

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA**  
**BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**DIEGO GONZALES D'ALMEIDA**

**COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS PARA COGRAFOS**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**PONTA GROSSA**  
**2018**

**DIEGO GONZALES D'ALMEIDA**

**COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS PARA COGRAFOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação, do Departamento Acadêmico de Informática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof<sup>ta</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sheila Morais de Almeida

**PONTA GROSSA**

**2018**



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Câmpus Ponta Grossa

Diretoria de Graduação e Educação Profissional  
Departamento Acadêmico de Informática  
Bacharelado em Ciência da Computação



---

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

### **COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS PARA COGRAFOS**

por

**DIEGO GONZALES D'ALMEIDA**

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em 20 de Novembro de 2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dra. Sheila Morais de Almeida  
Orientadora

---

Prof. Dr. André Luis Vignatti  
Universidade Federal do Paraná  
Membro titular

---

Prof. MSc. Saulo Jorge Beltrão de Queiroz  
Membro titular

---

Prof(a). Dra. Helyane Bronoski Borges  
Responsável pelo Trabalho de Conclusão  
de Curso

---

Prof. MSc. Saulo Jorge Beltrão de Queiroz  
Coordenador do curso

- A Folha de Aprovação assinada encontra-se arquivada na Secretaria Acadêmica -

Dedico este trabalho a Deus, a família e a todos que tenho por família.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter sido meu alicerce maior durante toda a minha trajetória, a minha família, meu maior exemplo e símbolo de amor na minha vida, a Cintia, pela enorme paciência, por toda ajuda e todo carinho, e a professora Sheila por ter sido uma fantástica mentora e guia, a quem levarei como inspiração para toda vida. Aos amigos, a todos os amados e aos que caminharam comigo e acreditaram em mim, o meu mais sincero obrigado.

*"O que é a imaginação? É uma faculdade nobre e divina. Ela torna a Terra tolerável; nos ensina a viver no tom do eterno."  
Ada Lovelace*

## RESUMO

D'ALMEIDA, Diego Gonzales. **Coloração Arco-Íris para Cografos**. 2018. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2018.

Uma coloração de arestas consiste na atribuição de cores às arestas do grafo. Uma forma de atribuição para essas cores é a coloração arco-íris. Essa coloração tem por característica a existência de um caminho que não repete cores entre cada par dos vértices do grafo - chamado de caminho arco-íris. O Problema da Coloração Arco-Íris consiste em encontrar o menor número de cores  $k$  para qual um grafo  $G$  possui uma coloração arco-íris. Esse  $k$  mínimo é chamado de número de conexão arco-íris e é denotado por  $rc(G)$ . O Problema da Coloração Arco-Íris é NP-Completo. Poucas classes de grafos possuem um algoritmo eficiente conhecido para determinar  $rc(G)$ . Este trabalho apresenta limitantes superiores justos para o número de conexão arco-íris em cografos, que são caracterizados por não possuírem  $P_4$  induzido.

**Palavras-chaves:** Cografos. Coloração Arco-Íris. Número de Conexão Arco-Íris.

## ABSTRACT

D'ALMEIDA, Diego Gonzales. **Rainbow Coloring for Cographs**. 2018. 35 p. Work of Conclusion Course (Bachelor in Computer Science) - Federal University of Technology - Paraná. Ponta Grossa, 2018.

An edge coloring of a graph is a assignment of colors to the edges of the graph. The rainbow coloring is an assignment of these colors such that for every pair of vertices there is a path that does not repeat colors. These paths are called rainbow paths. The Rainbow Coloring Problem consists in determining the least number of colors for a rainbow coloring of a given graph. This minimum number of colors is known as rainbow connection number and it is denoted by  $rc(G)$  for a graph  $G$ . The rainbow coloring Problem is NP-complete. There are efficient algorithms to solve it for few classes of graphs. This work presents a tight upper bound for the rainbow connection number of cographs, which are graphs without induced  $P_4$ .

**Key-words: Cographs. Rainbow Coloring. Rainbow Connection Number.**

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Grafo casa multicolorido .....	11
Figura 2	– Grafo $G$ e sua coárvore à esquerda .....	16
Figura 3	– Coloração arco-íris em um grafo completo .....	17
Figura 4	– Coloração arco-íris em uma árvore .....	18
Figura 5	– Grafo <i>Threshold</i> $G_1$ .....	22
Figura 6	– Árvore do Grafo $G_1$ .....	22
Figura 7	– Grafo <i>Threshold</i> $G_1$ colorido .....	23
Figura 8	– Grafo <i>Threshold</i> $G_2$ colorido .....	24
Figura 9	– Cografo $G$ , um $K_{2,6}$ .....	27
Figura 10	– Cografo $G$ multicolorido .....	27
Figura 11	– Cografo multipartido $K_{1,2,4}$ .....	32
Figura 12	– Cografo multipartido $K_{1,2,4}$ colorido .....	32
Figura 13	– Cografos $G_1$ , $G_2$ e $G_3$ .....	34
Figura 14	– Cografo $G = G_1 + G_2 + G_3$ .....	34
Figura 15	– Cografo 3-partido $K_{1,2,4}$ .....	34
Figura 16	– Cografo $G$ colorido .....	35
Figura 17	– Cografo $G = G_1 + G_2$ .....	38
Figura 18	– Cografo $G$ colorido .....	38

