UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ROSENILDA DE SOUZA NAGATA

OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: O APRENDIZADO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS NUMA PERSPECTIVA DO MODELO VAN HIELE

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2016

ROSENILDA DE SOUZA NAGATA

OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: O APRENDIZADO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS NUMA PERSPECTIVA DO MODELO VAN HIELE

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientadora: Prof^{a} Dr^{a} Neusa Nogas Tocha

CURITIBA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

N147n Nagata, Rosenilda de Souza
2016 Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva do modelo Van Hiele / Rosenilda de Souza Nagata.- 2016.
120 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2016.
Bibliografia: f. 99-103.

1. Modelo Van Hiele. 2. Geometria - Estudo e ensino (Ensino fundamental). 3. Polígonos. 4. Aprendizagem. 5. Prática de ensino. 6. Matemática - Estudo e ensino. 7. Matemática - Dissertações. I. Tocha, Neusa Nogas, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

ERRATA

Página	Linha(s)	Onde se lê	Leia-se
Capa	Título	“O APRENDIZADO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS”	“A COMPREENSÃO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS”
Contracapa	Título	“O APRENDIZADO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS”	“A COMPREENSÃO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS”
RESUMO	2	“O APRENDIZADO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS”	“A COMPREENSÃO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS”
ABSTRACT	2	“THE LEARNING OF CONTENT OF POLYGONS”	“THE UNDERSTANDING OF CONTENT OF POLYGONS”

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação Nº 28

“Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva do Modelo van Hiele”

por

Rosenilda de Souza Nagata

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 10h do dia 04 de fevereiro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

Profa. Neusa Nogas Tocha, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Profa. Deise Maria Bertholdi Costa, Dra.
(UFPR)

Profa. Patrícia Aparecida Manholi, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

Ao meu **Deus**, *por esta conquista alcançada com muito esforço. Pois sem sua presença esse trabalho de superação não seria possível.*

À minha **família**, *pessoas que através da sua presença, seus sorrisos, seus abraços, suas palavras, apoio, compreensão, amor e amizade, dão sentido à minha vida e tornaram mais fácil e prazeroso vencer este desafio.*

AGRADECIMENTOS

- Ao Tiago, meu esposo, que sempre acreditou em mim e me incentivou a vencer as adversidades, lutar e seguir em frente. Com apoio e compreensão nos momentos de minha ausência nesse período de pesquisa e estudos.

- Aos meus filhos, Alice e André, sempre em meus pensamentos, fornecendo o estímulo necessário e suficiente para que eu pudesse continuar lutando e vencendo os obstáculos.

- Aos meus pais, Cleunice e Elias, pela dedicação, cuidado e atenção desde sempre. Também, pela atenção dada a Alice e ao André sempre que eu precisava de momentos de concentração para estudar e escrever.

- Aos meus amigos/irmãos, pelos incentivos e orações em favor da minha vida durante o desenvolvimento desse trabalho.

- À minha orientadora Profª Drª Neusa Nogas Tocha, pelas longas reuniões e ensinamentos. Lendo comigo, com toda a paciência, cada parte desse texto, ajudando-me a buscar palavras que expressassem meu pensamento. Suas sugestões e opiniões contribuíram significativamente para a concretização deste trabalho.

- Aos professores-membros da Banca examinadora, Profª Drª Deise Maria Berthold Costa e Profª Drª Patrícia Aparecida Manholi pelas valiosas contribuições.

- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

- Ao governo do Estado do Paraná, por ter concedido afastamento laboral, com ônus limitado, a fim de me dedicar com maior aproveitamento ao PROFMAT.

“Para ser sábio, é preciso primeiro temer a Deus, o SENHOR.
ELE dá compreensão aos que obedecem aos seus mandamentos.
Que o SENHOR seja louvado para sempre!”

(Salmos 111:10 - Bíblia Sagrada/NTLH)

RESUMO

NAGATA, Rosenilda de Souza. OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: O APRENDIZADO DO CONTEÚDO DE POLÍGONOS NUMA PERSPECTIVA DO MODELO VAN HIELE. 120 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

Neste trabalho estudamos o Modelo de van Hiele, os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e fases de aprendizagem. Utilizando esse conhecimento elaboramos um Instrumento de Pesquisa a fim de identificar o Nível de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico (Níveis de van Hiele) dos alunos do Ensino Fundamental II em relação ao conteúdo de Polígonos. Aplicamos este Instrumento de Pesquisa a 237 alunos de um colégio público (estadual) em Curitiba e realizamos uma análise dos dados obtidos. Aperfeiçoamos as questões do Instrumento de modo que possa ser utilizado pelo professor em sala de aula, auxiliando no diagnóstico do nível que o aluno de encontra em relação ao conteúdo proposto.

Palavras-chave: Modelo van Hiele. Pensamento Geométrico. Polígonos. Ensino Fundamental II.

ABSTRACT

NAGATA, Rosenilda de Souza. THE LEVELS OF DEVELOPMENT ON GEOMETRIC THINKING: THE LEARNING OF CONTENT OF POLYGONS FROM THE VAN HIELE MODEL PERSPECTIVE. 120 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

This work studies the van Hiele model, the levels of development of geometric thinking and its learning phases. Using this knowledge, we prepared a Research Instrument to identify the Level of Development in Geometric Thinking (Levels of van Hiele) of Middle School students, related to contents of Polygons. We have applied this Research Instrument to 237 students from a public school (state) in Curitiba, and we made an analysis of the acquired data. We have improved the Instrument's questions so that it can be used by teachers during the class. Helping to identify to which level content the student belongs, related to the proposed.

Keywords: Van Hiele model. Geometric Thinking. Polygons. Middle School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

EB	Educação Básica - Referente aos Ensinos Fundamental e Médio
EF-II	Ensino Fundamental II - Referente ao 6º-9º ano
EM	Ensino Médio
LDB	Lei de diretrizes e Bases da Educação Nacional
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica
DCE	Diretrizes Curriculares da Educação Básica
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
EF-I	Ensino Fundamental I - Referente ao 1º-5º ano
EF	Ensino Fundamental-Referente ao 1º-9º ano
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de geometria plana nas escolas é previsto nas documentações que organizam o ensino no Brasil. Dessa forma, com o intuito de identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos da Educação Básica - EB em relação aos Polígonos desenvolvemos o presente trabalho.

Ao concluir o curso de Licenciatura em Matemática, trabalhei por dois anos no Departamento de Expressão Gráfica[1] da Universidade Federal do Paraná, lecionando Desenho, Geometria Descritiva e Desenho Técnico. Os alunos desse período que estavam no primeiro semestre do curso superior demonstraram grande despreparo em relação a conteúdos básicos de Geometria Plana. No início de 2009 comecei como professora de Matemática na Educação Básica em escolas públicas estaduais no estado do Paraná. Neste momento pude perceber que a dificuldade em geometria que encontrei nos alunos da graduação era muito mais acentuada em alunos do Ensino Fundamental II - EF-II e Ensino Médio - EM. Desde então, buscava entender qual a origem dessa grande defasagem de aprendizagem em geometria, como também, buscava por metodologias eficazes de modo a construir no aluno um pensamento geométrico estruturado".

Durante as disciplinas relacionadas a geometria no PROFMAT continuava a me questionar sobre este assunto, até que surgiu a ideia de: entender como o aluno adquire o conhecimento geométrico segundo o Modelo van Hiele; compreender as linguagens para a construção de um pensamento matematicamente estruturado; e buscar respostas para as inquietações sobre a aprendizagem em geometria. Com essa meta, procuramos atender com este trabalho os seguintes objetivos específicos: (I) compreender o desenvolvimento do pensamento geométrico; (II) identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico que os alunos têm do conteúdo polígonos; (III) elaborar um instrumento que facilite ao professor identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos sobre polígonos.

O professor, tendo conhecimento de toda teoria que envolve o Modelo van Hiele po-

[1](2006-2007) Na época era denominado Departamento de Desenho, Setor de Exatas, UFPR.

derá facilitar o processo de desenvolvimento dos alunos da forma correta. O Modelo van Hiele ajudará o professor na escolha do que é mais adequado abordar e a linguagem adequada a ser utilizada em cada momento do aluno, escolhendo de forma coerente as atividades a serem aplicadas facilitando o seu trabalho e auxiliando o aluno na transição de um nível ao outro, trazendo a compreensão do que está sendo ensinado e diminuindo a persistência das falhas de aprendizagem. O professor tendo bom entendimento dos níveis, como suas características e linguagens bem definidas possibilitará uma comunicação adequada com o aluno, sem se expressar formalmente até que o aluno tenha conhecimento suficiente para o acompanhar na linguagem de um nível mais elevado. Esta fundamentação é encontrada no Capítulo 3 onde descrevemos as ideias que van Hiele utilizou como base para a elaboração do seu modelo. O Modelo van Hiele, suas propriedades, os obstáculos de aprendizagem que podem ser desfeitos, a descrição de cada um dos Níveis de van Hiele e das cinco fases de aprendizagem que ocorrem em cada desses níveis estão localizadas no Capítulo 4.

Em seus textos van Hiele cita que há diferença entre aprender e compreender um conteúdo. Durante o processo de aprendizagem, se o foco for em métodos de resolução os alunos poderão aprender a reproduzir o que lhes foi mostrado. A compreensão somente será alcançada quando o aluno age intencionalmente com o conteúdo de modo autônomo, sem depender exclusivamente das explicações do professor. Para analisar a compreensão dos alunos temos que conhecer a distinção de três grupos de alunos em relação a aprendizagem matemática feita por van Hiele: 1º) alunos detentores de habilidades matemáticas que chegam a compreensão do conteúdo de forma rápida e direta, não necessitam de muito tempo de estudo para terem facilidade com o tema proposto; 2º) alunos com pouca facilidade em matemática, mas após muito estudo conseguem entender parte do conteúdo, mas só atingem a compreensão completa em tópicos específicos que se tornaram significativos para eles; 3º) alunos que não tem um pensamento matematicamente estruturado, mesmo após contato com várias formas de explicação do conteúdo ainda permanecem sem a compreensão do que está sendo proposto, esses podem aprender a reproduzir mecanicamente algumas formas de resolução propostas pelo professor, o que não significa que ele chegou a uma compreensão do conteúdo, mesmo que seja algo que o interesse. Com a utilização do Modelo van Hiele os alunos do segundo grupo serão alcançados com maior facilidade e os alunos do terceiro grupo terão a possibilidade de obter parte do conhecimento, mesmo que não consiga em todos os tópicos o aluno terá uma maior facilidade em lidar com os conteúdos propostos.

Para identificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos sobre Polígonos, apresentaremos um Instrumento de Pesquisa com 15 questões. O Instrumento de Pesquisa foi organizado de modo que pode ser aplicado nos quatro anos do EF-II. Os detalhes em relação ao instrumento, os objetivos de cada questão ali encontrada e as análises dos dados obtidos a partir da aplicação desse em um grupo de 237 alunos são encontrados no Capítulo 5. A análise ficou restrita a esse grupo por não termos conseguido fundamentar estatisticamente a generalização para o colégio todo. E a generalização para todas as outras escolas publicas do estado do Paraná seria possível somente se a amostra fosse colhida em vários colégios em diversas regiões do estado, o que foi inviável para este trabalho. Uma possível complementação deste trabalho seria uma entrevista dirigida com casos destaque obtidos da análise do Instrumento de Pesquisa, verificando se esses alunos contemplam realmente o conhecimento demonstrado em suas respostas.

Para facilitar a aplicação do Instrumento de Pesquisa em sala de aula pelo professor, no Capítulo 6 apresentaremos uma versão otimizada que possibilitará a avaliação de cada nível individualmente, de um modo objetivo e direto. Com isso o professor terá uma informação quantitativa do que o aluno já conhece do que será abordado. Com isso ele conseguirá atingir os alunos com maior dificuldade. A compreensão do aluno deverá ser avaliada com outros instrumentos após uma sequência didática baseada nos níveis e fases de aprendizagem propostos por van Hiele.

2 DELIMITAÇÃO DO TEMA DE PESQUISA

No Brasil há a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (BRASIL, 2015), nela está especificado que a União incumbir-se-á de, juntamente com os estados e municípios, estabelecer as diretrizes da EB. E os estabelecimentos de ensino aliados aos docentes ficaram incumbidos da elaboração e execução da proposta pedagógica, bem como assegurar a aprendizagem do aluno. As Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica - DCN (BRASIL, 2013a) foram redigidas a fim de sistematizar a EB assegurando a formação básica comum nacional, com uma reflexão crítica e propositiva para orientar os cursos de formação inicial e continuada de profissionais participantes dos sistemas educativos.

No estado do Paraná as Diretrizes Curriculares da Educação Básica - DCE (PARANÁ, 2008) descrevem como se organiza a estrutura do currículo da EB estadual. Os blocos do conhecimento em determinada área são denominados Conteúdos Estruturantes, que organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, e a partir destes que o docente organiza os conteúdos básicos a serem trabalhados por série e elabora seu plano de trabalho docente que será efetivado na sala de aula. Na disciplina de matemática os Conteúdos Estruturantes propostos nas DCE são: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação. Os tópicos considerados essenciais para a EB são apresentados, de forma justificada e fundamentada pelos conceitos de conhecimento, conteúdos escolares, interdisciplinaridade, contextualização e avaliação. A Geometrias, é subdividida em quatro grupos de conteúdos: geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, noções básicas de geometrias não-euclidianas.

Percebemos no nosso cotidiano que as noções de geometria, de forma intuitiva, são indispensáveis no lidar com as atividades do dia a dia, como interpretar mapas, mobiliar a casa, estacionar um carro, entre outras. Estas noções serão mais facilmente formadas durante as aulas de Geometria, que juntamente com as demais áreas da matemática são iniciadas na alfabetização, nos primeiros anos de estudo da criança.

Na disciplina de Matemática os conteúdos se originam da necessidade de contar, calcular, medir, organizar o espaço e as formas, tendo o objetivo de mostrá-la como uma ciência do dia-a-dia do aluno. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN de Matemática do Ensino Fundamental I - EF-I temos que:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental-EF, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997)

Os PCN relatam que a Geometria tem a característica de interessar naturalmente o aluno, pois a abordagem pode ser feita a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, que permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Cita também que desde os primeiros anos do EF os alunos devem ser estimulados a compreender as representações através de figuras, percebendo relações de tamanho e formas geométricas presentes em elementos do cotidiano, fazendo representações aproximadas dessas formas identificadas. Já no 4º e no 5º ano o foco muda um pouco, onde os alunos devem ser levados a identificar as características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções. Neste período deve ser abordado noções de paralelismo, perpendicularismo, composição e decomposição de figuras planas, composição dos polígonos por triângulos, utilização de malhas para ampliação e redução de figuras planas, percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas e representações de figuras geométricas.

Durante as aulas o docente deve perceber que na fase do EF-I as crianças assimilam algumas formas geométricas bem mais cedo do que conseguem reproduzi-las e somente depois de muita observação e experimentação elas começam a discernir as características de uma figura, agrupando as classes de formas usando suas propriedades. Isso, porque:

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. (BRASIL, 1997)

No EF-II os alunos utilizam todos esses conceitos, se esses não forem compreendidos de forma satisfatória acarretará uma grande dificuldade no aprendizado dos conteúdos posteriores. Durante os sete anos que tenho lecionado no EF-II, percebi que a dificuldade que os alunos demonstram ao estudarem geometria é maior do que realmente deveria ser, visto que esse conteúdo é mais concreto do que outros temas em matemática. Por ter detectado esta dificuldade, surgiu o interesse de investigar qual é a real situação da aprendizagem em geometria plana.

Nas DCE encontramos que devem ser abordados em todos os anos do EF-II conteúdos de Geometria, focando tanto Geometria Plana e Espacial, como Geometria Analítica e Não-euclidiana. Na Tabela 12 (PARANÁ, 2008) encontramos como ficou dividido os temas no decorrer dos quatro anos do EF-II e os objetivos a serem alcançado em cada tema.

Ano	Conteúdos Básicos	Objetivos a serem alcançados
6º ano	Geom. Plana	Reconheça e represente ponto, reta, plano, semirreta e segmento de reta. Conceitue e classifique polígonos. Identifique e relacione os elementos geométricos que envolvem o cálculo de área e perímetro de diferentes figuras planas. Diferencie círculo e circunferência, identificando seus elementos.
	Geom. Espacial	Reconheça os sólidos geométricos em sua forma planificada e seus elementos. Identifique corpos redondos.
7º ano	Geom. Plana	Classifique figuras planas (polígonos e não-polígonos). Compreenda noções topológicas através do conceito de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados.
	Geom. Espacial	Construa, a partir de figuras planas, sólidos geométricos.
8º ano	Geo. Plana	Reconheça triângulos semelhantes. Identifique e some os ângulos internos de um triângulo e de polígonos regulares. Desenvolva a noção de paralelismo, trace e reconheça retas paralelas num plano.
	Geom. Analítica	Compreenda o Sistema de Coordenadas Cartesianas, marque pontos, identifique os pares ordenados (abscissa e ordenada) e analise seus elementos sob diversos contextos.
	Geom. não-euclidianas	Conheça os fractais através da visualização e manipu-lação de materiais e discuta suas propriedades.
9º ano	Geom. Plana	Verifique se dois polígonos são semelhantes, estabelecendo relações entre eles. Compreenda e utilize o conceito de semelhança de triângulos para resolver situações-problemas. Conheça e aplique os critérios de semelhança dos triângulos. Aplique o Teorema de Tales em situações-problemas.
	Geom. Espacial	Realize Cálculo da superfície e volume de poliedros.
	Geom. não-euclidianas	Noções básicas de geometria projetiva.

Tabela 12: Grupos de conteúdos de Geometria no EF-II

Seria interessante analisar todo o conteúdo de Geometrias, mas inviável com apenas um trabalho de conclusão de curso, por isso decidimos focar em Geometria Plana, por estar presente em todos anos do EF-II. Mas ainda assim seria muito extenso, delimitamos o conteúdo e resolvemos trabalhar especificamente com Polígonos. Para identificar se o aluno está apto a continuar seus estudos a partir do currículo próprio do ano em que se encontra devemos utilizar de teorias nesse processo. Para desenvolver a investigação nos fundamentamos no Modelo van Hiele, o qual explica com clareza os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, os quais denominaremos "Níveis de van Hiele". No levantamento bibliográfico sobre o Modelo van Hiele há uma predominância de estudos realizados com o conteúdo de quadriláteros e por esta razão optamos trabalhar com Polígonos.

Para a fundamentação teórica sobre o Modelo van Hiele, nossas referências principais foram a tese defendida por van Hiele em 1957 (VAN HIELE, 1957) (tivemos acesso a uma tradução para o espanhol) e o livro *STRUCTURE AND INSIGHT: A Theory of Mathematics Education* (VAN HIELE, 1986) originalmente em inglês.

Para a elaboração do Instrumento de Pesquisa, nos baseamos no Guia de livros didáticos: PNLD 2014 (Plano Nacional do Livro Didático), caderno de Matemática (BRASIL, 2013b), onde está descrito um breve comentário sobre as coleções participantes em relação a cada conteúdo estruturante. No Anexo A, página 104, encontram-se comentários extraídos do PNLD 2014 em relação às Geometrias, onde há um resumo de como esse conteúdo é abordado em cada coleção. Outro dado importante obtido no PNLD 2014 foi a descrição de cada tópico encontrado nos livros, o extrato dessa descrição em relação à Geometrias pode ser encontradas no Anexo B, página 109.

Coletando os dados através do Instrumento de Pesquisa iremos analisar, segundo o Modelo van Hiele, qual é o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos participantes da pesquisa sobre o conteúdo de Polígonos.

3 FUNDAMENTAÇÃO PARA O MODELO VAN HIELE: CONCEITOS IMPORTANTES

Esta dissertação é baseada em uma forma de abordar o ensino de matemática através dos Níveis de van Hiele elaborado por Pierre M. van Hiele [1], formado em Matemática e Ciências Naturais, em sua tese de doutorado, na mesma área, defendida em 04 de julho de 1957 na Universidade de Utrecht, Holanda, sob a orientação do Professor Hans Freudenthal [2]. Nessa mesma data, sua esposa Dieke van Hiele-Geldof [3] (Figura 13, na foto: Dieke van Hiele-Geldof e seu esposo Pierre M. van Hiele) obteve seu doutorado sob a orientação de Langeveld [4], com experimentos realizados no desenvolvimento da teoria descrita por seu esposo (GEMERT, 2015).


Man en vrouw beiden tot doctor gepromoveerd

Unieke samenwerking van leraarsechtpaar

'*t Begon in A'dam*

Psychologie

Figura 13: Recorte de jornal relatando a defesa do casal van Hiele em 1957.

[1](1909-2010) Nasceu em Amsterdã,estudou na Universidade Municipal de Amsterdã no período de 1927-1933, lecionou mais de 40 anos para alunos de 12 a 18 anos.

[2](1905-1990) nasceu em Luckenwalde, Brandenburg, Alemanha.

[3](1911-1958) Dina van Hiele-Geldof, como é citada na maior parte dos documentos científicos estudados, obteve seu doutorado em paralelo ao seu esposo e juntos desenvolveram o "Modelo van Hiele", mas com sua morte precoce van Hiele ficou com a tarefa de aperfeiçoar o estudo que ambos realizaram (VREDENDUIN, 1958).

[4](1905-1989) Martinus Jan Langeveld, Pedagogo, nasceu em Haarlem, Holanda.

Durante seus anos de estudante, van Hiele já estava envolvido em ajudar os colegas mais jovens na aprendizagem de matemática. Criticava os materiais auxiliares disponíveis e esforçou-se para desenvolver ou modificar os já existentes. Quando professor, estudava a aprendizagem e a compreensão em matemática, vivenciando novas formas de ensinar e pensar matemática na prática. As lições aprendidas na sua prática docente levou-o a pensar sobre uma nova teoria, conduzindo-o a muitas publicações explicando suas ideias sobre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Toda a teoria foi formada observando como os alunos aprendem e vivenciando suas próprias experiências (SCIENCE, 2010).

Buscando uma renovação nas práticas educacionais, após concluir seu doutorado van Hiele publicou muitos artigos em revistas holandesas e não-holandesas influentes cujo foco era em educação e ensino, além de livros escritos por ele os quais, na sua maioria, falam sobre seu modelo de ensino e uma estruturação do pensamento matemático. Em 1973 escreveu "*Begrip en inzicht*" (Entendimento e compreensão), dois anos depois publicou "*Mogelijkheden van het wiskundeonderwijs*"(Possibilidades da educação matemática) especialmente dirigido aos seus colegas professores, já em 1981 (reeditado em 1997) foi lançado por ele "*Structuur*" (Estrutura) com grande avanço no aprofundamento teórico para seu modelo. Seu último livro foi publicado em 1986 em Orlando, USA: "*Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*" (Estrutura e Compreensão: Uma Teoria da Educação Matemática), onde van Hiele condensa todos os seus estudos acumulados de forma coesa e revisada, tornando este uma fonte importante para quem busca aperfeiçoar a prática da educação matemática.

A primeira citação do "Modelo van Hiele" de forma notória foi realizada pelo orientador desse, Hans Freudenthal em seu livro "*Mathematics as an Educational Task Hardcover*" em 31 de dezembro de 1972. Diversos estudos foram realizados na ex-União Soviética e nos EUA com base nos trabalhos de Pierre M. van Hiele (ver Figura 14.a) e de sua esposa Dieke van Hiele-Geldof atestando a notoriedade que o estudo veio a obter. Por seu trabalho pioneiro recebeu o título de Doutor *Honoris Causa* na África do Sul e na Nova Zelândia, como foi citado em entrevista concedida em 2005 (ALBERTS; KAENDERS, 2005) à revista "*Nieuw Archief Voor Wiskunde*" (ver Figura 14.b).

Ao lermos alguns dos textos escritos por van Hiele observamos que esse faz uma explicação prévia dos conceitos que dão embasamento aos seus níveis, as experiências e teorias que ajudaram no desenvolvimento de seu modelo. Vamos relatar, de forma resumida, cada um dos conceitos que ele descreve de forma bem detalhada, tanto na sua tese (VAN HIELE, 1957) quanto em seu livro (VAN HIELE, 1986).

(a) Foto interna da revista Nieuw Archief, aos 96 anos

(b) Entrevista com van Hiele em destaque na Revista Nieuw Archief

Figura 14: Pierre M. van Hiele - 2005

3.1 A COMPREENSÃO

Para o professor, o aprendizado do aluno deve ser seu maior objetivo, e ele conseguirá ver este quando o aluno demonstra compreensão no que foi ensinado. Aprender não é o mesmo que adquirir conhecimento, segundo van Hiele aprender pode ser algo momentâneo, quando se adquire o conhecimento isto se torna parte do indivíduo. Para o aluno pensar de forma intencional deve-se dar a ele instrumentos suficientes para que compreenda o conteúdo. Caso isso não ocorra pode significar que o processo de aprendizagem possui falhas, os quais devem ser identificados e corrigidos.

Quando o professor procura meios para desenvolver a aprendizagem e capacitar o aluno no conteúdo ensinado ele consegue desenvolver no aluno a habilidade de aplicar seu conhecimento em várias outras áreas, não somente em sala de aula. Quando esse não é o objetivo, o aluno aprende somente mecanicamente e não consegue dominar o conteúdo de modo a adaptar este as situações reais do seu dia-a-dia. Deve-se, então, buscar métodos e ferramentas para facilitar o ensino e consequentemente ajudar o aluno a compreender realmente o conteúdo diminuindo essa falhas no processo de aprendizagem. Podemos utilizar, depois de novas explicações sobre o assunto, os raciocínios que o aluno fez errado inicialmente para que este busque fazer as correções e refazer de modo mais coerente, com isso ele irá aproximar-se do correto até chegar ao completamente certo, alcançando a compreensão propriamente dita.

Em muitos ambientes escolares o professor avalia se o aluno compreendeu o conteúdo através de uma resposta correta ou não, em um teste. Para van Hiele isto não é suficiente, pois ele pode ter tido êxito ao acaso, sem saber ao certo o que procurava na realização dos exercícios do teste. A compreensão de fato será obtida quando o aluno sabe onde quer chegar e consegue traçar todos os caminhos conscientemente para tal. Para verificar se houve a compreensão deve ser aplicado um novo teste com exercícios diferentes, mas com a mesma estrutura. Caso o aluno resolva é possível que exista compreensão, caso contrário, fica evidente que ainda existem pontos incompreendidos sobre o tópico avaliado. É necessário ter em mente que, ao aplicar os testes repetidas vezes o desempenho dos alunos tende a melhorar, já que estes estarão em contato com uma quantidade grande de exercícios sobre o mesmo conteúdo facilitando a escolha da estratégia mais adequada para cada um.

Segundo van Hiele a compreensão é alcançada quando o aluno age de forma adequada e de modo intencional em uma nova situação. Por mais fácil que seja trabalhar com o número de exercícios não resolvidos ou o número de respostas corretas, van Hiele comenta que estes dados são adequados para fazer as estatísticas, não refletindo a realidade de cada aluno uma vez que o número de acertos não indicam de forma satisfatória se o aluno entende o que está sendo ensinado.

3.2 A AUTONOMIA E INTUIÇÃO

O aluno passa por momentos na aprendizagem em que ele deve ter a iniciativa de procurar conexões e entender como os conhecimentos que lhe estão sendo ensinados são aplicáveis aos problemas a serem resolvidos, a isso denominamos autonomia. Essa autonomia está ligada a uma intencionalidade do aluno perante o processo de aprendizagem, ou seja, o aluno deve ter uma participação ativa em relação ao conteúdo. Mas o que se observa em sala de aula é a aprendizagem receptiva, ou seja, onde o aluno espera que o professor ensine o conteúdo, o que não favorece ao processo de aprendizagem consciente.

De acordo com Alberts e Kaenders (2005) para van Hiele a intuição em matemática (mais específico em geometria), é o início de cada raciocínio, com isso não devemos negar a existência da intuição. Van Hiele utiliza um exemplo simples para afirmar isto: alguém te chama e você sabe imediatamente quem é, essa reação não é explicável de forma racional. Eles citam que mesmo a matemática sendo o curso mais racional em toda a cultura, a intuição desempenha o seu papel, onde em boa parte dos raciocínios temos que confiar na intuição. Há conhecimentos que podem ter surgidos de forma inconsciente ao ver algumas explicações e ideias, mas ao se utilizar desses conceitos o aluno pode não conseguir expressar como chegou a uma decisão correta em determinado exercício. Isso não significa que foi mera coincidência, o que pode ter ocorrido é que ele tem um conhecimento intuitivo do conteúdo sem saber a forma correta de expressar o que ele sabe. No caso da geometria esta precisão intuitiva fica mais fácil de ser verificada.

Às vezes a intuição é vista como algo desfavorável durante o processo de aprendizagem, pois o aluno não consegue explicar porque toma certas atitudes em relação a resolução de um problema. A tendência é pensar que a intuição em geometria deve ser aceita somente no início da aprendizagem, não estando presente em todo o processo de aprendizagem, o que pode limitar o desenvolvimento do aluno.

3.3 O QUE PODE FAVORECER O PROCESSO DE APRENDIZAGEM?

O processo de aprendizagem ocorre em níveis diferentes. Van Hiele cita que as intenções racionais desenvolvem-se de forma autônoma na compreensão, onde o racional modifica as ações, resultando no processo de aprendizagem. Mas, se depois de um longo processo de aprendizagem ainda aparecem ações inadequadas, não devemos afirmar que a origem está em uma má interpretação e, pelo contrário, verificar se o aluno comete esses erros por padrões autônomos errados que são utilizados de forma inconsciente. Para auxiliar este aluno o professor deve priorizar a interpretação de onde está o erro, ao invés de explicar novamente o conteúdo. Assim, o próprio aluno forma ações conscientes corretamente.

Outro fator importante nesse processo é o interesse pelo tópico que está sendo estudado, não que seja fator decisivo na aprendizagem, mas a falta desse torna-se um sério obstáculo para a compreensão. Para o professor a tarefa de mostrar razões atraentes para o assunto não é tão fácil, mas isso vai determinar se as condições serão propícias para o desenvolvimento da compreensão, o que facilitará toda a aprendizagem.

Temos também que a prática com materiais pedagógicos (abstrato ou concreto), podem auxiliar o processo de aprendizagem sem forçar o aluno a fazer raciocínios intelectuais avançados para ele, atingindo a compreensão e vencendo dificuldades que o conteúdo teórico trazia. Essa utilização minimiza a dificuldade que muitos professores enfrentam ao tentar expressar aos alunos o conceito, visto que seu linguajar é formal e rebuscado, portanto o aluno não consegue acompanhar. Quando esses materiais são utilizados com o auxílio da linguagem adequada o conteúdo se torna compreensível ao aluno.

Em sua tese van Hiele cita que a aprendizagem exige esforço num processo adaptativo. Há uma tendência entre os alunos acreditarem que é mais fácil memorizar os conteúdos do que compreendê-los, o que não é vantajoso. Por isso, é necessário incentivar os alunos a entrarem nesse processo de compreensão se adaptando a uma nova forma de estudar, sempre recompensando os alunos durante este processo. Neste momento de adaptação devemos ter o cuidado de não julgar pelas notas, pois a compreensão pode ser notada e isso retornará grandes frutos no decorrer do aprendizado.

Obter informações sobre o que os alunos compreenderam não é fácil, pois as respostas dadas por eles não são totalmente confiáveis. Os resultados, muitas vezes, são interpretados a partir de dados obtidos em testes e não a partir de um contato direto com o aluno, que por sua vez este contato individual torna-se inviável na atual estrutura de ensino. Há algumas atividades que favorecem a interpretação da compreensão, pois muitas vezes está ligada a uma emoção, como por exemplo, uma sensação de poder ao realizar atividades que ele nunca soube antes, trazendo uma segurança ao se ver capaz de compreender o que lhe foi ensinado. O ambiente propício para isso são os jogos, já que aluno envolve-se no mundo lúdico e se satisfaz com exploração, trazendo a compreensão de modo agradável e não traumático.

