguns casos, um fator de relaxação deve ser inserido no cálculo da velocidade para que o resultado não divirja. Tudo isso inviabiliza a aplicação desse modelo em casos de alta dissipação.

Dessa forma, opta-se por utilizar no próximo capítulo o Modelo 2 (MOC), pois o tempo computacional é menor, não há necessidade de uma malha muito refinada e pode-se estudar casos de alta dissipação.

## 5.10 Síntese do Capítulo 5

Este capítulo apresentou a verificação e validação dos modelos matemáticos desenvolvidos. Primeiramente, as variáveis do modelo, as equações da conservação e da quantidade de movimento foram adimensionalizadas. Assim, os parâmetros adimensionais que caracterizam a geometria e o escoamento foram apresentados. Em seguida, realizou-se análises de sensibilidade de malha, do critério de convergência e do critério de estabilidade para garantir a independência desses.

Quatro casos foram estudados, sendo que somente o caso crítico foi apresentado: vazão constante na entrada e pressão igual à atmosférica na saída (poço aberto). A partir das condições de contorno e parâmetros adimensionais, a malha foi analisada axialmente e radialmente. Concluiu-se que, para o primeiro modelo (método dos volumes finitos), uma malha bidimensional com 40 células radiais e 1.000 axiais proporciona bons resultados e não exige elevado tempo computacional. Essa malha é ideal para casos de transmissão de pressão, porém em situações nas quais o valor quantitativo seja mais importante, como no reinício do escoamento, malhas mais refinadas podem ser requeridas. Os critérios de convergência e estabilidade que garantem a independência da malha e evitam instabilidades e dispersões numéricas são  $Res^* = 10^{-3}$  e  $CFL = 1$ .

Para o segundo modelo (método das características), verificou-se que uma malha de 200 células axiais e 80 células radiais proporciona resultados melhores do que com a malha empregada no método dos volumes finitos. Portanto, é ideal tanto em casos de transmissão de pressão quanto reinício do escoamento. Como o algoritmo não é iterativo, não houve necessidade de propor um critério de convergência. O mesmo acontece para o  $CFL$ , pois a estabilidade já é garantida pelo passo de tempo do método das características.

A comparação com a solução analítica evidenciou que os modelos desenvolvidos são mais dissipativos. Dessa forma, em casos menos dissipativos, notou-se grande diferenças entre as soluções. Contudo, ao aumentar o parâmetro dissipativo, as soluções se aproximam na evolução temporal da pressão.

A validação experimental foi realizada com duas comparações: resultados da Petrobras do NUEX-Taquipe e experimento de golpe de aríete de Holmboe e Rouleau (1967). No primeiro caso, houve boa concordância entre os valores medidos e calculados. Porém, embora não muito significativas, ocorreram diferenças entre os instantes nos quais a bomba foi desligada. Ao final do teste, notou-se que as ondas de pressão dos modelos não estavam mais em fase com as do experimental, mas que as do segundo modelo (método das características) estavam melhor representadas. Os resultados dos modelos propostos estavam mais próximos do experimento quando comparados aos de Oliveira et al. (2013). No segundo caso, utilizaram-se dois fluidos: água e óleo. Para a água, houve diferença no período de oscilação e semelhança na amplitude de oscilação. Enquanto que no óleo, os resultados foram inversos, o período era idêntico e a amplitude um pouco abaixo da experimental. Novamente o segundo modelo apresentou melhor resultado.

Então, uma comparação com os resultados numéricos de Wahba (2013) foi realizada. A simulação do golpe de aríete para um fluido de lei de potência escoando em uma tubulação foi analisada. Os resultados dos modelos apresentaram excelente concordância com os de Wahba (2013).

Por fim, os modelos 1 e 2 foram comparados entre si. Definiu-se que o segundo modelo (MOC) tem uma faixa maior de aplicação e que possui tempo computacional consideravelmente menor. Dessa forma, optou-se por utilizar esse modelo no capítulo de resultados.

Assim, conclui-se que os modelos matemáticos desenvolvidos podem ser empregados para simular a propagação de ondas de pressão no reinício de escoamento e na transmissão de pressão de fluidos de perfuração. No próximo capítulo, o modelo matemático que foi discretizado pelo método das características será utilizado para comparação com resultados experimentais para um fluido de perfuração. Um estudo de caso e três análises de sensibilidade serão conduzidos para avaliar a influência da tixotropia na transmissão de pressão.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados do experimento de Taquipe para um fluido de perfuração. O fluido é calibrado utilizando quatro modelos: Lei de Potência, Bingham, Herschel-Bulkley e Mendes e Thompson (2013). Então simulações são conduzidas para investigar o efeito de cada equação constitutiva. A seguir, o modelo, a geometria e os parâmetros do escoamento são adimensionalizados. Em seguida, um estudo de caso comparando os modelos sem tixotropia de Mendes e Thompson (2013) – VP – e com tixotropia de Mendes e Thompson (2013) – EVPT – é realizado. Por fim, análises de sensibilidade para avaliar o efeito tixotrópico são executadas através da variação de três parâmetros: tempo característico adimensional, módulo de elasticidade adimensional e parâmetro estrutural inicial.

### 6.1 Comparação com Resultados de Taquipe

Nessa seção retoma-se o experimento de Taquipe apresentado na seção 5.8. A partir de dados de campo, um fluido de perfuração é calibrado para quatro diferentes modelos de fluido: Lei de Potência, Bingham, Herschel-Bulkley e Mendes e Thompson (2013). Através do ajuste desses, o modelo matemático discretizado através do método das características é utilizado para prever comportamento experimental e avaliar os diferentes tipos de fluidos simulados.

#### 6.1.1 Calibração dos Fluidos

A PETROBRAS forneceu informação das leituras do viscosímetro e massa específica de um fluido de perfuração utilizado em testes na sonda de perfuração experimental em São Sebastião do Passé – BA (NUEX-Taquipe). A partir desses dados, foi estimada a velocidade de propagação da onda de pressão através do tempo necessário para a pressão propagar entre dois sensores.

Os dados de tensão em função da taxa de deformação foram obtidos através de um viscosímetro Fann 35 são apresentados na Tabela 6.1 e ilustrados graficamente na Figura 6.1. Observa-se a tensão para apenas seis diferentes taxas de deformação, pois o equipamento é limitado em seis leituras de rotação.

A calibração dos modelos Lei de Potência, Bingham e Herschel-Bulkley é feita pelo ajuste das respectivas equações constitutivas, Equações 3.31, 3.33 e 3.35, utilizando o método dos mínimos quadrados.

Os parâmetros ajustados e o respectivo coeficiente de determinação,  $R^2$ , para cada modelo calibrado aparecem na Tabela 6.2. Percebe-se que o pior ajuste foi o de Lei de

Tabela 6.1 – Valores de tensão em função da taxa de deformação obtidas para um fluido de perfuração com viscosímetro Fann 35 no NUEX-Taquipe.

$\dot{\gamma}$ [s <sup>-1</sup> ]	5,1	10,2	170,3	340,6	510,9	1021,8
$\tau$ [Pa]	9,72	10,23	23,01	35,80	47,56	78,24

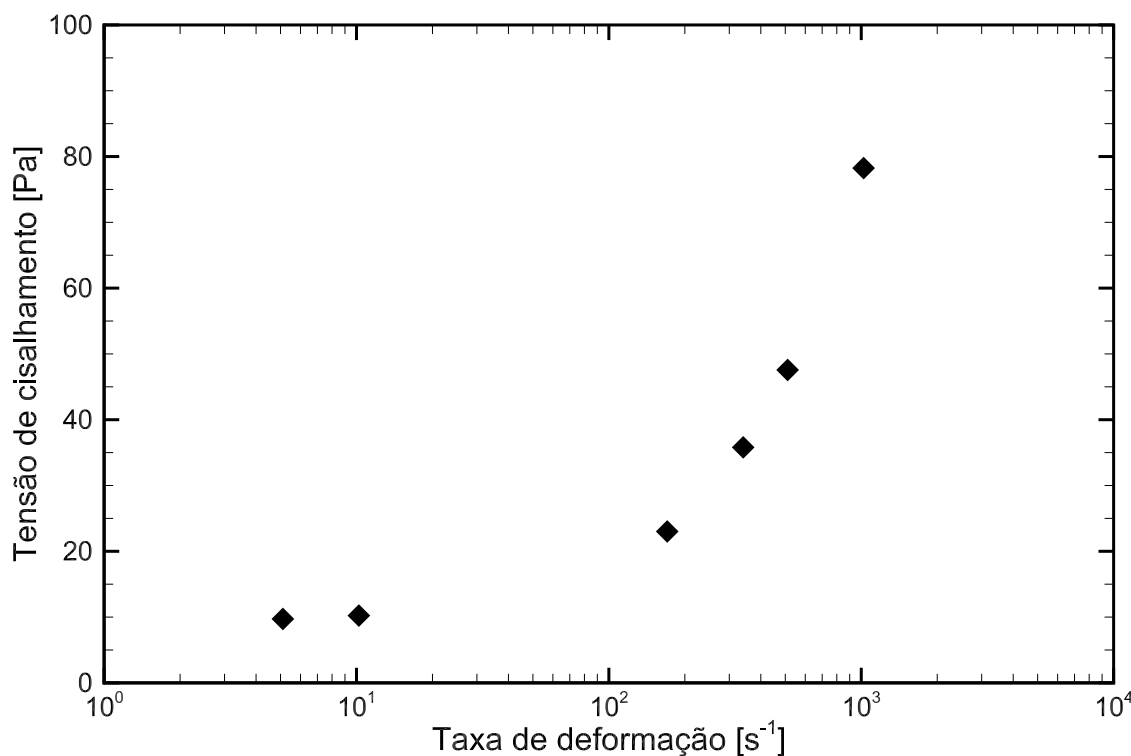


Figura 6.1 – Curva de tensão em função da taxa de deformação obtidas para um fluido de perfuração com viscosímetro Fann 35 no NUEX-Taquipe.

Potência, com diferenças de até 30% em relação ao valor medido. Enquanto que a melhor calibração ocorreu para o modelo Herschel-Bulkley, com diferença máxima de 2,6%.

Tabela 6.2 – Parâmetros ajustados para os modelos Lei de Potência, Bingham e Herschel-Bulkley.

	Lei de Potência	Bingham	Herschel-Bulkley
$n$	0,3742	1	0,8652
$k$ [Pa.s <sup>-n</sup> ]	4,4993	0,06766	0,1732
$\tau_0$ [Pa]	0	10,88	8,86
$R^2$	0,9453	0,9954	0,9998

Os modelos resultantes desses ajustes são regularizados utilizando Papanastasiou (1987) com  $p = 10^5$  e, então, comparados aos dados experimentais na Figura 6.2, que apresenta a viscosidade aparente,  $\eta = \tau/\dot{\gamma}$ , em função da taxa de deformação para os modelos Lei de Potência (LP), Bingham (Bi) e Herschel-Bulkley (HB). Observa-se que o

modelo de Lei de Potência não apresenta bons resultados para a faixa ajustada. Contudo, os outros modelos mostram boa concordância na região de calibração.

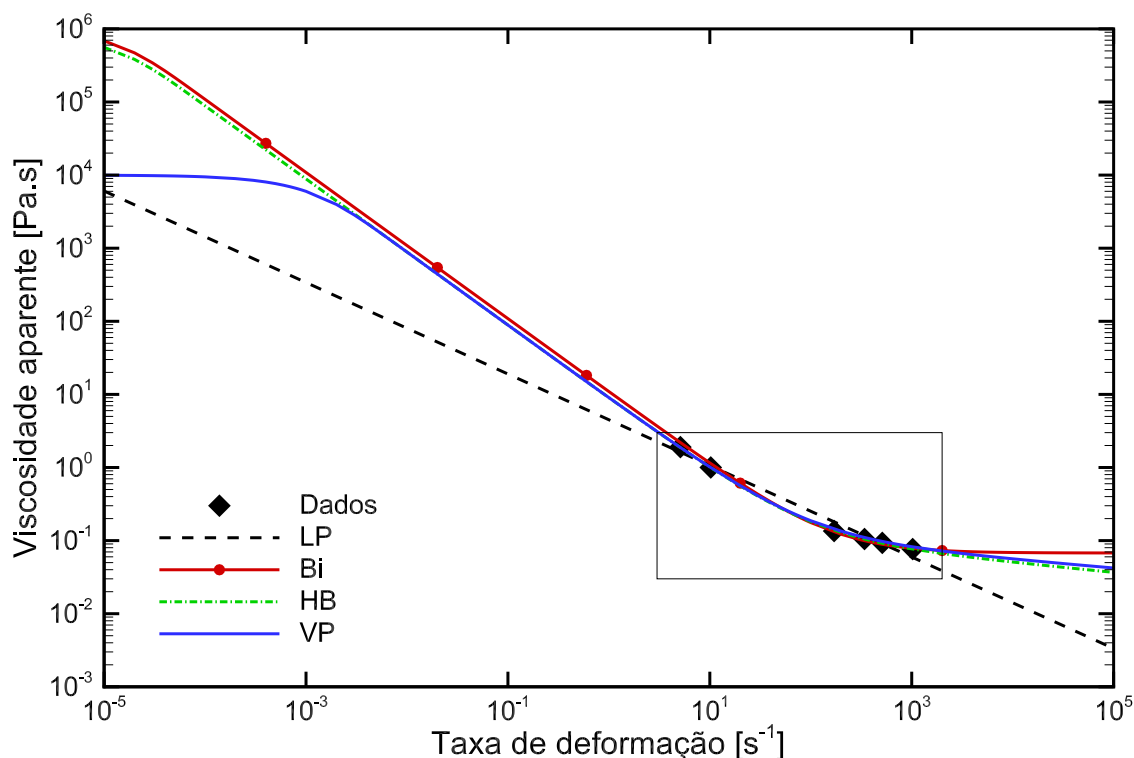


Figura 6.2 – Comparação de valores medidos e calculados e viscosidade em função da taxa de deformação para o fluido de perfuração utilizado no NUEX-Taquipe.

O modelo de Mendes e Thompson (2013) é do tipo elasto-viscoplástico com tixotropia. Porém, nessa seção o objetivo é comparar os modelos viscoplásticos (Bi, HB) com o pseudo-plástico (LP). Assim, pode-se eliminar a parcela elástica do modelo de Mendes e Thompson (2013) ao fazer com que os tempo de retardo e relaxação e o tempo característico sejam iguais a zero. Dessa forma, o material atingirá imediatamente o estado de equilíbrio sempre que for solicitado por tensão ou taxa de cisalhamento e terá como equação constitutiva a curva de escoamento. Esse modelo será chamado daqui em diante por VP. O modelo original de Mendes e Thompson (2013), com a parcela elástica e a tixotropia, será referenciado como EVPT.

Portanto, nessa seção, o modelo VP terá a curva de escoamento e os parâmetros de regime permanente ajustados. Na seção 6.3 uma discussão sobre os parâmetros transitórios do modelo EVPT é realizada.

A calibração dos parâmetros do modelo VP através do método dos mínimos quadrados não é indicada nesse caso, pois o viscosímetro fornece apenas seis leituras em taxas de deformação intermediárias (entre os valores de 5 e 1000  $s^{-1}$ ). Como os valores das viscosidades do material completamente estruturado,  $\eta_0$ , e totalmente desestruturado,  $\eta_\infty$ , são dependentes de, respectivamente, altas e baixas taxas de cisalhamento, o resultado do ajuste fica dependente do chute inicial. Dessa forma, propõe-se adotar os valores de

$k$ ,  $n$  e  $\tau_y$  já ajustados para o modelo de Herschel-Bulkley como parâmetros para o modelo de viscosidade de Mendes e Thompson (2013). Além disso, considera-se que a tensão limite de escoamento dinâmica é igual a tensão limite de escoamento estática, o que resulta numa modificação da curva de viscosidade:

$$\eta_{eq} = \frac{\tau_{eq}}{\dot{\gamma}_{eq}} = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\eta_0 \dot{\gamma}_{eq}}{\tau_y}\right) \right] \left[ \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}_{eq}} + k \dot{\gamma}_{eq}^{n-1} \right] + \eta_\infty \quad (6.1)$$

Finalmente, propõe-se que a viscosidade do material completamente estruturado é da mesma ordem da viscosidade do fluido de Herschel-Bulkley quando submetido a uma taxa de  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Assim, calcula-se que  $\eta_0$  é da ordem de  $10^4 \text{ Pa.s}$ . Por fim, utiliza-se o método dos mínimos quadrado aplicado aos dados da Tabela 6.1 para obter o parâmetro  $\eta_\infty$ . Os valores dos parâmetros ajustados para o modelo VP aparecem na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Parâmetros ajustados para o modelo VP.

$\eta_0$ [Pa.s]	$\eta_\infty$ [Pa.s]	$k$ [Pa.s <sup>-n</sup> ]	$n$	$\tau_y$ [Pa]
$10^4$	$5,543 \times 10^{-3}$	0,1732	0,8652	8,861

A Figura 6.2 mostra a curva de viscosidade do modelo VP para os parâmetros ajustados. Observa-se que o comportamento dos fluidos HB e VP é o mesmo para a região ajustada, porém o segundo apresenta dois patamares de viscosidade à baixas e altas taxas de cisalhamento. A Tabela 6.4 mostra a diferença entre os valores de viscosidade medidos experimentalmente e os valores obtidos através da equação de cada modelo. Nota-se que as menores diferenças acontecem para o modelo de Herschel-Bulkley e VP, apresentando valores máximos de 2,6%.

Tabela 6.4 – Comparação entre viscosidade experimental e calculada através do tipo de fluido para parâmetros ajustados.

$\dot{\gamma}$	$\eta_{exp}$	$\eta_{LP}$	$\Delta_{LP}$	$\eta_{Bi}$	$\Delta_{Bi}$	$\eta_{HB}$	$\Delta_{HB}$	$\eta_{VP}$	$\Delta_{VP}$
5,1	1,902	1,621	14,8	2,196	-15,5	1,873	1,5	1,873	1,5
10,2	1,001	1,051	-5,0	1,132	-13,1	0,994	0,7	0,994	0,7
170,3	0,135	0,181	-33,7	0,132	2,7	0,139	-2,6	0,139	-2,6
340,6	0,105	0,117	-11,4	0,100	5,2	0,105	0,2	0,105	0,2
510,9	0,093	0,091	2,4	0,089	4,5	0,092	1,1	0,092	1,1
1021,8	0,077	0,059	23,1	0,078	-2,3	0,077	-0,2	0,077	-0,2

O subíndice *exp* que aparece na Tabela 6.4 se refere a experimental. A diferença,  $\Delta$ , é o valor percentual calculado por:

$$\Delta = \frac{\beta_{exp} - \beta_{calc}}{\beta_{exp}} \quad (6.2)$$



sendo o subíndice *calc* referente ao resultado calculado e  $\beta$  uma propriedade qualquer.

### 6.1.2 Comparação dos Resultados

A geometria do escoamento é a mesma descrita na seção 5.8 e na Tabela 5.13. A vazão na entrada foi ajustada, conforme Oliveira et al. (2013), para 0,952 l/s e a bomba foi desligada quando a pressão na entrada atingiu 7,6 MPa (1.102 psi). Isso foi realizado para assegurar que o gradiente temporal da pressão e o instante em que a bomba foi desligada nas simulações fossem o mesmo que no experimental. A Figura 6.3 ilustra a comparação da evolução temporal da pressão para o fluido de perfuração nas posições S1, S2 e S3. Percebe-se que a pressão cresce no sensor S1 até que o valor máximo na entrada seja atingido, desligando a bomba. Logo após, a pressão cai abruptamente. Nota-se que a queda de pressão é menor para os sensor S2 e observa-se que no sensor S3 não ocorre nenhuma queda de pressão como resultado do desligamento da bomba. Além disso, o detalhe do fim do experimento mostra que as pressões não se igualam, mas evidencia uma tendência de queda em S1 e de crescimento em S2 e S3. Dessa forma, o valor final da pressão é diferente em cada posição, sendo que existe uma diferença de 0,4 MPa entre os sensores S1 e S3. Portanto, a pressão não foi transmitida até a saída do anular.

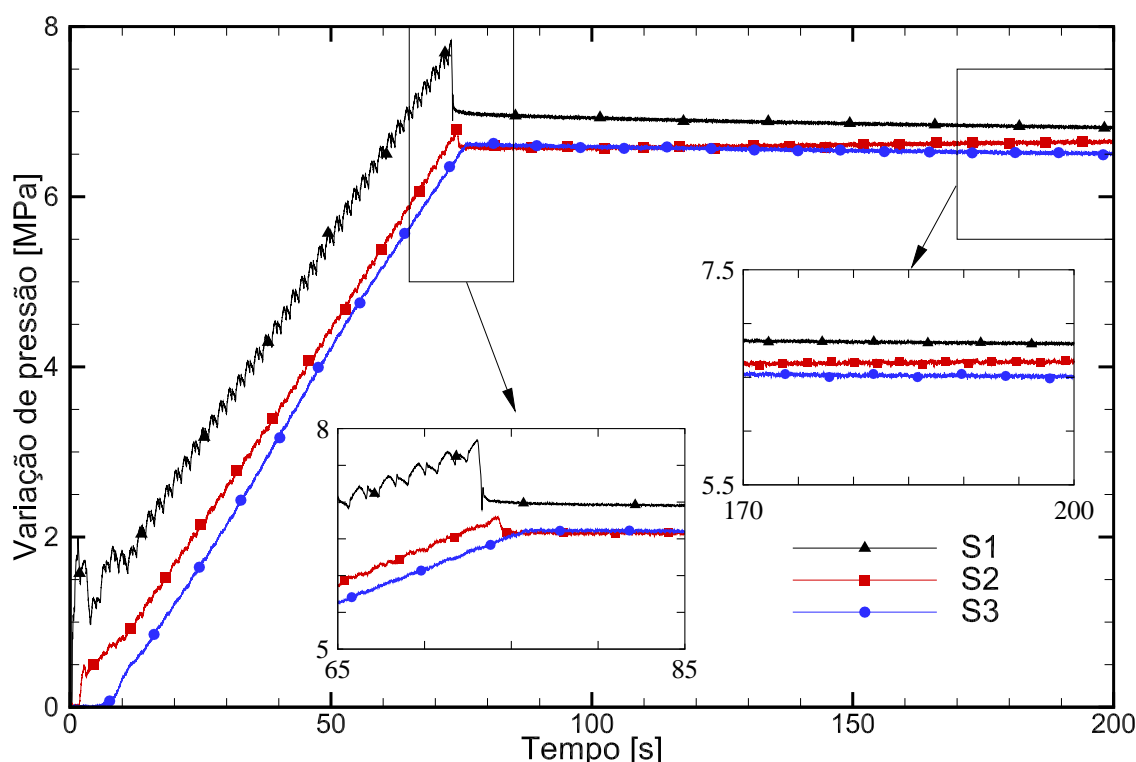


Figura 6.3 – Evolução temporal da pressão medida experimentalmente do fluido de perfuração nas posições S1, S2 e S3 para a vazão volumétrica de 0,952 l/s.

Antes de realizar as simulações, foram conduzidos testes de malha com cada um dos fluidos calibrados para avaliar a independência das malhas axiais e radiais. Conforme o

Apêndice C, determinou-se que para todos os modelos a malha que garantia diferenças inferiores a 0,1% foi a de 1.000 células axiais por 80 células radiais tanto no tubo quanto no espaço anular.

Utilizando os parâmetros ajustados para cada modelo de fluido, conforme as Tabelas 6.2 e 6.3, foram realizadas as simulações. Os resultados para os sensores S1, S2 e S3 são ilustrados, respectivamente, nas Figuras 6.4, 6.5 e 6.6. Nota-se que cada uma dessas ilustrações apresenta a comparação dos resultados simulados com os medidos experimentalmente através da evolução temporal da pressão. Dois detalhes aparecem, o primeiro (65 a 85 s) evidencia o momento em que a bomba é desligada, e o segundo, entre 170 e 200 s, a parte final do teste que, apesar de ainda acontecerem alterações na pressão, será considerada como região de equilíbrio.

