

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E  
DE MATERIAIS**

**WALDIR MARIANO MACHADO JUNIOR**

**Aplicação da Metodologia Numérica “Fast Bounds Crack” para uma  
Estimativa Eficiente da Evolução do Tamanho de Trinca**

Dissertação

CURITIBA

2015

**WALDIR MARIANO MACHADO JUNIOR**

**Aplicação da Metodologia Numérica “Fast Bounds Crack” para uma  
Estimativa Eficiente da Evolução do Tamanho de Trinca**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia – Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Claudio R. Ávila da S. Jr.  
Co-orientador: Prof. Dr. José A. Andres Velasquez Alegre.

CURITIBA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

M149a Machado Junior, Waldir Mariano  
2015 Aplicação da metodologia numérica "fast bounds crack"  
para uma estimativa eficiente da evolução do tamanho de trinca /  
Waldir Mariano Machado Junior.-- 2015.  
65 f. : il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal  
do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica  
e de Materiais, Curitiba, 2015  
Bibliografia: f. 57-59

1. Metais - Fadiga. 2. Resistência de materiais - Ensaios. 3.  
Materiais - Testes dinâmicos. 4. Métodos numéricos em enge-  
nharia. 5. Engenharia mecânica - Dissertações. I. Silva Júnior,  
Cláudio Roberto Ávila da, orient. II. Velásquez Alegre, José An-  
tônio Andrés, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
e de Materiais. IV. Título.

CDD: Ed. 22 -- 620.1

Dedico este trabalho a minha família por todo amor e carinho que me deram.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus. Agradeço a minha mãe, Maria Dolores de Marchi Machado, pela existência e apoio que proporcionou em toda a minha vida. Agradeço a minha esposa e filho, Daniele Cristina das Neves e Benjamin das Neves Machado, por todo amor, carinho e paciência durante esses dois anos de estudo e trabalho. Agradeço ao meu orientador, prof. Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr., grande exemplo, pelo suporte, orientação e, principalmente, paciência, essenciais para o desenvolvimento desse trabalho. Agradeço ao meu co-orientador, prof. Dr. José A. Andres Velasquez Alegre, pela grande ajuda e disponibilidade de tempo. Agradeço a minha sogra, Terezinha Trevisan das Neves, por toda ajuda durante as minhas incontáveis viagens até Curitiba. Agradeço aos meus colegas e professores da UTFPR com quem vivenciei esse período prazeroso. Agradeço aos meus amigos que me deram grande apoio. Agradeço ao SENAI-PR pelo apoio e suporte fornecidos durante a realização desse trabalho.

“A vida nem sempre é como  
sonhamos, mas nem sempre  
sonhamos o que queremos viver”  
(Allan Kardec)

## RESUMO

MACHADO JR, Waldir Mariano. **Aplicação da Metodologia Numérica “Fast Bounds Crack” para uma Estimativa Eficiente da Evolução do Tamanho de Trinca.** 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

Uma parte significativa da vida de um componente mecânico pode ocorrer com a propagação de trincas em fadiga. Atualmente, dispõe-se de vários modelos matemáticos para descrever o comportamento do crescimento da trinca. Esses modelos são classificados em duas categorias em termos da amplitude de tensão: constante (CAC) e variável (CAV). Em geral, esses modelos de propagação são formulados como um problema de valor inicial (PVI) e, a partir disso, a curva de evolução da trinca é obtida através da aplicação de um método numérico. Nesta dissertação apresentou-se a aplicação da metodologia “Fast Bounds Crack” para o estabelecimento das funções cotas superior e inferior para modelos de evolução do tamanho de trinca. O desempenho desta metodologia foi avaliado através do desvio relativo e tempo computacional, em relação às soluções numéricas aproximadas obtidas pelo método de Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> ordem explícito (RK4). Atingiu-se um desvio relativo máximo de 5,92% e o tempo computacional foi, para os exemplos resolvidos, 130000 vezes superior ao tempo obtido pelo método do RK4. Realizou-se, ainda, uma aplicação de Engenharia para a obtenção de uma solução numérica aproximada, a partir da média aritmética das cotas superior e inferior obtidas na metodologia aplicada neste trabalho, quando não se conhece a lei de evolução. O erro relativo máximo encontrado nessa aplicação foi de 2,08% o que comprova a eficiência da metodologia “Fast Bounds Crack”.

**Palavra-chave:** Modelos de evolução do tamanho de trinca. Cotas para a evolução do tamanho de trinca. Método de Runge-Kutta. Série de Taylor. “Fast Bounds Crack”.

## ABSTRACT

MACHADO JR, Waldir Mariano. **Application of Numerical Method "Fast Bounds Crack" for a Estimate Efficient Evolution of Crack Size** 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

A significant part of the life of a mechanical component occurs, the crack propagation stage in fatigue. Currently, it is had several mathematical models to describe the crack growth behavior. These models are classified into two categories in terms of stress range amplitude: constant and variable. In general, these propagation models are formulated as an initial value problem, and from this, the evolution curve of the crack is obtained by applying a numerical method. This dissertation presented the application of the methodology "Fast Bounds Crack" for the establishment of upper and lower bounds functions for model evolution of crack size. The performance of this methodology was evaluated by the relative deviation and computational times, in relation to approximate numerical solutions obtained by the Runge-Kutta method of 4th explicit order (RK4). Has been reached a maximum relative deviation of 5.92% and the computational time was, for examples solved, 130,000 times more higher than achieved by the method RK4. Was performed yet an Engineering application in order to obtain an approximate numerical solution, from the arithmetic mean of the upper and lower bounds obtained in the methodology applied in this work, when you don't know the law of evolution. The maximum relative error found in this application was 2.08% which proves the efficiency of the methodology "Fast Bounds Crack".

**Keywords:** Evolution models of crack size. Bounds for the evolution of crack size. Runge-Kutta method. Taylor series. "Fast Bounds Crack".



## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 – Diferentes fases na vida por fadiga e fatores relevantes.....  | 17 |
| Figura 2.2 – Diferentes fases para o crescimento da trinca por fadiga.....  | 18 |
| Figura 2.3 – Três regiões da taxa de crescimento da trinca em função da $\Delta K$ .....  | 19 |
| Figura 2.4 – Três modos de abertura de trinca.....  | 20 |
| Figura 2.5 – (a) Placa infinita no modo I de abertura de trinca. (b) Estado plano de tensões de um elemento de área, na vizinhança da trinca..... | 22 |
| Figura 4.1 – Placa infinita com trinca central.....   | 33 |
| Figura 4.2 – Placa com trinca central.....  | 34 |
| Figura 4.3 – Placa com trinca na aresta.....  | 35 |
| Figura 4.4 – Funções cotas superior comparada com a solução numérica aproximada para exemplo 2, segundo modelo de Paris.....                      | 37 |
| Figura 4.5 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 1, segundo modelo de Paris.....         | 38 |
| Figura 4.6 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 2, segundo modelo de Paris .....        | 38 |
| Figura 4.7 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 3, segundo modelo de Paris .....        | 39 |
| Figura 4.8 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 1, segundo modelo de Paris.....                                       | 40 |
| Figura 4.9 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 2, segundo modelo de Paris .....                                      | 40 |
| Figura 4.10 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 3, segundo modelo de Paris .....                                     | 41 |
| Figura 4.11 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 1, segundo modelo de Forman.....       | 42 |
| Figura 4.12 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 2, segundo modelo de Forman.....       | 43 |
| Figura 4.13 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 3, segundo modelo de Forman.....       | 43 |
| Figura 4.14 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 1, segundo modelo de Forman.....                                     | 44 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 4.15 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 2, segundo modelo de Forman .....  | 44 |
| Figura 4.16 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 3, segundo modelo de Forman.....   | 45 |
| Figura 4.17 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 1, segundo modelo de Collipriest.....      | 46 |
| Figura 4.18 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 2, segundo modelo de Collipriest.....      | 47 |
| Figura 4.19 – Funções cotas inferior e superior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 3, segundo modelo de Collipriest.....      | 47 |
| Figura 4.20 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 1, segundo modelo de Collipriest.....                                    | 48 |
| Figura 4.21 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 2, segundo modelo de Collipriest.....                                    | 48 |
| Figura 4.22 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo 3, segundo modelo de Collipriest.....                                    | 49 |
| Figura 4.23 – Função erro relativo da média aritmética das cotas superior e inferior em relação ao RK4 para o exemplo 1, segundo os três modelos..... | 51 |
| Figura 4.24 – Função erro relativo da média aritmética das cotas superior e inferior em relação ao RK4 para o exemplo 2, segundo os três modelos..... | 51 |
| Figura 4.25 – Função erro relativo da média aritmética das cotas superior e inferior em relação ao RK4 para o exemplo 3, segundo os três modelos..... | 52 |

## **LISTA DE SIGLAS**

CAC – Carga de Amplitude Constante

CAV – Carga de Amplitude Variável

EDO – Equação Diferencial Ordinária

FBC – “Fast Bounds Crack”

FIT – Fator de Intensidade de Tensão

MF – Mecânica da Fratura

MFEP – Mecânica da Fratura Elásto Plástica

MFLE – Mecânica da Fratura Linear Elástica

PVI – Problema de Valor Inicial

## LISTA DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Parâmetros dos modelos de propagação.....   | 36 |
| Tabela 2 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Paris-Erdogan ..... | 42 |
| Tabela 3 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Forman.....         | 46 |
| Tabela 4 – Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Collipriest.....    | 49 |
| Tabela 5 – Resultados obtidos.....   | 53 |
| Tabela 6 – Resultados erro relativo média aritmética e geométrica.....                             | 54 |

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| 1 INTRODUÇÃO.....   | 13 |
| 1.1 OBJETIVOS.....  | 14 |
| Objetivo Geral.....   | 14 |
| Objetivos Específicos.....  | 14 |
| 1.2 JUSTIFICATIVA.....  | 14 |
| 1.3 ESCOPO DO TRABALHO.....   | 15 |
| 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....  | 17 |
| 2.1 FADIGA.....   | 17 |
| 2.2 MECÂNICA DA FRATURA.....  | 20 |
| Mecânica da Fratura Linear Elástica.....  | 21 |
| 2.3 MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS.....   | 23 |
| Modelo de Paris-Erdogan.....  | 23 |
| Modelo de Forman.....   | 24 |
| Modelo de Collipriest.....  | 24 |
| 2.4 MÉTODOS NUMÉRICOS.....  | 25 |
| Método de Runge-Kutta Explícito.....  | 26 |
| Equações de Runge-Kutta para os modelos de propagação.....                              | 27 |
| 3 ESTABELECIMENTO DAS COTAS INFERIOR E SUPERIOR PARA EVOLUÇÃO DO TAMANHO DE TRINCA..... | 28 |
| 3.1 COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE PARIS-ERDOGAN... 28                      |    |
| 3.2 COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE FORMAN.....                              | 30 |
| 3.3 COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE COLLIPRIEST.....                         | 31 |
| 4 RESULTADOS NUMÉRICOS.....   | 33 |
| Exemplo 1: Placa com uma largura infinita e com trinca central.....                     | 33 |
| Exemplo 2: Placa com uma largura finita e com trinca central.....                       | 34 |
| Exemplo 3: Placa com largura finita e com trinca na aresta.....                         | 34 |
| 4.1 DESEMPENHO DAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR.....                                       | 35 |
| Modelo de Paris-Erdogan.....  | 37 |
| Modelo de Forman.....   | 42 |
| Modelo de Collipriest.....  | 46 |
| 4.2 UMA APLICAÇÃO “INGÊNUA” DA METODOLOGIA A UM PROBLEMA DE ENGENHARIA.....             | 50 |
| 4.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS.....   | 52 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS.....   | 55 |
| TRABALHOS FUTUROS.....  | 56 |
| REFERÊNCIAS.....  | 57 |
| APÊNDICE.....   | 60 |

## 1 INTRODUÇÃO

A mecânica da fratura linear elástica é uma das abordagens usadas para quantificar o dano em fadiga e estuda o fenômeno da propagação de trinca nos materiais. A trinca pode estar presente no material desde o seu processo de fabricação, ou pode surgir em decorrência de carregamentos dinâmicos, e a falha devido à sua propagação é caracterizada como uma fratura frágil.

O conceito de fadiga segundo Dieter é:

Desde 1850, é conhecido o fato de que um metal submetido a uma tensão repetida ou flutuante romperá a uma tensão muito inferior àquela necessária para ocasionar fratura devido à aplicação de uma carga estática. As falhas mecânicas decorrentes destas condições de carregamento dinâmico são chamadas falhas por fadiga (DIETER, 1981, p. 344).

Na literatura técnica, podem ser encontrados vários modelos de propagação de trincas, tais como os de Paris-Erdogan, Forman e Collipriest, que serão tratados neste trabalho. Esses modelos são matematicamente formulados como problemas de valor inicial (PVI), e são particularmente apropriados para os casos em que se conhece explicitamente o fator de intensidade de tensão (FIT).

Para obter a solução aproximada do PVI formulado com os problemas mencionados, neste trabalho, será utilizado o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Daí a importância de estudar o processo de crescimento e propagação de trincas. Vários modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever o comportamento do crescimento da trinca sob a condição de amplitude de tensão constante (CAC). E para a resolução desses modelos será utilizada a metodologia "*Fast Bounds Crack*" (FBC). Esta metodologia determina as funções cotas superior e inferior para os modelos mencionados acima, as quais se envelopam a solução numérica aproximada, que nesse caso foi considerada como solução exata. Essas funções cotas superior e inferior foram obtidas através da expansão da série de Taylor, retendo os termos de 2ª ordem, com resto de Lagrange (SILVA JÚNIOR et al., 2015).

Além disso, far-se-á a comparação de tempo computacional da solução obtida pela metodologia (FBC) com a solução obtida pelo método RK4, para comprovar a eficiência computacional da metodologia.

## 1.1 OBJETIVOS

### **Objetivo Geral**

O objetivo geral deste trabalho é a determinação de cotas para modelos de evolução de trincas de Paris-Erdogan, Forman e Collipriest, através metodologia (FBC), computacionalmente eficiente utilizando métodos matemáticos convencionais ou simulação numérica.

### **Objetivos Específicos**

Os objetivos específicos deste trabalho são:

1. Aplicação da metodologia (FBC) para os modelos de Paris-Erdogan, Forman e Collipriest;
2. Implementação computacional das cotas superior e inferior;
3. Simulação numérica e avaliação dos resultados.
4. Estabelecimento das cotas superior e inferior para o tamanho de trincas para os modelos mencionados.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Uma parte significativa da vida de um componente mecânico ocorre na etapa de propagação de trincas, (BANNANTINE *et al*, 1989). Daí a importância de estudar o processo de crescimento e propagação de trincas. Vários modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrever o comportamento do crescimento da trinca sob a condição de amplitude de tensão constante (CAC). O mais simples e difundido na comunidade científica é o modelo de Paris-Erdogan (PARIS & ERDOGAN, 1963). Os

modelos matemáticos para evolução de trinca são definidos por um problema de valor inicial (PVI) mostrado na equação 1.1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathbb{R}), \text{ tal que:} \\ \left( \frac{da}{dN} \right) (N) = h(\alpha, \Delta K) \quad , \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Sendo:

- $\frac{da}{dN}$  – taxa de crescimento da trinca;
- $N$  – número de ciclos;
- $h$  – lei de evolução;
- $\alpha$  – um vetor de parâmetros (específicos para cada modelo);
- $\Delta K$  – variação do fator intensidade de tensão, definido pela equação 1.2,

$$\Delta K = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n}. \quad (1.2)$$

Assim  $K_{m\acute{a}x}$  e  $K_{m\acute{i}n}$ , são os valores máximos e mínimos do fator de intensidade de tensão (FIT).

O trabalho apresenta uma metodologia, na qual serão realizadas estimativas adequadas, para a representação da função de evolução do tamanho de trinca, através da série de Taylor, retendo os termos de segunda ordem com resto de Lagrange para os modelos mencionados.

As cotas propostas possuem a seguinte forma:

$$a_{CI}(N) \leq a(N) \leq a_{CS}(N), \forall N \in [N_0, N_1]. \quad (1.3)$$

Deste modo  $a_{CI}(\cdot)$ ,  $a(\cdot)$ ,  $a_{CS}(\cdot)$  funções das cotas inferior e superior e, do tamanho da trinca, respectivamente (SILVA JÚNIOR et al., 2015).

Para avaliar a metodologia proposta serão implementadas soluções numéricas via método de Runge-Kutta de 4º ordem explícito. Para a implementação desses métodos, será utilizada a ferramenta computacional o MATLAB (TREFETHEN, 2000).

### 1.3 ESCOPO DO TRABALHO

Este projeto de pesquisa está estruturado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, têm-se uma introdução sobre o assunto, os objetivos a serem alcançados e



a justificativa. O segundo capítulo é uma revisão bibliográfica sobre Fadiga, Mecânica da Fratura, Modelos de Propagação de Trincas CAC e Métodos Numéricos. O terceiro capítulo apresenta a formulação da metodologia proposta no estudo. O quarto capítulo expõe os resultados numéricos, obtidos pela aplicação da metodologia proposta. O quinto capítulo traz a conclusão sobre o trabalho, tal como sugestões para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições fundamentais sobre a fadiga em metais, mecânica da fratura linear elástica, modelos de propagação de trincas e métodos numéricos.

### 2.1 FADIGA

A definição de fadiga segundo a ASTM é:

Processo progressivo e localizado de modificações estruturais permanentes ocorridas em um material submetido a condições que produzem tensões e deformações cíclicas em um ponto ou em vários pontos e que pode culminar em trincas ou fratura após um número suficiente de ciclos (ASTM, 2000, p. 1034).

Muitos componentes mecânicos e estruturais estão sujeitos a esforços mecânicos que variam de posição, direção e intensidade em função do tempo. No decorrer da vida desses componentes, ocorre uma perda gradativa da resistência mecânica, culminando na falha. Quando um componente é submetido a um carregamento cíclico, trincas são nucleadas em pequena escala. Posteriormente, ocorre um crescimento significativo dessa trinca por fadiga, levando o componente a uma falha. Investigações microscópicas mostraram que a nucleação de trincas por fadiga só se manifesta, inicialmente, através de micro trincas geradas nas bandas de deslizamento (SCHIJVE, 2001). A vida de um componente submetido à fadiga desenvolve-se em três etapas: nucleação de trincas; propagação de trincas; e falha por fadiga. A figura 2.1 apresenta, esquematicamente, essas etapas.