3.4 OS TIPOS DE ALUNOS

Segundo van Hiele, na época da defesa de sua tese, o professor encontrava em sala de aula alunos que podem ser classificados como:

A) O que faz suas tarefas diariamente e aprende o conteúdo satisfatoriamente no decorrer das aulas, provavelmente será bem sucedido em sua vida profissional. Ele não precisa de uma quantidade muito grande de estudos diários, mas estuda o suficiente para compreender os conteúdos ensinados.

B) O que faz suas tarefas diárias muito bem mas não compreende tudo num primeiro momento, esse necessita de novas explicações para diminuir as falhas e compreender o conteúdo.

C) O que não faz os exercícios e quando questionado surpreende com a quantidade de conhecimento acumulado sobre o tópico estudado. Muitas vezes os alunos indisciplinados ao serem avaliados demonstram ter o conhecimento sem ter estudado ou realizar todas as suas tarefas, esses provavelmente terão um sucesso surpreendente em sua vida adulta.

Uma outra forma que van Hiele utiliza para distinguir os alunos é em relação a aprendizagem matemática, é a seguinte:

1. Alunos com uma inteligência que lhes permite obter uma boa compreensão da matemática e também tem sucesso no estudo da matemática são ditos como detentores de "habilidades" matemáticas.

2. Alunos capazes de adquirir conhecimento suficiente da matemática, com pouco interesse nos algoritmos correspondentes, podem ter sucesso na disciplina desde que sejam relevantes aos seus interesses particulares.

3. Alunos que não têm o pensamento bem estruturado em relação à matemática, podem absorver certas regras de cálculo e uso em situações específicas, mas as chances de que esses alunos tenham facilidade com os conteúdos é mínima. O que não significa que esses alunos não consigam desenvolver métodos de pensamento que os façam ser aprovados na disciplina.

Nas turmas do ensino fundamental, van Hiele comenta que há alunos com níveis diferentes de inteligência, interesse e concentração, e infelizmente temos um grupo relativamente alto de alunos do terceiro grupo, em relação a aprendizagem matemática. Para os alunos no primeiro e segundo grupo é desejável que recebam uma educação mais completa, o que para o terceiro tipo não é viável, pois esses geralmente não compreendem a parte básica do que está sendo ensinado.

3.5 A ESTRUTURA SEGUNDO VAN HIELE

Em seu livro *STRUCTURE AND INSIGHT* [5]*: A Theory of Mathematics Education* (VAN HIELE, 1986), Pierre M. van Hiele faz uma releitura de sua própria teoria, enfatizando que se seu modelo for utilizado adequadamente, os tópicos de geometria poderão ser abordados de uma forma eficaz, mais cedo do que geralmente está programado no currículo escolar.

Para que haja compreensão do conteúdo o professor precisa conhecer toda a estrutura envolvida de forma coerente, utilizando a linguagem adequada para cada grupo de alunos, afim de tornar o processo de aprendizagem mais proveitoso.

Nós temos formas diferentes de expressar o conhecimento, pois há conhecimentos do mundo físico o qual podemos ver ou tocar, mas também existem aqueles que temos somente em ideias que nem sempre são passíveis de serem explicados de forma coerente no mundo físico. Com isso, em determinados conhecimentos a "realidade" é deixada de lado para ser

[5]Insight: uma pessoa mostra insight quando é capaz de desempenhar uma situação não usual, desenvolve corretamente e adequadamente as ações que a situação requer, resolvendo a situação através de um método consciente e preciso (RITTER, 2011).

simplesmente idealizada. Para cada tipo de conhecimento a definição de estrutura não é a mesma, por isso essa não pode ser simplesmente buscada em um dicionário, pois seu conceito deve ser construído por cada individuo em cada caso.

As estruturas que compõem uma teoria nem sempre precisam ser conhecidas de modo aprofundado para se beneficiar delas. Um caso clássico é a teoria musical, as pessoas podem ser admiradoras de boas composições musicais sem conhecer as estruturas teóricas contidas em cada uma, da mesma forma que músicas que não seguem tais estruturas podem ser rejeitadas por essas pessoas sem mesmo terem noção do que há de desagradável nelas. O mesmo pode ocorrer no conhecimento científico quando ele está sendo exposto aos alunos, mesmo sem a linguagem formal, o aluno tem a capacidade de apreciar o todo do conteúdo e posteriormente tomar conhecimento de regras e formalismos que permeiam a estrutura do conceito estudado. Se conseguirmos atrair a apreciação do aluno ao conteúdo isso facilitará a formalização desse, pois a antipatia naturalmente observada em relação à matemática dificulta o aprendizado e a formalização do conhecimento fica prejudicado.

Em seu livro, van Hiele cita que há dois tipos de estruturas, as fracas e as fortes, que ele diferencia utilizando-se de exemplos. No caso de estruturas fracas, ele faz uso do seguinte exemplo: a dificuldade de diferenciar uma obra de arte original de uma imitação. Temos que as obras de um determinado artista tem uma estrutura marcante, mas podemos ser induzidos a erros, visto que cada obra de arte é única e podemos nos confundir no processo de análise. Somente profissionais com grande experiência em obras desse artista conseguem definir se é original ou falsa, o treino os levam a diminuir a chance de erro. Isso não significa que ela tenha se tornado em uma estrutura forte. As estruturas fortes não dão margem a erros, visto que seu padrão estrutural é fixo. O exemplo citado é: uma peça de azulejo decorado que foi colocado na parede, formando um desenho na composição, como a peça é sempre a mesma, a continuidade da composição é única, sem dar margem a uma segunda alternativa. Desse modo, a estrutura dessa composição é considerada forte.

Em se tratando de estruturas fortes, propondo a mesma atividade a pessoas distintas obtemos o resultado esperado, mesmo que durante o desenvolvimento da atividade ocorra muitas situações de tentativa/erro. Já não temos esta segurança em estruturas fracas, pois mesmo após muitas tentativas o resultado pode ser bem distinto no final.

No processo didático sistematizado e bem estruturado de forma sequencial teremos uma forma mais ágil de aprendizado para o aluno, sem que ele fique tentado a decorar o que está sendo ensinado. Através disso a necessidade de fazer muitas tentativas e recair no erro fica minimizada por causa da utilização das estruturas fortes dos conteúdos geométricos.

Quando vemos a utilização de uma estrutura mental (não-concreta) não podemos descartar a intenção ao realizar uma ação, mesmo que após muita prática pareça ter se tornado intuitivo, a ação continua sendo fruto de algo intencional. Podemos perceber em nosso cotidiano situações que as ações são aparentemente intuitivas, mas para que elas sejam realizadas o sujeito deve ter a intenção de agir corretamente ou não, baseado na estrutura social (ou educacional) em que foi formado.

Se o professor fracionar demasiadamente o conteúdo, sem concluir unindo todos os tópicos em uma estrutura maior, teremos um aluno sem o entendimento do total, ou seja, ele fica somente com os fragmentos do conhecimento e sem significado aparente para ele. Temos que entender que a soma desses tópicos quem precisa fazer é o professor, para que todo o conteúdo ensinado tenha um objetivo dentro da estrutura completa. Em geometria podemos ter estruturas com regras e internamente a estas ter sub-estruturas com regras mais restritivas. Isso é bem visível no estudo dos quadriláteros onde podemos visualizar sub-estruturas bem definidas, como é o caso dos paralelogramos e trapézios.

Em geometria temos que estrutura e visão estão intimamente ligadas, pois pode-se ter uma estrutura mental e visualizar a continuação desta estrutura sem mesmo ter manipulado. Também você pode criar toda uma teoria numa estrutura mental antes de escrevê-la de modo que os demais tenham conhecimento desta teoria.

A estrutura, para van Hiele, pode ser descrita através de três componentes:

- Visual: formada somente pelo que é observado na representação ou no próprio objeto de estudo.
- Linguística: utiliza de uma linguagem falada ou escrita, trazendo um enriquecimento ao objeto de estudo, pois acrescenta palavras, expressões, características e propriedades antes inexploradas.
- Lógica: a compreensão conduz automaticamente a certas conclusões, encaminhando a certos achados ou pressupostos que traz ao aluno uma forma lógica de pensar, onde a linguagem é cada vez mais substituída por símbolos com mais precisão do que as palavras que estavam sendo usadas. As soluções de exercícios são executadas de acordo com um algoritmo e o pensamento é realizado de forma autônoma.

Algumas vezes temos dificuldades de explicar verbalmente ou formalmente algum conhecimento que nós temos de modo empírico, como sensações e estruturas visuais que estão expostas a nós. Em geometria temos muitas estruturas que são fáceis de serem entendidas e reproduzidas como é o caso dos Fractais Geométricos, mesmo tendo uma forma lógica de construção, descrever a figura obtida desta construção não é tarefa fácil. Como exemplo citamos o Fractal Geométrico denominado "Floco de neve de Kock" (MURR; SOUZA; PRADO, 2006) que estudei no Programa PET-Matemática [6]. A construção desse fractal é feita a partir de um triângulo equilátero como figura inicial. Para a obtenção do Fractal devemos dividir cada lado do triângulo em três segmentos iguais e substituir o terço médio por um triângulo equilátero com esta medida de lado. Nas próximas etapas, cada segmento deve ser dividido em três segmentos iguais e substituir o terço médio por um triângulo equilátero com esta medida de lado, repete-se isso indefinidamente. Na Figura 15 temos a representação da figura base e as três primeiras etapas dessa construção.

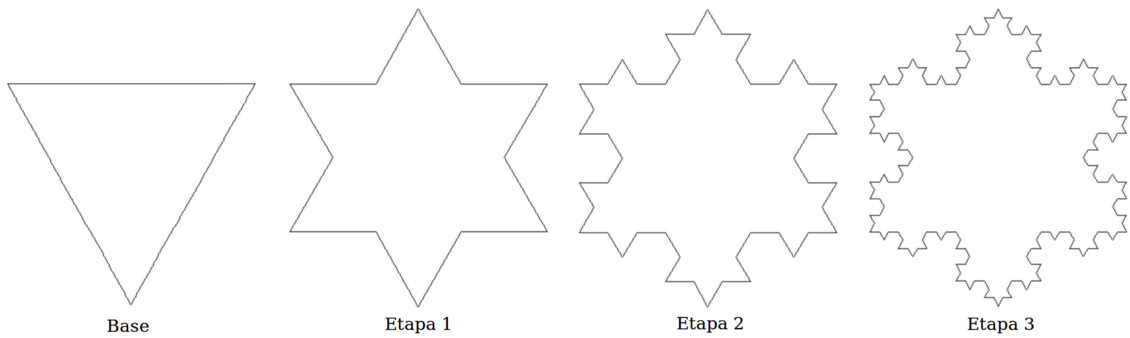


Figura 15: Triângulo inicial e as três primeiras Etapas do Floco de neve de Kock

Podemos observar que a descrição da figura obtida na Etapa 3 fica complicada, imaginemos como seria inviável descrever a representação da Etapa 10 ou maior. Com isso temos algumas estruturas no mundo visível que não são de fácil descrição e nem sempre conseguimos explicar essas estruturas com base em uma linguagem falada ou escrita. Da mesma forma podemos entender porque alguns alunos sabem as propriedades e não conseguem descrevê-las verbalmente ou de forma escrita, mesmo assim conseguem utilizá-las na resolução de um exercício.

Em outros casos as estruturas são observadas nas ações que ocorrem de forma lógica e automática, como é o caso do pianista que não pensa em cada acorde a ser tocado e da mesma forma o ato de digitar um texto no computador não é pensado letra por letra, mas sim de forma automática seguindo uma estrutura previamente formada e utilizando um treinamento exaustivo.

[6]Programa de Educação Tutorial-PET é um Programa acadêmico direcionado a alunos regularmente matriculados em cursos de graduação, recebendo orientação acadêmica de professores-tutores e orientadores de Iniciação Científica. Criado e implantado em 1979 pela CAPES e, em 31 de dezembro de 1999 foi transferido para a Secretaria de Educação Superior - SESu/MEC (PET-MATEMÁTICA, 2014).

3.6 O ENSINO DE GEOMETRIA E SUA COMPREENSÃO

Para van Hiele ao ensinar geometria deve-se dar ao aluno uma formação intelectual que passa pelo seu valor educativo, estético e significado sócio-cultural. Este conteúdo matemático é desejável para todos, independentemente da carreira que irão seguir no futuro. Muitos professores deixam de dar a ênfase comum a geometria devido a acreditar que esta é menos importante para os alunos que outros tópicos da matemática. Estes se esquecem que o estudo da geometria é necessário no que diz respeito a sua aplicação em outras disciplinas. No entanto, não é adequado mencionar isso como uma meta, mas evidenciar o ensino de geometria como objetivo por si só, sendo apenas uma consequência sua utilização em outros conteúdos.

Em sua tese van Hiele cita que, baseado em sua experiências, é raro que alunos (de 6 e 7 anos) orientados em programas estruturados de ensino de geometria ao final do ano letivo continuem a ter problemas na distinção entre retângulos, losangos e quadrados, quando analisados visualmente, mesmo que essa habilidade não seja o comum para essa faixa de idade. O professor começando a geometria baseada em uma estrutura visual pré-existente fazendo os alunos acompanhar conscientes na formação do conteúdo e preenchendo as lacunas que eventualmente vão se formando, facilitará a abordagem das formas abstratas da geometria.

Na época da elaboração de sua tese, van Hiele citava que a formação da compreensão em geometria poderia ser dividida no seguinte processo:

1. Formação da estrutura no campo visual.
2. Aprendizagem de palavras diferentes, próprias do conteúdo.
3. O processo de pensamento sobre as figuras começa a se desenvolver cada vez mais no campo verbal, formando uma estrutura linguística do conteúdo.
4. Com certa autonomia na estrutura linguística, pode-se ver a condução automática para certas conclusões ou a busca de justificativas à essas conclusões.

Quando o aluno conclui os três primeiros itens, podemos dizer que não há compreensão, mas ao concluir o quarto item seu pensamento torna-se mais estruturado e alcança uma maior compreensão. O vocabulário próprio do conteúdo torna-se comum e pode ser utilizado no dia-a-dia do aluno. Lembrando que a formação da compreensão geométrica contempla os três componentes da estrutura: visual, linguística e lógica.

A formação da compreensão pode ocorrer seguindo a seguinte descrição: o aluno inicialmente se abre para o campo visual e em seguida começa a explorar livremente os objetos de estudo, em seguida o exercício específico começa a fascinar o aluno que se concentra para a sua resolução. Após concluir a tarefa ele adquire uma nova estrutura e pode utilizá-la em situações com variações dos dados que ele utilizou anteriormente.

Para ter sucesso no processo de aprendizagem, é bom que os alunos percebam que são capazes de resolver problemas utilizando suas próprias ideias, pois torna-se possível aumentar gradualmente o domínio no processo de aprendizagem. Evitando que o aluno foque em uma aprendizagem do tipo algorítmica (decorar processo de resolução) trazendo esses a prestar atenção às considerações ligadas a esses conteúdos, formando um conhecimento estruturado e organizado.

Temos então que, se o aluno é capaz de tirar conclusões a partir de dados e as situações novas não representam um obstáculo para a apresentação dos resultados favoráveis, podemos afirmar que esse compreendeu o que foi ensinado, visto que adaptou seu conhecimento aos novos dados que ele recebeu. Diferentemente se fosse passado ao aluno métodos de resolução que seriam úteis somente nos casos específicos, não dando a ele conhecimento suficiente para adaptar-se conforme o problema sugerir no enunciado.

Por sua experiência, van Hiele diz que conhecer muitos métodos de resolução não deixa o aluno com mais facilidade, pelo contrário, saber muitos métodos dificulta na definição de qual é o melhor para cada caso. Deixando o aluno investigar e encontrar seus próprios métodos fará com que esse tenha menos dificuldade ao deparar-se a problemas com enfoques diferentes dos que ele já resolveu. Sem falar que concentrando-se em métodos estaremos favorecendo um empobrecimento conceitual considerável, pois as experiências permitem um enriquecimento do conteúdo e gera uma verdadeira compreensão.

Uma ferramenta que van Hiele cita por favorecer a compreensão é a "resolução de problemas", como segue:

- Através dos problemas os alunos aprendem a tomar consciência da maneira pela qual certas propriedades aparecem nas figuras e como tirar proveito deles.
- Através dos problemas os alunos praticam como encontrar as propriedades corretas em determinadas situações.
- Os problemas podem introduzir novas teorias.
- Os problemas podem ser usados para ajudar os alunos a aprender como encontrar a solução correspondente a uma situação específica.

- Os problemas podem ajudar a descobrir propriedades e verificar se estas são válidas para todo um conjunto de figuras.
- Problemas vem de encontro à necessidade dos alunos de resolverem quebra-cabeças.
- Os problemas podem contribuir para a integração do assunto estudado.

Podemos perceber que os problemas têm muita utilidade. No entanto, é importante perceber, antes de aplicar um problema, se toda a base de recursos necessários na resolução desse já foi trabalhada, caso contrário, esse será tão incompreensível ao aluno que poderá servir de desmotivação ao invés de incentivá-lo a descobrir com seu próprios conhecimentos.

3.7 O PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE LANGEVELD EM GEOMETRIA

Em sua tese, van Hiele cita vários autores, seus contemporâneos, que influenciaram sua busca por um novo modelo de ensino, entre eles destacamos os seguintes autores: H. Freudenthal (orientador da tese de van Hiele), M.J. Langeveld (orientador de sua esposa Dieke van Hiele-Geldof), H.C. Morrison, J. Mursell, C.F. van Parreren, J. Piaget e O. Selz. Dentre esses vamos destacar o processo de aprendizagem em geometria idealizado por Langeveld no qual o aluno passa por 8 estágios, são eles:

1. Orientação: o primeiro contato com um assunto novo para o aluno é sempre dado pelo professor.
2. Direcionamento inicial: a intenção do aluno inicialmente não está toda destinada em aprender geometria. Com isso pode-se não mostrar as regras, mas fazê-los entender por que são assim e não de outra forma.
3. Dados e coisas: inserir a geometria utilizando modelos de papel feitos pelos próprios alunos, incentivando-os a descobrir suas propriedades nesse processo de confecção.
4. Determinantes estruturais: as ações dos alunos ainda são em parte incompreensíveis para ele, mesmo assim ele pode agir buscando soluções aceitáveis.
5. Informações: dirigir a atenção do aluno para problemas que estimulem uma abordagem geométrica dos objetos, seguida da transmissão de conhecimentos sobre resultados e métodos apropriados.
6. Integração do conteúdo: concentração da aprendizagem orientada para o domínio de uma certa unidade temática.

7. Conhecimento (“estar orientado” no conteúdo): o aluno sabe o conteúdo, mas para resolver os problemas, em vez de usar toda a geometria insiste em um determinado método capaz de resolver o problema manualmente.

8. Domínio: atinge uma visão global da geometria e não somente o conhecimento de alguns métodos de resolução.

Dos oito estágios acima, podemos perceber que a compreensão geométrica ocorre no estágio 7, ou seja, quando os alunos percebem o que foi lhes passado na aprendizagem. Onde a verdadeira compreensão da geometria é alcançada, e é muito provável que os alunos lembrem-se de todo este sentido e significado futuramente. Não significando que não existe conhecimento desde o início, pelo contrário, ele está lá mas demora a aparecer.

O “domínio”, o oitavo estágio, quando atingido leva os alunos a alcançarem uma prática na resolução de problemas. O aprofundamento teórico pode provocar um afastamento da geometria usual, se este não é o objetivo deve-se dosar sua exposição aos alunos.

4 OS NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DO MODELO VAN HIELE

Nas salas de aula o ensino da geometria, muitas vezes, segue uma ordem inadequada para os alunos, visto que esse geralmente é iniciado com uma relação de propriedades, sem passar por um estágio inicial baseado em situações concretas. Isso pode trazer ao aluno uma antipatia ao estudo desse conteúdo. Outro motivo desta antipatia é a apresentação do assunto em unidades separadas, em pequenas porções, não fazendo coesão suficientemente clara entre elas. Mas também pode ser que estejamos ensinando em um aprofundamento muito além da compreensão do aluno e com pouca utilização do material visual.

Um material muito útil na introdução de figuras geométricas é o "geoplano de Gattegno" (Figura 17 (MAFAGAFO, 2015)), assim chamado por causa do matemático Calleb Gattegno [1] , que publicou um dos primeiros trabalhos sobre esse objeto de ensino que originalmente era formado por uma placa de madeira, marcada com uma malha quadriculada, onde em cada vértice dos quadrados formados havia um prego fixado, nesses os alunos prendiam os elásticos, formando figuras geométricas sobre o geoplano (ROCHA, 2013). Atualmente, há geoplanos totalmente de madeira, onde os pregos foram substituídos por pinos de madeira que tornaram possível o uso desse material em sala de aula sem o risco dos alunos se ferirem. Outra opção são os geoplanos de plástico ou acrílico, que durante a pesquisa encontrei desse somente em sites de lojas fora do Brasil. Com o uso desse material podemos fazer todos os tipos de figuras, mesmo as crianças (seis e sete anos) podem formar facilmente quadrados, paralelogramos, etc. sem que seja necessário ter habilidades como desenhista.

Os professores não tem tempo suficiente para atender os alunos mais fracos com explicações individuais, mas utilizando-se de materiais educativos facilita a abordagem dos conteúdos, visto que o aluno conseguirá desenvolver as atividades individualmente ou em grupos com mais facilidade e com êxito, aprendendo a formar seu próprio conhecimento.

[1](1911 – 1988) Nasceu em Alexandria, Egito. Filho de um comerciante espanhol, quando adulto viveu no Cairo/Egito, Londres/Inglaterra, Reading/Inglaterra, Addis Abeba/Etiópia, La Chaux de Fond/Suíça Nova York/EUA, mas trabalhou em todo o mundo, em todos os continentes. Desenvolveu pesquisas em matemática, educação matemática, linguística e psicologia (POWELL, 2007).

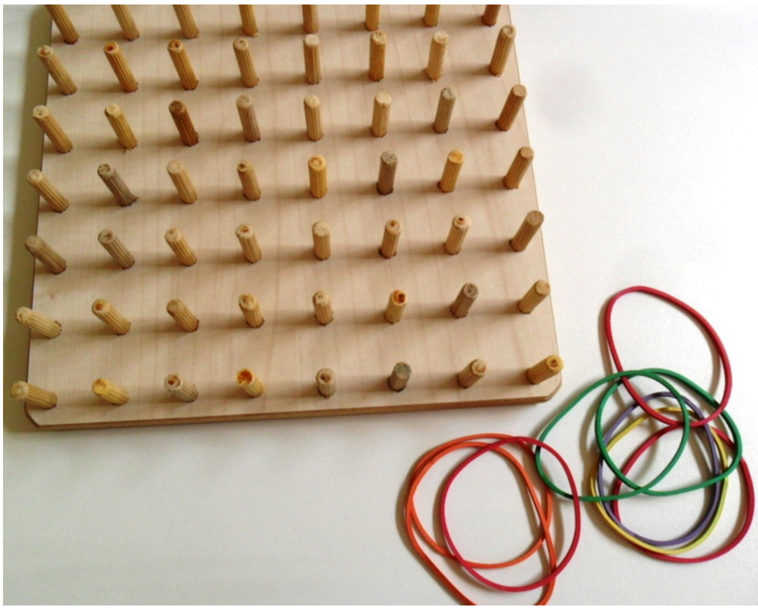


Figura 17: O geoplano de Gattegno

Nesse processo os alunos desenvolvem o raciocínio geométrico de maneira correta se abordarmos os elementos que fazem sentido para eles somente no momento correto. Nisso entra o Modelo van Hiele, que busca orientar o professor nesta escolha, do que é mais propício ser abordado ou não em determinado momento, até mesmo qual a linguagem adequada a ser utilizada. Devemos ter coerência ao escolher a forma de abordar o conteúdo, para que os alunos possam reconhecer os argumentos estudados de forma mais simples, que em um novo momento torna-se muito mais preciso e elaborado.

A teoria do Modelo van Hiele mostra as características de cada nível e o conhecimento que o aluno deve ter para alcançar o seguinte. Isso facilita o trabalho do professor no conteúdo de forma a auxiliar o aluno na transição de um nível ao outro, facilitando a compreensão do que está sendo ensinado e diminuindo a persistência das falhas de aprendizagem. Como o Modelo van Hiele é baseado em cinco níveis, cada um com características e linguagem bem definidas, o professor tendo bom entendimento deles e conhecendo como a dificuldade da comunicação atrapalha o rendimento do aluno, poderá facilitar a passagem dos níveis modificando sua forma de se expressar para uma fala menos formal até que o aluno tenha conhecimento suficiente para acompanhar a linguagem do nível mais elevado.

Os Níveis são atingidos um após o outro e o aluno deve ter um domínio considerável de um para passar para o próximo. Pode-se dizer que um aluno atingiu um certo nível quando uma nova forma de pensar em relação ao que está sendo ensinado foi desenvolvida e este consegue aplicá-las a novos problemas propostos. Dificilmente o aluno terá este sucesso em tempo aceitável sem a seleção apropriada de tarefas, pelo professor, que criem uma oportunidade ideal para o aluno alcançar um nível mais elevado. Quando percebemos que o potencial do aluno está em um nível superior, torna-se muito difícil que este volte a um nível inferior. Mas se o aluno apenas memorizou o que está sendo ensinado, o conteúdo é esquecido frequentemente, caracterizando que esse ainda não atingiu o nível desejado para aquele grupo ou turma.

O professor deve entender que quando os alunos estiverem com defasagem na aprendizagem, é necessário que ele remodele suas aulas a um nível inferior para que todos alunos, ou a maior parte desses, possam alcançar esse nível antes de prosseguir, pois mesmo que pareça estar atrasando o seu conteúdo isso formará um reforço do nível mais básico e facilitará o desenvolvimento das próximas aulas, onde o professor deve retornar a propor problemas no nível mais alto. Esse retorno de modo algum é prejudicial aos alunos, pelo contrário, esta tática resgata os alunos que ainda estão em desenvolvimento no nível inferior e reforça o conteúdo para os que já o concluíram. O mais importante é que o professor avance ao próximo nível tomando o cuidado de retornar ao nível inferior as vezes necessárias para facilitar o desenvolvimento do conhecimento no aluno.

Fazendo desta forma o aluno aprenderá a utilizar termos específicos durante a construção do seu conhecimento, pois as palavras comuns já não expressam realmente o saber geométrico que ele absorveu, com isso ele se mostra preparado para formar uma estrutura formal do conteúdo utilizando as expressões adequadas do saber matemático de geometria. Para os alunos entenderem um nível mais alto eles devem ter confiança de toda a teoria e linguagem que abrange o nível inferior.

Uma dificuldade para o professor, de acordo com o livro escrito por van Hiele (1986), é que os níveis cognitivos do Modelo van Hiele não são utilizados de forma significativa na elaboração de livros didáticos, desta forma ele teria que adaptar os conteúdos e a sequência a ser abordada em sala de aula para facilitar a aprendizagem. Atualmente, o trabalho realizado por Joyce Paula da Silva (SILVA, 2008) indica que, segundo o PNLD, as obras didáticas editadas deveriam ter uma preocupação maior e apresentar a geometria de forma visual e concreta, levando o aluno a deduzir relações e propriedades mas, ela salienta que ainda há muitas obras que fogem a essas determinações, apresentam poucas relações com aspectos estéticos tanto da natureza como das artes plásticas, e também não fazem conexões com outros conceitos matemáticos ou de outras ciências.

4.1 PROPRIEDADES DO MODELO VAN HIELE

Em relação à aprendizagem de Geometria, o modelo é baseado numa visão que valoriza um processo gradativo, envolvendo intuição, raciocínio e linguagem geométrica obtida gradualmente. Essa também é vista como global, onde as figuras e propriedades deixam de ser abstrações isoladas e em diversos níveis chegam a novos significados. Além de ser construtivo, onde o aluno deverá construir seus próprios conceitos (BRITO, 2012).

Além das características acima, nos baseamos nas dissertações de Alice Ibanhes Brito (BRITO, 2012) e Karine Pértile (PÉRTILE, 2011), para descrever o Modelo van Hiele através das seguintes propriedades:

Propriedade 1 Sequencial

- O aluno passa pelos níveis seguindo a sequência, mudando para outro somente após assimilar as estratégias dos níveis anteriores.
- O aluno deve necessariamente passar por todos os níveis de aprendizagem inferiores para chegar no nível pretendido.

Propriedade 2 Avanço

- O progresso do aluno dependerá mais do conteúdo e dos métodos de ensino do que da idade.
- Nenhum método de ensino permite ao aluno pular um nível, alguns apenas podem acentuar o progresso, abreviando a permanência em determinados níveis.

Propriedade 3 Intrínseco e Extrínseco

- Conceitos geométricos implícitos em um nível tornam-se explícitos em um nível superior. Por exemplo: no nível inicial, o aluno visualiza um quadrado e o reconhece. No nível seguinte, ele analisa a figura e, além de reconhecer o quadrado, indica algumas de suas propriedades, como, por exemplo, possuir quatro ângulos retos.

Propriedade 4 Linguística

- Cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seus próprios sistemas de relações que ligam esses símbolos. Por exemplo: classificar quadrados e retângulos como figuras diferentes em certo nível é correto, enquanto em outro nível há a necessidade de o aluno identificar que o quadrado é, na verdade, um retângulo. Desse modo, uma relação que é “correta” em um certo nível, mas pode se modificar em outro nível.

Propriedade 5 Combinação Inadequada

- Duas pessoas que estão em níveis diferentes não conseguem se compreender, por isso o aluno, o conteúdo e o nível devem estar coerentes para que haja o aprendizado.
- Professor e aluno precisam estar raciocinando em um mesmo nível, caso contrário, o aprendizado pode não ocorrer pois, esse não será capaz de acompanhar os processos de pensamento que estão sendo empregados pelo professor.

4.2 OBSTÁCULOS QUE PODEM SER DESFEITOS

Muitas vezes encontramos alunos com dificuldades diversas em uma mesma turma. Em um determinado conteúdo é possível modificar várias vezes o seu modo de exposição, porém as dificuldades poderão permanecer se o professor utilizar uma linguagem diferente do nível dos alunos em sala de aula. O professor precisa saber qual é o Nível de van Hiele da turma e colocar-se então neste nível para conseguir atingir os alunos com dificuldades. Fazendo assim esses serão resgatados e poderão seguir com os demais colegas para o nível seguinte. O resgate pode ser realizado através de explicações em um sistema mais acessível ou até mesmo de uma sequência de exercícios dirigidos que levem o aluno a diluir suas dificuldades de modo sistemático, onde ele será confrontado com uma situação favorável que permitirá o alcance do nível maior.

Segundo van Hiele, se um aluno alcança determinado nível é praticamente improvável que ele retorne a um nível inferior, pois ele atingiu um potencial de aprendizado significativo que não será perdido, visto que tornou-se parte do aluno. No caso da geometria, fica bem mais complicado explicá-la sem pensar em níveis. Escolher um desenvolvimento do conteúdo em termos de lógica a tornaria distante da realidade do aluno, isto porque elementos geométricos fazem parte da vida do aluno desde seus primeiros anos de vida.

Por ter contato com elementos geométricos na sua vida cotidiana, van Hiele cita que o aluno já tem o conhecimento do nível básico que é baseado principalmente no reconhecimento visual dos entes geométricos. Quando o professor inicia um tópico pelos axiomas e propriedades formais do conteúdo, isso pode retirar da geometria o significado real que o aluno já tinha e por ter um excesso de palavras diferentes das que ele entente pode fazer com que o aluno deixe de apreciar o conhecimento geométrico e afastá-lo cada vez mais do objetivo de obtenção do conhecimento geométrico formal.

Quando o professor leva em consideração o conhecimento prévio do aluno em relação ao tópico estudado, ele poderá introduzir termos novos durante os diálogos em sala e com isso formalizar gradativamente o conhecimento e, quando os alunos já atingiram um nível suficiente de conhecimento fazer a conclusão do tópico com os axiomas e propriedades formais do conteúdo. O professor poderá perceber que o aluno está concluindo um nível quando ele não se contenta com a informalidade e critica a forma de falar ou observar os elementos do conhecimento do nível em que está, com isso ele está preparado para ter contato com o próximo nível.