Observa-se na Figura 6.4 os resultados para o sensor S1. Verifica-se que, após a bomba ser desligada, o modelo de Lei de Potência é o que mais reduz a pressão. Essa redução continua até cerca de 120 s e é mais significativa do que para os outros modelos. Isso acontece porque o modelo Lei de Potência com  $n < 1$  é do tipo pseudoplástico. Portanto, não existe uma tensão limite de escoamento a partir da qual o escoamento cessa. No caso de um fluido pseudoplástico, a viscosidade aumenta, mas não impede que a pressão seja transmitida ao longo de toda tubulação. Nota-se nas Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 que o valor final de pressão para o modelo Lei de Potência em todas as posições fica em torno de 6,5 MPa.

Entre os instantes 170 e 200 s dessas três figuras percebe-se que os modelos do tipo viscoplástico (Bingham, Herschel-Bulkley e VP) não transmitem a pressão ao final do teste. Apesar das pressões estarem variando com o tempo, nota-se no instante  $t^* = 200$  s (considerado fim do teste) uma diferença de 0,4 MPa entre os sensores S1 e S3. Além disso, o comportamento depois da interrupção da bomba é o mesmo para os fluidos viscoplásticos. A exceção acontece no sensor S3, no qual o valor de regime permanente do modelo de Bingham é menor do que nos modelos de Herschel-Bulkley e VP. Essa diferença é causada pela tensão limite de escoamento. Quanto menor esse valor, maior o tempo necessário para tensão de cisalhamento ficar abaixo do valor de tensão limite de escoamento, aumentando a propagação da onda de pressão e reduzindo a diferença entre os valores finais principalmente para os sensores mais distantes da entrada.

Outra observação interessante das simulações é que o tempo para que a bomba seja desligada considerando o fluido como de Bingham é 1 s menor como Herschel-Bulkley ou VP. Para justificar esse fato, retomam-se as curvas de viscosidade, Figura 6.2. Percebe-se que para baixas taxas, a viscosidade aparente é maior para o modelo de Bingham, tornando-o mais dissipativo, e dessa forma diminuindo o tempo necessário para chegar na pressão máxima.

Embora o resultado do sensor S1 não esteja na entrada da tubulação (está distante 29 m), os resultados são muito próximos. Dessa forma, os resultados da Figura 6.4 agora serão analisados como se fossem da entrada do tubo, ou seja, sem dissipação até o sensor

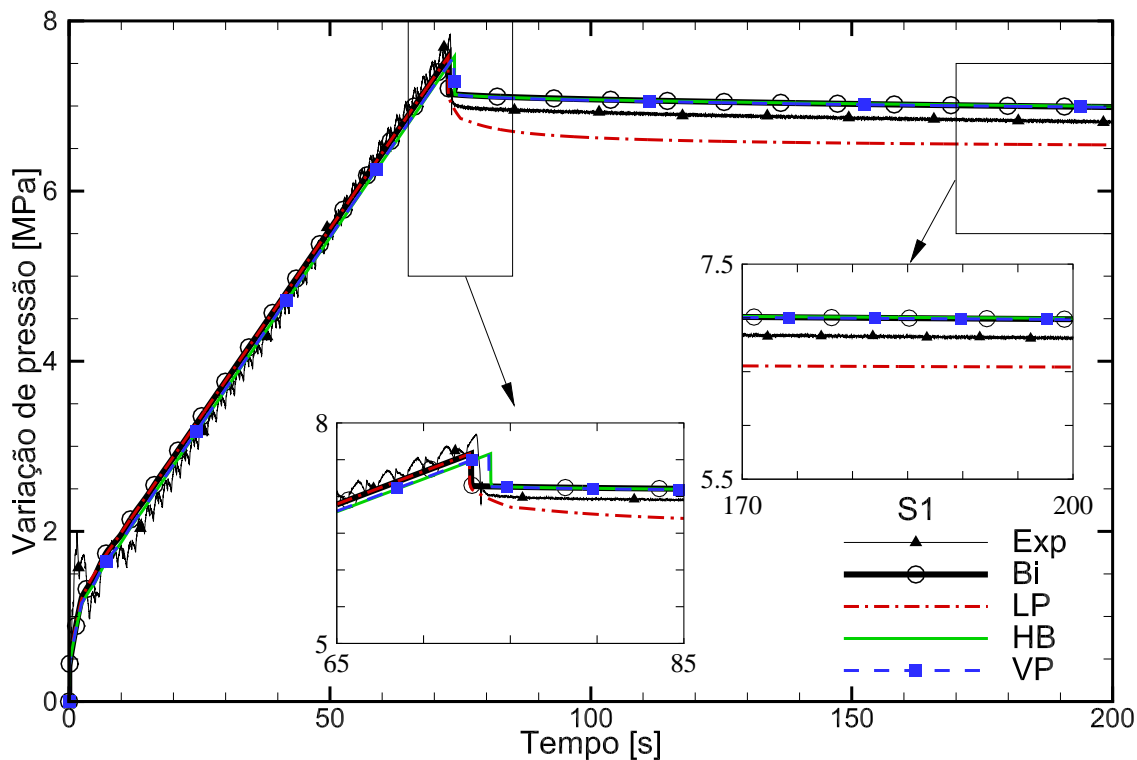


Figura 6.4 – Evolução temporal dos valores de pressão do fluido de perfuração medidos e calculados na posição S1 para a vazão volumétrica de 0,952 l/s.

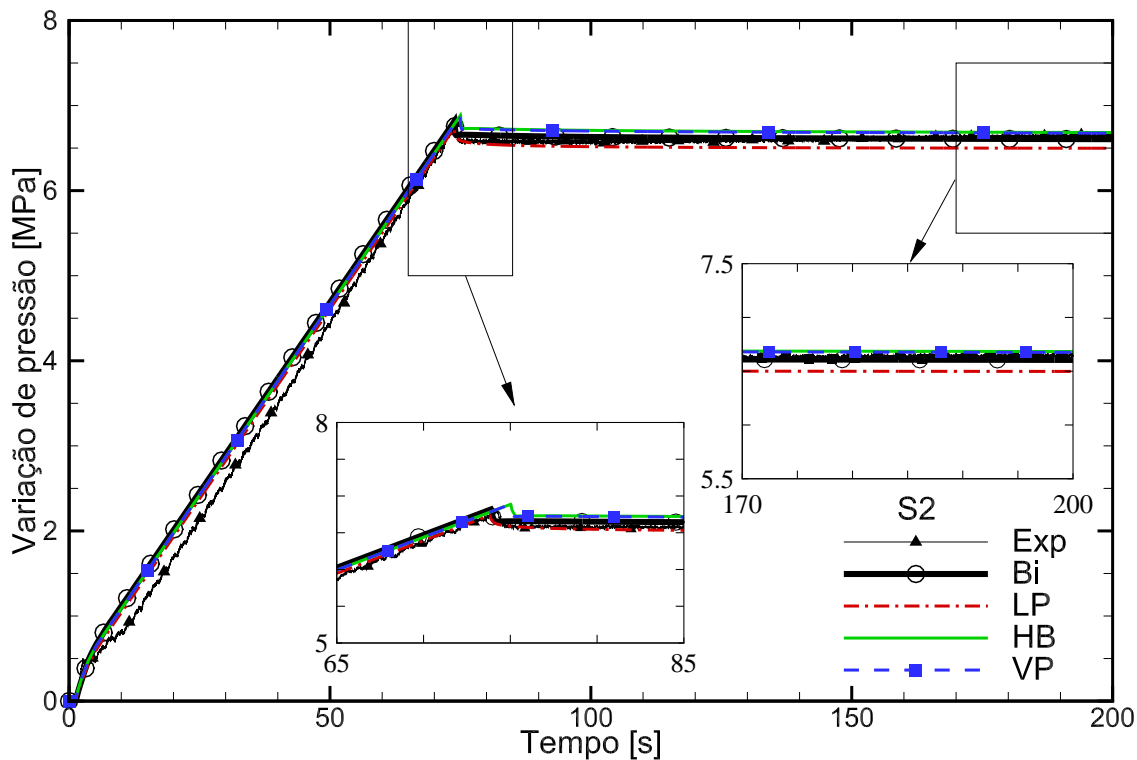


Figura 6.5 – Evolução temporal dos valores de pressão do fluido de perfuração medidos e calculados na posição S2 para a vazão volumétrica de 0,952 l/s.

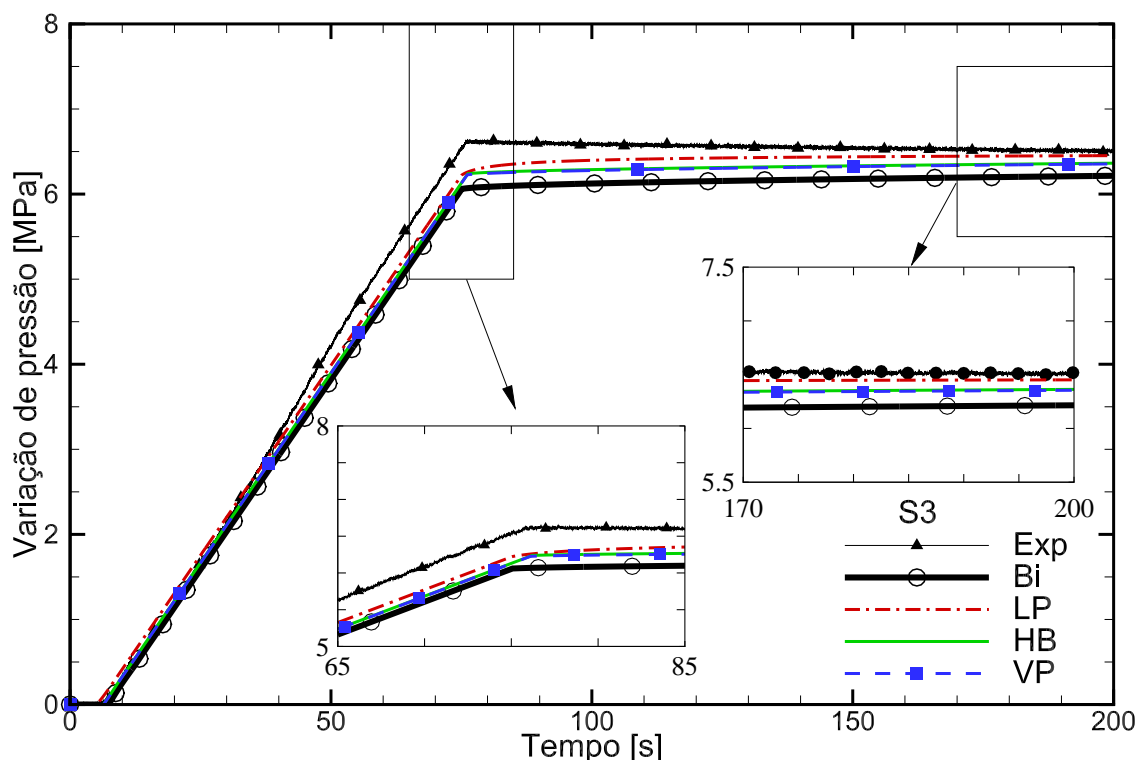


Figura 6.6 – Evolução temporal dos valores de pressão do fluido de perfuração medidos e calculados na posição S3 para a vazão volumétrica de 0,952 l/s.

S1. Sabe-se que teoricamente a variação inicial de pressão sem dissipação na entrada logo após o acionamento da bomba é dado por  $P_{ent} = \rho cV_{ent}$ . A partir dos dados do fluido de perfuração, calcula-se o valor de  $P_{ent}$  e compara-o com o resultado inicial para cada um dos modelos em análise na Tabela 6.5. Percebe-se que o resultado teórico é muito próximo do simulado por cada um dos tipos de fluido. Sendo que a maior diferença (2,2%) acontece para o fluido Herschel-Bulkley.

Tabela 6.5 – Comparação entre pressão inicial na entrada teórica e simulada para cada tipo de fluido ajustado.

	Teórico	LP	Bi	HB	SM
$P_{ent}$ [MPa]	0,409	0,409	0,414	0,418	0,418
$dP/dt$ [kPa/s]	89,02	89,27	89,30	89,27	89,27

Além disso, considerando que a vazão mássica bombeada para o poço fica confinada, pode-se dizer que:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} \tag{6.3}$$

sendo  $m = \rho \forall = \rho A_T L = \rho A_1 L + \rho A_2 L$  a massa total de fluido no poço,  $\forall$  o volume total de fluido no poço e  $\dot{m}$  a vazão mássica de fluido que entra no poço a qual pode ser escrita

como:

$$\dot{m} = \rho Q \quad (6.4)$$

Rearranjando a equação de estado, Equação (3.5), em função da derivada temporal e substituindo-a em conjunto com a Equação (6.4) na Equação (6.3) e sabendo que a vazão  $Q$  é função da área do tubo, chega-se a:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{A_1}{A_1 + A_2} \frac{V_{ent}}{L\alpha} \quad (6.5)$$

sendo  $A_1$  a área transversal do tubo e  $A_2$  a área transversal do anular.

A Tabela 6.5 mostra um comparativo entre os valores da inclinação temporal da pressão teórico e calculados pelos modelos entre os instantes 40 e 50 s. Nota-se que a maior diferença entre o valor teórico e do modelo é de apenas de 0,3% para o fluido de Bingham.

De forma geral, considera-se que os resultados do modelo para diferentes fluidos apresentaram boa concordância com os medidos, ou seja, resultados qualitativamente bons. Os gradientes temporais de pressão, o tempo de desligamento da bomba e a queda de pressão posterior mostraram-se próximos aos valores do experimento. Os fluidos pseudoplásticos mostraram melhor transmissão de pressão, enquanto que os viscoplásticos, devido a tensão limite de escoamento, apresentaram diferentes valores de pressão ao longo do poço. E, portanto, foram mais condizentes com os resultados experimentais.

## 6.2 Adimensionalização do Modelo

Na seção 5.1, as equações do modelo baseadas em um fluido Newtoniano foram adimensionalizadas. Agora, como o fluido em análise possui uma equação constitutiva conforme o modelo de Mendes e Thompson (2013), essa adimensionalização não é mais válida e uma nova deve ser proposta.

Conforme Oliveira e Negrão (2015), as variáveis do problema são adimensionalizadas de acordo com valores de referência: diâmetro hidráulico, tensão limite de escoamento dinâmica, comprimento da tubulação e velocidade de propagação da onda de pressão. Dessa forma, as variáveis do problema tornam-se:

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{PD}{4\tau_{yd}L}, & u^* &= \frac{u}{c}, & q^* &= \frac{q}{cD}, & t^* &= \frac{c}{L}t \\ z^* &= \frac{z}{L}, & r^* &= \frac{r}{D}, & g^* &= \frac{L}{c^2}g, & \tau^* &= \frac{\tau}{\tau_{yd}}, & \dot{\gamma}^* &= \frac{D}{c}\dot{\gamma} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Da mesma forma, adimensionalizando as propriedades do modelo de Mendes e Thomp-

son (2013), chega-se à:

$$\begin{aligned} \eta_v^* &= \frac{c}{\tau_{yd}D} \eta_v, & \eta_\infty^* &= \frac{c}{\tau_{yd}D} \eta_\infty, & \eta_0^* &= \frac{c}{\tau_{yd}D} \eta_0, & G_0^* &= \frac{L}{\eta_\infty c} G_0, & G_s^* &= \frac{L}{\eta_\infty c} G_s \\ \theta_1^* &= \frac{c}{L} \theta_1, & \theta_2^* &= \frac{c}{L} \theta_2, & \tau_y^* &= \frac{\tau_y}{\tau_{yd}}, & \dot{\gamma}_{yd}^* &= \frac{D}{c} \dot{\gamma}_{yd}, & t_{eq}^* &= \frac{c}{L} t_{eq}, & k^* &= \frac{\tau_{yd}^n}{\eta_\infty^{n-1}} k \end{aligned} \quad (6.7)$$

Assim, as equações da conservação da massa, Equação (3.23), e da quantidade de movimento, Equação (3.26), são reescritas:

$$\frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\alpha^* \delta} \frac{1}{r^*} \frac{\partial q^*}{\partial r^*} + \frac{1}{\alpha^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\alpha^* \frac{\partial P^*}{\partial z^*} - \alpha^* \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \tau^*) + g^* \quad (6.9)$$

sendo  $\alpha^*$  a compressibilidade adimensional, que é definida por:

$$\alpha^* = \frac{\phi}{\eta_\infty^*} = \frac{4\tau_{yd}L}{\rho c^2 D} \quad (6.10)$$

A equação para o parâmetro dissipativo, torna-se:

$$\phi = 4 \frac{Ma}{\delta Re} \quad (6.11)$$

A viscosidade, Equação (3.44), na forma adimensional, torna-se:

$$\eta_{eq}^* = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\eta_0^* \dot{\gamma}_{eq}^*}{\tau_y^*}\right) \right] \left[ \frac{\tau_y^* - 1}{\dot{\gamma}_{eq}^*} \exp\left(-\frac{\dot{\gamma}_{eq}^*}{\dot{\gamma}_{yd}^*}\right) + \frac{1}{\dot{\gamma}_{eq}^*} + K^* (\eta_\infty^*)^n (\dot{\gamma}_{eq}^*)^{n-1} \right] + \eta_\infty^* \quad (6.12)$$

As equações de  $\eta_v$ , Equação (3.39), e de  $G_s$ , Equação (3.40), são adimensionalizados em, respectivamente:

$$\eta_v^* = \eta_\infty^* \exp(\lambda) \quad (6.13)$$

$$G_s^* = G_0^* \exp\left[m \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)\right] \quad (6.14)$$

Os tempos de relaxação, Equação (3.37), e retardo, Equação (3.38), são adimensionalizados como, respectivamente:

$$\theta_1^* = \left(1 - \frac{\eta_\infty^*}{\eta_v^*}\right) \frac{\eta_v^*}{G_s^*} \quad (6.15)$$

$$\theta_2^* = \left(1 - \frac{\eta_\infty^*}{\eta_v^*}\right) \frac{\eta_\infty^*}{G_s^*} \quad (6.16)$$

Reescrevendo a equação de evolução do parâmetro estrutural, Equação (3.45), na forma adimensional, tem-se:

$$\frac{d\lambda}{dt^*} = \frac{1}{t_{eq}^*} \left[ \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^a - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{eq}}\right)^b \left(\frac{1}{\lambda_{eq}} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^a \right] \quad (6.17)$$

Essas equações e propriedades na forma adimensional serão utilizadas nas seções 6.3 e 6.4 para avaliar o efeito do tixotropia no estudo de caso e nas análises de sensibilidade.

### 6.3 Estudo de Caso

Baseado na adimensionalização da geometria de NUEX-Taquipe, do fluido de perfuração e das equações apresentadas, respectivamente, nas seções 5.8.1, 6.1 e 6.2, calculam-se os valores adimensionais da geometria, propriedades e escoamento. As Tabelas 6.6, 6.7 e 6.8 mostram esses valores. O modelo de Mendes e Thompson (2013) original (com tixotropia – EVPT) possui os mesmos parâmetros de equilíbrio que o modelo VP (sem tixotropia). Contudo, os dados fornecidos pela Petrobras não foram suficiente para calibrar todos os parâmetros de regime transiente. Assim, alguns parâmetros foram fixados na unidade e, então, adimensionalizados. Na próxima seção o efeito de alguns desses parâmetros é analisado.

Tabela 6.6 – Parâmetros adimensionais da geometria utilizada no estudo de caso e análise de sensibilidade.

$\delta$	$H$	$RA$	$\Phi$	$\epsilon$
$6,376 \times 10^{-5}$	1,116	0,345	1	0,566

Tabela 6.7 – Propriedades adimensionais utilizadas no estudo de caso e análise de sensibilidade.

$\eta_0^*$	$\eta_\infty^*$	$\tau_y^*$	$k^*$	$n$	$a$	$b$	$t_{eq}^*$	$G_0^*$
$1,50 \times 10^7$	8,15	1	0,566	0,865	1	1	0,848	$2,17 \times 10^2$

A partir dos dados adimensionais da geometria, do escoamento e das propriedades dos fluidos, dois casos são simulados: sem e com tixotropia. O primeiro caso é o mesmo simulado na seção 6.1 utilizando a curva de viscosidade do modelo VP para determinar a viscosidade aparente. Enquanto que no segundo caso a tixotropia é incluída e, portanto, o modelo original de Mendes e Thompson (2013) – EVPT – é utilizado.

Tabela 6.8 – Parâmetros adimensionais do escoamento utilizados no estudo de caso e análise de sensibilidade.

$Ma$	$\alpha^*$	$g^*$
$2,08 \times 10^{-4}$	$2,82 \times 10^{-4}$	0

No caso em que o fluido tixotrópico é utilizado, adota-se a hipótese de que o valor do parâmetro estrutural inicial,  $\lambda_{(t=0)}$ , é igual ao parâmetro estrutural completamente estruturado,  $\lambda_0$ .

Antes de mostrar os resultados das simulações, salienta-se que testes de malha para os modelos VP e EVPT foram realizados e são apresentados no Apêndice C. A malha de  $1.000 \times 80$  células axiais e radiais (para o tubo e para o anular) foi selecionada, pois apresentou diferenças tanto para o teste de malha axial quanto para o radial de menos de 0,5%.

O primeiro resultado apresentado é ilustrado na Figura 6.7, na qual mostra-se a evolução temporal da pressão na entrada da coluna de perfuração para os modelos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). Como na seção 6.1, percebe-se que a pressão para o fluido sem tixotropia sobe gradativamente até que o valor máximo seja atingido, em seguida a bomba é desligada e a pressão tende a estabilizar. Para o fluido com tixotropia o comportamento é parecido, com exceção do intervalo entre 1,5 e 27, quando a curva se desvia do crescimento linear de pressão. O pico de pressão que ocorre por volta de  $t^* = 7$  é devido à quebra da estrutura gelificada do fluido. O aumento de tensão anterior à esse pico é devido ao comportamento elástico do material.

O detalhe da Figura 6.7 entre os instantes de tempo adimensional 0 a 4 mostra que, logo após o início do bombeio, a variação inicial da pressão é a mesma para os dois casos em análise. Teoricamente, mostra-se que esse valor é da ordem de  $P_{ent}^* = Ma/\alpha^*$ . A Tabela 6.9 mostra a comparação entre o valor inicial de pressão teórico e os valores obtidos para cada tipo de fluido. Observa-se uma diferença de 2,1% entre o valor teórico e sem tixotropia, porém o resultado com tixotropia é o mesmo que o antecipado pela equação.

