

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA
ENGENHARIA ELETRÔNICA

JOSÉ ADENILSON GONÇALVES LUZ JUNIOR

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE CONTROLE DE TRAJETÓRIA
PARA ROBÔS MANIPULADORES COM TRÊS GRAUS DE
LIBERDADE COM ELEMENTOS RÍGIDOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PONTA GROSSA

2016

JOSÉ ADENILSON GONÇALVES LUZ JUNIOR

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE CONTROLE DE TRAJETÓRIA
PARA ROBÔS MANIPULADORES COM TRÊS GRAUS DE
LIBERDADE COM ELEMENTOS RÍGIDOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica, do Departamento de Eletrônica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Ângelo Marcelo Tuset

PONTA GROSSA

2016

Folha destinada à inclusão da **Ficha Catalográfica** (elemento obrigatório somente para teses e dissertações) a ser solicitada ao Departamento de Biblioteca da UTFPR e posteriormente impressa no verso da Folha de Rosto (folha anterior).

Espaço destinado a elaboração da ficha catalográfica sob responsabilidade exclusiva do Departamento de Biblioteca da UTFPR.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Ponta Grossa

Departamento de Eletrônica (DAELE)
Engenharia Eletrônica



TERMO DE APROVAÇÃO

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE CONTROLE DE TRAJETÓRIA PARA ROBÔS MANIPULADORES COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE COM ELEMENTOS RÍGIDOS

por

JOSÉ ADENILSON GONÇALVES LUZ JUNIOR

Este Trabalho de conclusão de curso (TCC) foi apresentado em onze de novembro de 2016 como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Engenharia Eletrônica. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Angelo Marcelo Tuset, Dr.
Prof. Orientador

Max Mauro Dias Santos, Dr.
Membro titular

Frederic Conrad Janzen, Msc.
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso -

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio durante a graduação.

Ao departamento de eletrônica (DAELE) pelo suporte técnico durante a pesquisa e experimentos.

Ao Prof. Dr. Ângelo Marcelo Tusset pela orientação e direcionamento durante os estudos para este trabalho.

RESUMO

Gonçalves, José Adenilson Luz Junior. **Modelagem e simulação de controle de trajetória para robôs manipuladores com três graus de liberdade com elementos rígidos**. 2016. 84 f. Trabalho de Conclusão de Curso Bacharelado em Engenharia Eletrônica - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2016.

Neste trabalho é apresentado a modelagem e a simulação de um robô manipulador com três graus de liberdade e considerando suas estruturas com comportamento rígido. Fez-se uso dos conceitos de cinemática para a dedução matemática e a mecânica Lagrangeana para obtenção dos modelos dinâmicos do manipulador e dos atuadores CC com imã permanente. Devido a características de não linearidade e da dinâmica o controle utilizado foi baseado em matrizes de coeficiente de estados (SDC), partindo para as técnicas LQR (*Linear Quadratic Regulator*) e seguindo para o SDRE (*State Dependet Ricatti Equation*). As simulações feitas para parâmetros de desempenho constantes demonstraram a efetividade do controle ótimo aplicado ao manipulador e aos modelos de atuadores CC escolhidos. As aplicações de trajetórias ao manipulador enriquecem a aplicabilidade do projeto e os resultados obtidos com as técnicas escolhidas comprovam a possibilidade de utilizar o manipulador em aplicações onde existe uma necessidade mais restritiva de desempenho. Em trabalhos futuros serão construídos modelos complementares ao apresentado neste trabalho para aplicação em protótipos físicos e utilização de controle discreto.

Palavras-chave: robótica. controle SDRE. planejamento de trajetória. Elementos rígidos. Dinâmica não linear.

ABSTRACT

Gonçalves, José Adenilson Luz Junior. Modeling and trajectory control simulation for robot manipulators with three degrees of freedom of rigid elements. 2016. 84 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Eletrônica - Federal Technology University - Parana. Ponta Grossa, 2016.

This work presents the modeling and simulation of a manipulator robot with three degrees of freedom and considering its structures with rigid behavior. The concepts of kinematics for the mathematical deduction and the Lagrangian mechanics were used to obtain the dynamic models of the manipulator and the DC actuators with permanent magnet. Due to nonlinearity and dynamics characteristics, the control used was based on state coefficient matrices (SDC), starting with the Linear Quadratic Regulator (LQR) and following the State Dependet Ricatti Equation (SDRE). The simulations made for constant performance parameters demonstrated the effectiveness of the optimal control applied to the manipulator and to the chosen DC actuator models. The applications of trajectories to the manipulator enrich the applicability of the project and the results obtained with the techniques chosen prove the possibility of using the manipulator in applications where there is a more restrictive need of performance. In future works will be built complementary models to the presented in this work for application in physical prototypes and use of discrete control.

Keywords: robotics. SDRE control. path planning. rigid elements. nonlinear dynamics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação do manipulador usado.....	17
Figura 2 - Posicionamento inicial do manipulador	20
Figura 3 - Variáveis de posição e físicas do manipulador	21
Figura 4 - Posicionamento dos pontos de interesse no manipulador	23
Figura 5 - Relação entre a representação das variáveis e a cinemática.	24
Figura 6 - Circuito do motor CC com imã permanente usado como atuador.	37
Figura 7 - Curvas de operação dos atuadores CC.....	38
Figura 8 - Resposta da posição, velocidade e aceleração para um polinômio de terceira ordem.	52
Figura 9 - Resposta da posição, velocidade e aceleração para um polinômio de quinta ordem.	52
Figura 10 - Trajetória desejada usando polinômio de quinta ordem.....	54
Figura 11 - Comportamento dinâmico oscilatório das posições; θ_1 , θ_2 , e θ_3 ; do elo 1, 2 e 3.	56
Figura 12 - Comportamento dinâmico oscilatório das velocidades; ω_1 , ω_2 , e ω_3 ; do elos 1, 2 e 3.....	56
Figura 13 - Força dissipativa aplicada ao modelo dinâmico oscilatório nos elos 1, 2 e 3.	57
Figura 14 - Comportamento não controlável das posições θ_1 , θ_2 e θ_3	58
Figura 15 - Estrutura de simulação para o controle SDRE com parâmetro de desempenho para ponto fixo.	61
Figura 16 - Comportamento das posições θ_1 , θ_2 e θ_3 para parâmetros fixos sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$	62
Figura 17 - Comportamento das velocidades ω_1 , ω_2 e ω_3 para parâmetros fixos sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$	63
Figura 18 - Comportamento das posições θ_1 , θ_2 e θ_3 para parâmetros fixos com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$ apenas para posições.	63
Figura 19 - Comportamento das velocidades ω_1 , ω_2 e ω_3 para parâmetros fixos sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$ apenas para posições.	64

Figura 20 - Comportamento das posições θ_1 , θ_2 e θ_3 para parâmetros fixos com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$ para otimização geral.	65
Figura 21 - Comportamento das velocidades ω_1 , ω_2 e ω_3 para parâmetros fixos sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$ para otimização geral.	65
Figura 22 - Estrutura resumida do código construído para solução do controle orientado para trajetórias.....	67
Figura 23 - Comportamento da posição θ_1 em comparação com a trajetória desejada sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$	68
Figura 24 - Comportamento da posição θ_2 em comparação com a trajetória desejada sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$	68
Figura 25 - Comportamento da posição θ_3 em comparação com a trajetória desejada sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$	69
Figura 26 - Comportamento da posição θ_1 em comparação com a trajetória desejada com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$	69
Figura 27 - Comportamento da posição θ_2 em comparação com a trajetória desejada com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$	70
Figura 28 - Comportamento da posição θ_3 em comparação com a trajetória desejada com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$	70
Figura 29 - Comportamento das posições do manipulador em comparação com a trajetória desejada com definição do comportamento das velocidades dos elos 1, 2 e 3.	72
Figura 30 - Comparação entre comportamento desejado para as velocidades ω_1 , ω_2 e ω_3 e as respostas de velocidade dos elos 1, 2 e 3.....	73
Figura 31 - Comparação de resposta de controle para posição atuador CC com imã permanente.	75
Figura 32 - Comparação de resposta de velocidade para atuador CC com imã permanente.	75
Figura 33- Comparação de resposta de corrente para atuador CC com imã permanente.	76
Figura 34 - Resposta da ação de controle aplicada ao atuador para atendimento da posição desejada.	76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Medições e variáveis de D-H.	20
Tabela 2 - Dimensões físicas dos elos utilizados.	21
Tabela 3 - Dados e constantes dos atuadores CC GM9413-3 - 2001	38
Tabela 4 - Parâmetros de comportamento para geração de trajetória	54
Tabela 5 - Parâmetros de desempenho do controle SDRE	59
Tabela 6 – Parâmetros de desempenho para controle de trajetória.....	67
Tabela 7 - Erro médio de posição e velocidade para controle ótimo.....	71

LISTA DE ABREVIATURAS

PCI	Placa de circuito impresso
CLP	Controlador lógico e programável
D-H	Denavit-Hartenberg

LISTA DE SIGLAS

CC	Corrente contínua
LQR	Regulador Quadrático Linear
SDRE	Solução dependente da equação de Riccati

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 ROBÔS MANIPULADORES	13
1.2 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO.....	15
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	16
2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	17
2.1 CINEMÁTICA.....	17
2.1.1 CINEMÁTICA DIRETA.....	18
2.1.2 CINEMÁTICA INVERSA	23
2.2 DINÂMICA	24
3 ATUADORES	37
4 CONTROLE	40
4.1 CONTROLE ÓTIMO.....	40
4.2 CONTROLE LQR	42
4.3 CONTROLE SDRE	44
5 OTIMIZAÇÃO DE PERFORMANCE	46
5.1 OTIMIZAÇÃO DE ROBÔS USANDO CONTROLE ÓTIMO	46
6 ANÁLISE DE COMPORTAMENTO EM TRAJETÓRIAS	49
6.1 TRAJETÓRIAS A PARTIR DE POLINÔMIOS.....	50
7 SIMULAÇÃO E RESULTADOS	55
7.1 CINEMÁTICA E DINÂMICA	55
7.2 CONTROLE LQR E SDRE	57
7.3 CONTROLE PARA TRAJETÓRIAS.....	66
7.4 CONTROLE DE ATUADORES.....	73
CONCLUSÃO	77
REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

A pesquisa com robôs vem ganhando cada vez mais espaço conforme aumenta a necessidade de efetividade, produtividade e diminuição de riscos da execução de atividades humanas (Korayem, 1994). Aliado a essa necessidade, a evolução em pesquisas de sistemas embarcados e controle digital expandiu o campo de aplicação de robôs e permitindo sua utilização em diferentes aplicações com as mais distintas particularidades.

O comportamento do manipulador é determinado por uma série de sistemas que o compõem, desde sua composição física e mecânica até seus componentes de controle e de sensoriamento. O robô pode ser tão complexo o quanto sua aplicação necessitar, ficando restrito apenas a questões de custo, engenharia e projeto.

A evolução das pesquisas tem crescido em paralelo com a ampliação de manipuladores nas mais diversas áreas de atuação. Atualmente é muito comum que diversos ramos ligado à engenharia e automação utilizem manipuladores como solução de problemas e essa seja mais uma ferramenta junto com os CLPs, válvulas e controladores em geral.

À medida que os trabalhos e pesquisas comprovam que a utilização do manipulador é uma solução viável em diversos aspectos, a recepção da robótica aumenta e os campos não industriais tem aberto as portas aos robôs. Os ambientes inóspitos para trabalho humano e com alto risco são exemplos do emprego dos manipuladores.

O controle sobre o sistema robótico é oriundo da interação entre o manipulador e o ambiente de trabalho (Molter, 2008). O objetivo deste trabalho é determinar o equacionamento do manipulador robótico e como deve ser o comportamento das variáveis de controle em função de parâmetros de desempenho.

1.1 ROBÔS MANIPULADORES

Manipuladores robóticos são estruturas robóticas autônomas que se caracterizam por serem compostas de elos e juntas, terem um referencial fixo ao ambiente de trabalho, diferentes graus de liberdade associados a diversos tipos de juntas (prismáticas, esféricas e rotacionais), com arranjos cinemáticos distintos e um

interesse particular sobre o comportamento do 'End Effector', ou ferramenta, que é associada ao manipulador.

Há uma correlação entre todas as variáveis do manipulador e sua aplicação no ambiente de trabalho. Quanto mais robusta for a estrutura física, tende a ser menor a flexibilidade e as oscilações de posição do elemento final. A potência e a força mecânica do atuador determinam as limitações de velocidade, aceleração e torque em uma relação direta. Quanto menor for a potência, mais restrita tende a ser a faixa de atuação dinâmica do atuador.

O ambiente onde o manipulador é utilizado determina quais características devem ser otimizadas, as particularidades da construção estrutural e algumas necessidades específicas. Ambientes bastante distintos, como indústrias e exploração espacial, podem utilizar manipuladores e apresentar comportamentos e necessidades diametralmente opostas.

Em aplicações industriais onde a função do robô é de soldagem, fundição, pintura, transporte de cargas e fabricação de placas de circuito impresso (PCI), há características específicas sobre o volume, massa e potência da estrutura e sobre o comportamento do manipulador. Galicki (2015) destaca a correlação entre a fabricação de PCIs e a precisão e a estabilidade que o manipulador deve ter na execução do trabalho.

Nas aplicações aeroespaciais, as restrições cruciais estão relacionadas a massa, volume e potência do atuador. Há limitações severas sobre a capacidade de transporte e de fornecimento de potência aos atuadores e isso gera condições específicas para os projetos de manipuladores para estas aplicações.

De maneira geral, os projetos de manipuladores que precisam de alta precisão recorrem a estruturas rígidas que tendem a eliminar os comportamentos indesejados. Isso resulta em estruturas com grande quantidade de massa e com atuadores de alta potência e consumo elevado (Molter, 2008). Em situações onde a estrutura física e os atuadores não podem ser escolhidos sem restrição, as técnicas de controle precisam ser mais efetivas e há casos onde são necessários adendos a estrutura do manipulador para compensar a falta de robustez na estrutura (Lima, 2015).

Com a utilização de robôs das mais variadas configurações, manipuladores e moveis, têm aumentando a necessidade de projetos e pesquisas que atendam as diferentes necessidades. Rezende (2011) trabalha a utilização de processamento de imagens como método para determinar o posicionamento dos elos de manipuladores.

Galicki (2015) introduz novos conceitos sobre como encontrar a descrição cinemática de manipuladores. Korayem (2013) propõem a utilização do software de aquisição de dados Labview como interface de controle. Molter (2008) e Bottega (2004) trazem uma abordagem sobre o controle de vibrações e da flexibilidade natural da estrutura dos manipuladores utilizando atuadores piezoelétricos.

A utilização de redes neurais também tem sido bastante utilizada em robótica, Kot *et al.* (2016) utiliza-as no controle de robôs a partir de uma abordagem da dinâmica, Lv *et al.* (2008) controlam manipuladores com altíssimo grau caótico utilizando redes neurais.

Ainda que as soluções comerciais atuais para o desempenho do manipulador sejam estruturas extremamente rígidas, com atuadores de alta potência e capacidade mecânica elevada, esse tipo de solução tem sido apontada como cada vez menos sustentável e perdendo espaço nas pesquisas recentes.

Assim, o papel das pesquisas em engenharia tem sido a de mapear a aplicação e aplicabilidade destas duas abordagens, estruturas robustas e estruturas flexíveis.

Tendo essa diretriz como meta, a aplicação de estruturas robustas é deixada de lado como uma solução primária e a busca por soluções no campo do controle e das novas tecnologias ganha mais atenção.

Neste trabalho serão abordadas deduções matemáticas de manipuladores robóticos e à aplicação de estratégias de controle não linear com enfoque em sistemas dinâmicos.

1.2 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Remetendo aos pontos já apontados, a crescente utilização dos manipuladores nos mais diversos ambientes, desde utilização em operações médicas até exploração espacial, tem crescido a necessidade de existir diferentes abordagens sobre sua utilização.

O entendimento sobre o comportamento do manipulador e as diferentes formas de controle possíveis tem como objetivo versatilizar sua utilização sem a contrapartida de perda de desempenho quando é utilizado em condições extremas.

As ferramentas e metodologias empregadas neste trabalho buscam entender as características do manipulador escolhido e como as técnicas de controle podem ser aplicadas buscando os desempenhos desejados.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Primeiramente o assunto é introduzido a partir da análise da utilização dos manipuladores, suas particularidades quando analisados dentro de um contexto específico e as consequências para as soluções de cada contexto.

Em seguida são apresentados e discutidos os procedimentos e os resultados para descrever o manipulador de forma matemática. Iniciando pela descrição de seu comportamento cinemático e progredindo para a descrição dinâmica.

Objetivando estender a análise dinâmica, são analisados os atuadores usados no manipulador. O levantamento de parâmetros e características dos atuadores serão usados nas simulações numéricas e na análise comparativa entre a necessidade das ações e o comportamento característico dos atuadores.

Com as descrições matemáticas das componentes do sistema robótico, são apresentadas as técnicas de controle utilizadas e os procedimentos matemáticos para solução do manipulador controlado.

A partir das estratégias de controle estabelecidas, estes resultados são utilizados como base para otimização das respostas, colocando diferentes pontos de interesse sobre as variáveis de controle do manipulador.

Para analisar o comportamento do sistema deduzido, são apresentadas formas matemáticas de gerar uma trajetória para as variáveis de controle do manipulador e como isso é correlacionável com os cálculos já apresentados.

O trabalho é concluído com a apresentação dos resultados obtidos para todos os temas abordados e como eles foram correlacionados para entender o comportamento do sistema robótico.

2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A descrição do manipulador é feita a partir da descrição espacial das suas partes físicas de forma que seja possível determinar e controlar as variáveis do sistema robótico.

O manipulador robótico pode ser entendido como uma cadeia cinemática aberta composta por elos conectados em cascata por meio de juntas (Molter, 2008). As considerações sobre o tipo de elo, junta, flexibilidade e a rigidez da estrutura são exemplos de variáveis que ditam as considerações iniciais sobre o projeto do manipulador.

A seguir a compreensão do manipulador começa pela descrição matemática das variáveis de controle, cinemática direta, em função de duas localizações espaciais para dois métodos de dedução. Primeiramente apresentamos a dedução usando o algoritmo de Denavit-Hartenberg e em seguida a dedução utilizando coordenadas cartesianas. No trabalho foi usado um manipulador planar com três graus de liberdade, considerando juntas e elos rígidos e com movimento planar. A figura 1 mostra uma representação do manipulador.

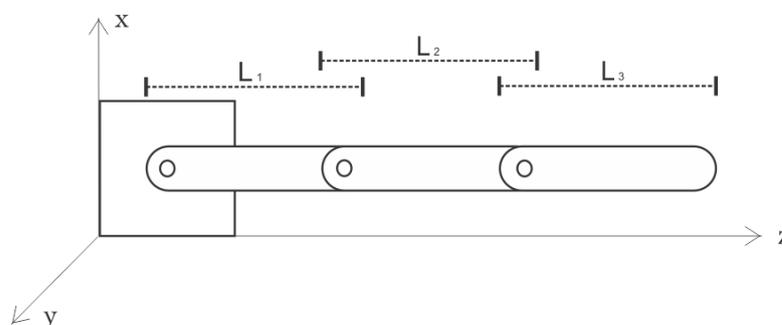


Figura 1 – Representação do manipulador usado
Fonte: autoria própria.

2.1 CINEMÁTICA

Entende-se como cinemática o ramo da física que estuda a descrição do movimento dos corpos sem considerar a origem ou fonte causadora do movimento (Niku, 2013). Dentro do contexto dos manipuladores robóticos, isso significa que o equacionamento cinemático fornece uma descrição espacial do robô correlacionando

às variáveis de controle em função das variáveis espaciais do sistema de descrição escolhido. A descrição tem como objetivo relacionar a posição das juntas do robô com a descrição espacial em que ele está inserido.

Nesse contexto, é possível que o posicionamento do robô seja relacionado com uma série de metodologias de descrição espacial; como cartesiana, esférica, cilíndrica e algumas metodologias especiais, Denavit-Hartenberg e outras.

A utilização de diferentes metodologias e referenciais é baseada na melhor correlação entre as vantagens da metodologia, como eliminação de medições em eixos onde não há movimento. O tipo de referência utilizado corretamente contribui para que não haja cálculos desnecessários e considerações não relevantes ao modelo.

O manipulador utilizado neste trabalho é um exemplo destas considerações. Se ele for deduzido considerando coordenadas esféricas, não haveria movimento no eixo x , logo o ângulo azimutante (ou longitude) será sempre zero. Essa característica pode simplificar ou dificultar a dedução do manipulador dependendo das características do trabalho.

Assim, todas as considerações feitas na escolha dos modelos deduzidos e os sistemas escolhidos serão apresentados seguir.

2.1.1 CINEMÁTICA DIRETA

A cinemática direta do manipulador robótico descreve a posição espacial em função das variáveis articulares (Niku, 2013). Como de maneira geral o posicionamento espacial mais relevante do manipulador é a posição do elemento final ('End-Effector' ou ferramenta), a cinemática direta também pode ser definida como a descrição da posição do elemento terminal em função dos valores das variáveis articulares (variações angulares dos elos). Neste trabalho foi decidido encontrar as equações de movimento pelo algoritmo de Denavit-Hartenberg e por meio de coordenadas cartesianas. O algoritmo foi usado para obtenção de cinemática direta e inversa e as deduções por coordenadas cartesianas para as soluções de dinâmica.

O algoritmo de Denavit-Hartenberg, abreviado como D-H, tem sido usado em um grande número de aplicações onde as restrições do método não apresentam um problema.

Uma das particularidades da metodologia de Denavit-Hartenberg é não considerar movimentos executados em um dos eixos de referência. De maneira geral são adotados 3 eixos referenciais, (x, y, z) , e o algoritmo de D-H considera que pressupõem que não haverá movimentos ao longo do eixo y . Muitas vezes estas variações no eixo y são consideradas como imprecisões de fabricação ou movimentações decorrentes de folgas e flexibilidade da estrutura (Niku, 2014). Logo, estas variações e movimentações ao longo do eixo y estão mais ligadas a imprecisões da estrutura do manipulador e não necessariamente a movimentos ao longo de um determinado eixo.