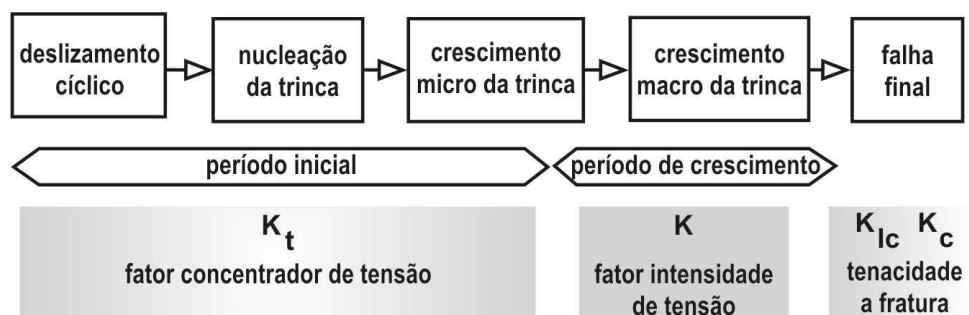
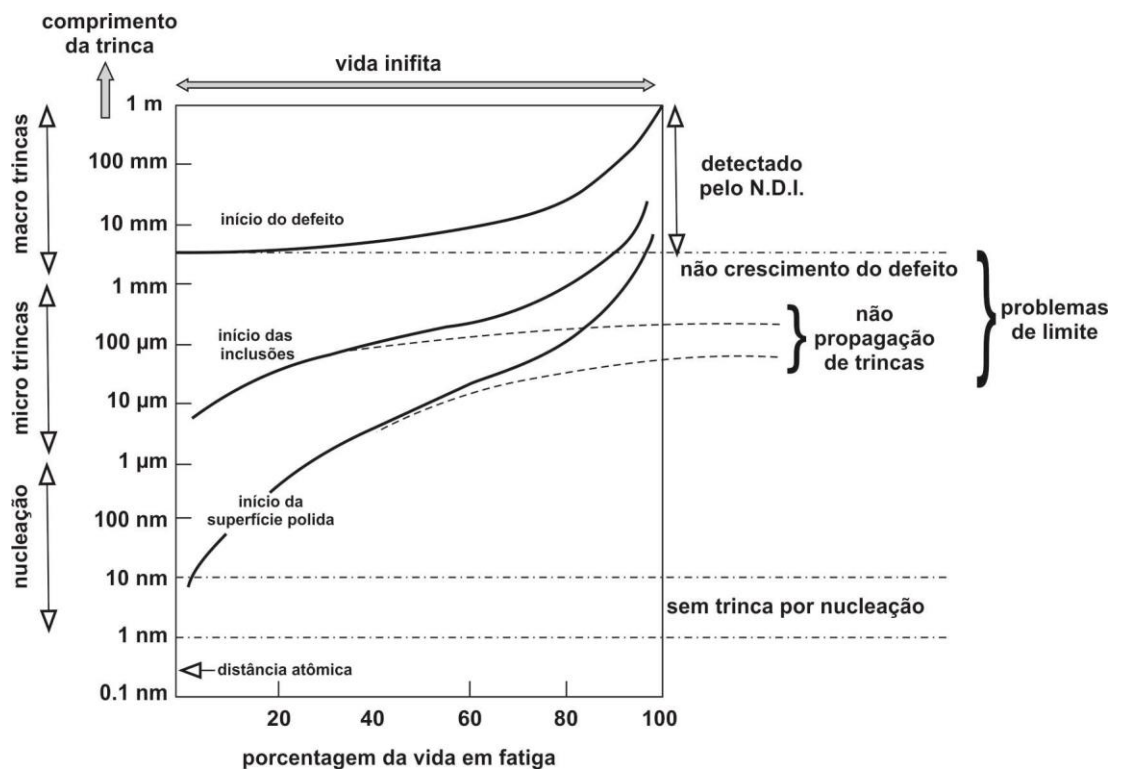


Figura 2.1 – Diferentes etapas na vida por fadiga e fatores relevantes

Fonte: adaptado Schivje (2001)

O entendimento das etapas da fadiga é fundamental para a definição dos fatores que influenciam o crescimento das trincas por fadiga. Este mecanismo é influenciado por vários fatores: natureza cristalográfica do material; efeitos da superfície; tipo e dinâmica do carregamento; tensão cisalhante; temperatura; entre outros (SCHIJVE, 2001). A figura 2.2 fornece as várias fases do desenvolvimento e crescimento das trincas.



**Figura 2.2 – Diferentes fases para o crescimento da trinca por fadiga**

Fonte: adaptado Schivje (2001)

Segundo Beghinil et al. (1997), para uma avaliação segura de estruturas solicitadas ciclicamente, que contêm trincas, deve-se relacionar à taxa do crescimento da trinca com o fator de intensidade da tensão. Jones et al. (2011), utiliza o modelo de Frost–Dugdale para a previsão de trincas em aeronaves. Esse modelo serve para uma ampla gama de materiais utilizados nas aplicações aeroespaciais. Maderbacher et al. (2013), observa que a resistência à fadiga é influenciada diretamente pela temperatura de trabalho, pelas tensões desenvolvidas e pelo tamanho de grão da microestrutura.

A compreensão do processo de crescimento da trinca é necessária para prever o tempo de vida e manutenção dos componentes. O crescimento da trinca está intrinsecamente ligado ao seu tamanho, pois, quanto maior o tamanho da trinca, maior

é o crescimento (KOBAYASHI et al., 2011). Existem vários modelos matemáticos para a previsão da evolução do tamanho de uma trinca, entre eles, citam-se o de Paris-Erdogan, Elber, Huang, Priddle, Collipriest, Forman, entre outros (BEDEN et al., 2009; ZHAN et al., 2014).

Com isso, a figura 2.3 apresenta as três regiões da taxa de crescimento das trincas em função da variação da tensão de forma genérica. A região I refere-se ao início da formação da trinca e da sua propagação, que é da ordem de  $10^{-6}$  mm/ciclo. Essa etapa é influenciada pelo tamanho do grão, pela tensão média gerada pela carga aplicada e a temperatura ambiente. Um fato importante dessa região é a existência de um valor numérico para o fator de intensidade de tensão, abaixo do qual as trincas não se propagam. Este é denominado  $\Delta K_{th}$  e é determinado experimentalmente (BEDEN et al., 2009). Na região II, a zona plástica na frente de trinca é grande quando comparada com o tamanho do grão. Nesta região o comportamento da relação  $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$  é, aproximadamente, linear, sendo que a taxa de crescimento da trinca varia de  $10^{-6}$  a  $10^{-3}$  mm/ciclo e o crescimento da trinca é estável (BEDEN et al., 2009). Na região III, observam-se taxas bastante elevadas de crescimento da trinca. A curva  $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$  torna-se íngreme aproximando-se da sua assíntota que é definida pela tenacidade à fratura  $K_c$ , que, no gráfico, está representada como  $K_{máx} = K_c$ . Nessa região o comportamento é, predominantemente, instável (BEDEN et al., 2009).

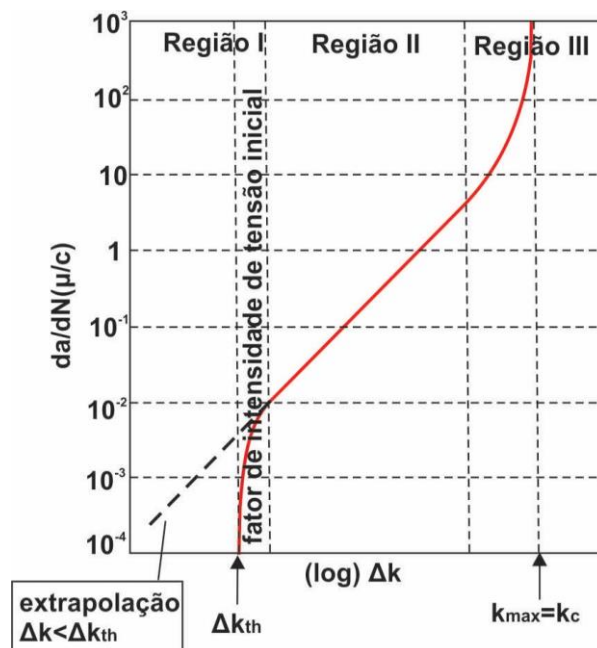


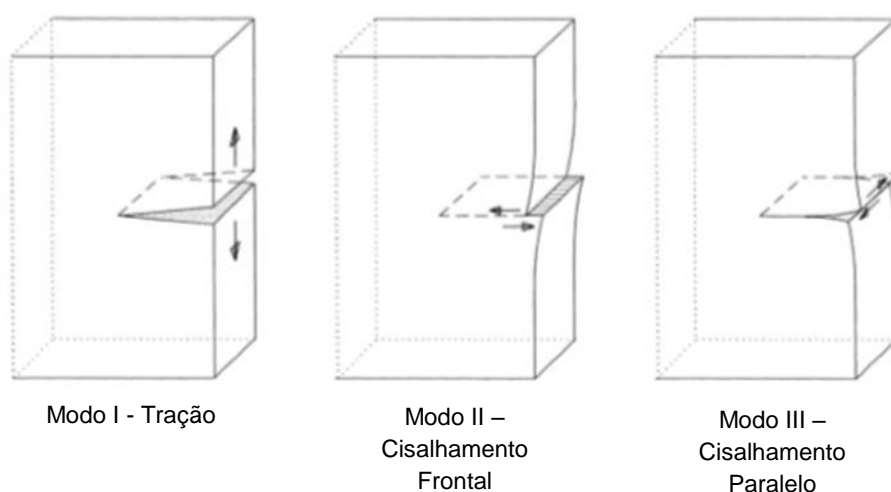
Figura 2.3 – Três regiões da taxa de crescimento da trinca em função da  $\Delta K$

Fonte: adaptado Schivje (2001)

Na literatura, podem ser encontradas várias leis de evolução que permitem prever a propagação de trinca nas suas diferentes etapas. Nas próximas seções, serão apresentadas definição de Mecânica da Fratura e alguns modelos matemáticos de propagação de trincas.

## 2.2 MECÂNICA DA FRATURA

A Mecânica da Fratura (MF) assume que o material de um componente em análise possui uma trinca. A partir disso, com essa consideração, os objetivos são: (i) determinar se este defeito no material vai levá-lo ao colapso; (ii) avaliar a condição de segurança do componente. A MF divide-se em: Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP). Na figura 2.4, apresentam-se as três geometrias de abertura de trincas.



**Figura 2.4 – Três modos de abertura de trinca**

**Fonte: adaptado Schivje (2001)**

O modo I refere-se à tensão de tração. Esse é o modo usual para o teste de tenacidade à fratura. O modo II (cisalhamento frontal) refere-se a uma tensão de cisalhamento aplicada no plano da trinca normal à aresta frontal da trinca. O modo III (cisalhamento paralelo) é para tensões cisalhantes aplicadas paralelamente à aresta frontal da trinca. O carregamento associado ao modo I é a situação mais agressiva. Para este modo, a falha no componente é caracterizada pelo mecanismo de clivagem,

levando o material a uma ruptura frágil, com pouca absorção de energia no processo de fratura.

## Mecânica da Fratura Linear Elástica

A MFLE descreve a intensidade e a distribuição do campo de tensões na vizinhança da frente da trinca (“ponta da trinca”), fazendo uso das hipóteses relacionadas à elasticidade linear:

- Material elástico linear, isotrópico e homogêneo;
- Pequenas deformações;
- Estado plano de deformações e tensões;
- Geometrias de abertura de trincas;
- Material frágil.

Griffith, 1920, estabeleceu que um material frágil apresenta uma população de pequenas trincas que causam concentração de tensões, e que “uma trinca se propagará quando a diminuição da energia elástica de deformação for pelo menos igual à energia necessária para criar a nova superfície da trinca”, (DIETER, 1981). Griffith desconsiderou a espessura da placa, passando a tratar o problema como um estado plano de tensões. A geometria da trinca é elíptica, e tem-se tanto trinca interna como superficial, mudando apenas o comprimento delas, porém, o efeito de ambas é o mesmo. A equação 2.1, proposta por Griffith, determina a tensão necessária para que a trinca se propague.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}. \quad (2.1)$$

Sendo,  $\sigma$  a tensão necessária para a propagação da trinca,  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $\gamma_s$  a densidade de energia da superfície e “ $a$ ” metade do tamanho da trinca.

Em 1940, Irwin aprimorou os trabalhos de Griffith, desenvolvendo teorias para os materiais dúcteis e, em meados de 1950, mostrou que as tensões próximas à frente de trinca são, de forma geral, representadas pela equação 2.2 (BANNANTINE *et al*, 1989).

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta). \quad (2.2)$$

Assim que  $r$  e  $\theta$  são coordenadas polares da localização do ponto de interesse em relação à frente da trinca e  $K$  o fator intensidade de tensão (BANNANTINE *et al*, 1989).

A figura 2.5 mostra a frente de trinca.

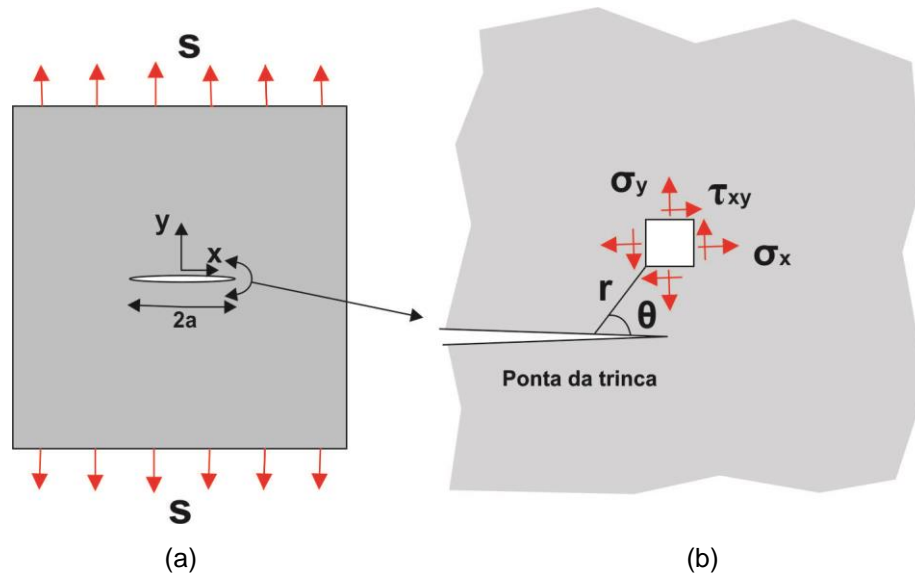


Figura 2.5 – (a) Placa infinita no modo I de abertura de trinca. (b) Estado plano de tensões de um elemento de área, na vizinhança da trinca.

Fonte: adaptado Schivje (2001)

As componentes de tensão para uma placa infinita, fina, de um sólido elástico, na frente da trinca, em termos das coordenadas, indicadas na figura 2.5, são dadas pelas seguintes equações (DIETER, 1981).

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right); \quad (2.3)$$

$$\sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right); \quad (2.4)$$

$$\tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}. \quad (2.5)$$

Irwin demonstrou que o fator de intensidade de tensões é um componente adequado para descrever a distribuição de tensões em torno da trinca. Se duas falhas de diferentes geometrias têm o mesmo valor numérico para o FIT, então o campo de tensões em torno de cada uma das falhas é idêntico.

O FIT pode ser determinado pelo carregamento aplicado, tamanho e a forma da trinca e pela geometria do componente, a forma geral do FIT é dada pela equação 2.6,

$$K(a) = f(a)\sigma\sqrt{\pi a}. \quad (2.6)$$

Deste modo “ $\sigma$ ” corresponde à tensão nominal aplicada, “ $a$ ” é o tamanho da trinca e “ $f(a)$ ” é a função de correção do FIT.

### 2.3 MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

A análise do crescimento de uma trinca em um componente sujeito a um carregamento que gere uma amplitude de tensão constante (CAC) é a mais simples de se realizar. No CAC, o histórico do carregamento é desconsiderado. Há vários modelos capazes de representar a evolução do crescimento de uma trinca. Contudo, eles variam nos fatores que influenciam a propagação de trincas e no número de parâmetros para o ajuste dos dados experimentais da curva, propostos pela lei de evolução. A função que define este comportamento denotar-se-á, neste trabalho, por “Lei de Evolução”.

#### Modelo de Paris-Erdogan

O modelo de Paris-Erdogan, (PARIS e ERDOGAN, 1963), é expresso pelo seguinte PVI.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1[N_0, N_1]; \mathbb{R}^+ \text{ tal que:} \\ \left( \frac{da}{dN} \right) (N) = C_p \left( \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta\sigma \right)^{m_p}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Sendo  $C_p$ ,  $m_p$  o coeficiente e o expoente da Lei de Paris,  $N$  o número de ciclos,  $a_0$  o tamanho inicial da trinca e  $\Delta\sigma$  a variação da intensidade de tensão.

A equação representa o comportamento linear do gráfico  $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$  ou seja, a região II do gráfico. A limitação da Lei de Paris está no fato de que ela só descreve o comportamento para a região II e não considera o efeito da tensão média. Nas regiões I e III, o modelo de Paris não é capaz de ajustar os dados experimentais obtidos nessas regiões.