Como os alunos têm momentos diferentes de desenvolvimento é necessário ter consciência que mesmo se a turma tiver um conhecimento inicial relativamente homogêneo, o desenvolvimento durante o contato com o novo nível será diferenciado para cada indivíduo. Portanto, mesmo que todos passem uma mesma sequência didática isso não garante que a nova passagem de nível seja ao mesmo tempo para toda a turma, uma parte conseguirá passar e a outra parte ficará retida no nível inicial. Mas pouco tempo depois, refazendo a avaliação esse segundo grupo já tenha o conhecimento que faltava, mostrando que se tornaram aptos naquele nível mais elevado do conhecimento.

O aluno sendo incentivado a desenvolver a capacidade de construir seu próprio conhecimento, sem uma imposição, aprende a questionar as informações que estão sendo passadas pelo professor, podendo haver compreensão e visualizará a estrutura do conteúdo, não somente itens desconexos. Quando o aluno consegue formar esse raciocínio ele não deixa de pensar nos objetos na sua totalidade, olhando para as características gerais, mas ele consegue visualizar aqueles como objetos que tem em si, propriedades e relações que o tornam diferentes ou semelhantes a outras figuras do conteúdo específico.

Com a utilização dos níveis do Modelo van Hiele é possível chegar às formas abstratas no ensino das teorias. Van Hiele comenta se é realmente válido chegar a níveis tão elevados de abstração na EB, já que a abordagem axiomática da geometria não é relevante para a maior parte da população e a abordagem lógica da geometria não é tão fundamental para boa parte dos alunos. Ele comenta em seu livro, em 1986, que na época da elaboração de sua tese, em 1957, não teve esta constatação, onde seu objetivo era que o aluno se aprofundasse cada vez mais nos conteúdos estudados.

4.3 DESCRIÇÃO DOS NÍVEIS DE VAN HIELE

O Modelo van Hiele foi elaborado baseando-se em cinco níveis. O conhecimento desses níveis auxilia o professor a não exigir do aluno um conhecimento maior do que eles estão preparados e também ajuda a não restringir o seu ensino baseados simplesmente na idade biológica do aluno, pois este não é o único fator significativo num processo de aprendizagem.

Para van Hiele é importante o professor pensar conforme o nível do aluno e entender como é o seu raciocínio para ajudá-lo a subir de nível. Vamos apresentar nos tópicos a seguir cada um dos cinco Níveis de van Hiele. Iniciaremos cada nível com um resumo das informações obtidas na tese de van Hiele (VAN HIELE, 1957) e em seu livro (VAN HIELE, 1986). Na sequência apresentaremos as principais características sobre cada nível, baseadas nos seguintes autores: Rosa Kazuko Miyasaki Inoue (INOUE, 2004); Kuo-En Chang, Yao-Ting Sung e Song-Ying Lin (CHANG; SUNG; LIN, 2007); José Carlos Pinto Leivas (LEIVAS, 2012); J.K. Alex e K. J. Mammen (ALEX; MAMMEN, 2012); Adela Jaime Pastor (PASTOR, 1993); Joyce Paula da Silva (SILVA, 2008); Sônia Maria Pereira Vidigal (VIDIGAL, 2011); Rebeca Moreira Sena (SENA, 2011); Josaphat Morisson de Moraes (MORAES, 2008); Carol E. Malloy (MALLOY, 1999); Karine Pértile (PÉRTILE, 2011); Mohd Salleh Abu e Zaid Zainal Abidin (ABU; ABIDIN, 2013); Marcelo Becker (BECKER, 2009); Andréa Maria Ritter (RITTER, 2011); Rosângela Constantino (CONSTANTINO, 2006); Alice Christina Vaz Ibanhes de Lima Brito (BRITO, 2012); Fábio Luiz Fontes Martins (MARTINS, 2012); André Ferreira de Almeida (ALMEIDA, 2011); Thomas Gawlick (GAWLICK, 2005). Por fim apresentamos algumas atividades proposta para o Nível 0 recomendadas por Rosângela Constantino (CONSTANTINO, 2006) e Karine Pértile (PÉRTILE, 2011) e as dos Níveis 1, 2 e 3 somente pela Karine Pértile.

4.3.1 NÍVEL 0 - RECONHECIMENTO / VISUALIZAÇÃO

Em sua tese, apresentada em 1957 (VAN HIELE, 1957), os Níveis de van Hiele eram enumerados de 1 à 4, mas em estudos posteriores van Hiele percebeu que antes do Nível 1 é necessário um nível visual, o qual foi dominado Nível 0. Em sua opinião o Nível 0 é o mais importante, pois forma uma base para os demais níveis que inclui situações dos alunos em sua vida diária e suas experiências, aos quais eles estão acostumado, já os demais níveis são mais específicos da vida escolar, não sendo percebido no cotidiano anterior ao início dos estudos.

Como o Nível 0 é essencialmente visual a linguagem é somente uma forma de comunicação entre professor e aluno. Para van Hiele, o professor deve dirigir-se ao aluno no início do ensino de geometria numa linguagem que eles estão acostumados, linguagem do dia a dia, não deve usar uma linguagem formal matemática que é uma linguagem do Nível 1, pois eles ainda não atingiram este nível. Com o tempo o professor perceberá que o melhor para ele é aguardar os alunos absorverem o que está sendo ensinado numa linguagem informal para, só em um segundo momento usar uma linguagem formal matemática do conteúdo.

Boa parte do conhecimento geométrico neste nível é difícil de expressar com palavras e nesse caso há necessidade de fazer esquemas de linguagem para que isso possa ser explicado. Esses conhecimentos abstratos precisam ser abordados utilizando-se de modelos visuais para que os alunos consigam entender e a partir daí formar uma expressão verbal do conteúdo que está sendo ensinado.

Há professores que parecem acreditar que ao utilizar a linguagem técnica do conteúdo fará com que o aluno compreenda a essência do que está sendo ensinado. Mas na realidade essa linguagem não terá significado se o professor deixar de exemplificar adequadamente no Nível 0 e se esses exemplos forem fracos ou inexistentes. A linguagem técnica pouco será aproveitada por esses alunos. A utilização de termos específicos do conteúdo deverá ser utilizado somente no próximo nível, após os alunos o compreenderem na linguagem informal.

A geometria de nossa realidade é espacial e quando o assunto é geometria plana o conteúdo se distancia da realidade do aluno. Neste caso a manipulação é muito mais necessária, mas muitas vezes o professor fica fadado a simplesmente expor formalmente o conteúdo através das propriedades de cada figura plana e resolução de exercícios vazios tornando a experiência muito vaga. O que deveria ocorrer é a exposição do conteúdo de uma forma clara e inserido em seu contexto, sempre dando preferência a materiais concretos que exemplifiquem a sua utilização na vida extra-escolar.

Os alunos nesse nível ainda não conseguem resolver problemas pois, eles ainda estão descobrindo os objetos geométricos e ainda não tem a noção de quais são as respostas que serão obtidas no decorrer do estudo. E, durante a resolução de exercícios podemos nos deparar com erros cometidos pelos alunos, esses não precisam ser explicados de forma verbal nesse nível, pois fica fácil visualizar se está correto ou não, dificilmente é passível de ser explicado utilizando uma linguagem do Nível 0. Os erros geralmente precisam de uma linguagem do Nível 1 para conseguirmos mostrar o que está acontecendo de errado, já que são as características e propriedades que tornam aquela resolução errada. Dificilmente haverá uma explicação utilizando somente os conhecimentos do Nível 0.

Van Hiele (1984) cita que no Nível 0 as figuras são julgadas pela sua aparência. O aluno reconhece um retângulo por sua forma e este é diferente de um quadrado. Quando é solicitado a representação de losangos, retângulos, quadrado, paralelogramo eles os reproduzem com facilidade em um geoplano de Gattagno. Para eles, neste nível, o losango não é um paralelogramo, pois o formato lhe parece completamente diferente. Para entendermos claramente isso, veremos as características desse nível:

1. Percebem as figuras geométricas em sua totalidade, utilizam atributos irrelevantes nas suas descrições, tais como: "esta figura é um retângulo, porque é achatado", "isto é um vértice, porque é um canto ou porque é um bico".

2. A descrição de figuras geométricas é feita utilizando termos do tipo: " .... parece com...", "... lembra...".

3. Descrevem objetos com ênfase em tamanho, cores ou outros aspectos, como "bicudo", "deitado", "achatado", "redondo".

4. Citam as diferenças existentes entre um retângulo e um paralelogramo como: "O retângulo é mais comprido", "o paralelogramo é mais bicudo". Ou ainda, o retângulo parece com a porta, com o livro, etc.

5. Percebem as figuras geométricas, mas não consegue generalizar as características de uma figura para outras de mesma classe, nem como reconhecer as partes ou propriedades de uma figura.

6. Precisam ser ensinados a reconhecer os padrões geométricos simples (através de protótipos apresentados a eles) dando atenção para as características visuais e ensinando os significados dos termos básicos da geometria.

7. Reconhecem e comparam figuras como triângulos, quadrados, retângulos e polígonos através de sua forma, formando grupos de figuras "parecidas".

8. As propriedades das figuras não desempenham um papel explícito no processo de identificação, pois analisam o objeto como um todo.

9. Reconhecem as figuras pelas suas semelhanças ou diferenças físicas.

10. Não identificam as partes que compõem as figuras ou suas propriedades.

11. Conseguem aprender um vocabulário geométrico simples, identificam formas específicas e reproduzem figuras básicas.

12. Descrevem as figuras baseados em seus aspectos físicos e posição no espaço. Por exemplo, um triângulo é reconhecido por se parecer com a figura nomeada usualmente por esse nome, mas caso esteja com o vértice direcionado para baixo pode não ser percebido como tal. Mesmo tendo um dos lados curvos, podem nomeá-lo como sendo um triângulo.

Atividades recomendadas neste nível:

1. Manipular objetos.
2. Colorir figuras que contenham a representação de figuras geométricas.
3. Dobrar papéis obtendo polígonos.
4. Classificar figuras recortadas em grupos como, quadrados, retângulos, pentágonos, hexágonos, ect.
5. Atividades que busquem identificar formas geométricas presentes no dia-a-dia.
6. Construção de figuras geométricas com o auxílio de materiais concretos, como varetas, canudos, etc.
7. Representações de polígonos usando geoplano de Gattegno (Figura 18).

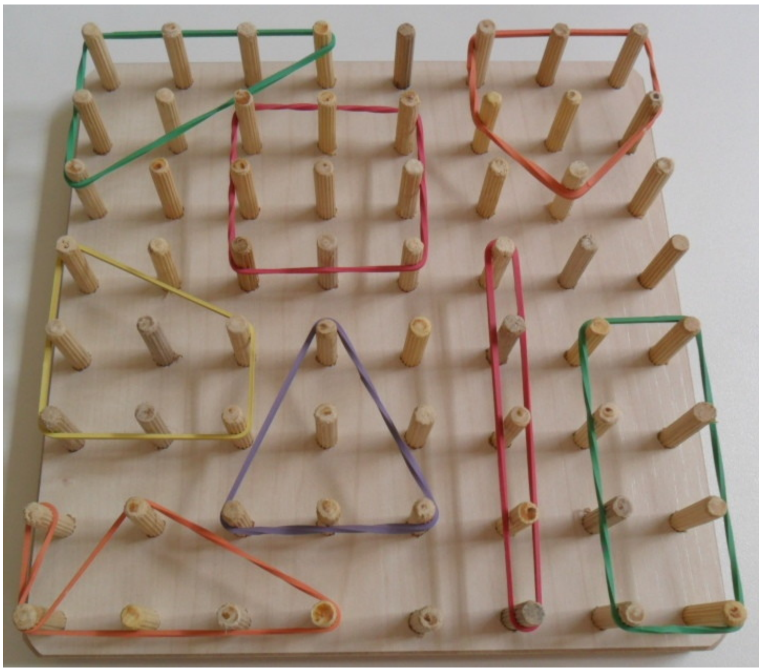
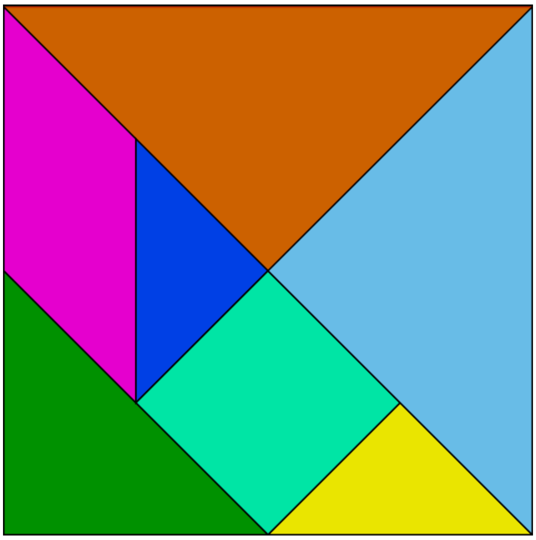


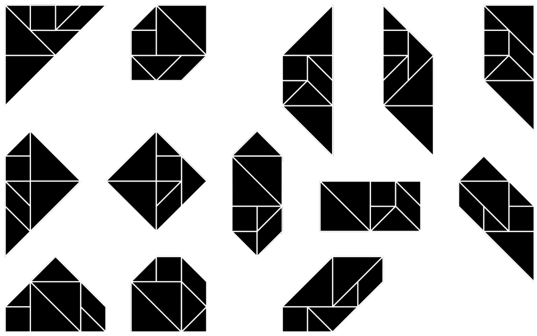
Figura 18: Atividade no geoplano de Gattegno

8. Representação de figuras geométricas desenhando à mão livre ou fazendo cópia de figuras em papel pontilhado ou quadriculado.

9. Trabalho com jogos que possam ser resolvidos manejando figuras como por exemplo, o preenchimento de uma região utilizando o tangram (Figuras 19.a (BOGDAN, 2011) e 19.b (NÉMETH, 2014)). [2]



(a) Peças para serem recortadas



(b) Polígonos a serem preenchidos

Figura 19: Quebra-cabeças Tangram

10. Descrição de figuras e construções geométricas utilizando uma linguagem que introduz palavras matemáticas aos poucos.

4.3.2 NÍVEL 1 - DESCRIÇÃO / ANÁLISE

Neste Nível de van Hiele o aluno é capaz de aplicar as propriedades de figuras, distinguir figuras semelhantes, como no caso do retângulo e do quadrado, e são capazes de dizer especificamente em que se diferenciam. Conseguem classificar figuras geométricas em categorias e explicar porque cada figura pertence a uma determinada categoria. Já fazem associações do tipo: dado a característica de triângulo isósceles que dois lados são iguais consegue deduzir que há também dois ângulos particulares com a mesma medida. O nível estará completo quando observamos que não há progresso no aprendizado dos alunos e eles fazem uso sistemático das propriedades sem dificuldades. Podemos perceber isso quando o aluno consegue construir seu próprio raciocínio, não precisando de ajuda do professor ou dos colegas de sala.

[2] Ninguém sabe exatamente quando ou como o tangram foi inventado, mas a data provável é na China entre os anos de 960 e 1279 d.C. e utilizado como um jogo para mulheres e crianças, o documento escrito mais antigo conhecido data de 1813, e tornou-se popular na Europa e na América apenas no século 19. Composto por sete partes: dois grandes triângulos , dois pequenos triângulos, um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo, recortados dentro de um quadrado (ESCOLAR, 2015) (ROCHA, 2010).

Um dos objetivos deste nível de aprendizado é que o aluno compreenda o que é teorema na prática, por isso não faz sentido utilizar o estudo sistemático dos teoremas antes que a maior parte dos alunos tenha atingido o Nível 1 de aprendizagem. Já as relações entre teoremas devem ser abordadas com cautela mesmo para os alunos que já atingiram o Nível 1. Com essa compreensão o aluno é capaz de operar com as propriedades conhecidas de uma figura, conseguem analisar as estruturas geométricas visuais globais e fazer relações matemáticas nessas estruturas. Tendo alcançado o Nível 1, o aluno consegue manipular as características conhecidas de uma figura, ele é capaz de associar o nome específico a uma figura dentre várias semelhantes. Por exemplo, ele associa o nome "triângulo isósceles" a um triângulo particular apenas observando dentro de um grupo de triângulos qual ou quais deles possuem dois lados iguais e consegue concluir que esses também possuem dois ângulos de mesma medida.

Desde o início da abordagem das propriedades deve ser evitado um conflito de linguagens, reforçando as palavras novas em concordância com as antigas informais. Temos que mostrar também que nome genérico não é perdido quando há a adição de novas propriedades, por exemplo: o quadrado ainda pertence à categoria de retângulos, um retângulo continua sendo paralelogramo, etc. A noção de grupos de figuras, por suas propriedades, começa a ser formada.

Fazendo a ordenação das propriedades, os alunos perceberão com mais facilidade que uma propriedade precede ou segue uma outra propriedade. Nesse Nível de van Hiele, o significado de dedução não é compreendido pelos alunos que ainda têm dificuldades em visualizar propriedades muitas vezes óbvias ao próximo nível (VAN HIELE, 1984) .

Se o Nível 0 foi bem trabalhado, os alunos estarão preparados para compreender as nuances do Nível 1, esses conseguirão fazer relações entre figuras, ver congruências, operar com ângulos e as propriedades contidas em cada uma das figuras geométricas. Ao ter o conhecimento desse nível os alunos terão facilidade de trabalhar com as propriedades de ângulos e paralelismo mesmo que estejam contidos nos polígonos e demais figuras geométricas.

Quando o aluno está iniciando o Nível 1 ele consegue formar um raciocínio um pouco mais abstrato, consegue pensar em soluções sem necessariamente estar com o desenho ou o objeto concreto, mas não podemos esquecer que todas as decisões estarão baseadas no que ele formou de conhecimento no Nível 0. Com isso, podemos dizer que a passagem do Nível 0 para o Nível 1 não é algo muito simples, pois o aluno tem que construir uma ordenação das propriedades das figuras geométricas e demais objetos do estudo. Durante esse processo o aluno passa por um período em que ele começa a familiarizar-se com essas propriedades que antes ele não tinha contato. Juntamente com as propriedades começam a surgir termos específicos de cada conteúdo de geometria, como congruência, igualdade, paralelismos, consequência, etc.

Essas expressões geométricas são novidade para o aluno e por isso, demora um pouco mais para ele ter segurança e utilizar esses conceitos com facilidade.

No Nível 1 o conteúdo se torna mais descritivo, com foco nas propriedades e no desenvolvimento de uma nova linguagem, formando uma estrutura do conhecimento geométrico. Quando os alunos estão completando o nível , eles percebem com mais facilidade as características dos objetos geométricos através de suas propriedade e em alguns casos podem buscar explicações do por que essas propriedades são válidas. Como a linguagem no Nível 1 é mais desenvolvida, com termos bem mais específicos, o aluno a utiliza para expressar as relações contidas nos objetos de estudo, muitas vezes pode dar uma explicação detalhada do conteúdo.

No Nível 0 as figuras geométricas são conhecidas pelas suas formas, já no Nível 1 essas figuras possuem propriedades, com essas propriedades formam grupos e determinam a forma externa dessas figuras.

Características desse nível:

1. Reconhece que as figuras geométricas são formados por partes ou elementos e essas têm propriedades matemáticas.

2. Definições dadas pelo professor ou no livro didático podem ser rejeitadas quando o aluno acredita que elas estão em conflito com elas mesmas.

3. Consegue generalizar propriedades, e acredita que demonstrações ocorrem mediante sua comprovação em um ou poucos casos.

4. As figuras já podem ser divididas em grupos com propriedades semelhantes, mas ainda não consegue explicar as relações entre essas propriedades e nem entende as definições.

5. Aspectos como tamanho ou posição tornam-se irrelevantes e as propriedades das formas tomam seu lugar.

6. Conseguem utilizar as propriedades para resolver problemas.

7. Dão importância às figuras geométricas, por exemplo o retângulo que era somente parecido com uma porta agora é visto como um quadrilátero, com lados paralelos dois a dois, com quatro ângulos retos, com lados opostos de medidas iguais.

8. Através de experimentações os alunos conseguem deduzir outras propriedades que ainda não foram citadas pelo professor, como verificar que as diagonais de um losango se cruzam perpendicularmente, e em outros acontece o mesmo.

9. Os alunos ainda não apresentam habilidade de inclusão de classe, como quadrados ter as propriedades de losangos e de retângulos, pois eles também os são.
10. Classifica as figuras baseados em um único atributo, como propriedade de lados, negligenciando ângulo, simetria.
11. Não consegue visualizar o mínimo de propriedades suficientes para identificar uma figura geométrica específica, ao invés disso cita todas as propriedades dessa figura.
12. Não compreende demonstrações matemáticas.

Atividades recomendadas neste nível:

1. Medição e dobraduras, para identificar propriedades e outras relações geométricas.
2. Descrição de classes de figuras por suas propriedades e comparação entre essas classes.
3. Identificação e representação de figuras (no geoplano, por exemplo), dadas uma descrição ou escrita de suas propriedades.
4. Dedução de regras e generalizações, a partir do estudo de muitos exemplos.
5. Identificação de propriedades que possam ser usadas em diferentes classes de figuras.
6. Uso de vocabulário e símbolos apropriados.
7. Resolução de problemas geométricos que requeiram o conhecimento das propriedades das figuras, relações geométricas ou abordagens perspicazes.

4.3.3 NÍVEL 2 - ABSTRAÇÃO / DEDUÇÃO INFORMAL

Para que o aluno tenha um bom desempenho no conteúdo estudado ele deve passar por todos os níveis, ou seja, ele só conseguirá entender bem o Nível 2 se ele compreendeu bem o Nível 1, e somente compreenderá bem o Nível 1 se ele absorveu os conceitos do Nível 0.

Van Hiele comenta que alunos distintos, ao falarem sobre algum tópico de geometria utilizando conhecimentos do Nível 0 tinham pensamentos bem diferentes, ao utilizar uma linguagem do Nível 1 as ideias começaram a se tornar bem semelhantes, só agora após essa linguagem ser realmente compreendida, no Nível 2 eles conseguirão chegar em um ponto comum.

A partir do início do Nível 2 o professor pode utilizar três passos para elaborar sua sequencia didática: Primeiro, passando aos alunos o problema; Segundo, mostrando as hipóteses possíveis para a resolução desse problema; Terceiro, mostrando como é obtida a resolução do problema. Quando o professor faz isso, mostra ao aluno que esquematizando o pensamento facilita a compreensão do conteúdo.

Quando o aluno tiver a capacidade de compreender demonstrações simples relacionadas ao conteúdo e conseguir realizar suas próprias demonstrações esse terá alcançado o Nível 2. Mas analisar se o aluno está no Nível 2 é uma tarefa bem difícil, pois ele pode simplesmente ter decorado a ordem e as etapas de uma demonstração, e ainda não sabe como e porque está usando cada uma das etapas. Se propor exercícios diferentes dos que já foram demonstrados em sala de aula o aluno poderá mostrar dificuldades, revelando que ele ainda não conseguiu atingir esse nível. Por exemplo: Um aluno que tenha o Nível 1 consegue perceber as propriedades das figuras como também as características gerais de um grupo de figuras, ou seja, consegue perceber que um quadrado possui as características de losangos e paralelogramos. Isso não significa que ele tem conhecimento suficiente para estar no Nível 2, pois isso somente avalia o conhecimento das características das figuras, não significando que ele tem a possibilidade de tirar conclusões através de dedução dessas propriedades.

Ao atingir o Nível 2 fica muito mais fácil para o aluno compreender demonstrações simples, como por exemplo, as de congruência, analisar os casos e as características necessárias para que os triângulos ou os polígonos sejam congruentes. Depois de atingido este nível, o aluno pode permanecer um longo tempo sem contato com o conteúdo e mesmo assim continua com o conhecimento. Eles conseguem compreender facilmente demonstrações simples se as virem em um momento posterior, pois eles tem uma boa noção de regras e leis lógicas e com isso conseguem analisar se o conteúdo trabalhado está seguindo essas leis e também conseguem visualizar onde essas leis estão implicitamente presentes no conteúdo.

Para van Hiele, passar de um nível para o outro não é algo natural. Para que isso ocorra é preciso que os alunos sejam influenciados por atitudes didáticas de ensino e aprendizagem. Durante as aulas o aluno acaba aprendendo um novo linguajar relacionado estritamente ao tópico que está sendo estudado. Ele deve entender o significado da nova nomenclatura, para só então ter segurança no Nível 2 e entender, por exemplo, que os quadrados são um subconjunto dos losangos. Essas conclusões não devem ser impostas, mas cada um deve produzir esse significado individualmente e perceber que as características que nós vemos nos losangos também observamos nos quadrados. Em contrapartida, há características que são somente dos quadrados.

Alunos que estão no Nível 2 já tiveram contato com uma diversidade de informações e quando esses se deparam com um exercício podem ficar inicialmente confusos na escolha do melhor caminho a seguir, como não têm uma linha de pensamento objetiva eles podem voltar a um nível inferior para organizar as ideias, o que não altera seu processo de aprendizagem. Esse recurso utilizado por alguns alunos pode causar a impressão de que há um nível intermediário entre os Níveis 1 e 2.

Quando o professor tem um bom conhecimento em relação a forma de aprendizado do aluno, isso lhe dá mais segurança e ele consegue analisar melhor o nível de aprendizagem do aluno facilitando a alteração da sua prática em favor daqueles que tem uma base incompleta, resolvendo isso o desenvolvimento dos alunos se equilibram e a consequente passagem para os demais níveis não se torna instável. Utilizando-se desse conhecimento, o professor consegue perceber quando alguns alunos aprendem a agir conforme o nível que ele está propondo, mesmo sem ter passado pelos níveis inferiores, agindo de forma mecânica e imitando sua forma de fazer os exercícios ou seus raciocínios, conseguindo resolver os exercícios tão rápido quanto ele.

Pode-se perceber que, quando o aluno começa se questionar da validade das propriedades, ou porque que estas propriedades valem para todos os objetos semelhantes, isso o levará a buscar um conhecimento teórico para entender quais são os passos necessários para demonstrar ou provar as propriedades que ele estudou, se ele concluiu bem os Níveis 0 e 1 isso vai ajudar a visualização de como fazer a demonstração. Mas para construir uma demonstração o aluno necessita estar avançado no Nível 2, aprendido a linguagem teórica deste nível, compreendendo a linguagem e sabendo argumentar de forma ordenada para que a demonstração seja eficaz. Infelizmente são poucos alunos na EB que conseguem produzir demonstrações, visto que nos livros didáticos não encontramos muitas demonstrações, e as que lá estão registradas acabam por ser omitidas nas aulas pois, o professor pode acreditar que é inviável que alunos compreendam, nesse caso é necessário refletir qual é o real significado de aprendizagem e pensar até que ponto o aluno consegue chegar a esse nível teórico.

Alunos que já concluíram o Nível 2 conseguem trabalhar bem com definições simples, como por exemplo: se um quadrilátero tem os quatro lados iguais e um ângulo reto eles conseguem visualizar que este quadrilátero é um quadrado. Mas se essa definição for proposta aos alunos que ainda não dominam o Nível 1 e as vezes nem o Nível 0, essa conclusão é praticamente impossível, os desmotivando. Isso acontece com alguns livros didáticos que iniciam os tópicos dando as definições e utilizando palavras teóricas que os alunos ainda não tiveram contato, isso acaba dificultando o aprendizado e fazendo com que o aluno fique desmotivado a estudar o conteúdo, pois o aluno começa a acreditar que não está apto a compreender aquele conteúdo por parecer que está além de sua capacidade. Quando os alunos já estão avançados no Nível 2 essa forma teórica, envolvendo relações lógicas, definições e teoremas são de fácil compreensão e para esses, não basta apresentar estruturas geométricas visuais, eles precisam de uma nomenclatura formal e uma estrutura lógica para esquematizar os seus conhecimentos.

Um aspecto importante para alunos que já atingiram o Nível 2 é a percepção que uma propriedade pode ser deduzida de outra e as ligações entre propriedades facilitam a diferenciação das figuras e a separação em grupos semelhantes, e nesses a divisão em sub-grupos de mesmas propriedades. Fazendo uma rede de relações entre as propriedades eles mostram que compreenderam bem o conteúdo e estão bem desenvolvidos nesse nível. Temos que observar que para isso acontecer o aluno precisa utilizar as palavras e expressões que foram apreendidas no Nível 1, além de uma boa intuição para fazer as deduções das resoluções de forma adequada.

Se o aluno tem habilidade de usar relações geométricas, por exemplo: consegue deduzir que dois triângulos são congruentes usando a informação de seus três lados são congruentes, este pode ter concluído o aprendizado referente ao nível 2. Se além disso, ele é capaz de operar com as propriedades de um grupo de figuras, que ele já estudou anteriormente de forma isolada, tem também a capacidade de transformar os conhecimentos vistos no Nível 1 em um conjunto de propriedades estruturadas, de forma que cada elemento isolado desse nível é parte de uma estrutura maior, além de ter aprendido a manipular as características de figuras geométricas conseguindo utilizar teoremas de congruência para deduzir que existe igualdade de ângulos e de segmentos em uma figuras estudadas, daí podemos dizer que este aluno concluiu o Nível 2.

O Professor deve estar ciente que, concluir o Nível 2 é muito mais demorado do que a conclusão do Nível 1. Baseado nisso van Hiele cita que algumas das Ciências Exatas que utilizam a matemática não necessitam que a teoria utilizada seja passível de demonstração, como estudada no Nível 2, pois nessas ciências é suficiente ver que a solução é válida sem que necessite demonstrar e verificar que vale para todos os casos. Um exemplo é a física, onde ter o conhecimento do Nível 0 e 1 já é suficiente, pois demonstrações e provas são desnecessárias na aplicação de física. Com isso não é algo imperdoável ter alunos em uma turma que não atingiram este Nível de van Hiele.

As características desse nível são as seguintes:

1. Descobrem generalizações de propriedades e regras previamente aprendidas e desenvolvem argumentos informais para mostrar que elas são verdadeiras.

2. São capazes de correlacionar entre as diferentes formas geométricas, e reconhecer características gerais dos objetos particulares e explicá-las de maneira hierárquica.

3. Engajam em um tipo de raciocínio que os capacita a compreender inclusão e interseção de classes (exemplo: os quadrados possuem tanto as características de retângulos quanto

losangos, além de todos esses serem classificados como paralelogramos que é um subgrupo dos quadriláteros). Assim, as propriedades para o reconhecimento são deduzidas umas das outras.

4. Podem distinguir condições necessárias e suficientes num conceito, com isso podem elaborar definições sem redundâncias.
5. Verificam com facilidade que um quadrado é um retângulo e entende que um retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos.
6. Entendem o significado das demonstrações em geometria.
7. Conseguem compreender provas formais, mas não conseguem construir uma prova, partindo de premissas diferentes.
8. Conseguem estabelecer inter-relação de propriedades dentro de uma figura, por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais.
9. Usam as propriedades de figuras para verificar se uma classe de figuras está contida em outra.
10. Conseguem usar explicitamente afirmações válidas do tipo “se, então”, por exemplo: se um quadrilátero é retângulo então necessariamente é um paralelogramo.
11. Tem habilidade para formar argumentos dedutivos informais corretos usando implicitamente propriedades lógicas, como por exemplo, se p implica q e q implica r, então p implica r.

Atividades recomendadas durante a passagem por esse nível:

1. Identificação de conjuntos mínimos de propriedades para descrever uma figura.
2. Desenvolvimento e uso de definições.
3. Acompanhamento do uso de argumentos informais.
4. Apresentação de argumentos informais, usando, por exemplo, diagramas, recorte de figuras, diagramas de árvores.
5. Acompanhamento de argumentos dedutivos, eventualmente fornecendo algumas etapas omitidas.