Segundo Craig (1989) e Niku (2014) a matriz generalizada de Denavit-Hartenberg é produto de quatro operações de transformação elementares, duas translações e duas rotações. Uma translação é feita ao longo do eixo x_i e uma ao longo do eixo z_i . As duas rotações são feitas em relação a x_i e z_i . Estas mesmas operações elementares dão origem as variáveis de medição de D-H; a , d , θ e α .

Utilizando as matrizes de operações elementares, rotação e translação, o produto final pode ser visto na equação 2.1.

O primeiro procedimento para a descrição utilizando a metodologia de D-H é descrever o manipulador em um posicionamento inicial. De acordo com as descrições das variáveis do método a posicionamento escolhido pode ser visto na figura 2.

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \sin(\theta_i)\cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1})d_i \\ \sin(\theta_i)\sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i)\sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1})d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde:

a : distância entre dois eixos z consecutivos, z_{i-1} e z_i , medidos ao longo do eixo x ;

d : distância entre dois eixos x consecutivos, x_{i-1} e x_i , medidos ao longo do eixo z ;

θ : ângulo de rotação em torno de z_{i-1} , medido de x_{i-1} a x_i ;

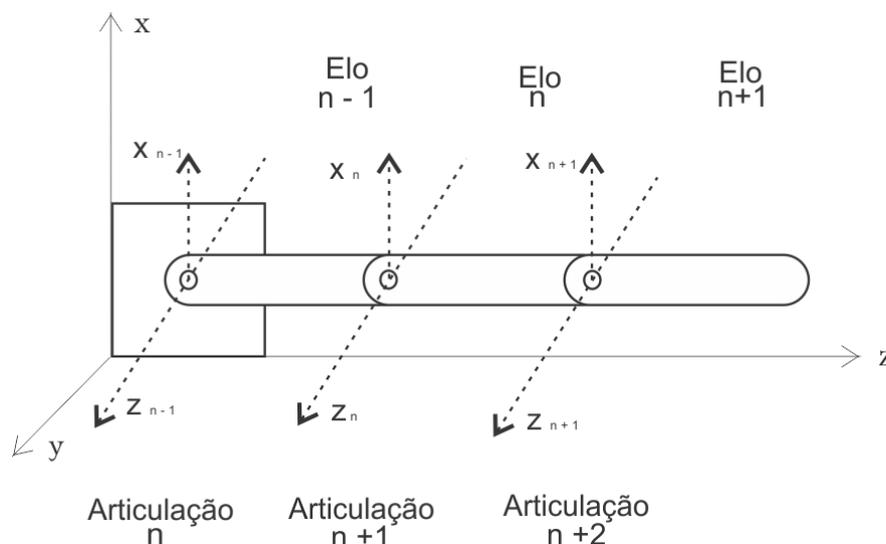


Figura 2 - Posicionamento inicial do manipulador
Fonte: autoria própria.

O posicionamento do manipulador foi escolhido como mostrado na figura 2 para que o valor da variável d_i no algoritmo de D-H fosse zero e isso torna as equações de cinemática direta mais concisas. Como as equações de cinemática direta são resultados de multiplicações matriciais, tornar uma posição da matriz nula elimina termos na equação final.

A tabela 1 mostra o resultado das medições e considerações sobre as variáveis de D-H. Os elos usados no manipulador e suas dimensões físicas podem ser vistas na tabela 2. As equações de D-H podem ser encontradas comparando os produtos das matrizes T_3^1 , T_3^2 e T_3^3 , matrizes correspondentes a cada elo do manipulador, com uma matriz de posição e orientação generalizada (Honório, 2014) (2.2). O resultado final do equacionamento de D-H são as equações de cinemática direta, informando o posicionamento dos vetores de posição e de orientação nas equações 2.4 a 2.15.

Tabela 1 - Medições e variáveis de D-H.

Elo	d	a	θ	α
1	d1	a1	Θ_1	$\pi/2$
2	d2	a2	Θ_2	$\pi/2$
3	d3	a3	Θ_3	$\pi/2$

Fonte: Autoria própria.

Tabela 2 - Dimensões físicas dos elos utilizados.

Elo	Massa (kg)	Comprimento (m)
1	0,275	0,157
2	0,275	0,157
3	0,275	0,157

Fonte: Autoria própria.

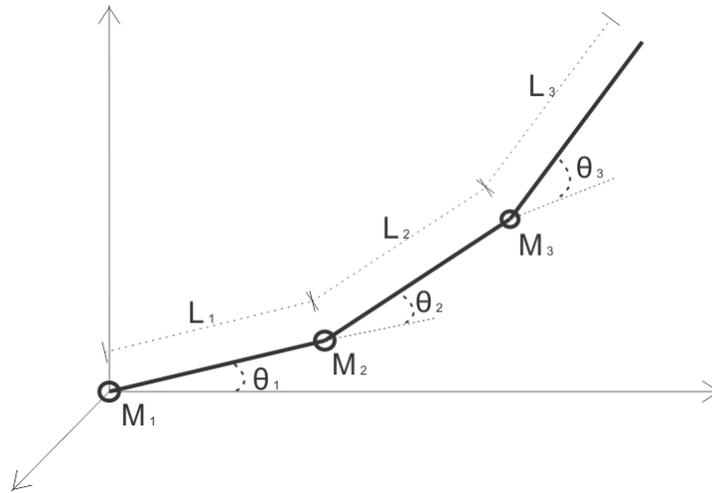


Figura 3 - Variáveis de posição e físicas do manipulador

Fonte: Autoria própria.

$$Th = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & px \\ ny & oy & ay & py \\ nz & oz & az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$T_1^0 \times T_2^1 \times T_3^2 = Th \quad (2.3)$$

$$nx = \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \quad (2.4)$$

$$ny = \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sin(\theta_1) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_3) \quad (2.5)$$

$$nz = \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) \quad (2.6)$$

$$ox = \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad (2.7)$$

$$oy = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad (2.8)$$

$$oz = -\cos(\theta_2) \quad (2.9)$$

$$ax = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) - \cos(\theta_3) \sin(\theta_1) \quad (2.10)$$

$$ay = \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) \quad (2.11)$$

$$az = \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \quad (2.12)$$

$$px = d_1 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 (l_1 + l_2 \cos \theta_2 + d_3 \sin \theta_2) + l_3 (\sin \theta_{12} + \cos \theta_{123}) \quad (2.13)$$

$$py = \sin \theta_1 (l_1 + l_2 \cos \theta_2 + d_3 \sin \theta_2 + l_3 \cos \theta_{23}) - d_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \quad (2.14)$$

$$pz = -d_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_2 + d_3 \cos \theta_2 \quad (2.15)$$

A descrição de Denavit-Hartenberg implica na utilização de metodologias específicas para dedução de dinâmica e simulação dos resultados. Como estes passos necessariamente decorrentes de D-H não eram o que seria utilizado no trabalho, foi desenvolvida uma segunda metodologia de dedução de cinemática utilizando coordenadas cartesianas.

Como em D-H, o posicionamento inicial do manipulador influencia diretamente nas equações encontradas e na simplificação do modelo deduzido. Baseado na disposição mostrada na figura 4 foi possível descrever o posicionamento dos pontos de maior interesse da estrutura (Rao, 2009). Por motivo de coerência com os pontos de ação de controle, a dedução dos posicionamentos é feita com base nos pontos onde os atuadores do robô estão. As equações 2.16 a 2.21 mostram os pontos p_{x1} a p_{y3} mostrado na figura 4.

Nas equações de posição mostradas acima os comprimentos dos elos são representados por l_1 a l_3 , o centro de massa dos elos por cm_1 a cm_3 e as posições por θ_1 a θ_3 .

$$p_{x1} = l_1 cm_1 \cos(\theta_1) \quad (2.16)$$

$$p_{y1} = -l_1 cm_1 \sin(\theta_1) \quad (2.17)$$

$$p_{x2} = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 cm_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.18)$$

$$p_{y2} = -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 cm_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.19)$$

$$p_{x3} = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 cm_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.20)$$

$$p_{y3} = -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3 cm_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.21)$$

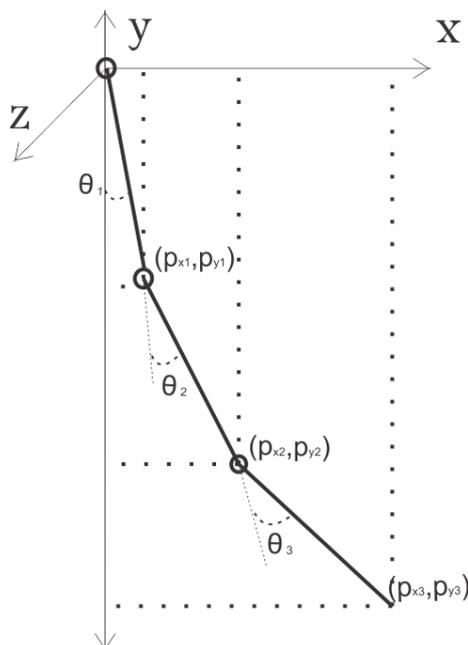


Figura 4 - Posicionamento dos pontos de interesse no manipulador
Fonte: Autoria própria.

2.1.2 CINEMÁTICA INVERSA

Com os resultados da cinemática direta já apresentados foi possível calcular a representação inversa destes resultados. Quando a representação informa a posição espacial em função dos valores angulares, θ_i , é dito que a representação é de cinemática direta. Esta representação tem uma aplicabilidade mais restrita, pois é necessário informar onde os elos devem estar e depois calcular os valores angulares. Esse tipo de abordagem apresenta níveis muito altos de complexidade e para robôs rotacionais pode não ser possível resolver usando cinemática direta.

A solução usada neste trabalho é por determinar o posicionamento espacial em função do posicionamento angular, ou seja, o inverso dos cálculos já feitos. Para este tipo de abordagem é dado o nome de Cinemática Inversa. A figura 5 mostra esta relação entre representação das variáveis e a cinemática.

O resultado da representação das equações de cinemática direta das equações de Denavit-Hartenberg, 2.4 a 2.15, pode ser visto nas equações 2.22 a 2.24

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{ox}{oy} \right) \quad (2.22)$$

$$\theta_2 = \frac{(-d3*oz - l3*nz - d1 + p3)}{-l2*oz} \quad (2.23)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{az}{nz} \right) \quad (2.24)$$

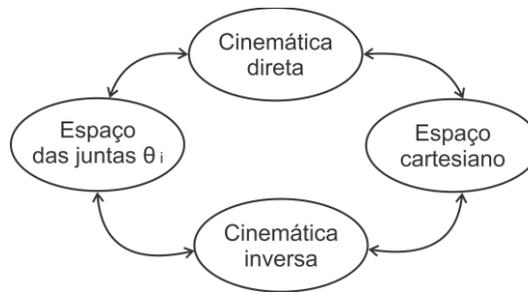


Figura 5 - Relação entre a representação das variáveis e a cinemática.
Fonte: Autoria própria.

2.2 DINÂMICA

Entende-se como dinâmica o processo de estudo dos movimentos de um corpo considerando a causa ou origem do movimento (Hibbeler, 2005). No contexto dos manipuladores, isso significa que o movimento natural dos elos não é o desejado e é necessária uma força externa que altere o movimento e cause o comportamento desejado. A dinâmica será o equacionamento que relaciona os atuadores, as ações causadoras do movimento desejado, com o movimento dos elos e juntas. Logo, o processo de dedução dinâmica tem como principal função correlacionar as informações da cinemática com os atuadores usados no manipulador, ou seja, correlacionar o movimento com a sua origem.

As movimentações desejadas do manipulador são feitas pelos atuadores da estrutura, assim eles precisam ser capazes de exercer uma determinada quantidade de força e um determina característica de movimento (Niku, 2014). A escolha dos atuadores passa por entender como deve ser o comportamento dinâmico do robô, com que velocidade, precisão e aceleração ele deve sair do ponto A e chegar ao ponto B e também determinar a força mecânica necessária para executar as tarefas proposta ao robô.

Dentre as diversas metodologias de equacionamento dinâmico podem ser usadas, como mecânica Newton-Euler, mecânica de Krane, equações generalizadas

de d’Alambert e mecânica de Lagrange-Euler (Lima *et al.*, 2016). A utilização de cada metodologia apresenta particularidades no equacionamento e na resolução numérica. De maneira geral, quanto maior forem os graus de liberdade do robô mais complexo será o equacionamento e a escolha da metodologia mais indicada torna o projeto mais conciso e fornece equações mais direcionadas a necessidade em questão.

A utilização da mecânica Lagrangeana torna mais simples o equacionamento para robôs com múltiplos graus de liberdade e relaciona de forma direta o posicionamento das variáveis de posição com o torque exercido pelo manipulador (Niku, 2014). A mecânica Lagrangiana usa como ponto de partida o balanço de energia na estrutura mecânica. A equação 2.25 mostra a formulação do operador matemático conhecido na literatura como Lagrangiano (Niku, 2014 e Bottega, 2008).

$$L = \sum_{k=1}^3 E_{cinética} - \sum_{k=1}^3 E_{potencial} \quad (2.25)$$

Na equação 2.26 as variáveis q e \dot{q} correspondem ao tipo de variável decorrente a escolha das coordenadas generalizadas e Q_k representa a resultante das k forças generalizadas.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

Como na dedução do manipulador foram usados três ângulos de posição como variáveis intermediárias para determinar o posicionamento final do manipulador, a equação 2.25 foi usada como base para as equações que relacionam os três ângulos com os três atuadores da estrutura. O resultado pode ser visto nas equações 2.27, 2.28 e 2.29.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 \quad (2.28)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \tau_3 \quad (2.29)$$

Utilizando como base as considerações da figura 4 e os pontos cruciais de posição do manipulador, equações 2.16 a 2.21, foram calculados os equacionamentos das energias potencial e cinética.

Observando as equações 2.27 a 2.29 fica mais claro que embora as equações e posição já tivessem sido deduzidas a partir do algoritmo de Denavit-Hartenberg, equações 2.4 a 2.15, optou-se por utilizar o equacionamento cartesiano para que fosse possível utilizar as equações canônicas e conhecidas na literatura para dedução da dinâmica do manipulador usando a mecânica Lagrangeana (Korayem, 1994; Craig, 1989 e Meirovitch, 1970). Usando as equações de cinemática inversa de Denavit-Hartenberg não seria possível utilizar a metodologia desejada para o cálculo da dinâmica. As equações 2.4 a 2.16 informam qual é a descrição cartesiana dos pontos extremos, chamados aqui de elemento final do manipulador, ponto p_3 , e podem ser usadas para encontrar o comportamento dinâmico em relação a estes mesmos pontos.

Utilizando as equações de posição, equação 2.30, é possível encontrar a expressão da velocidade do ponto, equação 2.31, e a partir da derivada temporal da velocidade encontra-se a aceleração do ponto, equação 2.32.

$$p_3 = \sqrt{p_{x3}^2 + p_{y3}^2} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial t} = v_{p3} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial v_{p3}}{\partial t} = a_{p3} \quad (2.32)$$

Segundo Niku (2014), o equacionamento da energia cinética para manipuladores sujeitos a pontos de rotação fixo e pontos rotação não fixos é como mostrado na equação 2.33. Essa formulação é oriunda do equacionamento canônico de energia cinética (Hibbeler, 2005), mas considera que o momento angular do corpo rígido (h_c) que está em movimento ao redor de um eixo determinado pode ser calculado através do produto do momento de inércia (\bar{I}) pela velocidade angular do ponto considerado (ω). Na dedução dinâmica ω foi calculado a partir da derivada da

posição angular, como mostrado na equação 2.33. A energia potencial do manipulador foi equacionada seguindo a formulação 2.35.

$$E_{cinética} = \frac{1}{2} [m v_{pk}^2 + \bar{I} \omega_k^2] \quad (2.33)$$

$$\omega_k = \frac{\partial \theta_k}{\partial t} \quad (2.34)$$

$$E_{potencial} = p_{y k} m_k g \quad (2.35)$$

O Lagrangeano, equação 2.25, pode ser calculado fazendo a diferença entre a equação de energia cinética, equação 2.33, e a equação de energia potencial, equação 2.35.

Os coeficientes k presentes nas equações representa o ponto de interesse no momento. Como foram considerados três pontos na dedução cartesiana, apresentados nas equações 2.16 a 2.21, foram calculadas três equações de energia cinética e três de energia potencial. A soma das três é usada para o cálculo do Lagrangeano.

Usando como base as equações de posição, equações 2.16 a 2.21, e a equação de velocidade, equação 2.31, calculou-se as velocidades aos três pontos de interesse. O resultado, já simplificado, pode ser visto em 2.36 a 2.38.

As equações de velocidade foram usadas para determinar a energia cinética de cada elo referente aos três pontos de interesse. Sabendo que o volume de trabalho do manipulador permite um deslocamento puramente retilíneo ao longo do conjugado (x, y) , no cálculo da energia cinética foi considerada a presença de uma componente de velocidade linear, $m v_{pk}^2$, em todos os elos. Assim, o resultado encontrado pode ser visto nas equações 2.39 a 2.41. Nos equacionamentos de energia cinética a componente ω_k^2 é o equivalente a derivada temporal das posições θ_k^2 e essa consideração será usada no momento de agrupamento e simplificação das equações.

$$v_1^2 = cm1^2 l1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (2.36)$$

$$v_2^2 = cm2^2 l2^2 t2p^2 + t1p^2 (cm2^2 l2^2 + 2l1l2cm2cos(\theta_2) + l1^2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (2cm2^2 l2^2 + 2l1l2cm2cos(\theta_2)) \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
v_3^2 = & -2cm3l1l3t1p^2 \sin(\theta_2)\sin(\theta_3) \\
& -2cm3l1l3t1pt2psin(\theta_2)\sin(\theta_3) - 2cm3l1l3t1pt3psin(\theta_2)\sin(\theta_3) \\
& +2cm3l1l3t1p^2 \cos(\theta_2)\cos(\theta_3) + 2cm3l1l3t1pt2pcos(\theta_2)\cos(\theta_3) \\
& +2cm3l1l3t1pt3pcos(\theta_2)\cos(\theta_3) + 2cm3l2l3t1p^2 \cos(\theta_3) \\
& +2cm3l2l3t1pt3pcos(\theta_3) + 2cm3l2l3 * t2p^2 \cos(\theta_3) \\
& +2cm3l2l3t2pt3pcos(\theta_3) + 4cm3l2l3t1pt2pcos(\theta_3) \\
& +cm3^2l3^2t1p^2 + 2cm3^2l3^2t1pt2p + 2 * cm3^2l3^2t1pt3p \\
& +cm3^2l3^2t2p^2 + 2cm3^2l3^2t2pt3p + cm3^2l3^2t3p^2 + 2t1p^2 \cos(\theta_2)l1l2 \\
& +2t1pt2pcos(\theta_2)l1l2 + l1^2t1p^2 + t1p^2l2^2 + 2t1pt2pl2^2 + l2^2t2p^2
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$E_{cin. 1} = \frac{1}{2}I1t1p^2 + \frac{1}{2}m1cm1^2l1^2t1p^2 \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
E_{cin. 2} = & \frac{1}{2}m2(cm2^2l2^2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2(cm2^2l2^2 + 2l1l2cm2\cos(\theta_2) + l1^2) \\
& + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(2cm2^2l2^2 + 2l1l2cm2\cos(\theta_2))) + \frac{1}{2}I2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
E_{cin. 3} = & \frac{1}{2}m3(\dot{\theta}_1^2(2cm3l1l3\cos(\theta_2 + \theta_3) + 2\cos(\theta_3)cm3l2l3 + cm3^2l3^2 + \\
& 2\cos(\theta_2)l1l2 + l1^2 + l2^2) + \dot{\theta}_2^2(2\cos(\theta_3)cm3l2l3 + cm3^2l3^2 + l2^2) \\
& + cm3^2l3^2t3p^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(cm3l1l3\cos(\theta_2 + \theta_3) + 2\cos(\theta_3)cm3l2l3 \\
& + \cos(\theta_2)l1l2 + l2^2) + 2cm3l3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3(l1\cos(\theta_2 + \theta_3) + \\
& \cos(\theta_3)l2 + cm3l3) + 2cm3l3t2pt3p(\cos(\theta_3)l2 \\
& + cm3^2l3^2 + cm3l3)) + \frac{1}{2}I3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Como a soma das energias cinéticas resultou em uma equação com componentes de velocidade angular dos três elos. Essa equação seria usada para derivação quando relacionada com a potencial no Lagrangeano, a soma das três equações cinéticas pode ser vista na equação 2.42.

$$E_{cin. Total} = E_{cin. 1} + E_{cin. 2} + E_{cin. 3} \tag{2.42}$$

O equacionamento das energias potenciais pode ser visto nas equações 2.43 a 2.45. No equacionamento do Lagrangeano todas as energias potenciais são somadas e seus termos são simplificados e agrupados, como mostrado na equação 2.46.

$$E_{pot 1} = -m_1 l_1 cm_1 \cos(\theta_1) g + P_{01} \tag{2.43}$$

$$E_{pot\ 1} = -g m_2(-l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)) + P_{02} \quad (2.44)$$

$$E_{pot\ 1} = -g m_3(-l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) - l_3 \cos(\theta_3)) + P_{03} \quad (2.45)$$

$$E_{pot\ Total} = + P_{01} + P_{02} + P_{03} - g(\cos(\theta_1) (m_1 l_1 + m_2 l_1 + l_1 m_3) + \cos(\theta_2) (m_2 l_2 + m_3 l_2) + \cos(\theta_3) (l_3 m_3)) \quad (2.46)$$

Onde P_{01} , P_{02} e P_{03} são energias potenciais iniciais que o sistema pode ter dependendo da posição inicial que ele está.