## Modelo de Forman

O modelo de Forman, (FORMAN et al., 1967), é expresso pelo seguinte PVI, mostrado na equação 2.8,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1[N_0, N_1]; \mathbb{R}^+ \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN}(N) = \frac{C_F \left( \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)^{m_F}}{(1-R)(K_c - K_{m\acute{a}x})}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Embora Walker (1970) tenha modificado o modelo de Paris com a introdução da razão de tensão ( $R$ ), nenhum desses dois modelos descreve a instabilidade do crescimento da trinca que ocorre quando o fator de intensidade de tensão se aproxima de um valor crítico,  $K_{IC}$ . Por isso, Forman propôs um modelo que descreve a região II e III do diagrama  $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$ . Forman experimentou o seu modelo para as ligas de alumínio 2024-T3 e 7075-T6. O modelo de Forman é dado pelas seguintes equações (FORMAN, 1967),

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)(K_c - K_{m\acute{a}x})} = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F-1}}{\frac{K_c}{K_{m\acute{a}x}} - 1}; \quad (2.9)$$

ou ainda

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_F(\Delta K)^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K}. \quad (2.10)$$

Assim  $C_F$  e  $m_F$  parâmetros do modelo de Forman,  $K_{m\acute{a}x}$  o fator intensidade de tensão máximo e,  $K_c$  a tenacidade à fratura do material.

## Modelo de Collipriest

O modelo de Collipriest, (COLLIPRIEST, 1972), é expresso pelo seguinte PVI, mostrado na equação 2.11,

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1[N_0, N_1]; \mathbb{R}^+ \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN}(N) = C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln \left( \frac{(\sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma)^2}{(1-R) K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right\} \right] \\ a(N_0) = a_0. \end{cases} \quad \forall N (N_0, N_1); \quad (2.11)$$

O modelo de Collipriest, proposto em 1972, é capaz de descrever as três regiões do diagrama  $\log (da/dN) \times \log (\Delta K)$ , da figura 2.3. Sua lei é representada pela equação 2.12 (BEDEN et al., 2009),

$$\frac{da}{dN} = C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{(1-R) K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right\} \right]. \quad (2.12)$$

Deste modo  $C$  e  $m$  parâmetros da equação de Collipriest,  $K_c$  a tenacidade à fratura,  $\Delta K_{th}$  o valor inicial de tensão, abaixo da qual as trincas em formação não se propagam. Mesmo tendo um número elevado de parâmetros, a equação representa adequadamente as três regiões do gráfico para a evolução da trinca.

## 2.4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Há vários problemas na engenharia que são formulados por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Em geral, são poucas aplicações práticas em que é possível se obter uma solução exata. Portanto, utilizam-se métodos numéricos para a obtenção de soluções numéricas aproximadas. Uma EDO é uma equação diferencial cuja solução depende de apenas uma variável. A ordem da EDO é definida pela ordem da maior derivada na equação.

Se tivermos uma equação diferencial (ED) de ordem  $m > 1$ , e se tanto a função como as suas derivadas até a ordem  $m - 1$  são especificadas em um ponto, temos um problema de valor inicial (PVI). Formulamos o PVI de ordem 1 pela equação 2.13,

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), \forall x \in \mathbb{R}^+; \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Existem vários métodos numéricos para a solução do PVI, no entanto, será discutido na próxima seção o método de Runge-Kutta. Esse método será utilizado para a obtenção da solução numérica aproximada dos PVI's dos modelos de propagação de trinca deste trabalho.

### Método de Runge-Kutta Explícito

O método de Runge-Kutta é simples e de fácil aplicação para se obter soluções de PVI. Ele engloba os métodos de Euler e Euler Aprimorado. Também é conhecido como método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem. A grande vantagem desse método está na sua precisão, pois é de ordem 4, quando comparado aos métodos de Euler (BOYCE et al., 2006). O método propõe que seja feita a partição do domínio. Essa partição trata-se de uma cisão do intervalo em subintervalos. Os pontos extremos dos subintervalos são denominados de nós. A partição pode ser regular ou não, a diferença está em que na regular os subintervalos são iguais, ou seja, têm a mesma dimensão.

Basicamente, a proposta do método do RK4 é calcular o valor da função incógnita, a partir de uma média ponderada das derivadas de ordem 1 da função. A equação dos valores de  $f(x, y)$  em pontos diferentes no intervalo  $de x_n \leq x \leq x_{n+1}$  e, é resultante da seguinte expressão,

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{6}\right) (k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + kn_4); \\ k_{n1} = hf(x_n, y_n); \\ k_{n2} = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right); \\ k_{n3} = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right); \\ k_{n4} = hf(x_n + h, y_n + hk_{n3}). \end{cases} \quad (2.14)$$

Sendo,  $k_{n1}$  o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo,  $k_{n2}$  é o coeficiente angular no ponto médio,  $k_{n3}$  é a segunda aproximação no ponto médio e,  $k_{n4}$  é o coeficiente angular em  $x_n + h$ . A soma de  $(k_{n1} + k_{n2} + k_{n3} + k_{n4})/6$  pode ser interpretado como um coeficiente angular médio.

### Equações de Runge-Kutta para os modelos de propagação.

As funções que definem as cotas serão utilizadas para a solução de 3 exemplos. As equações dos modelos de Paris-Erdogan, Forman e Collipriest não são separáveis, com isso, não é possível a determinação do tamanho de trinca para qualquer número de ciclos. Entretanto, como a solução exata da equação é limitada para um número de problemas devido ao fator intensidade de tensão. Por isso utiliza-se uma solução numérica aproximada pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). As equações de Runge-Kutta para os modelos ficam.

$$\left\{ \begin{array}{l} (k_1)_{Paris} = \Delta N C_p (\Delta \sigma \sqrt{\pi a_k} f_k)^{m_p}; \\ (k_1)_{Forman} = \frac{\Delta N C_F (\Delta \sigma \sqrt{\pi a_k} f_k)^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta \sigma \sqrt{\pi a_k} f_k}; \\ (k_1)_{Collipriest} = \Delta N C (K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln \left( \frac{(\sqrt{\pi a_k} f_k \Delta \sigma)^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right\} \right] \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Assim,  $a_k = a(N_k)$ ,  $f_k = f(a_k)$  e  $\Delta N = N_{k+1} - N_k, \{0, 1, \dots, N\}$ . A função  $f_k = f(a_k)$  vai depender da geometria da trinca e do tamanho da trinca. Essa função depende do tamanho da trinca e da largura do componente, " $a_0$ " e " $b$ ". Para placa com largura infinita, a função é igual a 1 e, para componentes finitos há formulação matemática para se determinar essa função.

### 3 ESTABELECIMENTO DAS COTAS INFERIOR E SUPERIOR PARA EVOLUÇÃO DO TAMANHO DE TRINCA

Este capítulo apresenta as funções cotas superior e inferior para os modelos de propagação de trincas de Paris-Erdogan, Forman e Collipriest (SANTOS, 2015). O primeiro pela sua relevância. O segundo, pois, abrange tanto a região II e III do gráfico do crescimento de trinca e, o terceiro porque incorpora as três regiões do gráfico. Para a obtenção dos resultados numéricos, implementou-se um código computacional, em um computador com Intel Core i7-4510U de 2,60 GHz e memória RAM de 8,00 GB. A versão do software utilizado é o Matlab R2010a.

#### 3.1 COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE PARIS-ERDOGAN

Neste tópico é apresentado a dedução das equações para as cotas superior e inferior, e estas equações serão usadas para encontrar a solução de três exemplos.

As cotas foram obtidas através da série de Taylor, retendo os termos de segunda ordem através do resto de Lagrange. As cotas inferior e superior estão representadas na equação 3.1,

$$\begin{aligned}
 a(N) - a_0 &\leq C_p \left\{ \begin{aligned} & \left( (\Delta K(a_0))^{m_p} + \left( \frac{m_p C_p}{2} \right) (\Delta K(a^*))^{2m_p} \right) \\ & x \left( \frac{1}{2a^*} + \frac{f'}{f}(a^*) \right) (N - N_0) \end{aligned} \right\} (N - N_0); \\
 a(N) - a_0 &\geq C_p \left\{ \begin{aligned} & \left( (\Delta K(a_0))^{m_p} + \left( \frac{m_p C_p}{2} \right) (\Delta K(a_0))^{2m_p} \right) \\ & x \left( \frac{1}{2a_0} + \frac{f'}{f}(a_0) \right) (N - N_0) \end{aligned} \right\} (N - N_0).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nota-se que a cota superior é função de “ $a^*$ ” e, esse vai variar com “ $a_0$ ” podendo assumir valores específicos. No caso deste trabalho o “ $a^*$ ” teve a variação de 1,3 a 1,5 do “ $a_0$ ” pois, quanto maior o valor do “ $a^*$ ”, mais a cota superior se afasta

da solução numérica de Runge-Kutta e, por inspeção numérica, o valor abaixo de 1,3 viola a cota superior.

Segue a dedução para as cotas pela lei de Paris-Erdogan, a mesma é definida pela seguinte equação.

$$\frac{da}{dN} = C_p \Delta K^{m_p}, \quad (3.2)$$

Para obter as cotas para a evolução do tamanho de trinca são necessárias as seguintes hipóteses:

$$H1) \begin{cases} f \in C^1(\mathcal{R}); \\ 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{cases} \quad (3.3)$$

$$H2) m \geq 2.$$

Pela expansão de Taylor com resto de Lagrange, têm-se:

$$a(N) = a_0(N_0) + \left(\frac{da}{dN}(N_0)\right)(N - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{dN^2}(\eta)\right)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N]. \quad (3.4)$$

Fazendo a segunda derivada da equação 3.4 é:

$$\frac{d^2a}{dN^2}(a(N)) = \frac{d}{dN} \left( \frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left( \frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)). \quad (3.5)$$

Substituindo a equação 3.2 na equação 3.5, e desenvolvendo temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{da} = [C_p (\Delta\sigma\sqrt{\pi a} f(a))^{m_p}] [C_p (\Delta\sigma\sqrt{\pi a} f(a))^{m_p}] = C_p^2 (\Delta\sigma\sqrt{\pi})^{2m_p} \frac{d}{da} \left( a^{\frac{m_p}{2}} (f(a))^{m_p} \right) \\ \left( a^{\frac{m_p}{2}} (f(a))^{m_p} \right) = m_p C_p^2 (\Delta\sigma\sqrt{\pi})^{2m_p} \left( \frac{1}{2} a^{\frac{m_p}{2}-1} (f(a))^{m_p} + a^{\frac{m_p}{2}} (f(a))^{m_p} f'(a) \right) \\ \left( a^{\frac{m_p}{2}} (f(a))^{m_p} \right) = m_p C_p^2 (\Delta\sigma\sqrt{\pi})^{2m_p} \left( \frac{1}{2} a^{m_p-1} (f(a))^{2m_p} + a^{m_p} (f(a))^{2m_p-1} f'(a) \right) \\ = m_p C_p^2 (\Delta\sigma\sqrt{\pi})^{2m_p} \left( a^{m_p-1} (f(a))^{2m_p-1} \right) \left( \frac{1}{2} f(a) + a f'(a) \right) \\ \frac{d^2a}{dN^2}(a(N)) = m_p C_p^2 (\Delta\sigma\sqrt{\pi a} f(a))^{2m_p} \left( \frac{1}{2a} + \frac{f'}{f}(a) \right). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Substituindo o resultado do desenvolvimento da equação 3.6 na equação 3.4, da expansão de Taylor com resto de Lagrange temos,

$$a(N) = a_0(N_0) + C_p(\Delta K)^{m_p}(N - N_0) + \frac{1}{2}m_p C_p^2(\Delta K)^{2m_p} \left( \frac{1}{2a} + \frac{f'}{f}(a(\eta)) \right) (N - N_0)^2. \quad (3.7)$$

Descarte, as cotas superior e inferior, equação 3.1, são obtidas por meio da equação 3.3, considerando a hipótese H1.

As cotas para o modelo de Paris-Erdogan, equação 3.1, podem ser reescritas conforme a equação 3.8,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{CS}(N) = a_0 + C_p \left\{ \begin{array}{l} (\Delta K(a_0))^{m_p} + \left( \frac{m_p C_p}{2} \right) (\Delta K(a^*))^{2m_p} \\ x \left( \frac{1}{2a^*} + \frac{f'}{f}(a^*) \right) (N - N_0) \end{array} \right\} (N - N_0); \\ a_{CI}(N) = a_0 + C_p \left\{ \begin{array}{l} (\Delta K(a_0))^{m_p} + \left( \frac{m_p C_p}{2} \right) (\Delta K(a_0))^{2m_p} \\ x \left( \frac{1}{2a_0} + \frac{f'}{f}(a_0) \right) (N - N_0) \end{array} \right\} (N - N_0). \end{array} \right. \quad (3.8)$$

A dedução das cotas superior e inferior para os modelos de Forman e Collipriest encontram-se nos apêndices A e B.

### 3.2 COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE FORMAN

Para o modelo Forman, foram deduzidas as equações, essa dedução encontra-se no apêndice A, para as cotas superior e inferior, assim como a resolução de três exemplos utilizando essas equações. As cotas inferior e superior estão representadas na equação 3.5,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{CI} = a_0 + \left\{ \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} \right]^2 \right\} (N - N_0); \\ a_{CS} = a_0 + \left\{ \frac{C_F(\Delta K(a_0))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{C_F(\Delta K(a^*))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a^*)} \right]^2 \right\} (N - N_0). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

### 3.3 COTAS SUPERIOR E INFERIOR PARA O MODELO DE COLLIPRIEST

Para o modelo Collipriest foram deduzidas as equações, essa dedução encontra-se no apêndice B, para as cotas superior e inferior, assim como a resolução de três exemplos utilizando essas equações. As cotas inferior e superior estão representadas nas seguintes equações.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{CI}(N) = a_0 + C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a_0)^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] (N - N_0) + \\ \frac{1}{2} \left\{ C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a_0)^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right]^2 \right\} \\ C(K_c \Delta K_{th}) \frac{\exp \left( \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln(a_0 f(a_0)^2) + \ln(\Delta \sigma^2 \pi) - \ln(1-R)K_c \Delta K_{th}}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right)^2} \right]; \\ \left[ \frac{1}{2a_0} + \left( \frac{f'}{f} \right)(a_0) \right] (N - N_0)^2 \end{array} \right. \quad (3.10)$$



$$\left\{ \begin{aligned}
& a_{CS}(N) = a_0 + C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a_0)^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] (N - N_0) + \\
& \frac{1}{2} \left\{ C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K(a^*)^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] \right\}^2 \\
& C(K_c \Delta K_{th}) \frac{\exp \left( \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln(a^* f(a^*)^2) + \ln(\Delta \sigma^2 \pi) - \ln(1-R)K_c \Delta K_{th}}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right)^2} \right. \\
& \left. \left[ \frac{1}{2a^*} + \left( \frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_0)^2 \right]
\end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para a obtenção da solução numérica aproximada, como para a determinação dos valores das cotas superior e inferior de cada modelo de propagação, serão utilizadas as funções do fator de intensidade de tensão citadas por Bannantine et al. (1989).

### Exemplo 1: Placa com uma largura infinita e com trinca central.

O exemplo 1 é uma placa, com largura infinita, e uma trinca central, com tamanho inicial “ $a_0$ ”, solicitada sob um carregamento de tração conforme a figura 4.1.

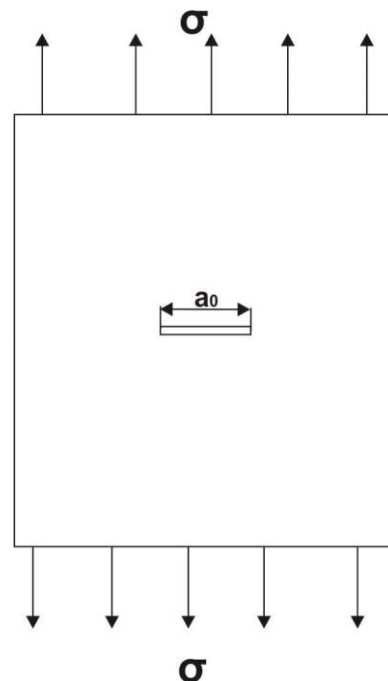


Figura 4.1 – Placa infinita com trinca central.

Fonte: elaborado pelo autor

Para esse exemplo, a função de correção do fator intensidade de tensão é representada pela equação.

$$f(a) = 1. \quad (4.1)$$

### Exemplo 2: Placa com uma largura finita e com trinca central.

O exemplo 2 é uma placa, com largura “ $b$ ”, e uma trinca central, com tamanho inicial “ $a_0$ ”, solicitada sob um carregamento de tração como a figura 4.2.

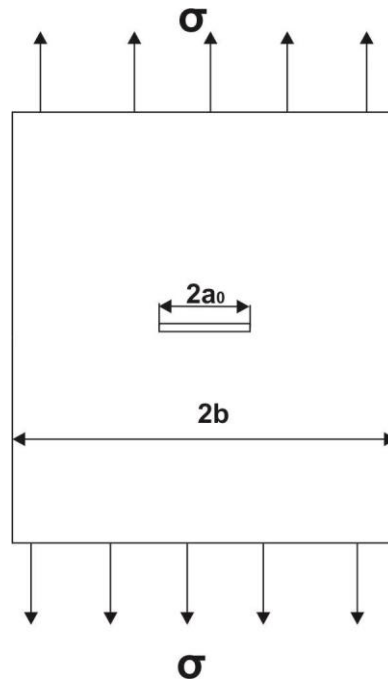


Figura 4.2 – Placa com trinca central.

Fonte: elaborado pelo autor

Para esse exemplo, a função de correção do fator intensidade de tensão é representada pela equação 4.2,

$$f(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}. \quad (4.2)$$

### Exemplo 3: Placa com largura finita e com trinca na aresta.

O exemplo 3 é uma placa finita, com largura “ $b$ ”, e uma trinca na sua aresta ou “borda”, com tamanho inicial “ $a_0$ ”, solicitada sob um carregamento de tração, consoante a figura 4.3.