Tabela 6.9 – Comparação entre o valor inicial teórico e simulado da pressão na entrada da coluna para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

	Teórico	VP	EVPT
$P_{ent}^*$	0,736	0,752	0,736
$dP^*/dt^*$	0,189	0,189	0,189
$t_{set}^*$	68,5	62,4	62,6

Ainda no detalhe entre 0 e 4 da Figura 6.7, percebe-se que no instante  $t^* = 2$  ocorre uma redução da pressão no fluido com tixotropia. Com o início do bombeio, uma onda de pressão é gerada e se propaga com a velocidade do som no fluido,  $c$ . Esta onda atinge o



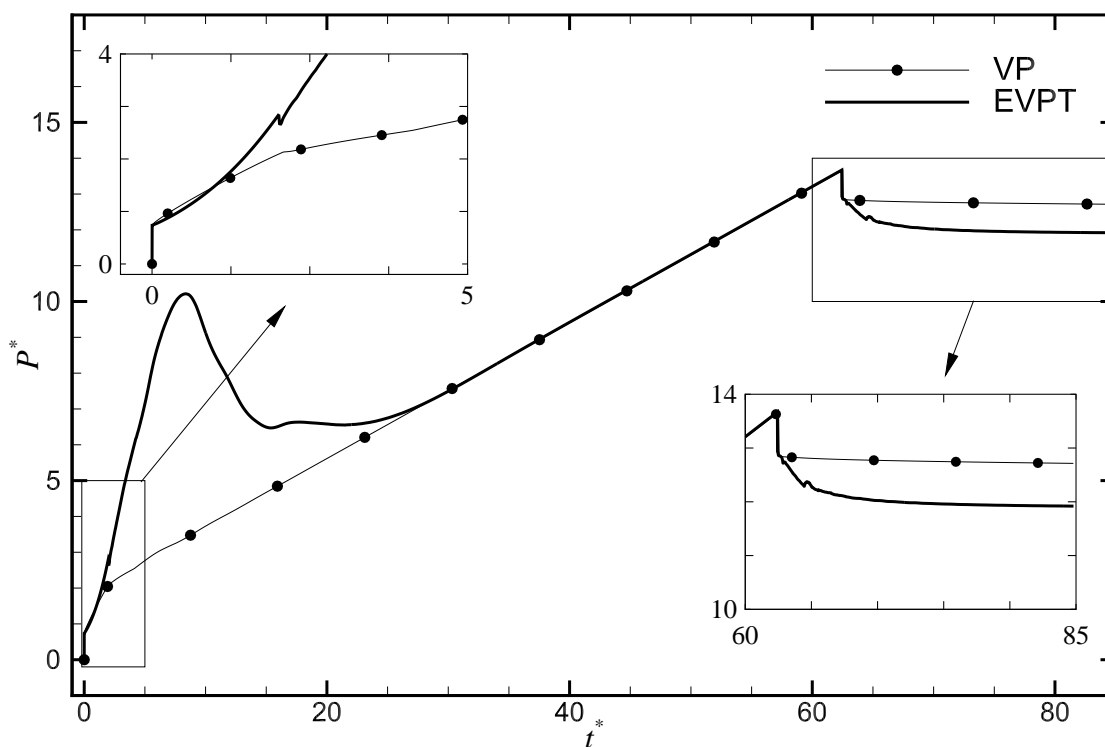


Figura 6.7 – Evolução temporal da pressão na entrada do tubo ( $z^* = -1$ ) para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

fundo do poço no instante adimensional  $t^* = 1$ , sendo parte refletida e parte da parcela refletida alcança a entrada da coluna no instante  $t^* = 2$ . Essa é a razão para a pequena queda de pressão no fluido tixotrópico nesse instante. Apesar de uma redução de pressão não ser verificada para o fluido sem tixotropia, fica claro a mudança de inclinação após  $t^* = 2$ .

Após o quebra da estrutura gelificada (pico de pressão em  $t^* \simeq 7$ ), o fluido tixotrópico alivia a pressão e próximo do instante  $t^* = 30$  encontra a curva de pressão do fluido sem tixotropia. A partir desse instante, a inclinação da curva de pressão do dois fluidos é a mesma. Assim como realizado na seção 6.1, o gradiente de subida pode ser antecipado. Adimensionalizando a Equação (6.5), chega-se a:

$$\frac{dP^*}{dt^*} = \frac{RA}{RA + 1} \frac{Ma}{\alpha^*} \quad (6.18)$$

A partir dessa equação, pode-se prever o valor do gradiente temporal de pressão. A Tabela 6.9 apresenta a comparação entre o valor teórico e os valores calculados para os fluidos com e sem tixotropia entre os instantes de tempo adimensionais 40 e 50. Repare que a inclinação teórica é a mesma que a simulada.

Utilizando o gradiente temporal de pressão e subtraindo o pico inicial de pressão do valor de pressão máximo, pode-se obter uma estimativa para o tempo de desligamento da

bomba,  $t_{set}^*$  :

$$t_{set}^* = \frac{P_{max}^* - P_{ent}^*}{\frac{dP^*}{dt^*}} \quad (6.19)$$

Através da Equação (6.19) os valores de tempo estimado para desligar a bomba são calculados e apresentados na Tabela 6.9. Os valores ficam em torno de 68. Enquanto que nas simulações os instantes de interrupção da bomba foram 62,4 e 62,6 para, respectivamente, os fluidos com e sem tixotropia. A diferença entre esses valores é cerca de 10%, o que pode ser justificado pelo gradiente inicial de pressão maior antes que a onda refletida no fundo do poço volte para a entrada. Isso dura 2 tempos adimensionais, aumenta significativamente a pressão e causa o erro na estimativa do tempo de desligamento.

O segundo detalhe, entre os instantes 60 e 85, da Figura 6.7 evidencia que a diferença entre os tempos de desligamento da bomba é praticamente inexistente. Porém, após a interrupção do bombeamento, uma queda mais acentuada se segue no fluido com tixotropia. Isso acontece pois a tixotropia impede a redução imediata da velocidade do fluido. O resultado disso é que a pressão continua a cair até que o escoamento cesse, da mesma forma como visto para o modelo Lei de Potência. Para o caso sem tixotropia, devido a viscoplasticidade do material, imediatamente após a interrupção da bomba, o escoamento cessa e a pressão não se reduz mais.

Esses fatos podem ser evidenciados na Figura 6.8 na qual são apresentados os perfis de velocidade local axial ao longo da posição radial para a posição  $z^* = -0,5$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) em quatro instantes de tempo distintos: imediatamente antes da bomba ser desligada ( $t_{set}^*$ ); 1 ( $t_{set}^* + 1$ ); 1,5 ( $t_{set}^* + 1,5$ ); e 2 ( $t_{set}^* + 2$ ) instantes de tempo adimensional após a bomba ser desligada. Nota-se que quando não há tixotropia, a velocidade torna-se nula em  $t_{set}^* + 1$ . No caso com tixotropia, mesmo em  $t_{set}^* + 2$  a velocidade ainda não é zero e percebe-se, pelos instantes  $t_{set}^* + 1$ ,  $t_{set}^* + 1,5$  e  $t_{set}^* + 2$ , que a velocidade oscila enquanto é reduzida. Isso ocorre porque a parcela elástica do material armazena energia enquanto que a parcela viscosa dissipa essa energia armazenada aos poucos, resultando num alívio da pressão, oscilação da velocidade e relaxação do material.

A Figura 6.9 mostra a evolução temporal da pressão para as posições  $z^* = -1, 0$  e 1 (entrada da coluna, fundo do poço e saída do anular). Nota-se que para o fundo do poço e saída do anular, devido a inércia do fluido, a pressão continua a crescer mesmo após a bomba ser desligada. Isso acontece porque a informação de que a bomba foi desligada (inércia) demora 1 e 2 tempos adimensionais para chegar em  $z^* = 0$  e 1, respectivamente. Observa-se também que a pressão não é transmitida totalmente para o caso sem tixotropia, ou seja, a pressão não se estabiliza em um único valor ao longo do poço. Contudo no caso com tixotropia, a pressão é quase totalmente transmitida. Isso é explicado pelo fato das propriedades do fluido EVPT não se alterarem imediatamente após o desligamento da bomba. O escoamento cessa aos poucos enquanto a estrutura gelificada é recuperada.

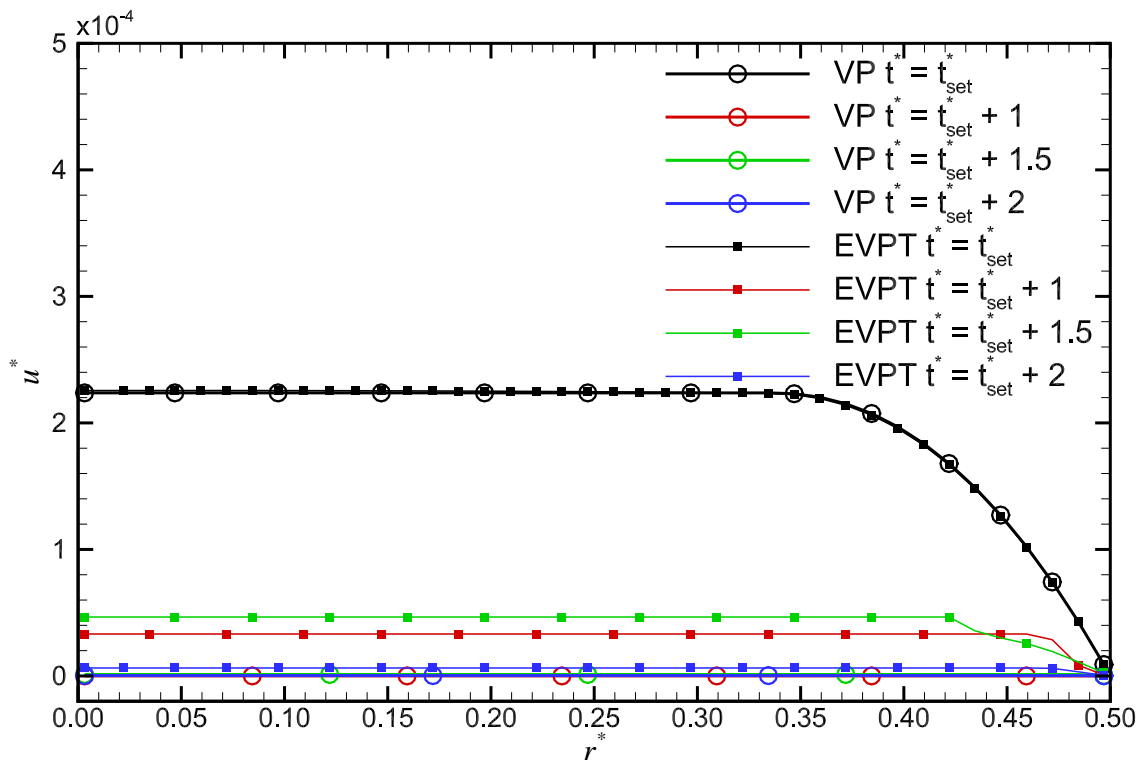


Figura 6.8 – Evolução temporal da velocidade axial local na posição  $z^* = -0,5$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

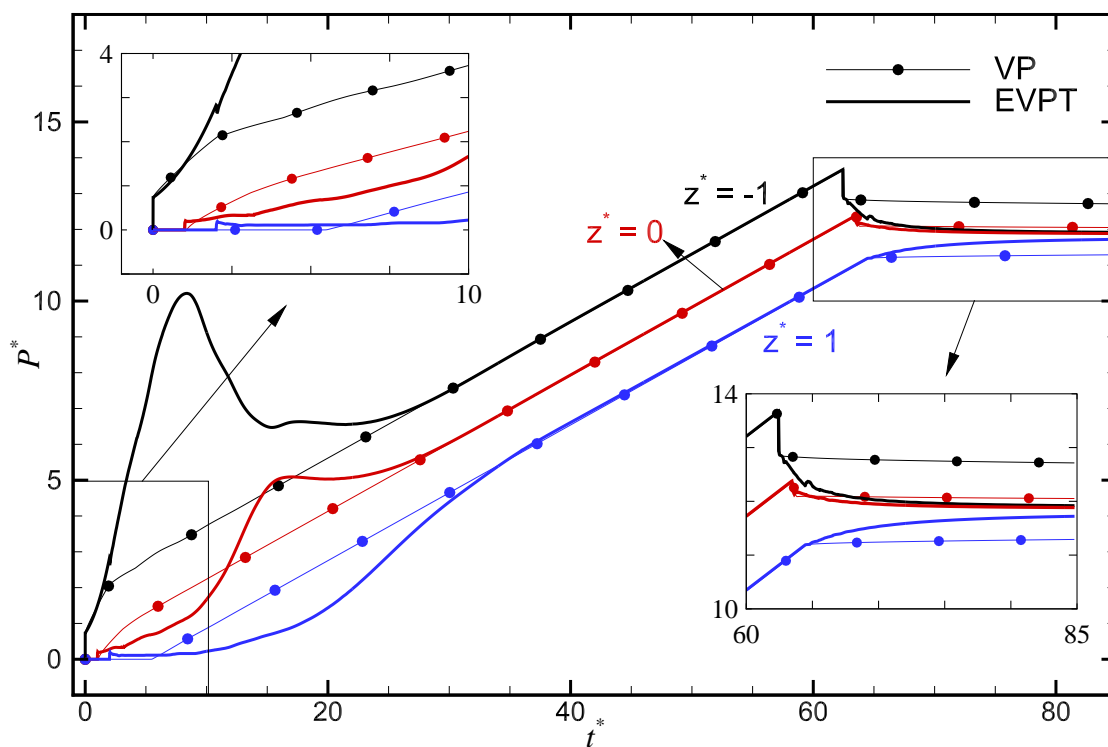


Figura 6.9 – Comparação da evolução temporal da pressão nas posições  $z^* = -1, 0$  e  $1$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

A análise da transmissão de pressão é apresentada nas Figuras 6.10, 6.11 e 6.12 que ilustram, respectivamente, a pressão ao longo da posição axial logo após o início do teste, posteriormente ao desligamento da bomba e quando o regime permanente é estabelecido. O primeiro gráfico, Figura 6.10, mostra os tempos adimensionais: 0,1; 0,5; 1; e 2. Percebe-se, no caso sem tixotropia, que até  $t^* = 0,5$  o gradiente de pressão formado não é linear, tendo formato distorcido próximo da posição em que a pressão torna-se nula. Após a pressão chegar no fundo do poço, em  $t^* = 1$ , cria-se um gradiente linear. Não são observadas frentes de onda e o efeito predominante é o amortecimento viscoso. No caso com tixotropia três fatos são interessantes: a presença de uma frente de onda, a não linearidade do gradiente mesmo no instante  $t^* = 2$  e a maior transmissão de pressão. O primeiro fato pode ser explicado pela propagação elástica e reflexão. Como o fluido encontra-se totalmente estruturado, a onda de pressão se propaga elasticamente, quando encontra uma estrutura rígida parte da onda é refletida, diminuindo a pressão e formando uma região de frente de onda. A elasticidade evita que a pressão continue diminuindo nas regiões mais distantes da frente de onda. O segundo fato acontece porque a quebra ocorre por partes. Primeiro as regiões próximas à entrada concentram altos níveis de pressão e energia até que a estrutura se quebre. Em seguida, a pressão é aliviada e a pressurização de uma região mais próxima ao fundo do poço acontece. Esse ciclo se repete até que a estrutura na saída do espaço anular tenha sido quebrada. O terceiro fato é devido a elasticidade do material, a estrutura elástica permite que a onda se propague antes do material se quebrar.

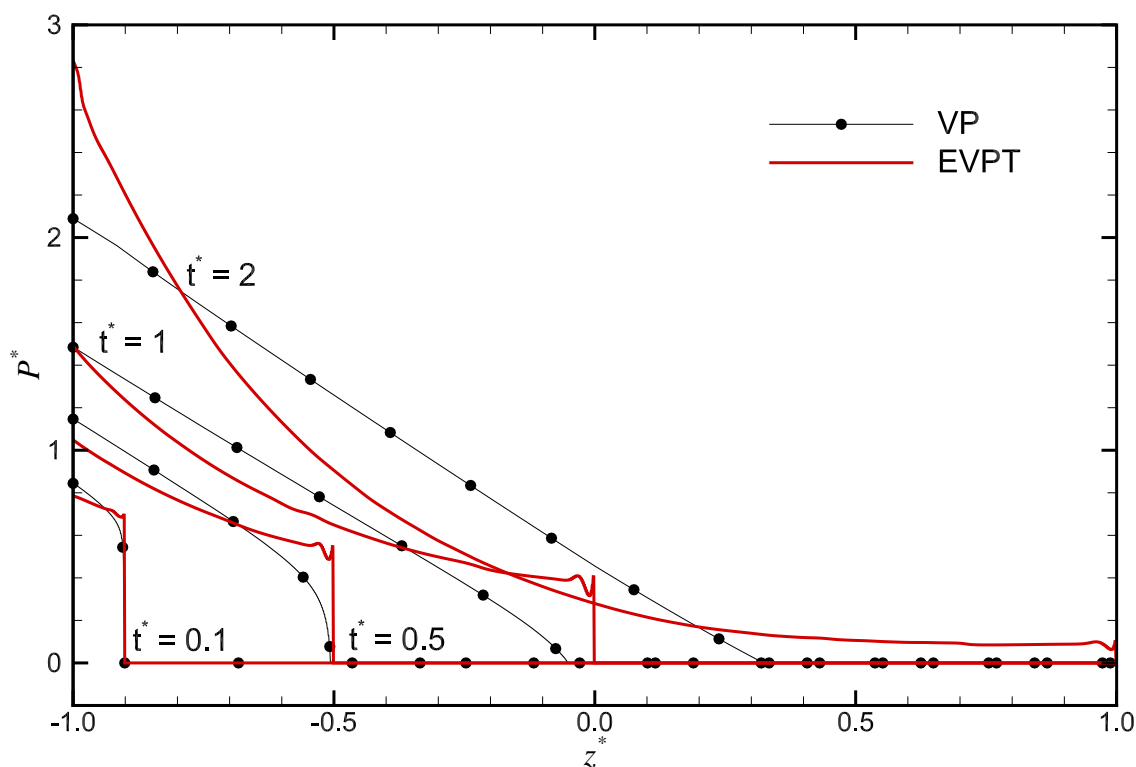


Figura 6.10 – Distribuição de pressão axial para tempos logo após a bomba ser ligada,  $t^* = 0,1; 0,5; 1; e 2$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

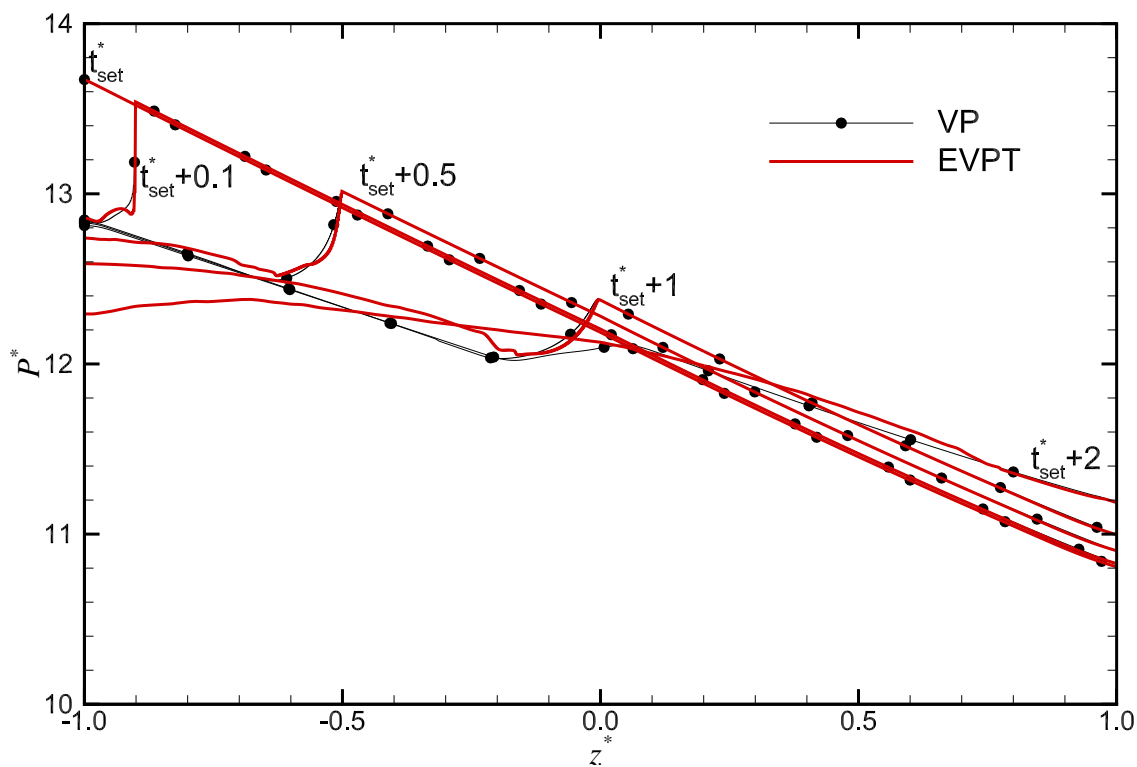


Figura 6.11 – Distribuição de pressão axial para tempos logo após a bomba ser desligada,  $t_{set}^*$ ; +0,1; +0,5; +1; e +2 para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

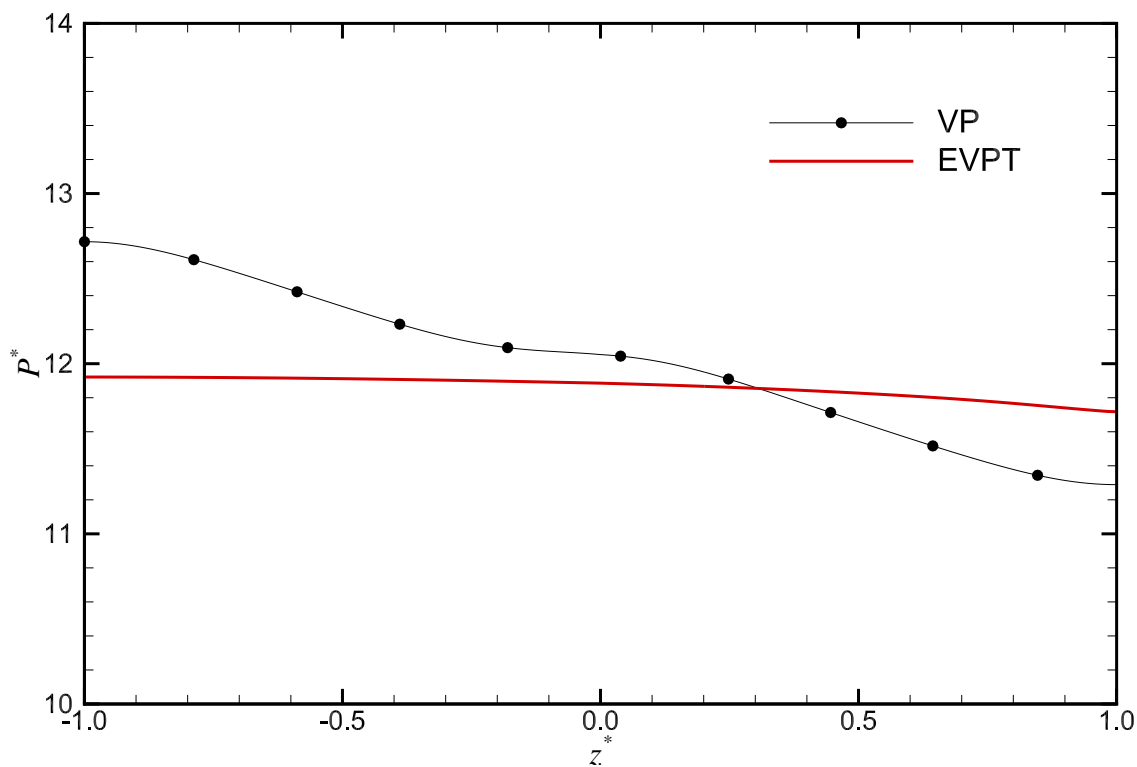


Figura 6.12 – Distribuição de pressão axial no último instante de tempo simulado ( $t^* = 84$ ) para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

A Figura 6.11 ilustra a distribuição da pressão ao longo da posição axial imediatamente antes e alguns instantes após o desligamento da bomba. Percebe-se que antes da interrupção ( $t^* = t_{set}^*$ ) o gradiente de pressão é o mesmo para os fluidos com e sem tixotropia. Nos instantes posteriores o efeito elástico reduz rapidamente a pressão ao longo do tubo e transmite mais rapidamente a pressão no espaço anular. Nota-se que, no fluido VP, a pressão próxima à entrada da coluna de perfuração permanece constante enquanto a onda se propaga no restante do poço. Já para o caso com tixotropia (EVPT), conforme a onda se propaga, energia é liberada na região de entrada, resultando num alívio de pressão. Novamente observa-se a presença de uma frente de onda com propagação elástica que causa oscilação no sistema.