Recorrendo as equações dos somatórios de energia e a formulação de balanço de energia, o Lagrangeano pode ser visto na equação 2.47. Como a posição inicial do manipulador é toda ao longo do eixo y no sentido negativo não há energia potencial inicial na estrutura. Assim P_{01} , P_{02} e P_{03} são nulos.

$$L = +\dot{\theta}_1^2 \Omega_1 + \dot{\theta}_2^2 \Omega_2 + \dot{\theta}_3^2 \Omega_3 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \Omega_4 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \Omega_5 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \Omega_6 - g \left(\begin{array}{l} + \cos(\theta_2) (m_2 l_2 + m_3 l_2) + \cos(\theta_3) (l_3 m_3) \\ + \cos(\theta_1) (m_1 l_1 + m_2 l_1 + l_1 m_3) \end{array} \right) \quad (2.47)$$

Onde as constantes Ω_1 a Ω_6 podem ser vistas a seguir:

$$\Omega_1 = l_1^2(m_2 + m_3 + m_1) + I_1 + I_2 + I_3 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_1^2 + 2(m_3 \cos(\theta_3) l_2 l_3 + \cos(\theta_2) (m_2 l_1 l_2 + l_1 l_2 m_3) + m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) l_1 l_3)$$

$$\Omega_2 = 2m_3 \cos(\theta_3) l_2 l_3 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + I_2 + I_3$$

$$\Omega_3 = m_3 l_3^2 + I_3$$

$$\Omega_4 = 2m_3 \cos(\theta_3) l_2 l_3 + \cos(\theta_2) (m_2 l_1 l_2 + l_1 l_2 m_3) + m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) l_1 l_3 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + I_2 + I_3$$

$$\Omega_5 = m_3 \cos(\theta_3) l_2 l_3 + m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) l_1 l_3 + m_3 l_3^2 + I_3$$

$$\Omega_6 = m_3 \cos(\theta_3) l_2 l_3 + m_3 l_3^2 + I_3$$

Com o cálculo do Lagrangeano foi possível calcular as derivadas relacionadas aos torques das equações 2.27 a 2.29 primeiramente fazendo a derivada composta em relação a velocidade angular e temporal e diminuindo da derivada em relação a

posição. As equações 2.48 a 2.50 mostram estes resultados com as constantes intermediárias A a F apontadas nas equações.

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (-\sin(\theta_2)(2cm2l1l2m2 + 2l1l2m3) - 2\sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
& \Omega_1 \ddot{\theta}_1 + \Omega_4 \ddot{\theta}_2 + \Omega_6 \ddot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2^2 (-\sin(\theta_2)(cm2l1l2m2 + l1l2m3) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (-2m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - 2\sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) + \\
& \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (-2m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - 2\sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
& - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
& + \dot{\theta}_3^2 (-m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
& -g(-\sin(\theta_1)(cm1l1m1 + l1m2 + l1m3) - \sin(\theta_2 + \theta_1)(cm2l2m2 + l2m3) \\
& - \sin(\theta_1 + \theta_3 + \theta_2)l3cm3m3)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (-\sin(\theta_2)(cm2l1l2m2 + l1l2m3) - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (-2m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
& \ddot{\theta}_1 \Omega_4 + \ddot{\theta}_2 \Omega_2 + \ddot{\theta}_3 \Omega_6 - 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_3)m3cm3l2l3 \\
& -g(-\sin(\theta_1 + \theta_2)(cm2l2m2 + l2m3) - \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l3cm3m3)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & \ddot{\theta}_1 \Omega_5 + \ddot{\theta}_2 \Omega_6 + \ddot{\theta}_3 \Omega_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3 \\
& + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (-m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
& - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 + g\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l3cm3m3
\end{aligned} \tag{2.50}$$

A resolução das três equações de derivadas do Lagrangeano, equações 2.48 a 2.50, resultam nos torques associados aos elos e pelo manipulador ser um sistema inteiramente relacionado, mesmo na equação τ_1 existe a recorrência de acelerações do segundo e do terceiro elo, $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$.

Isso significa que esse sistema de torques, τ_1 a τ_3 , resultando diretamente do Lagrangeano é um sistema de equações diferencia não lineares e precisa ser resolvido para que na equação do primeiro torque não haja recorrência da aceleração de outros elos. Essa recorrência de acelerações impossibilita a resolução do problema pois não é considerada nas condições de contorno um valor inicial para $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$.

Mesmo que haja uma condição inicial para as acelerações angulares, a solução do problema persiste já que sempre haveria a ocorrência de um valor de $\ddot{\theta}_{3+i}$ na equação de $\ddot{\theta}_{1+i}$. Em outras palavras, isso significa que para resolver a aceleração do primeiro elo seria necessário saber a aceleração do terceiro no mesmo instante de

tempo i , mas isso não é possível sabendo que a aceleração do terceiro depende da aceleração do primeiro. Esse tipo de problema levaria a uma complexidade adicional ao problema levando a adaptar o modelo ao tipo de solução ao adotar a solução trivial em alguns pontos da resolução.

Como estas soluções não são as desejadas, a abordagem feita para a resolução deste sistema foi considerar que a equação do torque é inevitavelmente composta pelas três acelerações; $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$; multiplicadas por uma constante que agrupa todos os termos dependentes das acelerações (c_1, c_2 e c_3 para τ_1 ; c_5, c_6 e c_7 para τ_2 e c_9, c_{10} e c_{11} para τ_3) e de uma segunda constante (c_4, c_8 e c_{12}) que agrupa os termos que não são dependentes de aceleração. Essa disposição de equações pode ser vista em 2.51, 2.52 e 2.53 em comparação com as equações 2.48 a 2.50.

$$\tau_1 = \ddot{\theta}_1 c_1 + \ddot{\theta}_2 c_2 + \ddot{\theta}_3 c_3 + c_4 \quad (2.51)$$

$$\tau_2 = \ddot{\theta}_1 c_5 + \ddot{\theta}_2 c_6 + \ddot{\theta}_3 c_7 + c_8 \quad (2.52)$$

$$\tau_3 = \ddot{\theta}_1 c_9 + \ddot{\theta}_2 c_{10} + \ddot{\theta}_3 c_{11} + c_{12} \quad (2.53)$$

O sistema de equações dos torques foi tratado como um sistema linear simples composto apenas por constantes lineares para encontrar as equações de acelerações sem recorrência de acelerações de outros elos. O sistema de equações 2.51 a 2.53 foi resolvido em função das variáveis $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$. O resultado por ser visto em 2.54, 2.55 e 2.56

$$\ddot{\theta}_1 = \left(\frac{\tau_1(c_{10}c_7 - c_{11}c_6) + \tau_2(c_{11}c_2 - c_{10}c_3) + \tau_3(c_3c_6 - c_2c_7)}{c_1c_{10}c_7 - c_1c_{11}c_6 - c_{10}c_3c_5 + c_{11}c_2c_5 - c_2c_7c_9 + c_3c_6c_9} + \frac{c_{10}(c_3c_8 - c_4c_7) + c_{11}(c_4c_6 - c_2c_8) + c_{12}(c_2c_7 - c_3c_6)}{c_1c_{10}c_7 - c_1c_{11}c_6 - c_{10}c_3c_5 + c_{11}c_2c_5 - c_2c_7c_9 + c_3c_6c_9} \right) \quad (2.54)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \left(\frac{\tau_1(c_{11}c_5 - c_7c_9) + \tau_2(c_3c_9 - c_1c_{11}) + \tau_3(c_1c_7 - c_3c_5)}{c_1c_7c_{11} - c_1c_{11}c_6 - c_{10}c_3c_5 + c_{11}c_2c_5 - c_2c_7c_9 + c_3c_6c_9} + \frac{c_1(c_8c_{11} - c_{12}c_7) + c_5(c_{12}c_3 - c_{11}c_4) + c_9(c_3c_8 - c_4c_7)}{c_1c_7c_{11} - c_1c_{11}c_6 - c_{10}c_3c_5 + c_{11}c_2c_5 - c_2c_7c_9 + c_3c_6c_9} \right) \quad (2.55)$$

$$\ddot{\theta}_3 = - \left(\frac{\tau_1(c_{10}c_5 - c_6c_9) + \tau_2(c_2c_9 - c_1c_{10}) + \tau_3(c_1c_6 - c_2c_5)}{c_1c_{10}c_7 - c_1c_{11}c_6 - c_{10}c_3c_5 + c_{11}c_2c_5 - c_2c_7c_9 + c_3c_6c_9} + \frac{c_1(c_{10}c_8 - c_{12}c_6) + c_5(c_{12}c_2 - c_{10}c_4) + c_9(c_4c_6 - c_2c_8)}{c_1c_{10}c_7 - c_1c_{11}c_6 - c_{10}c_3c_5 + c_{11}c_2c_5 - c_2c_7c_9 + c_3c_6c_9} \right) \quad (2.56)$$

Substituindo os valores das constantes c_1 a c_{12} presentes em 2.54 a 2.56 nas equações das acelerações foi possível calcular as acelerações sem recorrência como mostrado em 2.57 a 2.59.

$$\ddot{\theta}_1 = - \left(\frac{(m_3 cm_3^2 l_3^2 + I_3)(g \sin(\theta_1)(l_1 m_2 + l_1 m_3 + c_{m1} l_1 m_1 \dots))}{(l_1^2 l_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2 (m_3 cm_3^2 l_3^2 + I_3) \dots)} \right) \quad (2.57)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \left(\frac{(m_3 cm_3^2 l_3^2 + I_3)(g l_2 \sin(\theta_2)(m_3 + c_{m2} m_2) + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dots)}{(l_1^2 l_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2 (m_3 cm_3^2 l_3^2 + I_3) \dots)} \right) \quad (2.58)$$

$$\ddot{\theta}_3 = \left(\frac{(\tau_3(m_2 cm_2^2 l_2^2 + m_3 l_2^2 + I_2)(m_1 cm_1^2 l_1^2 + m_3 l_1^3 m_2 l_2^2 + I_1) \dots)}{(l_1^2 l_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)^2 (m_3 cm_3^2 l_3^2 + I_3) \dots)} \right) \quad (2.59)$$

Como nas deduções dinâmicas não foram consideradas as forças dissipativas do modelo; vibrações, atritos de movimento e folgas mecânicas (Rao, 2009). Optou-se por incluir todas as forças dissipativas em uma única função chamada $D(t)_n$, onde n corresponde ao elo relacionado a função de dissipação.

A dissipação mecânica do sistema robótico genérico pode ser vista na equação 2.60 e a equação relativa a cada um dos elos nas equações 2.61 a 2.64. Os valores de μ_1 a μ_3 são os coeficientes de dissipação mecânica e seus valores foram assumidos como 0,1.

$$D(t)_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i \quad (2.60)$$

$$D(t)_n = \frac{1}{2} \mu_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \quad (2.61)$$

$$D(t)_1 = \mu_1 \dot{\theta}_1 + \mu_2 \dot{\theta}_1 + \mu_2 \dot{\theta}_2 + \mu_3 \dot{\theta}_1 + \mu_3 \dot{\theta}_2 + \mu_3 t_3 p \quad (2.62)$$

$$D(t)_2 = \mu_2 \dot{\theta}_1 + \mu_2 \dot{\theta}_2 + \mu_3 \dot{\theta}_1 + \mu_3 \dot{\theta}_2 + \mu_3 \dot{\theta}_3 \quad (2.63)$$

$$D(t)_3 = \mu_3 \dot{\theta}_1 + \mu_3 \dot{\theta}_2 + \mu_3 \dot{\theta}_3 \quad (2.64)$$

A representação final das equações dinâmicas do manipulador são resultado da diferença entre as equações de aceleração, 2.57 a 2.59, e as equações de dissipação do elo relativa à aceleração, 2.62 a 2.64.

Uma segunda representação do sistema dinâmico também foi deduzida para utilização nas técnicas de controle.

A representação em matrizes de estados foi feita seguindo as considerações teóricas apresentadas na discussão sobre as estratégias de controle deste trabalho e não serão apresentadas aqui por não terem relação com a dedução dinâmica e sim com a forma de controle aplicada.

As matrizes do sistema dinâmico, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, G , u e \dot{x} podem ser vistas nas equações 2.65, 2.68, 2.70, 2.72, 2.73 e 2.74, respetivamente.

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{24} & 0 & \varphi_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{42} & 0 & \varphi_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_{62} & 0 & \varphi_{66} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Os coeficientes usados na matriz de controle $A(x)$ podem ser vistos na equação 2.66.

$$\begin{aligned} \varphi_{24} &= \frac{\dot{\theta}_3(-\Omega_6^2 c + \Omega_4 \Omega_3 i - \Omega_6 \Omega_5 i + \Omega_2 \Omega_6 n + \Omega_2 \Omega_3 c - \Omega_4 \Omega_6 n) + t2p(-\Omega_6^2 d^2 + \Omega_2 \Omega_3 d)}{(\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3)} \\ &+ \frac{\dot{\theta}_1(-\Omega_6^2 a - \Omega_4 \Omega_3 g1 + \Omega_6 \Omega_5 g1 + \Omega_2 \Omega_6 l + \Omega_2 \Omega_3 a - \Omega_4 \Omega_6 l)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\ \varphi_{26} &= \frac{\dot{\theta}_3(\Omega_4 \Omega_3 j - \Omega_6^2 e + \Omega_6 \Omega_5 j + \Omega_2 \Omega_3 e) + \dot{\theta}_1(\Omega_6 \Omega_5 h - \Omega_6^2 b - \Omega_4 \Omega_3 h - \Omega_2 \Omega_6 m + \Omega_2 \Omega_3 b + \Omega_4 \Omega_6 m)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\ \varphi_{42} &= \frac{\dot{\theta}_3(i(\Omega_5^2 - \Omega_1 \Omega_3) + n(\Omega_1 \Omega_6 - \Omega_4 \Omega_5) + c(\Omega_5 \Omega_6 - \Omega_4 \Omega_3)) + t2p(d(\Omega_5 \Omega_6 - \Omega_4 \Omega_3))}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\ &+ \frac{\dot{\theta}_1(-\Omega_5^2 g1 + \Omega_1 \Omega_3 g1 + \Omega_1 \Omega_6 l - \Omega_4 \Omega_5 l - \Omega_4 \Omega_3 a + \Omega_5 \Omega_6 a)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\ \varphi_{46} &= \frac{\dot{\theta}_1(-\Omega_5^2 h + \Omega_1 \Omega_3 h - \Omega_1 \Omega_6 m + \Omega_4 \Omega_5 m - \Omega_4 \Omega_3 b + \Omega_5 \Omega_6 b)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\ &+ \frac{\dot{\theta}_3^2(\Omega_5^2 j - \Omega_1 \Omega_3 j - \Omega_3 \Omega_4 e + \Omega_5 \Omega_6 e)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{62} &= \dot{\theta}_2 \frac{(\Omega_4^2 l - \Omega_1 \Omega_6 g_1 + \Omega_4 \Omega_5 g_1 - \Omega_1 \Omega_2 l - \Omega_2 \Omega_5 a + \Omega_4 \Omega_6 a)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
&+ \left(\frac{\dot{\theta}_3 (-\Omega_4^2 m - \Omega_1 \Omega_6 h + \Omega_4 \Omega_5 h + \Omega_1 \Omega_2 m - \Omega_2 \Omega_5 b + \Omega_4 \Omega_6 b)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \right) \\
\varphi_{64} &= \frac{\dot{\theta}_3 (\Omega_4^2 n + \Omega_1 \Omega_6 i - \Omega_4 \Omega_6 i - \Omega_1 \Omega_2 n - \Omega_2 \Omega_5 c + \Omega_4 \Omega_6 c) + t_2 p (-\Omega_2 \Omega_5 d + \Omega_4 \Omega_6 d)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\varphi_{66} &= \frac{\dot{\theta}_3 (\Omega_1 \Omega_6 j - \Omega_4 \Omega_6 j - \Omega_2 \Omega_5 e + \Omega_4 \Omega_6 e)}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3}
\end{aligned}$$

As constantes intermediarias das equações apresentadas em 2.66 podem ser vistas na equação 2.67.

$$\begin{aligned}
a &= (-\sin(\theta_2)(2cm2l1l2m2 + 2l1l2m3) - 2\sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
b &= (-2m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - 2\sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
c &= (-2m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - 2\sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
d &= (-\sin(\theta_2)(cm2l1l2m2 + l1l2m3) - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
e &= (-m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
f &= g(\sin(\theta_1)(cm1l1m1 + l1m2 + l1m3) + \sin(\theta_1 + \theta_2)(cm2l2m2 + l2m3) \\
&+ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l3cm3m3) \tag{2.67} \\
g_1 &= (-\sin(\theta_2)(cm2l1l2m2 + l1l2m3) - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
h &= (-2m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
i &= 2m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 \\
j &= \sin(\theta_3)m3cm3l2l3 \\
k &= -g(-\sin(\theta_1 + \theta_2)(cm2l2m2 + l2m3) - \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l3cm3m3) \\
l &= \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3 \\
m &= (-m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 - \sin(\theta_2 + \theta_3)m3cm3l1l3) \\
n &= m3\sin(\theta_3)cm3l2l3 \\
o &= g\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l3cm3m3
\end{aligned}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_{61} & \beta_{62} & \beta_{63} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{21} &= \frac{\Omega_6^2 - \Omega_2 \Omega_3}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\beta_{22} &= \frac{\Omega_3 \Omega_4 - \Omega_5 \Omega_6}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\beta_{23} &= \frac{\Omega_2 \Omega_5 - \Omega_4 \Omega_6}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\beta_{41} &= \frac{\Omega_3 \Omega_4 - \Omega_6 \Omega_5}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\beta_{42} &= \frac{\Omega_5^2 - \Omega_1 \Omega_3}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\beta_{43} &= \frac{\Omega_1 \Omega_6 - \Omega_4 \Omega_5}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\beta_{61} &= \frac{\Omega_2 \Omega_6 - \Omega_2 \Omega_6}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\beta_{62} &= \frac{\Omega_1 \Omega_6 - \Omega_2 \Omega_6}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\beta_{63} &= \frac{\Omega_4^2 - \Omega_1 \Omega_6}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1 \\ 0 \\ \psi_2 \\ 0 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{-\Omega_6^2 f - \Omega_3 \Omega_4 k + \Omega_5 \Omega_6 k - \Omega_5 \Omega_2 o + \Omega_3 \Omega_2 f + \Omega_5 \Omega_6 o}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\psi_2 &= \frac{-\Omega_5^2 k + \Omega_1 \Omega_3 k - \Omega_1 \Omega_6 o + \Omega_4 \Omega_6 o - \Omega_4 \Omega_3 f + \Omega_5 \Omega_6 f}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \\
\psi_3 &= \frac{-\Omega_4^2 o - \Omega_1 \Omega_6 k + \Omega_4 \Omega_6 k + \Omega_1 \Omega_2 o - \Omega_2 \Omega_6 f + \Omega_4 \Omega_6 f}{\Omega_3 \Omega_4^2 - 2\Omega_4 \Omega_5 \Omega_6 + \Omega_2 \Omega_5^2 + \Omega_1 \Omega_6^2 - \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3}
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$C(x) = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{66} \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

Os coeficientes de C (2.72), δ_{11} a δ_{66} , variam de 1 a 0 dependendo da saída que deseja ser mensurada. As constantes δ_{11} a δ_{66} estão relacionadas respectivamente aos estados $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \theta_3$ e $\dot{\theta}_3$. Atribui-se 1 ao ponto onde deseja-

se mensurar o estado e 0 para o estado irrelevante para a saída. Estas variações da matriz de saída serão discutidas adiante deste trabalho.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

A descrição dinâmica do manipulador foi feita utilizando a aceleração dos elos, $\ddot{\theta}_i$, e não as posições, θ_i , por características do tipo de simulação computacional usada na análise do comportamento e das propostas de controle. Estes pontos serão discutidos com mais detalhes em seções adiante.

3 ATUADORES

Como o manipulador, juntas e elos, não apresentam a capacidade autônoma de ter um comportamento controlador é preciso que seja adicionado um novo elemento ao sistema, um atuador que seja capaz de, forçosamente alterar o comportamento natural dos elos e juntas.

Diversos tipos de atuadores são aplicáveis em sistemas robóticos, como hidráulicos, pneumáticos e elétricos. Devido a necessidade de precisão, controle digital e integração com a cinemática do robô, nestes trabalhos os atuadores mais indicados são os elétricos, mais precisamente, os motores elétricos.

A principal característica dos atuadores CC com imã permanente é que o controle sobre a velocidade é feito pela tensão aplicada na armadura do motor (Janzen *et. al.*, 2013), pois o fluxo magnético necessário no enrolamento de campo do motor é feito pelo imã (Fitzgerald, Kingsley e Umans, 2006).

Os atuadores usados foram do tipo CC por apresentarem melhor comportamento na faixa de potência mecânica usada no robô e por facilitarem o acionamento e controle. A opção de imãs permanente foi feita por eliminar a necessidade de uma fonte adicional para excitação da armadura do motor e por ter sido usado em grande parte dos trabalhos de manipuladores robóticos (LIMA, 2015; Bottega, 2008; Molter, 2004). A figura 3.1 mostra o circuito do motor considerado no trabalho.

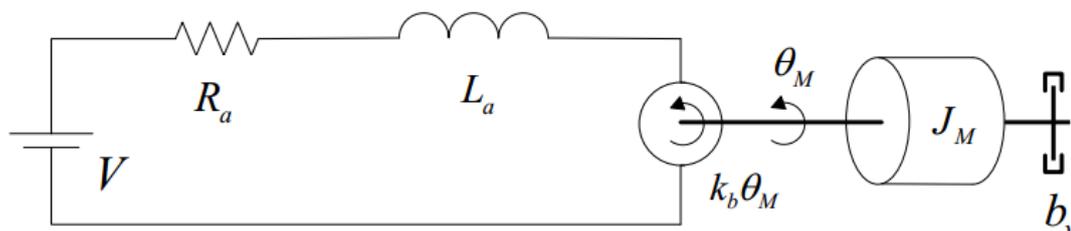


Figura 6 - Circuito do motor CC com imã permanente usado como atuador.
 Fonte: adaptado de LIMA (2015, p. 17).