6. Tentativa de fornecer mais do que uma explicação ou abordagem para definições.

7. Trabalho e discussão acerca de situações que focalizem afirmações e suas recíprocas.

8. Resolução de problemas em que as propriedades das figuras e as inter-relações são importantes.

4.3.4 NÍVEL 3 - LÓGICO / DEDUÇÃO FORMAL

Relembrando, quando o aluno toma conhecimento de um conteúdo em geometria, visualiza as formas e grava como elas são e isto é suficiente para ele (Nível 0). No Nível 1 ele tem o conhecimento das propriedades, reconhecendo as figuras por meio delas e resolve o que está sendo questionado usando essas propriedades não somente pelo que está sendo visto, pois o desenho pode ser enganoso sem ter as propriedades bem representadas. Entrando no Nível 2 as propriedades não são simplesmente aceitas, há possibilidade de fazer relações entre duas propriedades em que uma pode ser deduzida da outra. Agora, no Nível 3 cada uma dessas propriedades pode ser transformada em teorema e entendem a demonstração desse. Van Hiele cita que na EB a maioria dos alunos podem atingir o Nível 0, 1 e 2 e boa parte dos alunos concluem o EM sem alcançar os demais níveis. Mesmo tendo um bom desempenho em termos de notas isso não garante que ele tenha realmente compreendido e assimilado todo o conteúdo para atingir o Nível 3, especialmente necessário aos alunos que vão cursar o ensino superior em algum curso de ciências exatas.

A passagem para o Nível 3 não se dá de forma simples, pois esse nível tem uma dificuldade bem maior e a maioria dos alunos não demonstra o interesse de atingí-lo. Esse tempo pode ser desfavorável em sala de aula visto que há um programa para se cumprir muito além da geometria. Como é uma formalização não necessária a todos os alunos, van Hiele cita que esse e o próximo nível podem ser omitidos na EB.

Os alunos que conseguem alcançar o Nível 3 tem um bom conhecimento das propriedades das figuras, além de fazer relações e operar facilmente com elas. Além disso, para completar esse nível ele deve compreender todo o sistema lógico dedutivo, sabendo distinguir teoremas, definições e axiomas. Se apresentar falhas em provar teoremas podemos dizer que o aluno não completou o Nível 3. Por essa razão, van Hiele cita que a transição para um nível mais elevado de pensar só é possível se o aluno acumulou conhecimento suficiente dos níveis inferiores, conseguindo manipular as características intrínsecas do conteúdo, como por exemplo, saber distinguir entre uma proposição do tipo “se, então” e sua recíproca e trabalhar com elas.

O professor deve ter em mente que nem todos os alunos alcançam o Nível 3, mesmo depois de meses estudando o conteúdo, pois o processo de aprendizagem desse nível é diferente dos anteriores, não seguem uma sequência de aprendizagem igual para todos os alunos.

As características desse nível são:

1. Compreendem as diferenças entre definições, axiomas e teoremas e diferenciam o que é dado num problema do que é pedido para encontrar ou fazer.

2. Reconhecem quando e como usar informações auxiliares de uma figura e deduzem dessas a melhor forma de desenhar ou construir uma figura específica.

3. Deduzem consequências das informações dadas e resolvem problemas que relacionam diversas figuras.

4. Entendem o significado de uma demonstração e conseguem produzir demonstrações formais.

5. Têm a capacidade de reformular teoremas.

6. Reconhecem com facilidade dentre várias propriedades quais são necessárias e quais são suficientes na descrição de uma figura geométrica.

7. Aceitam a possibilidade de se atingir um mesmo resultado de diferentes maneiras.

8. Compreendem que pode haver mais de uma forma de demostrar uma propriedade.

9. Fazem distinções entre uma proposição do tipo "se, então" e sua recíproca de forma natural e verificam sua veracidade.

10. Trabalham com sentenças abstratas sobre propriedades geométricas e estabelecem conclusões mais baseadas na lógica do que na intuição.

11. Reconhecem perguntas ambíguas e conseguem reformulá-las com linguagem correta.

12. Confiam que a demonstração é autoridade final, decidindo a verdade de uma proposição matemática.

13. Aceitam os postulados de geometria euclidiana mesmo que estes não sejam passivos de demonstração.

Atividades durante a passagem por esse nível devem conter:

1. Identificação do que é dado e do que deve ser provado num determinado problema, incentivando-os a buscarem estratégias diversas de demonstração.
2. Identificação de dados implícitos numa figura ou numa informação para reforçar o raciocínio geométrico.
3. Estímulo à compreensão do significado de conceito primitivo, postulado, teorema, definição.
4. Prova rigorosa das relações desenvolvidas informalmente do nível anterior utilizando várias técnicas de demonstração.
5. Comparação de diferentes demonstrações para um mesmo teorema.

4.3.5 NÍVEL 4 - AXIOMÁTICA FORMAL / RIGOR

O Nível 4, pode ser necessário em muitas situações, mas devemos ter bem claro que uma parte muito pequena dos alunos conseguem atingí-lo. O processo de aprendizagem neste nível é muito irregular, por isso van Hiele cita que é muito complicado falar sobre a aprendizagem neste nível. Este nível está bem acima do anterior e só podem completar o quarto nível os que compreendem as diferenças entre as teorias dentro de um conteúdo e, além de realizar demonstrações dedutivas, realizam com facilidade demonstrações por redução ao absurdo. Quando o aluno atinge esse nível, usando seu conhecimento decorrente de vários teoremas que saiba demonstrar, mesmo que esse seja novidade ele encontra soluções para os diversos problemas geométricos.

Para identificar se o aluno completou o Nível 4 a confirmação só pode ser obtida ao realizar uma entrevista de forma individual, devido a complexidade deste nível. Mas, se o professor está inseguro a terem atingindo o Nível 3 ou maior, essa também é uma opção de perceber se estão preparados para seguirem ao próximo e buscar soluções para sanar uma possível dificuldade observada no desenvolvimento do conhecimento. Até mesmo para matemáticos, que estudam estruturas muito complexas, podem acabar encontrando obstáculos nesse nível elevado e necessitam retornar ao Nível 3 para conseguir encontrar possíveis falhas no aprendizado e, muitas vezes eles demoram a perceber que estão indo além de seus limites.

Há poucas explicações sobre esse nível tanto na tese (VAN HIELE, 1957) quanto no livro (VAN HIELE, 1986) escritos por Pierre M. Van Hiele, a razão disso é que o aprofundamento desse nível não faz parte do conhecimento que se espera que um aluno da EB alcance.

Ele cita que, até mesmo os conhecimentos relacionados ao Nível 3 são apenas observados em determinados cursos do Ensino Superior.

Nas obras baseadas no Modelo van Hiele podemos encontrar algumas características que nos ajudam a compreender melhor esse nível:

1. Podem estabelecer teoremas em diferentes sistemas de postulados e podem comparar e analisar sistemas dedutivos.
2. Fazem comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da Geometria, como no caso de geometrias não-euclidianas com a euclidiana.
3. São capazes de usar a verificação, a indução, inferência, etc., relativas aos princípios geométricos.
4. Não dependem de experiências e intuições concretas, transitam facilmente por teorias axiomatizadas não-euclidianas.
5. Vêem a Geometria no plano abstrato.
6. Reconhecem que afirmações são injustificáveis, quando se faz uso de figuras.
7. Representam graficamente conceitos não usuais em vários sistemas dedutivos.
8. Usam modelos matemáticos para representar sistemas abstratos.
9. Desenvolvem modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e naturais.
10. Tratam as figuras como um conjunto de propriedades e representadas por símbolos.
11. Sabem estabelecer a consistência de um sistema axiomático.

Nesse nível as atividades devem conter exercícios que desenvolvam as habilidades citadas acima.

4.4 FASES EM CADA NÍVEL

Além dos níveis, van Hiele também propôs cinco fases de aprendizagem a serem seguidas em cada nível, pois ele acreditava que o avanço de um nível para outro não é um processo natural, o professor é a peça chave para auxiliar o aluno no seu desenvolvimento através de um programa adequado de ensino-aprendizagem, a fim de propiciar o avanço ao próximo nível.

Existem fases dentro de um nível que podem coincidir com fases do nível anterior ou do próximo, ou seja há fases do Nível 0 que podem coincidir ou se assemelhar com fases do Nível 1 e fases do Nível 1 podem ser semelhantes a fases do Nível 2. Cabe ao professor verificar se está trabalhando a fase no nível correto, no qual os alunos estão preparados.

O processo de aprendizagem, analisado através de fases pode dar a impressão de que há mais de cinco níveis, van Hiele (1986) descreve cinco fases de aprendizagem:

Fase 1 Os alunos devem se familiar com o conteúdo a ser estudado, colocando à disposição dos alunos (ou colocando em discussão, nos níveis mais elevados) materiais que apresentem o contexto do conteúdo.

Fase 2 Deve ser desenvolvido uma sequência de exercícios e atividades que, orientados pelo professor, os alunos aprendem as principais relações dentro do conteúdo.

Fase 3 Eles se tornam conscientes das relações e tentam expressá-las fazendo o uso correto da linguagem adequada para aquele Nível de van Hiele.

Fase 4 Os alunos realizam tarefas gerais de forma livre, procurando seu próprio caminho de relações no conteúdo, sempre sob a supervisão do professor.

Fase 5 Refletem e integram o conteúdo, formando uma visão geral sobre tudo o que foi discutido nas aulas, suas ações, as regras encontradas, assim por diante.

Baseados nos textos do Modelo van Hiele, os autores Mohd Salleh Abu e Zaid Zainal Abidin (ABU; ABIDIN, 2013), Alice Christina Vaz Ibanhes de Lima Brito (BRITO, 2012), André Ferreira de Almeida (ALMEIDA, 2011), Marcelo Becker (BECKER, 2009), Rosa Kazuko Miyasaki Inoue (INOUE, 2004), Joyce Paula da Silva (SILVA, 2008), Adela Jaime Pastor (PASTOR, 1993), Sônia Maria Pereira Vidigal (VIDIGAL, 2011) e Karine Pértile (PÉRTILE, 2011) descreveram as características das fases conforme suas ideias, a seguir apresentamos alguns exemplos:

4.4.1 FASE 1 - FAMILIARIZAÇÃO / INFORMAÇÃO

1. Fase interativa professor-aluno.
2. Formado por perguntas que visam entender o conteúdo específico.
3. Contato com o novo e conhecimentos prévios, onde os alunos descobrem o novo estudo, as atividades, os métodos e materiais que serão utilizados.

4. O vocabulário deve ser próprio do nível em que os alunos se encontram e o professor deve incentivar o diálogo para que os alunos revelem seus conhecimentos prévios.

5. O professor deve identificar o ponto de partida dos alunos para definir quais atividades serão propostas.

6. O aluno interage com o objeto de estudo apenas por examinar exemplos.

7. O professor disponibiliza o material didático ao aluno e auxilia-o no manuseio. Nesse momento o aluno adquire uma série de conhecimentos básicos imprescindíveis à sequencia de aprendizagem.

4.4.2 FASE 2 - ORIENTAÇÃO DIRIGIDA

1. Através de atividades e problemas propostos os alunos devem ser levados descobrir e aprender as várias relações que compõem o conhecimento.

2. Problemas e atividades devem encaminhar o aluno diretamente a resultados e propriedades que deverão aprender.

3. O professor deve selecionar os problemas que surgirem e exibir alguns dos elementos (conceitos, definições, propriedades, relações entre propriedades, etc.) que os alunos devem aprender e mostrar no que devem basear a sua nova maneira de pensar.

4. O professor deve organizar uma sequência de estudo para que sejam reveladas gradualmente as estruturas características do nível.

5. Deve-se buscar que o aluno perceba que as atividades podem ser solucionadas de diferentes maneiras, tentando explorar as estruturas do Nível de van Hiele do aluno.

6. As atividades propostas deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.

4.4.3 FASE 3 - EXPLICAÇÃO / EXPRESSÃO DO CONHECIMENTO

1. Os alunos estão aptos a expressar as suas opiniões e discutir sobre as formas geométricas que tinham sido observados, os professores são apenas facilitadores.

2. A troca de experiências nesta fase deve motivá-los a desenvolverem a linguagem necessária para exprimirem o que descobriram.

3. Discussões entre a classe e o professor que utiliza a linguagem específica, para que os alunos percebam a necessidade de dominar novo vocabulário.

4. Os alunos devem tentar expressar em palavras ou por escrito, os resultados obtidos, trocar experiências e discutí-los com o professor e demais colegas de classe, usando o vocabulário adequado para descrever os novos conhecimentos.

5. Essa fase deve ser interpretada como fixa, durante diálogos e discussões sobre todas as atividades em diferentes fases de aprendizagem nos níveis.

6. A partir de suas experiências anteriores, o aluno começa a revelar seus pensamentos, modifica seus pontos de vista sobre as estruturas trabalhadas e observadas.

7. Nesta fase não há atividades, pois não é uma fase de aprendizagem de novos conceitos.

4.4.4 FASE 4 - ORIENTAÇÃO LIVRE

1. Tarefas mais complexas e menos dirigidas, com diversas formas de resolução para cada uma.

2. O professor deve fornecer instruções e incentivar os alunos a refletirem sobre as soluções encontradas, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia, iniciando a transição de um nível a outro, encontrando seus próprios caminhos.

3. Parte das relações entre os objetos são esclarecidas por meio das interações entre os alunos ao fazerem as investigações em conjunto.

4. Desenvolvimento de atividades e resolução de problemas com situações novas e problemas desafiadores, e não simples aplicação de conceitos aprendidos.

4.4.5 FASE 5 - INTEGRAÇÃO

1. Com uma visão geral de tudo o que aprenderam os alunos integram este novo conhecimento, métodos e formas de raciocínio com o qual eles tinham anteriormente trabalhado.

2. O professor pode formular resumos para ajudar os alunos a integrar os novos conhecimentos, mas apenas para organizar o que eles já adquiriram.

3. Os alunos alcançam um novo Nível de van Hiele e o novo raciocínio substitui o antigo, eles devem estar prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte.

4. Não se deve aplicar atividades que levem os alunos à introdução de novos conceitos, mas apenas atividades que os levem a organizar o que foi aprendido.

5 INSTRUMENTO DE PESQUISA: ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS

O foco nesse trabalho é analisar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos do 6º ao 9º ano de uma escola pública estadual no município de Curitiba em relação ao conteúdo específico de Polígonos, que está inserido na Geometria Plana. Podemos perceber que o aluno do 6º ano pode chegar com um conhecimento significativo de geometria plana, já que no guia do Plano Nacional do Livro didático de 2013 PNLD-2013 [1] (BRASIL, 2012) vemos que nos livros de Matemática nessa fase do ensino, a geometria plana é ensinada desde o 1º ano. Temos capítulos que focam nos tipos de linhas: retas, não retas, simples, não simples, abertas e fechadas, da mesma forma que apresentam a simetria de figuras e o seu eixo, as reduções, ampliações e composição de figuras. Também, no 1º ano inicia-se o conceito de posição relativa entre retas e o caso de retas perpendiculares. Apresentam de forma lúdica os polígonos mais simples: retângulo, quadrado, triângulo, seus vértices e lados, além do círculo e da circunferência. Todos esses tópicos são reforçados na maiorias dos livros do 1º ao 5º ano. A partir do 3º ano é feita uma caracterização mais detalhada dessas figuras planas e a classificação conforme suas características e elementos. Nessa fase também é introduzido o conceito de segmento de reta, semirreta e ângulo. Nos 4º e 5º anos os livros apresentam a medida e classificação dos ângulos em agudos, retos e obtusos, o conceito de perímetro e área dos polígonos citados. Na maior parte dos livros esses conceitos vêm relacionados com objetos do mundo físico como incentivo à observação de ilustrações ou representações feitas pelos alunos, muitas vezes há a utilização de malha quadriculada para facilitar a representação das figuras pelos alunos.

Inicialmente, após algumas conversas, optamos em selecionar um grupo de alunos e realizar atividades com eles, baseadas nas fases de aprendizagem a fim de verificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o "Modelo van Hiele", que estes conseguiram alcançar. Mas, no ano de 2015 ouve um atraso no início das aulas devido a uma greve de todos os funcionários e professores da rede estadual de ensino, com isso o tempo de implementação da pesquisa ficou reduzido. Revendo o método de pesquisa que iríamos utilizar,

[1] Guia que contém a relação dos livros didáticos aprovados para serem adotados nas turmas do EF-I, com resenhas e relação dos conteúdos de cada coleção, para escolha dos professores nas escolas públicas.

decidimos coletar os dados através de um Instrumento de Pesquisa. A aplicação desse Instrumento de Pesquisa foi realizada pelo método de Amostras Aleatórias por Conglomerados, ou seja, o COLÉGIO escolhido para a implementação do trabalho disponibilizou duas turmas aleatórias de cada ano do EF-II (CASTANHEIRA, 2010).

5.1 PERFIL DO COLÉGIO ONDE A PESQUISA FOI IMPLEMENTADA

Para identificar o público da escola utilizamos os dados obtidos através da Avaliação Nacional do Rendimento Escolar, denominada PROVA BRASIL, onde os indicadores contextuais revelam o Nível Socioeconômico e a Formação Docente dos professores conforme descrito na Figura 21 (INEP, 2014).

ProvaBrasil Avaliação do Rendimento Escolar

DESEMPENHO DA SUA ESCOLA | PROVA BRASIL

2013

P**************** C********* C E EF M / ESTADUAL
CURITIBA - PR

41****** 2

Indicadores Contextuais

O Indicador de Nível Socioeconômico e o Indicador de Adequação da Formação Docente produzem informações sobre o contexto em que cada escola desenvolve o trabalho educativo.

O Indicador de Nível Socioeconômico possibilita, de modo geral, situar o público atendido pela escola em um estrato ou nível social, apontando o padrão de vida referente a cada um de seus estratos. Esse indicador é calculado a partir da escolaridade dos pais e da posse de bens e contratação de serviços pela família dos alunos. Para melhor caracterizar as escolas foram criados sete grupos, de modo que, no Grupo 1, estão as escolas com nível socioeconômico mais baixo e, no Grupo 7, com nível socioeconômico mais alto.

O Indicador de Adequação da Formação Docente analisa a formação dos docentes que lecionam nos anos iniciais e finais do ensino fundamental na escola. Apresenta o percentual de disciplinas, em cada etapa, que são ministradas por professores com formação superior de Licenciatura (ou Bacharelado com complementação pedagógica) na mesma disciplina que leciona. No caso dos anos iniciais, considera-se adicionalmente a formação em Licenciatura em Pedagogia (ou Bacharelado com complementação pedagógica).

Nível Socioeconômico	Formação Docente	
	Anos Iniciais	Anos Finais
Grupo 6	Não foi possível calcular.	69.90%

Figura 21: Perfil do COLÉGIO

Segundo esses dados a escola pertence ao Grupo 6 na avaliação do Nível Socioeconômico, que na Nota Técnica é descrito da seguinte forma (INEP-INSE, 2014):

> Neste nível, os alunos, de modo geral, indicaram que há em sua casa um quantitativo alto de bens elementares; bens complementares, como videocassete ou DVD, máquina de lavar roupas e computador (com ou sem internet); bens suplementares, como freezer, um telefone fixo, uma TV por assinatura, um aspirador de pó e, agora, dois carros; contratam, agora, empregada mensalista; a renda familiar mensal é alta, pois está acima de 12 salários mínimos; e seu pai

e sua mãe (ou responsáveis) completaram a faculdade e podem ter concluído ou não um curso de pós-graduação.

5.2 O INSTRUMENTO DE PESQUISA

Para a elaboração do Instrumento de Pesquisa nos baseamos no Guia de livros didáticos: PNLD 2014-Matemática (BRASIL, 2013b), onde está descrito um breve comentário sobre as coleções participantes em relação a cada conteúdo estruturante. No Anexo A pode-se encontrar o comentário extraído do PNLD 2014 em relação às Geometrias, onde há um resumo de como esse conteúdo é abordado em cada coleção. Outro dado importante obtido no PNLD 2014 foi a descrição de cada tópico encontrado nos livros. O extrato dessa descrição em relação à Geometrias pode ser encontradas no Anexo B. Estes livros estão em concordância com o que estabelece as DCE (PARANÁ, 2008) e os parâmetros da educação encontrados nos PCN (BRASIL, 1998). Também, utilizamos como inspiração o instrumento adaptado por Lilian Nasser (NASSER, 2010), esse contendo 15 questões que avaliam o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno em relação aos três primeiros níveis, sendo cinco questões para cada nível. Elaboramos o Instrumento de Pesquisa com 15 questões, onde temos cinco questões com características referentes a cada um dos três primeiros níveis do “Modelo Van Hiele”. O conteúdo de cada uma dessas questões está vinculada com o que encontramos sobre Polígonos nos livros didáticos participantes do PNLD-2014.

Coletando os dados através desse Instrumento de Pesquisa iremos analisar segundo o Modelo van Hiele qual é o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos participantes da pesquisa, sobre o conteúdo de Polígonos de forma quantitativa, onde os dados serão tabulados, organizados e analisados estatisticamente de forma a termos um perfil geral dos alunos consultados. O Instrumento de Pesquisa está dividido em duas partes. Na primeira parte o objetivo é obter “Informações sobre o aluno” e na segunda parte estão as “Questões Investigativas”, afim de verificar o desenvolvimento do aluno.

Após a aplicação do Instrumento de Pesquisa e estudos mais aprofundados na teoria do Modelo van Hiele percebemos que a questão 03 planejada para o Nível 0, necessitava de conhecimentos pertinentes do Nível 1. Por esse motivo, as análises feitas com base no Instrumento de Pesquisa, serão consideradas para o Nível 0 as questões 1, 2, 4 e 5, as questões 3, 6, 7, 8, 9 e 10 para o Nível 1 e as questões 11, 12, 13, 14, e 15 para o Nível 2.

Para identificar o enquadramento dos alunos nos Níveis de van Hiele, classificamos os alunos em três grupos: “Atingiram”, “Em processo” e “Não atingiram”. Os que acertaram menos da metade das questões estão no grupo "Não atingiram", os que acertaram metade (no caso do Nível 2 utilizamos a regra do arredondamento) estão no grupo "Em processo" de atingir o nível e os que acertaram mais da metade das questões estão no grupo "Atingiram" o nível. Com esse critério, construímos a Tabela 16, onde podemos ver com clareza o número de questões certas em cada nível para classificar o aluno em um determinado nível.

Nível	Atingiram	Em processo	Não atingiram
0	3 ou 4	2	0 ou 1
1	4, 5 ou 6	3	0, 1 ou 2
2	4 ou 5	3	0, 1 ou 2

Tabela 16: Número de questões certas em adequação aos Níveis

Nas páginas seguintes apresentamos o Instrumento de Pesquisa completo, na forma que foi aplicado no 9º ano. Para os demais anos adaptamos o item B das "Informações sobre os alunos", onde constava apenas os anos que eles já haviam cursado.

Nome: ____ Série: ______ Turma: _______

Informações sobre o aluno

Idade: _____ Sexo: ( ) feminino ( ) masculino Data: ___/___/2015

A- Você estudou em que tipo de escola no 5º ano?

( ) pública ( ) particular Nome da escola: ____________________________________

B- Você estudou nesta escola no:

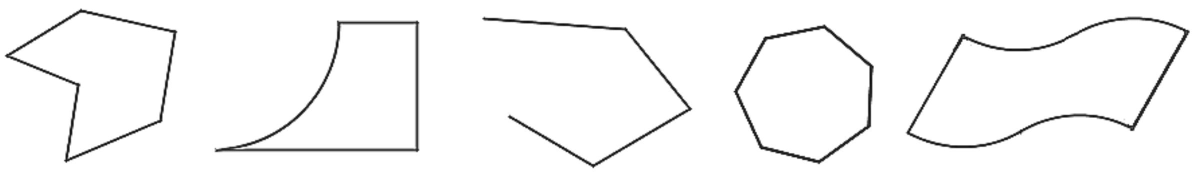
6º ano ( )sim, turma: ___ ( ) não, onde estudou: __________________________________

7º ano ( )sim, turma: ___ ( ) não, onde estudou: __________________________________

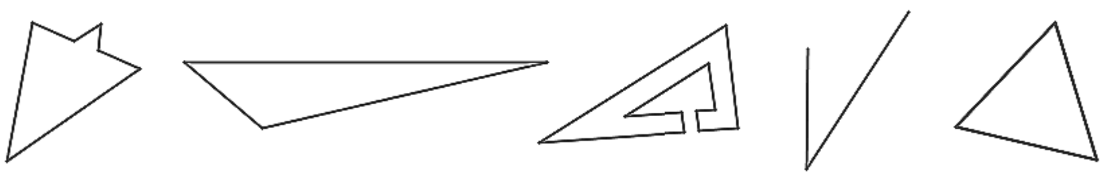
8º ano ( )sim, turma: ___ ( ) não, onde estudou: __________________________________

Questões Investigativas

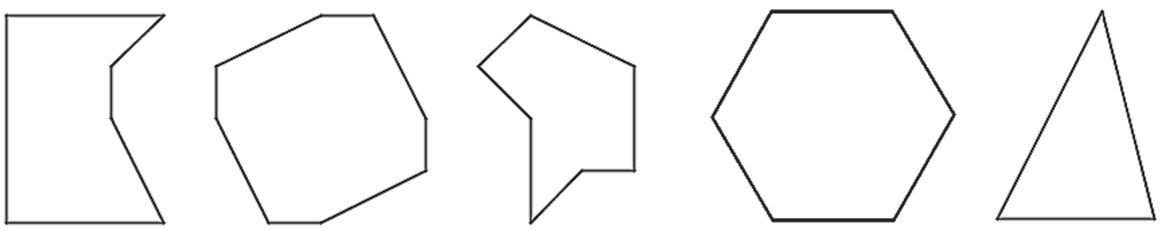
1- Dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas polígonos:



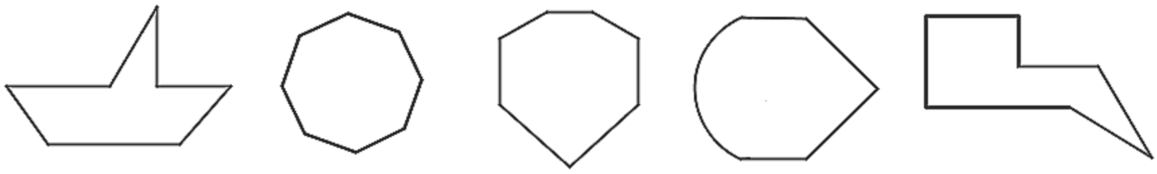
2- Dentre as figuras abaixo circule os triângulos:



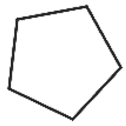
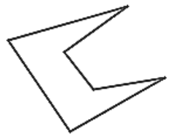
3- Dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas polígonos convexos:



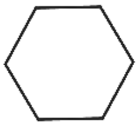
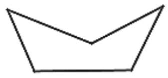
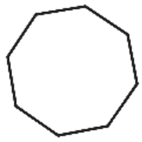
4- Sabendo que hepta significa sete, dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas heptágonos:



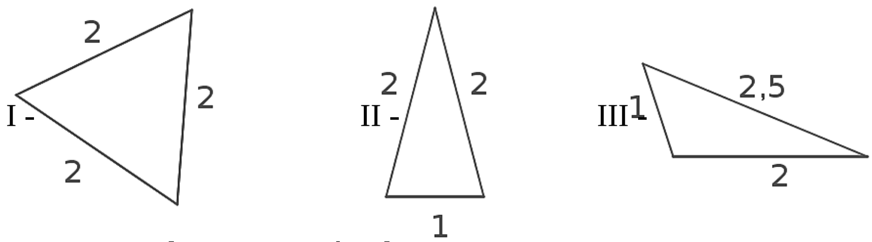
5- Sabendo que penta = cinco, hexa = seis e octo =oito, relacione os nomes da esquerda com as figuras da direita colocando a letra correspondente:

(A) Pentágono ( )  ( )  ( ) 

(B) Hexágono

(C) Octógono ( )  ( )  ( ) 

6- Observe os três triângulos abaixo. Qual alternativa apresenta a nomenclatura correta?



a) I - Equilátero; II - Escaleno; III – Isósceles.

b) I - Escaleno; II - Equilátero; III – Isósceles.

c) I - Isósceles; II - Equilátero; III – Escaleno.

d) I - Equilátero; II - Isósceles; III – Escaleno.

e) I - Escaleno; II - Isósceles; III - Equilátero.

7- Observe a figura ao lado e complete as lacunas adequadamente.

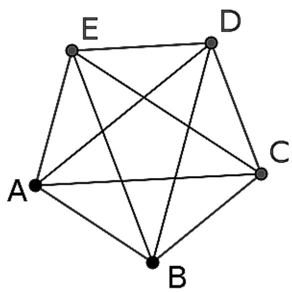
a) Os vértices dessa figura são A, ___, ___, ___ e E.

b) Os segmentos que formão seus lados são AB, ___, ___, DE e ___.

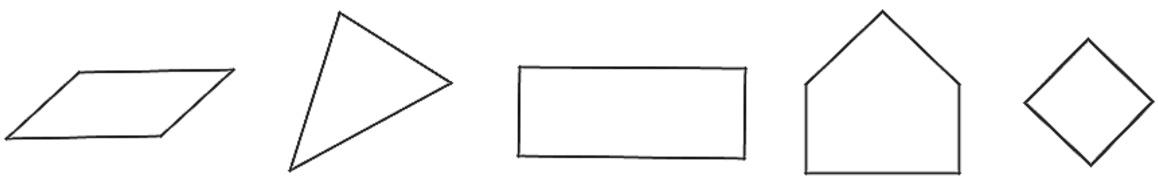
c) As diagonais dela são AC, ___, BD, ___ e ___.

d) De cada vértice saem ___ diagonais.

e) Esta figura é um polígono denominado _________________.



8- Dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas paralelogramos:



9- Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações referentes aos retângulos:

a) ( ) As diagonais se cruzam em seus pontos médios.

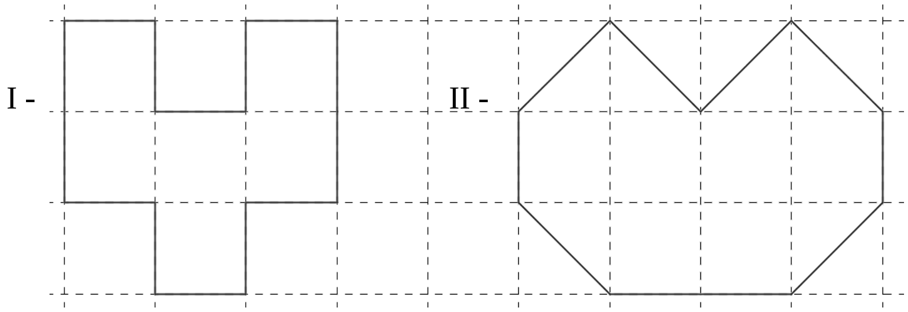
b) ( ) Lados opostos possuem mesma medida.

c) ( ) Os quatro ângulos internos são agudos.

d) ( ) Os quatro ângulos internos são retos.

e) ( ) Possui apenas um par de lados paralelos.

10- Temos representado na figura abaixo dois polígonos em uma folha quadriculada, onde cada quadrado tem lados medindo 1 cm. Qual das alternativas abaixo representa respectivamente o perímetro de I e a área de II?



a) I - Perímetro = 12 cm; II - Área = 9 cm².

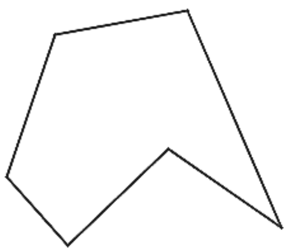
b) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 9 cm².

c) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 12 cm².

d) I - Perímetro = 6 cm; II - Área = 12 cm².

e) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 10 cm².

11- Sabendo que a soma dos ângulos internos do triangulo é 180° e que todo polígono pode ser dividido em triângulos, então a soma de todos os ângulos internos do polígono abaixo é:



a) 180°.

b) 360°.

c) 540°.

d) 720°.

e) 900°.

12- Referente aos quadriláteros, marque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações abaixo:

a) ( ) Todo losango tem quatro lados de mesma medida.

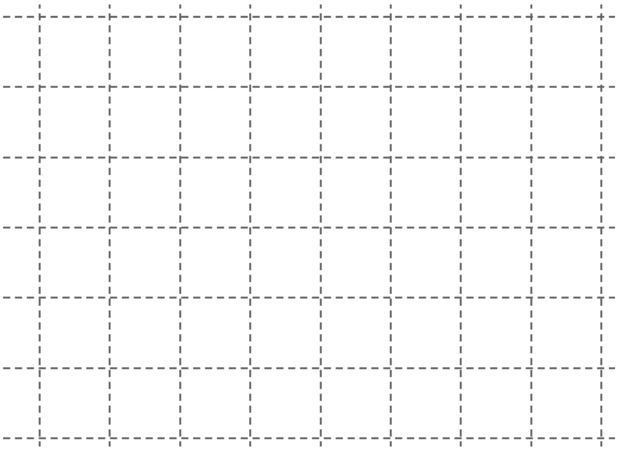
b) ( ) Existem paralelogramos com quatro ângulos retos.

c) ( ) Todo retângulo tem quatro lados de mesma medida.

d) ( ) O quadrado é o único paralelogramo com quatro ângulos retos.

e) ( ) Nenhum retângulo tem lados opostos com medidas diferentes.