A Figura 6.12 mostra o gradiente de pressão axial no último instante ( $t^* = 84$ ) simulado para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia). Na indústria testes desse tipo tem um tempo máximo para ocorrer. Dessa forma, como o fluido não se reestrutura completamente mesmo após  $t^* = 1000$ , estabelece-se que o tempo final do teste ( $t^* = 84$ ) refere-se ao equilíbrio. Nota-se que entre a entrada da coluna de perfuração e a saída do espaço anular no caso com tixotropia a diferença de pressão adimensional é de 0,2. Enquanto que no caso sem tixotropia essa diferença é de 1,4. Portanto, a transmissão de pressão no fluido sem tixotropia é bem mais rápida. Os argumentos que justificam esse fato são a viscoplasticidade do modelo sem tixotropia e a elasticidade do modelo com tixotropia.

A análise da quebra do gel também pode ser feita levando em consideração a evolução do parâmetro estrutural com o tempo. A Figura 6.13 ilustra esse estudo para o parâmetro estrutural da parede do tubo nas posições  $z^* = -1; -0,9; -0,5; -0,1; e 0$ . A quebra do gel começa logo após o início do bombeamento e acontece à medida que a onda de pressão chega em cada posição do tubo. Nota-se que no instante  $t^* = 40$  a estrutura na parede do tubo está quebrada, mas os valores do parâmetro estrutural próximos a entrada são menores. Isso acontece porque, como a saída do anular está fechada, quanto mais próximo à entrada da tubulação, maior a velocidade média e maiores os gradientes radiais. Portanto, o tempo necessário para ocorrer a desestruturação do fluido é menor e o valor do parâmetro estrutural mais baixo. Após a interrupção do bombeamento, a tendência de movimento do fluido é cessar e, por isso, as curvas se sobrepõe. Sem solicitações, o fluido tende a retornar ao estado completamente estruturado.

As Figuras 6.14 e 6.15 ilustram a evolução do parâmetro estrutural para, respectivamente, as paredes interna e externa do espaço anular. Nota-se que ambas são muito parecidas. Porém, ao compará-las com a Figura 6.13, observa-se que o tempo para estrutura começar a ser quebrada no espaço anular é muito maior do que no tubo. Isso acontece porque a onda de pressão demora mais tempo para propagar até o espaço anular e as velocidades médias são significativamente menores, reduzindo as taxas de deformação e aumentando o tempo necessário para a quebra de gel. Observa-se que, antes da bomba ser desligada, o nível estrutural em cada posição do espaço anular é diferente e que quanto mais próximo

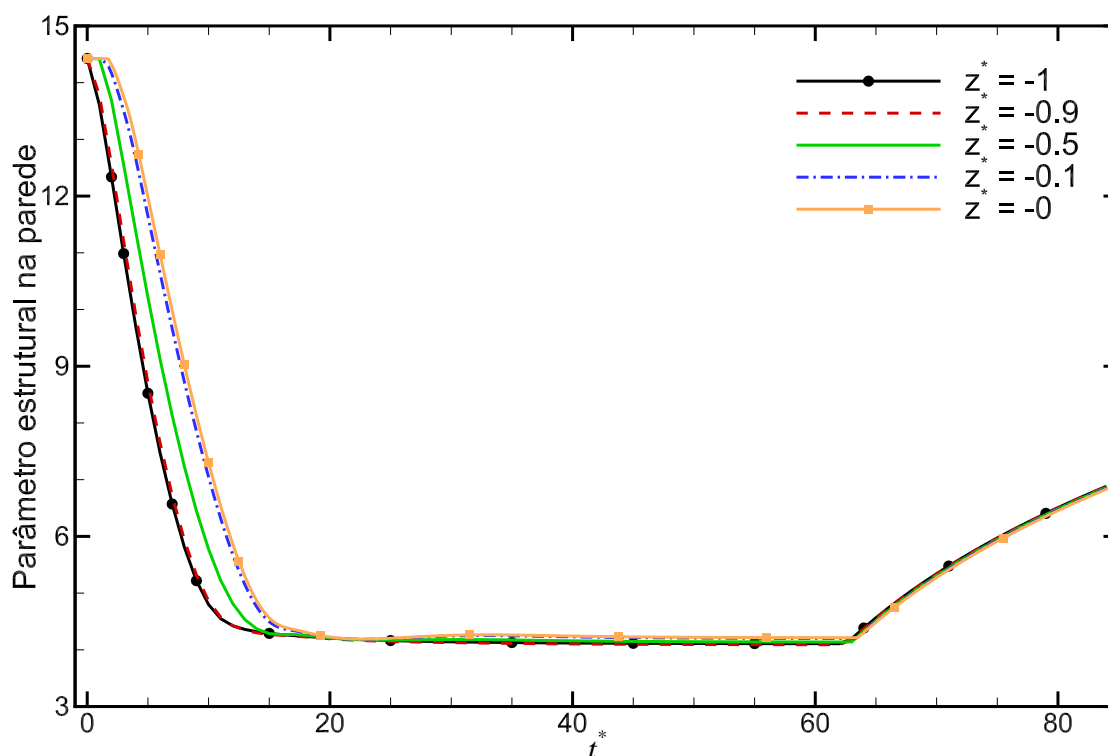


Figura 6.13 – Evolução temporal do parâmetro estrutural nas posições  $z^* = -1; -0,9; -0,5; -0,1; e 0$  na parede tubo para o fluido EVPT (com tixotropia).

da saída maior a recuperação após a quebra do gel. Percebe-se que o tempo necessário para que as posições próximas da saída do espaço anular comecem a ter alterações no parâmetro estrutural é superior ao tempo de propagação da onda de pressão.

Agora são feitas análises dos perfis radiais de velocidade axial local, tensão de cisalhamento e parâmetro estrutural tanto para o tubo quanto para o espaço anular. Para cada um desses casos serão apresentados quatro perfis: três logo após a bomba ser ligada e um imediatamente antes da interrupção do bombeamento.

A Figura 6.16 ilustra a comparação da evolução temporal dos perfis radiais de velocidade axial local em uma posição localizada a 50% da entrada da tubulação para os fluidos sem e com tixotropia. Para o fluido VP, conforme o tempo passa a velocidade axial aumenta. Verifica-se uma região não cisalhada que diminui com o aumento do tempo. No caso com tixotropia, o mecanismo é parecido com uma maior aceleração do fluido no centro do tubo. Entretanto, a estrutura do gel faz com que o gradiente radial de velocidade aumente gradativamente à medida que o material se quebra. Repare que a região não cisalhada se desloca mais rapidamente em direção ao centro do tubo e tem maior oscilação. Isso é causado pela elasticidade do material. Por fim, antes da bomba ser desligada, os perfis são idênticos, o que indica que as velocidades se estabilizaram.

A comparação da evolução temporal dos perfis radiais de velocidade axial local em 10% do comprimento do espaço anular são ilustrados na Figura 6.17. Observa-se que assim como no tubo a velocidade para o caso sem tixotropia aumenta gradativamente à medida

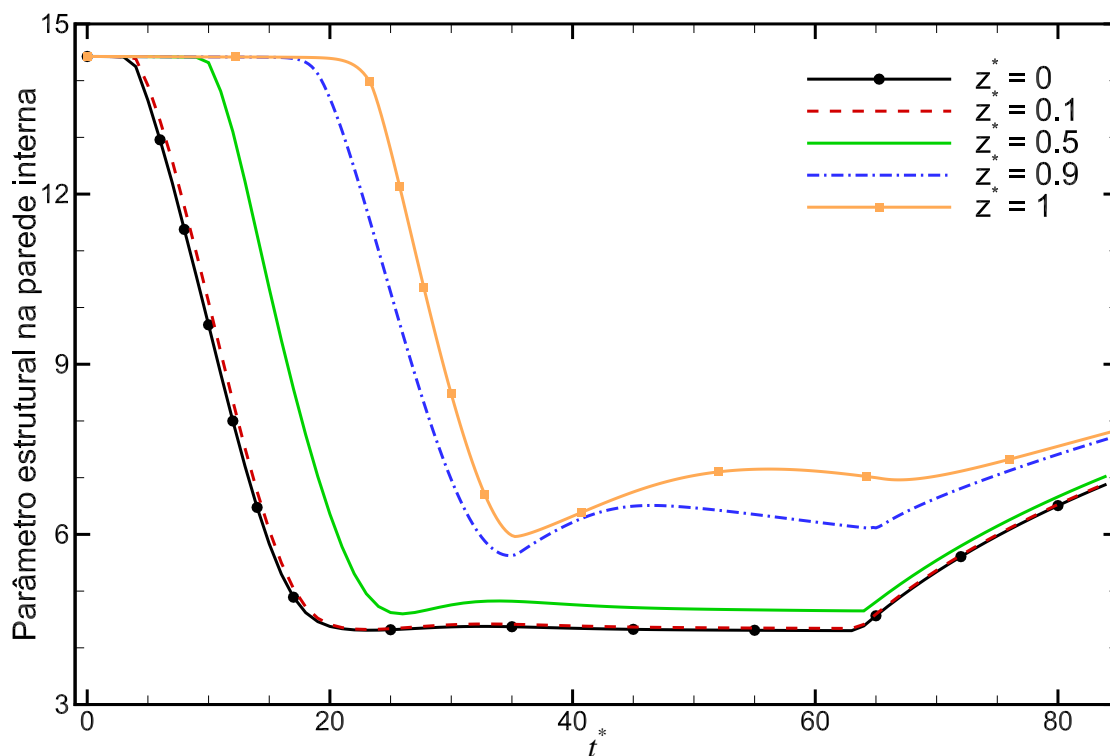


Figura 6.14 – Evolução temporal do parâmetro estrutural nas posições  $z^* = 0; 0,1; 0,5; 0,9;$  e 1 na parede interna do espaço anular para o fluido EVPT (com tixotropia).

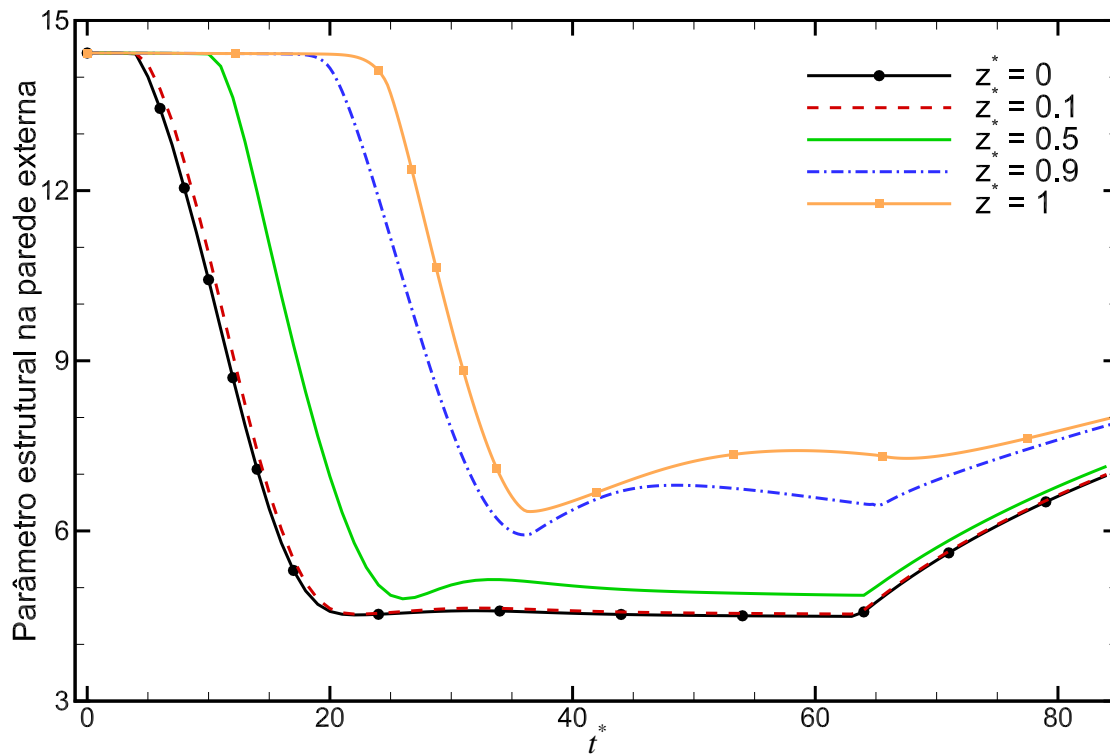


Figura 6.15 – Evolução temporal do parâmetro estrutural nas posições  $z^* = 0; 0,1; 0,5; 0,9;$  e 1 na parede externa do espaço anular para o fluido EVPT (com tixotropia).



que a região não cisalhada diminui. As mesmas observações também são válidas para o caso tixotrópico: oscilação da velocidade e quebra se iniciando nas paredes. Além disso, nota-se pelas regiões próximas à parede que a variação do parâmetro estrutural e o valor de tensão não são iguais, pois o gradiente radial de velocidade é diferente. Assim como no tubo, o estado de equilíbrio anterior ao desligamento da bomba apresenta perfis idênticos.

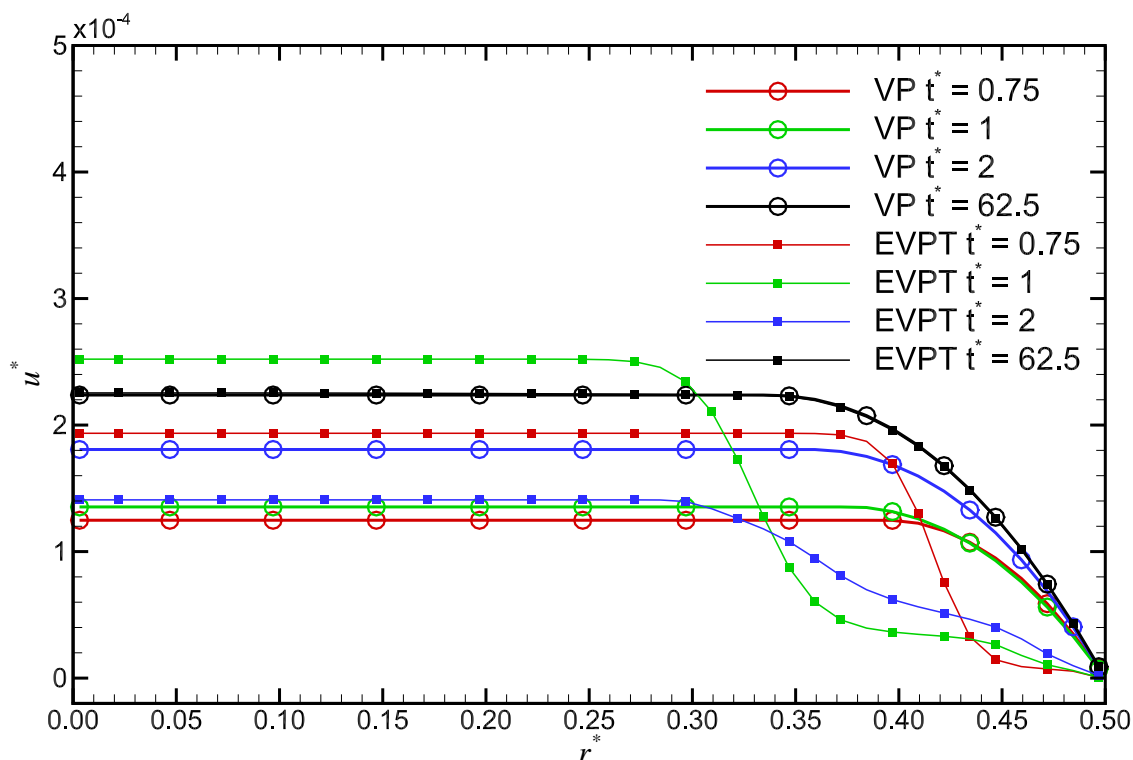


Figura 6.16 – Evolução temporal dos perfis radiais de velocidade axial local na posição  $z^* = -0,5$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

A análise do perfil de tensões é interessante, pois uma das premissas desse trabalho é a relaxação da hipótese de que a tensão varia linearmente ao longo da direção radial. Dessa forma, análises da evolução temporal do perfil radial de tensão de cisalhamento para o tubo e para o espaço anular são ilustradas, respectivamente, nas Figuras 6.18 e 6.19.

A Figura 6.18 mostra a evolução da tensão de cisalhamento na parede para a posição localizada a 10% da entrada da tubulação. Observa-se que, no caso sem tixotropia, no instante  $t^* = 0,25$  a curva de tensão possui duas inclinações aproximadamente lineares: uma entre 0 e 0,4 e outra entre 0,4 e 0,5. Portanto, logo após o início do bombeamento, um perfil quase linear se forma. Nos instantes seguintes o perfil de tensão torna-se linear e se mantém constante até o instante em que o bombeio é interrompido. No caso do fluido tixotrópico, percebe-se que o mecanismo é diferente, inicialmente a tensão é nula próxima ao centro. À medida que o tempo avança, o valor próximo do eixo de simetria do tubo aumenta. Contudo, ao contrário do caso sem tixotropia, o perfil linear não se estabelece até o instante em que a bomba é desligada. Percebe-se que, em  $t^* = 62,5$ , entre os raios adimensionais de 0,06 a 0,5 a curva é idêntica à do fluido não tixotrópico. Porém, perto

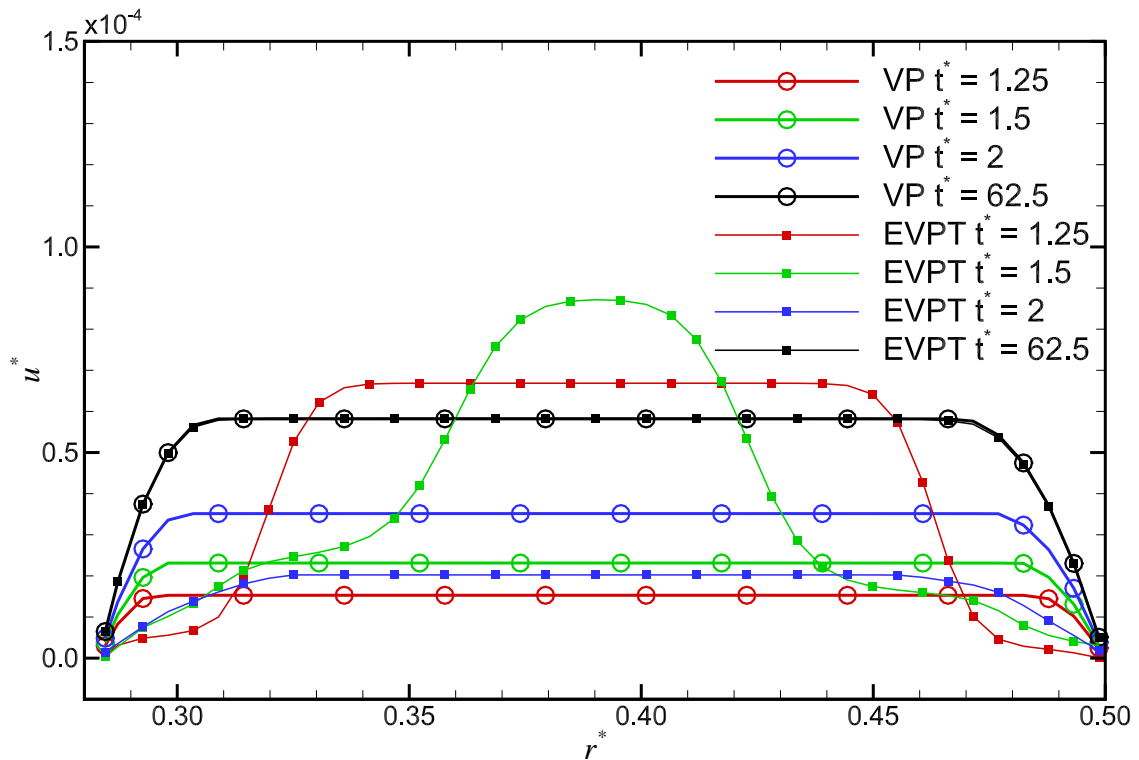


Figura 6.17 – Evolução temporal dos perfis radiais de velocidade axial local na posição  $z^* = 0,1$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

do centro identifica-se um pico de tensão em  $r^* = 0,03$ . Note que o valor desse pico é próximo do valor de tensão nessa mesma posição no instante  $t^* = 2$ . Assim, conclui-se que, como um núcleo não cisalhado é formado nessa região, a taxa de deformação é próxima a zero, ou seja, a tensão praticamente não muda ao longo do tempo. Substituindo a viscosidade aparente do modelo de Mendes e Thompson (2013), Equação (3.46), na equação constitutiva de FNG, Equação (3.27), e considerando as taxas de deformação atual e futura como próximas a zero, resulta em:

$$\tau = \tau^0 \tag{6.20}$$

A Figura 6.19 mostra a evolução dos perfis radiais de tensão para 50% do espaço anular. Novamente, os resultados para o caso sem tixotropia são parecidos com os do tubo. Porém ao invés da tensão variar de zero (centro do tubo) a um valor máximo (parede do tubo), essa varia de um valor mínimo (parede interna do espaço anular) a um valor máximo (parede externa do espaço anular) passando por uma região de tensão zero. Para o caso com tixotropia, percebe-se que a quebra da estrutura começa próximo às paredes e se propaga para a região central do espaço anular. Novamente, o perfil aproximadamente linear da tensão no caso sem tixotropia só se repete perto das paredes no caso tixotrópico. Além disso, o maior número de inclinações acontece por causa da presença de uma parede extra e de uma região central com tensão nula na qual o gradiente de velocidade se inverte.