As constantes físicas do motor, atrito viscoso (b_v), inércia do motor (J_m), constante de torque (K_m), constante de força contra eletromotriz (K_g), resistência da armadura do motor (R_a), indutância do motor (L_a), tensão de alimentação (v_{in})

foram obtidas a partir da documentação do motor CC GM9413-3 fabricado pela Pittman Express e podem ser vistos na tabela 3. As curvas características de operação são apresentadas na figura 7.

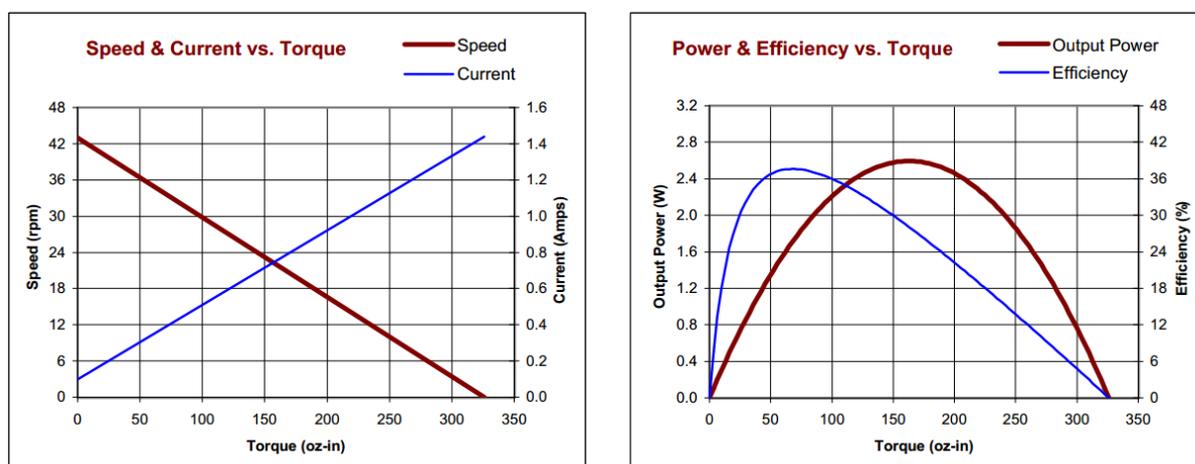


Figura 7 - Curvas de operação dos atuadores CC.
Fonte: Pittman (2001).

Tabela 3 - Dados e constantes dos atuadores CC GM9413-3 - 2001

Dados	Símbolo	Unidade	Valor
Atrito viscoso	b_v	N-m-s	$7,6 \times 10^{-7}$
Inércia do motor	J_m	Kg-m ²	$2,8 \times 10^{-6}$
Constante de torque	K_m	N-m/A	$3,95 \times 10^{-2}$
Constante de força contra eletromotriz	K_g	V/rad/s	$3,95 \times 10^{-2}$
Resistência da armadura	R_a	Ω	8,33
Indutância da armadura	L_a	mH	6,17
Tensão de alimentação	v_{in}	V	12
Corrente de pico	i_{ap}	A	1,44
Torque de pico	τ_p	N-m	2,3

Fonte: autoria própria

Por conta de características da descrição do sistema de equações por espaços de estados, as equações de controle de motor usadas neste trabalho são como mostradas nas equações 3.1 a 3.3. Para esta representação foi considerada como variável de saída a posição θ_m e a ação de controle como a tensão v_{in} .

A representação em matrizes de estados é mostrada nas equações 3.4 e 3.5.

$$\dot{\theta}_{mi} = \frac{d}{dx}(\theta_{mi}) = \omega_{mi} \quad (3.1)$$

$$\dot{\omega}_{mi} = \omega_{mi} \left(\frac{-b_v}{J_m} \right) + i_a \left(\frac{K_m}{J_m} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\delta i_a}{\delta t} = \omega_{mi} \left(\frac{-K_g}{L_a} \right) + i_a \left(\frac{-R_a}{L_a} \right) + v_{in} \left(\frac{1}{L_a} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{dy}{dx} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_v}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ 0 & -\frac{K_g}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} [v_{in}] \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{dx} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \\ i_a \end{bmatrix} + [0][v_{in}] \quad (3.5)$$

4 CONTROLE

O conceito de controle versa sobre a capacidade de conduzir um sistema a um determinado comportamento diferente da resposta natural, chamada também de malha aberta, balizado por parametrizações e parâmetros de desempenho (Dorf e Bishop, 2010).

Molter (2008) destaca algumas características dos manipuladores robóticos que precisam ser levadas em conta no momento de decidir qual técnica de controle será usada. Nesse contexto, destacam-se a impossibilidade de existir um controle independente para cada grau de liberdade do manipulador, já que existe uma correlação indissociável entre eles e para alguns tipos de manipuladores um comportamento caótico natural em algumas regiões de operação.

Devido a semelhança na modelagem (Gluck *et. Al.*, 2014 e Eyre e Holzgrafr, 2011), os estudos sobre o comportamento e controle de sistemas pendulares e manipuladores robóticos apresentam diversas interseções em estratégias de controle, dedução mecânica e aplicações. Essa correlação entre sistemas e aplicabilidade tem apresentado uma grande vantagem na comunicação entre os estudos e promovido um crescente interesse e avanço na pesquisa de sistemas com comportamento caóticos.

Trabalhos recentes ligados a robótica e controle ótimo (Rezende, 2011; De Paula, 2006; Korayem, 2013 e Lima, 2014) tem demonstrado esse crescimento já citado sobre comportamento caótico de sistemas mecânicos.

4.1 CONTROLE ÓTIMO

Nos sistemas de controle ótimo o objetivo é o mesmo já comentado acima, mas com a particularidade de ter a necessidade de otimizar o esforço de controle baseado em um funcional de custo, também chamados de índice de desempenho. (Silva, 2014).

Como os sistemas utilizados para controle ótimo apresentam comportamentos particulares, como não linearidades e comportamento caótico, sua representação é feita através de matrizes de estados como mostrado na equação 4.1.

$$\dot{x} = A x(t) + B u(t) \quad (4.1)$$

$$y = C x(t) + D u(t)$$

Conhecendo a descrição do sistema em malha aberta e sem ação de forçar externas a sua descrição dinâmica é preciso determinar se o sistema é controlável ou não. Segundo a análise de controlabilidade, Dorf e Bishop (2010, p. 836), um sistema é dito controlável se existir uma função $u(x, t)$ que seja capaz de levar o sistema para a sua origem em um intervalo de tempo finito.

Na representação do sistema descrito na equação 4.1 existem as matrizes dependentes dos estados, matriz A e C , e a matriz relacionada às entradas, matriz B . Nesse tipo de descrição matemática os estados são os responsáveis pela descrição do sistema, tanto na variação temporal como na incorporação das entradas aplicadas a ele. Assim, a análise de controlabilidade é feita usando como base as matrizes A e B como mostrado na equação 4.2 (Janzen *et. al.*, 2013).

$$M = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (4.2)$$

O sistema descrito em 4.1 e 4.2 é dito controlável se o posto da matriz M (dimensão do espaço das linhas e colunas) for igual a n , que corresponde à ordem do sistema que original que foi usado como base para as matrizes A e B . Em termos matriciais a ordem n pode ser entendida como a ordem da matriz A .

Conhecendo a controlabilidade do sistema é possível definir quais serão as ações aplicadas a ele, tanto na busca de controlabilidade ou nas estratégias de controle para sistema já controláveis.

Uma das soluções possíveis para o controle de 4.1 é considerar que existe uma ação de controle u que corresponde a um ganho k multiplicado pelos estados x , como descrito na equação 4.3 de uma forma que sistema passe a ser descrito como mostrado em 4.4.

$$u = -kx(t) \quad (4.3)$$

$$\dot{x} = (A - Bk)x(t) \quad (4.4)$$

Encontrando a solução para a equação 4.4, mostrada na equação 4.5, é possível observar que a solução é dada através dos autovalores da relação $(A - Bk)$. Nesse caso esta solução 4.5 também pode ser entendido como a estabilidade do sistema.

$$x(t) = e^{(A-Bk)t}x(0) \quad (4.5)$$

Se o valor de A e B já são conhecidos, o controle é dado pela determinação da matriz k , que nesse trabalho, é chamada de matriz de realimentação de estados (Lima, 2014).

Inúmeras abordagens podem ser tomadas para determinar a matriz de realimentação de estados e as escolhidas para uso neste trabalho serão discutidas a seguir.

4.2 CONTROLE LQR

O controle LQR é uma das inúmeras técnicas de controle ótimo e vem ganhado espaço em diversos campos devido a sua simplicidade de implementação e boas características de desempenho (Kanieski, 2010).

A técnica de controle LQR é usada como ponto de partida de diversas técnicas de controle ótimo (Silva, 2014). O regulador linear quadrático, ou LQR, tem uma importância particular por ser o controlador inicial para o estudo dos controladores para sistemas não lineares ou com comportamento caótico. A descrição do sistema é feita usando o sistema 4.1 e os conceitos apresentados nas equações 4.3 e 4.4.

No controle LQR a matriz k é determinada com auxílio de um índice de desempenho que minimizar o funcional de custo. O funcional de otimização, apresentado na equação 4.6, em conjunto com a equação 4.7 fornecem uma matriz de controle usada para a otimização do sistema.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q(x)x + u^T R(x)u) dt \quad (4.6)$$

$$u = -k x(t) \quad (4.7)$$

As matrizes $Q(x)$ e $R(x)$ são matrizes auxiliares para o cálculo do controle. Diversos trabalhos (Katsev, 2006; Silva, 2014 e Tusset 2009) tratam de metodologias para definição destas matrizes e como a definição das mesmas influencia diretamente nas respostas do controle. As diferentes formas de determinar seus valores e as consequências destas definições será discutida na seção seguinte deste trabalho onde é abordada a forma de obter a otimização das respostas do sistema.

Algumas definições são gerais e independem do sistema controlado, para $Q(x)$ exige-se que seja simétrica e semipositiva e para $R(x)$ que seja simétrica, definida e positiva. Estas duas matrizes são as responsáveis por pesar a diminuição dos erros dos estados e do gasto energético, respectivamente. Tusset (2009) propõe a solução de $Q(x)$ a partir da matriz $C(x)$ da representação padrão em espaços de estados, mostrado em 4.1. O cálculo de $Q(x)$ é feito pelo produto de $C(x)$ com a transposta de $C(x)$ (equação 4.8).

$$Q(x) = C(x)^T C(x) \quad (4.8)$$

Como a matriz $C(x)$ é responsável por determinar quais estados serão mensurados na saída, utilizar a matriz $C(x)$ como base para $Q(x)$ resolve a grande maioria das aplicações. A matriz $R(x)$ deve seguir o mesmo número de colunas de $B(x)$ e usa-la como uma matriz identidade também é indicada para maioria das aplicações.

Assim, as definições de $Q(x)$ e $R(x)$ apontadas acima já são suficientes para controle do sistema. A utilização de outras metodologias para estas matrizes são uma otimização do controle já obtido pelos métodos comentados ou para obtenção de comportamentos diferenciados das variáveis de controle. A matriz de controle resultado da equação 4.7 é usada como entrada e esforço de controle no sistema dinâmico mostrado em 4.1. As diferentes formas de utilizar a matriz u e o sistema dinâmico 4.1 na solução numérica do controle serão discutidas na sequencia deste trabalho.

Assim, quando os elementos da matriz k são determinados de forma a minimizar o funcional 4.7 o controle aplicado é dito ótimo para qualquer estádio inicial correspondente a $x(0)$. A solução do funcionar 4.7 associado a 4.8 pode ser feito de

diversas maneiras e utilizando inúmeras ferramentas que serão comentadas e apresentadas a seguir.

4.3 CONTROLE SDRE

O controle SDRE pode ser entendido como uma extensão das técnicas de controle que utilizam os Reguladores Lineares Quadráticos, mas com uma abordagem voltada para sistemas não lineares e com características específicas na matriz de estados A .

A técnica introduzida por Person (1962) utiliza do conceito de regulação linear quadrática aplicando um índice adicional para otimização do sistema não linear e não estacionário por meio de aproximação linear usando como base a passagem temporal e os estados. Isso significa que a descrição do sistema na matriz A é dependente dos estados e seus valores são atualizados a cada instante n da solução. A formulação do controle SDRE apropria-se da representação conhecida como espaço de estados e utiliza como base a sua representação matricial como já comentando, mas com um adendo para as componentes do sistema que não dependem dos estados, chamada aqui de $G(x)$. Essa representação é mostrada em 4.9.

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + G(x) \quad (4.9)$$

A representação matricial mostrada em 4.9 engloba todos os termos apresentados nas equações dinâmicas em 2.57 a 2.59, para o caso do manipulador, ou 3.1 a 3.3, para o caso dos atuadores. A matriz $A(x)$ agrupa os termos dependentes dos estados, a matriz $B(x)$ os termos relacionados com as estradas do sistema dinâmico e a matriz $G(x)$ todos os termos sem correlação com os estados. Cada uma destas matrizes é usada para uma das componentes do controle e serão discutidos a seguir.

O funcional de otimização apresentado em 4.6 é usado em conjunto com o conceito de horizonte finito (Lima, 2014) e passa a ser descrito como mostrado em 4.10.

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.10)$$

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2} x^T Q(x)x + \frac{1}{2} u^T R(x)u + p^T (A(x)x + B(x)u + G(x)) \quad (4.11)$$

As matrizes $Q(x)$ e $R(x)$ de 4.10 seguem as mesmas condições e parâmetros já comentados para o controle LQR.

Usando a metodologia SDRE, a solução do funcional 4.10 é feita utilizando a equação de Riccati como auxílio e a otimalidade do controle pela Hamiltoniana do sistema, equação 4.11. Com isso a solução apresentada para os reguladores lineares passa a depender de uma correlação de estados e matrizes de controle, como apresentado na equação 4.1.12.

Como neste trabalho optamos pela abordagem de solução numérica das equações, Silva (2014) apresenta que a solução do funcional associado à Riccati é dada como mostrado na equação 4.13.

$$u(t) = R^{-1}B(x)^T P(x)x(t) \quad (4.12)$$

$$A(x_n)^T P(x)_{n+1} + P(x)_{n+1}A(x_n) - P(x)B(x_n)R(x_n)^{-1}B(x_n)^T P(x)_{n+1} + Q(x) = 0 \quad (4.13)$$

Segundo Tusset (2009) é possível resumir o procedimento de controle SDRE, a obtenção das matrizes $P(x)_n$ e a matriz de controle k no seguinte procedimento:

1. Equacionar o modelo no modelo de espaço de estados e parametrizar o modelo com os coeficientes dependente de estados;
2. Definir $x_0 = x(0)$ e calcular o estado $x(t)$ do sistema;
3. Calcular ou definir as matrizes $Q(x)$ e $R(x)$;
4. Resolução da equação de Riccati, equação 4.13, para o estado $x(t)$;
5. Encontrar o sinal de entrada u , equação 4.12;
6. Utilizar o valor de saída do sistema no tempo i como entrada do sistema para o tempo $i + 1$ no estado $x(t)_{i+1}$;
7. Analisar o critério de controlabilidade 4.2, e se o posto da matriz M for igual ao índice do sistema, n , continuar o cálculo a partir do estágio 4;
8. Repetir os cálculos até que o intervalo de tempo para análise seja satisfeito.

5 OTIMIZAÇÃO DE PERFORMANCE

Com as técnicas de controle definidas é possível analisar as respostas do modelo quando diferentes variáveis são colocadas como principal ponto de interesse e controle. O comportamento dos modelos dinâmicos de manipuladores é avaliado basicamente nas seguintes áreas: precisão, velocidade de execução e repetibilidade.

A precisão é a capacidade do manipulador de executar a tarefa exatamente onde é desejado; repetibilidade é a capacidade de refazer uma mesma trajetória ou tarefa diversas vezes sem que haja uma queda na precisão de execução da tarefa e a velocidade de execução é a capacidade do manipulador de ser rápido ao cumprir com a sua tarefa.

A análise sobre estes parâmetros de comportamento é relevante pois são os principais parâmetros de análise de desempenho e estão extremamente relacionados diretamente, ou seja, se aumentamos a velocidade tendemos a diminuir a precisão.

Relembrando as análises discutidas anteriormente, a estrutura do manipulador também influencia diretamente nos parâmetros de desempenho e isso acarreta que as correlações entre eles não são diretas e lineares, sendo possível encontrar um ponto onde exploramos ao máximo a capacidade do manipulador chegando ao desempenho máximo do conjunto de parâmetros e não de um isoladamente.

5.1 – OTIMIZAÇÃO DE ROBÔS USANDO CONTROLE ÓTIMO

Utilizando como base o controle LQR e o controle SDRE, a otimização das respostas do manipulador pode ser feita variando os coeficientes das matrizes auxiliares de controle $Q(x)$ e $R(x)$. As características das matrizes de controle já foram discutidas anteriormente e aqui passamos a analisar as suas características matemáticas e operacionais para obtenção de respostas específicas.

Remetendo aos conceitos apresentados para o controle LQR e SDRE, matematicamente a matriz $Q(x)$ deve ter as mesmas dimensões da matriz $A(x)$ e a matriz $R(x)$ deve ter o mesmo número de colunas da matriz $B(x)$.

A matriz 5.1 mostra as dimensões e coeficientes associados a $Q(x)$ para o caso do modelo dinâmico deduzido neste trabalho e equação 5.2 mostra a matriz $R(x)$

usada. Os coeficientes destas matrizes são determinados de acordo com as diretrizes discutidas a seguir para obtenção do comportamento desejado do conjunto de variáveis controladas.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} & q_{41} & q_{51} & q_{61} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} & q_{42} & q_{52} & q_{62} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{43} & q_{53} & q_{63} \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} & q_{54} & q_{64} \\ q_{15} & q_{25} & q_{35} & q_{45} & q_{55} & q_{65} \\ q_{16} & q_{26} & q_{36} & q_{46} & q_{56} & q_{66} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$R(x) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

A matriz $Q(x)$ segue as mesmas dimensões da matriz $A(x)$ pois ela é responsável por gerar a correlação entre os estados e os ganhos associados a eles. As colunas da matriz $Q(x)$ estão relacionadas diretamente com os estados do sistema da mesma forma que as linhas estão relacionadas diretamente aos estados.

Esta correlação entre coeficiente de $Q(x)$ e os estados pode ser analisada a partir das posições da matriz, onde os coeficientes de q_{ij} estão associados aos estados $x(i)$ para as colunas e $x(j)$ para o caso das linhas. Assim, o coeficiente q_{23} está relacionado aos estados $x(2)$ e $x(3)$ e o módulo deste coeficiente influencia o comportamento destes dois estados.

Essa dependência de estados leva a concluir que os coeficientes da diagonal principal, q_{11} a q_{66} , são os coeficientes que tem mais peso sobre os estados. É na diagonal principal onde são alocados os coeficientes para determinar qual deve ser a variável que mais será levada em conta nas ações de controle, tanto para LQR quanto para SDRE. Os demais coeficientes da matriz são pesos de ajuste as respostas obtidas.

Algumas metodologias foram utilizadas em trabalhos em robótica para obter as matrizes auxiliares de controle. Lima (2014) opta pela utilização de $Q(x)$ como uma matriz diagonal unitária com pesos específicos nos termos q_{ij} relacionados diretamente com as variáveis de interesse. Na apresentação do controle LQR e SDRE apresentou-se a proposta de Tusset (2009) para determinar as matrizes auxiliares de controle. Buscando otimizações das respostas encontradas, as metodologias dos

trabalhos citados foram usadas como pontos de partida para testes e deduções adicionais. Adiante neste trabalho serão discutidas as diferentes respostas obtidas.

Katsev (2006) destaca a falta de métodos bem difundidos e testados de solução da matriz $Q(x)$. Aprofundando no conceito, a matriz $Q(x)$ é a parametrização que limita os estados do sistema de assumirem valores muito maiores que o desejado e a matriz $R(x)$ é a parametrização das ações de controle. A definição das matrizes deve ser feita para balizar as ações de entrada e os estados de forma que não haja comportamento errático indesejado.

Como nos cálculos dos coeficientes da matriz de controle k as matrizes $Q(x)$ e $R(x)$ são multiplicadas, opta-se por manter a matriz $R(x)$ constante e as variações para otimização são feitas sobre a matriz $Q(x)$.

Os testes neste trabalho foram feitos utilizando duas abordagens sobre a matriz $Q(x)$. Primeiramente objetiva-se conseguir a resposta ótima para cada uma das variáveis de estado individualmente e em seguida a resposta ótima para um conjunto de variáveis, como as posições dos dois primeiros elos, θ_1 e θ_2 . Na primeira abordagem a matriz 5.1 é definida como triangular superior e inferior com os valores da diagonal principal variando de acordo com a necessidade de otimizar o estado desejado. Na segunda abordagem a matriz $Q(x)$ recebeu uma variação paramétrica dos coeficientes relacionados ao estado desejado.

Os resultados obtidos e as comparações de performance serão apresentadas no capítulo 7.

6 ANÁLISE DE COMPORTAMENTO EM TRAJETÓRIAS

O planejamento de trajetória consiste no estudo e metodologias para definir o comportamento das variáveis do manipulador seguindo um percurso desejado.

Sabendo que as principais variáveis do robô são as posições, velocidades e acelerações dos elos e juntas, este comportamento desejado pode ser entendido como qual devem ser os valores destas variáveis em um intervalo de tempo com alguma parametrização.

As parametrizações podem ser as limitações do espaço de trabalho do robô ou as necessidades do comportamento, como uma velocidade constante ou posição específica. Cada aplicação do manipulador gera diferentes definições de projeto, como velocidades específicas para soldagens ou trajetórias determinadas para transporte de mercadorias. Na grande maioria das aplicações, definir uma trajetória significar definir que a ferramenta do manipulador (*end-effector*) siga um caminho determinado, tenha uma velocidade específica ou que ela chegue a um determinado ponto no menor intervalo de tempo possível.

O procedimento de geração de uma trajetória pode ser abordado por diversas metodologias matemáticas e analíticas ou computacionais e numéricas, mas todas com o mesmo objetivo de determinar um conjunto de pontos ou função descritiva de um caminho levando em conta as parametrizações. Analiticamente, uma das maneiras de gerar estas trajetórias é calcular os pontos desejados a partir das raízes de um polinômio de ordem n .