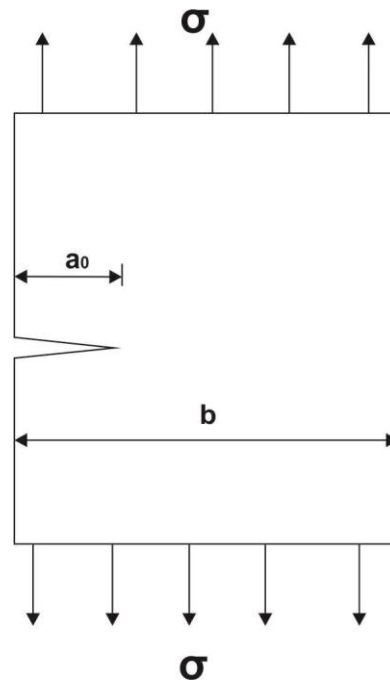


Figura 4.3 – Placa com trinca na aresta.

Fonte: elaborado pelo autor

A função de correção do fator intensidade de tensão é representada pela equação 4.3,

$$f(a) = 1.122 - 0.231 \left(\frac{a}{b}\right) + 10.55 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{b}\right)^4. \quad (4.3)$$

#### 4.1 DESEMPENHO DAS COTAS SUPERIOR E INFERIOR

Para avaliar o desempenho das cotas aplicados aos exemplos 1-3, sendo os dados utilizados:  $a_0 = 0.001\text{m}$ ,  $b = 0.1\text{m}$ ,  $\Delta\sigma = 70\text{ Mpa}$ ,  $N \in [0, 900.000]$ . Os modelos apresentam parâmetros diferentes. Foram utilizados os dados obtidos nos trabalhos de Barsom e Rolf (1999), Castro e Meggiolaro (2009) e Al-Rubaie et al. (2007). Esses dados estão descritos na tabela 1.

**Tabela 1 – Parâmetros dos modelos de propagação de trinca**

| Propriedades dos aços ferríticos: $k_c = 250 \text{ Mpa.m}^{1/2}$  |                       |      |     |
|--|-----------------------|------|-----|
| Modelo   | C                     | m    | R   |
| Paris-Erdogan  | $6,9 \cdot 10^{-12}$  | 3    | -   |
| Forman   | $2 \cdot 10^{-9}$     | 2,9  | 0   |
| Propriedades da liga Inconel 600: $k_c = 40,08 \text{ Mpa.m}^{1/2}$ e $\Delta k_{th} = 6,38 \text{ Mpa.m}^{1/2}$ |                       |      |     |
| Modelo   | C                     | m    | R   |
| Collipriest  | $5,61 \cdot 10^{-12}$ | 2,62 | 0,1 |

Como pode ser observado nas equações para a cota superior, o empacotamento do valor da cota depende do valor inicial de “ $a^*$ ”. Deve-se ter  $a^* > a_0$ , atribui-se valores na forma de  $a^* = \beta a_0$ , com o valor de  $\beta > 1$ . Os valores do coeficiente “ $\beta$ ” devem ser escolhidos de tal forma a não violar a cota superior, ou seja, obter um valor para a cota superior maior que o obtido pelo método do RK4 e, possuir um pequeno afastamento em relação à solução numérica aproximada obtida pelo método RK4. Por inspeção numérica, verificou-se que valores de “ $\beta$ ” iguais a 1,2 violaram a cota superior, passando assim a não ser mais cota, devido a isso, utilizou-se valores de “ $\beta$ ” maiores que 1,3.

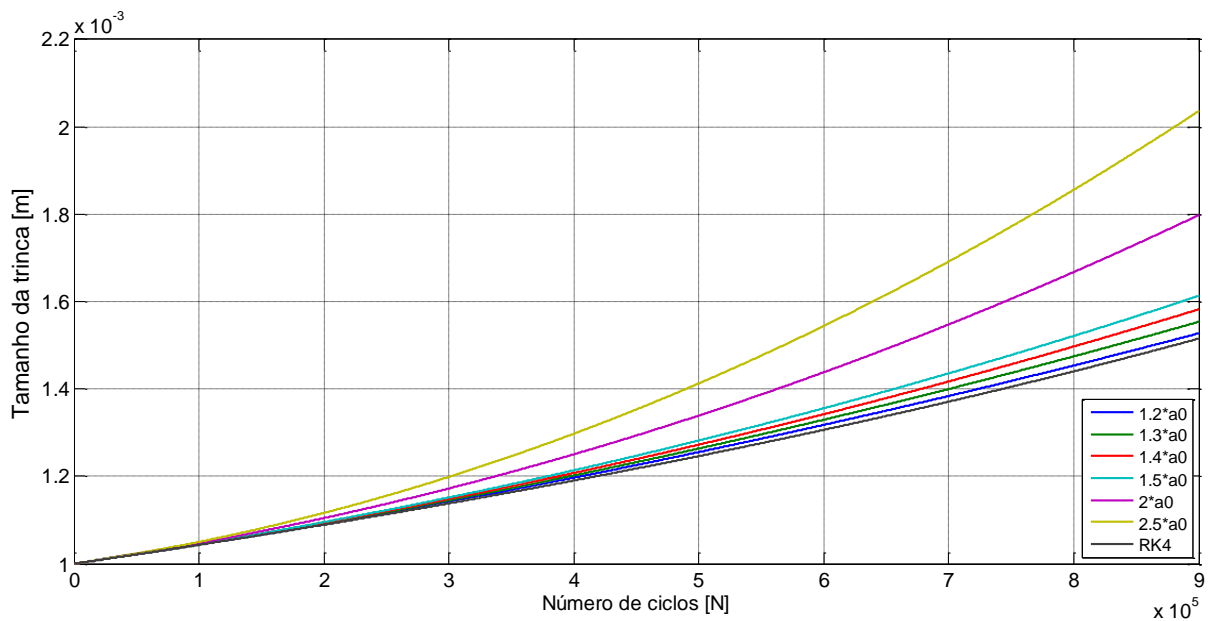
Para avaliar o desempenho das cotas, superior e inferior, definiu-se a função “desvio relativo”,  $\delta_{Inferior,Superior}: \{0,1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por,

$$\delta_{Inferior,Superior}(N_k) = 100 \left( \frac{a_{CS,CI} - a_{RK4}}{a_{RK4}} \right) (N_k) \quad [\%], \forall N_k \in \{0,1, \dots, N\}. \quad (4.4)$$

Nas próximas seções serão apresentados, para cada modelo, o comparativo entre a solução numérica aproximada pelo método RK4 e as cotas nas seguintes relações: gráficos entre o número de ciclos e o tamanho da trinca; desvio relativos entre as cotas superior e inferior e, a razão dos tempos para a computação da solução numérica via RK4 e as cotas,  $\left( \rho = \left( \frac{T_{RK4}}{T_{CS,CI}} \right) \right)$ .

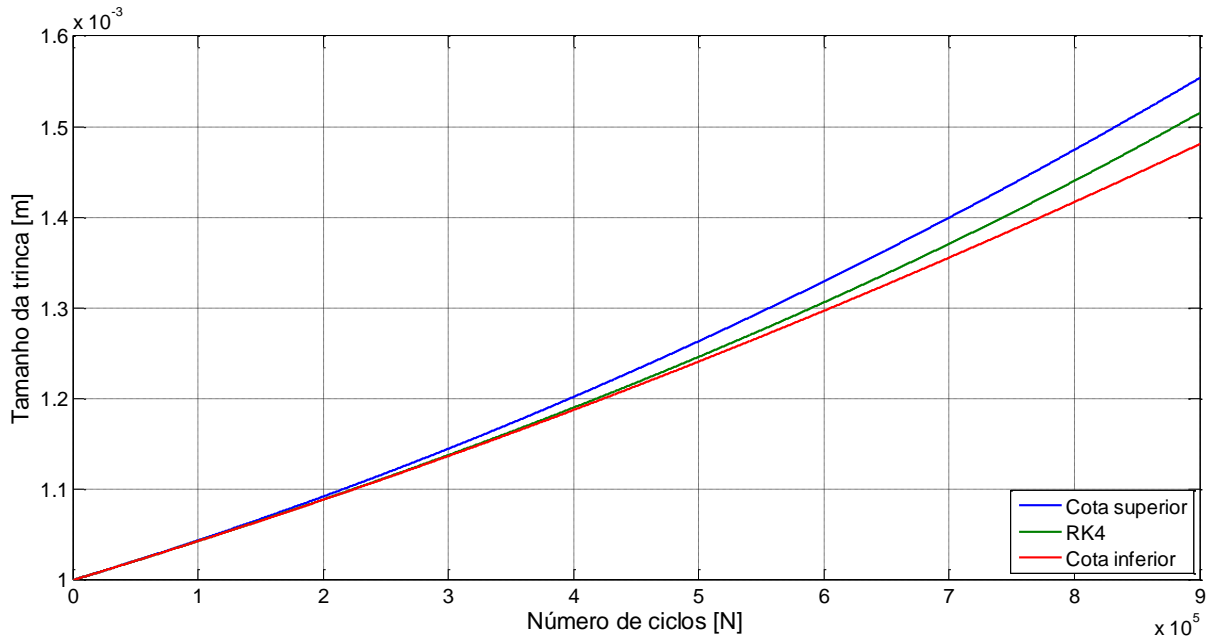
## Modelo de Paris-Erdogan

Para a resolução dos exemplos citados acima, inicialmente, deve-se definir o valor do “ $a^*$ ”, pois, a cota superior depende deste parâmetro. Porém, há valores que a cota superior é violada pela solução numérica via RK4. Por exemplo, para “ $\beta$ ” igual a 1,1 e 1,2 este comportamento é verificado por inspeção computacional e, conseqüentemente, a função  $a_{CS}$  não é mais uma cota superior. Devido a isso, adotou-se o valor de  $a^* = 1,3a_0$ , ( $\beta = 1,3$ ).



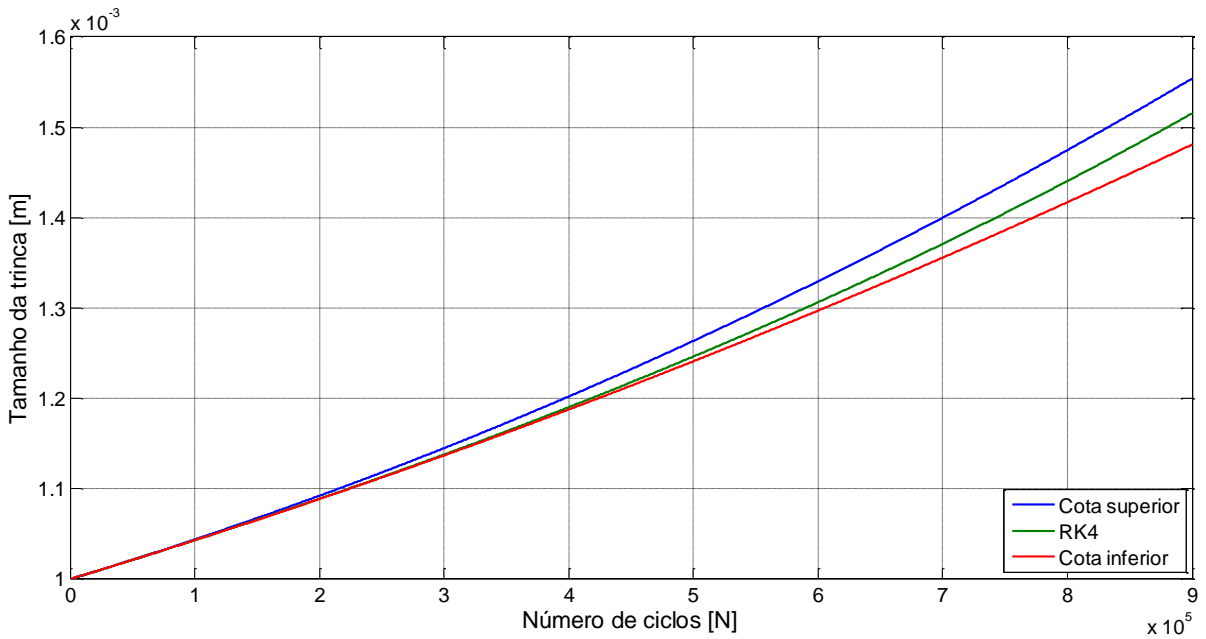
**Figura 4.4 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 2, segundo modelo de Paris.**

Fonte: elaborado pelo autor



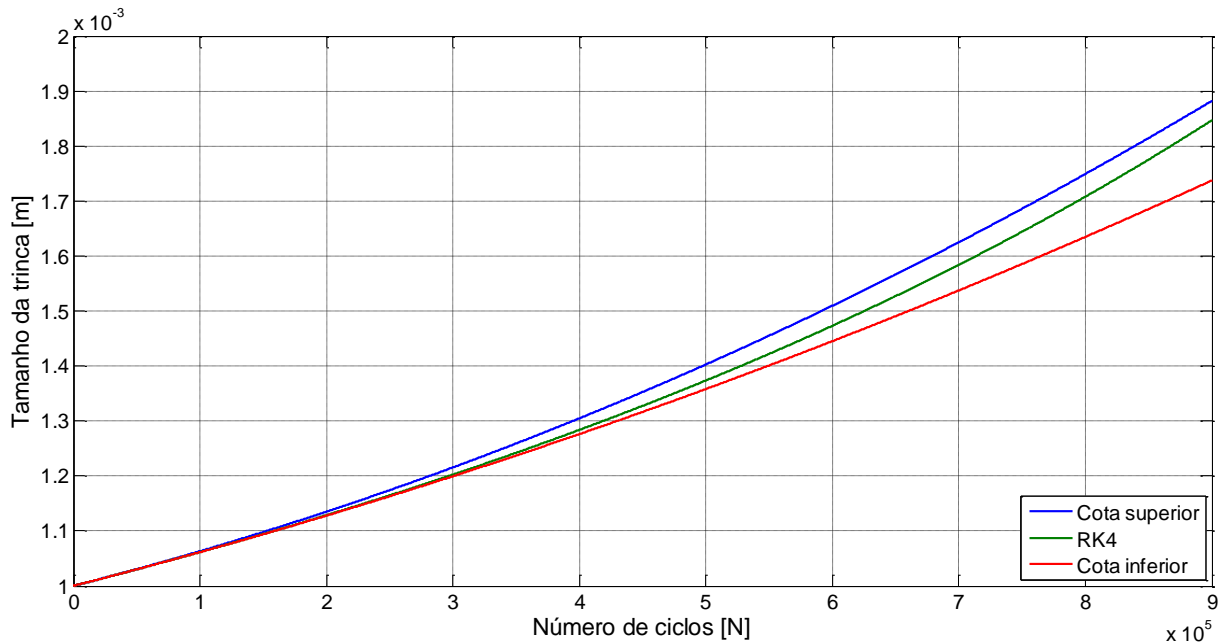
**Figura 4.5 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 1, segundo modelo de Paris.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.6 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 2, segundo modelo de Paris.**

Fonte: elaborado pelo autor



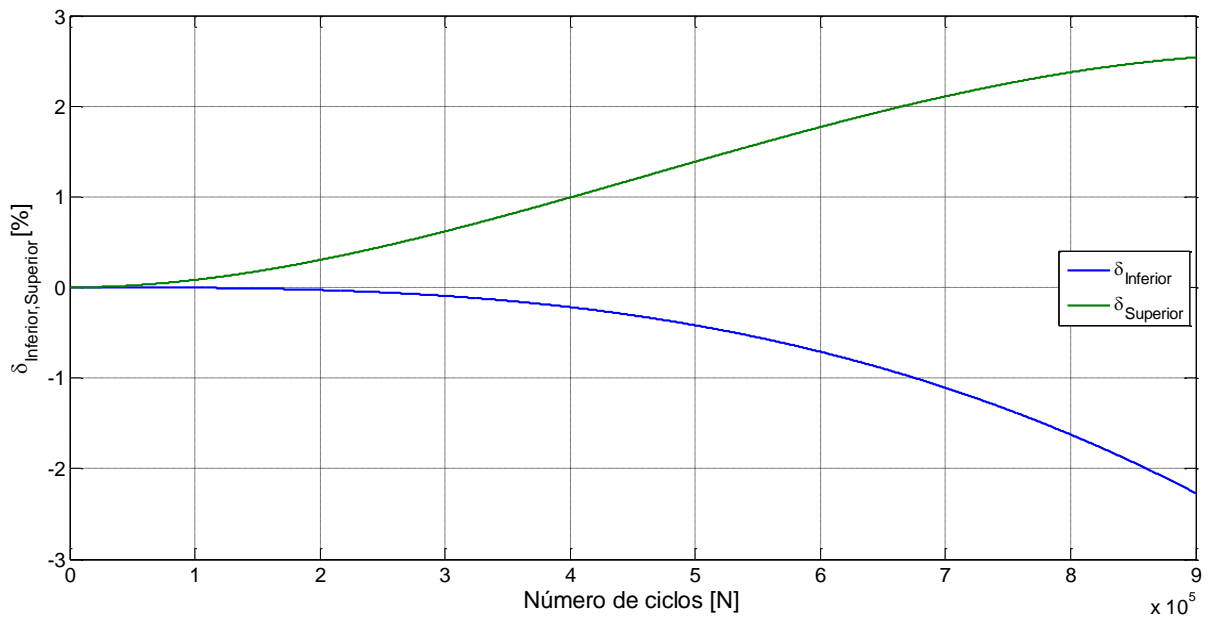
**Figura 4.7 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 3, segundo modelo de Paris.**

**Fonte:** elaborado pelo autor

Nas figuras 4.5 e 4.7, observa-se que as cotas superior e inferior não apresentam grandes desvios em seus valores numéricos, em termos de aproximação, quando comparadas com a solução numérica aproximada pelo método de RK4. Isto pode ser observado e quantificado através dos gráficos da função desvio relativo. Com isso, afirma-se que para esses exemplos, no modelo de Paris-Erdogan, as cotas superior e inferior envelopam, de forma estreita, a curva propagação da trinca.