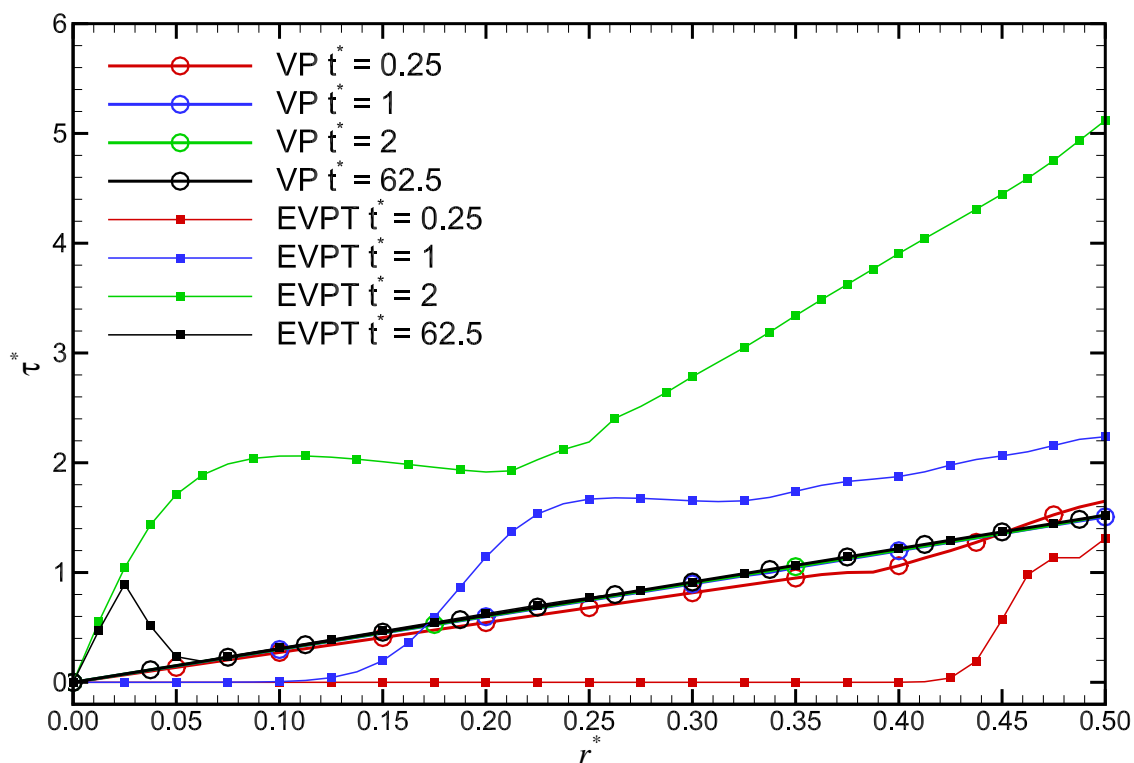


Figura 6.18 – Evolução temporal dos perfis radiais de tensão de cisalhamento na posição  $z^* = -0,9$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

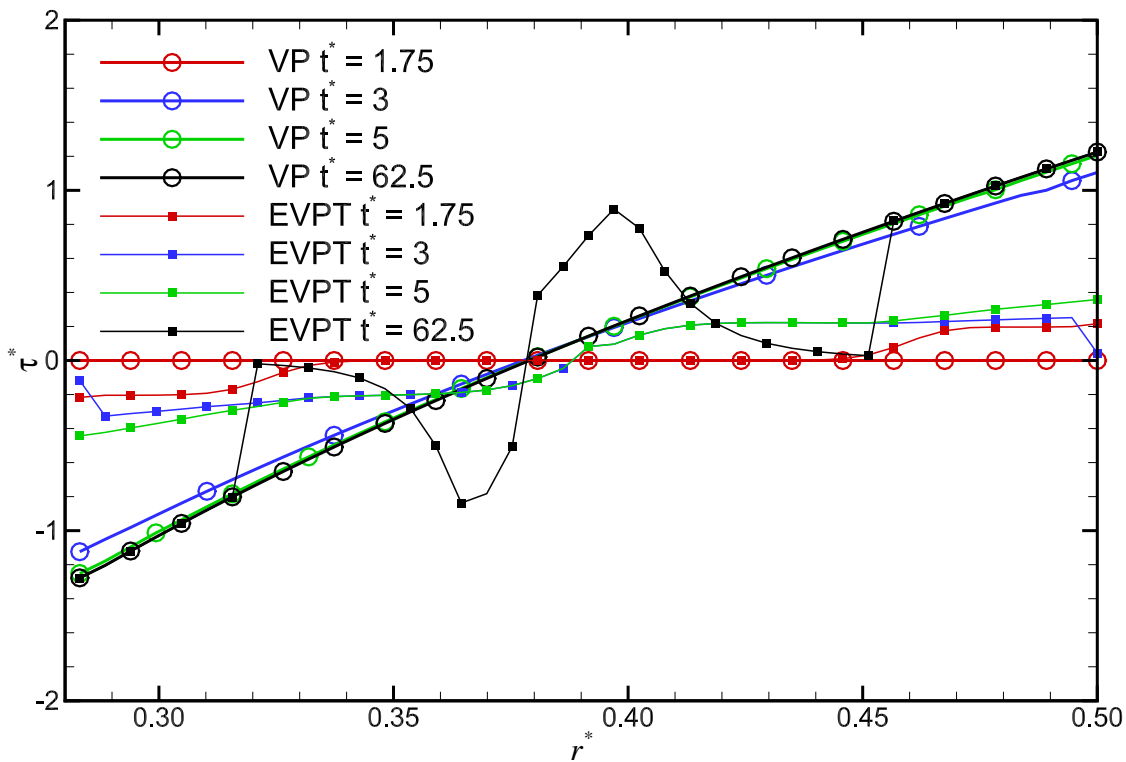


Figura 6.19 – Evolução temporal dos perfis radiais de tensão de cisalhamento na posição  $z^* = 0,5$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia).

Por fim, ilustra-se a evolução temporal do perfil radial do parâmetro estrutural na posição localizada a 50% da entrada da coluna na Figura 6.20. Nota-se que o parâmetro estrutural começa a variar na parede e vai se propagando para o centro do tubo. Enquanto a estrutura é quebrada o parâmetro estrutural decai. Porém, é interessante notar que, antes de se deligar a bomba, o valor do parâmetro é maior na faixa de  $r^* = 0,05$  a  $0,40$  do que no instante  $t^* = 16$ . Isso acontece porque depois da quebra ocorre um alívio de pressão e velocidade, de forma a diminuir os gradientes radiais de velocidade proporcionando a recuperação da estrutura do material. Observa-se também que no centro do tubo o parâmetro estrutural não varia, pois não há cisalhamento.

A Figura 6.21 ilustra a evolução temporal dos perfis radiais do parâmetro estrutural para 50% do espaço anular. Assim como no tubo, a estrutura começa a ser modificada perto das paredes. Nesse caso, percebe-se pelo valor do parâmetro estrutural que o gradiente de velocidade na parede interna é maior do que na parede externa. Comparando os instantes  $t^* = 25$  e  $62,5$ , nota-se a recuperação do material depois da quebra. Além disso, percebe-se que na região não cisalhada (próxima ao centro do tubo) há pouca variação do parâmetro estrutural ao longo do tempo.

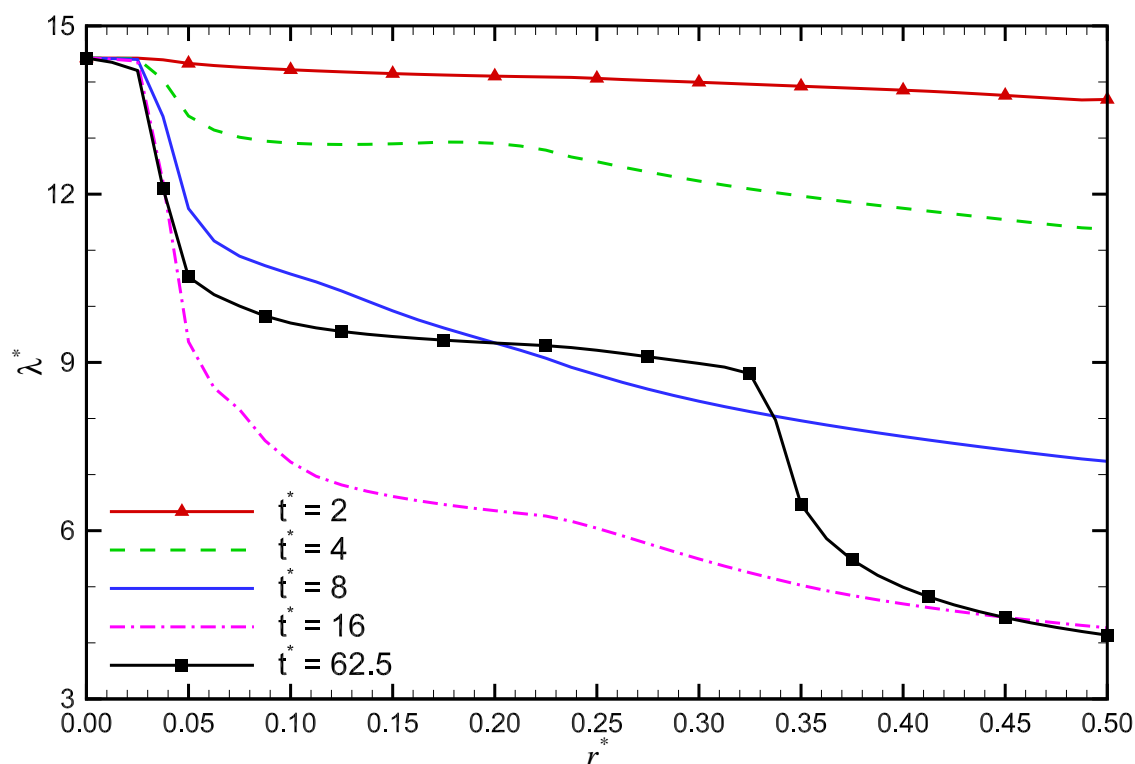


Figura 6.20 – Evolução temporal dos perfis radiais do parâmetro estrutural na posição  $z^* = -0,5$  para o fluido EVPT (com tixotropia).

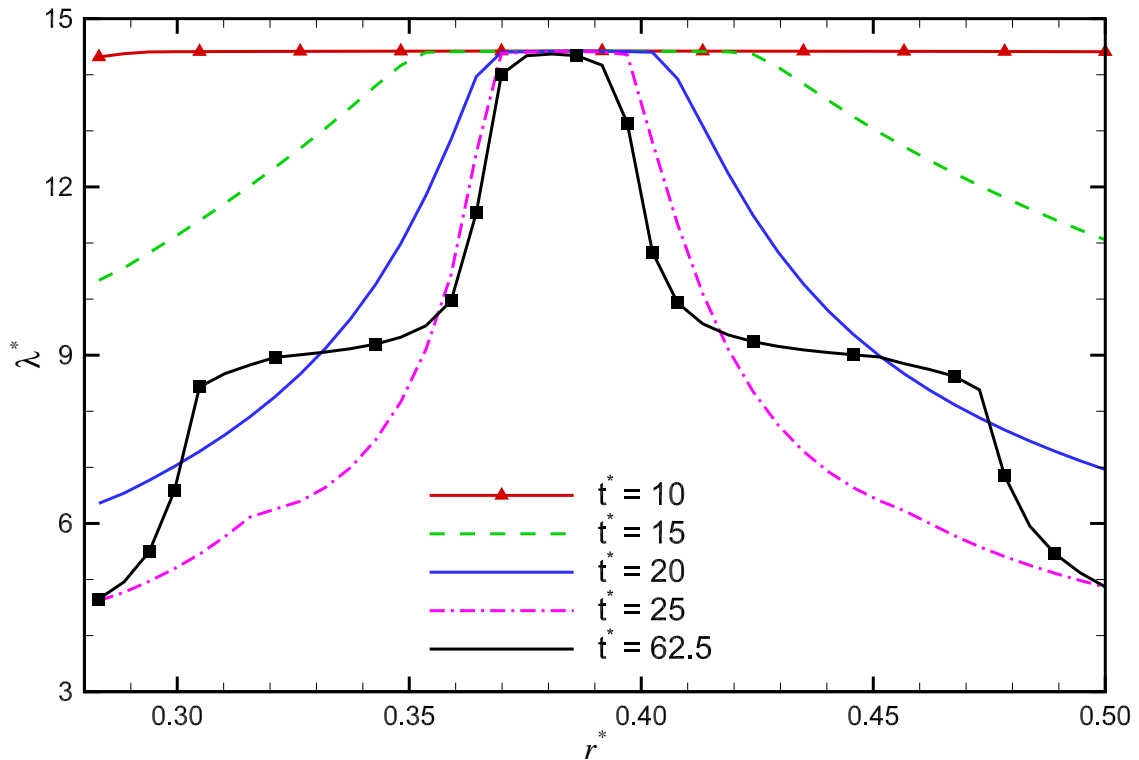


Figura 6.21 – Evolução temporal dos perfis radiais do parâmetro estrutural na posição  $z^* = -0,5$  para o fluido EVPT (com tixotropia).

## 6.4 Análise de Sensibilidade

Nessa seção utilizam-se os mesmos parâmetros adimensionais e malhas citadas na seção anterior para fazer uma análise de sensibilidade do modelo e avaliar quando alguns efeitos são mais importantes. Os parâmetros adimensionais analisados a seguir são: o tempo característico, o módulo de elasticidade e o parâmetro estrutural inicial.

### 6.4.1 Efeito do Tempo Característico, $t_{eq}^*$

O tempo característico adimensional,  $t_{eq}^* = t_{eq}c/L$ , relaciona o tempo de quebra da estrutura com o tempo de propagação da onda de pressão. Assim, se esse valor for menor do que a unidade, o tempo de quebra da estrutura é maior do que o de propagação da pressão ao longo do poço, ou seja, a quebra é mais lenta. Caso contrário, a desestruturação do material ocorre conforme a onda de pressão chega numa certa posição axial.

O parâmetro em estudo foi reduzido a 10 e a 1% do valor original. A Figura 6.22 ilustra o efeito do tempo característico na evolução temporal da pressão nas posições  $z^* = -1, 0$  e  $1$ , comparando o fluido sem e com tixotropia. Observa-se que o gradiente temporal de pressão é o mesmo para todos os casos após a quebra da estrutura de gel. No detalhe entre 0 e 4, percebe-se que conforme o tempo característico diminui a pressão necessária para a quebra reduz-se e a reflexão em  $t^* = 2$  fica mais evidente. Isso acontece porque a quebra ocorre conforme a onda se propaga. Dessa forma, a pressão necessária para

desestruturar o material torna-se menor. O segundo detalhe, entre 60 e 85, evidencia a importância do parâmetro em análise. Conforme o tempo característico diminui, o efeito de gel diminui, as propriedades variam mais rapidamente e, assim, a recuperação e a parada do fluido acontecem em um tempo menor. Observa-se que para  $0,01 t_{eq}^*$  o resultado é praticamente igual ao sem tixotropia durante toda a simulação. Portanto a redução do tempo característico faz com que o escoamento cesse antes e implica em diminuição da transmissão de pressão. Idealmente, se o tempo característico fosse zero, a variação da estrutura seria instantânea e o resultado seria idêntico ao do fluido não tixotrópico (VP).

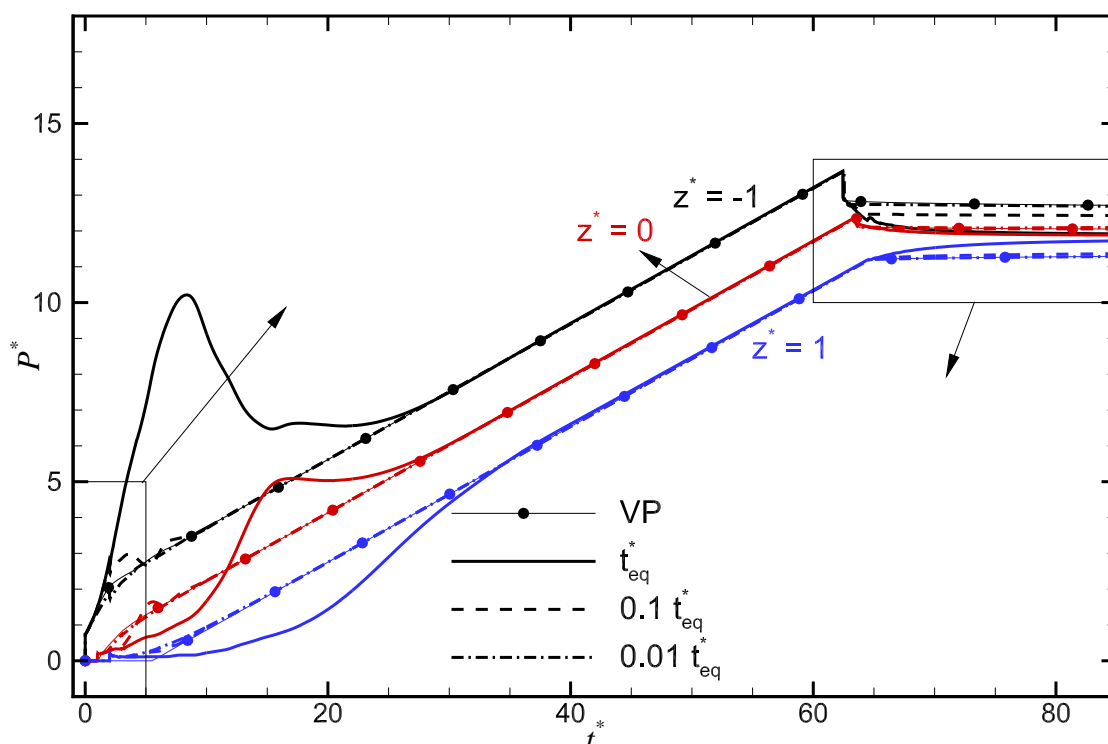


Figura 6.22 – Evolução temporal da pressão nas posições  $z^* = -1, 0$  e  $1$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de  $t_{eq}^*$ .

A Figura 6.23 ilustra a evolução do parâmetro estrutural na parede do tubo na entrada da tubulação variando o tempo característico. Observa-se que com a redução de  $t_{eq}^*$  o parâmetro estrutural modifica-se mais rapidamente. Assim, no caso em que o parâmetro é 1% do valor original, as variações acontecem praticamente instantaneamente tanto na quebra quanto na recuperação, contudo, nota-se que ocorre uma oscilação do parâmetro estrutural antes de voltar ao estado completamente estruturado. O formato da evolução temporal do parâmetro estrutural se o tempo característico fosse zero seria o de duas funções heaviside, uma reduzindo o parâmetro estrutural imediatamente para o valor de regime permanente e a outra recuperando completamente a estrutura depois que a bomba fosse desligada.

A Figura 6.24 mostra a evolução temporal dos perfis radiais de tensão de cisalhamento na posição localizada a 10% da entrada do tubo. Percebe-se que a diminuição do tempo

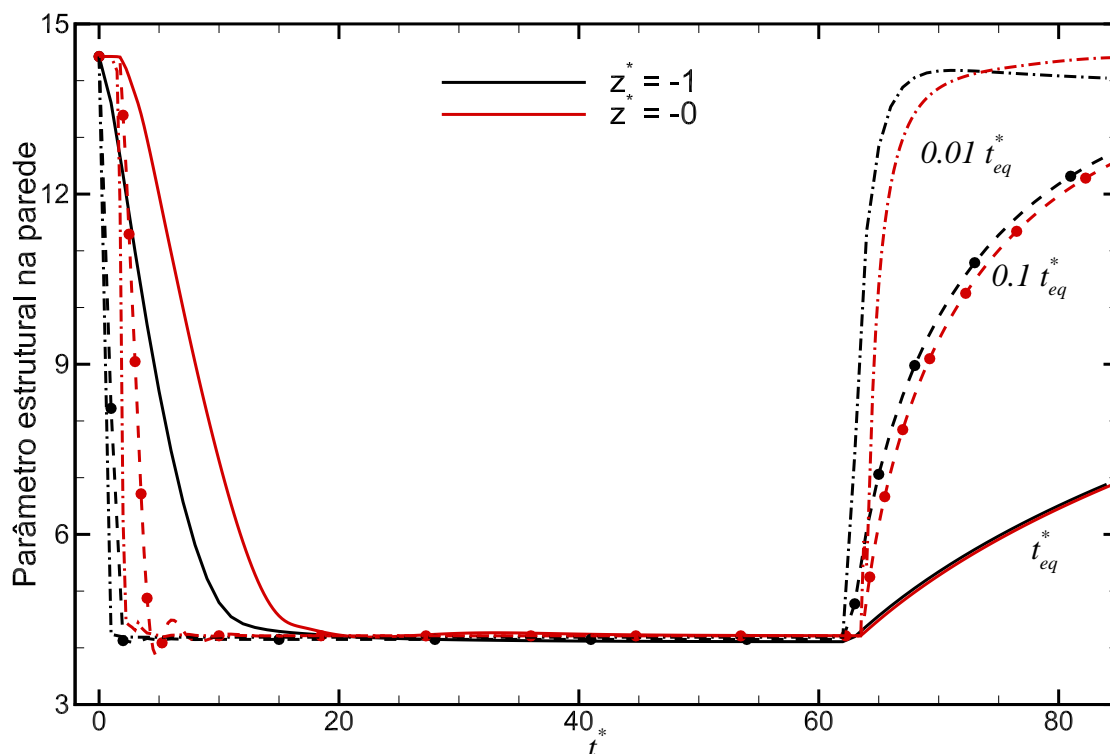


Figura 6.23 – Evolução temporal do parâmetro estrutural na parede tubo nas posições  $z^* = -1$  e  $0$  para o fluido EVPT (com tixotropia) para diferentes valores  $t_{eq}^*$ .

característico acelera a variação da tensão. Para o tubo, em todos os casos o perfil antes da interrupção da bomba não é linear, possuindo três inclinações distintas. Resultados similares são obtidos para o espaço anular.

#### 6.4.2 Efeito do Módulo de Elasticidade, $G_0^*$

O módulo de elasticidade adimensional,  $G_0^*$ , define o quão rígida ou elástica é a estrutura do material e está relacionado com os módulos de relaxação, Equação (6.15), e retardo, Equação (6.16). Valores mais baixos representam fluidos mais elástico com maiores tempos de relaxação e retardo, enquanto que os mais altos indicam materiais com maior rigidez.

Percebe-se pelos resultados da seção 6.3 que a elasticidade do fluido de perfuração simulado não condiz com a do observado em campo. Muitas oscilações ocorrem nos resultados numéricos de velocidade e, depois que a bomba é desligada, a pressão se propaga rapidamente. Esses dois indícios indicam que um fluido menos elástico proporcionaria resultados mais condizente com observações experimentais do fluido de perfuração em análise.

Por isso, um estudo foi realizado utilizando valores de  $G_0^*$  de 2 a 3 ordens mais elevada do que o atual. Dessa forma, o fluido ficaria mais rígido e tenderia ao caso inelástico. Contudo, casos desse tipo geram gradientes de pressão, velocidade e tensão muito elevados. Verificou-se através de refino de malha que não havia convergência, ou seja, mesmo com

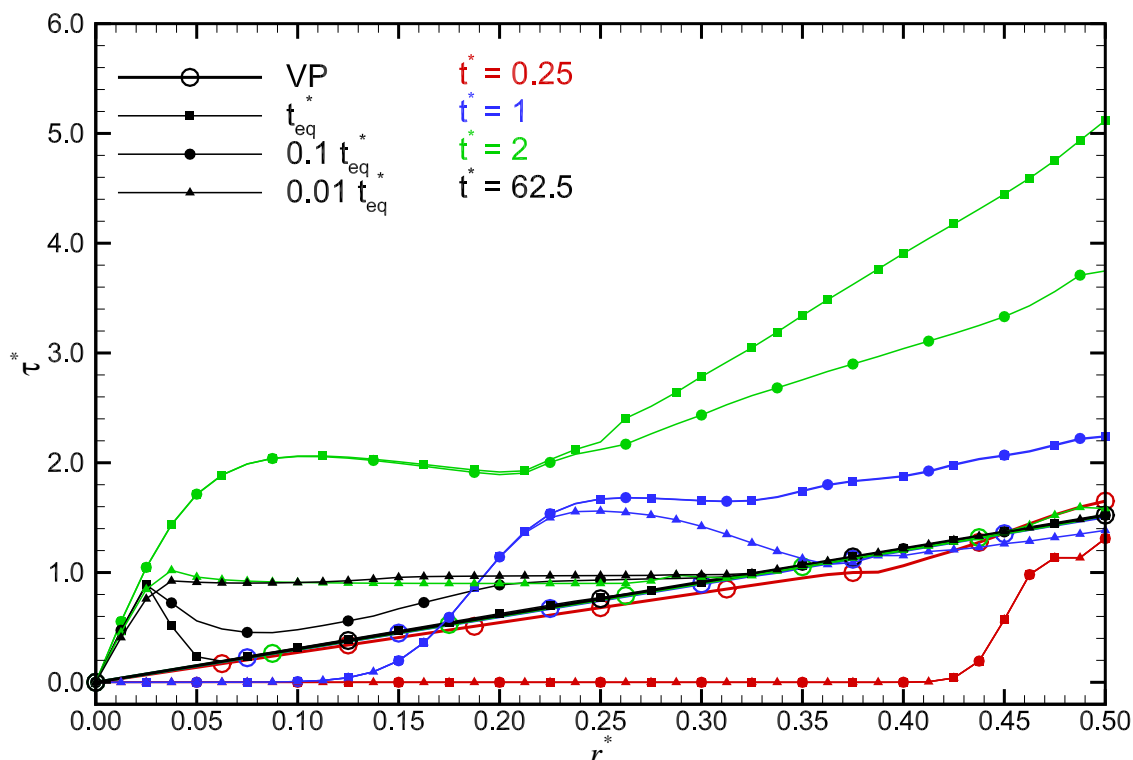


Figura 6.24 – Evolução temporal dos perfis radiais de tensão de cisalhamento na posição  $z^* = -0,9$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes tempos característicos adimensionais.

malhas muito refinadas não foi possível atender a um critério (mínimo) de 5% na diferença entre os valores.

Um estudo similar foi conduzido para fluidos newtonianos com viscosidade elevada (da ordem de  $10^4$  Pa.s) e resultados parecidos foram obtidos, ou seja, a pressão continuava a subir sem chegar a um valor independente do número de células.