13- Represente, no espaço em branco ou no espaço quadriculado, um polígono que pode ser dividido em apenas 3 triângulos, possui dois ângulos retos (90°) consecutivos e a medida de seus lados são todas iguais.



14- Em relação aos polígonos regulares e irregulares podemos afirmar que:

a) Todos os polígonos com todos os lados de mesma medida são regulares.

b) Há polígonos regulares não convexos.

c) Os polígonos com todos os lados de mesma medida e todos os ângulos de mesma medida são regulares.

d) Nenhum polígono regular é convexo.

e) Todos os polígonos com todos os ângulos de mesma medida são regulares.

15- Em relação aos polígonos convexos e não convexos podemos afirmar que: para quaisquer dois pontos distintos do interior do polígono, se o segmento que os une...

a) ...possui um ponto externo ao polígono, então este é convexo.

b) ...está todo interno ao polígono, então este é não convexo.

c) ...não tem pontos do polígono, então este é não convexo.

d) ...tem somente pontos do polígono, então este é não convexo.

e) ...não possui pontos externos ao polígono, então este é convexo.

5.2.1 PERFIL DOS ALUNOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

A partir da análise dos dados preenchidos pelos alunos na primeira parte do Instrumento de Pesquisa, conseguimos nos localizar com mais exatidão qual o perfil dos alunos que participaram dessa pesquisa. Em relação ao gênero, temos na Tabela 17 a distribuição de meninos e meninas em cada ano pesquisado.

Ano	Feninino	Masculino	Total
6º ano	33	26	59
7º ano	29	29	58
8º ano	29	32	61
9º ano	33	26	59

Tabela 17: Gênero dos alunos

Observando o gráfico na Figura 22 conseguimos verificar qual a faixa de idade dos 237 alunos que participaram desta pesquisa em seus respectivos anos de escolaridade. Podemos perceber que há pelo menos alunos com três idades diferentes em um mesmo ano. Além disso, podemos ver que tem alunos distantes do seu ano correto, como o caso de alguns alunos com 15 ou 16 anos estudando em turmas de alunos com idades de 13 ou 14 anos. A Tabela completa com o número de alunos por idade em cada ano encontra-se no Anexo C, página 115.

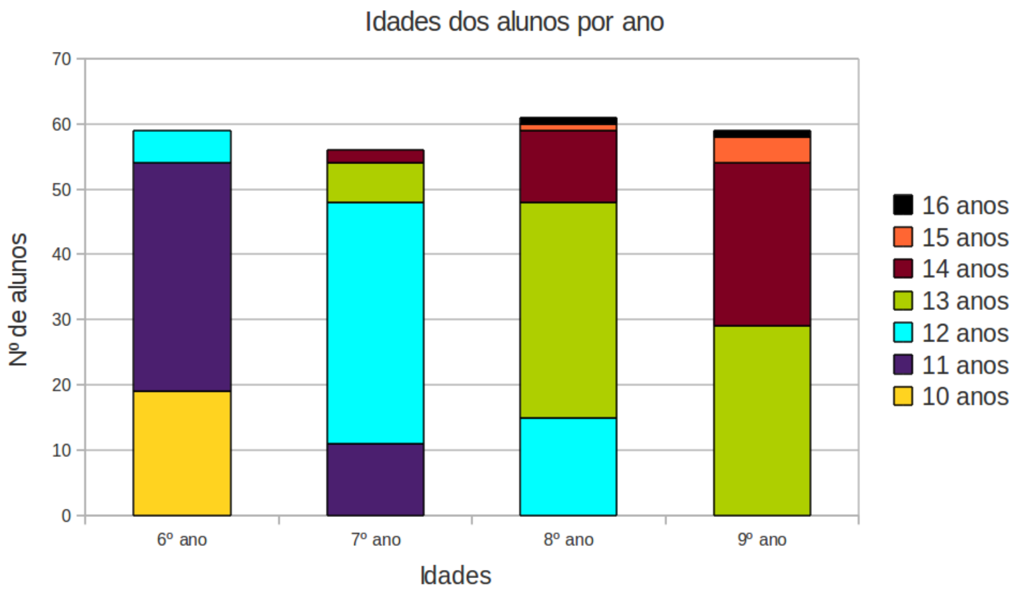


Figura 22: Idades dos alunos por ano

Pela Tabela 18 observamos que a maior parte dos estudantes pesquisados vieram de escola pública no 5º ano (84,4%). As escolas são diversas e uma tabela mais completa encontra-se no Anexo D, página 116.

Escola	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	%
Pública	56	51	45	48	84,4%
Particular	2	7	10	7	11,0%
Não informou	1	0	6	4	4,6%

Tabela 18: Ensino no 5º ano

Na Tabela 19 podemos verificar que a maioria dos alunos estudaram os anos anteriores no próprio COLÉGIO onde foi realizada a pesquisa.

Local de estudo no	6º ano	7º ano	8º ano	%
	alunos do 7º ano = 58			
COLÉGIO	52	-	-	89,7%
Outra Pública	2	-	-	3,4%
Particular	1	-	-	1,7%
Não informou	3	-	-	5,2%
	alunos do 8º ano = 61			
COLÉGIO	47	57	-	85,2%
Outra Pública	3	1	-	3,3%
Particular	7	1	-	6,6%
Não informou	4	2	-	4,9%
	alunos do 9º ano = 59			
COLÉGIO	32	42	46	67,8%
Outra Pública	17	11	9	20,9%
Particular	8	4	2	7,9%
Não informou	2	2	2	3,4%

Tabela 19: Ensino no 6º, 7º e 8º ano

Analisando as informações dos alunos percebemos que dos 59 alunos do 9º ano, 32 alunos estudaram o 6º, 7º e o 8º ano no COLÉGIO, outros 7 alunos estudaram o 7º e o 8º ano no COLÉGIO e 3 alunos estudaram somente o 8º ano no COLÉGIO, os demais estão no COLÉGIO apenas no 9º ano ou deixaram de responder algum item referente ao local de estudo nos anos anteriores.

5.2.2 QUESTÕES DO NÍVEL 0

As questões 1, 2, 4 e 5 foram pensadas seguindo a descrição da Seção 4.3.1, onde a ênfase está no que o aluno vê, por isso estas foram elaboradas com utilização de desenhos e analise simples desses.

Na primeira questão (Figura 23), o objetivo é verificar o conhecimento do aluno em relação aos polígonos, se sabem que esses são figuras fechadas formadas somente por segmentos de retas.

1- Dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas polígonos:

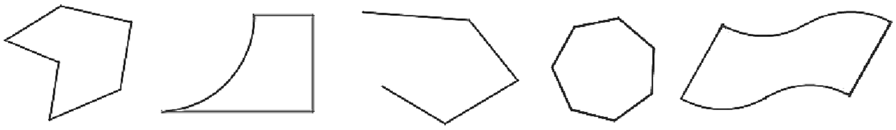


Figura 23: Questão 1

Nas respostas dadas à questão observa-se (Tabela 20) que a maioria dos alunos sabem identificar qual figura não representa um polígono ($> 88\%$) e o polígono mais circulado foi o regular ($82,3\%$), (provavelmente pelo fato desses serem mais frequentes nos livros didáticos que os irregulares ($51,3\%$)). Contudo, apenas um número muito pequeno de alunos acertaram a questão completa ($37,4\%$).

Circularam =>	sim	não	não	sim	não	Acertaram a questão completa
6º ano	27,1%	86,4%	76,3%	72,9%	81,4%	10,2%
7º ano	44,8%	86,2%	91,4%	79,3%	86,2%	31,0%
8º ano	72,1%	93,4%	96,7%	82,0%	95,1%	57,4%
9º ano	61,0%	93,2%	94,9%	94,9%	91,5%	50,8%
Geral	51,3%	89,8%	89,8%	82,3%	88,6%	37,4%

Tabela 20: Dados obtidos referente a Questão 1

Na Questão 2 (Figura 24) o objetivo é avaliar se os alunos conhecem o polígono triângulo e conseguem diferenciá-lo em um grupo de figuras.

2- Dentre as figuras abaixo circule os triângulos:

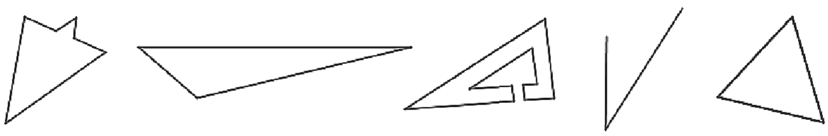


Figura 24: Questão 2

As respostas dadas pelos alunos (Tabela 21) continuam demostrando que a maioria dos alunos conseguem identificar qual não corresponde ao que está sendo solicitado ($> 77\%$) e demostram que a posição influencia na identificação da figura, visto que mais alunos identificaram o triangulo equilátero com o vértice para cima ($98,3\%$) do que os que circularam o com o vértice voltado para baixo ($71,7\%$).

Na Questão 4 (Figura 25), conhecendo o significado de hepta (sete), o objetivo é verificar o conhecimento dos alunos com a relação ao número de lados e o nome do polígono,

Circularam =>	não	sim	não	não	sim	Acertaram a questão completa
6º ano	66,1%	52,5%	79,7%	86,4%	94,9%	28,8%
7º ano	74,1%	81,0%	82,8%	93,1%	100%	48,3%
8º ano	77,0%	75,4%	95,1%	95,1%	98,4%	57,4%
9º ano	93,2%	78,0%	89,8%	98,3%	100%	69,5%
Geral	77,6%	71,7%	86,9%	93,2%	98,3%	51,0%

Tabela 21: Dados obtidos referente a Questão 2

verificando se eles conseguem compreender que o formato não é o único fator que diferencia um polígono do outro.

4- Sabendo que hepta significa sete, dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas heptágonos:

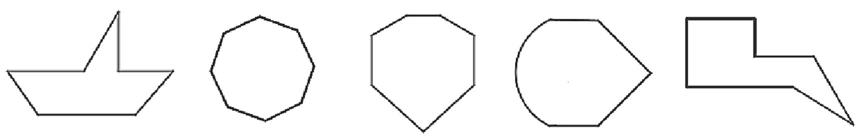


Figura 25: Questão 4

Como nas questões anteriores, percebemos (Tabela 22) uma maior facilidade em identificar quais figuras não eram respostas para o exercício ($> 80\%$), já ao identificarem as figuras resposta, a que se aproximava mais de um polígono regular foi a mais circulada ($81{,}8\%$). Como os alunos estão em um nível baseado na visualização eles não conseguem associar com facilidade o número de lados com a nomenclatura do polígono, mas sim com o formato em si.

Circularam =>	sim	não	sim	não	sim	Acertaram a questão completa
6º ano	55,9%	72,9%	79,7%	88,1%	42,4%	32,2%
7º ano	62,1%	79,3%	72,4%	91,4%	51,7%	29,3%
8º ano	77,0%	85,2%	86,9%	93,4%	75,4%	57,4%
9º ano	78,0%	83,1%	88,1%	94,9%	72,9%	57,6%
Geral	68,3%	80,1%	81,8%	92,0%	60,6%	44,1%

Tabela 22: Dados obtidos referente a Questão 4

A Questão 5 (Figura 26) tem por objetivo verificar qual é o aprofundamento dos alunos em relação a nomenclatura dos polígonos.

O desempenho nessa questão (Tabela 23) foi melhor que nas três anteriores, mesmo assim ainda demonstra o conhecimento incompleto do conteúdo avaliado. Ainda ocorre a mesma

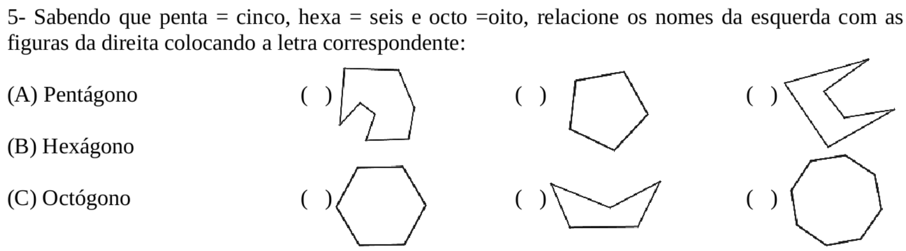


Figura 26: Questão 5

característica que vimos anteriormente, a maior facilidade em identificar a figura quando essa é regular ou o mais próximo de ser regular.

Respostas =>	C	A	B	B	A	C	Acertaram a questão completa
6º ano	59,3%	79,7%	67,8%	62,7%	66,1%	64,4%	47,5%
7º ano	82,8%	84,5%	84,5%	82,8%	81,0%	82,8%	70,7%
8º ano	82,0%	93,4%	85,2%	90,2%	88,5%	96,7%	72,1%
9º ano	86,4%	93,2%	89,8%	94,9%	94,9%	96,6%	83,1%
Geral	77,6%	87,7%	81,8%	82,7%	82,6%	85,1%	68,4%

Tabela 23: Dados obtidos referente a Questão 5

Com o objetivo de proporcionar ao leitor uma melhor visualização dos resultados em cada ano do EF-II, nas Figuras 27 e 28 vemos o número de alunos que acertaram quatro (A4), três (A3), duas (A2), uma (A1) ou nenhuma questão (A0). Lembramos que o Nível 0 compreende somente as questões 1, 2, 4 e 5, pois a questão 3 foi reclassificada ao Nível 1.

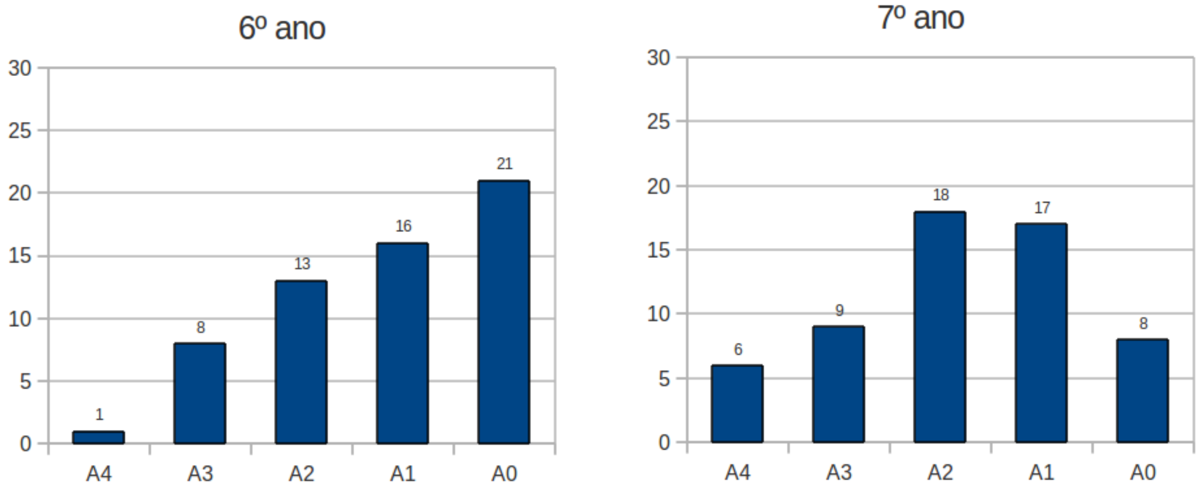


Figura 27: Número de alunos (6º e 7º ano) X Número de questões certas no Nível 0

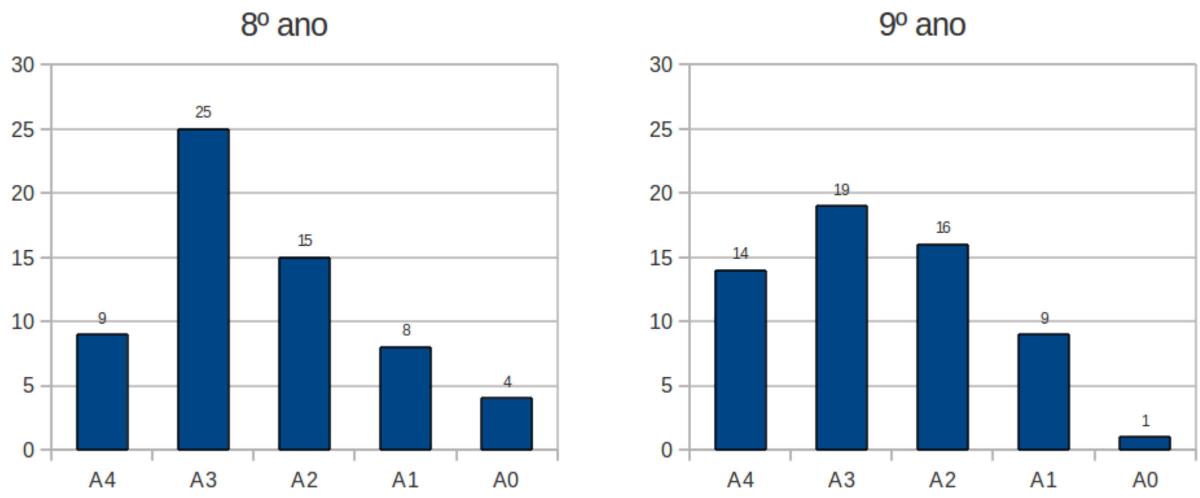


Figura 28: Número de alunos (8º e 9º ano) X Número de questões certas no Nível 0

As questões colocadas no Nível 0 contemplam os conteúdos que são abordados nos livros didáticos do 1º ao 5º ano, conforme foi descrito no início do Capítulo 5. Todos os alunos participantes poderiam ter alcançado esse nível com facilidade, mas na Tabela 24 podemos perceber que o número de alunos que estão "em processo" de atingir o nível ou que aparentemente já o "atingiram" ainda é muito inferior ao desejado.

Número de resp. => certas	A4	A3	A2	A1	A0	Em Processo (A2)	Atingiram o Nível 0 (A3 ou A4)
6º ano (59)	1,7%	13,6%	22,0%	27,1%	35,6%	13 alunos	9 alunos
7º ano (58)	10,3%	15,5%	31,0%	29,3%	13,8%	18 alunos	15 alunos
8º ano (61)	14,8%	41,0%	24,6%	13,1%	6,6%	15 alunos	34 alunos
9º ano (59)	23,7%	32,2%	27,1%	15,3%	1,7%	16 alunos	33 alunos
Geral (237)	12,6%	25,6%	26,2%	21,2%	14,4%	62 alunos	91 alunos

Tabela 24: Situação dos alunos em relação ao Nível 0

5.2.3 QUESTÕES DO NÍVEL 1

As questões 3, 6, 7, 8, 9 e 10 foram pensadas seguindo a descrição da Seção 4.3.2, onde a ênfase está nas propriedades e características das figuras.

A Questão 3 (Figura 29) foi elaborada a fim de verificar se o aluno conhece a propriedade de polígonos convexos e não convexos apenas analisando a representação desses.

Ao analisarmos os resultados dessa questão (Tabela 25) ficamos surpresos ao nos deparar com a quantidade baixa de alunos que circularam o triângulo como polígono convexo $(10,1\%)$(provavelmente pelo fato de não ser apresentado como exemplo de Polígono convexo).

Esse não reconhecimento levou a um baixo número de acertos na questão $(1,7\%)$, inclusive no 8º ano o acerto foi nulo.

3- Dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas polígonos convexos:

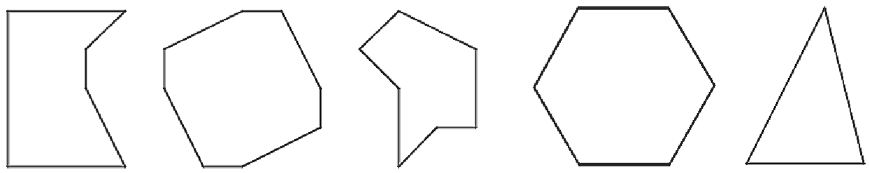


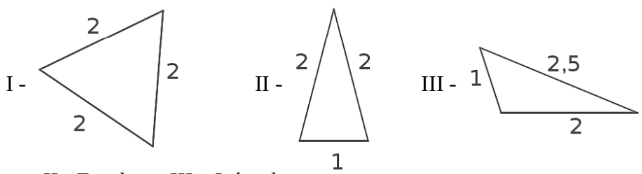
Figura 29: Questão 3

Circularam =>	não	sim	não	sim	sim	Acertaram a questão completa
6º ano	78,0%	57,6%	74,6%	52,5%	5,1%	1,7%
7º ano	70,7%	41,4%	65,5%	60,3%	10,3%	1,7%
8º ano	54,1%	49,2%	42,6%	32,8%	8,2%	0,0%
9º ano	74,6%	50,8%	72,9%	62,7%	16,9%	3,4%
Geral	69,4%	49,8%	63,9%	52,1%	10,1%	1,7%

Tabela 25: Dados obtidos referente a Questão 3

Na Questão 6 (Figura 30) o objetivo é perceber se os alunos sabem diferenciar os três tipos de triângulos, visto que esse assunto é básico quando se trata de propriedades de polígonos.

6- Observe os três triângulos abaixo. Qual alternativa apresenta a nomenclatura correta?



a) I - Equilátero; II - Escaleno; III – Isósceles.

b) I - Escaleno; II - Equilátero; III – Isósceles.

c) I - Isósceles; II - Equilátero; III – Escaleno.

d) I - Equilátero; II - Isósceles; III – Escaleno.

e) I - Escaleno; II - Isósceles; III - Equilátero.

Figura 30: Questão 6

Esta questão teve um acerto baixo $(32,1\%)$, sendo que os alunos aparentemente confundiram as características dos 3 tipos de triângulos (Tabela 26). Além disso tivemos alguns alunos que deixaram esta questão sem resposta $(7,2\%)$.

Respostas =>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	sem resp.	Acertaram (d)
6º ano	11,9%	25,4%	16,9%	27,1%	8,5%	10,2%	27,1%
7º ano	15,5%	12,1%	31,0%	29,3%	5,2%	6,9%	29,3%
8º ano	23,0%	14,8%	23,0%	31,1%	1,6%	6,6%	31,1%
9º ano	18,6%	16,9%	11,9%	40,7%	6,8%	5,1%	40,7%
Geral	17,3%	17,3%	20,7%	32,1%	5,5%	7,2%	32,1%

Tabela 26: Dados obtidos referente a Questão 6

O objetivo da Questão 7 (Figura 31) é verificar se os alunos reconhecem os elementos que formam os polígonos e além disso se conseguem utilizar a forma correta de citar o nome do polígono representado.

7- Observe a figura ao lado e complete as lacunas adequadamente.

a) Os vértices dessa figura são A, ___, ___, ___ e E.

b) Os segmentos que formão seus lados são AB, ___, ___, DE e ___.

c) As diagonais dela são AC, ___, BD, ___ e ___.

d) De cada vértice saem ___ diagonais.

e) Esta figura é um polígono denominado _________________.

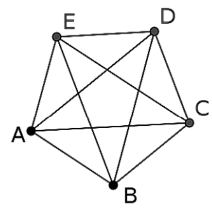


Figura 31: Questão 7

Na Tabela 26 percebemos que ao citarem os vértices a maioria dos alunos respondeu corretamente ($> 94\%$). Em relação a identificação dos lados e diagonais os acertos diminuíram, mas ainda podemos considerar aceitável ($> 67\%$). Já em relação ao número de diagonais que saem de cada vértice a maior parte dos alunos se confundiu resultando em um aproveitamento baixo nesse item ($38,5\%$), não tão baixo quanto o item da nomenclatura do polígono ($26,9\%$). A questão respondida corretamente teve um número muito aquém do esperado ($8,0\%$), principalmente nos anos mais elevados.

Respostas a-b =>	B	C	D	BC	CD	EF
6º ano	93,2%	94,9%	96,6%	49,2%	49,2%	40,7%
7º ano	94,8%	94,8%	93,1%	77,6%	79,3%	74,1%
8º ano	93,4%	93,4%	93,4%	72,1%	77,0%	70,5%
9º ano	94,9%	96,6%	96,6%	81,4%	86,4%	83,1%
Geral	94,1%	94,9%	94,9%	70,1%	73,0%	67,1%

Respostas c-d-e =>	AD	BE	CE	2	Pentágono	Acertaram a questão completa
6º ano	54,2%	49,2%	55,9%	18,6%	13,6%	3,4%
7º ano	72,4%	87,5%	75,9%	37,9%	22,4%	5,2%
8º ano	78,7%	78,7%	73,8%	29,5%	37,7%	9,8%
9º ano	81,4%	79,7%	84,7%	67,8%	33,9%	13,6%
Geral	71,7%	73,8%	72,6%	38,5%	26,9%	8,0%

Tabela 27: Dados obtidos referente a Questão 7

A Questão 8 evidencia uma subdivisão dos quadriláteros, onde podemos verificar que as propriedades em paralelogramos estão presentes nos retângulos, losangos e quadrados. Com isso estávamos investigando se os alunos percebiam que esses também eram paralelogramos, fugindo da interpretação do objeto pelo que ele parece, mas pelas suas propriedades.

8- Dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas paralelogramos:

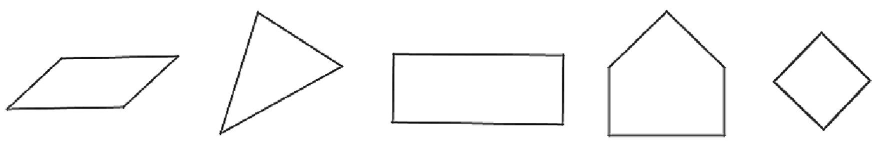


Figura 32: Questão 8

Nesta questão os alunos conseguiram identificar com certa facilidade quais figuras não poderiam ser considerados paralelogramos (> 79%), mas ainda mostram que estão vinculados ao formato quando a maior parte circulou o paralelogramo ($73,0\%$) que geralmente é utilizado para exemplificar esse grupo de figuras, onde notamos que o retângulo ($48,2\%$) e o losango ($40,0\%$) foram indicados por um número menor de alunos. No geral o desempenho dos alunos nessa questão foi baixo ($16,9\%$ de acertos).

Circularam =>	sim	não	sim	não	sim	Acertaram a questão completa
6º ano	66,1%	91,5%	42,4%	76,3%	32,2%	13,6%
7º ano	69,0%	89,7%	53,4%	84,5%	32,8%	17,2%
8º ano	78,7%	85,2%	41,0%	75,4%	52,5%	21,3%
9º ano	78,0%	89,8%	55,9%	81,4%	42,4%	15,3%
Geral	73,0%	89,1%	48,2%	79,4%	40,0%	16,9%

Tabela 28: Dados obtidos referente a Questão 8

Na Questão 9 (Figura 33) estávamos analisando o conhecimento dos alunos em relação as propriedades de diagonais e lados nos retângulos, verificando ainda se esses conseguem diferenciar detalhes nessa figura.

9- Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações referentes aos retângulos:

a) ( ) As diagonais se cruzam em seus pontos médios.

b) ( ) Lados opostos possuem mesma medida.

c) ( ) Os quatro ângulos internos são agudos.

d) ( ) Os quatro ângulos internos são retos.

e) ( ) Possui apenas um par de lados paralelos.

Figura 33: Questão 9

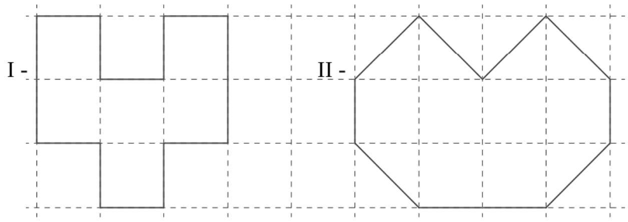
Em cada item podemos perceber que cerca da metade dos alunos conseguiu responder corretamente (Tabela 29), mas ao vermos a questão como um todo, percebemos que o acerto foi muito baixo ($12,7\%$).

Respostas =>	V	V	F	V	F	Acertaram a questão completa
6º ano	49,2%	57,6%	49,2%	61,0%	55,9%	13,6%
7º ano	50,0%	63,8%	65,5%	67,2%	46,6%	8,6%
8º ano	52,5%	63,9%	67,2%	72,1%	44,6%	9,8%
9º ano	64,4%	76,3%	72,9%	67,8%	52,5%	18,6%
Geral	54,0%	65,4%	63,7%	67,0%	49,9%	12,7%

Tabela 29: Dados obtidos referente a Questão 9

O objetivo da Questão 10 (Figura 34) é perceber qual o conhecimento que os alunos tem dos conceitos de área e perímetro de polígonos quaisquer, utilizando a malha quadriculada, sem a necessidade de ter um conhecimento aprofundado e teórico dos conceitos.

10- Temos representado na figura abaixo dois polígonos em uma folha quadriculada, onde cada quadrado tem lados medindo 1 cm. Qual das alternativas abaixo representa respectivamente o perímetro de I e a área de II?



a) I - Perímetro = 12 cm; II - Área = 9 cm².

b) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 9 cm².

c) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 12 cm².

d) I - Perímetro = 6 cm; II - Área = 12 cm².

e) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 10 cm².

Figura 34: Questão 10

A alternativa com o maior número de indicações foi a que contém a área da primeira figura, não o perímetro ($22,5\%$). Mesmo a resposta certa sendo a segunda colocada em indicações ($21,1\%$) temos um número expressivo de alunos com a aprendizagem incompleta nesses conceitos (Tabela 30).

Respostas =>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	sem resp.	Acertaram (b)
6º ano	16,9%	20,3%	15,3%	32,2%	6,8%	8,5%	20,3%
7º ano	17,2%	25,9%	17,2%	19,0%	13,8%	6,9%	25,9%
8º ano	13,1%	18,0%	23,0%	6,6%	36,1%	3,3%	18,0%
9º ano	8,5%	20,3%	11,9%	32,2%	23,7%	3,4%	20,3%
Geral	13,9%	21,1%	16,9%	22,5%	20,1%	5,5%	21,1%

Tabela 30: Dados obtidos referente a Questão 10

Na Figura 35 os gráficos mostram a quantidade de alunos que acertaram seis (A6), cinco (A5), quatro (A4), três (A3), duas (A2), uma (A1) ou nenhuma questão (A0) no nível, em cada ano do EF-II. Lembramos que o Nível 1 compreende as questões 3, 6, 7, 8, 9 e 10.