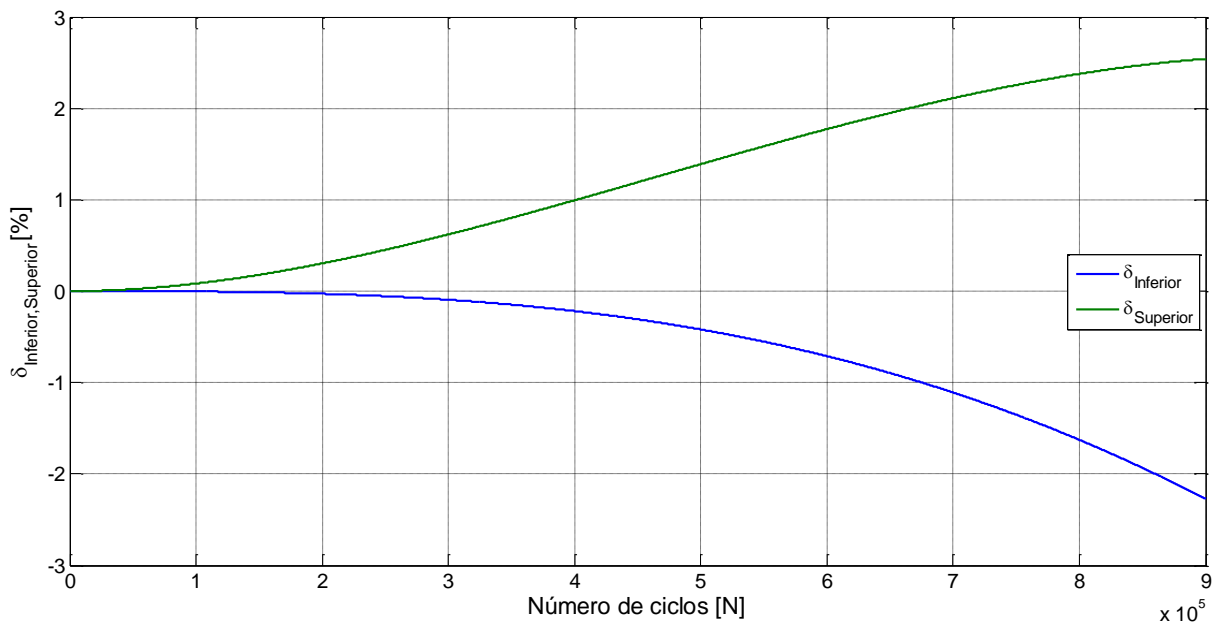
Para avaliar o desempenho da metodologia, é estabelecida a função desvio relativo das cotas em relação ao RK4, equação 4.4. A vista disto, as figuras 4.8 a 4.10 apresentam o desvio relativo das cotas superior e inferior em relação ao RK4, para os exemplos.





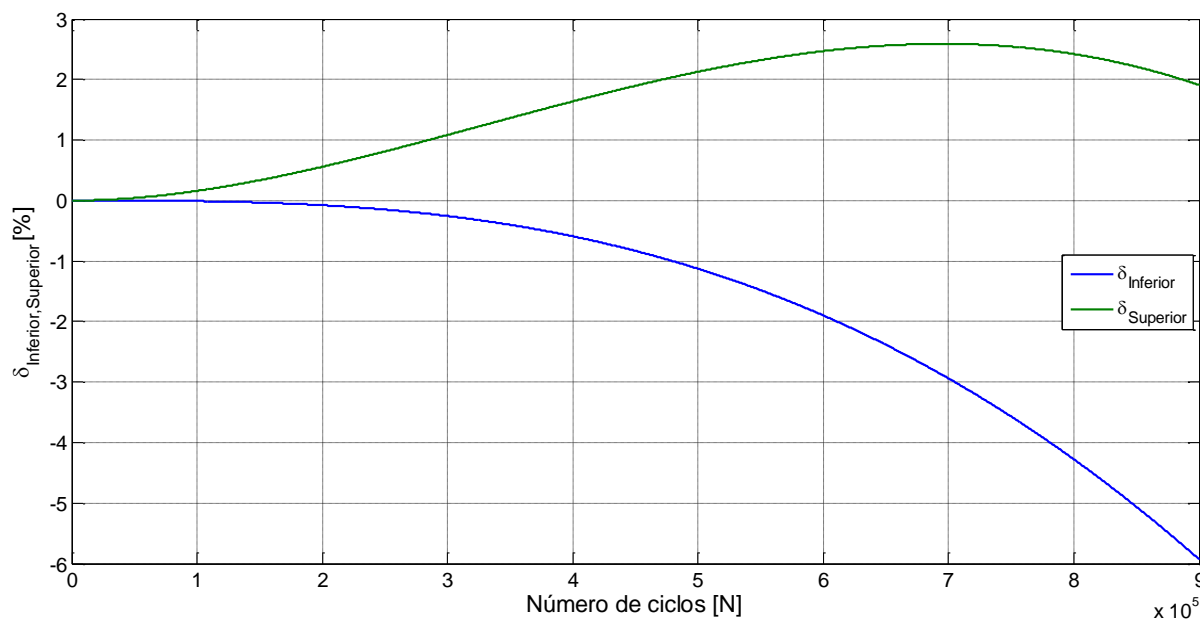
**Figura 4.8 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior para o exemplo 1, segundo modelo de Paris.**

**Fonte: elaborado pelo autor**



**Figura 4.9 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior para o exemplo 2, segundo modelo de Paris.**

**Fonte: elaborado pelo autor**



**Figura 4.10 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior para o exemplo 3, segundo modelo de Paris.**

**Fonte: elaborado pelo autor**

Observa-se por meio das figuras 4.8 e 4.9 que o desvio relativo entre as cotas superior e inferior é semelhante, sendo 2,54% para a cota superior e -2,26% para a cota inferior. A cota superior apresentou um maior desvio relativo até 600000 ciclos, na figura 4.10, quando se compara com o desvio da cota inferior. Porém, a cota inferior apresentou o maior desvio de -5,92%. Logo, analisando os três gráficos, as cotas são precisas em termos de aproximação com a solução numérica aproximada.

A tabela 2 apresenta o tempo computacional aproximado para a solução pelo método do RK4 e obtenção das cotas. Destarte, apresentam a razão entre os tempos de computação iguais a 143497,98; 174864,64 e 133894,58 vezes mais eficientes computacionalmente, quando comparadas com a solução do método do RK4. Este parâmetro ( $\rho$ ), juntamente com a função desvio relativo, mostram que a metodologia proposta possui um desempenho satisfatório.

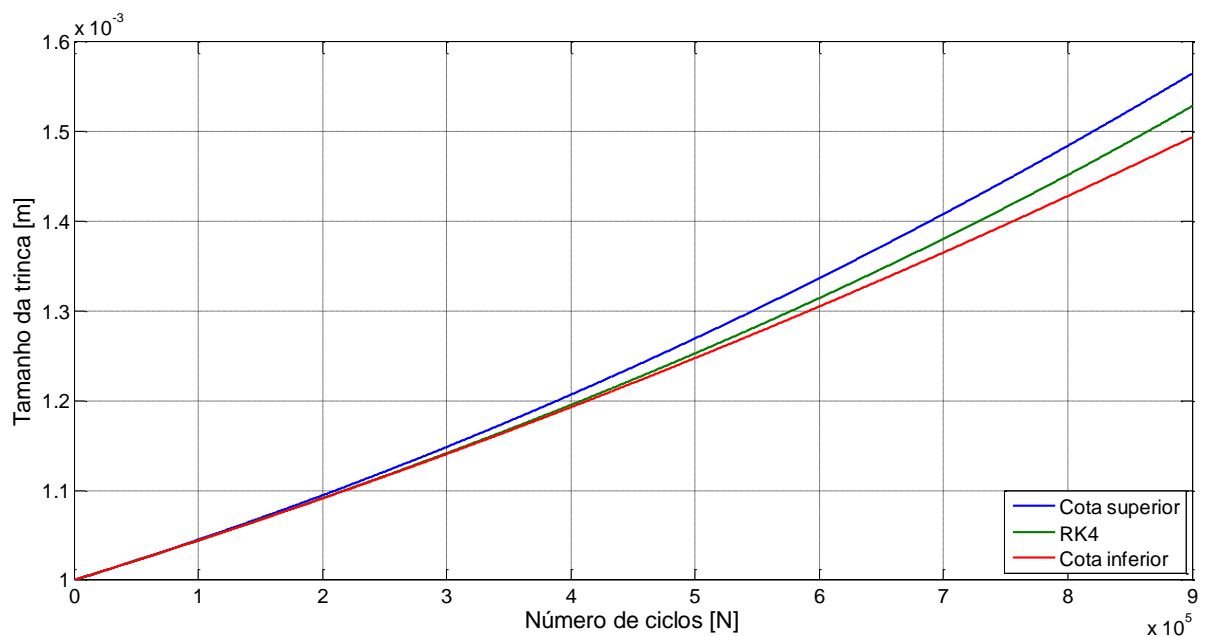
**Tabela 2 – Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Paris-Erdogan**

| Exemplos | RK4 (s)       | Cotas (s)  | $\rho$    |
|----------|---------------|------------|-----------|
| 1        | 1470,32632309 | 0,01024632 | 143497,98 |
| 2        | 1318,38672375 | 0,00753947 | 174864,64 |
| 3        | 1482,60674182 | 0,01107294 | 133894,58 |

Fonte: elaborado pelo autor

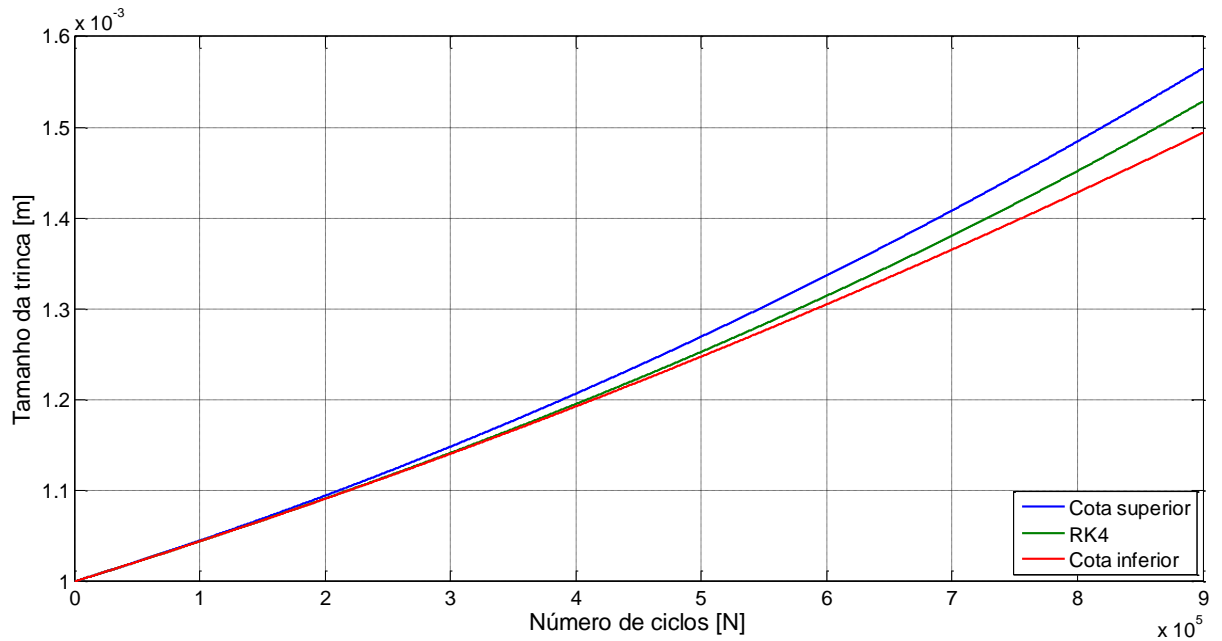
### Modelo de Forman

Da mesma forma que no modelo de Paris-Erdogan, é possível observar pelas figuras 4.11 a 4.13, que, tanto a cota superior como a inferior não apresentam grandes desvios numéricos, em termos de aproximação, quando comparada com a solução numérica aproximada pelo método de RK4. Com isso, é possível afirmar que, para esses exemplos, no modelo de Forman, as funções cotas superior e inferior envelopam, de forma estreita, a curva da propagação da trinca.



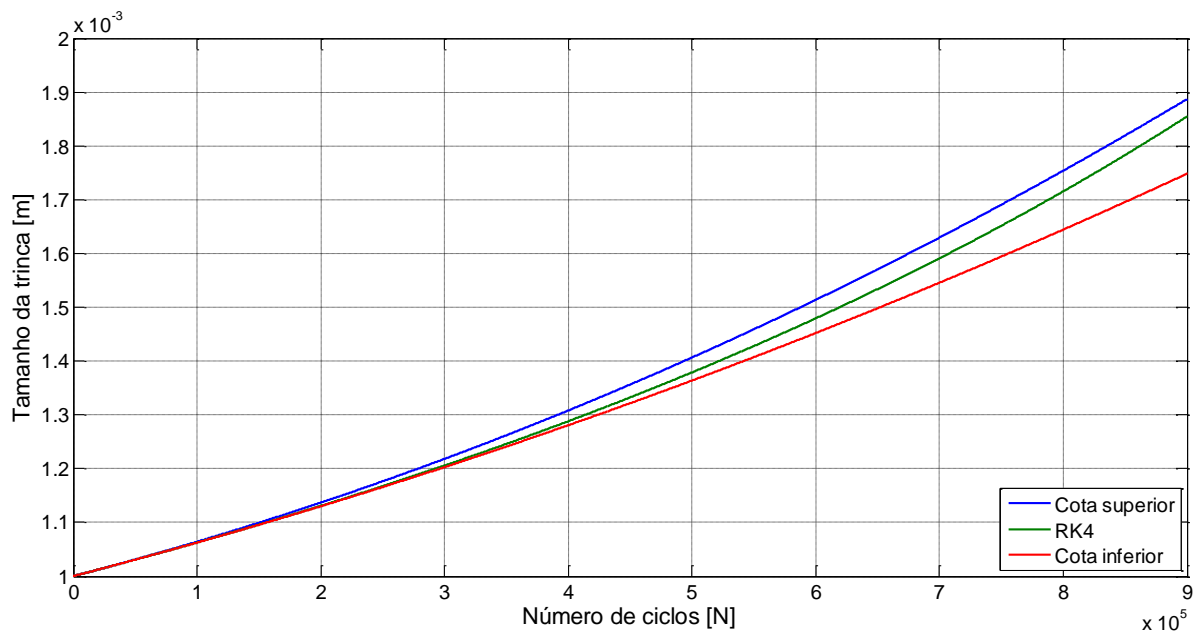
**Figura 4.11 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 1, segundo modelo de Forman.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.12 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 2, segundo modelo de Forman.**

**Fonte: elaborado pelo autor**

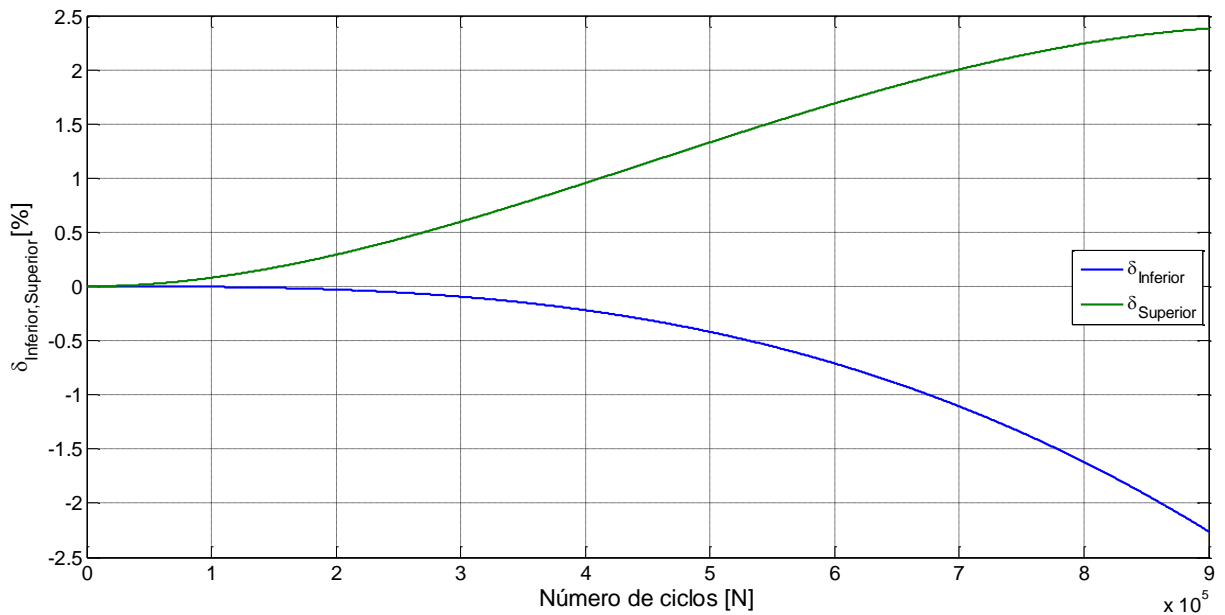


**Figura 4.13 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo , segundo modelo de Forman.**

**Fonte: elaborado pelo autor**

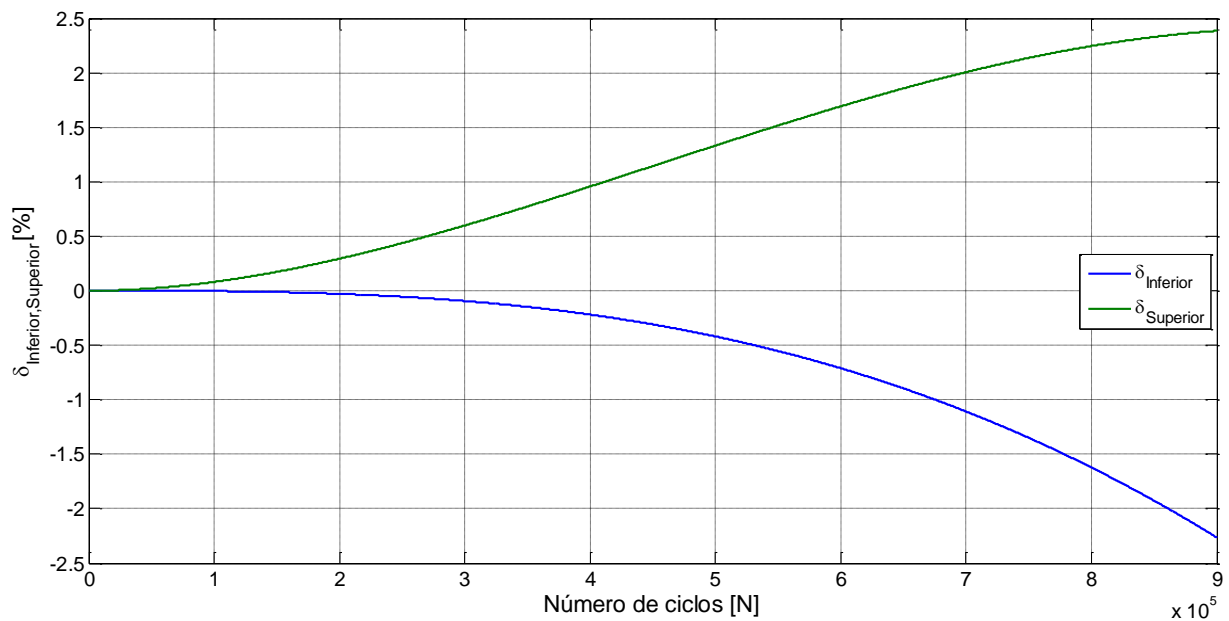
Para analisar o desempenho da metodologia, para o modelo de Forman, é estabelecido o desvio relativo das cotas em relação ao RK4, equação 4.4. A vista

disto, as figuras 4.14 a 4.16 apresentam o desvio relativo das cotas superior e inferior em relação ao RK4 para os exemplos.