Além disso, o aumento da rigidez do material faz com que uma pressão maior num tempo menor seja necessária para quebrar a estrutura do material. Dessa forma, um valor de  $G_0^*$  alto faz com que a bomba seja desligada antes do gel ser quebrado. Levando em conta esses fatores, fez-se simulações com  $5 G_0^*$  e  $0,1 G_0^*$ , de forma a evitar a interrupção prematura da bomba e obedecer ao critério de independência da malha.

A Figura 6.25 apresenta a evolução temporal da pressão nas posições  $z^* = -1$  e  $1$  variando o módulo de elasticidade adimensional. Observa-se que quanto maior o valor de  $G_0^*$  mais rápida é a quebra e maior a pressão necessária para que isso aconteça. Esse fato se deve ao aumento de rigidez do material e aos menores tempos de relaxação e retardo. Além disso, percebe-se, pelo detalhe entre 0 e 4, que a diminuição do módulo de elasticidade faz com que a reflexão se intensifique, causando uma redução mais significativa da pressão na entrada. Nota-se, pelo detalhe entre 60 e 85, que um material com maior  $G_0^*$  proporciona uma estabilização mais rápida do valor final de pressão ao longo do poço. Isso se deve ao fato de que os tempos de relaxação e retardo são menores. Assim, o fluido



chega no equilíbrio mais rapidamente.

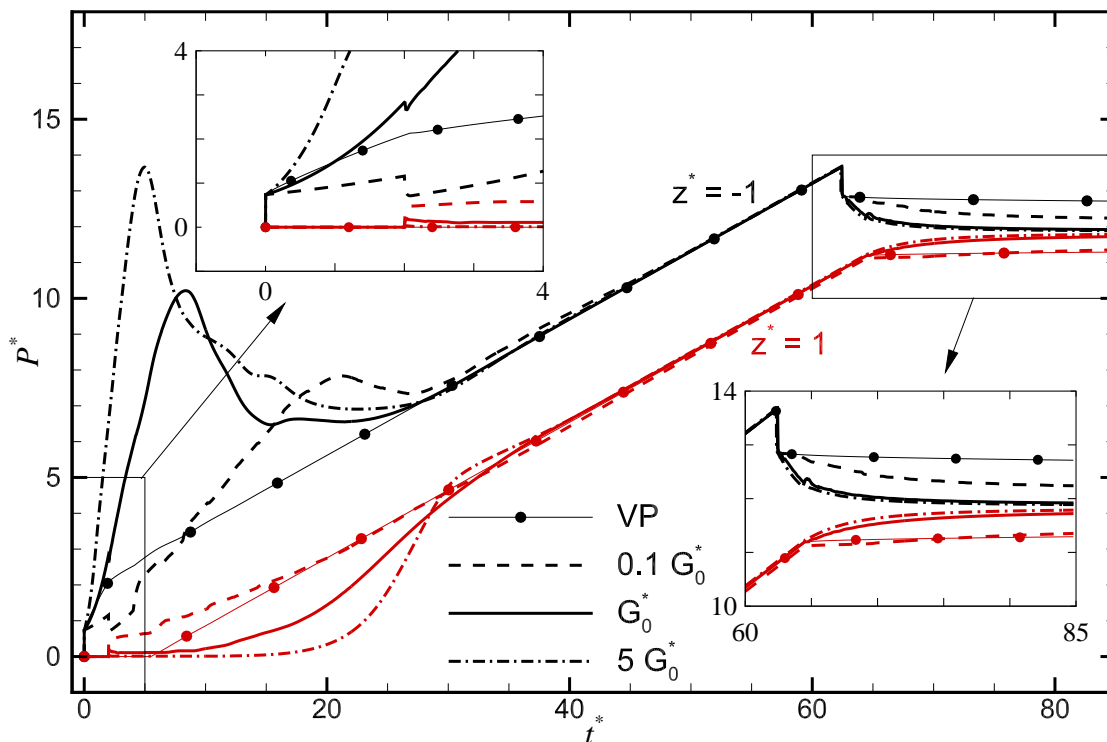


Figura 6.25 – Evolução temporal da pressão nas posições  $z^* = -1$  e  $1$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de  $G_0^*$ .

A Figura 6.26 ilustra a evolução temporal do parâmetro estrutural na parede para a posição localizada à 50% da entrada da tubulação. Observa-se que, durante a quebra, o aumento do módulo de elasticidade implica em aceleração da variação das propriedades, fazendo com que a pressão aumente mais rapidamente e a estrutura se quebre antes. Isso acontece porque o módulo de relaxação e retardo é menor. Depois do instante em que a bomba é desligada, nota-se que a recuperação é similar tanto para o material mais elástico quanto para o mais rígido, ou seja, a recuperação independe da elasticidade.

### 6.4.3 Efeito do Parâmetro Estrutural Inicial, $\lambda_{t=0}$

O parâmetro estrutural inicial indica o estado em que a estrutura se encontra antes do início da simulação. Se esse valor for igual a  $\lambda_0$ , o material está completamente estruturado. Se esse valor for zero, o fluido encontra-se totalmente desestruturado. Nessa subseção serão estudados os efeitos causados por começar a simulação com uma estrutura inicial 50 e 25% estruturada.

A Figura 6.27 ilustra a evolução temporal da pressão para as posições  $z^* = -1, 0$  e  $1$  variando  $\lambda_{t=0}$ . Observa-se que quanto menos estruturado inicialmente o material, menor o pico de pressão. No caso em que a estruturação encontra-se em 25%, nota-se pelo detalhe entre 0 e 4 que a pressão chega a ser refletida no instante  $t^* = 2$ . Isso acontece porque

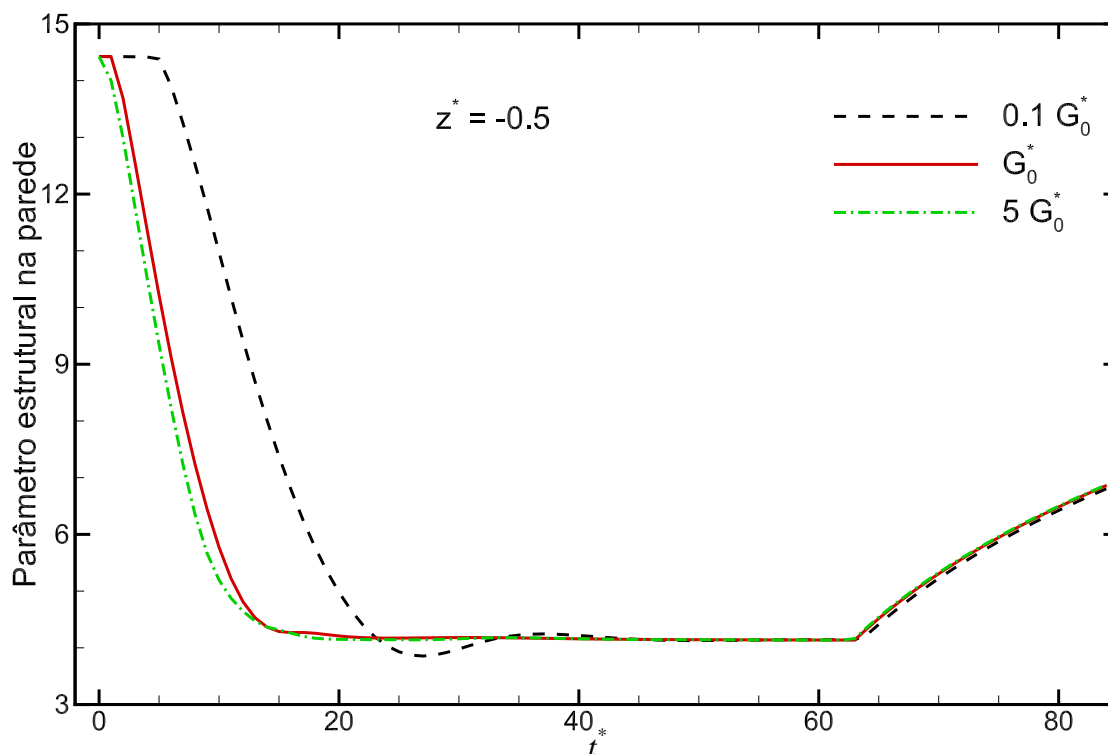


Figura 6.26 – Evolução temporal do parâmetro estrutural na parede tubo na posição  $z^* = -0,5$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de  $G_0^*$ .

o material não se encontra gelificado. Percebe-se que quanto menos estruturado, mais rapidamente o gradiente linear de pressão, representado pela Equação (6.18), é alcançado. Por fim, verifica-se, pelo detalhe entre 60 e 85, que o comportamento de recuperação após a bomba ser desligada é similar para todos os casos tixotrópicos. Isso acontece porque o nível estrutural anterior à interrupção de vazão é praticamente o mesmo.

A Figura 6.28 ilustra a comparação da evolução temporal do parâmetro estrutural da parede para a entrada e a saída do tubo variando  $\lambda_{t=0}$ . Para os casos com 100 e 50% de estruturação, o material se quebra e atinge o valor de equilíbrio. Já para 25%, a estrutura se recupera antes de atingir o equilíbrio. Nesse caso, percebe-se que a recuperação da estrutura é idêntica para a entrada e saída do espaço anular até o instante  $t^* = 4$ . Quando a bomba é desligada, como o estado estrutural é igual, a reestruturação do material é idêntica.

A Figura 6.29 mostra a comparação da evolução temporal dos perfis radiais de tensão de cisalhamento na posição localizada à 10% da entrada do tubo. Nota-se que nos instantes iniciais a distribuição de tensão se propaga da parede para o centro. Para o caso de 25% de estruturação, nos instantes  $t^* = 1$  e 2, o perfil possui duas inclinações similares. Mas, imediatamente antes da bomba ser desligada, forma-se um perfil linear tanto para 25 quanto para 50% de  $\lambda_0$ . Resultados parecidos são observados no caso do espaço anular. Percebe-se que quanto mais desestruturado, mais rapidamente o material tende ao comportamento

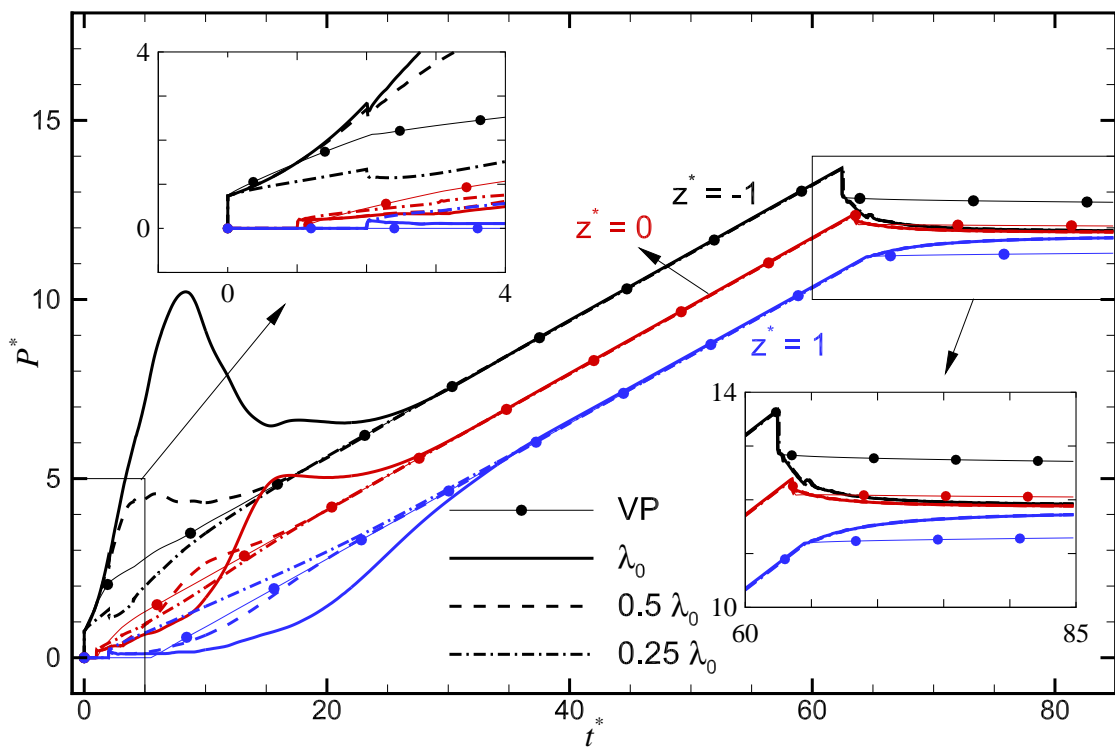


Figura 6.27 – Evolução temporal da pressão nas posições  $z^* = -1, 0$  e  $1$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de  $\lambda_{t=0}$ .

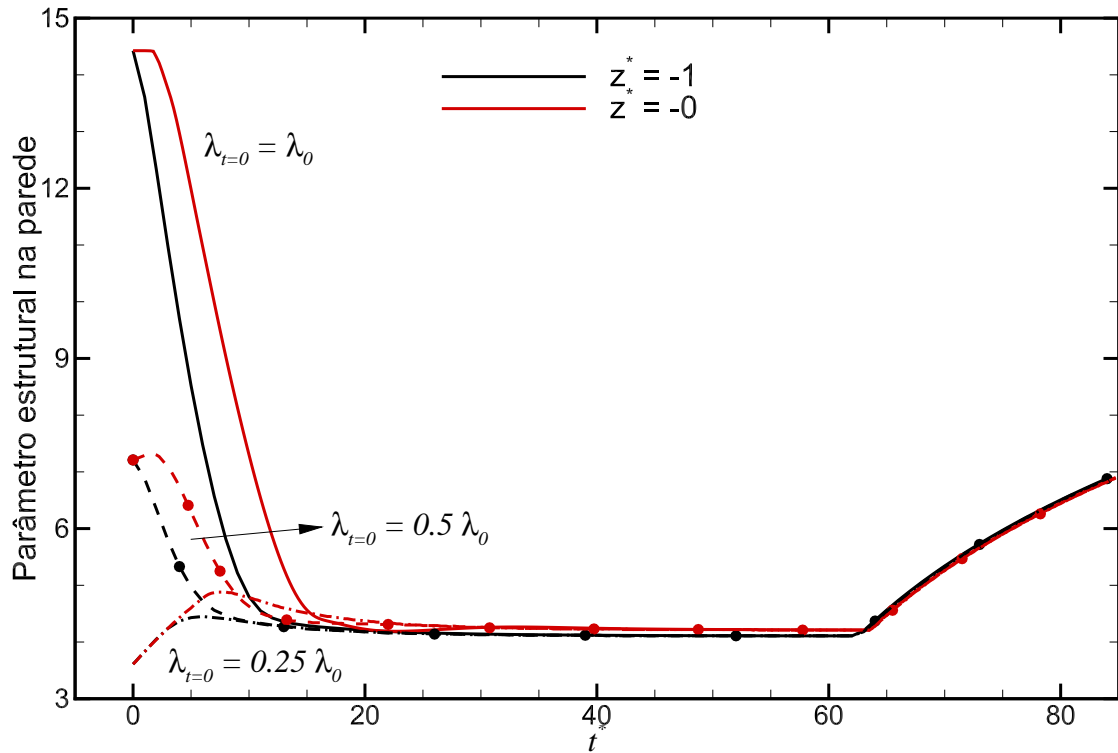


Figura 6.28 – Evolução temporal do parâmetro estrutural da parede na entrada e saída do tubo para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes valores de  $\lambda_{t=0}$ .

quase linear de tensão.

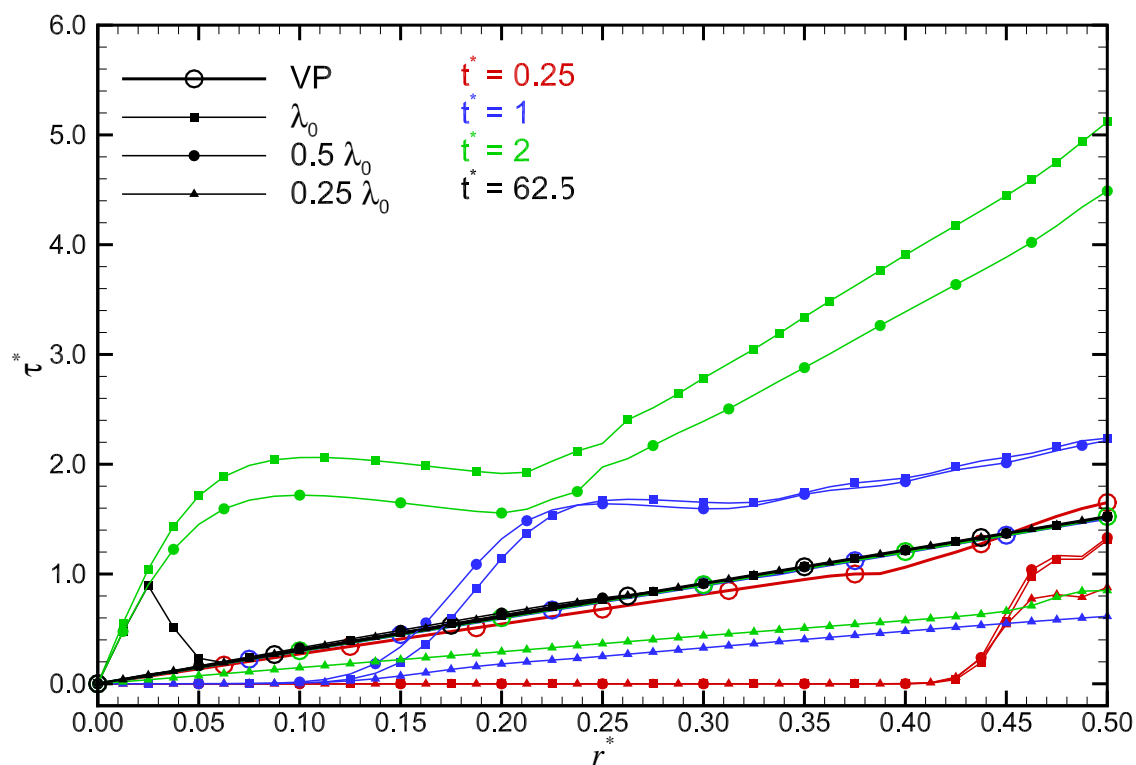


Figura 6.29 – Evolução temporal dos perfis radiais de tensão na posição  $z^* = -0,9$  para os fluidos VP (sem tixotropia) e EVPT (com tixotropia) para diferentes parâmetros estruturais iniciais.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram desenvolvidos dois modelos matemáticos para simular o escoamento compressível e transitório de fluidos de perfuração. Os modelos permitem avaliar o reinício do escoamento e a transmissão de pressão durante uma operação com o poço fechado.

Os modelos se diferenciam dos trabalhos anteriores por relaxarem a hipótese de que a tensão varia linearmente na direção radial, por considerar a tixotropia do fluido de perfuração e a geometria completa da coluna de perfuração e do espaço anular formado entre a coluna e a parede do poço. Cada modelo é resolvido através de um método: volumes finitos e das características. O primeiro tem as equações da conservação da massa, de estado, da quantidade de movimento e constitutiva discretizadas e necessita de um processo iterativo para cada instante de tempo. Um critério de convergência obtido através do resíduo da equação da conservação da massa deve ser atingido para obter a solução. Além disso, um critério de estabilidade deve ser obedecido para evitar oscilações e dispersões numéricas. O segundo faz uma combinação linear dessas equações para gerar duas matrizes tridiagonais que são resolvidas pelo método TDMA. Nesse caso, o processo não é iterativo.

A validação dos modelos foi precedida de uma adimensionalização do caso newtoniano e da realização de testes para garantir a independência das malhas axial e radial e dos critérios de convergência e estabilidade (os últimos apenas quando utilizou-se o método dos volumes finitos). A comparação com a solução analítica (unidimensional e adota hipótese de distribuição linear de tensão de cisalhamento ao longo do raio) mostrou que em casos de baixa dissipação os resultados se afastam, sendo que os modelos propostos produzem resultados mais distorcidos e levam menos tempo para atingir o equilíbrio. Para casos com alta dissipação, os resultados analítico e numérico se aproximam. Em seguida, foram realizadas validações com resultados experimentais de Holmboe e Rouleau (1967) para o golpe de aríete (água e óleo) e de Taquipe para transmissão de pressão (água). Os modelos mostraram boa capacidade preditiva para esses casos de baixa dissipação. Tanto a frequência quanto a amplitude de oscilação apresentaram boa concordância com os valores medidos. Os modelos utilizando fluido Lei de Potência foram verificados através da comparação com os resultados numéricos de Wahba (2013). Os resultados obtidos são muito próximos aos desse autor. Então uma análise dos modelos foi feita e o modelo discretizado pelo método das características (Modelo 2) foi selecionado para ser utilizado na sessão de resultados, devido ao menor tempo computacional e menor efeito de difusão e dispersão numérica.

Com o modelo validado, partiu-se para a análise da propagação da onda de pressão durante a pressurização de um poço confinado comparando quatro tipos de fluido: Lei

de Potência, Bingham, Herschel-Bulkley e Mendes e Thompson (2013) (sem tixotropia – VP). Verificou-se que o primeiro modelo (pseudoplástico) transmite a pressão enquanto que os outros (viscoplásticos) não tem uma transmissão acentuada após o encerramento do bombeio de fluido para dentro do poço. Esse efeito acontece porque em modelos viscoplásticos, o escoamento cessa assim que a tensão fica abaixo da tensão limite de escoamento. Portanto, logo que a bomba é desligada, o fluido para de se movimentar. Já fluidos pseudoplásticos não possuem tensão limite de escoamento e, portanto, a mesma variação de pressão é verificada ao longo de toda a geometria coluna-poço.

Em seguida, foi realizada uma investigação do efeito da tixotropia do fluido na transmissão de pressão utilizando o modelo original de Mendes e Thompson (2013) – EVP. Além disso, foi conduzida uma análise de sensibilidade do tempo característico, do módulo de elasticidade e do parâmetro estrutural inicial. Em síntese, observou-se que:

- O gradiente temporal de pressão mostrou-se dependente somente da vazão de entrada e da compressibilidade do fluido, sendo independente da tixotropia;
- Uma pressão de quebra é necessária para desestruturar o fluido com tixotropia;
- O efeito tixotrópico aumenta o tempo necessário para cessar o escoamento e a transmissão de pressão;
- A diminuição do tempo característico adimensional faz com que as propriedades do fluido variem mais rapidamente, reduzindo a pressão e o tempo de quebra da estrutura gelificada. Além disso, a estrutura do gel se recupera mais rapidamente após a bomba ser desligada, fazendo com que o movimento do fluido cesse em menor tempo e, assim, diminuindo a transmissão de pressão;
- O aumento do módulo de elasticidade implica em: maior rigidez do material, e portanto, aumento da pressão e diminuição do tempo de quebra da estrutura do gel. A transmissão de pressão também é mais rápida após a bomba ser desligada devido à diminuição dos tempos de retardo e relaxação;
- Dependendo do nível de estruturação inicial do material, quando o escoamento começa pode haver quebra (nível mais alto) ou recuperação (nível menor) da estrutura do material;
- Um nível estrutural inicial menor faz com que o pico de pressão devido à quebra do material diminua, mas não causa efeitos depois que a bomba é desligada;
- O perfil de tensão nem sempre é linear nos casos de tixotropia. Nos casos em que o parâmetro estrutural inicial está próximo do valor de regime permanente, o perfil é linear;

- A comparação com os dados de campo mostrou que o fluido de perfuração utilizado possuía pouco gel, pois os resultados com o modelo viscoplástico produziram resultados satisfatórios. A inclusão da tixotropia gerou picos de pressão devido à quebra de gel, porém isso não foi verificado experimentalmente.