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\chi'(G)$	Índice cromático de $G$
$rc(G)$	Número de conexão arco-íris
$src(G)$	Número de conexão arco-íris forte
$K_n$	Grafo completo com $n$ vértices
$A \cup B$	União entre os grafos $A$ e $B$
$A + B$	Junção entre os grafos $A$ e $B$
$V(G) \setminus I$	Conjunto de vértices de $G$ menos conjunto $I$
$\beta$	Conjunto de palavras do código binário referente aos elementos do conjunto independente
$C_G$	Coloração arco-íris de um grafo $G$
$S_k$	Grafo estrela com $k$ folhas

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
1.1	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO .....	13
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES BÁSICAS E RESULTADOS ANTERIORES</b> .....	<b>14</b>
2.1	COGRAFOS .....	15
2.2	COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS .....	17
2.2.1	Resultados Seminais Sobre Coloração Arco-íris .....	17
2.2.2	Coloração Arco-Íris em Grafos <i>Threshold</i> .....	19
2.2.3	Coloração Arco-Íris em Grafos Bipartidos Completos .....	25
2.2.4	Coloração Arco-Íris em Grafos Multipartidos Completos .....	29
<b>3</b>	<b>NOVOS RESULTADOS</b> .....	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b> .....	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>40</b>

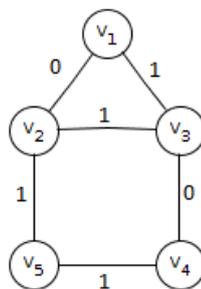
## 1 INTRODUÇÃO

Uma coloração de arestas consiste em atribuir cores às arestas de um grafo, uma cor para cada aresta. Se arestas adjacentes possuem cores distintas, então a coloração de arestas é dita própria. Uma  $k$ -coloração de arestas de um grafo  $G$  é uma coloração de arestas própria que use  $k$  cores. O índice cromático de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ , é o número mínimo  $k$  para o qual  $G$  tem uma  $k$ -coloração de arestas. Os conceitos básicos utilizados neste trabalho foram definidos de acordo com Chartrand e Zhang (2008).

Para dois vértices  $u$  e  $v$  em um grafo  $G$ , um passeio  $P$  entre  $u$  e  $v$  é representado por uma sequência de vértices começando em  $u$  e terminando em  $v$  tal que vértices consecutivos em  $P$  são adjacentes em  $G$ . Um passeio em um grafo  $G$  em que não há repetição de vértices é chamado de caminho. Um caminho de  $u$  a  $v$  será representado como  $u - v$ , com o traço representado a sequência de vértices entre  $u$  e  $v$ . Dado um grafo com uma coloração de arestas não necessariamente própria, um caminho sem arestas da mesma cor é chamado de caminho arco-íris.

Um grafo  $G$  é arco-íris-conexo se existe uma coloração de arestas que garante um caminho arco-íris entre cada par de vértices de  $G$ . Tal coloração é chamada de coloração arco-íris e foi introduzida por Chartrand e Zhang (2008). Se  $k$  cores forem usadas, então essa coloração é uma  $k$ -coloração arco-íris. O menor  $k$  necessário para existir uma  $k$ -coloração arco-íris de um grafo conexo  $G$  é chamado de número de conexão arco-íris e representado por  $rc(G)$ . Um grafo  $G$  possui uma coloração arco-íris forte quando essa coloração garante um caminho arco-íris mínimo (também chamado de geodésico) entre cada par de vértices de  $G$ . O menor número de cores para o qual existe uma coloração arco-íris forte é chamado de número de conexão arco-íris forte e representado por  $src(G)$ . A Figura 1 ilustra um grafo  $G$  com uma coloração arco-íris ótima. Neste grafo,  $rc(G) = 2$  e  $src(G) = 2$ .

**Figura 1 – Grafo casa multicolorido**



**Fonte: Autoria Própria**

O Problema da Coloração Arco-Íris consiste em determinar o valor de  $rc(G)$  para um dado grafo conexo  $G$ . Note que se  $G$  não for conexo, não existe uma coloração arco-íris, portanto neste trabalho estaremos lidando somente com grafos conexos. A versão de decisão do Problema

da Coloração Arco-Íris é, dados um número natural  $k$  e um grafo conexo  $G$ , responder se  $G$  tem uma coloração arco-íris com  $k$  cores. Se existir uma solução eficiente para a versão de decisão do Problema da Coloração Arco-Íris, então pode-se obter facilmente um algoritmo polinomial que resolve o problema original da Coloração Arco-Íris (versão de otimização). É suficiente testar para cada  $k$  a partir de 1, se a resposta para a versão de decisão é “sim”. O menor  $k$  para o qual a resposta for “sim” é o número de conexão arco-íris do grafo.

Entretanto, a versão de decisão do Problema da Coloração Arco-Íris é um problema NP-Completo. Um problema  $X$  pertence à classe NP (*Nondeterministic Polynomial time*) se for possível verificar o certificado de todas as instâncias para as quais  $X$  for decidível em tempo polinomial por uma máquina determinística. Se, além disso, uma solução polinomial para  $X$  implicar em solução polinomial para todos os problemas da classe NP, então  $X$  é chamado de NP-completo.

O conjunto dos problemas para os quais é possível construir um algoritmo com complexidade de tempo polinomial é denotado por P. Caso seja possível construir algoritmo polinomial para algum problema NP-completo, então as classes de problemas NP e P são iguais.

Então, a busca por algoritmos eficientes ainda que para soluções parciais em problemas NP-completos, como o Problema da Coloração Arco-Íris, mostra-se uma contribuição relevante para a Teoria da Computação.

Chartrand *et al.* (2008) resolveram o Problema da Coloração Arco-Íris para os grafos roda, ciclos de ordem  $n$ ,  $k$ -partidos completos, dentre outros. Apesar desse problema estar resolvido por algoritmos eficientes para algumas classes de grafos, permanece em aberto para outras classes bem conhecidas, como a classe dos cografos.