Este polinômio pode escolhido por duas vertentes, uma a partir do gráfico das respostas das raízes e se esse caminho seguido se encaixa nas parametrizações espaciais ou a segunda vertente onde pode-se definir um polinômio a partir de pontos específicos no espaço de trabalho. Em manipuladores robóticos o interesse recai sobre as três variáveis já comentadas: posição, velocidade e aceleração.

Esta relação de variáveis já foi abordada anteriormente, equações 2.30 a 2.32, e remetendo a estas relações, as três variáveis estão relacionadas a partir de derivações temporais sucessivas. Independente da abordagem sobre o polinômio, o ponto de partida da geração de trajetória começa com a análise da descrição da posição.

Como o objetivo deste trabalho é analisar o comportamento do manipulador sujeito a um controle, iniciamos o planejamento da trajetória considerando um polinômio de ordem superior e encontrando os pontos descritos pelas raízes.

6.1 TRAJETÓRIAS A PARTIR DE POLINÔMIOS

A utilização de polinômios pode seguir a abordagem de calcular um polinômio de ordem n para um conjunto de pontos presente no espaço de trabalho ou encontrar estes pontos a partir de um polinômio já conhecido. As duas abordagens resultam na mesma solução: um conjunto de valores que direciona o comportamento das variáveis do manipulador. A melhor metodologia deve ser escolhida pela característica do projeto.

Levando em conta as características do trabalho, inicialmente não há restrições de espaço de trabalho ou necessidades específicas. Assim, optou-se por utilizar um polinômio conhecido para geração de pontos para posição, velocidade e aceleração.

Na geração da trajetória utilizando polinômios uma variável $q_i(t)$ descreve matematicamente um conjunto de pontos a partir de uma solução polinomial e a velocidade e aceleração são encontradas com derivadas sucessivas do polinômio da posição. Esse processo é análogo ao já discutido nas equações 2.30 a 2.32 para dedução das variáveis do manipulador. Dessa forma, as derivadas primeira e segunda de $q_i(t)$ passam a ser, respectivamente, a velocidade e aceleração desejadas.

Polinômios com ordem igual ou inferior à $n = 2$ não fornecem uma descrição ponto a ponto da aceleração, e da velocidade para o caso de $n = 1$, devido ao resultado da derivada destes polinômios ser uma constante, ou nula para $n = 1$. Logo, em projetos onde seja necessária uma descrição ponto a ponto destes comportamentos, um polinômio de terceira ordem passa a ser o mínimo necessário para estes cálculos.

Mesmo os polinômios de terceira ordem informando as informações desejadas e em casos onde a velocidade e a aceleração não sejam o interesse primário é indicado o uso de polinômios de ordem elevada. Isto deve-se à existência de grandes valores momentâneos de aceleração e velocidade nos cálculos de ações de controle devido à falta de limitação para estes comportamentos. Como o controlador não tem referência para estes valores, assume que qualquer ação de

controle é possível e isso não é indicado, pois estas ações de controle serão efetuadas por atuadores com limitações físicas, sejam motores CC com limitações de torque ou de qualquer outro tipo.

Em equacionamentos complexos resolvidos por meios computacionais, é inevitável que a resolução das equações diferenciais seja uma aproximação dos valores reais. Entendendo esse processo de resolução utilizado pelos softwares de cálculo numérico é possível compreender o motivo de informar o valor preciso de uma variável diminuir o custo de processamento e melhora a precisão das respostas encontradas.

Como já discutido, a escolha do polinômio pode ser feita a partir da resposta obtida para posição, velocidade e aceleração. Considerando os atuadores analisados, a posição pode ser analisada a partir do comportamento gráfico da variável $q_i(t)$, a velocidade pelos valores máximos da variável $\dot{q}_i(t)$ e a aceleração pelo comportamento variacional da variável $\ddot{q}_i(t)$. Estes três comportamentos são análogos ao ângulo de trabalho, a velocidade máxima e a aceleração máxima do atuador, por isso estes são pontos são analisados.

Os atuadores usados nos manipuladores em sua grande maioria são motores CC e isso significa que a dinâmica do atuador e suas características precisam ser levadas em conta na escolha da trajetória. Portanto, faz-se necessário analisar as respostas dos polinômios à luz das características dos atuadores.

Buscando um controle das três principais variáveis, neste trabalho são analisados polinômios de terceira e de quinta ordem. A figura 8 mostra as respostas destas três variáveis para um polinômio de terceira ordem. A figura 9 mostra o comportamento da posição, velocidade e aceleração de um polinômio de quinta ordem.

Comparando as respostas das figuras 8 e 9 é possível concluir que o comportamento da aceleração para o polinômio de terceira ordem atinge módulos muito mais elevados que o de quinta ordem. As respostas mostram que no polinômio de quinta ordem, a aceleração do atuador tem um tempo curto em valores máximos e que velocidades elevadas não coincidem com grandes acelerações.

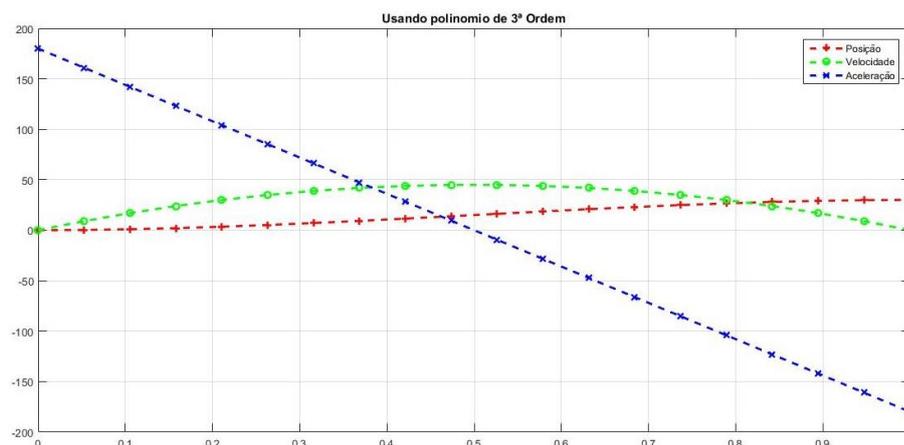


Figura 8 - Resposta da posição, velocidade e aceleração para um polinômio de terceira ordem.
Fonte: autoria própria.

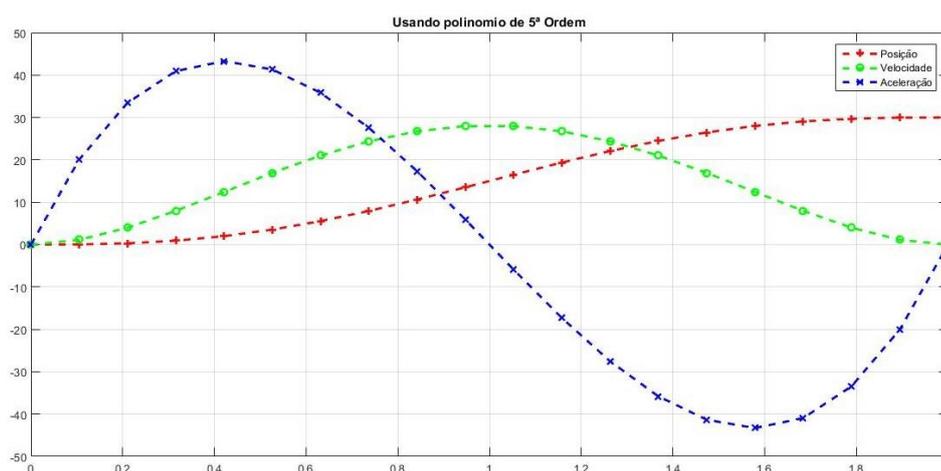


Figura 9 - Resposta da posição, velocidade e aceleração para um polinômio de quinta ordem.
Fonte: autoria própria.

Na dedução da dinâmica do manipulador definiu-se que a ação de controle fosse o torque do atuador e isso significa que quanto mais percentual do torque máximo do atuador for usado para movimentação, há menos margem para as ações do controlador. Quanto mais os atuadores forem usados para atingir pontos extremos ou comportamentos variantes, mais complexo é que o controle aja para o comportamento desejado.

Buscando uma efetividade máxima do controle aplicado e observando o comportamento das figuras 8 e 9, optou-se por utilizar um polinômio de quinta ordem

para geração de trajetória. A equação 6.1 mostra o polinômio de quinta ordem utilizado:

$$q_i(t) = a_{i5}t^5 + a_{i4}t^4 + a_{i3}t^3 + a_{i2}t^2 + a_{i1}t + a_{i0} \quad (6.1)$$

As equações 6.2 e 6.3 mostram as derivadas primeira e segunda, descrevendo a velocidade e aceleração, respectivamente, utilizando o polinômio da equação 6.1 como base.

$$\dot{q}_i(t) = 5a_{i5}t^4 + 4a_{i4}t^3 + 3a_{i3}t^2 + 2a_{i2}t + a_{i1} \quad (6.2)$$

$$\ddot{q}_i(t) = 20a_{i5}t^3 + 12a_{i4}t^2 + 6a_{i3}t + 2a_{i2} \quad (6.3)$$

O planejamento de trajetória visa calcular os coeficientes a_{ij} tal que as variáveis das juntas $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ e $\ddot{q}_i(t)$ saiam dos valores iniciais $q_i(t_0)$, $\dot{q}_i(t_0)$ e $\ddot{q}_i(t_0)$ e sigam até os valores finais $q_i(t_f)$, $\dot{q}_i(t_f)$ e $\ddot{q}_i(t_f)$ dentro de um intervalo de tempo definido, t_0 a t_f . Assim as equações 6.1 a 6.3 são avaliadas no intervalo final e inicial gerando duas equações para cada variável.

Tratando estas equações como um sistema linear foi possível determinar como os coeficientes a_{ij} são calculados. As equações 6.4 a 6.9 mostram estes resultados:

$$a_{i5} = \frac{t_f[(\ddot{q}_{if} - \ddot{q}_{i0})t_f - 6(\dot{q}_{if} + \dot{q}_{i0}) + 12(q_{if} - q_{i0})]}{2t_f^5} \quad (6.4)$$

$$a_{i4} = \frac{t_f[16\dot{q}_{i0} + 14\dot{q}_{if} + (3\ddot{q}_{i0} - 2\ddot{q}_{if})t_f + 30(q_{i0} - q_{if})]}{2t_f^4} \quad (6.5)$$

$$a_{i3} = \frac{t_f[(\ddot{q}_{if} - 3\ddot{q}_{i0})t_f - 4(2\dot{q}_{if} + 3\dot{q}_{i0}) + 20(q_{if} - q_{i0})]}{2t_f^3} \quad (6.6)$$

$$a_{i2} = \frac{\dot{q}_{i0}}{2} \quad (6.7)$$

$$a_{i1} = \dot{q}_{i0} \quad (6.8)$$

$$a_{i0} = q_{i0} \quad (6.9)$$

Utilizando a geração de posição para um polinômio de quinta ordem, mostrado na figura 10, foram definidos os parâmetros de desempenho que são mostrados na tabela 2. As simulações e as comparações entre as estratégias de controle discutidas no capítulo 5 serão abordadas no próximo capítulo.

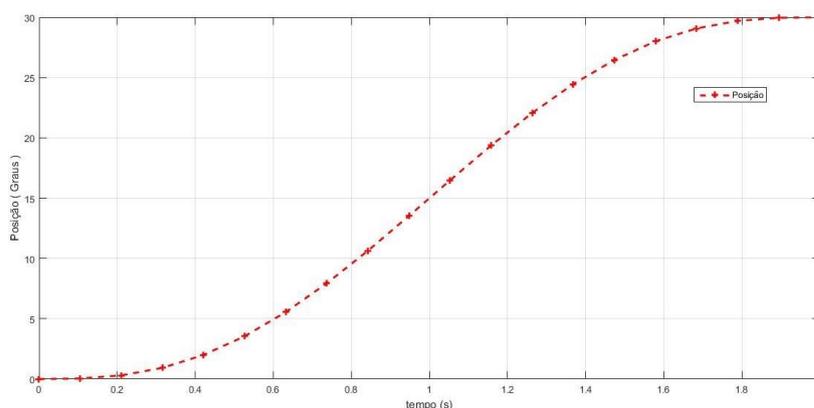


Figura 10 - Trajetória desejada usando polinômio de quinta ordem.
Fonte: autoria própria.

Tabela 4 - Parâmetros de comportamento para geração de trajetória			
Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Tempo inicial	t_0	s	0
Tempo final	t_f	s	2
Posição inicial	θ_0	rad	0
Posição final	θ_f	rad	$\pi/6$
Velocidade inicial	ω_0	rad/s	0
Velocidade final	ω_f	rad/s	0
Aceleração inicial	$\dot{\omega}_0$	rad/s ²	0
Aceleração final	$\dot{\omega}_f$	rad/s ²	0

Fonte: autoria própria

7 SIMULAÇÃO E RESULTADOS

A efetividade das deduções apresentadas neste trabalho foram analisadas utilizando medições experimentais e simulação computacional. As medições experimentais aplicadas objetificaram a obtenção dos dados dos atuadores e das partes mecânicas do projeto.

Os dados dos elos e juntas usados nas simulações dos foram comentados na dedução das equações de movimento e apresentados resumidamente na tabela 2. Os dados dos atuadores foram apresentados e discutidos na análise dos motores CC e podem ser vistos na tabela 3. O software MATLAB[®] comercializado e produzido pela empresa Mathworks[®] foi a principal ferramenta na aquisição dos dados do comportamento do modelo, desde sua resposta à cinemática e dinâmica até as estratégias de controle aplicadas.

As simulações realizadas utilizando solução numérica foram apoiada nas estruturas fornecidas pelo MATLAB[®]. Em todos os casos optou-se pela metodologia Runge-Kutta de 4^a ordem com as devidas variações nos parâmetros de simulações. Todas as deduções apresentadas neste trabalho foram simuladas e serão comentadas nas seções a seguir.

7.1 CINEMÁTICA E DINÂMICA

As simulações de cinemática e dinâmica do manipulador tem como objetivo comprovar que o comportamento em natural obtido através das equações satisfaz os parâmetros desejado e, se as simplificações adotadas não interferem no modelo deduzido.

Nas deduções de cinemática e dinâmica não foram levados em conta comportamento vibratórios ou de flexibilidade dos materiais. Todas as componentes dissipativas foram reunidas em uma função $D(t)_n$, onde n corresponde ao elo relacionado a função de dissipação.

As figuras 11 e 12 mostram o comportamento oscilatório dinâmico das posições e das velocidades dos três elos, respectivamente.

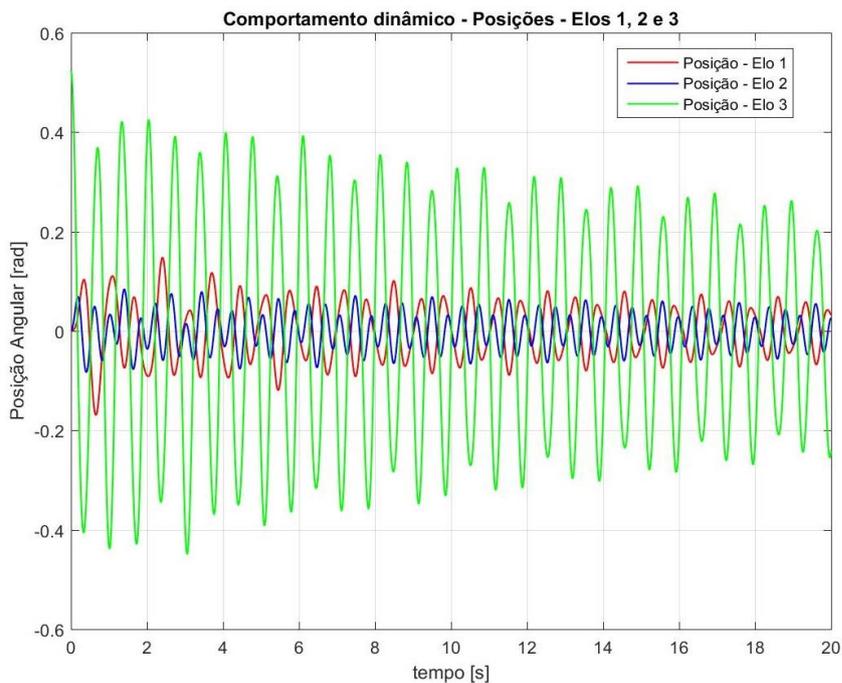


Figura 11 - Comportamento dinâmico oscilatório das posições; θ_1 , θ_2 , e θ_3 ; do elo 1, 2 e 3.
Fonte: autoria própria.

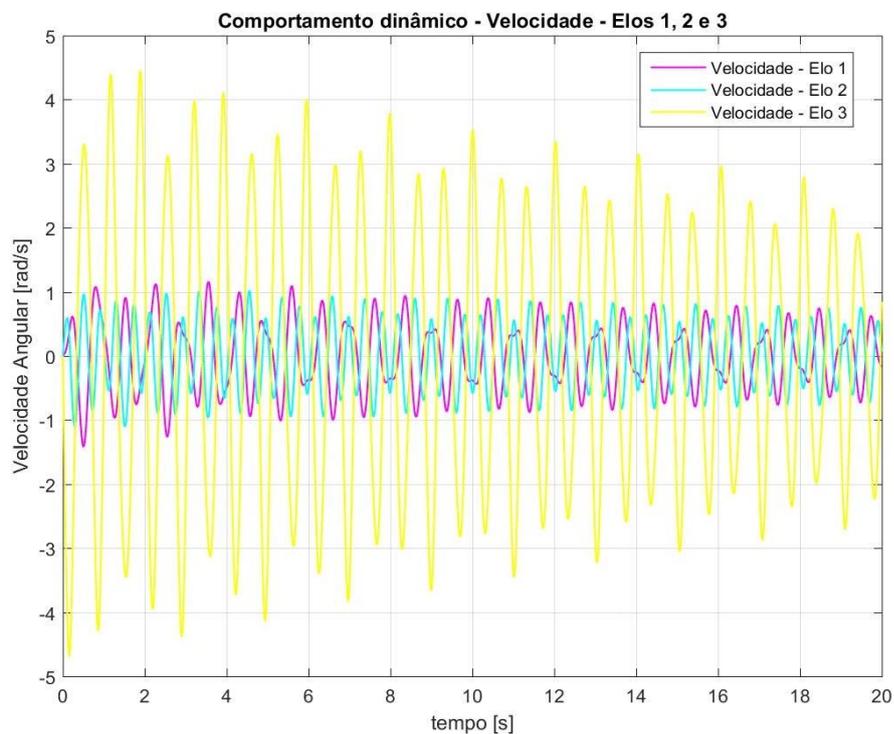


Figura 12 - Comportamento dinâmico oscilatório das velocidades; ω_1 , ω_2 , e ω_3 ; dos elos 1, 2 e 3.
Fonte: autoria própria.

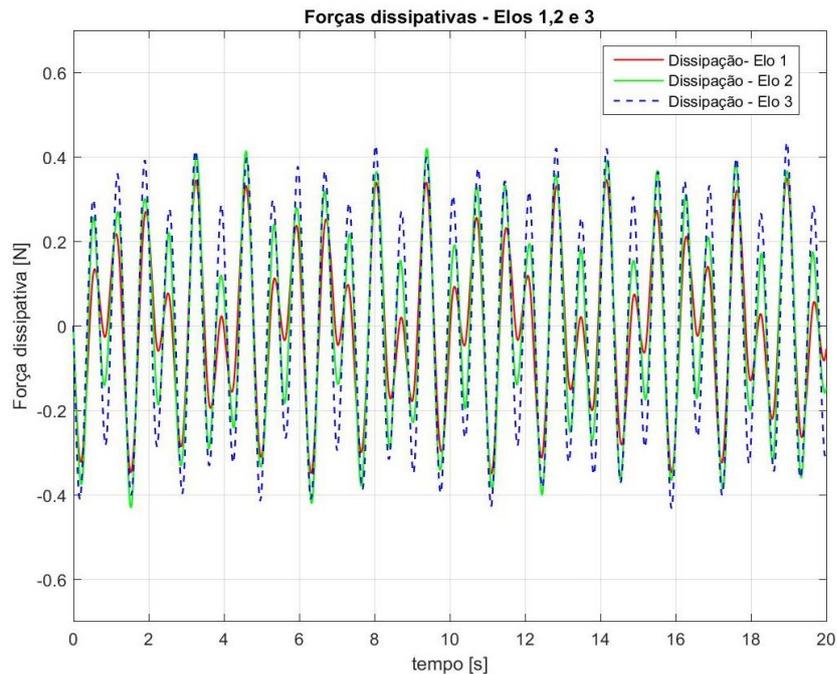


Figura 13 - Força dissipativa aplicada ao modelo dinâmico oscilatório nos elos 1, 2 e 3.
Fonte: autoria própria.

7.2 CONTROLE LQR E SDRE

O controle baseado no Regulador Quadrático Linear foi feito para controle dos modelos dinâmicos a partir da função u , equação 4.7, como ação de controle.

O primeiro controle aplicado ao modelo foi com um ponto fixo definido para as três variáveis. Foram definidos pontos finais para o desempenho de controle sem especificar qual deveria ser o comportamento intermediário das variáveis de controle.

Testes preliminares com o modelo dinâmico apresentado nas figuras 11 e 12 comprovaram que a correlação entre as variáveis θ_1 , θ_2 e θ_3 é elevada e o sistema tende a comportamento não controlável em um grande percentual da sua faixa de operação. A figura 14 mostra um exemplo de comportamento não controlável do sistema para condições iniciais $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = -\pi/3$ e $\theta_3 = \pi/6$.

O resultado mostrado na figura 14 exemplifica que o comportamento não controlável está principalmente associado a delimitar condições iniciais para as variáveis de estados sem considerar a possibilidade físicas de atender a estas condições.