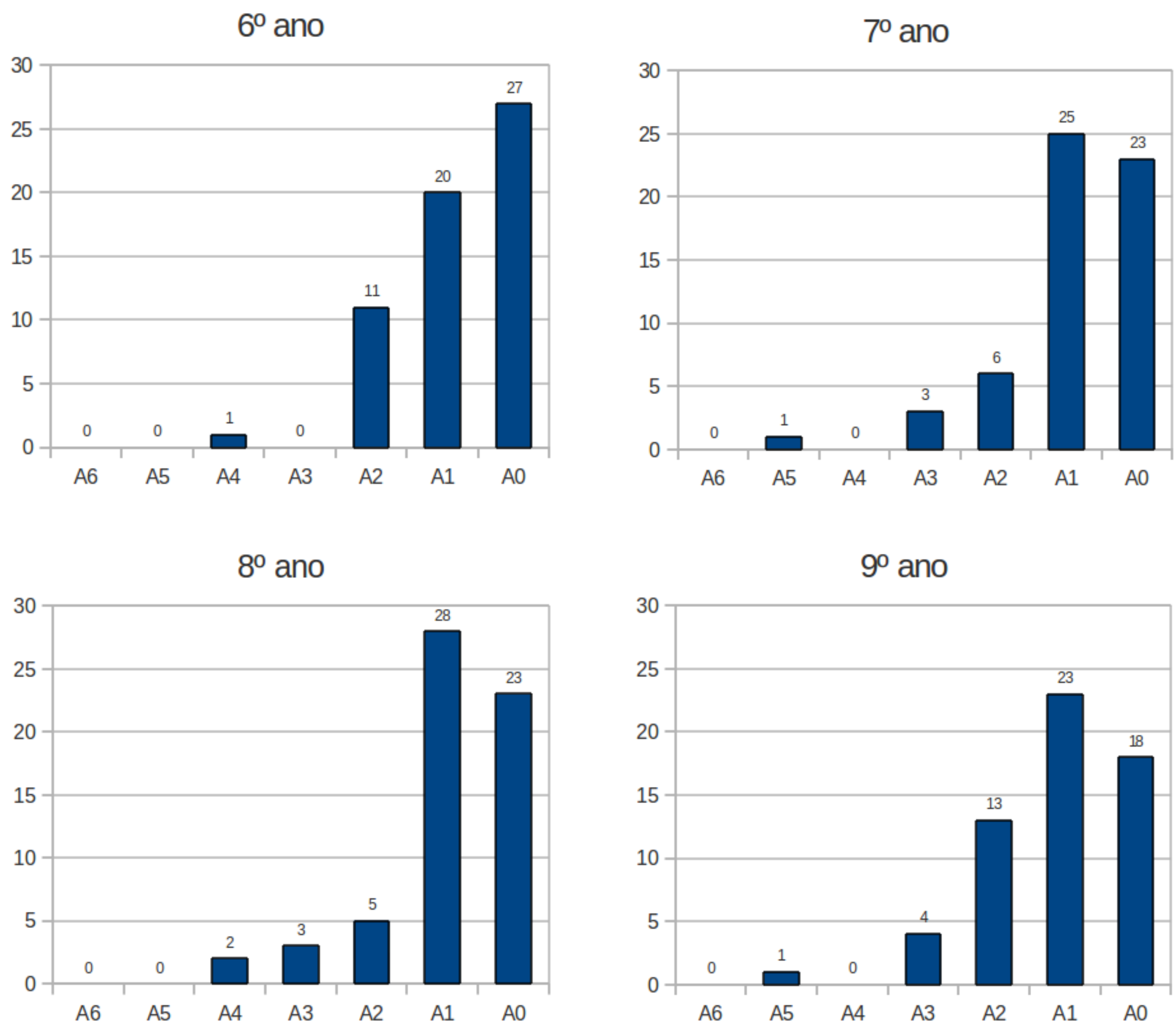


Figura 35: Número de alunos de cada ano X Número de questões certas no Nível 1

Na Tabela 31 podemos perceber que o número de alunos que estão "em processo" de atingir o nível ou que aparentemente já o "atingiram" é muito baixo. O nível anterior está em uma situação difícil, este se tornou um caso crítico, que mereceria um estudo mais detalhado. (Não tivemos alunos com seis acertos, por isso a coluna A6 foi omitida na tabela).

Número de resp. => certas	A5	A4	A3	A2	A1	A0	Em Processo (A3)	Atingiram o Nível 1 (A4, A5 ou A6)
6º ano (59)	0,0%	1,7%	0,0%	18,6%	33,9%	45,8%	0 alunos	1 aluno
7º ano (58)	1,7%	0,0%	5,2%	10,3%	43,1%	39,7%	3 alunos	1 aluno
8º ano (61)	0,0%	3,3%	4,9%	8,2%	44,3%	39,3%	3 alunos	2 alunos
9º ano (59)	1,7%	0,0%	6,8%	22,0%	39,0%	30,5%	4 alunos	1 aluno
Geral (237)	0,9%	1,2%	4,2%	14,8%	40,1%	38,8%	10 alunos	5 alunos

Tabela 31: Situação dos alunos em relação ao Nível 1

5.2.4 QUESTÕES DO NÍVEL 2

As questões 11, 12, 13, 14 e 15 foram pensadas seguindo a descrição da Seção 4.3.3, onde a ênfase está nas propriedades e características menos visuais das figuras.

Na Questão 11 (Figura 36) temos por objetivo identificar se os alunos compreendiam o significado de soma dos ângulos internos de um polígono e como esse é calculado, onde o conceito mínimo havia sido citado (soma dos ângulos internos de triângulo).

11- Sabendo que a soma dos ângulos internos do triangulo é 180° e que todo polígono pode ser dividido em triângulos, então a soma de todos os ângulos internos do polígono abaixo é:

a) 180°.

b) 360°.

c) 540°.

d) 720°.

e) 900°.

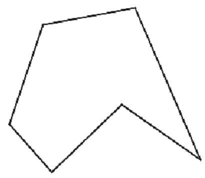


Figura 36: Questão 11

Nessa questão os alunos demonstraram não ter conhecimento do conteúdo avaliado (Tabela 32), pois a maior parte não conseguiu indicar a alternativa correta (81,9%), sendo que o maior número de respostas foi dado a outra alternativa (30,4%).

Respostas =>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	sem resp.	Acertaram (d)
6º ano	8,5%	40,7%	18,6%	16,9%	5,1%	10,2%	16,9%
7º ano	17,2%	27,6%	25,9%	13,8%	6,9%	8,6%	13,8%
8º ano	9,8%	27,9%	23,0%	18,0%	18,0%	3,3%	18,0%
9º ano	11,9%	25,4%	23,7%	23,7%	15,3%	0,0%	23,7%
Geral	11,9%	30,4%	22,8%	18,1%	11,3%	5,5%	18,1%

Tabela 32: Dados obtidos referente a Questão 11

A Questão 12 foi elaborada a fim de verificar se os alunos tem familiaridade com as propriedades citadas, além de investigar se eles conseguem entender o significado dos termos nenhum, existe, todo e único.

12- Referente aos quadriláteros, marque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações abaixo:

a) ( ) Todo losango tem quatro lados de mesma medida.

b) ( ) Existem paralelogramos com quatro ângulos retos.

c) ( ) Todo retângulo tem quatro lados de mesma medida.

d) ( ) O quadrado é o único paralelogramo com quatro ângulos retos.

e) ( ) Nenhum retângulo tem lados opostos com medidas diferentes.

Figura 37: Questão 12

Nos itens em separado os alunos tiveram um bom número de acertos ($> 41\%$), já na questão inteira poucos conseguiram resolvê-la corretamente ($9,8\%$) como vemos na Tabela 33.

Respostas =>	V	V	F	F	V	Acertaram a questão completa
6º ano	49,2%	55,9%	69,5%	25,4%	40,7%	5,1%
7º ano	55,2%	58,6%	75,9%	34,5%	43,1%	13,8%
8º ano	57,4%	67,2%	70,5%	52,5%	47,5%	6,6%
9º ano	47,5%	76,3%	88,1%	52,5%	49,2%	13,6%
Geral	52,3%	64,5%	76,0%	41,2%	45,1%	9,8%

Tabela 33: Dados obtidos referente a Questão 12

A descrição dada na Questão 13 (Figura 38), tem por objetivo verificar se os alunos conseguiriam representar a figura utilizando apenas uma descrição abstrata do que se solicitava. A malha quadriculada foi colocada como alternativa para facilitar a representação, já que a maioria dos alunos não dispunham de régua.

13- Represente, no espaço em branco ou no espaço quadriculado, um polígono que pode ser dividido em apenas 3 triângulos, possui dois ângulos retos (90°) consecutivos e a medida de seus lados são todas iguais.

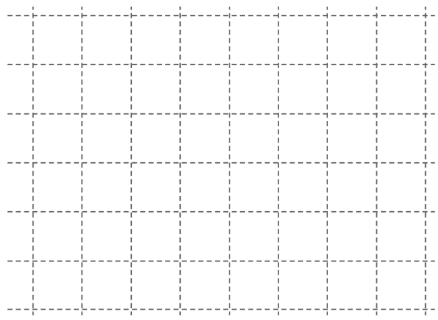


Figura 38: Questão 13

Nesta questão foram analisadas as seguintes características:

I - Polígono que pode ser dividido em apenas 3 triângulos (Pentágono).

II - Possui dois ângulos retos (90°) consecutivos.

III - A medida de seus lados são todas iguais (aproximado, não usaram régua).

As consideradas corretas se assemelhavam a uma das representações contidas na Figura 39 (aceitas rotações e escalas diferentes dessas figuras).

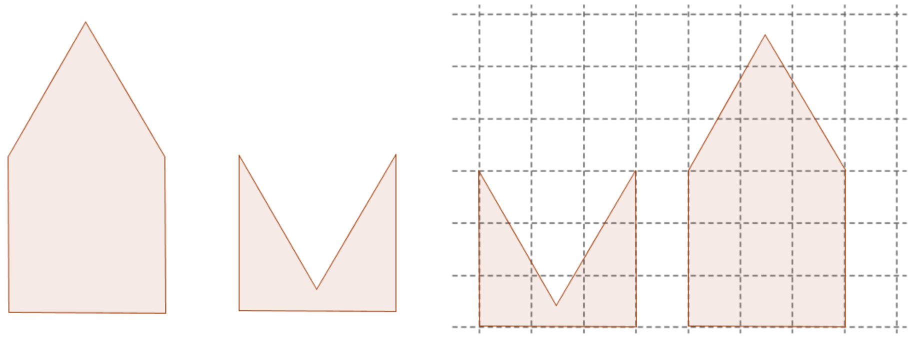


Figura 39: Resposta da Questão 13

Na Tabela 34, temos que uma parte pequena do 9º ano conseguiu representar a figura solicitada, já dos outros anos fizeram corretamente somente algumas das características descritas.

Características =>	I	II	III	Em branco	Acertaram a questão completa
6º ano	5,1%	23,4%	0,0%	16,9%	0,0%
7º ano	12,1%	24,1%	0,0%	25,9%	0,0%
8º ano	21,3%	34,4%	0,0%	16,4%	0,0%
9º ano	18,6%	39,0%	8,5%	18,6%	8,5%
Geral	14,3%	30,3%	2,1%	19,5%	2,1%

Tabela 34: Dados obtidos referente a Questão 13

Na Questão 14 (Figura 40) o objetivo é investigar se o significado dos termos nenhum, há (existe) e todo são reconhecidos e dominados pelos alunos que participaram da pesquisa.

14- Em relação aos polígonos regulares e irregulares podemos afirmar que:

a) Todos os polígonos com todos os lados de mesma medida são regulares.

b) Há polígonos regulares não convexos.

c) Os polígonos com todos os lados de mesma medida e todos os ângulos de mesma medida são regulares.

d) Nenhum polígono regular é convexo.

e) Todos os polígonos com todos os ângulos de mesma medida são regulares.

Figura 40: Questão 14

A maioria dos alunos demonstraram saber que os Polígonos regulares são convexos (Tabela 35), mesmo o número de acertos ser baixo ($32,9\%$) foi a questão melhor respondida no Nível 2.

Respostas =>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	sem resp.	Acertaram (c)
6º ano	20,3%	25,4%	23,7%	6,8%	16,9%	6,8%	23,7%
7º ano	19,0%	15,5%	29,3%	8,6%	15,5%	12,1%	29,3%
8º ano	27,9%	4,9%	32,8%	4,9%	18,0%	11,5%	32,8%
9º ano	16,9%	8,5%	45,8%	3,4%	22,0%	3,4%	45,8%
Geral	21,0%	13,6%	32,9%	5,9%	18,1%	8,5%	32,9%

Tabela 35: Dados obtidos referente a Questão 14

Na última questão (Figura 41) abordamos o conceito de convexo e não convexo a fim de verificar se os alunos têm entendimento da diferença do ponto ser externo, interno ou pertencer ao polígono dado.

15- Em relação aos polígonos convexos e não convexos podemos afirmar que: para quaisquer dois pontos distintos do interior do polígono, se o segmento que os une...

a) ...possui um ponto externo ao polígono, então este é convexo.

b) ...está todo interno ao polígono, então este é não convexo.

c) ...não tem pontos do polígono, então este é não convexo.

d) ...tem somente pontos do polígono, então este é não convexo.

e) ...não possui pontos externos ao polígono, então este é convexo.

Figura 41: Questão 15

Nesta questão podemos perceber que os alunos responderam de forma aleatória (Tabela 36), visto que as cinco alternativas foram marcadas em quantidades semelhantes.

Respostas =>	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	sem resp.	Acertaram (e)
6º ano	25,4%	27,1%	16,9%	13,6%	8,5%	8,5%	8,5%
7º ano	19,0%	5,2%	29,3%	17,2%	22,4%	6,9%	22,4%
8º ano	18,0%	18,0%	23,0%	16,4%	16,4%	8,2%	16,4%
9º ano	30,5%	16,9%	15,3%	16,9%	20,3%	0,0%	20,3%
Geral	23,2%	16,8%	21,1%	16,0%	16,9%	5,9%	16,9%

Tabela 36: Dados obtidos referente a Questão 15

Na Figura 42 os gráficos mostram a quantidade de alunos que acertaram cinco (A5), quatro (A4), três (A3), duas (A2), uma (A1) ou nenhuma questão (A0) no nível, em cada ano do EF-II. O Nível 2 compreende as questões 11, 12, 13, 14 e 15.

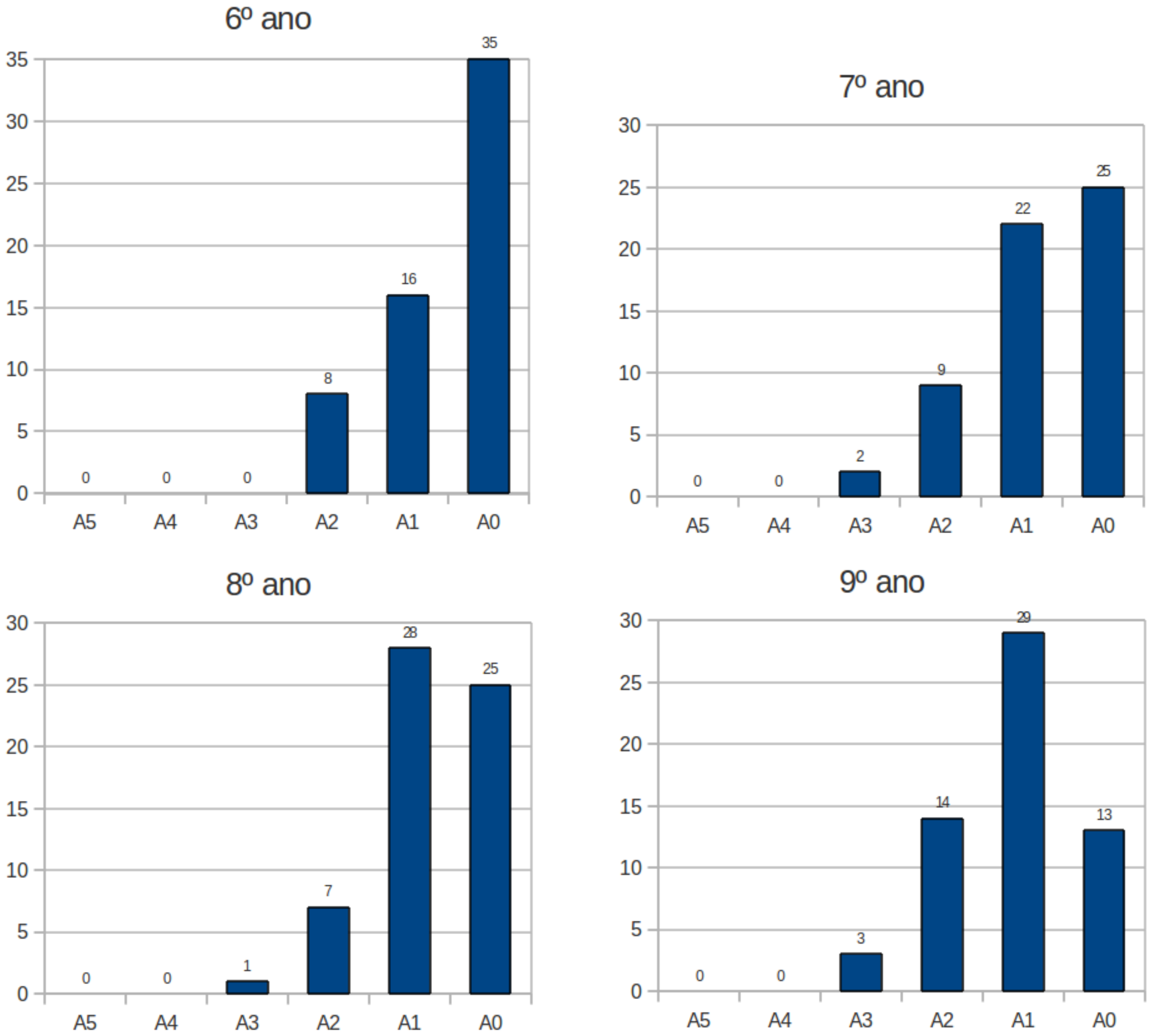


Figura 42: Número de alunos de cada ano X Número de questões certas no Nível 2

Nesse nível percebemos que nenhum aluno o atingiu e apenas 6 alunos estão "em processo" de atingí-lo (Tabela 37).

Número de resp. => certas	A5	A4	A3	A2	A1	A0	Em Processo (A3)	Atingiram o Nível 2 (A4 ou A5)
6º ano (59)	0%	0%	0,0%	13,6%	27,1%	59,3%	0 alunos	0 alunos
7º ano (58)	0%	0%	3,4%	15,5%	37,9%	43,1%	2 alunos	0 alunos
8º ano (61)	0%	0%	1,6%	11,5%	45,9%	41,0%	1 alunos	0 alunos
9º ano (59)	0%	0%	5,1%	22,0%	50,8%	22,0%	3 alunos	0 alunos
Geral (237)	0%	0%	2,5%	15,6%	40,4%	41,4%	6 alunos	0 alunos

Tabela 37: Situação dos alunos em relação ao Nível 2

5.3 ANÁLISE GERAL DOS DADOS

Observando o gráfico da Figura 43, percebemos que apenas um aluno acertou 11 questões no Instrumento de Pesquisa (maior número de questões certas). Esse aluno estudou em outras escolas públicas no 5º e 6º ano, iniciou no COLÉGIO no 7º ano e se encontra no ano adequado à sua idade (9º ano, 14 anos). Ele errou somente as Questões 3, 13, 14 e 15, demonstrando ter atingido o Nível 0 e o Nível 1, dos Níveis de van Hiele, no conteúdo de Polígonos.

As três alunas que tiveram êxito em 10 das 15 Questões Investigativas estudaram desde o 5º ano em escola pública e estão cursando o ano adequado às suas idades. Uma dessas alunas (7º ano, 12 anos) estudou o 6º ano no COLÉGIO e demonstra ter atingido o Nível 0 e o Nível 1. As outras duas (8º ano, 12 anos; 9º ano, 13 anos) frequentam o COLÉGIO há dois anos e atingiram somente o Nível 0 e estão "em processo" de atingir o Nível 1 e o Nível 2. Podemos dizer que, após uma entrevista individual com cada uma dessas duas alunas é possível precisar se já atingiram o Nível 1, pois ao demonstrarem uma base de conhecimento no Nível 2 é bem provável que já o tenha atingido, visto que no Modelo van Hiele o aluno completa um nível inferior para depois conseguir assimilar os conceitos do próximo nível.

Foram três alunos que acertaram nove questões. Dentre eles temos uma aluna com o maior número de acertos entre seus colegas do 6º ano. Ela tem apenas 10 anos, fez o 5º ano em escola pública e atingiu tanto o Nível 0 quanto o Nível 1. A outra aluna (8º ano, 12 anos) estudou em escola pública no 5º ano e está no COLÉGIO desde o 6º ano e também atingiu o Nível 0 e o Nível 1. O último aluno (9º ano, 13 anos) atingiu somente o Nível 0 e está "Em processo" de alcançar o Nível 1, ele estudou o 5º e 6º ano em escola particular e está no COLÉGIO desde o 7º ano.

Dos quatro alunos que acertaram 8 questões, uma aluna (7º ano, 12 anos) atingiu somente o Nível 0, ela estudou em escola pública no 5º ano e estudou no COLÉGIO o 6º ano. Outras duas alunas (7º ano, 12 anos; 8º ano, 12 anos) atingiram somente o Nível 0 e estão "em processo" de alcançar o Nível 1, ambas estão no COLÉGIO desde o 6º ano, mas a aluna do 8º ano fez o 5º ano em escola particular. O último aluno (9º ano, 13 anos) estudou o 5º ano em escola pública e está no COLÉGIO desde o 6º ano, mesmo errando todas as questões referentes ao Nível 2 ele atingiu o Nível 0 e o Nível 1.

Nenhum dos alunos participantes atingiu os três primeiros Níveis de van Hiele. No total tivemos apenas cinco alunos que atingiram tanto o Nível 0 quanto o Nível 1 (um do 6º ano, um do 7º ano, dois do 8º ano e um do 9º ano), todos de escola pública a partir do 5º ano. Os que

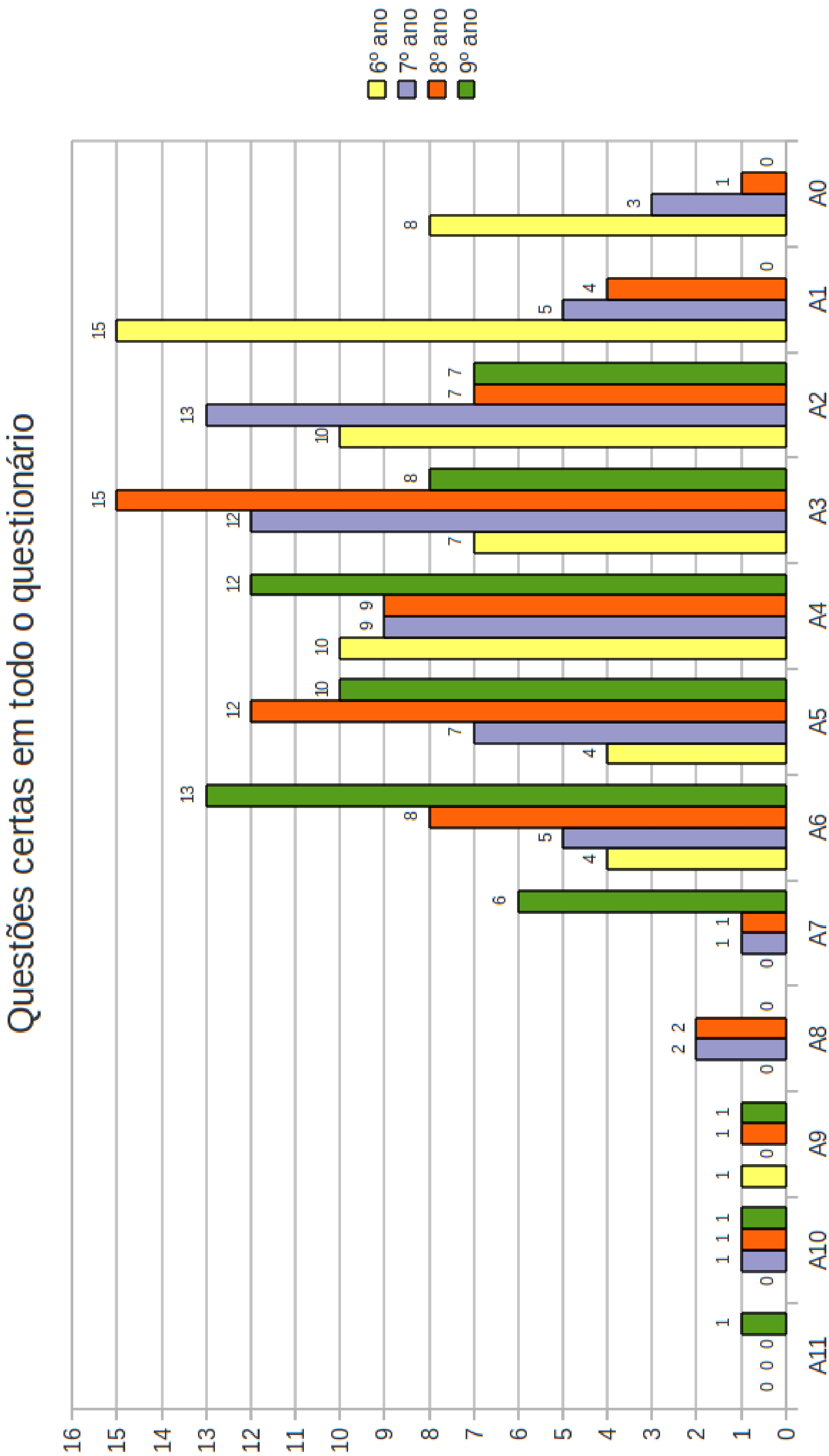


Figura 43: Número de alunos em cada ano X Número de questão certas no total

atingiram o Nível 0 e estão “em processo” em outro nível são 11 alunos (três do 7º ano, três do 8º ano e cinco do 9º ano), dentre esses temos três alunos que mereceriam uma atenção maior, pois estão “Em processo” no Nível 2 sem ao menos estar “Em processo” no Nível 1.

Dos 237 alunos participantes tivemos 75 que atingiram somente o Nível 0 não estando “Em processo” em nenhum outro nível. Sendo que cinco desses, acertaram somente três questões entre todas as Questões investigativas, somente nesse nível, o suficiente para serem classificados no grupo dos que atingiram o Nível 0. Outros 38 alunos acertaram somente uma ou duas questões a mais que as três necessárias no nível para atingí-lo.

Dois alunos estão “Em processo” de atingir tanto o Nível 0 quanto o Nível 1 (menino, 7º ano, 12 anos; menina, 9º ano, 13 anos). Eles não acertaram nenhuma questão além do necessário para estarem nessa classificação, ou seja, acertaram duas questões no Nível 0 e três questões no Nível 1.

São 60 alunos que estão “Em processo” somente no Nível 0. Sendo que 16 alunos acertaram somente duas questões nesse nível, o suficiente para estarem “Em processo” de atingirem o Nível 0 (quatro do 6º ano, quatro do 7º ano, cinco do 8º ano e três do 9º ano). Outros 36 alunos acertaram somente uma ou duas questões a mais que as duas necessárias para estarem “Em processo” no nível (seis do 6º ano, dez do 7º ano, dez do 8º ano e dez do 9º ano).

O caso mais curioso foi um aluno do 7º ano (12 anos, estudou 5º ano em escola pública e 6º ano no COLÉGIO) que errou todas as questões do Nível 0, acertou 2 questões no Nível 1 e 3 questões no Nível 2. Com esse número de acertos no último nível ele encontra-se “Em processo” de atingí-lo, sem ter demonstrado conhecimento suficiente nos níveis anteriores. Esse caso seria digno de ser explorado através de reaplicação do Instrumento de Pesquisa, aliado a uma entrevista individual durante e após a resolução das questões.

Por outro lado, podemos observar um número expressivo de alunos que não estão “em processo” de atingir algum dos Níveis de van Hiele, são 83 alunos que apresentam uma notável falha na aprendizagem do conteúdo de Polígonos. Desses, uma aluna acertou cinco questões aleatórias dentre as 15 propostas (menina, 9º ano, 14 anos). Com quatro acertos aleatórios foram cinco alunos (dois do 6º ano, dois do 7º ano e um do 9º ano) e vinte alunos com três acertos aleatórios (seis do 6º ano, cinco do 7º ano, cinco do 8º ano e quatro do 9º ano). Outros 21 alunos acertaram duas questões diversas (seis do 6º ano, nove do 7º ano, dois do 8º ano e quatro do 9º ano) e 25 alunos acertaram somente uma das Questões investigativas aleatoriamente (dezesseis do 6º ano, cinco do 7º ano e quatro do 8º ano), mostrando que esta pode ser sido acertada por acaso. Por último, desses 83 alunos tivemos 11 que não responderam corretamente a nenhuma das 15 questões propostas (sete do 6º ano, três do 7º ano e um do 8º ano).

5.3.1 O DESEMPENHO DOS ALUNOS DO 9º ANO

Como percebemos uma constante de 32 alunos do 9º ano que estudaram desde o 6º ano no COLÉGIO fizemos uma comparação do desempenho desses alunos com os que estudaram pelo menos um ano (do 6º ao 8º ano) em outra escola qualquer (27 alunos). Esse segundo grupo denominamos de MISTO devido a variedade de escolas de onde vieram.

Na Figura 44 o gráfico mostra a comparação entre os dois grupos em cada um dos Níveis de van Hiele. Podemos perceber que os alunos do grupo MISTO tiveram uma maior dificuldade no Nível 0 em relação aos alunos do COLÉGIO tanto na classificação “Em processo”, quanto no “Atingiu”. No Nível 1 podemos perceber que a situação ficou invertida, onde tivemos $3,7\%$ dos alunos do grupo MISTO que atingiram o nível e do COLÉGIO não ouve alguém que o atingi-se, da mesma forma a porcentagem dos alunos “Em processo” ficou maior no grupo MISTO. No Nível 2 ouve um equilíbrio, onde o desempenho dos alunos do grupo MISTO foi bem próximo do desempenho do grupo do COLÉGIO, mesmo esse ficando ligeiramente atrás.

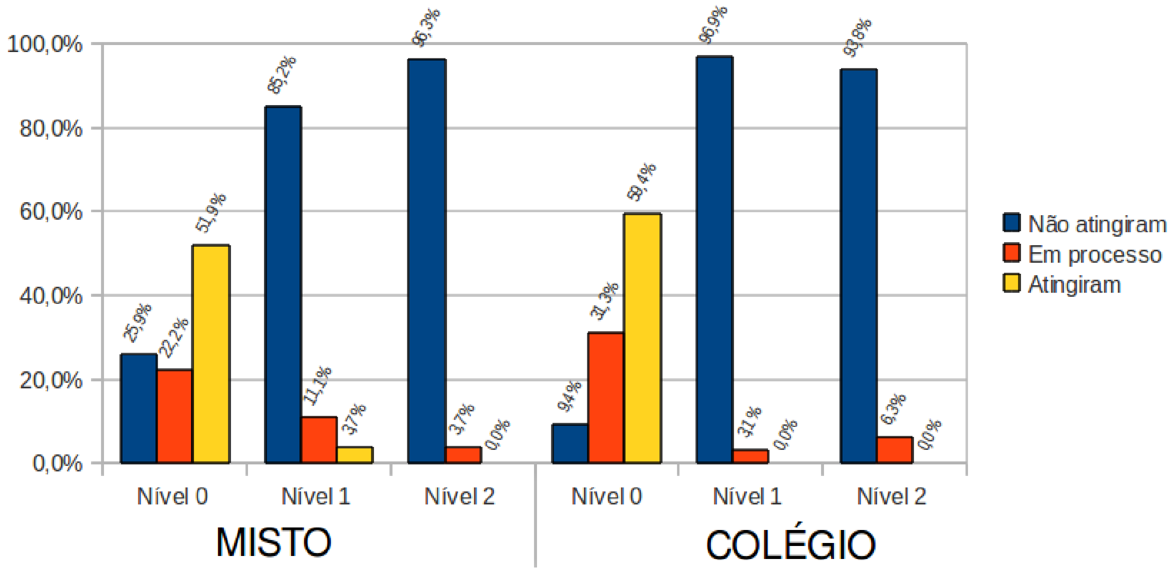


Figura 44: Alunos do 9º ano X Níveis de van Hiele

Em outra análise comparamos o número de questões certas em todo o Instrumento de Pesquisa (por aluno) entre esses dois grupos. Na Figura 45 o gráfico mostra que os alunos do grupo MISTO possuem um desempenho irregular em relação ao número de questões respondidas corretamente, sendo que os valores apresentam vários picos no decorrer do número de questões. Também podemos perceber que os alunos com melhor desempenho estão nesse grupo. A diversidade de escolas nos anos anteriores pode fazer com que os alunos cheguem a um mesmo ano com diferentes níveis de conhecimento, o que pode dificultar o trabalho do professor durante o desenvolvimento do conteúdo, seja qual for. Sabendo disso, o professor com uma turma onde a maior partes dos alunos é semelhante ao grupo MISTO poderá fazer uma retomada dos conteúdos pré-requisitos a fim de desenvolver o novo tópico com maior facilidade e com a formação de conhecimento no aluno.

Os alunos que pertencem ao grupo do COLÉGIO mostraram um desempenho mais regular, onde o número de questões certas mais frequente foi A5 (cinco questões certas em todo o questionário) e esse número decresceu, tando para menos questões certas, quantos para mais questões certas, sendo que o mínimo de acertos foi A2 (duas questões certas em todo o questionário) e o máximo de acertos foi A7 (sete questões certas em todo o questionário). Mesmo que o desempenho seja baixo, podemos perceber que o ensino no COLÉGIO é conciso, visto que os alunos participantes estudaram em turmas diversas e com isso tiveram uma variedade de professores, sendo alguns efetivos e outros temporários.