Os cografos são caracterizados como grafos que não contém  $P_4$  como subgrafo induzido (CORNEIL; LERCHS; BURLINGHAM, 1981). São construídos a partir de um único vértice (grafo  $K_1$ ) por sucessivas operações de união ou de junção com outros cografos (LERCHS, 1971). Para melhor compreensão dessa definição, é preciso conhecer as operações de união e junção de grafos. Na operação de união - representada por  $G_1 \cup G_2$  - o grafo resultante  $G_3$ , possui o conjunto de vértices  $V(G_3) = V(G_1) \cup V(G_2)$  e o conjunto de arestas  $E(G_3) = E(G_1) \cup E(G_2)$ , ou seja, forma-se um grafo necessariamente desconexo com pelo menos duas componentes conexas. Por outro lado, a operação de junção - representada por  $G_1 + G_2$  - resulta em um grafo  $G_3$  necessariamente conexo onde o conjunto de vértices  $V(G_3) = V(G_1) \cup V(G_2)$  e o conjunto de arestas  $E(G_3) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{v_i v_j : v_i \in V(G_1) \text{ e } v_j \in V(G_2)\}$ . Como cada vértice de  $G_1$  é adjacente a todos os vértices de  $G_2$ , o grafo é sempre conexo após a operação de junção. Bretscher *et al.* (2003) desenvolveram um algoritmo de reconhecimento de cografos em tempo linear. Este trabalho investiga quão próximo do diâmetro de um cografo pode ser seu número de conexão arco-íris. Os cografos serão melhor detalhados na Seção 2.1.

Alguns resultados sobre o número de conexão arco-íris em subclasses de cografos são conhecidos, como, por exemplo: para grafos completos (CHARTRAND *et al.*, 2008), *threshold* (CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012) e multipartidos completos (CHARTRAND

*et al.*, 2008). Sabe-se também que para qualquer grafo  $G$ , é verdade que  $rc(G) \geq diam(G)$ , onde o diâmetro de  $G$  é a maior distância entre dois vértices de  $G$  (CHARTRAND *et al.*, 2008). Como os cografos não possuem  $P_4$  como subgrafo induzido, o diâmetro de qualquer cografo é limitado a 2. A principal contribuição é mostrar que o número de conexão arco-íris de um cografo é limitado pelo seu número de vértices pendentes<sup>1</sup> e, na ausência desses, apresentamos uma coloração arco-íris que utiliza no máximo quatro cores. A partir desse resultado, tem-se um limite superior para o número de conexão arco-íris de cografos sem vértices pendentes:  $rc(G) \leq 4$ .

## 1.1 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

O Capítulo 2 contém definições básicas que auxiliam no entendimento de conceitos e provas deste trabalho. A Seção 2.1 é dedicada à classe dos cografos e a Seção 2.2 descreve classes relacionadas com os cografos para as quais já existe solução polinomial: a Seção 2.2.1 apresenta resultados seminais, para grafos completos e árvores; a Seção 2.2.2 apresenta a técnica de coloração arco-íris em grafos *threshold*, a Seção 2.2.3 mostra os resultados para os grafos bipartidos completos e a Seção 2.2.4 generaliza os resultados obtidos em grafos bipartidos completos para os grafos multipartidos completos. O Capítulo 3 contém os resultados obtidos após realização desse estudo. Por fim, o Capítulo 4 apresenta as conclusões deste trabalho e propõe alguns tópicos para trabalhos futuros.

---

<sup>1</sup> vértices com grau igual a 1

## 2 DEFINIÇÕES BÁSICAS E RESULTADOS ANTERIORES

Este capítulo apresenta conceitos básicos relacionados a este trabalho. A próxima seção destina-se a detalhar os cografos. Algumas classes relacionadas com os cografos nas quais o Problema da Coloração Arco-Íris está resolvido. A Seção 2.2 apresenta propriedades da coloração arco-íris e contém resultados prévios em classes relacionadas com os cografos.

Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é um grafo tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Um subgrafo gerador de um grafo  $G$  é um subgrafo  $H$  tal que  $V(H) = V(G)$ . Dado um grafo  $G$  e um subconjunto de vértices  $U$ , o subgrafo  $H$  induzido por  $V(G) \setminus U$  é o grafo obtido ao se remover todos os vértices do conjunto  $U$  do grafo  $G$  com suas respectivas arestas. Um grafo  $G$  contém  $H$  como subgrafo induzido se, ao remover vértices de  $G$  obtém-se o grafo  $H$ . Um ciclo em um grafo  $G$  é um caminho  $v_1 v_2 v_3 \dots v_k$  em que todo vértice  $v_i$  é adjacente a  $v_{(i+1) \bmod k}$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Uma árvore é um grafo que não contém ciclos como subgrafos. Um grafo completo com  $n$  vértices,  $K_n$ , é um grafo com  $n$  vértices em que existe aresta entre todos os pares de vértices. Um grafo que é um ciclo com  $n$  vértices é denotado por  $C_n$ . Um grafo que é um caminho com  $n$  vértices é denotado por  $P_n$ .