## 7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para trabalhos futuros, sugere-se:

- Consideração das perdas de carga localizadas e da broca na região do acoplamento;
- Modelagem bidimensional do problema com a consideração da equação radial da quantidade de movimento para tubulações com pequena razão de aspecto;
- Incorporação dos efeitos de mudança de temperatura ao longo do escoamento;
- Calibração mais adequada do modelo de tixotropia.

# REFERÊNCIAS

- ALEXANDROU, A. N.; FLORIDES, G. C.; GEORGIU, G. C. Squeeze flow of semi-solid slurries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 193, p. 103–115, 2013.
- ARDAKANI, H. A.; MITSOULIS, E.; HATZIKIRIAKOS, S. G. Thixotropic flow of toothpaste through extrusion dies. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 166, n. 21, p. 1262–1271, 2011.
- BARNES, H. A. Thixotropy—a review. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 70, n. 1, p. 1–33, 1997.
- BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R.; HASSAGER, O. *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*. [S.l.]: John Wiley and Sons Inc., New York, NY, 1987.
- BIRD, R. B.; DAI, G.; YARUSSO, B. J. The rheology and flow of viscoplastic materials. *Rev. Chem. Eng*, v. 1, n. 1, p. 1–70, 1983.
- BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. [S.l.]: Courier Corporation, 2001.
- CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. [S.l.]: John Wiley & Sons. B, 1985.
- CARREAU, P. J. *Rheological equations from molecular network theories*. [S.l.]: University of Wisconsin–Madison, 1968.
- CHANG, C.; NGUYEN, Q. D.; RØNNINGSEN, H. P. Isothermal start-up of pipeline transporting waxy crude oil. *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Elsevier, v. 87, n. 2, p. 127–154, 1999.
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 100, n. 1, p. 32–74, 1928.
- COUSSOT, P.; LEONOV, A.; PIAU, J. Rheology of concentrated dispersed systems in a low molecular weight matrix. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 46, n. 2, p. 179–217, 1993.
- COUSSOT, P.; NGUYEN, Q.; HUYNH, H.; BONN, D. Viscosity bifurcation in thixotropic, yielding fluids. *Journal of Rheology (1978-present)*, The Society of Rheology, v. 46, n. 3, p. 573–589, 2002.
- DARLEY, H. C.; GRAY, G. R. *Composition and properties of drilling and completion fluids*. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 1988.
- DAVIDSON, M. R.; NGUYEN, Q. D.; CHANG, C.; RØNNINGSEN, H. P. A model for restart of a pipeline with compressible gelled waxy crude oil. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 123, n. 2, p. 269–280, 2004.
- DEUS, H. P. A. de; DUPIM, G. S. On behavior of the thixotropic fluids. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 6, p. 478–485, 2013.



- DULLAERT, K.; MEWIS, J. A structural kinetics model for thixotropy. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 139, n. 1, p. 21–30, 2006.
- FORTUNA, A. de O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. [S.l.]: Edusp, 2000.
- GABARDO, T. *Avaliação de Modelos de Tixotropia Aplicados a Fluidos de Perfuração*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil, 2013.
- GHIDAOU, M. S.; ZHAO, M.; MCINNIS, D. A.; AXWORTHY, D. H. A review of water hammer theory and practice. *Applied Mechanics Reviews*, American Society of Mechanical Engineers, v. 58, n. 1, p. 49–76, 2005.
- HERSCHEL, W.; BULKLEY, R. Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions. In: *Am. Soc. Test Proc.* [S.l.: s.n.], 1926. v. 26, n. 2, p. 621–633.
- HOLMBOE, E.; ROULEAU, W. The effect of viscous shear on transients in liquid lines. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 89, n. 1, p. 174–180, 1967.
- HOUSKA, M. *Engineering aspects of the rheology of thixotropic liquids*. Tese (Doutorado) — Faculty of Mechanical Engineering, Czech Technical University of Prague, Prague, Czech Republic, 1981.
- KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. [S.l.: s.n.], 2006.
- LUMMUS, J. L.; AZAR, J. J. *Drilling fluids optimization: a practical field approach*. [S.l.]: Pennwell Books, Tulsa, OK, 1986.
- MACHADO, J. C. V. *Reologia e Escoamento de Fluidos—Ênfase na Indústria de Petróleo; 2ª Edição*. [S.l.: s.n.], 2002.
- MENDES, P. R. de S. Modeling the thixotropic behavior of structured fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 164, n. 1, p. 66–75, 2009.
- MENDES, P. R. de S. Thixotropic elasto-viscoplastic model for structured fluids. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 7, n. 6, p. 2471–2483, 2011.
- MENDES, P. R. de S.; THOMPSON, R. L. A unified approach to model elasto-viscoplastic thixotropic yield-stress materials and apparent yield-stress fluids. *Rheologica Acta*, Springer, v. 52, n. 7, p. 673–694, 2013.
- MOORE, F. The rheology of ceramic slips and bodies. *Trans. Br. Ceram. Soc.*, v. 58, p. 470–494, 1959.
- MUJUMDAR, A.; BERIS, A. N.; METZNER, A. B. Transient phenomena in thixotropic systems. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 102, n. 2, p. 157–178, 2002.
- NEGRÃO, C. O.; FRANCO, A. T.; ROCHA, L. L. A weakly compressible flow model for the restart of thixotropic drilling fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 166, n. 23, p. 1369–1381, 2011.

- OLIVEIRA, G. M.; FRANCO, A. T.; NEGRÃO, C. O. Mathematical model for viscoplastic fluid hammer. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 138, n. 1, p. 011301, 2016.
- OLIVEIRA, G. M.; NEGRÃO, C. O.; FRANCO, A. T. Pressure transmission in bingham fluids compressed within a closed pipe. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 169, p. 121–125, 2012.
- OLIVEIRA, G. M. D.; ROCHA, L. L. V. da; FRANCO, A. T.; NEGRÃO, C. O. Numerical simulation of the start-up of bingham fluid flows in pipelines. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 165, n. 19, p. 1114–1128, 2010.
- OLIVEIRA, G. M. de. *Reinício da Circulação de Fluidos de Perfuração em Espaços Anulares Horizontais*. Monografia (Projeto Final de Curso) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil, 2008.
- OLIVEIRA, G. M. de. *Modelagem da propagação de pressão no reinício do escoamento de fluidos de perfuração não gelificados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil, 2011.
- OLIVEIRA, G. M. de; FRANCO, A. T.; NEGRAO, C. O.; MARTINS, A. L.; SILVA, R. A. Modeling and validation of pressure propagation in drilling fluids pumped into a closed well. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 103, p. 61–71, 2013.
- OLIVEIRA, G. M. de; NEGRÃO, C. O. The effect of compressibility on flow start-up of waxy crude oils. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 220, p. 137–147, 2015.
- PAPANASTASIOU, T. C. Flows of materials with yield. *Journal of Rheology (1978-present)*, The Society of Rheology, v. 31, n. 5, p. 385–404, 1987.
- PATANKAR, S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. [S.l.]: CRC Press, 1980.
- PETROBRAS. *Relatório Anual de 2007*. [S.l.], 2007. Disponível em: <[www.petrobras.com.br](http://www.petrobras.com.br)>.
- PETROBRAS. 2013. Disponível em: <[www.petrobras.com.br](http://www.petrobras.com.br)>. Acesso em: 20/06/2013.
- ROCHA, L. L. V. da. *Modelagem do reinício do escoamento de um fluido de perfuração tixotrópico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil, 2010.
- ROUSSEL, N. A thixotropy model for fresh fluid concretes: theory, validation and applications. *Cement and Concrete Research*, Elsevier, v. 36, n. 10, p. 1797–1806, 2006.
- ROUSSEL, N.; ROY, R. L.; COUSSOT, P. Thixotropy modelling at local and macroscopic scales. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 117, n. 2, p. 85–95, 2004.
- SANTOS, O. L. A. Segurança de poço em lâminas de água ultraprofundas. *Anais do I Encontro Nacional de Hidráulica de Perfuração e Completação de Poços de Petróleo e Gás, Domingos Martins-ES*, v. 29, n. 08, 2006.
- SCHLUMBERGER. *Mud Cycle*. 2013. Disponível em: <<http://www.seed.slb.com>>. Acesso em: 20/06/2013.

- SOTO, H. P.; MARTINS-COSTA, M. L.; FONSECA, C.; FREY, S. A numerical investigation of inertia flows of bingham-papanastasiou fluids by an extra stress-pressure-velocity galerkin least-squares method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 32, n. SPE, p. 450–460, 2010.
- STREETER, V. L.; LAI, C. Water-hammer analysis including fluid friction. *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, v. 88, n. 3, p. 79–112, 1962.
- TANG, H. S.; KALYON, D. M. Estimation of the parameters of herschel-bulkley fluid under wall slip using a combination of capillary and squeeze flow viscometers. *Rheologica acta*, Springer, v. 43, n. 1, p. 80–88, 2004.
- TAZRAEI, P.; RIASI, A. Quasi-two-dimensional numerical analysis of fast transient flows considering non-newtonian effects. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 138, n. 1, p. 011203, 2016.
- TAZRAEI, P.; RIASI, A.; TAKABI, B. The influence of the non-newtonian properties of blood on blood-hammer through the posterior cerebral artery. *Mathematical biosciences*, Elsevier, v. 264, p. 119–127, 2015.
- THOMAS, J. E. *Fundamentos de engenharia de petróleo*. [S.l.]: Interciência, 2001.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. [S.l.]: Pearson Education, 2007.
- VINAY, G.; WACHS, A.; AGASSANT, J.-F. Numerical simulation of weakly compressible bingham flows: the restart of pipeline flows of waxy crude oils. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 136, n. 2, p. 93–105, 2006.
- VINAY, G.; WACHS, A.; FRIGAARD, I. Start-up transients and efficient computation of isothermal waxy crude oil flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 143, n. 2, p. 141–156, 2007.
- WACHS, A.; VINAY, G.; FRIGAARD, I. A 1.5 d numerical model for the start up of weakly compressible flow of a viscoplastic and thixotropic fluid in pipelines. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 159, n. 1, p. 81–94, 2009.
- WAHBA, E. Runge–kutta time-stepping schemes with tvd central differencing for the water hammer equations. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 52, n. 5, p. 571–590, 2006.
- WAHBA, E. Non-newtonian fluid hammer in elastic circular pipes: Shear-thinning and shear-thickening effects. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier, v. 198, p. 24–30, 2013.
- WATTERS, G. Z. *Analysis and control of unsteady flow in pipelines*. [S.l.]: Butterworths Boston, 1984.
- WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003.
- WYLIE, E. B.; STREETER, V. L. Fluid transients. *New York, McGraw-Hill International Book Co.*, 1978. 401 p., v. 1, 1978.

---

YZIQUEL, F.; CARREAU, P.; MOAN, M.; TANGUY, P. Rheological modeling of concentrated colloidal suspensions. *Journal of Non-Newtonian fluid mechanics*, Elsevier, v. 86, n. 1, p. 133–155, 1999.

ZHAO, M.; GHIDAOU, M. S. Efficient quasi-two-dimensional model for water hammer problems. *Journal of Hydraulic Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 129, n. 12, p. 1007–1013, 2003.

## APÊNDICE A – Análise de Escala

Nesse apêndice, uma análise de escala das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento é apresentada. Então, são discutidos quais termos podem ser negligenciados.

A partir da hipótese de escoamento axisimétrico, a equação da conservação da massa, Equação (3.17), pode ser simplificada como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Considerando que os seguintes termos da equação acima possuem a ordem de  $\rho \sim \rho_0$ ,  $t \sim L/c$ ,  $r \sim D$ ,  $v \sim V_R$ ,  $u \sim V_Z$  e  $z \sim L$ , da análise de escala resulta:

$$\frac{\rho_0 c}{L} \sim \frac{1}{D} \frac{1}{D} (D \rho_0 V_R), \frac{1}{L} (\rho_0 V_Z) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\rho_0 c}{L} \sim \frac{\rho_0 V_R}{D}, \frac{\rho_0 V_Z}{L} \quad (\text{A.3})$$

Portanto, a relação entre velocidade média radial por diâmetro e velocidade média axial por comprimento é da mesma ordem:

$$\frac{V_R}{D} \sim \frac{V_Z}{L} \quad (\text{A.4})$$

Utilizando a hipótese de escoamento axisimétrico na equação da quantidade de movimento, Equação (3.10), resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u u) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g \quad (\text{A.5})$$

Considerando que a escala da pressão é dada por  $P \sim P_0$ , através da análise de escala, chega-se à:

$$\frac{c}{L} (\rho_0 V_Z), \frac{1}{D} \frac{1}{D} (D \rho_0 V_R V_Z), \frac{1}{L} (\rho_0 V_Z V_Z) \sim -\frac{P_0}{L}, -\frac{1}{D} \frac{1}{D} (D \tau_{rz}), -\frac{\tau_{zz}}{L}, \rho_0 g \quad (\text{A.6})$$

As tensões  $\tau_{rz}$  e  $\tau_{zz}$  podem ser escritas como:

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\tau_{zz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A.8})$$

A análise de escala da Equação (A.7) mostra que:

$$\tau_{rz} \sim \mu \frac{V_Z}{D}, \frac{V_R}{L} \quad (\text{A.9})$$

Considerando que a velocidade radial é muito menor do que a velocidade axial e o comprimento muito maior do que o raio, o segundo termo da direita da Equação (A.7) pode ser desprezado e a tensão  $\tau_{rz}$  pode ser rescrita como:

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\text{A.10})$$

Substituindo as Equações A.10 e A.8 na Equação (A.6), chega-se à:

$$\frac{c}{L} (\rho_0 V_Z), \frac{1}{D} \frac{1}{D} (D \rho_0 V_R V_Z), \frac{1}{L} (\rho_0 V_Z V_Z) \sim -\frac{P_0}{L}, -\frac{1}{D} \frac{1}{D} \left( D \mu \frac{V_Z}{D} \right), -\frac{1}{L} \frac{\mu V_Z}{L}, \rho_0 g \quad (\text{A.11})$$

Simplificando:

$$\frac{\rho_0 V_Z c}{L}, \frac{\rho_0 V_R V_Z}{D}, \frac{\rho_0 V_Z V_Z}{L} \sim -\frac{P_0}{L}, -\frac{\mu V_Z}{D^2}, -\frac{\mu V_Z}{L^2}, \rho_0 g \quad (\text{A.12})$$

Dividindo os termos por  $\rho_0 V_Z c / L$ :

$$1, \frac{V_R L}{c D}, \frac{V_Z}{c} \sim -\frac{P_0}{\rho_0 V_Z c}, -\frac{\mu V_Z}{D^2} \frac{L}{\rho_0 V_Z c}, -\frac{\mu V_Z}{L^2} \frac{L}{\rho_0 V_Z c}, \rho_0 g \frac{L}{\rho_0 V_Z c} \quad (\text{A.13})$$

Rearranjando:

$$1, \frac{V_Z}{c}, \frac{V_Z}{c} \sim -\frac{P_0}{\rho_0 V_Z c}, -\frac{\mu}{D^2} \frac{L}{\rho_0 c}, -\frac{\mu}{L^2} \frac{L}{\rho_0 c}, g \frac{L}{V_Z c} \quad (\text{A.14})$$

Com a consideração que a velocidade média axial do fluido é muito menor do que a velocidade de propagação da onda de pressão, conclui-se que o número de Mach é muito menor do que um,  $Ma = V_Z / c \ll 1$ . Dessa forma, os termos não lineares da equação da quantidade de movimento, que são proporcionais ao Mach, podem ser negligenciados. Além disso, sabe-se que a razão de aspecto é muito menor do que um,  $D \ll L$ , portanto, mostra-se que:

$$-\frac{\mu}{D^2} \frac{L}{\rho_0 c} \sim -\frac{\mu}{L^2} \frac{L}{\rho_0 c} \rightarrow \frac{1}{D^2} \gg \frac{1}{L^2} \quad (\text{A.15})$$

Como a tensão de cisalhamento perpendicular à direção radial exercida na direção  $z$  é maior do que a tensão normal na direção axial, conclui-se que  $\tau_{zz}$  pode ser desprezado.

## APÊNDICE B – Solução Analítica

Nesse apêndice a solução analítica do modelo simplificado do escoamento laminar de um fluido newtoniano compressível em um tubo horizontal submetido a vazão constante na entrada e pressão nula na saída é apresentada. Para que seja possível obter essa solução o método da separação é aplicado e séries de Fourier são utilizadas (KREYSZIG, 2006).

As hipóteses adotadas para a solução são:

- (a) Fluido newtoniano com tensão de cisalhamento na parede modelada a partir do conceito de fator de atrito:

$$\tau_w = \frac{f\rho V^2}{2} \text{ e } f = \frac{16}{Re} \rightarrow \tau_w = \frac{8\mu V}{D} \quad (\text{B.1})$$

- (b) Escoamento horizontal;  
 (c) Fracamente compressível;  
 (d) Desprezando termos não lineares.

A partir dessas hipóteses, as equações da conservação da massa, Equação (3.17), e da quantidade de movimento, Equação (3.10), podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{32\mu V}{D^2} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Aplicando o conceito de compressibilidade, Equação (3.1), na Equação (B.2) chega-se a:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Derivando a Equação (B.3) em relação a  $t$  e a Equação (B.4) em relação a  $z$ , e subtraindo a primeira da segunda, tem-se:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho\alpha} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{32\mu}{\rho D^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Substituindo a velocidade da onda de propagação, Equação (3.22), e definindo uma nova constante  $M = \rho D^2 / 16\mu$ :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{2}{M} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.6})$$

A Equação (B.6) é classificada como uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Essa equação pode ser resolvida de diversas formas, porém as condições iniciais e de contorno interferem na maneira de solução (KREYSZIG, 2006).

Primeiramente, propõe-se uma solução para o campo de velocidades da forma:

$$V(z, t) = F(z)G(t) + V_{ent} \quad (\text{B.7})$$

Ressalta-se que a Equação (B.7) é representada pelo produto de duas funções independentes. Diferenciando essa equação em relação ao tempo duas vezes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = F\dot{G} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = F\ddot{G} \quad (\text{B.8})$$

Diferenciando a Equação (B.7) em relação à posição axial duas vezes:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = F'G \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = F''G \quad (\text{B.9})$$

Substituindo as Equações B.8 e B.9 na Equação (B.6), obtém-se:

$$F\ddot{G} = c^2F''G - \frac{2}{M}F\dot{G} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Separando as variáveis independentes e igualando os resultados a uma constante arbitrária  $N$ :

$$\frac{1}{c^2G} \left( \ddot{G} + \frac{2}{M}\dot{G} \right) = \frac{F''}{F} = N \quad (\text{B.11})$$

Da Equação (B.11) obtém-se duas equações ordinárias homogêneas:

$$F'' - NF = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\ddot{G} + \frac{2}{M}\dot{G} - c^2NG = 0 \quad (\text{B.13})$$

Fazendo  $N = -p^2$ , a solução geral da Equação (B.12) é da forma (KREYSZIG, 2006):

$$F(z) = C_1 \cos pz + C_2 \sin pz \quad (\text{B.14})$$

Das condições de contorno para a fronteira de entrada, pode-se obter a seguinte expressão:

$$V(z = 0, t) = V_{ent} \rightarrow F(0) = 0 \quad (\text{B.15})$$



Para satisfazer a condição de contorno, a Equação (B.12) deve possuir o seguinte coeficiente:

$$F(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (\text{B.16})$$

Para a posição de saída da tubulação,  $L$ , a pressão não varia na saída:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{z=L} = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{z=L} = GC_2 p \cos pL = 0 \\ F'(L) = 0 \rightarrow C_2 p \cos pL = 0 \rightarrow \cos pL = 0, C_2 \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Então:

$$p = \Omega_l = \frac{(2l-1)\pi}{2L}, \quad l = \text{inteiro} \quad (\text{B.18})$$

Fazendo,  $C_2 = 1$ , infinitas soluções podem ser obtidas:

$$F(z) = F_l(z) = \sin \Omega_l z \quad (\text{B.19})$$

A solução para  $G(t)$  vem da constante  $N$ :  $N = -p^2 = -\Omega_l^2$ . Assim, a Equação (B.13) fica:

$$\ddot{G} + \frac{2}{M}\dot{G} - (c\Omega_l)G = 0 \quad (\text{B.20})$$

Considerando que  $\omega_l^2 = (c\Omega_l)^2 - (1/M)^2$  e que  $\omega_l > 0$ , a solução da Equação (B.20) é (KREYSZIG, 2006):

$$G(t) = e^{-\frac{t}{M}} (C_3 \cos \omega_l t + C_4 \sin \omega_l t) \quad (\text{B.21})$$

A solução total é obtida através da superposição das soluções gerais, Equações B.19 e B.21. Assim, o campo de velocidades é dados por:

$$V(z, t) = V_{ent} + \sum_{l=1}^{\infty} F_l(z) G_l(t) \quad (\text{B.22})$$

Substituindo as soluções gerais:

$$V(z, t) = V_{ent} + e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} [\sin \Omega_l z (C_3 \cos \omega_l t + C_4 \sin \omega_l t)] \quad (\text{B.23})$$

Satisfazendo as condições iniciais:

$$V(z \neq 0, t = 0) = 0 \rightarrow \sum_{l=1}^{\infty} C_3 \sin \Omega_l z = -1 \quad (\text{B.24})$$

Analisando a Equação (B.24), verifica-se que  $C_3$  pode ser obtido a partir de uma série de Fourier em Seno:

$$C_3 = 2 \int_0^L \sin \Omega_l z dz = -\frac{2}{\Omega_l} \quad (\text{B.25})$$

Para a determinação de  $C_4$ , deve-se utilizar a condição de inicial de não variação temporal da pressão. Assim:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{2}{M\Omega_l} + \omega_l C_4 \right) \sin \Omega_l z \right] = 0 \quad (\text{B.26})$$

Assim, para qualquer valor de  $\sin \Omega_l z$ :

$$C_4 = -\frac{2}{M\omega_l\Omega_l} \quad (\text{B.27})$$

Substituindo os coeficientes das Equações B.25 e B.27 na Equação (B.23), chega-se a:

$$V(z, t) = V_{ent} \left\{ 1 + e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \sin \Omega_l z \left( -\frac{2}{\Omega_l} \cos \omega_l t - \frac{2}{M\omega_l\Omega_l} \sin \omega_l t \right) \right] \right\} \quad (\text{B.28})$$

Rearranjando os termos, obtém-se o campo de velocidades em função do tempo e espaço:

$$V(z, t) = V_{ent} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{l-1/2} \sin \frac{(l-1/2)\pi z}{L} \left( \cos \omega_l t + \frac{1}{M\omega_l} \sin \omega_l t \right) \right] \right\} \quad (\text{B.29})$$

Com a velocidade determinada, pode-se obter o campo de pressão através da equação da conservação da massa, Equação (B.30):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{B.30})$$

Substituindo a derivada parcial da velocidade em relação à  $z$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{2V_{ent}}{\alpha\pi} e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{\pi}{L} \cos \frac{(l-1/2)\pi z}{L} \left( \cos \omega_l t + \frac{1}{M\omega_l} \sin \omega_l t \right) \right] \quad (\text{B.31})$$

Integrando em relação ao tempo, considerando a constante de integração como  $f(z)$ :

$$P(z, t) = f(z) - \frac{2V_{ent}}{\alpha L} e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_l (M^2 \omega_l^2 + 1)} \cos \frac{(l-1/2) \pi z}{L} [(1 - M^2 \omega_l^2) \sin \omega_l t + 2M \omega_l \cos \omega_l t] \right\} \quad (\text{B.32})$$

Rearranjando:

$$P(z, t) = f(z) + \frac{2V_{ent}}{\alpha L} e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{c^2 \Omega_l^2} \cos \frac{(l-1/2) \pi z}{L} \left[ \left( \omega_l - \frac{1}{M^2 \omega_l} \right) \sin \omega_l t - \frac{2}{M} \cos \omega_l t \right] \right\} \quad (\text{B.33})$$

Substituindo  $\Omega_l$ :

$$P(z, t) = f(z) + \frac{2V_{ent} L}{\pi^2 \alpha c^2} e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(l-1/2)^2} \cos \frac{(l-1/2) \pi z}{L} \left[ \left( \omega_l - \frac{1}{M^2 \omega_l} \right) \sin \omega_l t - \frac{2}{M} \cos \omega_l t \right] \right\} \quad (\text{B.34})$$

Analisando a Equação (B.34), verifica-se a necessidade da determinação constante de integração. Sabe-se que esta deve expressar a distribuição de pressão na condição de regime permanente, uma vez que o termo exponencial tende a zero para tempos elevados. Desta forma, o campo de pressão em função do tempo e espaço é dado por:

$$P(z, t) = \frac{2V_{ent}}{M \alpha c^2} (L - z) + \frac{2V_{ent} L}{\pi^2 \alpha c^2} e^{-\frac{t}{M}} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(l-1/2)^2} \cos \frac{(l-1/2) \pi z}{L} \left[ \left( \omega_l - \frac{1}{M^2 \omega_l} \right) \sin \omega_l t - \frac{2}{M} \cos \omega_l t \right] \right\} \quad (\text{B.35})$$

# APÊNDICE C – Sensibilidade de Malha

Nesse apêndice são apresentadas as análises de sensibilidade de malha axial e radial para o segundo modelo utilizando os fluidos: Lei de Potência, Bingham, Herschel-Bulkley, Mendes (2009) e Mendes e Thompson (2013). Essas análises foram conduzidas para o caso de Taquipe. Portanto, a geometria, as propriedades do fluido e do escoamento são as apresentadas nas seções 6.1 e 6.3.