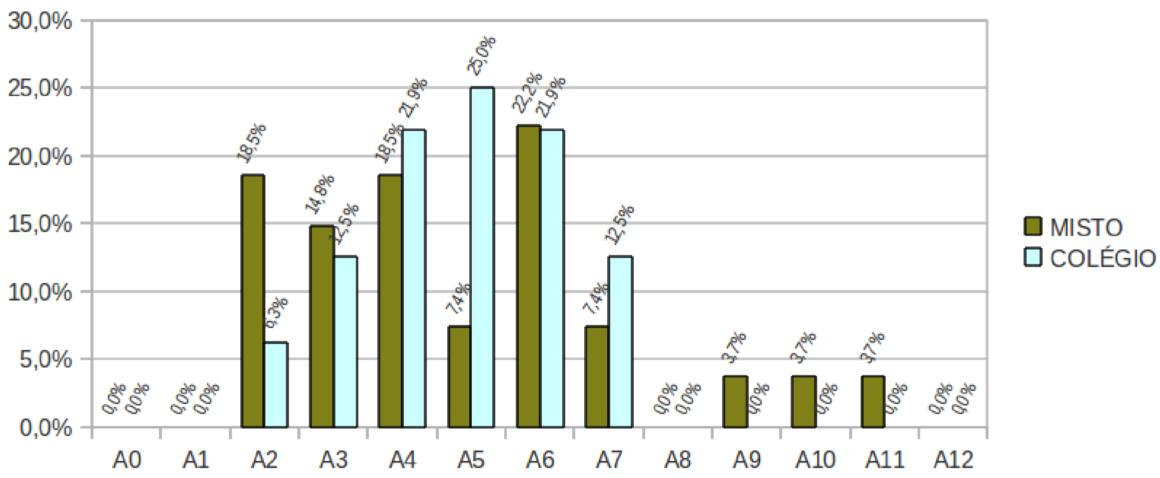


Figura 45: Alunos do 9º ano X Número de questões certas

5.3.2 O DESEMPENHO DOS ALUNOS POR IDADE

Em seu livro van Hiele (1986) cita que a passagem do aluno através dos níveis não está diretamente ligada com a sua maturidade biológica, ou seja, com a sua idade. A dificuldade do aluno é possível que venha do ambiente em que ele está se desenvolvendo. Muitas vezes o processo de aprendizagem não está sendo adequado, fazendo com que essa aprendizagem demore mais que o necessário.

Nas Figuras 46 e 47, os gráficos mostram como ficaram distribuídas as classificações dos alunos em relação aos níveis conforme suas idades biológicas. No Anexo F apresentamos a tabela que deu origem a estes dois gráficos. Mesmo que o maior número de alunos que atingiram o Nível 0 ou estão “Em processo” de atingir este nível está concentrado nos alunos de 12 ou 13 anos (Figura 46) podemos perceber que em relação a porcentagem de alunos este desempenho foi alto desde os 10 até os 14 anos, pois somando a porcentagem dos alunos que estão “Em processo” e os que atingiram esse nível obtemos os valores 88,9% para os de 10 anos, 94,7% para os de 11 anos, 80,9% para os de 12 anos, 94,7% para os de 13 anos e 93,1% para os de 14 anos (Figura 47). Os demais níveis podemos observar o desempenho diretamente na tabelas citadas.

Para verificar e relação entre os Níveis de van Hiele e a maturidade biológica seria necessário elaborar uma sequência didática sobre o conteúdo, trabalhar com esses alunos essa sequência e reaplicar o Instrumento de Pesquisa para assim verificar como os alunos de cada idade compreendem o que é ensinado.

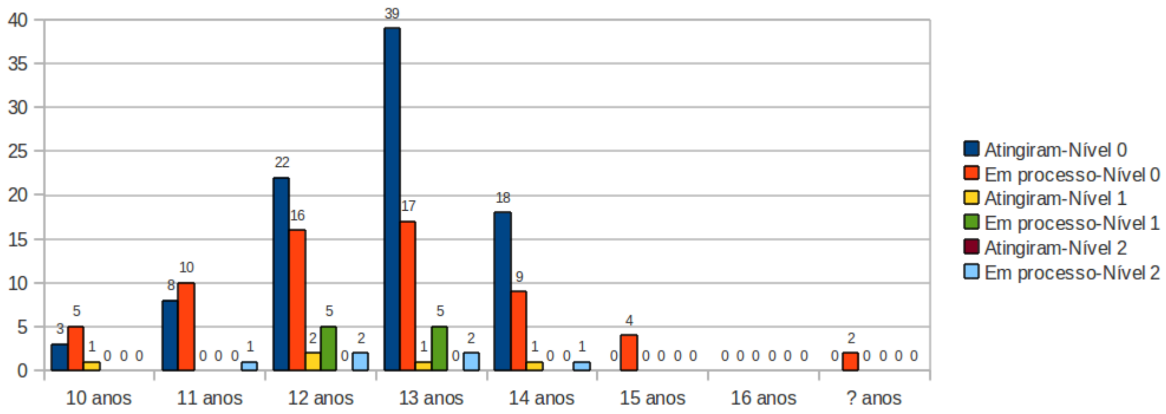


Figura 46: Número de alunos nos níveis X Idade

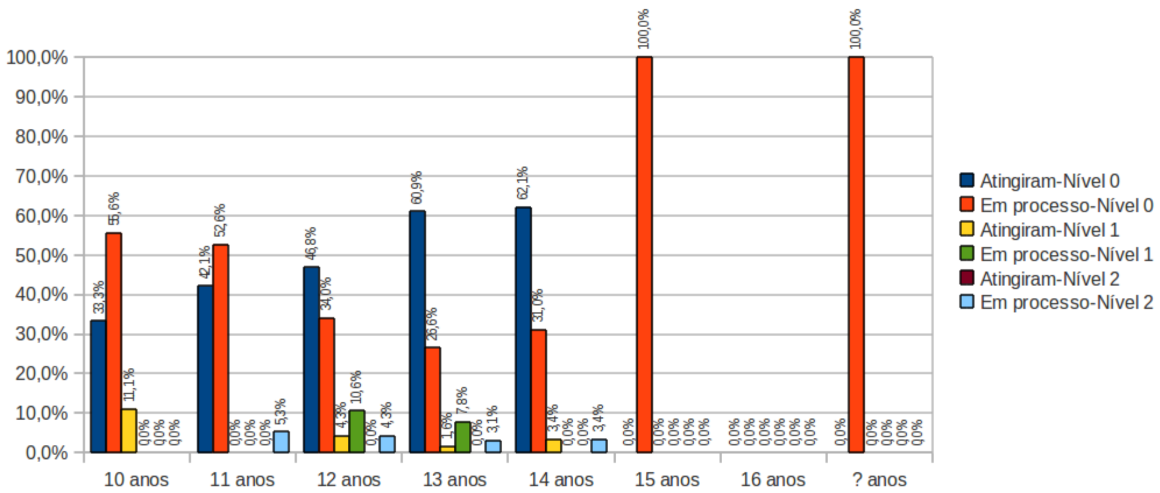


Figura 47: Porcentagem dos alunos nos níveis X Idade

6 INSTRUMENTO AO PROFESSOR

Após a aplicação do Instrumento de Pesquisa e dos estudos mais aprofundados sobre o Modelo van Hiele reestruturamos o nosso Instrumento deixando-o com cinco questão para cada nível. Elaboramos uma nova questão, para substituir a Questão 3 do Instrumento de Pesquisa aplicado, nesse novo Instrumento as questões 1, 2, 3, 4 e 5 são para o Nível 0, as questões 6, 7, 8, 9 e 10 são para o Nível 1 e as questões 11, 12, 13, 14, e 15 são para o Nível 2. Com isso disponibilizamos ao professor um Instrumento com maior facilidade de interpretação, pois como vemos na Tabela 39 temos um mesmo critério de classificação para os três níveis. Sugerimos que a classificação dos alunos em três grupos: “Atingiram”, “Em processo” e “Não atingiram” seja feita utilizando os seguintes critérios: os que acertaram menos da metade das questões estão no grupo “Não atingiram”, os que acertaram metade (utilizando a regra do arredondamento) estão no grupo “Em processo” de atingir o nível e os que acertaram mais da metade das questões estão no grupo “Atingiram” o nível.

Nível	Atingiram	Em processo	Não atingiram
0	4 ou 5	3	0, 1 ou 2
1	4 ou 5	3	0, 1 ou 2
2	4 ou 5	3	0, 1 ou 2

Tabela 39: Número de questões certas em adequação aos Níveis

O professor poderá aplicar o Instrumento todo ou selecionar qual dos três níveis será avaliado. Onde o Nível 0 será avaliado no “Questões Investigativas (A)”, o Nível 1 será avaliado no “Questões Investigativas (B)” e o Nível 2 será avaliado no “Questões Investigativas (C)”. No final de cada página disponibilizamos um espaço reservado para o professor anotar quantas questões o aluno acertou no nível e o espaço para circular a situação do aluno no nível: (NA) para “Não atingiu”; (EP) para “Em processo”; (A) para “Atingiu”.

Nas Tabelas 40, 41 e 42 está o gabarito da Questões Investigativas, já reestruturadas, em cada nível.

Questão	Questões Investigativas (A) - Nível 0
1	1ª e 4º figura
2	2ª e 5ª figura
3	(B), (C) e (A)
4	1ª, 3ª e 5ª figura
5	(C), (A), (B), (B), (A) e (C)

Tabela 40: Gabarito: Questões Investigativas (A) - Nível 0

Questão	Questões Investigativas (B) - Nível 1
1	(d)
2	B, C, D - BC, CD, EA - AD, BE, CE - 2 - pentágono
3	circular 1ª, 3ª e 5ª figura
4	(V), (V), (F), (V) e (F)
5	(b)

Tabela 41: Gabarito: Questões Investigativas (B) - Nível 1

Questão	Questões Investigativas (C) - Nível 2
1	(d)
2	(V), (V), (F), (F) e (V)
3	Figura 39 na página 83
4	(c)
5	(e)

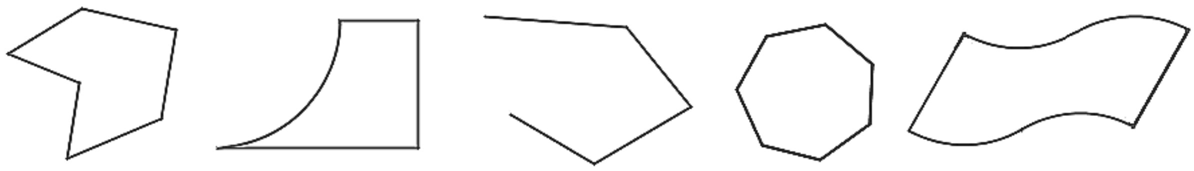
Tabela 42: Gabarito: Questões Investigativas (C) - Nível 2

Nas páginas seguintes apresentamos o Instrumento elaborado para uso do professor em suas turmas.

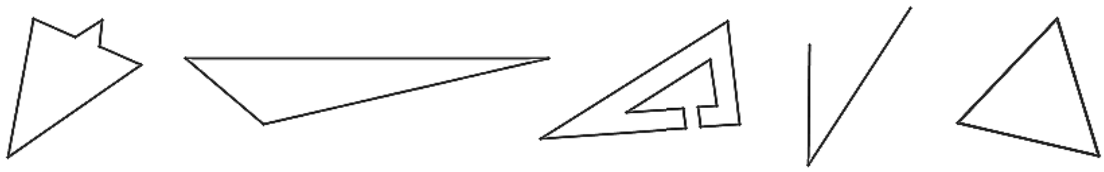
Nome: ________________________________ Turma: _____ Data: __/__/___ Ano de nascimento: ____

Questões Investigativas (A)

1- Dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas polígonos:



2- Dentre as figuras abaixo circule os triângulos:



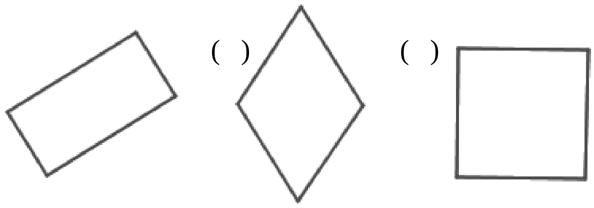
3- Relacione os nomes da esquerda com as figuras da direita colocando a letra correspondente ao nome correto do quadrilátero:

(A) Quadrado

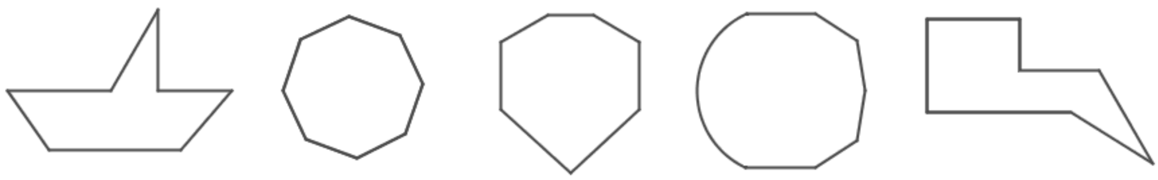
(B) Retângulo

(C) Losango

( ) ( ) ( )



4- Sabendo que hepta significa sete, dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas heptágonos:



5- Sabendo que penta = cinco, hexa = seis e octo =oito, relacione os nomes da esquerda com as figuras da direita colocando a letra correspondente:

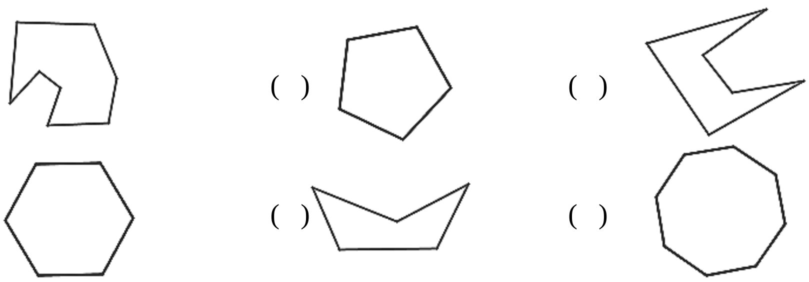
(A) Pentágono

(B) Hexágono

(C) Octógono

( ) ( ) ( )

( ) ( ) ( )



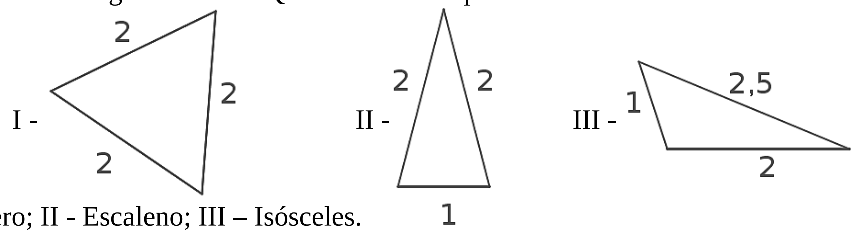
Número de questões certas:

(NA)
(EP)
(A)

Nome: _________________________________ Turma: _____ Data: __/__/___ Ano de nascimento: ____

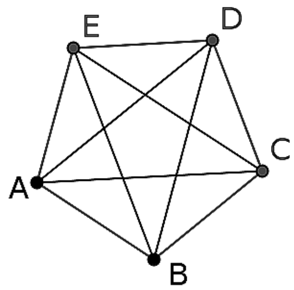
Questões Investigativas (B)

1- Observe os três triângulos abaixo. Qual alternativa apresenta a nomenclatura correta?



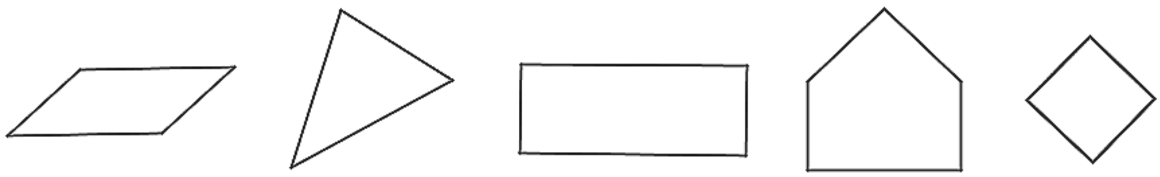
a) I - Equilátero; II - Escaleno; III – Isósceles.
b) I - Escaleno; II - Equilátero; III – Isósceles.
c) I - Isósceles; II - Equilátero; III – Escaleno.
d) I - Equilátero; II - Isósceles; III – Escaleno.
e) I - Escaleno; II - Isósceles; III - Equilátero.

2- Observe a figura ao lado e complete as lacunas adequadamente.



a) Os vértices dessa figura são A, ___, ___, ___ e E.
b) Os segmentos que formão seus lados são AB, ___, ___, DE e ___.
c) As diagonais dela são AC, ___, BD, ___ e ___.
d) De cada vértice saem ___ diagonais.
e) Esta figura é um polígono denominado _________________.

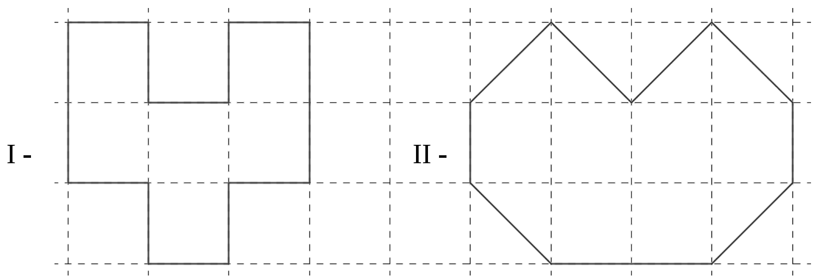
3- Dentre as figuras abaixo circule quais delas podem ser consideradas paralelogramos:



4- Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações referentes aos retângulos:

a) ( ) As diagonais se cruzam em seus pontos médios.
b) ( ) Lados opostos possuem mesma medida.
c) ( ) Os quatro ângulos internos são agudos.
d) ( ) Os quatro ângulos internos são retos.
e) ( ) Possui apenas um par de lados paralelos.

5- Temos representado na figura abaixo dois polígonos em uma folha quadriculada, onde cada quadrado tem lados medindo 1 cm. Qual das alternativas abaixo representa respectivamente o perímetro de I e a área de II?



a) I - Perímetro = 12 cm; II - Área = 9 cm².
b) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 9 cm².
c) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 12 cm².
d) I - Perímetro = 6 cm; II - Área = 12 cm².
e) I - Perímetro = 14 cm; II - Área = 10 cm².

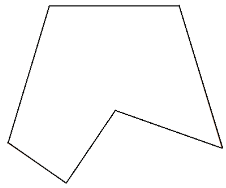
Número de questões certas:

(NA)
(EP)
(A)

Nome: _________________________________ Turma: _____ Data: __/__/___ Ano de nascimento: ____

Questões Investigativas (C)

1- Sabendo que a soma dos ângulos internos do triangulo é 180° e que todo polígono pode ser dividido em triângulos, então a soma de todos os ângulos internos do polígono abaixo é:



a) 180°.
b) 360°.
c) 540°.
d) 720°.
e) 900°.

2 Referente aos quadriláteros, marque V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações abaixo:

a) ( ) Todo losango tem quatro lados de mesma medida.
b) ( ) Existem paralelogramos com quatro ângulos retos.
c) ( ) Todo retângulo tem quatro lados de mesma medida.
d) ( ) O quadrado é o único paralelogramo com quatro ângulos retos.
e) ( ) Nenhum retângulo tem lados opostos com medidas diferentes.

3- Represente, no espaço em branco ou no espaço quadriculado, um polígono que pode ser dividido em apenas 3 triângulos, possui dois ângulos retos (90°) consecutivos e a medida de seus lados são todas iguais.

4- Em relação aos polígonos regulares e irregulares podemos afirmar que:

a) Todos os polígonos com todos os lados de mesma medida são regulares.
b) Há polígonos regulares não convexos.
c) Os polígonos com todos os lados de mesma medida e todos os ângulos de mesma medida são regulares.
d) Nenhum polígono regular é convexo.
e) Todos os polígonos com todos os ângulos de mesma medida são regulares.

5- Em relação aos polígonos convexos e não convexos podemos afirmar que: para quaisquer dois pontos distintos do interior do polígono, se o segmento que os une...

a) ...possui um ponto externo ao polígono, então este é convexo.
b) ...está todo interno ao polígono, então este é não convexo.
c) ...não tem pontos do polígono, então este é não convexo.
d) ...tem somente pontos do polígono, então este é não convexo.
e) ...não possui pontos externos ao polígono, então este é convexo.

Número de questões certas:

(NA)
(EP)
(A)

Extraído da dissertação de mestrado escrita por Rosenilda de Souza Nagata. UTFPR. Curitiba, 2016.

7 CONCLUSÕES

Os estudos realizados para elaboração desse trabalho, sobre o Modelo van Hiele, foram relevantes ao meu desenvolvimento intelectual e didático. Durante todo o processo percebi minhas atitudes com os alunos sendo modificada. Em cada novo tópico estudado, percebia com mais clareza as possíveis causas do aluno não compreender o que estava sendo ensinado. Nessas ocasiões tive oportunidade de alterar meu procedimento, utilizando o Modelo van Hiele, afim de esclarecer suas dúvidas.

Como cada nível tem suas características, procuramos fazer o uso do maior número possível de descrições afim de facilitar ao professor o discernimento de cada nível. Ao pesquisar sobre os Níveis de van Hiele tive a experiência de encontrar muitos textos que se completavam nessa descrição, por isso relacionei os mais importantes em cada nível. A descrição das Fases de Aprendizagem não foram encontradas em todos os textos pesquisados, mas as que foram encontradas indicaram o procedimento adequado à utilização dos níveis estudados.

A elaboração do Instrumento de Pesquisa foi de grande auxílio na compreensão mais detalhada dos Níveis de van Hiele em relação ao aprendizado de Polígonos. Percebi a dificuldade em classificar um determinado exercício em seu Nível de van Hiele, devido a algumas características do nível serem próximas da característica de outro nível. Após ter clareza em cada nível, essa classificação se dará de forma mais objetiva, tendo os exercícios e problemas já classificados facilitará a abordagem do conteúdo. Com isso o professor não exigirá do aluno o conhecimento que não esteja no seu Nível de van Hiele, facilitando as aulas e propiciando o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno.

Fazendo a implementação do Instrumento de Pesquisa conseguimos visualizar qual a real situação do desenvolvimento do pensamento geométrico de um grupo de 237 alunos do 6º ao 9º ano do EF-II, e com isso revelar aos demais professores que devemos de interferir no processo de ensino dos Polígonos para que a defasagem do aprendizado desses alunos seja diminuído. Além de instigar a curiosidade desses professores em relação a outros conteúdos de Geometrias ou de outros Conteúdos Estruturantes do currículo de Matemática. Pois, o Modelo van Hiele pode ser utilizado em todos os tópicos de Matemática, feitas as devidas adaptações, utilizando-se das descrições dos Níveis de van Hiele e de suas Fases de Aprendizagem.

Temos por certo que os dados obtidos na implementação do Instrumento de Pesquisa não deverão ser utilizados isoladamente. Para fazer uma análise mais aprofundada dos níveis que os alunos se encontram é necessário realizar uma entrevista com os casos em destaque, como por exemplo, alunos com dificuldades extremas deverão ser analisados à parte através de entrevistas ou questionamentos orais, em uma possível continuação desta pesquisa.

Além dos casos particulares poderá ser feito um estudo baseado em procedimentos estatísticos de modo que possamos analisar os dados obtidos. Utilizando o nível de confiança e margem de erro adequados poderemos fazer a generalização para todas as turmas do colégio. Com a fundamentação estatística poderemos explorar os dados, fazer análises e traçar um perfil do colégio todo. Com isso percebemos que ficaram muitas questões em aberto e que merecem ser estudadas em outra oportunidade.

REFERÊNCIAS

ABU, M. S.; ABIDIN, Z. Z. Improving the levels of geometric thinking of secondary school students using geometry learning video based on van hiele theory. **International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE)**, IAES, Skudai, JDT, Malásia, v. 2, n. 1, p. 16–22, 2013. Disponível em: <http://www.iaesjournal.com/online/index.php/ijere/article/download/1935/140>. Acesso em: 14/12/2015.

ALBERTS, G.; KAENDERS, R. Interview pierre van hiele: Ik liet de kinderen wél iets leren. KWG, v. 6, n. 3, p. 247–251, 2005. Disponível em: <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/toonnummer.php?deel=06&nummer=3&taal=%20-%3E%20%22historia%20de%20van%20Hiele%20-%20naw5-2005-06-3-247.pdf%22>. Acesso em: 30/09/ 2015.

ALEX, J.; MAMMEN, K. J. A survey of south african grade 10 learners' geometric thinking levels in terms of the van hiele theory. **Anthropologist**, Kamla-Raj, South Africa, v. 14, n. 2, p. 123–129, 2012. Disponível em: <http://krepublishers.com/02-Journals/T-Anth/Anth-14-0-000-12-Web/Anth-14-2-000-2012-Abst-PDF/Anth-14-2-123-12-743-Alex-J-K/Anth-14-2-123-12-743-Alex-J-K-Tx[4].pdf>. Acesso em: 11/12/2015.

ALMEIDA, A. F. de. **Repercussões do uso de materiais didáticos manipuláveis em aulas de geometria**. Dissertação (Mestrado em Educação, Ensino e Práticas Culturais) — UNICAMP, Campinas, SP, 2011. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000849598>. Acesso em: 14/12/2015.

BECKER, M. **Uma alternativa para o ensino de geometria**: visualização geométrica e representações de sólidos no plano. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — UFRGS, Porto Alegre, RS, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17161>. Acesso em: 14/12/2015.

BOGDAN, M. **Tangram**. 2011. Disponível em: <http://www.theworkofgodschildren.org/collaboration/images/e/e8/Tangram_01.svg.hi.png>. Acesso em: 14/12/2015.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática / secretaria de educação fundamental. MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://www.cpt.com.br/pcn/pcn-parametros-curriculares-nacionais-do-1-ao-5-ano>. Acesso em: 22/01/2015.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / secretaria de educação fundamental. MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://www.cpt.com.br/pcn/pcn-parametros-curriculares-nacionais-do-6-ao-9-ano>. Acesso em: 22/01/2015.

BRASIL. **Guia de livros didáticos**: Pnld 2013: Matemática. MEC/SEB, 2012. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/3773-guia-pnld-2013-%E2%80%93-ensino-fundamental>. Acesso em: 22/01/2015.

BRASIL. **DCN: Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_documan&task=doc_download&gid=13448&Itemid>. Acesso em: 23/01/2015.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD 2014-Matemática**. MEC/SEB, 2013. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/4661-guia-pnld-2014>. Acesso em: 22/01/2015.

BRASIL. **LDB : Lei de diretrizes e bases da educação nacional**: Texto integral da lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. atualizada em 19/03/2015. Brasília - DF: Edições Câmara, 2015. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/documentos-e-pesquisa/publicacoes/edicoes/paginas-individuais-dos-livros/lei-de-diretrizes-e-bases-da-educacao-nacional>. Acesso em: 19/10/2015.

BRITO, A. C. V. I. de L. **Geometria na educação infantil**: Formação e saberes necessários à prática pedagógica. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade do Oeste Paulista, Presidente Prudente,SP, 2012. Disponível em: <http://tede.unoeste.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=357>. Acesso em: 20/10/2015.

CASTANHEIRA, N. P. **Estatística aplicada a todos os níveis**. Curitiba: Ibpex, 2010.

CHANG, K.-E.; SUNG, Y.-T.; LIN, S.-Y. Developing geometry thinking through multimedia learning activities. **Computers in Human Behavior**, Elsevier, Taiwan, v. 23, n. 5, p. 2212–2229, 2007. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747563206000434>. Acesso em: 10/12/2015.

CONSTANTINO, R. **O ensino da geometria no ambiente Cinderella**. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Ensino de Matemática) — Universidade Estadual de Maringá-UEM, Maringá, PR, 2006. Disponível em: <http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?code=vtls000164877>. Acesso em: 14/12/2015.

ESCOLAR, R. **Tangram – Origem e lendas**. 2015. Disponível em: <http://www.resumoescolar.com.br/matematica/tangram-origem-e-lendas/>. Acesso em: 14/12/2015.

GAWLICK, T. Connecting arguments to actions — dynamic geometry as means for the attainment of higher van hiele levels. **ZDM-Mathematics Education**, Springer-Verlag, Landau, Germany, v. 37, n. 5, p. 361–370, 2005. Disponível em: <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm055a6.pdf>. Acesso em: 14/12/2015.

GEMERT, S. la Bastide-van. **All Positive Action Starts with Criticism**: Hans freudenthal and the didactics of mathematics. Springer Netherlands, 2015. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=O2ozBgAAQBAJ&pg=PA178&lpg=PA178&dq=Dieke+or+Dina+van+Hiele-Geldof&source=bl&ots=svawK0Go8c&sig=c5dIKfi45PRJjeOOGhIW7Ku9mJ4&hl=pt-BR&sa=X&ved=0CDcQ6AEwA2oVChMI_Y-OieWSyAIVwhyQCh34TQfx#v=onepage&q=Dieke%20or%20Dina%20van%20Hiele-Geldof&f=false>. Acesso em: 25/9/2015.

INEP. **Resultados Finais**. 2014. Disponível em: <http://sistemasprovabrasil.inep.gov.br/provaBrasilResultados/view/boletimDesempenho/boletimDesempenho.seam#>. Acesso em: 08/12/2015.

INEP-INSE. **Nota Técnica**: Indicador de nível socioeconômico das escolas de educação básica. 2014. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/mailing/ 2014/nota_tecnica_INSE.pdf>. Acesso em: 08/12/2015.

INOUE, R. K. M. **O processo de formação do conceito de quadriláteros, envolvendo alunos de uma 6ª série do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — UNIVALI, Itajaí,SC, 2004. Disponível em: <http://siaibib01.univali.br/pdf/ Rosa%20Inoue.pdf>. Acesso em: 21/10/2015.

LEIVAS, J. C. P. Pitágoras e van hiele: uma possibilidade de conexão. **Ciência & Educação**, scielo, Santa Maria, RS, v. 18, n. 3, p. 643–655, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/ scielo.php?script=sci_pdf&pid=S1516-73132012000300010&lng=en&nrm=iso&tlng=pt>. Acesso em: 11/12/2015.

MAFAGAFO, T. **Geoplano**. São Paulo: Elo7, 2015. Disponível em: <http://www.elo7.com.br/ lista/geoplano>. Acesso em: 26/11/2015.

MALLOY, C. E. Reflections on practice: Perimeter and area through the van hiele model. **Mathematics Teaching in the Middle School**, NCTM, Chapel Hill, NC, v. 5, n. 2, p. 87–90, 1999. Disponível em: <http://lesage.blogs.uoit.ca/wp-uploads/2010/09/van-Hiele-Levels-Area-Perimeter_1999-NCTM.pdf>. Acesso em: 14/12/2015.

MARTINS, F. L. F. **Instrumentos virtuais de desenho e a argumentação em geometria**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — UFRGS, Porto Alegre, RS, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/61734>. Acesso em: 14/12/2015.

MORAES, J. M. de. **Construção dos conceitos geométricos num contexto de formação inicial de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação da UnB, Brasília, Df, 2008. Disponível em: <http:// repositorio.unb.br/handle/10482/1267>. Acesso em: 11/12/2015.

MURR, C. E.; SOUZA, R. de; PRADO, S. do. Cadernos pedagógicos do prodocência. In: SOARES, M. T. C.; ROLKOUSKI, E.; KARAS, E. W. (Ed.). **Fractais: propriedades e construção**. UFPR - Programa de Pós-Graduação em Educação, 2006, (Matemática, v. 4). p. 31–41. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/tvmultimidia/livreto _matematica_ufpr_fractais.pdf>. Acesso em: 05/10/ 2015.

NASSER, L. **Geometria segundo a Teoria de van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2010. Projeto Fundão.