O grau de um vértice  $v$  em um grafo  $G$ , denotado por  $d(v)$ , é o número de arestas incidentes em  $v$ . O maior dentre os graus dos vértices de  $G$  é chamado de grau máximo de  $G$  e denotado por  $\Delta(G)$ . Um vértice universal em um grafo  $G$  é um vértice adjacente a todos os outros vértices do grafo. Então, se um vértice  $v$  é vértice universal em um grafo  $G$ , tem-se  $d(v) = \Delta(G) = |V(G)| - 1$ , onde  $V(G)$  é o conjunto de todos os vértices de  $G$ . Se  $v$  é um vértice com  $d(v) = 1$ , então  $v$  é chamado de vértice pendente ou folha. Um grafo estrela  $S_n$  é um grafo com  $n + 1$  vértices em que um deles é vértice universal e os demais são  $n$  vértices pendentes. Todo grafo estrela não tem ciclos e, portanto, é uma árvore. Nas árvores, os vértices pendentes também são chamados de folhas. Neste trabalho ambos os termos serão usados.

Dado um grafo  $G$  e um vértice  $v$ , o conjunto dos vértices que são adjacentes a  $v$  é chamado de vizinhança de  $v$  e denotado por  $N(v)$ .

Uma clique em um grafo  $G$  é um conjunto de vértices que são dois a dois adjacentes. Uma clique é maximal se não está contida em nenhuma outra clique do grafo. Um conjunto independente em um grafo  $G$  é um conjunto de vértices que são dois a dois não adjacentes em  $G$ . Um conjunto independente é maximal quando não está contido em nenhum outro conjunto independente do grafo.

Dados  $k$  conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  tais que  $A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,|A_i|}\}$ , o produto cartesiano  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$  é o conjunto formado por todas as possíveis  $k$ -tuplas  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ , onde  $c_i \in A_i$  para  $1 \leq i \leq k$ . Por exemplo,  $\{1, 2, 3\} \times \{5, 7\} = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}$ .

Após a definição de conceitos gerais da Teoria dos Grafos que são necessários para a compreensão deste documento, as próximas seções tratam dos cografos e da coloração arco-íris,

que são os conceitos centrais no desenvolvimento deste trabalho.

## 2.1 COGRAFOS

A classe de cografos foi descoberta por diversos pesquisadores de maneira independente durante a década de 70, sendo o trabalho mais antigo atribuído a Lerchs (1971). O termo cografo refere-se a grafos redutíveis por complemento - redutíveis porque podem ser reduzidos a vértices isolados por meio de recursivas operações de complemento. A operação de complemento de um grafo  $G$  consiste em construir um grafo  $\overline{G}$  tal que  $V(\overline{G}) = V(G)$  e  $E(\overline{G})$  é o conjunto de todas as arestas que não existem entre os vértices de  $G$ .

Além dos termos cografo e grafo redutível por complemento, a classe também é comumente chamada de grafos livres de  $P_4$ . O motivo é que pela própria definição, cografos são redutíveis por complemento e o complemento de um  $P_4$  é um  $P_4$ , não sendo possível haver redução. Portanto, não há caminhos de tamanho quatro ( $P_4$ ) induzidos em cografos.

**Definição 2.1.** (CORNEIL; LERCHS; BURLINGHAM, 1981) *definiram cografos recursivamente da seguinte maneira:*

1. Um grafo de um vértice só (chamado de grafo trivial) é um cografo;
2. Se  $G_1, G_2, \dots, G_k$  são cografos, assim também é a união deles  $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ;
3. Se  $G$  é um cografo, assim também é seu complemento  $\overline{G}$ .

Uma definição equivalente para os cografos, já apresentada na introdução, utiliza operações de junção em vez de operações de complemento:

**Definição 2.2.** (BRANDSTADT et al., 1999)  *$G$  é um cografo se, e somente se,*

1.  $G$  é um  $K_1$ ;
2. ou  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ , tal que  $G_1, G_2, \dots, G_k$  são cografos;
3. ou  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ , tal que  $G_1, G_2, \dots, G_k$  são cografos;

Como já visto, as operações de junção entre dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  é denotada por  $G_1 + G_2$  e adiciona arestas de cada vértice de  $G_1$  para todos os vértices de  $G_2$ .

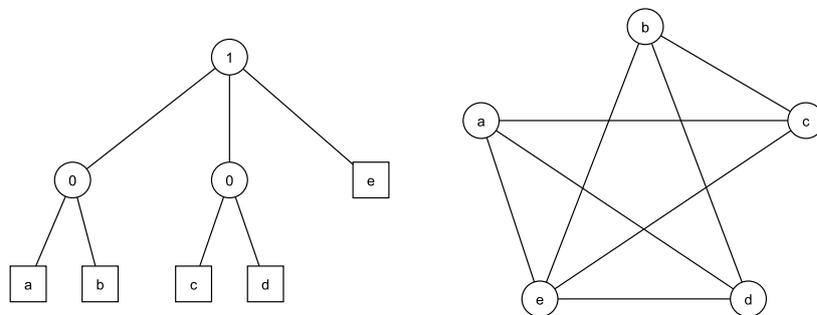
Uma das propriedades estruturais da classe descrita por Corneil, Lerchs e Burlingham (1981) é a existência de uma árvore, denominada coárvore, onde os nós folhas representam os vértices do grafo e os nós não-folha representam as operações aplicadas na construção do cografo. Se a operação aplicada é a de união, o nó é rotulado como 0 na coárvore, e se é uma operação de junção, o nó recebe rótulo 1. Podem existir mais que uma coárvore que representa

o mesmo cografo. A coárvore canônica é a coárvore em que cada nó interno possui pelo menos dois filhos que podem ser tanto folha quanto nó interno. Além disso, os níveis de uma coárvore canônica intercalam nós rotulados com 0 e rotulados com 1. Cada cografo é associado a uma, e somente uma, coárvore canônica. Neste trabalho, quando uma coárvore for mencionada, refere-se à coárvore canônica.