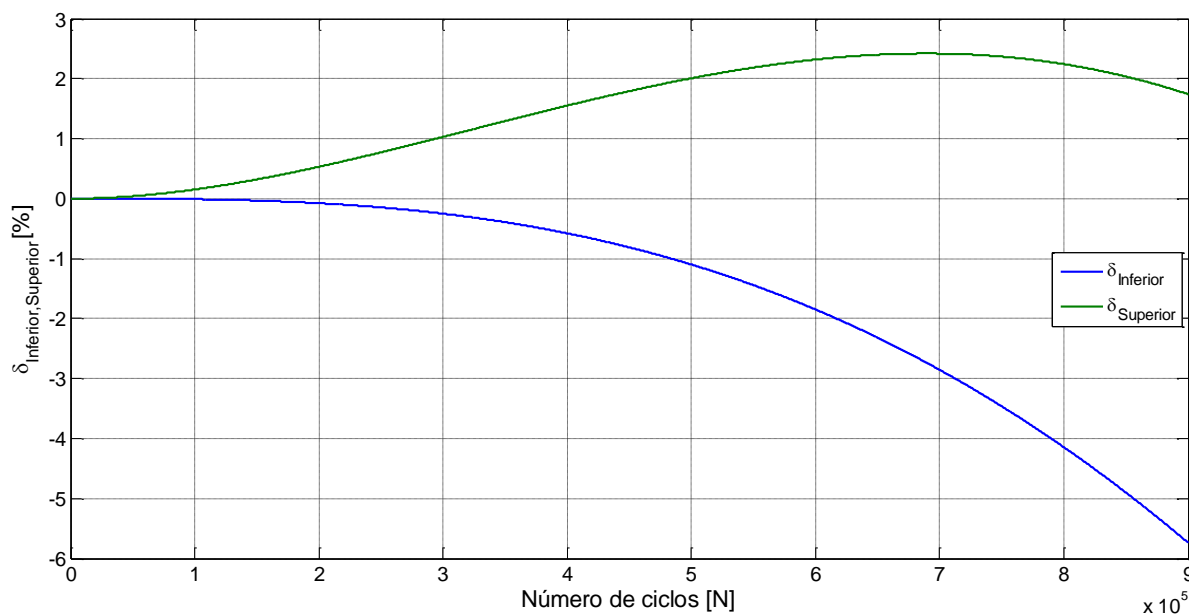
**Figura 4.14 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo para o exemplo 1, segundo modelo de Forman.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.15 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior para o exemplo 2, segundo modelo de Forman.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.16 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior para o exemplo 3, segundo modelo de Forman.**

**Fonte: elaborado pelo autor**

Observa-se, nas figuras 4.14 e 4.15, que o desvio relativo entre as cotas superior e inferior é muito semelhante, conforme ocorreu no modelo de Paris, sendo de 2,38% para a cota superior e -2,25% para a cota inferior. A cota inferior apresentou um menor desvio relativo a cada ciclo, até 600000 ciclos, quando se compara com o desvio da cota superior. Entretanto, teve o maior desvio relativo de -5,33%, mas, mesmo assim, pela análise dos dados nos gráficos, as cotas são “justas” na aproximação com o método numérico do RK4.

A tabela 3 apresenta o tempo computacional aproximado para a solução pelo método do RK4 e pelas cotas. Conseqüentemente, apresentam a razão entre os tempos de computação iguais a 141637,66; 155228,87 e 187354,94 vezes mais eficientes computacionalmente, quando comparadas com a solução do método do RK4. Este parâmetro ( $\rho$ ), juntamente com a função desvio relativo, mostram que a metodologia proposta possui um desempenho satisfatório.

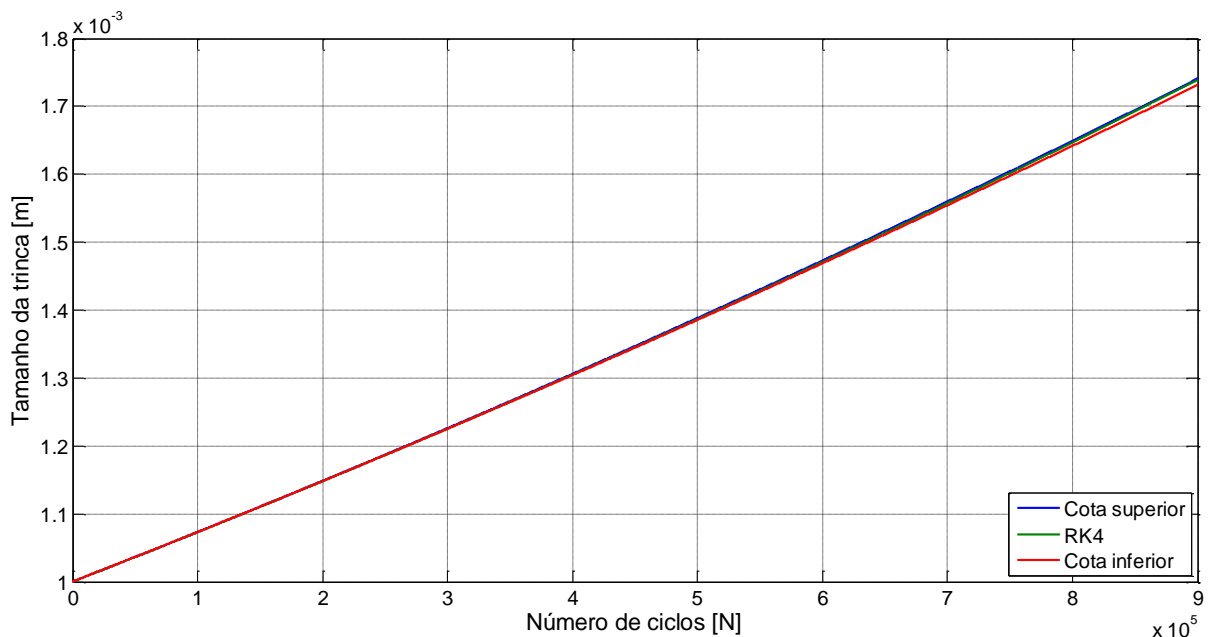
**Tabela 3 – Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Forman**

| Exemplos | RK4 (s)       | Cotas (s)  | $\rho$    |
|----------|---------------|------------|-----------|
| 1        | 1591,71696126 | 0,01123795 | 141637,66 |
| 2        | 1549,46820051 | 0,00998183 | 155228,87 |
| 3        | 1577,85648395 | 0,00842175 | 187354,94 |

Fonte: elaborado pelo autor

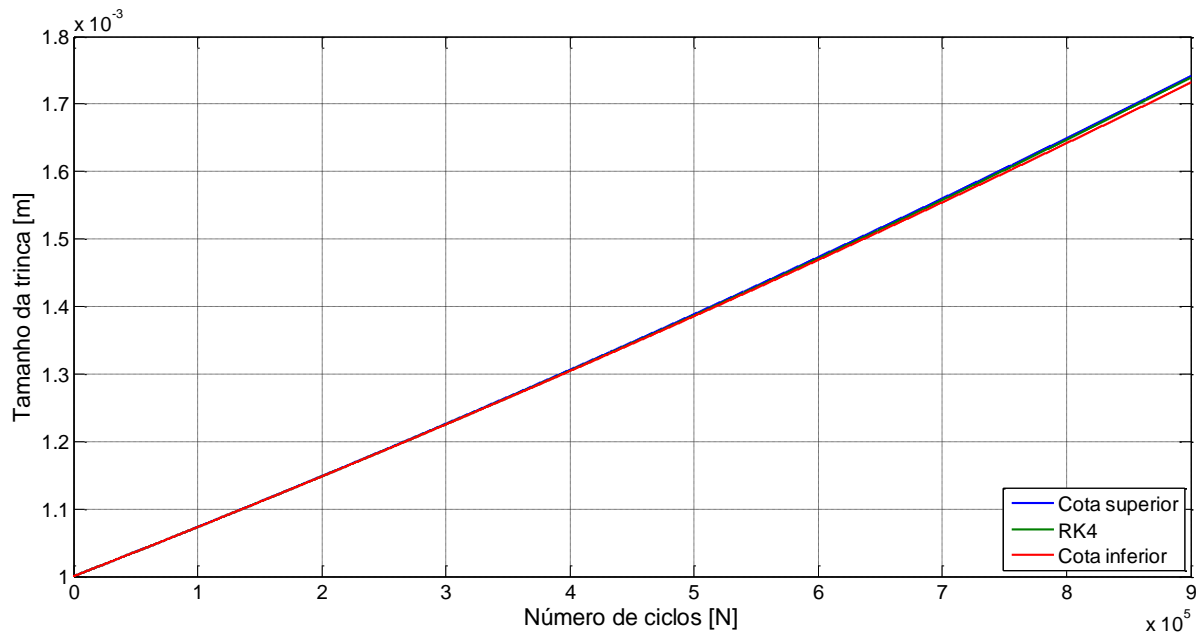
### Modelo de Collipriest

Da mesma forma, que no modelo de Paris-Erdogan, é possível observar pelas figuras 4.17 a 4.19, que tanto a cota superior como a inferior não apresentam grandes desvios numéricos, em termos de aproximação, quando comparada com a solução numérica aproximada pelo método de RK4. Com isso, é possível afirmar que para esses exemplos, no modelo de Collipriest, as funções cotas superior e inferior envelopam, de forma mais estreita, a curva da propagação da trinca quando comparada com os outros modelos, isso se dá em função da “regularidade” da lei de evolução de Collipriest.



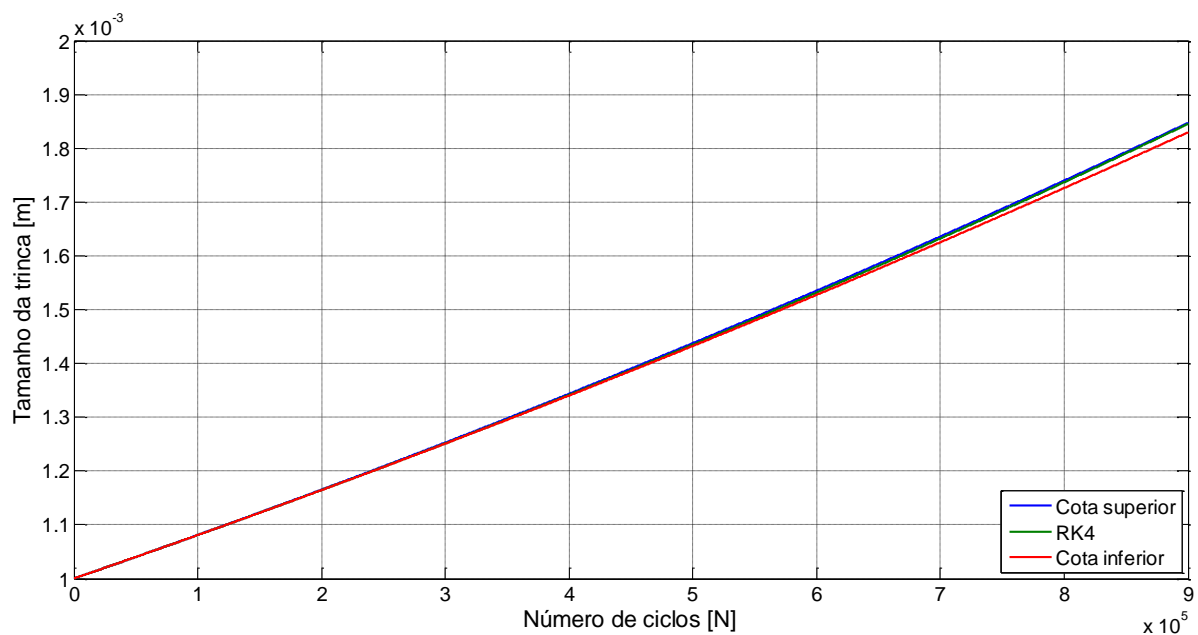
**Figura 4.17 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 1, segundo modelo de Collipriest.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.18 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 2, segundo modelo de Collipriest.**

Fonte: elaborado pelo autor



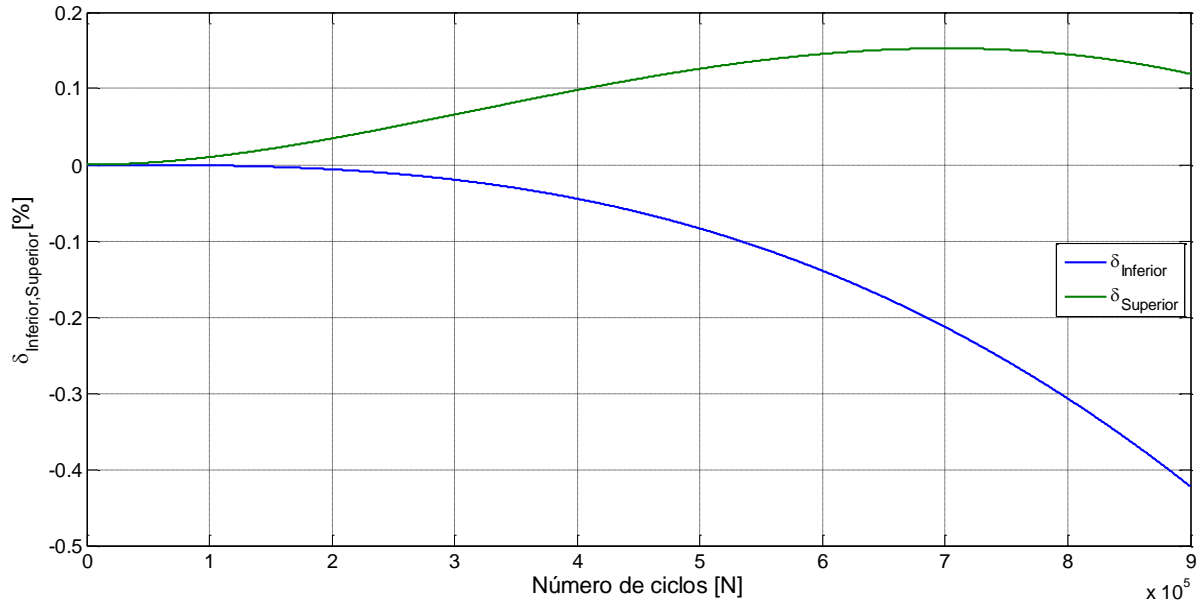
**Figura 4.19 – Funções cotas superior e inferior comparada com a solução numérica aproximada para o exemplo 3, segundo modelo de Collipriest.**

Fonte: elaborado pelo autor

Para analisar desempenho da metodologia, para o modelo de Collipriest, é estabelecido o desvio relativo das cotas em relação ao RK4, equação 4.4. A vista

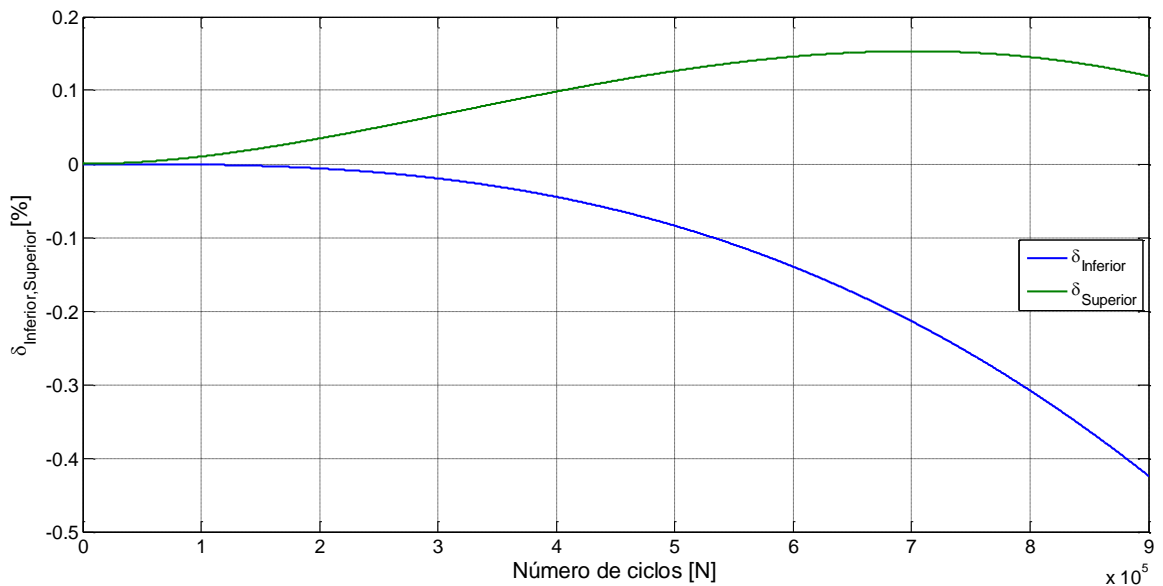


disto, as figuras 4.20 a 4.22, apresentam o desvio relativo das cotas superior e inferior em relação ao RK4 para os exemplos.