Os testes de malha mostraram que o ponto crítico se encontrava no instante,  $t_{set}$ , em que a bomba era desligada. Dessa forma, quando uma diferença de até 0,1% durante o refino de malha for alcançada, considera-se que os resultados são independentes da malha.

## C.1 Lei de Potência

### C.1.1 Malha Axial

Quatro divisões axiais distintas foram estudadas,  $N_Z = 200, 500, 1.000$  e  $2.000$ . Para cada um desses casos, o passo de tempo utilizado foi de, respectivamente,  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-4}$  e a malha axial foi mantida constante,  $N_R = 80$ . A Figura C.1 ilustra o resultado da evolução temporal da pressão para cada número de células axiais. Observa-se que o efeito da malha é mais pronunciado do que para o caso Newtoniano do Capítulo 5. Os instantes em que a bomba foi desligada para essas malhas foram de, respectivamente, 71,94; 72,46; 72,63; e 72,71 s. Portanto, uma diferença de 0,1% entre o tempo de interrupção da bomba para as malhas de 1.000 e 2.000 células é observada. Dessa forma, com uma malha axial de 1.000 células considera-se que os resultados são independentes.

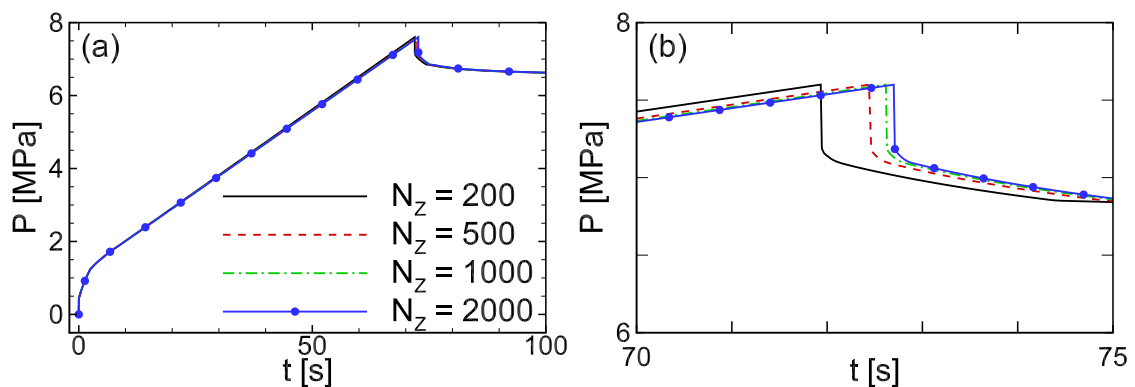


Figura C.1 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

### C.1.2 Malha Radial

Com base na malha axial de 1.000 células (passo de tempo de  $10^{-3}$  s), três valores para o número de células radiais,  $N_R$ , foram avaliados: 40, 80 e 160. A Figura C.2 ilustra os resultados da evolução temporal da pressão na entrada para o fluido Lei de Potência. Percebe-se que, a malha radial tem menor efeito do que a axial. A diferença entre o instante que a bomba foi desligada com uma malha de 40 e 160 células radiais é de 0,1%. E esse valor fica inferior a 0,03% com 80 células. Como a diferença no tempo computacional não é significativa, opta-se por utilizar uma malha com 80 volumes radiais.

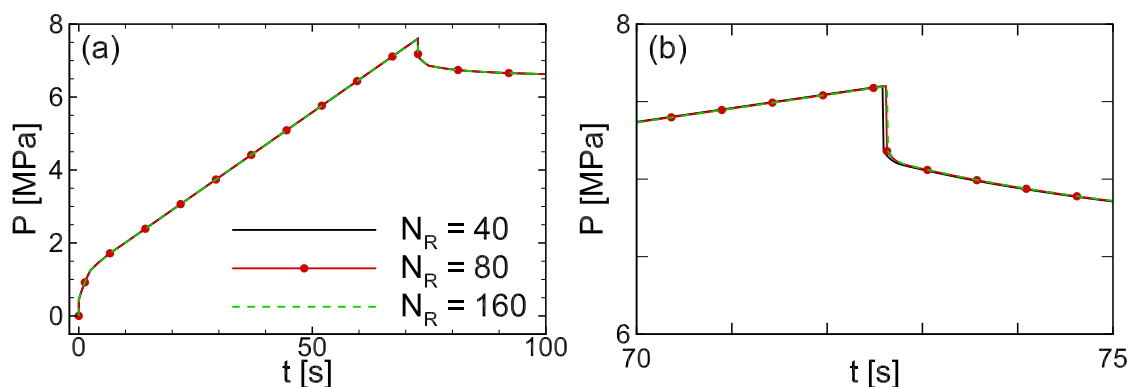


Figura C.2 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

## C.2 Bingham

### C.2.1 Malha Axial

Quatro divisões axiais distintas foram estudadas,  $N_Z = 200, 500, 1.000$  e  $2.000$ . Para cada um desses casos, o passo de tempo utilizado foi de, respectivamente,  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ ,  $2 \times 10^{-3}$ ,  $1 \times 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-4}$  e a malha axial foi mantida constante,  $N_R = 80$ . A Figura C.3 ilustra o resultado da evolução temporal da pressão para cada número de células axiais. Observa-se que o efeito da malha é mais pronunciado do que para o caso Newtoniano do Capítulo 5. Os instantes em que a bomba foi desligada para essas malhas foram de, respectivamente, 71,99; 72,53; 72,72; e 72,81 s. Portanto, uma diferença de 0,1% entre o tempo de interrupção da bomba para as malhas de 1.000 e 2.000 células é observada. Dessa forma, com uma malha axial de 1.000 células considera-se que os resultados são independentes.

### C.2.2 Malha Radial

Com base na malha axial de 1.000 células (passo de tempo de  $10^{-3}$  s), três valores para o número de células radiais,  $N_R$ , foram avaliados: 40, 80 e 160. A Figura C.4 ilustra

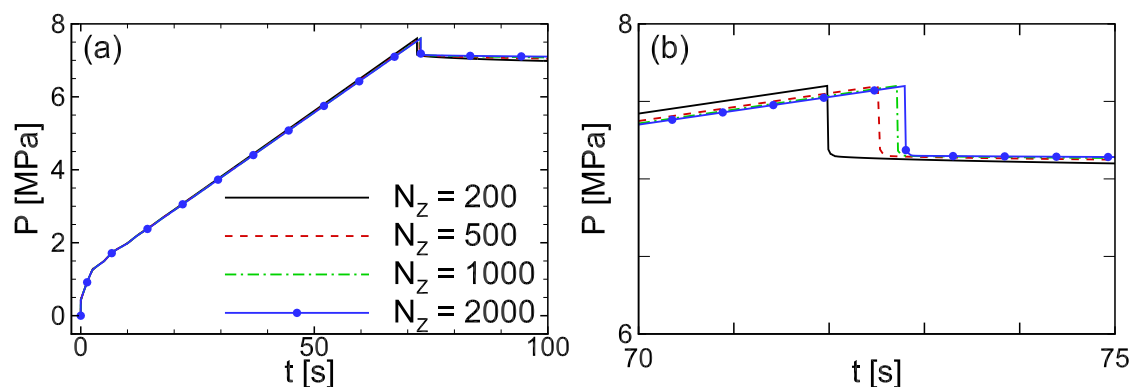


Figura C.3 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

os resultados da evolução temporal da pressão na entrada para o fluido Lei de Potência. Percebe-se que, a malha radial tem menor efeito do que a axial. A diferença entre o instante que a bomba foi desligada com uma malha de 40 e 160 células radiais é de 0,1%. E esse valor fica inferior a 0,04% com 80 células. Como a diferença no tempo computacional não é significativa, opta-se por utilizar uma malha com 80 volumes radiais.

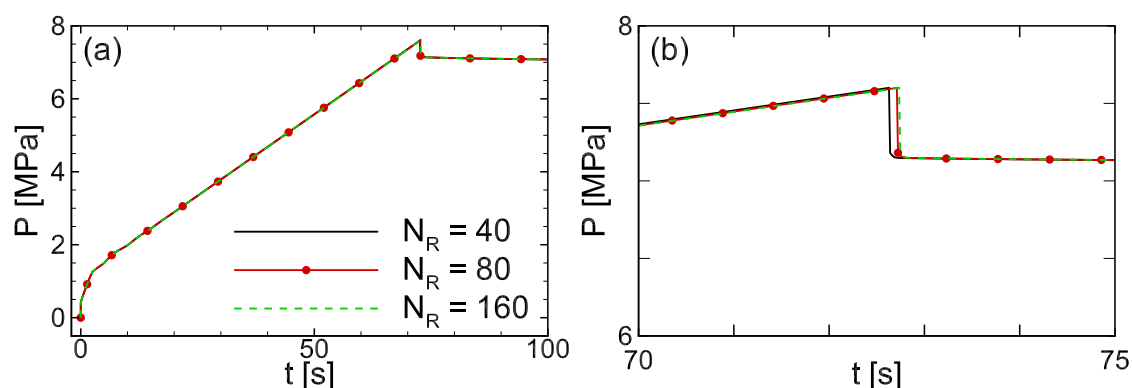


Figura C.4 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

## C.3 Herschel-Bulkley

### C.3.1 Malha Axial

Quatro divisões axiais distintas foram estudadas,  $N_Z = 200, 500, 1.000$  e  $2.000$ . Para cada um desses casos, o passo de tempo utilizado foi de, respectivamente,  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-4}$  e a malha axial foi mantida constante,  $N_R = 80$ . A Figura C.5 ilustra o resultado da evolução temporal da pressão para cada número de células axiais. Observa-se que o efeito da malha é mais pronunciado do que para o caso Newtoniano do Capítulo 5. Os instantes em que a bomba foi desligada para essas malhas foram de, respectivamente, 73,18; 73,69; 73,85; e 73,94 s. Portanto, uma diferença de 0,1% entre

o tempo de interrupção da bomba para as malhas de 1.000 e 2.000 células é observada. Dessa forma, com uma malha axial de 1.000 células considera-se que os resultados são independentes.

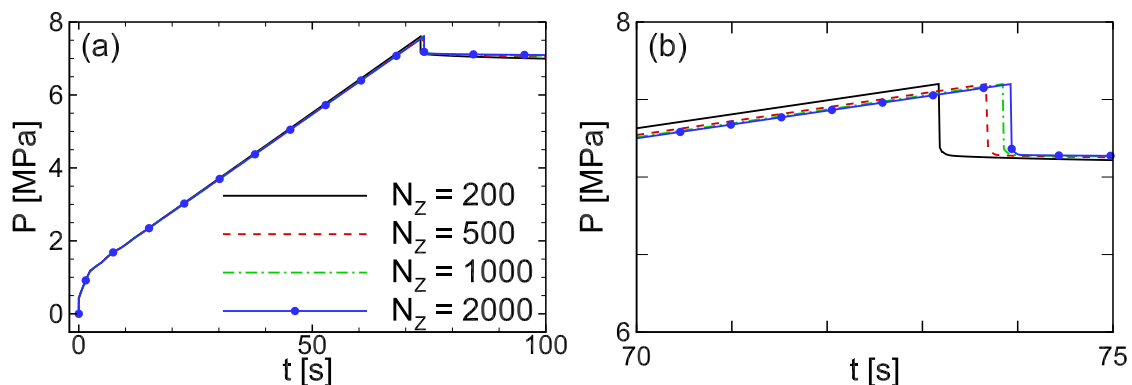


Figura C.5 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

### C.3.2 Malha Radial

Com base na malha axial de 1.000 células (passo de tempo de  $10^{-3}$  s), três valores para o número de células radiais,  $N_R$ , foram avaliados: 40, 80 e 160. A Figura C.6 ilustra os resultados da evolução temporal da pressão na entrada para o fluido Lei de Potência. Percebe-se que, a malha radial tem menor efeito do que a axial. A diferença entre o instante que a bomba foi desligada com uma malha de 40 e 160 células radiais é de 0,1%. E esse valor fica inferior a 0,03% com 80 células. Como a diferença no tempo computacional não é significativa, opta-se por utilizar uma malha com 80 volumes radiais.

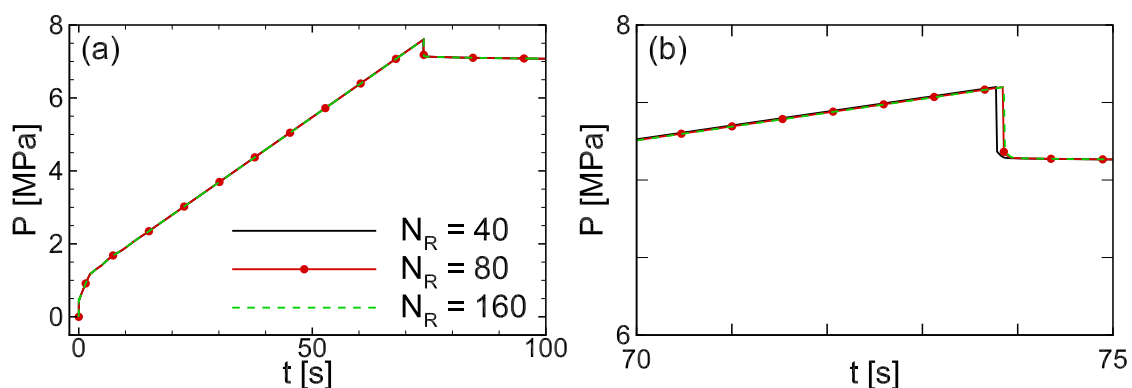


Figura C.6 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

## C.4 Mendes e Thompson (2013) – Sem Tixotropia

### C.4.1 Malha Axial

Quatro divisões axiais distintas foram estudadas,  $N_Z = 200, 500, 1.000$  e  $2.000$ . Para cada um desses casos, o passo de tempo utilizado foi de, respectivamente,  $\Delta t^* = 5 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-4}$  e a malha axial foi mantida constante,  $N_R = 80$ . A Figura C.7 ilustra o resultado da evolução temporal da pressão para cada número de células axiais. Observa-se que o efeito da malha é mais pronunciado do que para o caso Newtoniano do Capítulo 5. Os instantes em que a bomba foi desligada para essas malhas foram de, respectivamente, 61,98; 62,42; 62,55; e 62,62. Portanto, uma diferença de 0,1% entre o tempo de interrupção da bomba para as malhas de 1.000 e 2.000 células é observada. Dessa forma, com uma malha axial de 1.000 células considera-se que os resultados são independentes.

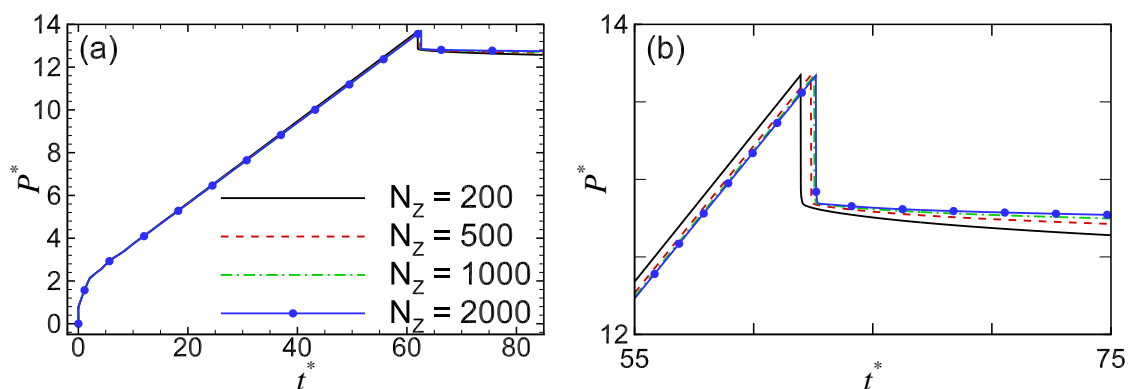


Figura C.7 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

### C.4.2 Malha Radial

Com base na malha axial de 1.000 células (passo de tempo de  $10^{-3}$ ), três valores para o número de células radiais,  $N_R$ , foram avaliados: 40, 80 e 160. A Figura C.8 ilustra os resultados da evolução temporal da pressão na entrada para o fluido Lei de Potência. Percebe-se que, a malha radial tem menor efeito do que a axial. A diferença entre o instante que a bomba foi desligada com uma malha de 40 e 160 células radiais é de 0,1%. E esse valor fica inferior a 0,03% com 80 células. Como a diferença no tempo computacional não é significativa, opta-se por utilizar uma malha com 80 volumes radiais.



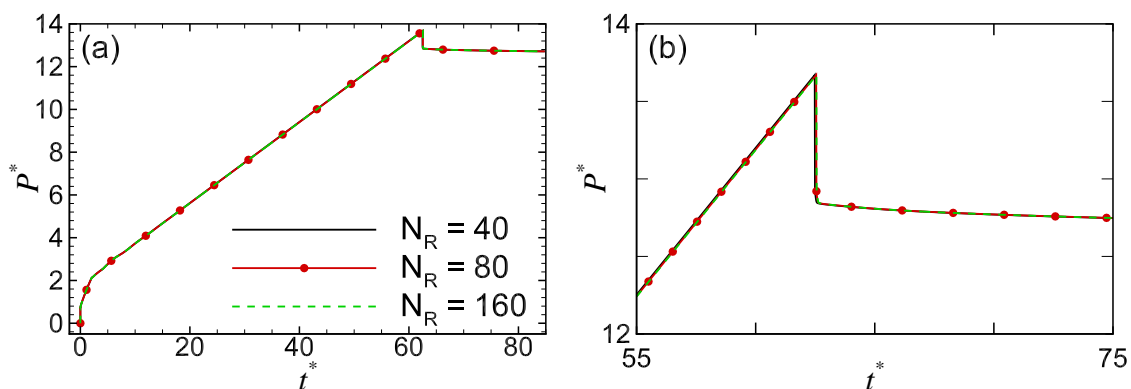


Figura C.8 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

## C.5 Mendes e Thompson (2013) – Com Tixotropia

### C.5.1 Malha Axial

Quatro divisões axiais distintas foram estudadas,  $N_Z = 1.000$  e  $2.000$ . Para cada um desses casos, o passo de tempo utilizado foi de, respectivamente,  $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$  e  $5 \times 10^{-4}$  e a malha axial foi mantida constante,  $N_R = 80$ . A Figura C.1 ilustra o resultado da evolução temporal da pressão para cada número de células axiais. Observa-se que o efeito da malha é mais pronunciado do que para o caso Newtoniano do Capítulo 5. Os instantes em que a bomba foi desligada para essas malhas foram de, respectivamente, 62,36 e 62,53. Portanto, uma diferença de 0,1% entre o tempo de interrupção da bomba para as malhas de 1.000 e 2.000 células é observada. Dessa forma, com uma malha axial de 1.000 células considera-se que os resultados são independentes.

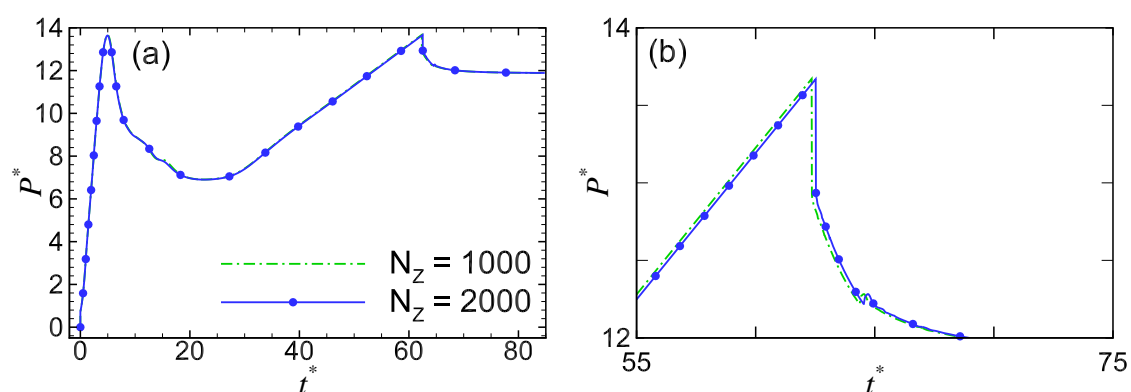


Figura C.9 – Análise da malha axial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.

### C.5.2 Malha Radial

Com base na malha axial de 1.000 células (passo de tempo de  $10^{-3}$ ), três valores para o número de células radiais,  $N_R$ , foram avaliados: 40, 80 e 160. A Figura C.2 ilustra

os resultados da evolução temporal da pressão na entrada para o fluido Lei de Potência. Percebe-se que, a malha radial tem menor efeito do que a axial. A diferença entre o instante que a bomba foi desligada com uma malha de 40 e 160 células radiais é de 0,1%. E esse valor fica inferior a 0,03% com 80 células. Como a diferença no tempo computacional não é significativa, opta-se por utilizar uma malha com 80 volumes radiais.

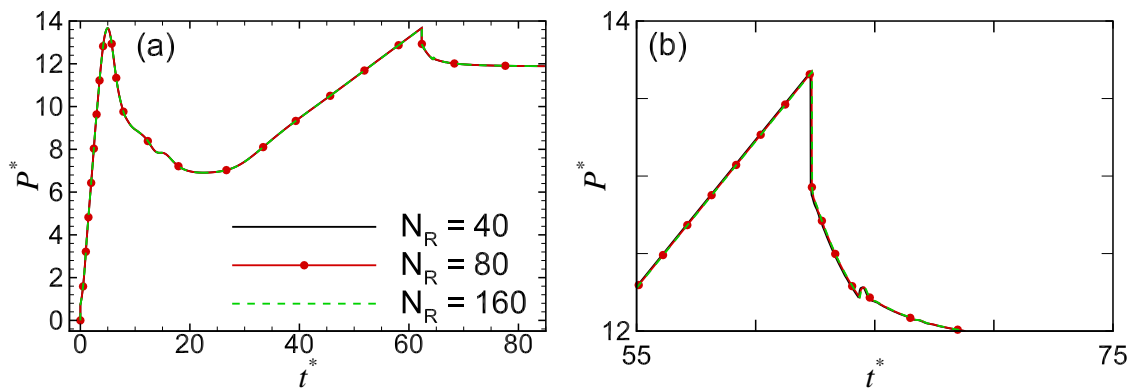


Figura C.10 – Análise da malha radial na evolução temporal da pressão na entrada do tubo para o fluido de Lei de Potência.