A raiz de uma coárvore é o nó  $R$  que é ancestral de todos os vértices da coárvore. Um nó  $N$  é dito ancestral de um vértice  $x$  se  $N$  for parte do caminho de  $x$  até a raiz  $R$ . Um ancestral comum de dois vértices  $x$  e  $y$  é um nó  $C$  que é ancestral tanto de  $x$  quanto de  $y$ . O ancestral comum mais próximo de  $x$  e  $y$  é o ancestral comum que está no maior nível da coárvore. Assim, é possível utilizar uma coárvore canônica para verificar se dois vértices do cografo são adjacentes ou não. Para isso é analisado se o ancestral comum mais próximo,  $C$ , é um nó rotulado com 0 ou 1. Se  $C = 0$ , os vértices não são adjacentes, caso contrário ( $C = 1$ ), os vértices são adjacentes.

A Figura 2 ilustra um exemplo de cografo e sua coárvore. Note que os vértices  $a$  e  $b$  assim como os vértices  $c$  e  $d$  são ligados por um nó 0, o que indica que não são adjacentes, porém no nível acima há um nó 1, indicando que tanto  $a$  quanto  $b$  são adjacentes ao vértice  $c$  e ao vértice  $d$ . Também pode-se observar que o vértice  $e$  é adjacente a todos os outros vértices do grafo.

**Figura 2 – Grafo  $G$  e sua coárvore à esquerda**



**Figura 2 – Fonte: Autoria Própria**

Dado um grafo  $G$  e dois vértices  $u$  e  $v$ , a distância entre  $u$  e  $v$  no grafo  $G$  é o número de arestas do menor caminho que existe entre  $u$  e  $v$ . A distância entre  $u$  e  $v$  é denotada por  $dist(u, v)$ . O diâmetro do grafo  $G$  é a maior distância entre os pares de vértices de  $G$  e é denotado por  $diam(G)$ . Formalmente,  $diam(G) = \max_{u,v \in G} \{dist(u, v)\}$ . Como os cografos não contêm  $P_4$  como subgrafo induzido, vale a seguinte observação.

**Observação 2.3.** *Se  $G$  é um cografo, então  $diam(G) \leq 2$ .*

Essa restrição implica na seguinte caracterização dos cografos.

**Definição 2.4.** (BRANDSTADT et al., 1999)  *$G$  é um cografo se, e somente se, todo subgrafo induzido de  $G$  tem diâmetro no máximo 2.*

## 2.2 COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS

Esta seção é referente aos resultados já conhecidos de colorações arco-íris em classes de grafos relacionadas com os cografos. A Seção 2.2.1 contém resultados do Problema da Coloração Arco-íris para os grafos completos e para as árvores. A Seção 2.2.2 aborda coloração arco-íris em grafos *threshold*. A Seção 2.2.3 apresenta os resultados conhecidos para os grafos bipartidos completos e a Seção 2.2.4 trata o Problema da Coloração Arco-íris nos grafos multipartidos completos.

### 2.2.1 Resultados Seminais Sobre Coloração Arco-íris

Essa seção apresenta os resultados obtidos por Chartrand e Zhang (2008) no trabalho que introduziu o Problema da Coloração Arco-íris. São resultados fundamentais no desenvolvimento desta Teoria, alguns gerais e outros relacionadas a classes de grafos específicas e bem conhecidas.

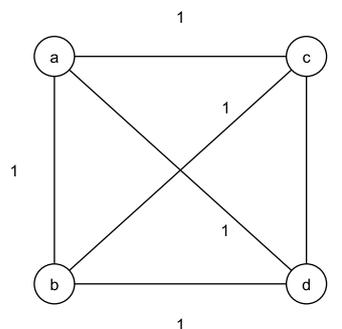
**Lema 2.5.** (CHARTRAND; ZHANG, 2008) *Seja  $G$  um grafo não-trivial conexo. O grafo  $G$  tem  $rc(G) = 1$  se, e somente se,  $G$  é um grafo completo.*

*Demonstração.* Se  $G$  é um grafo completo, então existe uma aresta entre cada par de vértices de  $G$ . Logo, existe um caminho arco-íris de tamanho 1 entre cada par de vértices e apenas uma cor é necessária para uma coloração arco-íris de  $G$ .

Por outro lado, se  $G$  não é um grafo completo, então existem dois vértices não adjacentes  $u$  e  $v$  e todo caminho de  $u$  a  $v$  tem tamanho pelo menos 2. Assim  $rc(G) \geq 2$ .  $\square$

A Figura 3 ilustra um grafo  $K_4$  com uma coloração arco-íris usando apenas uma cor.

**Figura 3 – Coloração arco-íris em um grafo completo**



**Figura 3 – Fonte: Autoria Própria**

É oportuno ressaltar que, para um dado grafo  $G$ , o parâmetro  $src(G)$  é o menor número de cores que permite uma coloração arco-íris forte do grafo  $G$ , ou seja, uma coloração arco-íris em que todo par de vértices tem um caminho geodésico que é arco-íris.

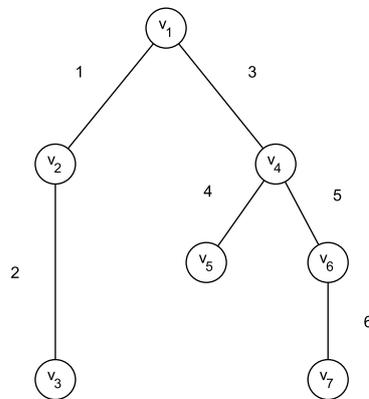
**Lema 2.6.** (CHARTRAND; ZHANG, 2008) *Seja  $G$  um grafo não-trivial conexo com  $m$  arestas. O grafo  $G$  tem  $rc(G) = src(G) = m$  se, e somente se,  $G$  é uma árvore.*

*Demonstração.* Considere um grafo  $G$  com  $m$  arestas. Primeiro, será provado por contraposição que se  $G$  não é uma árvore, então  $G$  tem uma coloração arco-íris com menos que  $m$  cores. Como  $G$  não é uma árvore,  $G$  contém um ciclo  $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ , onde  $k \geq 3$ . Então a  $(m - 1)$ -coloração de arestas que atribui a cor 1 às arestas  $v_1v_2$  e  $v_2v_3$  e as demais cores, todas distintas, para as  $m - 2$  arestas restantes é uma  $(m - 1)$ -coloração Arco-Íris de  $G$ . Portanto  $rc(G) \leq m - 1$ .