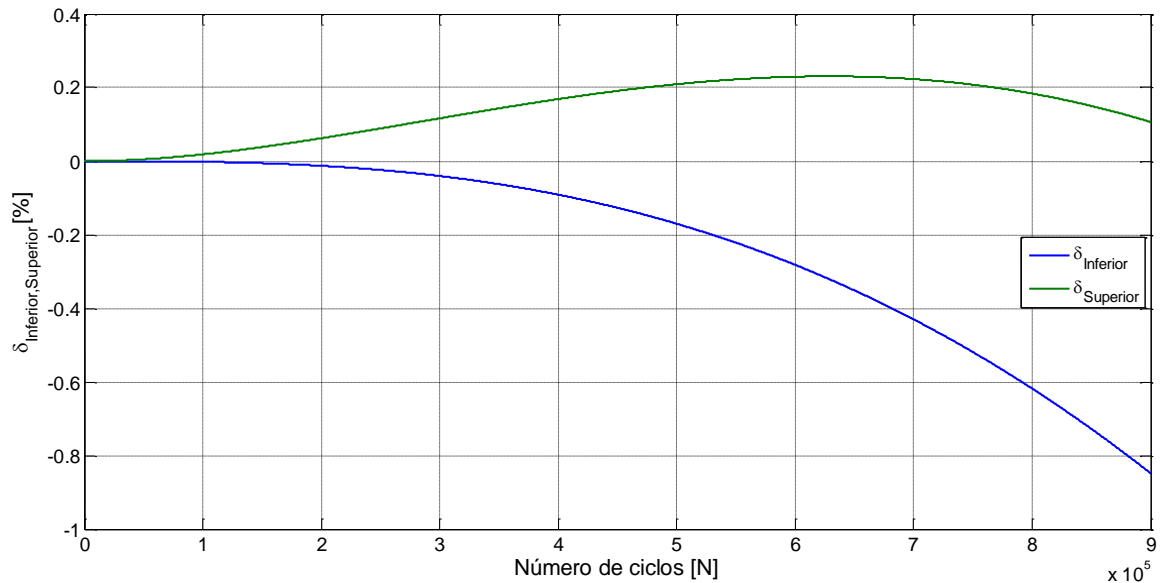
**Figura 4.20 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo para o exemplo 1, segundo modelo de Collipriest.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.21 – Função desvio relativo entre cotas superior e inferior exemplo para o exemplo 2, segundo modelo de Collipriest.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.22 – Função erro relativo entre cotas superior e inferior exemplo para o exemplo 3, segundo modelo de Collipriest.**

Fonte: elaborado pelo autor

Observa-se, nas figuras 4.20 e 4.21, que o desvio relativo entre as cotas superior e inferior é muito semelhante, como ocorreu no modelo de Paris e de Forman, sendo de 0,15% para a cota superior e -0,42% para a cota inferior. A cota inferior apresentou um menor desvio relativo a cada ciclo, até 600000 ciclos, quando se compara com o desvio da cota superior. Entretanto, teve o maior desvio relativo de -0,84%, mesmo assim, pela análise dos dados nos gráficos, as cotas são “justas” na aproximação com o método numérico do RK4.

A tabela 4 apresenta o tempo computacional aproximado para a solução pelo método do RK4 e pelas cotas. Conseqüentemente, apresentam a razão entre os tempos de computação iguais a 166821,94; 179646,31 e 161977,14 vezes mais eficientes computacionalmente, quando comparadas com a solução do método do RK4. Este parâmetro ( $\rho$ ), juntamente com a função desvio relativo mostram, que a metodologia proposta possui um desempenho satisfatório.

**Tabela 4 – Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Collipriest**

| Exemplos | RK4 (s)       | Cotas (s)  | $\rho$    |
|----------|---------------|------------|-----------|
| 1        | 1329,06871661 | 0,00796699 | 166821,94 |
| 2        | 1381,59866747 | 0,00769066 | 179646,31 |
| 3        | 1350,31916187 | 0,00833648 | 161977,14 |

Fonte: elaborado pelo autor

## 4.2 UMA APLICAÇÃO “INGÊNUA” DA METODOLOGIA A UM PROBLEMA DE ENGENHARIA

Nesta seção far-se-á uma aplicação prática, e quase natural da metodologia desenvolvida, na qual o engenheiro pode decidir sobre a sua utilização ou não. Consiste em obter uma aproximação através de qualquer função que dependa do comportamento das cotas inferior e superior, sem ter conhecimento da solução da lei de evolução obtida através de um método matemático aproximado qualquer. Desse modo, as funções a serem utilizadas serão as funções média aritmética e média geométrica das cotas superior e inferior, pois, os valores obtidos através da solução numérica aproximada pelo método do RK4 estão entre as cotas.

A média aritmética é calculada pela equação,

$$\mu_{ar} = \frac{(a_{CS} + a_{CI})}{2}. \quad (4.5)$$

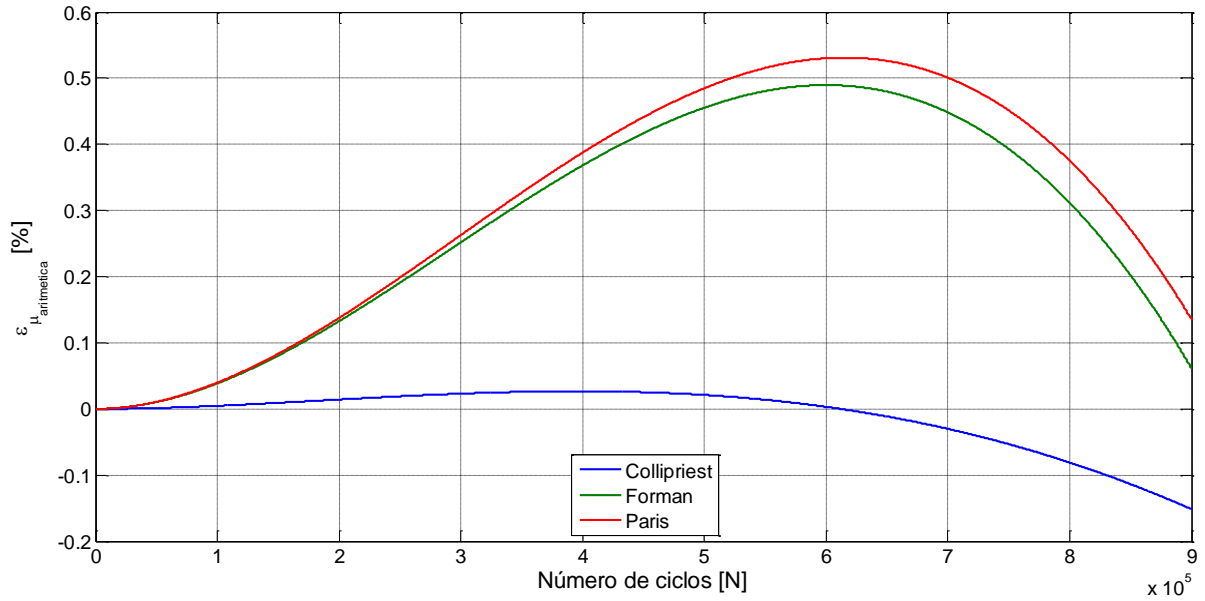
E a média geométrica é calculada pela equação,

$$\mu_{geo} = \sqrt{a_{CS} \cdot a_{CI}}. \quad (4.6)$$

Para se obter o erro relativo das médias calculadas nas cotas, entre as cotas e o método numérico aproximado de RK4, utilizou-se as equações,

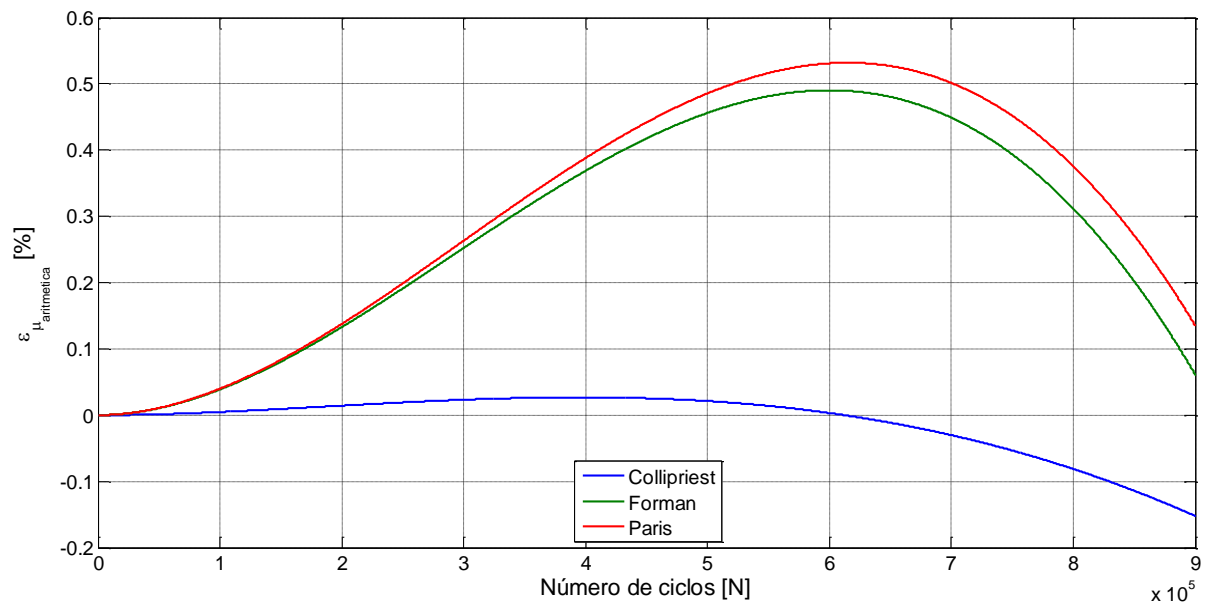
$$\begin{cases} \varepsilon_{\mu_{geométrica}} = \frac{(\sqrt{a_{CS} \cdot a_{CI}} - a_{RK4})}{a_{RK4}} 100; \\ \varepsilon_{\mu_{aritmética}} = \frac{\left[ \frac{(a_{CS} + a_{CI})}{2} - a_{RK4} \right]}{a_{RK4}} 100. \end{cases} \quad (4.7)$$

Sendo  $a_{RK4}$  o valor obtido para o tamanho de trinca pelo método numérico de RK4. Os gráficos a seguir, apresentam a função erro relativo da média aritmética para os três modelos desse trabalho.



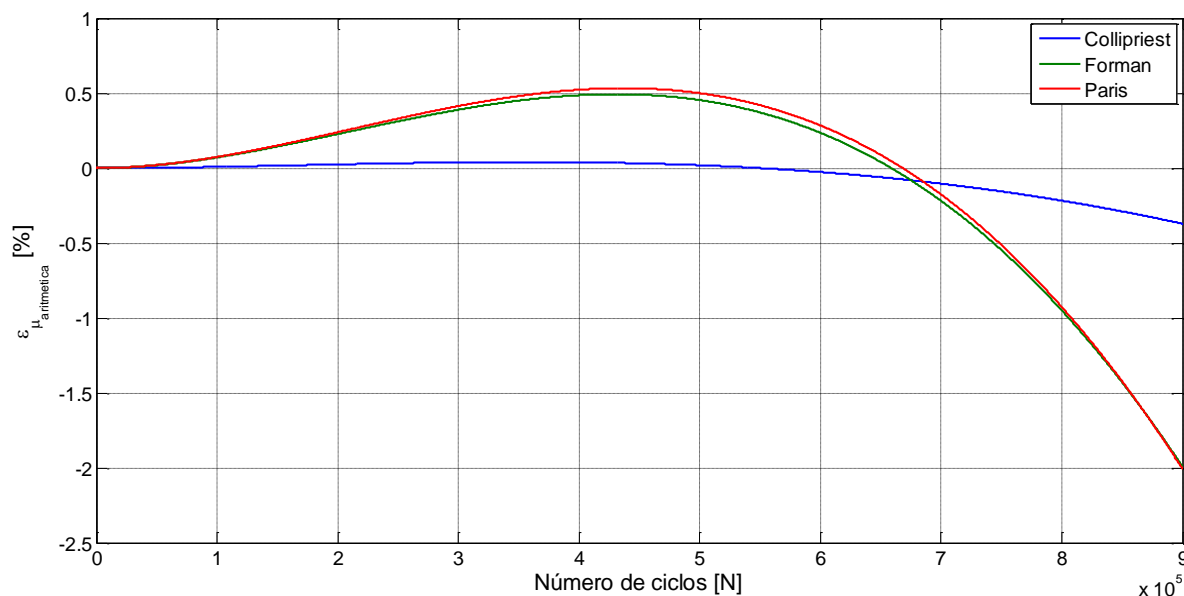
**Figura 4.23 – Função erro relativo da média aritmética das cotas superior e inferior em relação ao RK4 para o exemplo 1, segundo os três modelos.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.24 – Função erro relativo da média aritmética das cotas superior e inferior em relação ao RK4 para o exemplo 2, segundo os três modelos.**

Fonte: elaborado pelo autor



**Figura 4.25 – Função erro relativo da média aritmética das cotas superior e inferior em relação ao RK4 para o exemplo 3, segundo os três modelos.**

**Fonte: elaborado pelo autor**

É possível verificar pelas figuras 4.23 a 4.24, para os exemplos 1 e 2, que o erro relativo da média aritmética ficou semelhante para os três modelos. Nesses casos o erro relativo máximo foi de 0,53% para o modelo de Paris, e -0,15% para o modelo de Collipriest. Já para a figura 4.25, o valor máximo do erro relativo foi de 0,53% para o modelo de Paris, e o valor mínimo para a função desvio foi de -2% para o mesmo modelo. Para o modelo de Collipriest a função erro relativo da média aritmética se manteve mais próxima do zero, devido a “regularidade” da lei de evolução. Isso representa que as cotas envelopam de forma muito estreita a solução obtida pelo método numérico aproximado de RK4.

### 4.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Os valores obtidos, em geral, da função desvio relativo foram todos até 10%. Pode-se verificar pela tabela 4, pela razão dos tempos computacionais, que o tempo de solução, para os três exemplos deste trabalho, das cotas superior e inferior é muito menor, quando comparada com o tempo da solução numérica aproximada pelo método de RK4, o que caracteriza numa metodologia eficiente.

Os valores obtidos para as médias aritmética e geométrica, em relação às cotas com a solução aproximada, têm valores muito próximos, o que evidencia a eficiência da metodologia. Ademais, o desvio relativo entre as médias tende a zero. A tabela 5 apresenta alguns resultados obtidos.

**Tabela 5 – Resultados obtidos**

| Modelo        | Exemplo | Desvio relativo [%] |               | $\rho$    |
|---------------|---------|---------------------|---------------|-----------|
|               |         | Cota superior       | Cota inferior |           |
| Paris-Erdogan | 1       | 2,53                | -2,26         | 143497,98 |
|               | 2       | 2,54                | -2,26         | 174864,64 |
|               | 3       | 2,58                | -5,92         | 133894,58 |
| Forman        | 1       | 2,38                | -2,25         | 141637,66 |
|               | 2       | 2,38                | -2,25         | 155228,87 |
|               | 3       | 2,87                | -5,33         | 187354,94 |
| Collipriest   | 1       | 0,15                | -0,42         | 166821,94 |
|               | 2       | 0,15                | -0,42         | 179646,31 |
|               | 3       | 0,23                | -0,84         | 161977,14 |

Fonte: elaborado pelo autor

A tabela 6, apresenta os valores obtidos na função erro relativo das médias aritmética e geométrica em função do valor de  $\alpha_{RK4}$ , obtido pelo método de RK4. Os valores da função erro relativo é expressivo, pois, se obteve valor máximo de 0,52% e valor mínimo de -2,08%, o que demonstra como a solução obtida pela aplicação das funções cotas superior e inferior é justa quando comparada com a solução via RK4.

**Tabela 6 – Resultados erro relativo média aritmética e geométrica**

| Modelo        | Exemplo | Função erro relativo das médias [%] |                              |                               |                               |
|---------------|---------|-------------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|               |         | $\varepsilon_{\mu_{ar},mín}$        | $\varepsilon_{\mu_{ar},máx}$ | $\varepsilon_{\mu_{geo},mín}$ | $\varepsilon_{\mu_{geo},máx}$ |
| Paris-Erdogan | 1       | 0                                   | 0,53                         | 0                             | 0,52                          |
|               | 2       | 0                                   | 0,53                         | 0                             | 0,52                          |
|               | 3       | -2,01                               | 0,53                         | -2,08                         | 0,52                          |
| Forman        | 1       | 0                                   | 0,48                         | 0                             | 0,48                          |
|               | 2       | 0                                   | 0,49                         | 0                             | 0,48                          |
|               | 3       | -1,99                               | 0,49                         | -2,06                         | 0,48                          |
| Collipriest   | 1       | -0,15                               | 0,026                        | -0,15                         | 0,026                         |
|               | 2       | -0,15                               | 0,27                         | -0,15                         | 0,27                          |
|               | 3       | -0,37                               | 0,04                         | -0,37                         | 0,04                          |

Fonte: elaborado pelo autor

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo de todo o estudo, pudemos constatar que a metodologia proposta (FBC) apresentou as funções cotas superior e inferior para modelos de propagação de trinca CAC, que dependem somente da função de correção do fator de intensidade de tensão e sua derivada, entre os pontos “ $a_0$ ” e “ $a^*$ ”. As funções das cotas apresentaram um bom comportamento de envelopamento da solução numérica aproximada, obtida pelo método de RK4. Em geral, essas funções são, por si só, um problema de valor inicial. Portanto, para a definição das cotas utilizou-se a série de Taylor, com resto de Lagrange.