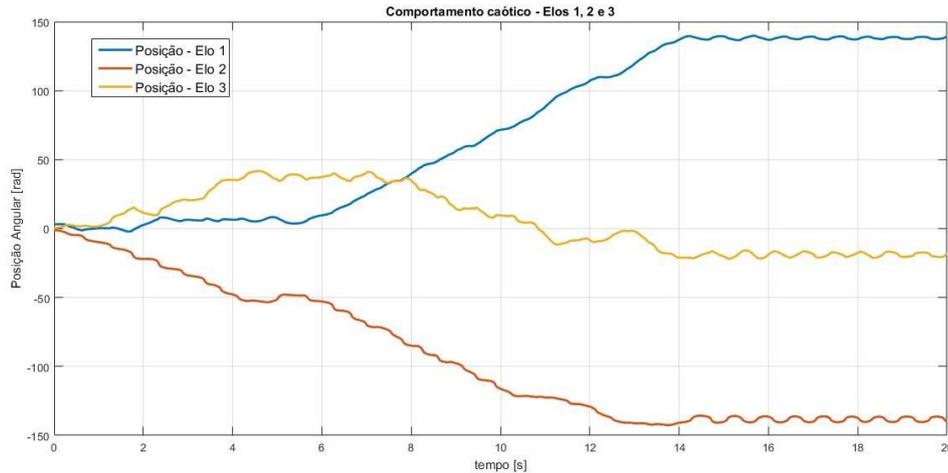


Figura 14 - Comportamento não controlável das posições θ_1 , θ_2 e θ_3 .
Fonte: autoria própria.

Assim, nos sistemas de controle iniciais optou-se por manter o segundo elo, associado θ_2 , como uma variável adaptativa em relação a posição desejada dos outros dois elos, θ_1 e θ_3 .

Como as matrizes de estados, A e B , são dependentes dos estados do modelo, a utilização do controle LQR não é possível e a aplicação do controle SDRE foi necessária.

A simulação do comportamento do modelo dinâmico controlado aconteceu utilizando a descrição em espaços de estados mostrado nas equações 7.1 a 7.6 (Alleyne e Erden, 2001). Quanto ao controle SDRE, uma matriz k_i é calculada para cada instante de tempo i de integração da solução, como mostrado na equação 7.7. Cada linha da matriz apresentada em 7.7 corresponde, respectivamente, a uma das equações dinâmicas de 7.1 a 7.6 e cada coluna a um dos seis estados associados às mesmas equações dinâmicas já citadas.

$$\dot{x}(1) = x(2) \quad (7.1)$$

$$\dot{x}(2) = \left(\frac{(m_3 \, c m_3^2 \, l_3^2 + I_3)(g \sin(x(1))(l_1 \, m_2 + l_1 \, m_3 + c m_1 \, l_1 \, m_1 \dots)}{(l_1^2 \, l_2^2 \cos(x(1) - x(3))^2 (m_3 \, c m_3^2 \, l_3^2 + I_3) \dots)} \right) \quad (7.2)$$

$$\dot{x}(3) = x(4) \quad (7.3)$$

$$\dot{x}(4) = \left(\frac{(m_3 cm_3^2 l_3^2 + I_3)(g l_2 \sin(x(3))(m_3 + cm_2 m_2) + l_1 l_2 x(2) \sin(x(1) - x(3)) \dots)}{(l_1^2 l_2^2 \cos(x(1) - x(3))^2 (m_3 cm_3^2 l_3^2 + I_3) \dots)} \right) \quad (7.4)$$

$$\dot{x}(5) = x(6) \quad (7.5)$$

$$\dot{x}(6) = \left(\frac{(u_3(m_2 cm_2^2 l_2^2 + m_3 l_2^2 + I_2)(m_1 cm_1^2 l_1^2 + m_3 l_1^3 m_2 l_2^2 + I_1) \dots)}{(l_1^2 l_2^2 \cos(x(1) - x(3))^2 (m_3 cm_3^2 l_3^2 + I_3) \dots)} \right) \quad (7.6)$$

$$k_i = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} & k_{41} & k_{51} & k_{61} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} & k_{42} & k_{52} & k_{62} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{43} & k_{53} & k_{63} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

A tabela 5 mostra os parâmetros desejados para o controle SDRE aplicado aos modelos dinâmicos das equações 2.57 e 2.59.

Tabela 5 - Parâmetros de desempenho do controle SDRE			
Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Tempo inicial	t_0	s	0
Tempo final	t_f	s	2
Posição inicial – Elo 1	θ_{01}	rad	0
Posição final – Elo 1	θ_{f1}	rad	$\pi/6$
Posição inicial – Elo 2	θ_{02}	rad	0
Posição final – Elo 2	θ_{f2}	rad	<i>adaptativo</i>
Posição inicial – Elo 3	θ_{03}	rad	0
Posição final – Elo 3	θ_{f3}	rad	$\pi/6$
Velocidade inicial – Elos 1, 2 e 3	ω_0	rad/s	0
Velocidade final – Elos 1, 2 e 3	ω_f	rad/s	0
Aceleração inicial – Elos 1, 2 e 3	$\dot{\omega}_0$	rad/s ²	0
Aceleração final – Elos 1, 2 e 3	$\dot{\omega}_f$	rad/s ²	0

Fonte: autoria própria

Nas equações de controle as variáveis τ_1 , τ_2 e τ_3 , correspondente aos torques os atuadores, são substituídas por variáveis u_1 , u_2 e u_3 . Esta substituição tem por objetivo comprovar a efetividade do controle independente da ação de controle aplicada, podendo ser qualquer tipo de atuador.

Os atuadores comentados neste trabalho, são do tipo CC com imã permanente, mas a utilização de outros tipos de atuadores CC, atuadores hidráulicos ou pneumáticos também é ser possível. Logo, utilizando uma variável u_n é possível comprovar que esse sistema pode ser controlado, sendo preciso apenas adequar o tipo de atuador usado ao comportamento de u_n .

As equações de controle u_1 , u_2 e u_3 são construídas para eliminar o erro associado ao posicionamento desejado. Os erros são definidos como a diferença entre o estado atual e o valor desejado. Esta formulação de erro independe se estamos tratando de velocidade ou posição do elo n em questão.

$$e_{x(n)} = x(n) - x(n)_d \quad n = 1, 2 \text{ ou } 3$$

Isto posto, os coeficientes da matriz 7.7 passam a ser associados a u_1 , u_2 e u_3 criando as equações de controle para os três elos. Estas equações de controle podem ser vistas em 7.8 a 7.10.

$$u_1 = -k(1,1)(x(1) - x(1)_d) - k(1,2)(x(2) - x(2)_d) - k(1,3)(x(3) - x(3)_d) \\ - k(1,4)(x(4) - x(4)_d) - k(1,5)(x(5) - x(5)_d) - k(1,6)(x(6) - x(6)_d) \quad (7.8)$$

$$u_2 = -k(2,1)(x(1) - x(1)_d) - k(2,2)(x(2) - x(2)_d) - k(2,3)(x(3) - x(3)_d) \\ - k(2,4)(x(4) - x(4)_d) - k(2,5)(x(5) - x(5)_d) - k(2,6)(x(6) - x(6)_d) \quad (7.9)$$

$$u_3 = -k(3,1)(x(1) - x(1)_d) - k(3,2)(x(2) - x(2)_d) - k(3,3)(x(3) - x(3)_d) \\ - k(3,4)(x(4) - x(4)_d) - k(3,5)(x(5) - x(5)_d) - k(3,6)(x(6) - x(6)_d) \quad (7.10)$$

Aplicando o controle SDRE discutido na seção 4.3 foi construída uma estrutura de simulação apresentada resumidamente na figura 15.

Uma das características utilizadas na simulação computacional foram os parâmetros de simulação utilizados. Foi decidido colocar um número finito de soluções para um determinado espaço de tempo de simulação.

A utilização do método de solução numérica Runge-Kutta de quarta ordem, implica na definição de um tempo total onde a solução as equações serão avaliadas. Tendo isso em mente, o tempo total de simulação foi dividido em dez tempo, t_1 a t_{10} , de simulação internos, onde seria aplicado o método de Runge-Kutta utilizando como

condição inicial a solução do tempo anterior, t_{n-1} , e como parâmetros de desempenho o percurso desejado.

Dentro dos dez intervalos de tempo t_n as equações diferenciais foram resolvidas dez vezes gerando dez pontos de resposta, ϵ_1 a ϵ_{10} , para cada t_n . O resultado final foram cem pontos de solução ϵ_n para o tempo de solução total.

A definição de qual ponto ϵ_n seria usado como resposta final foi feito fazendo dez interações iguais para cada ponto ϵ_n e utilizando apenas a última interação como resposta final. Esta abordagem é possível devido as características da solução numérica utilizada pelo software MATLAB® para o método Runge-Kutta que tende a diminuir o erro em cada interação até um ponto de convergência.

No total, são calculadas mil soluções para as posições do manipulador e as cem com menor erro são selecionadas e utilizadas como parâmetro de desempenho para os atuadores. Em todas as soluções testadas neste trabalho foram selecionados tempo de simulação total entre 1 e 2 segundos, um tempo curto para uma estrutura dinâmica percorrer o trajeto desejado. Tendo isso em mente, os testes não foram feitos para mais interações de solução.

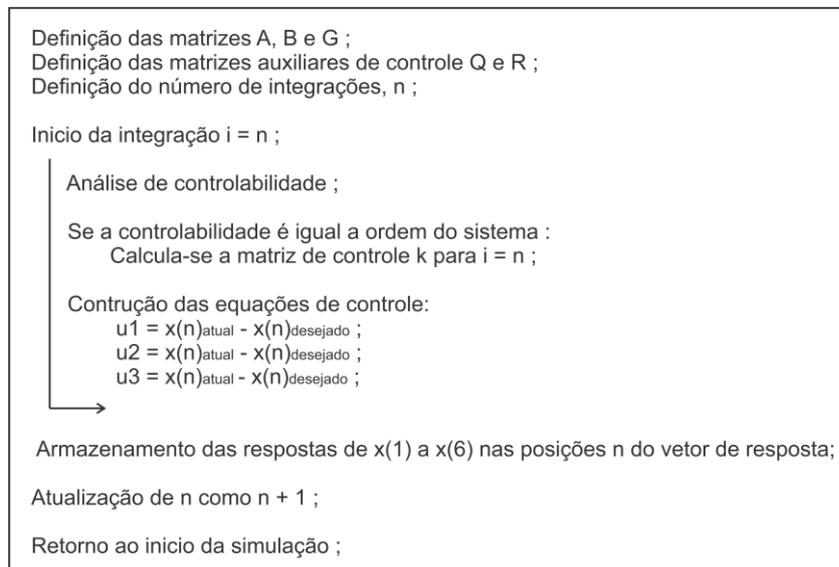
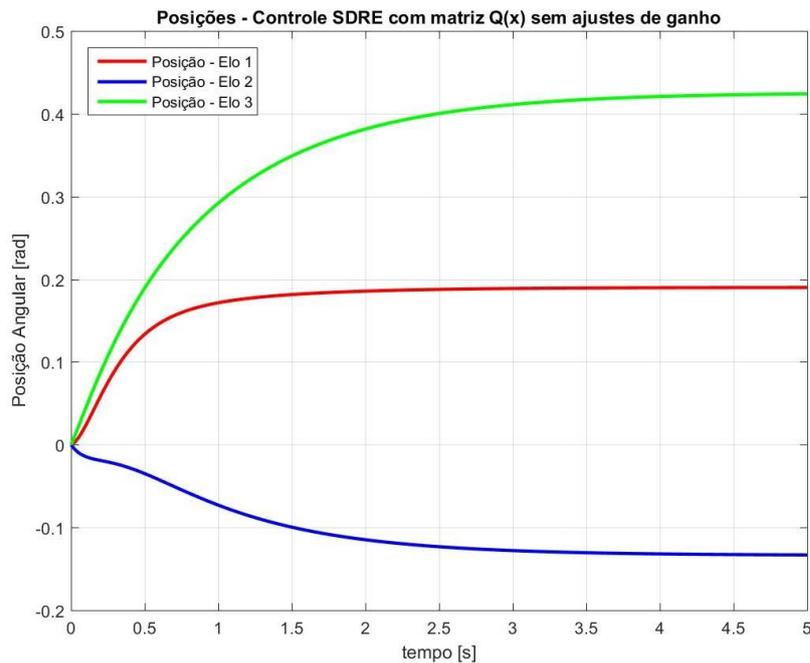


Figura 15 - Estrutura de simulação para o controle SDRE com parâmetro de desempenho para ponto fixo.
Fonte: autoria própria.

Inicialmente, os cálculos do controle LQR foram feitos considerando a matriz de controle $Q(x)$ (7.11) sem nenhum ajuste de ganhos, seguindo as indicações da

formulação mostrada em 4.8. A resposta das posições pode ser vista na figura 16 e das velocidades na figura 17.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$



**Figura 16 - Comportamento das posições θ_1 , θ_2 e θ_3 para parâmetros fixos sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$.
Fonte: Autoria própria.**

Observando as respostas das figuras 16 e 17 é possível concluir que as velocidades aplicadas são possíveis para os atuadores usados, mas as posições obtidas são muito distantes do desejado.

As figuras 18 e 19 mostram ajustes na matriz $Q(x)$ para ajuste dos coeficientes relacionados às posições.

Os coeficientes diretamente relacionados com as posições, q_{11} e q_{55} , passaram para 15000 e os coeficientes relacionados, q_{15} e q_{51} , passaram para 10. A matriz usada na adequação das posições pode ser vista na equação 7.12.

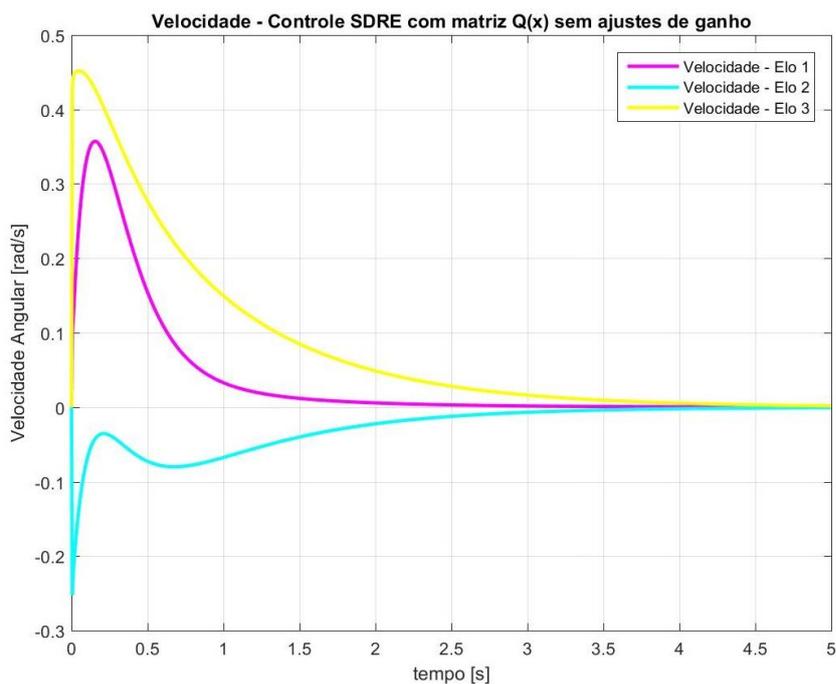


Figura 17 - Comportamento das velocidades ω_1 , ω_2 e ω_3 para parâmetros fixos sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$.
Fonte: Autoria própria.

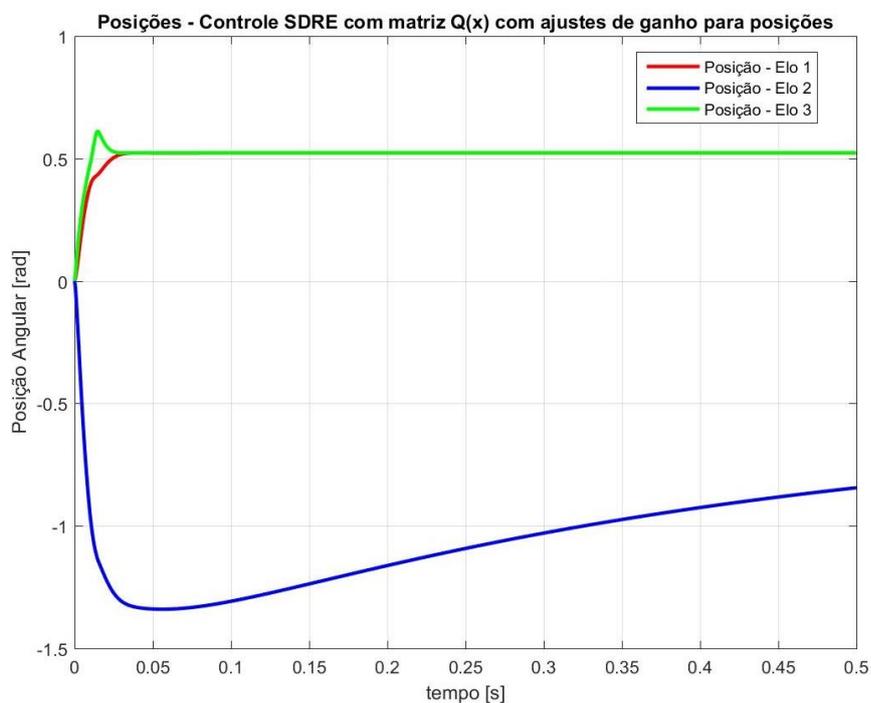


Figura 18 - Comportamento das posições θ_1 , θ_2 e θ_3 para parâmetros fixos com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$ apenas para posições.
Fonte: Autoria própria.

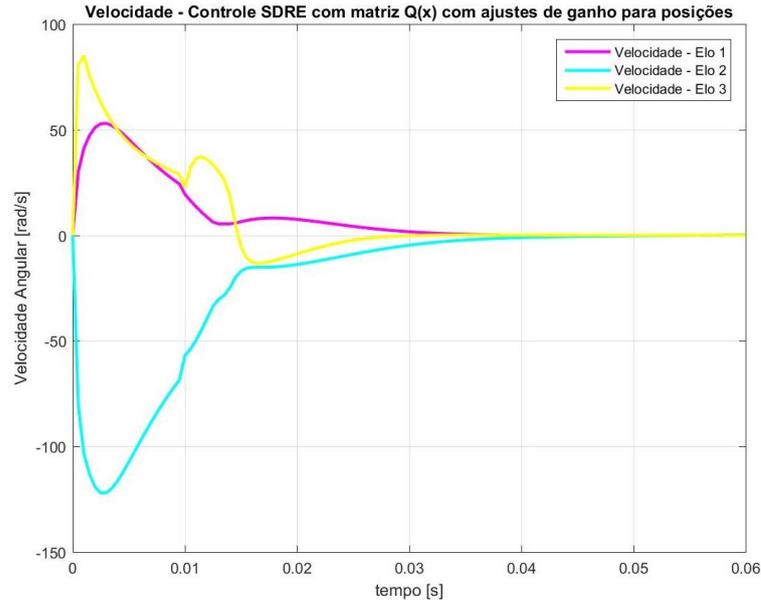


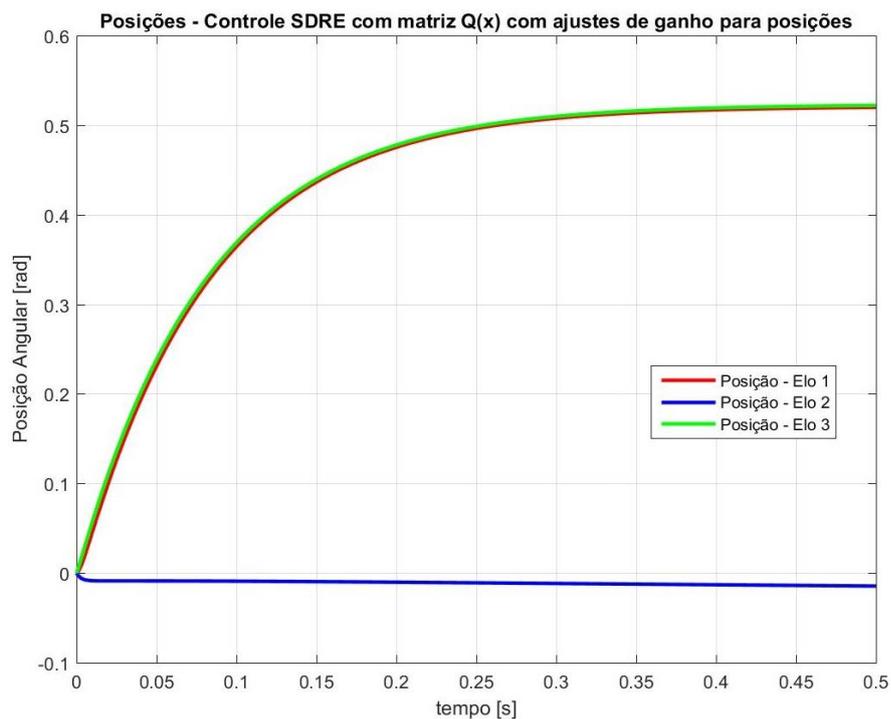
Figura 19 - Comportamento das velocidades ω_1 , ω_2 e ω_3 para parâmetros fixos sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$ apenas para posições.
Fonte: Autoria própria.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & q_{51} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q_{15} & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

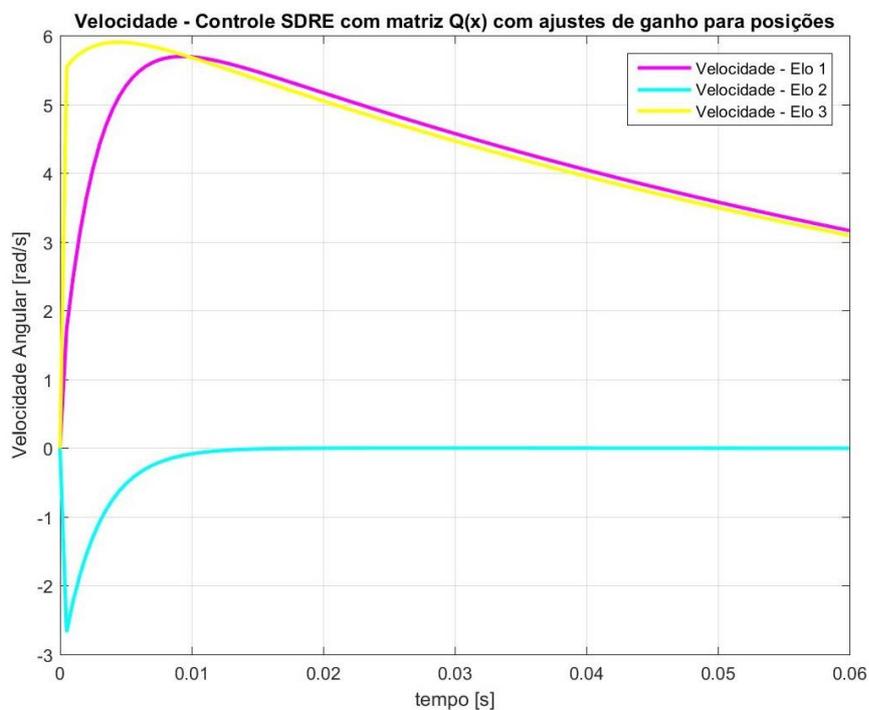
As respostas das posições (figura 18) do sistema dinâmico atendem aos desempenhos de controle, mas as velocidades (figura 19) são valores totalmente fora do campo de ação dos atuadores. Estas respostas mostram que a definição da matriz $Q(x)$ é diretamente responsável pela otimização das respostas.