Considere agora que  $G$  é uma árvore com  $m$  arestas e assuma, por contradição, que existe uma  $(m - 1)$ -coloração arco-íris para  $G$ . Então existem duas arestas  $e = uv$  e  $f = xy$  que possuem a mesma cor. Assuma, sem perda de generalidade que o caminho de  $u$  a  $x$  contém  $e$  e  $f$ . Se este não for o caso, troque os nomes de  $u$  com  $v$  ou de  $x$  com  $y$  ou ambos para analisar o caso em que o caminho de  $u$  a  $x$  contém  $e$  e  $f$ . Como  $G$  é uma árvore, existe um único caminho entre  $u$  e  $x$  e este caminho contém  $e$  e  $f$ . Então, não existe um caminho arco-íris de  $u$  a  $x$  em  $G$ , uma contradição.  $\square$

A Figura 4 ilustra uma árvore  $T$  com  $t$  arestas usando  $t$  cores.

**Figura 4 – Coloração arco-íris em uma árvore**



**Figura 4 – Fonte: Autoria Própria**

**Lema 2.7.** (CHARTRAND; ZHANG, 2008) *Seja  $G$  um grafo conexo não-trivial e  $k \in \{1, 2\}$ . O grafo  $G$  tem  $rc(G) = k$  se, e somente se,  $src(G) = k$*

*Demonstração.* Se  $rc(G) = 1$ , então  $diam(G) = 1$  e, portanto,  $G$  é um grafo completo. A coloração que atribui a cor 1 para cada aresta de  $G$  é uma 1-coloração forte de  $G$  e portanto  $src(G) = 1$ .

Se  $rc(G) = 2$ , então  $diam(G) = 2$  e existe uma 2-coloração arco-íris de  $G$ . Assim, todo par de vértices não adjacentes de  $G$  está conectado por um caminho arco-íris de tamanho 2, que é necessariamente geodésico. Portanto,  $src(G) = 2$ . Se  $G$  é um grafo com  $src(G) = 2$ , então  $rc(G) \leq 2$ . Entretanto,  $rc(G) \neq 1$ , pois caso contrário  $src(G) = 1$ . Portanto,  $rc(G) = 2$ .  $\square$

Os resultados apresentados nesta seção consideram classes de grafos bastante conhecidas, como grafos completos e árvores. Os grafos completos são cografos e algumas árvores também. Mais especificamente, um cografo é uma árvore se é um grafo estrela. As seções seguintes mostram outros resultados sobre a coloração arco-íris em subclasses dos cografos.

### 2.2.2 Coloração Arco-Íris em Grafos *Threshold*

Um grafo que contenha um único vértice e nenhuma aresta é conhecido como grafo trivial. Um grafo *threshold* é um grafo que é construído a partir de sucessivas operações de união ou junção com grafos triviais. Para fins de demonstração, os vértices dos grafos *threshold* serão rotulados em ordem decrescente de grau ( $d(v_n) \leq d(v_{n-1}) \leq \dots \leq d(v_2) \leq d(v_1)$ ). Chandran e Rajendraprasad (2012) utilizam um código binário para realizar um coloração arco-íris em grafos *threshold*.

**Definição 2.8.** (CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012) *Um código binário é uma string finita sobre um alfabeto  $\{0, 1\}$ . O comprimento de uma palavra  $p$  é denotado por  $\text{length}(p)$  e representa o número de bits em  $p$ . O  $i$ -ésimo bit de  $p$  é denotado por  $p(i)$ . Uma palavra  $p_1$  é dita prefixo de uma palavra  $p_2$  se  $\text{length}(p_1) \leq \text{length}(p_2)$  e  $p_1(i) = p_2(i)$  para todo  $i \in \{1, \dots, \text{length}(p_1)\}$ . Um código binário  $B$  é dito livre de prefixo se nenhuma palavra em  $B$  é prefixo de outra palavra em  $B$ .*

A Inequação de Kraft fornece uma condição necessária e suficiente para um código binário ser livre de prefixo, dado um conjunto de comprimentos de palavras.

**Lema 2.9.** (KRAFT, 1949). *Para todo código binário livre de prefixo  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$*

$$\sum_{i=1}^n 2^{-l_i} \leq 1$$

*onde  $l_i = \text{length}(b_i)$  e, para qualquer sequência de comprimentos  $l_1, \dots, l_n$  que satisfaça a inequação descrita, existe um código livre de prefixo  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ , com  $\text{length}(b_i) = l_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .*

Para criar um código binário livre de prefixo  $B = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , cujo tamanho de cada palavra  $p_i$  é  $l_i$  e tal que  $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n$  vamos construir uma árvore binária com rótulos especiais nas arestas, descrita a seguir. Como  $B$  é um código livre de prefixo, por hipótese,  $\sum_{i=1}^n 2^{-l_i} \leq 1$ .