NÉMETH, L. **All convex tangram shapes**. 2014. Disponível em: <https://upload.wiki media.org/wikipedia/commons/0/0e/Convex_tangram_shapes.svg>. Acesso em: 14/12/2015.

PARANÁ. **DCE: Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. SEED, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php? conteudo=1>. Acesso em: 22/01/2015.

PASTOR, A. J. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de van Hiele**: La enseñanza de las isometrías del plano. la evaluación del nivel de razonamiento. Tese (Doutorado) — Universitat de València, València, VA, 1993. Disponível em: <www.uv.es/gutierre/ archivos1/textospdf/Jai93.pdf>. Acesso em: 11/12/2015.

PET-MATEMÁTICA. **Sobre o PET**. 2014. Disponível em: <http://www.petmatematica.ufpr.br/sobre_pet.html>. Acesso em: 25/11/2015.

POWELL, A. B. Caleb gattegno (1911-1988): A famous mathematics educator from africa? RBHM, New Jersey - USA, n. 1, p. 199–209, 2007. Disponível em: <http://andromeda.rutgers.edu/˜powellab/docs/articles/Powell(2007)Gattegno.pdf>. Acesso em: 26/11/2015.

PÉRTILE, K. **O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**: uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — PUCRS, Porto Alegre,RS, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10923/3005>. Acesso em: 21/10/2015.

RITTER, A. M. **A visualização no ensino de geometria espacial**: Possibilidades com o software calques 3d. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino Matemática) — UFRS, Porto Alegre,RS, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/ 32385>. Acesso em: 25/11/2015.

ROCHA, C. de A. **O uso do geoplano para o ensino de geometria**: Uma abordagem através de malhas quadriculadas. Pernambuco: UFPE, 2013. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC72013346468T.doc>. Acesso em: 20/10/2015.

ROCHA, M. **A origem e a história do tangram**. 2010. Disponível em: <http://prof marciorocha.blogspot.com.br/2010/11/origem-e-historia-do-tangram_28.html>. Acesso em: 14/12/2015.

SCIENCE. **Pierre van Hiele**. 2010. Disponível em: <http://www.fisme.science.uu.nl/wiki/inde x.php/Pierre_van_Hiele>. Acesso em: 25/09/2015.

SENA, R. M. **Mosaico tecnológico na formação de conceitos sobre polígonos**: um estudo sobre a lógica dos adolescentes. Tese (Doutorado) — UFRGS, Porto Alegre, RS, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/94694>. Acesso em: 11/12/2015.

SILVA, J. P. da. O pnld e sua relação com o modelo de van hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. São Paulo, 2008. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/c̃pq/main/arquivos/outros/Joyce%20Paula%20da%20Silva.pdf>. Acesso em: 26/11/2015.

VAN HIELE, P. The child's thought and geometry, 1959. In: ____. **English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele**. New York: ERIC/SMEAC, 1984. cap. 3, p. 243–252. Disponível em: <http://eric.ed.gov/?id=ED287697>. Acesso em: 21/10/2015.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión**: En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tese (Doutorado) — Universidad Real de Utrecht, 1957. Disponível em: <www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf>. Acesso em: 26/11/2015.

VAN HIELE, P. M. **Structure and Insight**: A theory of mathematics education. Orlando: Academic Press, Inc., 1986.

VIDIGAL, S. M. P. **Formação de personalidade ética**: as contribuições de kohlberg e van hiele. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade de São Paulo, SP, 2011. Disponível em: <www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-23052011-155307>. Acesso em: 11/12/2015.

VREDENDUIN, P. G. J. In memoriam: Mevrouw dr. d. van hiele-geldof. Nederlandese Vereniging van Wiskundeleraren, v. 1, n. 34, p. 1, 1958. Disponível em: <http://vakbladeuclides.nl/archief/pdf/34_1958-59_01.pdf>. Acesso em: 25/09/2015.

ANEXO A – DESCRIÇÃO DOS LIVROS DO PNLD 2014

Segue uma lista dos livros didáticos que participaram do PNLD-2014 [1], com breve comentário extraído do Guia de Livros Didáticos-PNLD 2014 (BRASIL, 2013b):

1.DESCOBRINDO E APLICANDO A MATEMÁTICA, Autores: Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio F. Machado.

> Em geometria, particularmente nos dois primeiros volumes, as propriedades são sistematizadas com ênfase em atividades que envolvem a visualização de imagens, o manuseio de materiais concretos e de instrumentos de desenho ...
> Na abordagem dos conteúdos desse campo, as propriedades são sistematizadas com base em atividades nas quais se priorizam a visualização de imagens, o manuseio de materiais concretos ou a construção de figuras geométricas com instrumentos de desenho. A passagem da validação por meio de processos experimentais ou de verificação de exemplos particulares para a prova de proposições matemáticas, caracterizadas essencialmente pela sua validade abstrata e geral, inicia-se no volume 8. No entanto, há sequências de demonstrações que adotam um encadeamento lógico que difere do usual. Essas escolhas tornam menos instrutivas e atraentes algumas demonstrações feitas no livro. É o que ocorre, por exemplo, na demonstração do "caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos" e do Teorema de Tales.

2.MATEMÁTICA – BIANCHINI, Autor: Edwaldo Roque Bianchini.

> A abordagem dos conteúdos desse campo é iniciada, normalmente, com uma discussão em que se recorre à visualização de imagens, ao manuseio de material concreto ou a construções com instrumentos de desenho. Esse caminho do concreto para o abstrato é recomendável na abordagem de conceitos geométricos e tal procedimento é adotado de modo satisfatório na coleção. Ao lado desses pontos positivos, há deficiências nos experimentos introdutórios das propriedades geométricas,

[1] Programa Nacional do Livro Didático de 2014, referente ao Ensino Fundamental II

nos quais o aluno é guiado para atingir muito rapidamente as conclusões desejadas, com pouca oportunidade de tirar suas próprias conclusões. E mais, o excesso de nomenclatura que permeia o desenvolvimento dos conteúdos pode desviar a atenção dos fatos mais relevantes. Por exemplo, só em um item, no volume 8, mencionam-se cerca de trinta denominações relacionadas a ângulos, algumas totalmente dispensáveis.

3.MATEMÁTICA – IDEIAS E DESAFIOS, Autoras: Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori.

Como tem sido recomendado para essa fase da aprendizagem, no estudo dos conteúdos desse campo procuram-se articular figuras geométricas planas com figuras espaciais. Observa-se, também, uma boa conexão com a álgebra no estudo de produtos notáveis e fatoração. No entanto, não há articulação e equilíbrio adequados entre atividades experimentais e dedutivas, já que é destinado pouco espaço para investigações, levantamento de hipóteses e verificação de propriedades pelo aluno. As construções geométricas com régua e compasso estão presentes desde o volume 7, porém sem as necessárias justificativas para os procedimentos empregados. As simetrias e as isometrias, mesmo que bem definidas, não são articuladas entre si, como é desejável.
Em geometria, não há articulação e equilíbrio adequados entre atividades experimentais e dedutivas. Cabe ao professor destinar mais tempo para investigações, levantamento de hipóteses e verificação de propriedades pelo aluno.

4.MATEMÁTICA – IMENES & LELLIS, Autores: Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis.

Apropriadamente, o trabalho com geometria começa com um enfoque intuitivo, nos 6o e 7o anos e evolui para uma abordagem mais dedutiva nos 8o e 9o anos. Nota-se uma boa articulação com outros campos da Matemática, em especial com a álgebra e com o campo das grandezas e medidas. A coleção aborda temas de interesse, como homotetias e desenho em perspectiva, além de enfatizar construções geométricas. O termo "vistas" é usado para designar vários tipos de imagens gráficas, no entanto, algumas dessas imagens não possuem as propriedades geométricas que definem esse conceito. Além disso, no estudo de simetrias de reflexão, há pouca clareza com respeito à distinção entre eixos de simetria nas imagens gráficas, que sempre são planas, e planos de simetria em objetos no mundo físico, que são espaciais.

5.MATEMÁTICA: TEORIA E CONTEXTO, Autores: Marília Ramos Centuríon e José Jakubovic.

O trabalho com os conteúdos desse campo é, na maioria das vezes, satisfatório. A articulação entre o conhecimento novo e o já abordado é explícita e conceitos são retomados, ampliados e aprofundados. É elogiável trabalhar noções de perspectiva sem incluir a noção de vistas que, de fato, é dispensável nessa fase da escolaridade. Predominam as validações empíricas dos fatos geométricos mais importantes. Essa escolha não é devidamente explicitada, em especial para o professor, pois se sabe da natureza limitada dessas comprovações em face do método de demonstração lógica.

6.PRATICANDO MATEMÁTICA- Edição renovada, Autores: Miguel Asis Name e Maria José C. de V. Zampirolo.

No geral, observa-se cuidado na formulação dos conceitos desse campo. Nos dois primeiros volumes, os conteúdos de geometria são apresentados com base em atividades de visualização de imagens de objetos e de cenas do cotidiano, além do uso de malhas ou manuseio de materiais concretos. Nos volumes seguintes, são valorizadas construções com instrumentos de desenho, ainda que sem as devidas justificativas. A validação de alguns teoremas geométricos básicos ancora-se em experimentos de medição ou de manuseio de objetos físicos, mas, no caso de outras proposições, são apresentadas demonstrações matemáticas de modo adequado. O volume 7 é iniciado com a caracterização dos sólidos geométricos como figuras geométricas tridimensionais, o que é bem apropriado. No entanto, no desenvolvimento subsequente, por vezes, sólidos geométricos são confundidos indevidamente com a superfície fechada que é o seu contorno.

7.PROJETO ARARIBÁ - MATEMÁTICA, Editor responsável: Fábio Martins de Leonardo.

Na abordagem desse campo recorre-se, de modo adequado, a diversos materiais didáticos como: dobraduras, instrumentos de desenho, papel quadriculado, mosaicos, geoplano e tangram. Na apresentação das proposições geométricas, são utilizados diálogos com boas argumentações e que conduzem, em geral, a raciocínios dedutivos pertinentes. A simbologia e as notações para comunicação em geometria são apresentadas e, de modo geral, bem cuidadas no texto. Além disso, algumas atividades interessantes articulam a geometria com artes, ilusão de ótica e geografia. Outro tipo adequado de atividades são as que levam o aluno a usar diferentes estratégias de validação.

8.PROJETO TELÁRIS – MATEMÁTICA, Autor: Luiz Roberto Dante.

O processo de sistematização dos conceitos geométricos é realizado pela passagem gradativa de observações de propriedades, classificação de imagens gráficas e, de maneira positiva, ganha um status mais formal, ao se chegar a demonstrações de alguns fatos nos volumes 8 e 9. Bons exemplos de articulação com o pensamento algébrico são as demonstrações do teorema de Pitágoras por decomposições em figuras equivalentes. As figuras geométricas planas são definidas de modo apropriado, ora como regiões planas, ora como contornos de regiões planas. Tal tratamento, entretanto, não é observado para as figuras geométricas espaciais. Além disso, por vezes, uma vista de um objeto é apresentada como aquilo que um observador vê de determinado ponto. Sabe-se que, em geometria, vistas são imagens de um objeto por meio de projeções paralelas ortogonais sobre um plano. Além disso, há desarticulação entre os conceitos de vistas, perspectiva e outros modos de representação plana de figuras geométricas espaciais.

9.PROJETO VELEAR – MATEMÁTICA, Autor: Antonio José Lopes.

No trabalho com conteúdos desse campo, além de se buscar a articulação com objetos presentes no espaço cotidiano, a coleção explora amplamente a utilização de materiais concretos e busca oferecer condições para a realização de algumas validações experimentais. Também estão presentes os processos dedutivos formais. A obra traz recursos tais como, mosaicos, dobraduras e recortes que exploram composição e decomposição de figuras geométricas planas, o que favorece a visualização. A definição de figuras congruentes é apoiada nas transformações geométricas, o que é positivo. A simetria em figuras geométricas planas é, de modo satisfatório, associada a transformações geométricas. Contudo, no volume 8, é abordado o estudo das simetrias em figuras geométricas espaciais. Esse tópico pode ser considerado prematuro para essa etapa da aprendizagem, mesmo se apresentado brevemente.

10.VONTADE DE SABER MATEMÁTICA, Autores: Patricia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza.

No estudo da geometria, merece especial atenção o uso de instrumentos de desenho, de software de geometria dinâmica e de materiais concretos, na exploração de conceitos e de propriedades das figuras geométricas.

Inicialmente, nos volumes 6 e 7, estudam-se de modo satisfatório as figuras geométricas espaciais e as classificações usuais dos sólidos geométricos, bem como a associação deles com objetos do mundo físico. Em seguida, nesses livros, são apresentados conceitos da geometria plana, em especial o conceito de ângulo. No entanto, há repetições desnecessárias e são estabelecidas poucas articulações entre as figuras geométricas espaciais e as planas. Um destaque da obra é a exploração de conceitos e de propriedades das figuras geométricas com apoio em instrumentos de desenho, em um software de geometria dinâmica e em materiais concretos. Além disso, é bem conduzida a discussão das isometrias de rotação e de translação no plano. No entanto, tais transformações são mal articuladas com o conceito de simetria.

ANEXO B – CONTEÚDOS DE GEOMETRIAS NOS LIVROS DO PNLD 2014

Seguem as Tabelas descrevendo os conteúdos em geometria dos livros participantes do PNLD-2014, conforme numeração abaixo:

1. DESCOBRINDO E APLICANDO A MATEMÁTICA

   Autores: Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio F. Machado.

2. MATEMÁTICA – BIANCHINI

   Autor: Edwaldo Roque Bianchini.

3. MATEMÁTICA – IDEIAS E DESAFIOS

   Autoras: Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori.

4. MATEMÁTICA – IMENES & LELLIS

   Autores: Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis.

5. MATEMÁTICA: TEORIA E CONTEXTO

   Autores: Marília Ramos Centuríon e José Jakubovic.

6. PRATICANDO MATEMÁTICA- Edição renovada

   Autores: Miguel Asis Name e Maria José C. de V. Zampirolo.

7. PROJETO ARARIBÁ - MATEMÁTICA

   Editor responsável: Fábio Martins de Leonardo.

8. PROJETO TELÁRIS – MATEMÁTICA

   Autor: Luiz Roberto Dante.

9. PROJETO VELEAR – MATEMÁTICA

   Autor: Antonio José Lopes.

10. VONTADE DE SABER MATEMÁTICA

    Autores: Patricia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza.

Livro	Conteúdo do 6º ano
1	Ângulo - Circunferência - Retas. Polígonos - Perímetro. Perímetro e área de retângulos. Semelhança de figuras geométricas planas.
2	Ponto, reta e plano. Retas, semirreta, segmento de reta. Ângulo: medidas, reto, agudo, obtuso. Polígonos: elementos, classificação. Triângulos e quadriláteros. Perímetro e área de retângulos e quadrados.
3	Figuras geométricas planas: poliedros, regiões planas e seus contornos. Segmento de reta, reta, plano. Ponto, reta, plano, semirreta. Ângulos: ideia de giro. Ângulos: mudança de direção, elementos, notação. Ângulos: retos, agudos, obtusos. Posições relativas de retas coplanares. localização em malha quadriculada. Retas paralelas e concorrentes. Linhas: poligonais abertas e fechadas simples. Polígonos: convexos, não convexos. Triângulos: elementos, classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos, altura. Quadriláteros: elementos, classificação. Polígonos: ladrilhamento, simetria axial. Cálculo de áreas de: retângulos, paralelogramos, triângulos, trapézios.
4	Polígonos. Ângulo - medida de ângulo - retas paralelas e perpendiculares. Polígonos; quadriláteros. Ângulos, polígonos, figuras geométricas semelhantes. Noção de área. Área do retângulo.
5	Ângulos. Polígonos. Circunferência e círculo. Simetria axial. Comprimento, área.
6	Ângulos – medidas de ângulos: o grau – retas: perpendiculares, paralelas. Polígonos. Triângulos, quadriláteros. Polígonos regulares – perímetro. Circunferências. Simetria de reflexão. Área do retângulo.
7	Figuras geométricas planas. Simetria de reflexão. Ângulos, polígonos e círculos. Ponto, reta, plano. Ângulo. Posição relativa de retas. Polígonos: elementos, classificação. Triângulo. Quadrilátero. Circunferência e círculo; Perímetro e área; área de quadrados e de retângulos.
8	Ponto, reta, plano, ângulos, polígonos. Perímetro de polígono. Área de triângulos e quadriláteros.
9	Polígonos: definição, elementos. Polígonos regulares. Quadriláteros: classificação. Triângulos. Perímetro. Área: do retângulo, do quadrado e do triângulo.
10	Ângulos: ideias – medida de ângulo – retas e segmentos de reta. Retas paralelas e retas concorrentes. Polígonos: classificação. Triângulos e quadriláteros. Circunferência e círculo. Simetria de reflexão. Área do quadrado e área do retângulo.

Livro	Conteúdo do 7º ano
1	Figuras geométricas - medida de ângulos. Ângulos: entre retas, em polígonos, na circunferência. Simetria. Perímetro - Área de figuras planas. Semelhança em figuras geométricas planas.
2	Ângulos - medida de ângulo ângulos: congruência, bissetrizes. Simetria de reflexão. Ângulos: complementares, suplementares, opostos pelo vértice. Semelhança de figuras geométricas. Figuras geométricas equivalentes. Área de quadriláteros e triângulos.
3	Ângulos: elementos, região angular convexa e não convexa. Ângulos de polígonos. Medida de ângulos: o grau e seus submúltiplos. Classificação de ângulos. Ângulos congruentes. Retas perpendiculares. Bissetriz de um ângulo. Circunferências e círculos: definições, elementos. Polígono: ângulos. Triângulos e quadriláteros: soma dos ângulos internos. Polígonos regulares. Ângulos adjacentes. Ângulos: complementares, suplementares. Ângulos opostos pelo vértice. Construção da bissetriz de um ângulo. Simetria axial.
4	Ângulos – medidas de ângulo – circunferência. Simetria: axial, de rotação. Perímetro e área de figuras planas.
5	Ângulo - medida de ângulos - retas perpendiculares. Triângulos; Polígonos regulares. Simetrias: axial, de rotação, central. Medidas: usos no cotidiano, unidades de área.
6	Medidas de área; área de quadriláteros. Ângulo: classificação, propriedades – medida em graus. Triângulos: classificação, propriedades.
7	Ângulo – medida de ângulo – polígono: ângulo interno. Polígonos regulares. Ângulos: complementares, opostos pelo vértice, correspondentes. Bissetriz de ângulo – gráficos.
8	Polígonos convexos. Simetria de reflexão. Ângulos – medidas de ângulo – retas: posições relativas. Ângulos e retas. Polígonos: classificação.
9	Ângulos: conceituação, classificação, propriedades - medida de ângulo. Polígonos e mosaicos: polígono não regular, soma dos ângulos internos. Polígono regular. Ampliação e redução de figuras geométricas. Escalas. Retângulos proporcionais. Triângulos semelhantes.
10	Ângulo: ideias, classificação – medidas de ângulo: unidades e operações. Polígonos: definição, classificação. Ângulos nos polígonos: soma dos ângulos internos.

Livro	Conteúdo do 8º ano
1	Pontos, retas, planos. figuras geométricas: planas, espaciais. Ângulos. Triângulos, polígonos e circunferências. Triângulos: congruência, condição de existência, relações entre lados e ângulos. Propriedades das bissetrizes. Semelhança de triângulos. Teorema de Tales.
2	Retas paralelas. Ponto médio. Ângulos: classificação, propriedades. Polígonos: número de diagonais, soma dos ângulos internos e externos. Polígonos regulares, congruência. Triângulos: classificação, mediana, bissetriz, altura, congruência, propriedades. Quadriláteros: elementos, ângulos. Paralelogramos. Trapézios. Triângulo. Circunferência e círculo: elementos, posições relativas. Arcos de circunferência e suas medidas.
3	Circunferência: definição, elementos, arcos, ângulo central. Círculos. Construções: perpendicular a uma reta por um ponto fora dela e mediatriz. Simetria axial: eixo de simetria. Distância de ponto a reta. Simetria central. Movimentos rígidos no plano: reflexão, translação e rotação. Congruência de figuras geométricas planas. Padrões e ladrilhamentos. Posições relativas de duas retas. Congruência entre ângulos formados por retas paralelas e transversais. Ângulos: opostos pelo vértice, adjacentes, correspondentes. Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo. Linhas. Polígonos: ângulos internos e externos, diagonais, convexidade. Número de diagonais de um polígono convexo. Quadriláteros e pentágonos: soma dos ângulos internos. Polígonos convexos: soma dos ângulos internos e externos. Polígonos regulares: triângulos, quadriláteros, hexágonos. Triângulos, medianas, alturas e bissetrizes: construções com régua e compasso. Casos de congruência de triângulos. Propriedades dos triângulos isósceles: ângulos da base, mediana, altura e bissetriz. Propriedades de paralelogramos, losangos, retângulos e quadrados.
4	Construções geométricas: triângulos, ângulos, bissetriz, paralelogramos. Ângulos formados por retas paralelas e transversais. Polígonos; quadriláteros; simetrias. Proporcionalidade em figuras geométricas. Perímetro da circunferência
5	Polígonos. Ângulos formados por paralelas e transversais. Polígonos convexos. Triângulos: congruência. Quadriláteros: classificação. Circunferência: ângulos centrais e inscritos.
6	Retas e ângulos: posições relativas entre retas. Ângulos formados por retas paralelas e transversais. Triângulos: elementos, classificação, propriedades dos ângulos. Triângulos: casos de congruência, pontos notáveis, propriedades. Polígonos convexos. Quadriláteros: classificação, propriedades. Polígonos: soma dos ângulos. Polígono regular. Circunferência e círculo: posições relativas, inscrição e circunscrição. Arco, ângulo central e ângulo inscrito.

Livro	Conteúdo do 8º ano
7	Ângulos: classificação, propriedades, nos polígonos regulares. Triângulo: pontos notáveis, casos de congruência. Propriedades do triângulo isósceles. Distância entre: dois pontos, ponto e reta. Perímetro. Área de superfícies. Áreas de figuras geométricas: quadriláteros, triângulos, regiões circulares. Circunferência e círculo. Ângulo central, inscrito. Quadriláteros: classificação.
8	Ângulos e retas; polígonos: classificação, propriedades. Triângulos e quadriláteros: classificação, propriedades. Circunferência e círculo. Polígonos regulares. Retas e circunferência. Ângulos em circunferência. Perímetro de figuras planas. área de figuras geométricas plana.
9	Área de figuras geométricas planas: retângulo, quadrado, paralelogramo. Área de figuras geométricas planas: triângulo, trapézio, polígonos. Simetrias de: reflexão, rotação e translação. Mosaicos e ornamentos. Triângulos: pontos notáveis, desigualdade triangular. quadriláteros: classificação. Círculo e circunferência: posições relativas, polígonos inscritos e circunscritos.
10	Ângulos: elementos, classificação, bissetriz, opostos pelo vértice. Polígonos: número de diagonais. Polígonos: soma das medidas dos ângulos internos e dos ângulos externos. Triângulos: definição, classificação, condição de existência, congruência, pontos notáveis. Quadriláteros: paralelogramo e trapézio. Quadriláteros. Área de polígonos: paralelogramo, triângulo, trapézio, losango. Circunferência e círculo: elementos, posições relativas em relação a pontos. Posições relativas entre retas e circunferências.

Livro	Conteúdo do 9º ano
1	Semelhança de triângulos. Figuras geométricas planas: conceitos e propriedades. Circunferências, ângulos e polígonos.
2	Semelhança de triângulos. Circunferência: elementos, propriedades, relações métricas. Polígonos regulares: elementos, propriedades. Área de um polígono regular. Área de um círculo.
3 cont.	Proporções entre segmentos de retas. Teorema de Tales. Divisão de segmentos. O teorema de Tales nos triângulos. Figuras geométricas semelhantes: definição, razão de semelhança. Polígonos semelhantes. relação entre perímetro e área. Semelhança entre polígonos regulares. Homotetia. Teorema fundamental da semelhança de triângulos.

Livro	Conteúdo do 9º ano
cont. 3	Casos de semelhança de triângulos. Semelhança triângulos. Circunferência: definição, elementos, círculo. Propriedades de diâmetros e cordas. Posições relativas entre: reta e circunferência em um plano, duas circunferências. Ângulos: inscritos e centrais. Propriedade relacionando as medidas de cordas que se interceptam. Polígonos regulares inscritos em uma circunferência: elementos. Hexágonos regulares.
4	Semelhança de polígonos. Triângulos semelhantes. Geometria dedutiva, ângulos em polígonos, ângulos em circunferências. Teorema de Tales. Polígonos inscritos e circunscritos – perímetro e área do círculo. Simetria.
5	Semelhanças de figuras geométricas. Semelhança de triângulos. Teorema de Tales. Triângulo retângulo: teorema de Pitágoras, relações métricas e trigonométricas. Polígonos regulares – comprimento da circunferência. Área de figuras geométricas planas.
6	Razões e proporções – Teorema de Tales. semelhança de figuras geométricas. Semelhança de triângulos. Área do círculo, da coroa circular e do setor circular.
7	Semelhança: figuras geométricas, polígonos, triângulos. Teorema de Tales. Área de quadriláteros e de triângulos. Polígonos regulares – área de polígonos regulares. Área do círculo. Área do setor e da coroa circular.
8	Figuras geométricas semelhantes. Semelhança de polígonos. Transformações geométricas: translação, reflexão, rotação, homotetia. Relações métricas: no triângulo retângulo; na circunferência. Polígono regular: inscrição, apótema. Perímetro: polígonos, circunferência. área de polígonos.
9	Demonstrações em geometria: as primeiras demonstrações, passo a passo de uma demonstração... Congruência: casos de congruência de triângulos. Figuras geométricas semelhantes: triângulos. Teorema de Tales. Semelhança de triângulos: relações proporcionais. Medidas na circunferência e no círculo: comprimento da circunferência. Área do círculo.
10	Simetria de rotação. Simetria de translação, simetria de reflexão. Segmentos proporcionais. Teorema de Tales. Semelhança de figuras geométricas: homotetia. Triângulos semelhantes. Circunferência: ângulos, comprimento. Área do círculo.

ANEXO C – IDADES DOS ALUNOS EM CADA ANO

Na tabela abaixo temos a relação das idades dos alunos conforme eles anotaram em seus questionários.

Idades	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	Total
10	19	0	0	0	19
11	35	11	0	0	46
12	5	37	15	0	57
13	0	6	33	29	68
14	0	2	11	25	38
15	0	0	1	4	5
16	0	0	1	1	2
	Questionários sem idade (7º ano)				2
Todos	59	56	61	59	237

ANEXO D – ESCOLAS QUE OS ALUNOS ESTUDARAM ANTERIORMENTE

Os alunos do 6º ano estudaram nas seguintes escolas no 5º ano:

Nº de Alunos	Escola - 5º ano
55	Municipal - Curitiba/PR
1	Municipal - Interior/PR
2	Particular - Curitiba - PR
1	Não informou

Os alunos do 7º ano estudaram nas seguintes escolas no 5º e 6º ano:

Nº de Alunos	Escola - 5º ano
49	Municipal - Curitiba/PR
1	Municipal - S. J. dos Pinhais/PR
1	Municipal - Outro estado
7	Particular - Curitiba/PR

Nº de Alunos	Escola - 6º ano
8	COLÉGIO - Turma A
5	COLÉGIO - Turma B
5	COLÉGIO - Turma C
8	COLÉGIO - Turma D
5	COLÉGIO - Turma E
8	COLÉGIO - Turma F
7	COLÉGIO - Turma G
6	COLÉGIO - Turma H
2	Estadual - Curitiba/PR
1	Particular - Curitiba/PR
3	Não informou

Os alunos do 8º ano estudaram nas seguintes escolas no 5º, 6º e 7º ano:

Nº de Alunos	Escola - 5º ano
44	Municipal - Curitiba/PR
1	Municipal - Interior/PR
10	Particular - Curitiba/PR
6	Não informou

Nº de Alunos	Escola - 6º ano
6	COLÉGIO - Turma A
6	COLÉGIO - Turma B
10	COLÉGIO - Turma C
4	COLÉGIO - Turma D
9	COLÉGIO - Turma E
4	COLÉGIO - Turma F
2	COLÉGIO - Turma G
6	COLÉGIO - Turma H
2	Estadual - Curitiba/PR
1	Estadual - Interior/PR
7	Particular - Curitiba/PR
4	Não informou

Nº de Alunos	Escola - 7º ano
7	COLÉGIO - Turma A
7	COLÉGIO - Turma B
6	COLÉGIO - Turma C
6	COLÉGIO - Turma D
11	COLÉGIO - Turma E
7	COLÉGIO - Turma F
6	COLÉGIO - Turma G
7	COLÉGIO - Turma H
1	Estadual - Interior/PR
1	Particular - Curitiba/PR
2	Não informou

Os alunos do 9º ano estudaram nas seguintes escolas no 5º ano:

Nº de Alunos	Escola - 5º ano
43	Municipal - Curitiba/PR
2	Municipal - Interior/PR
3	Municipal - Outro estado
7	Particular - Curitiba/PR
4	Não informou

Os alunos do 9º ano estudaram nas seguintes escolas no 6º, 7º e 8º ano:

Nº de Alunos	Escola - 6º ano
6	COLÉGIO - Turma A
6	COLÉGIO - Turma B
3	COLÉGIO - Turma C
4	COLÉGIO - Turma D
4	COLÉGIO - Turma F
3	COLÉGIO - Turma G
6	COLÉGIO - Turma H
12	Estadual - Curitiba/PR
3	Estadual - Interior/PR
2	Estadual - Outro estado
8	Particular - Curitiba/PR
2	Não informou

Nº de Alunos	Escola - 7º ano
4	COLÉGIO - Turma A
4	COLÉGIO - Turma B
5	COLÉGIO - Turma C
4	COLÉGIO - Turma D
7	COLÉGIO - Turma E
4	COLÉGIO - Turma F
7	COLÉGIO - Turma G
7	COLÉGIO - Turma H
10	Estadual - Curitiba/PR
1	Estadual - Outro estado
4	Particular - Curitiba/PR
2	Não informou

Nº de Alunos	Escola - 8º ano
4	COLÉGIO - Turma A
4	COLÉGIO - Turma B
6	COLÉGIO - Turma C
3	COLÉGIO - Turma D
8	COLÉGIO - Turma E
5	COLÉGIO - Turma F
8	COLÉGIO - Turma G
8	COLÉGIO - Turma H
8	Estadual - Curitiba/PR
1	Estadual - Outro estado
2	Particular - Curitiba/PR
2	Não informou

ANEXO E – TABELA: Nº DE ALUNOS X Nº DE QUESTÕES CERTAS

A tabela com o número de alunos que acertaram as questões 15 questões (A15) até nenhuma questão (A0) em todo questionário.

Resp. Certas	6º ano (59)	7º ano (58)	8º ano (61)	9º ano (59)	Geral (237)
A15	0	0	0	0	0
A14	0	0	0	0	0
A13	0	0	0	0	0
A12	0	0	0	0	0
A11	0	0	0	1	1
A10	0	1	1	1	3
A9	1	0	1	1	3
A8	0	2	2	0	4
A7	0	1	1	4	6
A6	4	5	8	12	29
A5	4	7	12	12	35
A4	10	9	9	13	41
A3	7	12	14	8	41
A2	10	13	8	7	38
A1	15	5	4	0	24
A0	8	3	1	0	12

ANEXO F – TABELA: IDADE X NÍVEIS DE VAN HIELE

Tabela com o número de alunos por idade nos níveis e porcentagem em relação ao total de alunos participantes (237 alunos).

	Nível 0		Nível 1		Nível 2		Total
	Atingiu	Em processo	Atingiu	Em processo	Atingiu	Em processo	por idade
10 anos	3	5	1	0	0	0	19
11 anos	8	10	0	0	0	1	46
12 anos	22	16	2	5	0	2	57
13 anos	39	17	1	5	0	2	68
14 anos	18	9	1	0	0	1	38
15 anos	0	4	0	0	0	0	5
16 anos	0	0	0	0	0	0	2
? anos	0	2	0	0	0	0	2
Todas as idades	90	63	5	10	0	6	237
% do total	38,0%	26,6%	2,1%	4,2%	0,0%	2,5%	