A otimização do sistema é possível quando os ajustes feitos nas matrizes de controle levam em conta a dinâmica total do manipulador e correlação entre as variáveis. Logo, a otimização do sistema, para o atendimento das limitações dos atuadores e os desempenhos de projeto só serão atendidos em conjunto quando todos os coeficientes de todas as variáveis influenciadas por $Q(x)$ forem ajustados.

As figuras 20 e 21 mostram o desempenho otimizado das posições e velocidades, respectivamente. A matriz $Q(x)$ otimizada é mostrada em 7.13. Os coeficientes de 7.13 foram usados como $q_{11} = 150000$, $q_{22} = 1200$, $q_{33} = 10$, $q_{44} = 1200$, $q_{55} = 150000$ e $q_{66} = 1200$.



**Figura 20 - Comportamento das posições θ_1 , θ_2 e θ_3 para parâmetros fixos com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$ para otimização geral.
Fonte: Autoria própria.**



**Figura 21 - Comportamento das velocidades ω_1 , ω_2 e ω_3 para parâmetros fixos sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$ para otimização geral.
Fonte: Autoria própria.**

Outro ponto apontado para o controle LQR e SDRE pode ser visto na comparação entre as figuras 16 e 17 com 18 e 19, respectivamente. Existe uma correlação intrínseca entre as variáveis de controle do manipulador. Aumentando o tempo de resposta, aumenta-se as velocidades máximas, e diminuindo a exigência sobre as posições há uma diminuição das velocidades máximas.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} q_{11} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q_{44} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

7.3 CONTROLE PARA TRAJETÓRIAS

A solução do controle usando uma trajetória específica como desempenho usou a solução das equações 6.1 a 6.3 para geração de j amostras baseadas nas raízes das equações. Estas j amostras são definidas pela precisão que deseja-se encontrar para solução da trajetória.

Nesta abordagem, há um ponto final desejado para as variáveis do manipulador, mas há um grande interesse sobre o comportamento intermediário das variáveis. Isso significa que o importante não é definir que θ_1 assumira $\pi/6 \text{ rad}$, e sim que siga um determinado caminho até chegar a $\pi/6 \text{ rad}$.

Tendo isso em mente, a tabela 6 mostra o comportamento final e inicial das variáveis do manipulador nas simulações apresentadas a seguir. A figura 22 mostra uma estrutura resumida do código construído para solução do controle baseado em trajetória. As considerações feitas para solução das equações para o controle LQR e SDRE também foram usadas aqui.

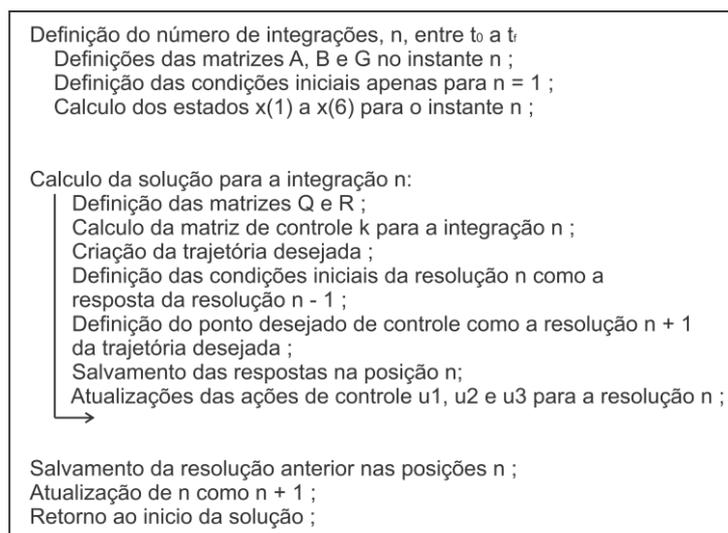


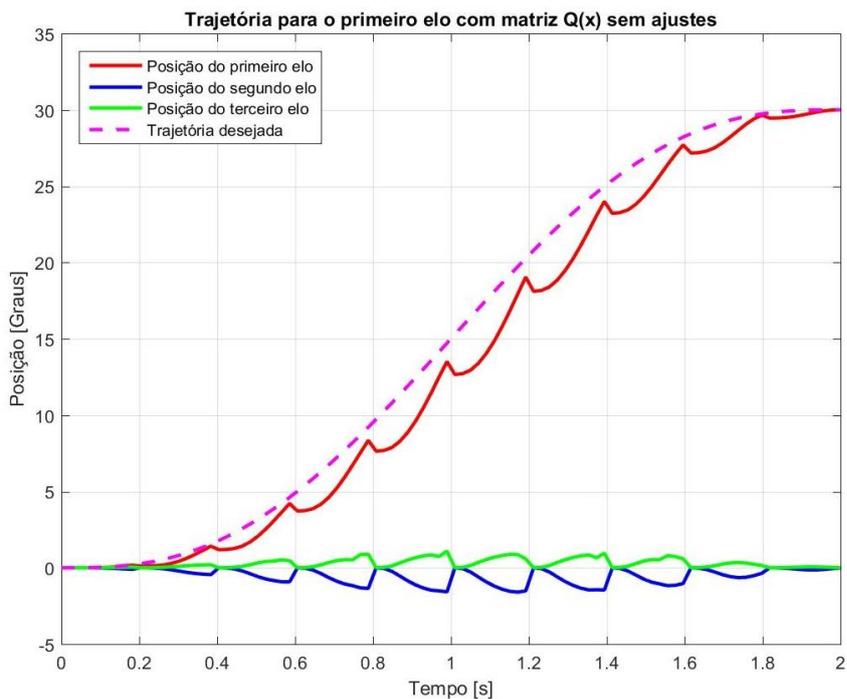
Figura 22 - Estrutura resumida do código construído para solução do controle orientado para trajetórias.

Fonte: autoria própria.

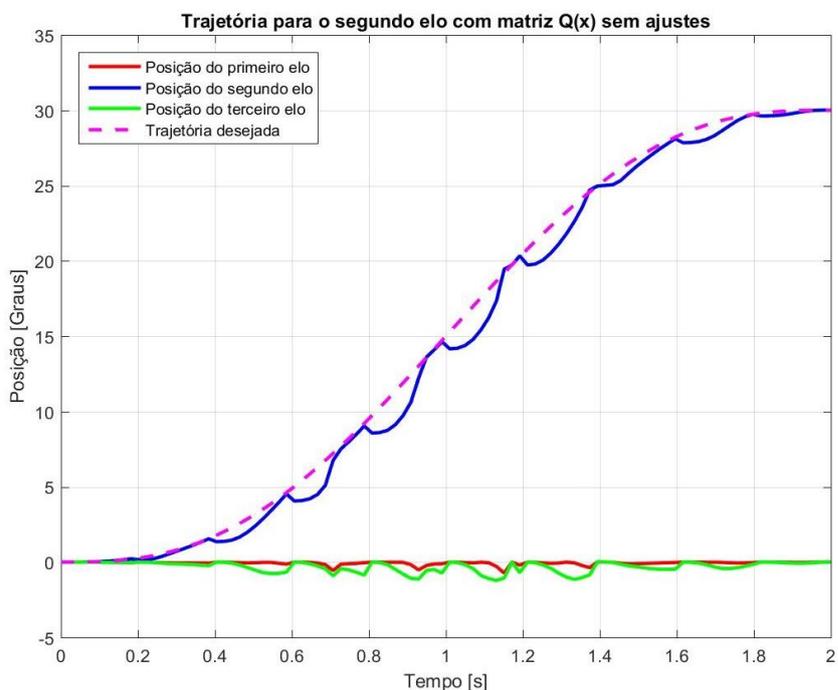
Tabela 6 – Parâmetros de desempenho para controle de trajetória

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Tempo inicial	t_0	s	0
Tempo final	t_f	s	2
Posição inicial – Elo 1	θ_{01}	rad	0
Posição final – Elo 1	θ_{f1}	rad	$\pi/6$ e adaptativo
Posição inicial – Elo 2	θ_{02}	rad	0
Posição final – Elo 2	θ_{f2}	rad	$\pi/6$ e adaptativo
Posição inicial – Elo 3	θ_{03}	rad	0
Posição final – Elo 3	θ_{f3}	rad	$\pi/6$ e adaptativo
Velocidade inicial – Elos 1, 2 e 3	ω_0	rad/s	0
Velocidade final– Elos 1, 2 e 3	ω_f	rad/s	0
Aceleração inicial– Elos 1, 2 e 3	$\dot{\omega}_0$	rad/s ²	0
Aceleração final – Elos 1, 2 e 3	$\dot{\omega}_f$	rad/s ²	0

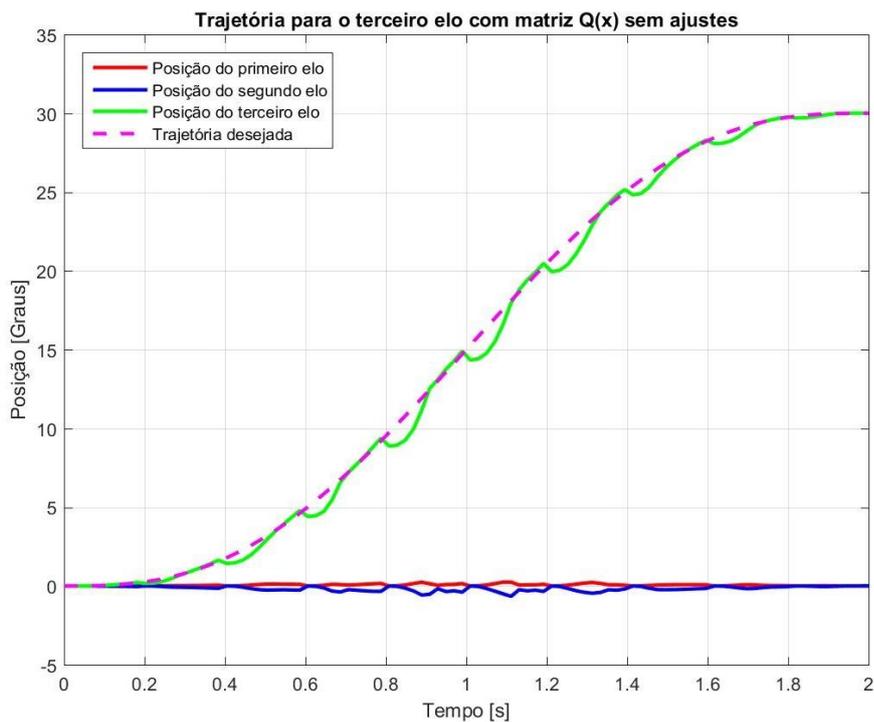
Fonte: autoria própria



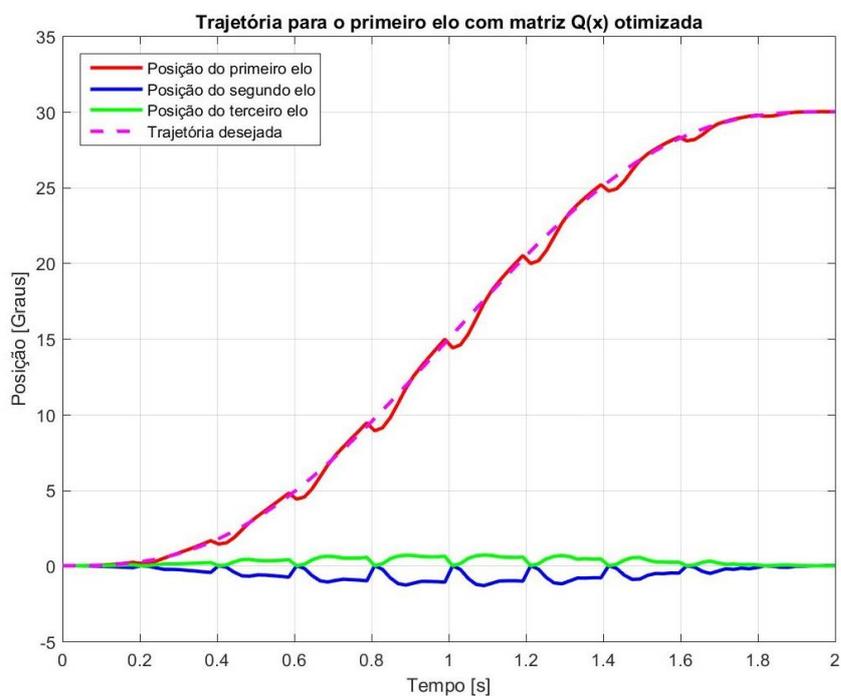
**Figura 23 - Comportamento da posição θ_1 em comparação com a trajetória desejada sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$.
Fonte: Autoria própria.**



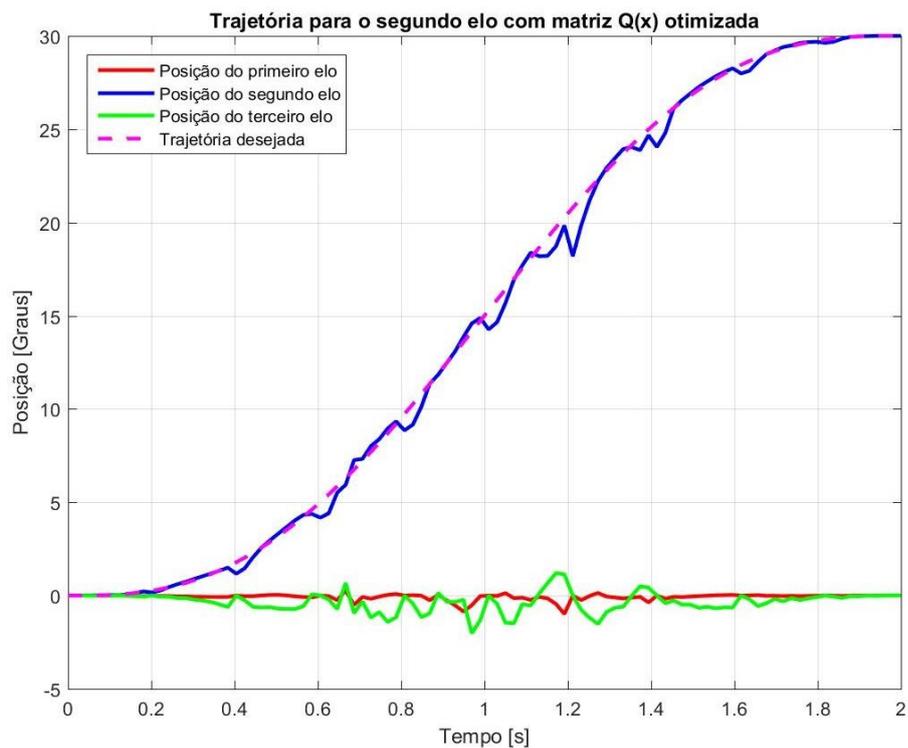
**Figura 24 - Comportamento da posição θ_2 em comparação com a trajetória desejada sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$.
Fonte: Autoria própria.**



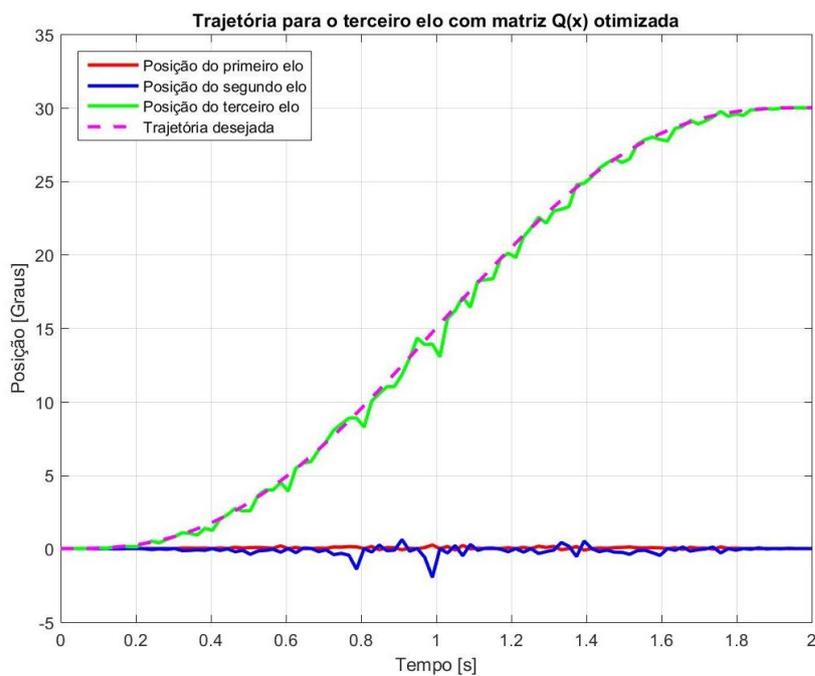
**Figura 25 - Comportamento da posição θ_3 em comparação com a trajetória desejada sem ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$.
Fonte: Autoria própria.**



**Figura 26 - Comportamento da posição θ_1 em comparação com a trajetória desejada com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$.
Fonte: Autoria própria.**



**Figura 27 - Comportamento da posição θ_2 em comparação com a trajetória desejada com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$.
Fonte: Autoria própria.**



**Figura 28 - Comportamento da posição θ_3 em comparação com a trajetória desejada com ajuste na matriz de ganhos $Q(x)$.
Fonte: Autoria própria.**

A otimização das respostas de controle foi feita utilizando a matriz apresentada na equação 7.15 para a posição θ_1 , 7.16 para θ_2 e 7.17 para θ_3 .

Com os ajustes da matriz $Q(x)$ houve uma variação do erro nas posições seguidas pelo manipulador e uma análise destes valores pode ser vistos na tabela 7. O cálculo do erro foi feito somando a diferença entre o posicionamento desejado em um instante de integração n com o posicionamento do elo divididos no mesmo ponto n pelos números de interações total (7.14).

Este cálculo de erro médio tem como objetivo determinar um parâmetro geral para análise dos desempenhos das diferentes matrizes $Q(x)$ utilizadas. Outras metodologias de análise de erro podem ser utilizadas para análise ponto a ponto do comportamento do manipulador ou erros máximos.

Como o objetivo deste trabalho é determinar parâmetros de comparação e análise para as diferentes abordagens sobre o controle ótimo, o erro médio informa a diferença entre as respostas obtidas para diferentes simulações.

$$erro_{m\u00e9dio} = \frac{trajet\u00f3ria_n - posic\u00e3o_n}{n^\circ \text{ de intera\u00e7\u00f5es}} \quad (7.14)$$

Tabela 7 - Erro médio de posição e velocidade para controle ótimo		
Parâmetro	Erro - $Q(x)$ sem ajuste	Erro - $Q(x)$ ajustada
Posição θ_1	1,3737 rad	0,1039 rad
Posição θ_2	0,6174 rad	0,2423 rad
Posição θ_3	0,0837 rad	0,0783 rad
Velocidade ω_1	Indefinível	0,1389 %
Velocidade ω_2	Indefinível	0,1719 %
Velocidade ω_3	Indefinível	0,1438 %

Fonte: Autoria própria.

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 1000 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$Q(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Um dos principais comportamentos observados nas figuras 26 a 28 foi o comportamento diferente das posições θ_1 , θ_2 e θ_3 independente dos coeficientes aplicados as matrizes de controle. Como já apontado anteriormente, independente da necessidade de determinar um comportamento preciso para a velocidade ou aceleração do manipulador, o fornecimento dos parâmetros para estas variáveis tende a melhorar as respostas do sistema total. Se o polinômio para geração da trajetória for adequado, a definição do comportamento da velocidade adequa as respostas do manipulador aos dados do atuador utilizado e por consequência, aumenta a efetividade do controle.

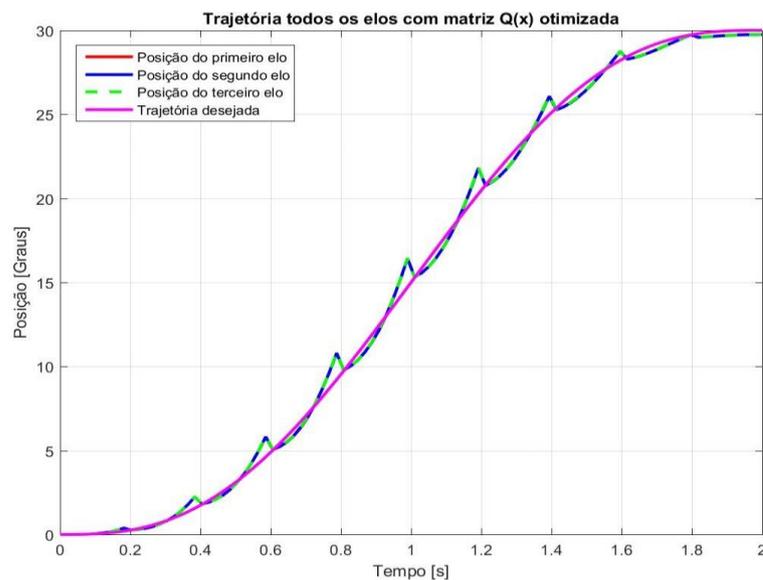


Figura 29 - Comportamento das posições do manipulador em comparação com a trajetória desejada com definição do comportamento das velocidades dos elos 1, 2 e 3.
Fonte: Autoria própria.