Em uma árvore, o nível de cada nó é dada pela sua distância até a raiz. Para construir a árvore binária que dá origem ao código  $B$ , crie um nó raiz. Assuma que toda aresta de um nó pai para o primeiro nó filho que for criado na árvore seja rotulada com 0 e que toda aresta de um nó pai para o seu segundo filho criado seja rotulada com 1. Novos nós devem ser inseridos

em um único caminho da raiz à folha para construir a primeira palavra. A primeira folha deve ser um nó  $t_1$ , de profundidade  $l_1$  na árvore. A primeira palavra do código binário é formada pelos rótulos das arestas no caminho da raiz à  $t_1$ . Para criar as demais folhas, deve-se realizar o seguinte procedimento: após criar um nó folha  $t_i$ ,  $1 \leq i < n$ , retroceda na árvore a partir de  $t_i$ , em direção à raiz, até que um nó que ainda não tenha dois filhos seja encontrado. Crie o segundo filho desse nó. Se esse segundo filho estiver no nível  $l_{i+1}$ , então declare-o como a folha  $t_{i+1}$ . Caso contrário, recursivamente crie um novo filho do nó até alcançar o nó do nível  $l_{i+1}$  e declará-lo como folha  $t_{i+1}$ . O processo termina quando a folha  $t_n$  for criada.

Cada caminho da raiz à cada folha da árvore binária é uma palavra do código binário  $B$ .

Para alguns grafos *threshold*, é possível utilizar um código binário livre de prefixo para obter uma coloração arco-íris. O Teorema 2.10 apresenta esses grafos.

**Teorema 2.10.** (CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012) *Seja  $G = (V, E)$  um grafo threshold conexo com  $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$ . O grafo  $G$  tem  $rc(G) \leq 2$  se, e somente se,*

$$\sum_{i=k}^n 2^{-d(v_i)} \leq 1$$

onde  $k = \min\{i : 1 \leq i \leq n, d(v_i) \leq i - 1\}$ .

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo *threshold* conexo com  $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$ . Pela ordenação dos vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , o conjunto  $I = \{v_i \in V(G) : d(v_i) \leq i - 1\}$  é um conjunto independente maximal de  $G$  e  $V(G) \setminus I$  é uma clique em  $G$ . Observe que o somatório do lado esquerdo da desigualdade apresentada no enunciado é realizado sobre todos os vértices do conjunto  $I$ .

Primeiro, será mostrado que se  $rc(G) \leq 2$ , então a desigualdade é satisfeita. Suponha que  $G$  tem uma coloração arco-íris com duas cores e seja  $C_G : E(G) \rightarrow \{0, 1\}$  uma coloração arco-íris de  $G$ . Associe a cada vértice  $v_i \in I$  a palavra  $p_i$  tal que  $p_i(j)$  é a cor da aresta entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$  na coloração  $C_G$ . Como  $G$  é um grafo *threshold*, pela ordem imposta aos vértices,  $N(v_i) = \{v_i, v_2, \dots, v_{d(v_i)}\}$ , para todo  $v_i \in I$ . Como todo par  $v_i, v_j \in I$  tal que  $d(v_i) \leq d(v_j)$  não são adjacentes, é necessário existir um caminho arco-íris de tamanho 2 entre eles. Então esse caminho deve incluir um vizinho  $v_q$  comum a  $v_i$  e  $v_j$ , tal que  $q \in \{1 \leq d(v_i)\}$ , já que  $N(v_i) = \{v_1, v_2, \dots, v_{d(v_i)}\} \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_{d(v_j)}\} = N(v_j)$ . Como o caminho é arco-íris,  $p_i(q) \neq p_j(q)$ . Isso garante que as palavras correspondentes a esses vértices no código binário são diferentes. Então, o código binário formado pelas palavras correspondentes aos vértices do conjunto  $I$  é um código livre de prefixo. Pelo Lema 2.9, a desigualdade proposta no enunciado desse teorema é satisfeita.

Agora, será mostrado que se o grafo  $G$  satisfaz a desigualdade proposta no enunciado, então tem uma coloração arco-íris com duas cores. A coloração será dada a partir de um

código binário livre de prefixo  $B$ , construído como descrito anteriormente. O código binário  $B = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-k+1}\}$  deve ser tal que o tamanho da palavra  $p_i$  seja  $l_i = d(v_{n-i+1})$ ,  $1 \leq i \leq n - k + 1$ . Como, por hipótese,  $d(v_k) \geq d(v_{k+1}) \geq \dots \geq d(v_n)$ , tem-se  $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{n-k+1}$ . Com essa sequência de tamanhos para as palavras de  $B$ , construa a árvore binária, como detalhado anteriormente.

Usando o código binário  $B$ , o Algoritmo 1 cria uma coloração arco-íris  $C_G$  para  $G$  com no máximo 2 cores.

---

**Algoritmo 1: COLORACAOARCOIRISTHRESHOLD-CASO1**

---

**Entrada:** Um grafo threshold conexo  $G = (V, E)$ , com  $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$  e  $\sum_{i=k}^n 2^{-d(v_i)} \leq 1$ , onde  $k = \min\{i : 1 \leq i \leq n, d(v_i) \leq i - 1\}$ .