Nesse sentido, a metodologia (FBC) foi aplicada aos modelos de Paris-Erdogan, Forman e Collipriest. As cotas para esses três modelos foram avaliadas em três exemplos e; os valores obtidos foram comparados à solução numérica pelo método RK4.

O comportamento da metodologia das cotas superior e inferior foi verificado através de gráficos  $a(N) \times N$  e desvios relativos; para os modelos testados, as funções cotas superior e inferior apresentaram-se como forma de aproximação para o comportamento de evolução da trinca.

Na resolução dos exercícios efetuada a título exemplificativo, as cotas superior e inferior apresentaram desvio relativo máximos de 10%. A cota inferior apresentou o maior desvio. Contudo, pode-se afirmar que as cotas superior e inferior fornecem um “envelope” para a lei de evolução da propagação da trinca. Os maiores desvios relativos da função cota inferior foram para os modelos de Paris e Forman, chegando a um valor de 5,92%, porém, para o modelo de Collipriest o máximo valor obtido foi de 0,84%, devido a “regularidade” da lei de evolução.

Outro ponto relevante é o tempo computacional dispendido na aplicação dessa metodologia, que, conforme demonstrado nas tabelas, é muito mais eficiente, se comparado ao obtido pelo método numérico de Runge-Kutta. Para os exemplos resolvidos, o tempo computacional obtido pela metodologia (FBC) foi de 130000 vezes menor ao obtido pelo RK4, o que comprova a eficiência computacional das funções cota.

Nesse contexto, a metodologia foi aplicada a uma condição natural e quase “ingênua”; entretanto, atingiu-se valores muito estreitos para a funções desvio relativo



média aritmética e média geométrica, com valores de no máximo 2,08% de desvio, o que demonstra o bom desempenho das funções cotas superior e inferior.

## TRABALHOS FUTUROS

A fim de dar continuidade ao presente estudo, fica sugestionada a realização de trabalhos futuros, com determinadas modificações dos parâmetros aqui apresentados.

Foram testados três modelos de propagação de trincas, sendo possível a aplicação da metodologia apresentada a outros modelos de propagação de trinca a CAC, como por exemplo, para modelo de Walker, Priddle, dentre outros.

Aplicar a metodologia para outros exemplos numéricos, mudando a função do fator intensidade de tensão, assim como, os parâmetros de carregamento ( $\Delta\sigma$ ), os coeficientes de cada modelo, o tamanho da trinca inicial  $a_0$  e o tipo de material.

Estender a metodologia exposta para modelos de carregamento com amplitude de tensão variável.

O parâmetro " $a^*$ " foi obtido por inspeção, pesquisar e desenvolver novos métodos matemáticos para o delineamento do valor numérico do " $a^*$ ".

Aplicar a metodologia apresentada para a quantificação da incerteza de problemas de propagação de trinca via modelos estocásticos do tipo CAC.

## REFERÊNCIAS

AL-RUBAIE, Kassim S.; GODEFROID, Leonardo B., LOPES, Jadir A. M. Statistical modeling of fatigue crack growth rate in Inconel alloy 600. **International Journal of Fatigue**, v. 29, p. 931-940, 2007.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **E1823**: standard terminology relating to fatigue and fracture. West Conshohocken, PA, 2000.

BANNANTINE, J. A.; COMER, J.J.; HANDROCK, J. L. **Fundamentals of Metal Fatigue Analysis**. Prentice Hall, 1989.

BARSON J. M.; ROLFE, S. T. **Fracture and fatigue control in structures: Applications of fracture mechanics**. 3 ed. Philadelphia: ASTM, 1999.

BEDEN, S. M.; ABDULLAH, S. and ARIFFIN, A. K. Review of fatigue crack propagation models for metallic components. **Eur. J. Scientific**, v. 28, n. 3, p. 364–397, 2009.

BEGHINIL, M.; BERTIN, L.; VITALE, E. Weight functions applied to fatigue crack growth analysis. **Fatigue Fract. Engng Mater. Srut.**, v. 20, n. 8, p. 1093-1104, 1997.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 8 ed. 2006.

CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A. **Fadiga – Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço**, 1 ed. Create Space, 2009.

COLLIPRIEST, J. E. An experimentalist's view of the surface flaw problem. **American Society for Testing and Materials**. p. 43-62. 1972.

DIETER, George E. **Metalurgia Mecânica**, 2 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.

FORMAN, R. G.; KEANEY, V. E.; ENGLE, R. N. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. **Journal of Basic Engineering**, v.89, p. 549-463, 1967.

JONES, R.; PITT, S.; CONSTABLE, T.; FARAHMAND, B. Observations on fatigue crack growth in a range of materials. **Materials and Design**, v. 32, p. 4362–4368, 2011.

KOBAYASHI, Shigeaki; NAKAMURA, Manabu; TSUREKAWA, Sadahiro; WATANABE, Tadao. Effect of grain boundary microstructure on fatigue crack propagation in austenitic stainless steel. **J Mater Sci**, v. 46, p. 4254–4260, 2011.

MADERBACHER, H.; OBERWINKLER, B.; GÄNSER, H.-P.; TAN, W.; ROLLETT, M.; STOSCHKA, M. The influence of microstructure and operating temperature on the fatigue endurance of hot forged Inconels 718 components. **Materials Science & Engineering**, v. 585, p. 123–131, 2013.

PARIS, P.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, p. 528-534, 1963.

SANTOS, Rodrigo Villaca; SILVA JÚNIOR, Claudio Roberto Ávila da. Bounds for the Propagation Model of Crack Forman. **International Journal of Sciences: Basic and Applied Research**, v. 22, p. 219-231, 2015.

SCHIJVE, J. **Fatigue of Structures and Materials**. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 2001.

SILVA JÚNIOR, Claudio Roberto Ávila da; SANTOS, Rodrigo Villaca; BECK, A. T. Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation. **Applied Mathematical Modelling**, 2015.

TREFETHEN, L. **Spectral Methods in MATLAB**. SIAM, 2000.

ZHAN, Weigang; LU, Nianli; ZHANG, Chuanzeng. A new approximate model for the R-ratio effect on fatigue crack growth rate. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 119, p. 85–96, 2014.

WALKER, K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. Effect of environment and complex load history on fatigue life. **American Society for Testing and Materials**. p. 1–14. 1970.

## APÊNDICE A – Dedução das cotas superior e inferior para o modelo de Forman

Modelo de Forman

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\Delta K^m}{(1-R)K_c - \Delta K}. \quad (A.1)$$

Para obter as cotas para a evolução do tamanho de trinca são necessárias as seguintes hipóteses:

$$H1) \begin{cases} f \in C^1(\mathcal{R}); \\ 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{cases} \quad (A.2)$$

$$H2) m \geq 1.$$

Pela expansão da série de Taylor com resto de Lagrange, têm-se:

$$a(N) = a_0(N_0) + \left(\frac{da}{dN}(N_0)\right)(N - N_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2a}{dN^2}(\eta)\right)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N] \quad (A.3)$$

Adotado:

$$- \alpha = (1-R)K_c;$$

$$- \Delta K = u;$$

$$- g = \frac{cu^m}{\alpha - u}.$$

$$- g = g(u).$$

Fazendo a segunda derivada da equação é

$$\frac{d^2a}{dN^2} = \frac{d}{dN} \left( \frac{da}{dN} \right) = \frac{dg}{da} \frac{da}{dN}. \quad (A.4)$$

$$\frac{dg}{da} = \frac{dg}{du} \frac{du}{da}. \quad (A.5)$$

$$\begin{cases} \frac{dg}{du} = \frac{d}{du} \left( \frac{Cu^m}{\alpha - u} \right) = C \frac{d}{du} \left( \frac{u^m}{\alpha - u} \right) = C \frac{d}{du} \left( u^m \times \frac{1}{\alpha - u} \right) = \\ C \left( \frac{mu^{m-1}}{\alpha - u} + u^m \frac{d}{du} \left( \frac{1}{\alpha - u} \right) \right) = C \left( \frac{mu^{m-1}}{\alpha - u} + u^m \frac{1}{(\alpha - u)^2} \frac{d}{du} (\alpha - u) \right) = \\ C \left( \frac{mu^{m-1}}{\alpha - u} + u^m \frac{1}{(\alpha - u)^2} (-1) \right) = C \frac{u^{m-1}}{\alpha - u} \left( m - \frac{u}{\alpha - u} \right) = \frac{Cu^{m-1}}{(\alpha - u)^2} (m\alpha - (m+1)u). \end{cases} \quad (A.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du}{da} &= \frac{d(\Delta K)}{da} = \frac{d}{da} (\Delta K \sqrt{\pi a} f(a)) = \Delta \sigma \sqrt{\pi} \frac{d}{da} \left( a^{\frac{1}{2}} f(a) \right) = \\ \Delta \sigma \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} f(a) + a^{1/2} f'(a) \right) &= \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \left( \frac{f(a)}{2a} + f'(a) \right) = \\ &\Delta K \left( \frac{f(a)}{2a} + f'(a) \right). \end{aligned} \right. \quad (A.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dN^2} &= \frac{dg}{da} \frac{da}{dN} = \frac{dg}{du} \frac{du}{da} \frac{da}{dN} = \frac{C^2 \Delta K^{2m}}{(\alpha - \Delta K)^3} (m \propto -(m+1)\Delta K) \left( \frac{f(a)}{2a} + f'(a) \right) = \\ \frac{C^2 \Delta k^{2m}}{((1-R)K_c - \Delta K)^3} &(m(1-R)K_c - (m+1)\Delta K) \left( \frac{f(a)}{2a} + f'(a) \right). \end{aligned} \right. \quad (A.8)$$

Reorganizando as equações temos:

$$\left\{ \begin{aligned} a(N) - a_0 &\geq \frac{C_f (\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{C_f (\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} \right] \left[ m_f + \frac{1}{\frac{(1-R)K_c}{\Delta K(a_0)} - 1} \right] \right\} (N - N_0) \\ &x \left[ \frac{1}{2a} + \left( \frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] (N - N_0) \\ a(N) - a_0 &\leq \left\{ \frac{C_f (\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{C_f (\Delta K(a^*))^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K(a^*)} \right]^2 \right\} (N - N_0) \\ &x \left[ m_f + \frac{1}{\frac{(1-R)K_c}{\Delta K(a^*)} - 1} \right] x \left[ \frac{1}{2a^*} + \left( \frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_0) \end{aligned} \right. \quad (A.9)$$

Com isso, as cotas superior e inferior são obtidas por meio da equação (A.9), considerando, também, a hipótese H1.

## APÊNDICE B – Dedução das cotas superior e inferior para o modelo de Collipriest

Modelo de Collipriest

$$\frac{da}{dN} = C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \tanh^{-1} \left\{ \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right\} \right]. \quad (B.1)$$

$$\ln(\Delta K) = \ln(\Delta \sigma \sqrt{\pi a} f(a)) = \ln(\Delta \sigma \sqrt{\pi}) + \frac{1}{2} \ln a + \ln f(a). \quad (B.2)$$

Hipóteses para a dedução

$$H1) \begin{cases} f \in C^1(\mathcal{R}); \\ 0 < f(a_0) \leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ f'(a_0) \leq f'(x) \leq f'(y), \forall x, y \in [a_0, a_1]; \end{cases} \quad (B.3)$$

$$H2) m \geq 2.$$

Pela expansão de Taylor com resto de Lagrange, têm-se:

$$a(N) = a_0(N_0) + \left( \frac{da}{dN}(N_0) \right) (N - N_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right) (N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N] \quad (B.4)$$

Fazendo:

$$- C_1 = C(K_c \Delta K_{th}),$$

$$- \alpha = \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}},$$

$$- \beta = (1 - R)K_c \Delta K_{th},$$

$$- \gamma = \ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right),$$

Substituindo temos,

$$\frac{da}{dN} = C_1 \exp \left[ \alpha \operatorname{arc} \tanh \left\{ \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{\beta} \right)}{\gamma} \right\} \right]. \quad (B.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dN} = C_1 \exp \left[ \alpha \operatorname{arc\,tanh} \left\{ \frac{2 \ln \Delta K - \ln \beta}{\gamma} \right\} \right]; \\ \frac{da}{dN} = C_1 \exp \left[ \alpha \operatorname{arc\,tanh} \left\{ \frac{2 \ln(\Delta \sigma^2 \pi) + \ln a + 2 \ln f(a) - \ln \beta}{\gamma} \right\} \right]. \end{array} \right. \quad (B.6)$$

Fazendo novamente

$$- \delta = \ln \left( \frac{(\Delta \sigma^2 \pi)}{\gamma} \right),$$

Temos,

$$\frac{da}{dN} = C_1 \exp \left[ \alpha \operatorname{arc\,tanh} \left\{ \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right\} \right]. \quad (B.7)$$

$$a(N) = a(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 a}{dN^2}(\zeta)(N - N_0)^2, \zeta \in [N_0, N] \quad (B.8)$$

$$\frac{d^2 a}{dN^2} = \frac{d}{dN} \left( \frac{da}{dN} \right), \text{ mas } \frac{da}{dN} = g(a). \quad (B.9)$$

Pela regra da cadeia temos:

$$\frac{d}{dN}(g(a)) = \frac{dg(a)}{da} \frac{da}{dN}. \quad (B.10)$$

No nosso caso,

$$g(a) = C_1 \exp \left[ \alpha \operatorname{arc\,tanh} \left\{ \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right\} \right]. \quad (B.11)$$

$$\frac{dg}{da} = \frac{d}{da} \left\{ C_1 \exp \left[ \alpha \operatorname{arc\,tanh} \left( \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right) \right] \right\}. \quad (B.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dg}{da} = C_1 \exp(\alpha) \frac{d}{da} \left[ \operatorname{arc\,tanh} \left( \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right) \right]; \\ C_1 \exp(\alpha) \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln a + \ln f(a)^2}{\gamma} + \delta \right)^2} \right) \frac{d}{da} \left( \frac{\ln a \ln f(a)^2}{\gamma} + \delta \right). \end{array} \right. \quad (B.13)$$

Derivando a segunda parte da equação temos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{da} = \left[ \frac{\ln a \ln f(a)^2}{\gamma} + \delta \right] = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{da} (\ln(a * f(a)^2)) = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{da} (\ln a + 2 \ln f(a)) \\ \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{d}{da} (\ln f(a)) \right] = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{a} + 2 \frac{d}{df} (\ln f) \frac{df}{da} \right] = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{2a} + \left( \frac{f'}{f} \right) (a) \right]. \end{array} \right. \quad (B.14)$$



Reagrupando as equações temos,

$$\frac{dg}{da} = C_1 \frac{\exp(\alpha)}{\gamma} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln a + \ln(f(a))^2}{\gamma} + \delta \right)^2} \right] \left[ \frac{1}{2a} + \left( \frac{f'}{f} \right) (a) \right]. \quad (B.15)$$

Fazendo a segunda derivada temos,

$$\frac{d^2 a}{dN^2} = \frac{dg(a)}{da} \frac{da}{dN} \frac{da}{dN} = \frac{dg(a)}{da} \left( \frac{da}{dN} \right)^2. \quad (B.16)$$

Com isso,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dN^2} &= C_1 \frac{\exp(\alpha)}{\gamma} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln a + \ln(f(a))^2}{\gamma} + \delta \right)^2} \right] \left[ \frac{1}{a} + 2 \left( \frac{f'}{f} \right) (a) \right] \\ &\left\{ C_1 \exp \left[ \alpha \operatorname{arc} \tanh \left( \frac{\ln a + 2 \ln f(a)}{\gamma} + \delta \right) \right] \right\}^2. \end{aligned} \right. \quad (B.17)$$

Reagrupando as equações temos,

$$\left\{ \begin{aligned} a &= a_0 + C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] (N - N_0) + \\ &\frac{1}{2} \left\{ C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K^2}{(1-R)K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] \right\}^2 \\ &C(K_c \Delta K_{th}) \frac{\exp \left( \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln a + \ln f(a)^2 + \ln(\Delta \sigma^2 \pi) - \ln(1-R)K_c \Delta K_{th}}{\ln \left( \frac{(1-R)K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right)^2} \right] \\ &\left[ \frac{1}{2a} + \left( \frac{f'}{f} \right) (a) \right] (N - N_0)^2 \end{aligned} \right. \quad (B.18)$$

As cotas inferior e superior ficam,

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq a_0 + C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K (a_0)^2}{(1-R) K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] (N - N_0) + \\ \frac{1}{2} \left\{ C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K (a_0)^2}{(1-R) K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] \right\}^2 \\ C(K_c \Delta K_{th}) \frac{\exp \left( \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln(a_0 f(a_0)^2) + \ln(\Delta \sigma^2 \pi) - \ln(1-R) K_c \Delta K_{th}}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right)^2} \right] \\ \left[ \frac{1}{2a_0} + \left( \frac{f'}{f} \right) (a_0) \right] (N - N_0)^2 \end{array} \right. \quad (B.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq a_0 + C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K (a_0)^2}{(1-R) K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] (N - N_0) + \\ \frac{1}{2} \left\{ C(K_c \Delta K_{th})^{\frac{m}{2}} \exp \left[ \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\ln \left( \frac{\Delta K (a^*)^2}{(1-R) K_c \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right) \right] \right\}^2 \\ C(K_c \Delta K_{th}) \frac{\exp \left( \ln \left( \frac{K_c}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{m}{2}} \right)}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \left[ \frac{1}{1 - \left( \frac{\ln(a^* f(a^*)^2) + \ln(\Delta \sigma^2 \pi) - \ln(1-R) K_c \Delta K_{th}}{\ln \left( \frac{(1-R) K_c}{\Delta K_{th}} \right)} \right)^2} \right] \\ \left[ \frac{1}{2a^*} + \left( \frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_0)^2 \end{array} \right. \quad (B.21)$$

Com isso, as cotas superior e inferior são obtidas por meio da equação (B.18), considerando, também, a hipótese H1.