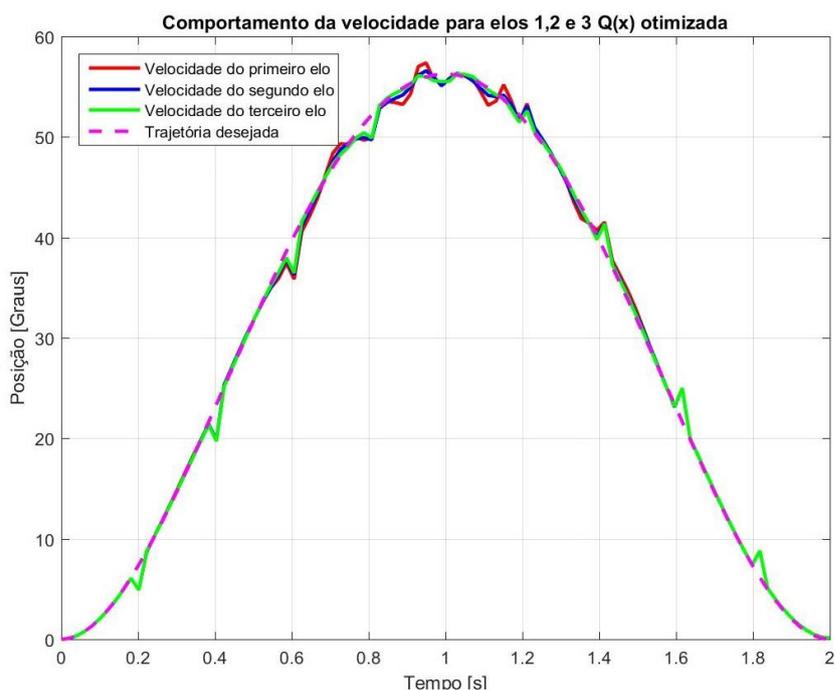


Figura 30 - Comparação entre comportamento desejado para as velocidades ω_1 , ω_2 e ω_3 e as respostas de velocidade dos elos 1, 2 e 3.
Fonte: Autoria própria.

7.4 CONTROLE DE ATUADORES

O controle dos atuadores foi desenvolvido seguindo os mesmos parâmetros de controle LQR apresentados na análise dos motores CC. Como a matriz de estados A dos atuadores CC não depende de nenhum estado, seu valor é independente e o controle ótimo é feito pelo controle LQR.

Inicialmente o controle foi desenvolvido para encontrar o desempenho ótimo considerando uma ação de controle genética u . Esta consideração significa que no primeiro momento não são comparadas as respostas do controlador com as capacidades dos motores CC utilizados como base neste trabalho. Esta análise inicial indica os parâmetros que o atuador deveria apresentar caso fosse desejado um comportamento ótimo considerando apenas o modelo dinâmico do manipulador.

Uma segunda análise coloca os parâmetros do manipulador como limitador das ações de controle e do comportamento das variáveis de resposta. Esta análise fornece a resposta de qual seria o comportamento ótimo do manipulador utilizando os atuadores do tipo motores CC como discutido neste trabalho.

O controle foi definido para conduzir o atuador para $\pi/6$ radianos sem nenhum parâmetro de desempenho para velocidade e aceleração.

As duas análises apontadas acima foram diferenciadas a partir da aplicação de duas matrizes $Q(x)$, uma para o melhor desempenho, $Q_1(x)$, (7.18) e outra para o melhor desempenho parametrizado pelos atuadores escolhidos, $Q_2(x)$ (7.19). As respostas e comparações são apresentadas nas figuras 31 a 34.

Para o controle dos atuadores a matriz $R(x)$ foi usada como uma identidade 1x1 unitária.

$$Q_1(x) = \begin{bmatrix} 250 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

$$Q_2(x) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

As simulações foram feitas utilizando a representação em espaços de estados e as equações podem ser vistas em 7.20 a 7.22. Nas estratégias de controle LQR foram usadas as matrizes mostradas em 7.23 a 7.25.

$$\dot{x}(1) = x(2) \quad (7.20)$$

$$\dot{x}(2) = x(2) \left(-\frac{f}{J}\right) + x(3) \left(\frac{Km}{J}\right) \quad (7.21)$$

$$\dot{x}(3) = x(2) \left(-\frac{Kg}{La}\right) + x(3) \left(-\frac{Ra}{La}\right) + u \left(\frac{1}{La}\right) \quad (7.22)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{f}{J}\right) & \left(\frac{Km}{J}\right) \\ 0 & \left(-\frac{Kg}{La}\right) & \left(-\frac{Ra}{La}\right) \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{La} \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

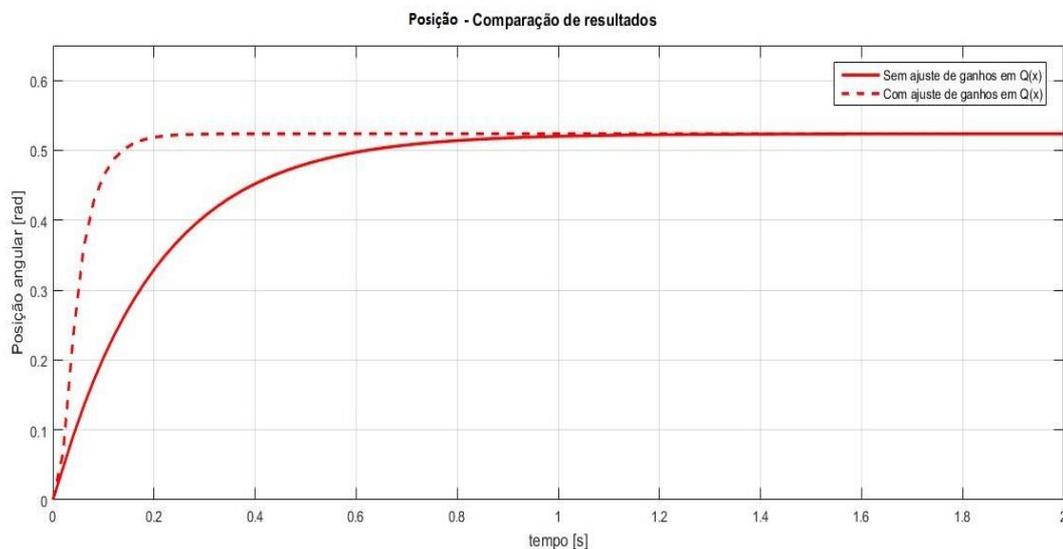


Figura 31 - Comparação de resposta de controle para posição atuador CC com imã permanente.
Fonte: autoria própria.

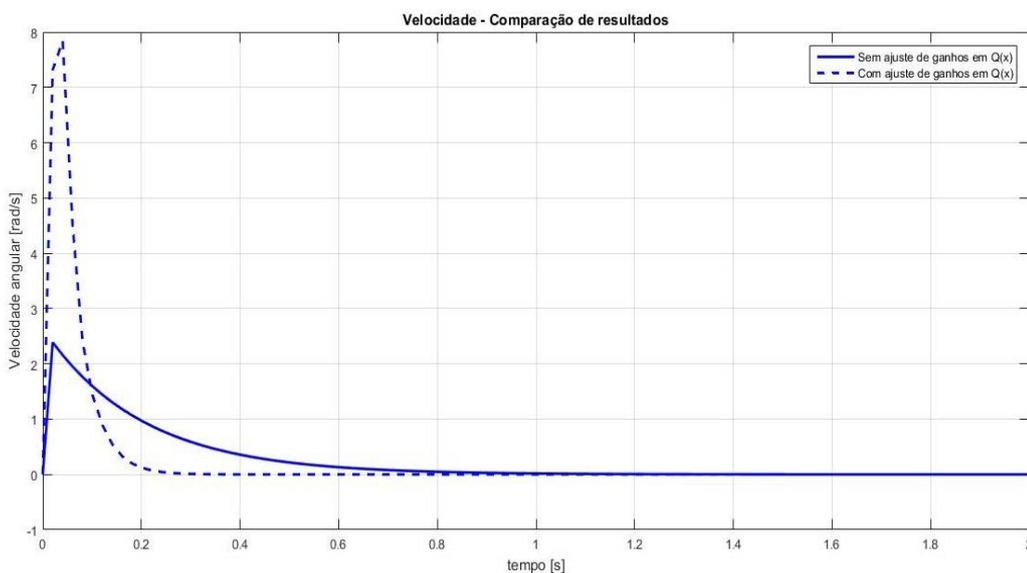


Figura 32 - Comparação de resposta de velocidade para atuador CC com imã permanente.
Fonte: autoria própria.

Um dos pontos importantes para os atuadores é a tensão aplicada para obtenção do comportamento desejado. A tabela 3 apresentada no capítulo 3, mostra

os limites que podem ser assumidos pelas variáveis do motor. Observando a figura 29 é possível concluir que o atuador é capaz de exercer o comportamento desejado para atendimento da posição desejada.

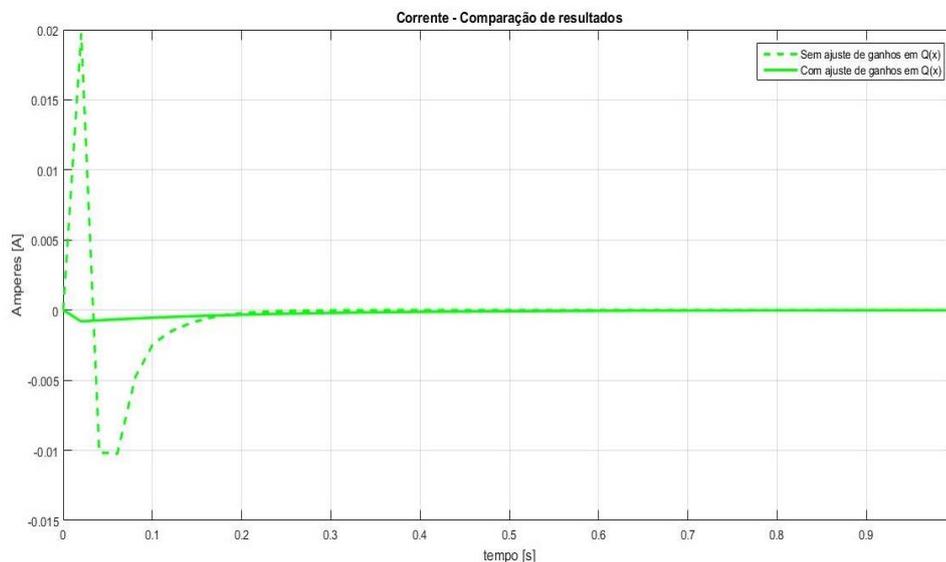


Figura 33- Comparação de resposta de corrente para atuador CC com imã permanente.
Fonte: autoria própria.

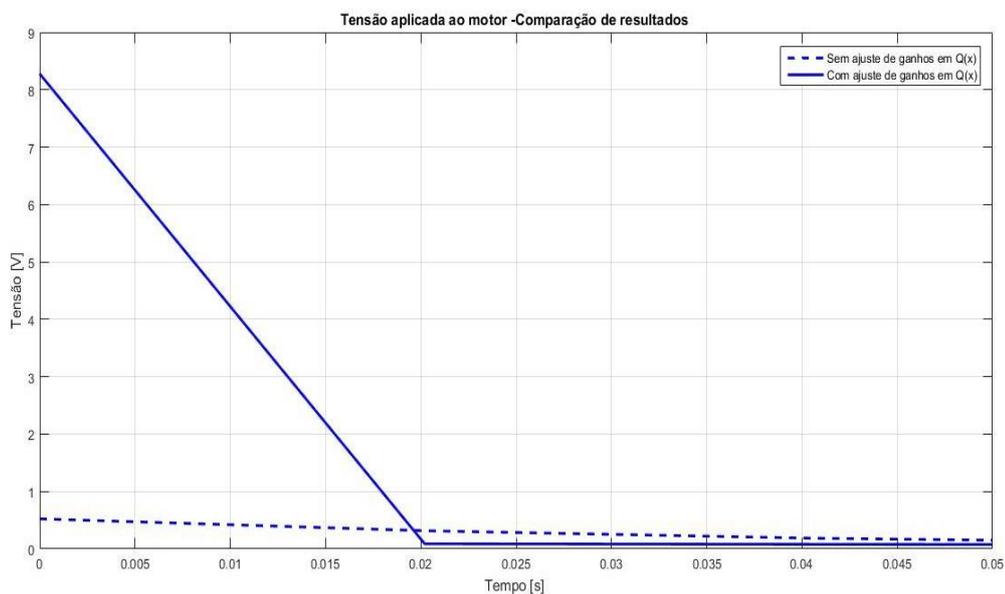


Figura 34 - Resposta da ação de controle aplicada ao atuador para atendimento da posição desejada.
Fonte: Autoria própria.

CONCLUSÃO

A seguir serão apresentados os principais pontos abordados no trabalho, os resultados encontrados e as perspectivas para as próximas etapas do projeto envolvendo o controle de manipuladores robóticos.

Demonstrou-se que a utilização das metodologias de dedução dinâmica de Lagrange em conjunto com a cinemática baseada em coordenadas cartesianas foi a melhor escolha para o tipo de estrutura do manipulador usado. A correlação entre as equações de posição e a formulação dinâmica apresentaram uma sequência lógica nos cálculos e a possibilidade de acompanhar passo a passo os resultados calculados e a respostas obtidas. Os modelos utilizando a dedução de Denavit-Hartenberg podem ser utilizados como base para futuros estudos deste manipulador ou para projetos em que a sua formulação seja a mais indicada.

A dedução do modelo dinâmico apresentou o comportamento oscilatório desejado. A abordagem de deduzir as forças de dissipação fora dos modelos dinâmicos também apresentou o comportamento desejado e comprovou a efetividade de controlar a dissipação como um ajuste ao modelo. Como não foram consideradas as flexibilidades dos elos e juntas, o ajuste do modelo foi feito pelas funções de dissipação.

O controle SDRE deduzido para o modelo dinâmico do manipulador conseguiu seguir os desempenhos de controle desejados e o controle LQR para os atuadores, o que comprova a possibilidade de utilizar atuadores CC com ímãs permanentes para esta estrutura robótica.

A possibilidade de adequar a resposta do controle por meio dos parâmetros do controle SDRE e LQR também foi comprovada. As diferentes respostas obtidas mostram a versatilidade e efetividade do controle. Estas considerações reafirmam as expectativas previstas na teoria, na qual, a utilização destas duas técnicas de controle está entre as mais indicadas para este tipo de projeto.

A utilização dos polinômios para geração de trajetória comprova a possibilidade de utilizar o manipulador em aplicações onde é necessário que o comportamento de todas as variáveis seja delimitado. A possibilidade de deduzir um polinômio a partir de um percurso ou desempenho (velocidade e aceleração) apresentaria os mesmos dados obtidos e não traria um enriquecimento para o controle do manipulador.

As simulações dos atuadores comprovaram que a utilização dos atuadores GM 9413-3 é viável com adequações as respostas do controle ótimo. Estas mesmas simulações dos atuadores também encontraram as respostas otimizadas do atuador levando em conta a utilização de outros modelos de atuadores do tipo motores CC com imã permanente.

A partir dos resultados apresentados, os objetivos de encontrar a descrição do manipulador e controlar o comportamento das variáveis baseado em parâmetros de desempenho foi atingido e pode ser utilizado como base para outros trabalhos.

Os próximos passos, de continuidade deste projeto, são a construção dos modelos para aplicação no experimento com protótipo. A utilização do protótipo implica na construção de circuitos adicionais para acionamento dos atuadores e para tratamento dos sinais medidos no manipulador para realimentação do controle em malha fechada. A utilização do protótipo implica na construção do modelo baseado em tempo discreto tanto na dedução dinâmica como nas estratégias de controle. O controle será feito via MATLAB/Simulink utilizando DSP como plataforma para o sistema digital.

REFERÊNCIAS

ALLEYNE, A. G.; ERDEN, E., B.; Experimental Real-Time SDRE Control of an Underactuated Robot. Conference on Decision and Control. Orlando, Florida, p. 2986. 2001.

BOTTEGA, V. Controle e otimização estrutural de manipuladores robóticos com elementos flexíveis usando atuadores e sensores piezoelétricos. 2004. 127 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2004.

CRAIG, J. J. Introduction to Robotics – Mechanics and Control. 2. Ed. LOCAL: Addison Wesley. 1989.

DEL TORO, V. Fundamentos de Máquinas Elétricas. 1ª Ed. Rio de Janeiro. LTC Editora. 1994.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. Modern Control Systems. 12º ed. Pearson, 2010.

DE PAULA, A. S., SAVI, M. A, PEREIRA-PINTO. F. H. I. Chaos and Transient chaos in the experimental nonlinear pendulum. Journal of Sound and Vibration. p. 585 – 595. 2006.

EYRE, N.; HOLZGRAFR, J. Modeling of a Damped Triple Pendulum. 2011.

FELIX, J. L. P.; SILVA, E. L.; BALTHAZA, J. M.; TUSSET, A. M.; BUENO, A. M. .On Nonlinear dynamics and control of a arm with chaos. MATEC Web of Conferences. v. 16. p. 5002. 2014.

FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, C. J.; UMANS, S. D. Máquinas elétricas com introdução à eletrônica de potência. 6ª Ed. Editora Bookman. 2006.

GALICKI, M. Kinematic finite-time control of robotic manipulators. 10th International Workshop on Robot Motion and Control, Pozan, Poland, p. 21-26, Julho, 2015.

GLUCK, T.; EDER, A.; KUGI, A. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. Automation & Control Institute. Automatica, vol. 49. p. 801-808. 2013.

HONÓRIO, D. A. Supervisão de um manipulador robótico de 3 DOF. 2010. 45 p. Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal do Ceará, Ceará, Fortaleza, 2010.

HIBBELER, R. C. Dinâmica – Mecânica para engenharia. 10ª ed. São Paulo. Person Prentice Hall. 2005.

JANZEN, F. C.; KOSLOPP, D.; CARNEIRO, T. T.; NASCIMENTO, C. B.; CRUZ, F. B. C.; TUSSET, A. M.; BALTHAZAR, J. M. Position control of robotic manipulator joints with two degrees of freedom using SDRE control. Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações. 2013. v. 1.

KANIESKI, J. M. Modelagem e controle LQR aplicado a um condicionador de energia. Dissertação (Engenharia Elétrica) Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Pato Branco. 2010.

KATSEV, S. Streamlining of the State-Dependent Riccati Equation Controller Algorithm for an Embedded Implementation. Tese (Mestrado em Ciencia da Computação) – Rochester Institute of Technology. Rochester, New York. 2006.

KORAYEM, M. H. Dynamics of flexible manipulators and applications to determine load carrying capacity. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – University of Wollongong, Março, 1994.

KORAYEM, A. M. S., DOOSHTHOSEINI, B. K. An Experimental Electronic interface design for a Two-Link Elastic Robotic Arm. XXIV International Conference on Information, Communication and Automation Technologies (ICAT). Sarajevo, Bosnia e Herzegovina. p. 978. 2013.

KOT, A.; NAWROCKA, A.; NAWROCKI, M. Neural Network Control of Nonlinear Objects. 17th International Carpathian Control Conference (ICCC). p. 517 – 522. 2016.

LIMA, J. J. Controle não linear de posição e vibração de manipuladores robóticos com juntas e elos flexíveis utilizando materiais Inteligentes. 2015. 104 p. Dissertação

(Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, 2015.

LIMA, J. J.; TUSSET, A. M.; JANZEN, F. C.; PICCIRILLO, V.; NASCIMENTO, C. B.; BALTHAZAR, J. M.; BRASIL, M. R. L. F. SDRE applied to position and vibration control of a robot manipulator with a flexible link. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Warsaw)*, v. 54, p. 1067-1078, 2016.

LV, X.; THAN, Z.; YANG, Z.; ZHANG, Y.; A Dual Neural Network Applied to Drift-Free Resolution of Five-Link Planar Robot Arm. *International Conference On Information and Automation. Zhangjiajie. China. 2008.*

MEIROVITCH, L. *Methods of Analytical Dynamics*. New York. McGraw-Hill Book Company. 1970.

MOLTER, A. *Controle de Manipuladores robóticos flexíveis usando atuadores e sensores piezelétricos otimizados*. 2008. 120 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2008.

NIKU, S. B. *Introdução a robótica – Análise, controle, aplicações*. 2. Ed. São Paulo: LTC, 2013.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Prattice Hall. 1985.

PITTMAN, *Godshall Driver 343 – GM9413-3*, Harleysville. 2001.

RAO, S.S. *Vibrações mecânicas*. Person Prentice Hall. 4ª Ed. São Paulo. Person Prentice Hall. 2009.

REZENDE, E. F. A. *Estimação de estados e parâmetros de um pêndulo duplo caótico*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Julho, 2011.

SILVA, S. *Estudo da fusão dos métodos LQC/LTR e SDRE para o controle de uma classe de sistemas não lineares*. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia

Espaciais/Mecânicas Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisa Espaciais. São José dos Campos, São Paulo. 2014.

TUSSET, A. M., MOLTER, A. Controle ótimo aplicado no controle de vibrações de sistemas mecânicos sujeitos a comportamento caótico. XIX Encontro Nacional de Engenharia de Produção. Salvador, Bahia. 2009.

TUSSET, A. M. Controle ótimo aplicado em modelo de suspensão veicular não-linear controlada através de amortecedor magneto-reológico. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande, 2008.