**Saída:** Uma coloração arco íris  $C_G : E \rightarrow \{0, 1\}$ .

```

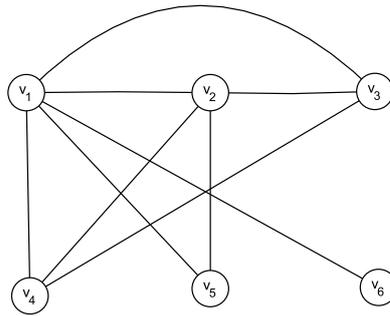
1 início
2    $I \leftarrow \{v_k, \dots, v_n\}$ 
3    $\beta \leftarrow \{p_1, \dots, p_{n-k+1}\}$  um código binário obtido como descrito anteriormente, com
      $l_i = d(v_{n-i+1}), \forall i \in [1, n - k + 1]$ 
4   para  $v_i \in I$  faça
5      $C_G(v_i, v_j) = p_{n-i+1}(j), \forall j \in \{1, \dots, d(v_i)\}$ 
6   fim
7   para  $v_i \in V(G) \setminus I$  faça
8      $C_G(v_i, v_j) = p_{n-k+1}(j), \forall j \in \{1, \dots, i - 1\}$ 
9   fim
10  retorna  $C_G$ 
11 fim
```

---

A árvore correspondente ao código binário é criada com base no conjunto independente máximo  $I$  e um conjunto  $\beta$  das palavras correspondentes a cada vértice do conjunto  $I$ . Considere dois vértices não adjacentes  $v_i$  e  $v_j$ , tal que  $i < j$ . Como  $v_i$  e  $v_j$  não são adjacentes, ou ambos estão em  $I$  ou  $v_j \in I$  e  $v_i$  pertence à clique  $C$  tal que  $i > d(v_j)$ , pois  $N(v_j) = \{v_1, v_2, \dots, v_{d(v_j)}\}$ . No primeiro caso,  $l_{n-i+1} \geq l_{n-j+1}$  e existe um vértice  $v_q \in \{v_1, v_2, \dots, v_{d(v_j)}\}$  tal que  $p_{n-j+1}(q) \neq p_{n-i+1}(q)$  pois  $p_{n-j+1}$  não é um prefixo de  $p_{n-i+1}$ . (É importante frisar que  $p_{n-i+1}$  e  $p_{n-j+1}$  pertencem a um código binário livre de prefixo.) Então  $v_i v_q v_j$  é um caminho arco-íris. Analogamente, no segundo caso,  $l_{n-k+1} \geq l_{n-j+1}$  e existe um vértice  $v_q \in \{v_1, v_2, \dots, v_{d(v_j)}\}$  tal que  $p_{n-j+1}(q) \neq p_{n-k+1}(q)$ , pois  $p_{n-j+1}$  não é um prefixo de  $p_{n-k+1}$ . Então,  $C_G(v_q, v_j) \neq C_G(v_q, v_k) = C_G(v_q, v_i)$ , pelo Algoritmo 1. Logo,  $v_i v_q v_j$  é um caminho arco-íris. Portanto,  $C_G$  é uma coloração arco-íris para  $G$ .  $\square$

Para demonstração da execução do algoritmo, será usado o grafo da Figura 5, criado pela sequência de operações  $G_3 + G_4 \cup G_5 + G_2 \cup G_6 + G_1$ , com  $G_i = \{v_i\}$  para  $1 \leq i \leq 6$ . Portanto  $I = \{v_4, v_5, v_6\}$  e  $\beta = \{p_4, p_5, p_6\}$ .

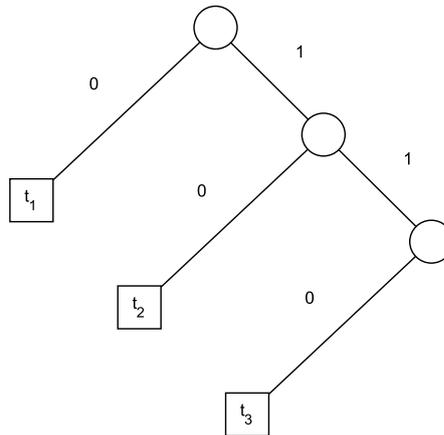
**Figura 5 – Grafo Threshold  $G_1$**



**Fonte: Autoria Própria**

A árvore binária correspondente a esse grafo é apresentada na Figura 6.

**Figura 6 – Árvore do Grafo  $G_1$**



**Fonte: Autoria Própria**

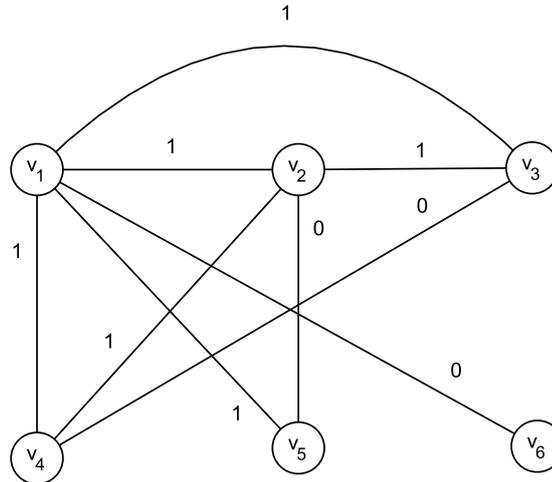
As palavras geradas para o código binário são:

- $p_1$  com tamanho  $d(v_6)$ , construída pelas arestas do caminho da raiz até a folha  $t_1$ , correspondente ao código 0;
- $p_2$  com tamanho  $d(v_5)$ , construída pelas arestas do caminho da raiz até a folha  $t_2$ , correspondente ao código 10;
- e  $p_3$  com tamanho  $d(v_4)$ , construída pelas arestas do caminho da raiz até a folha  $t_3$ , correspondente ao código 110.

Para quaisquer vértices  $v_i \in I$ , a aresta entre  $v_i$  qualquer vizinho  $v_j$  deve ser colorida com o bit  $p_{n-i+1}(j)$ . Assim, para a aresta  $(v_4, v_1)$ , deve ser atribuído o primeiro bit de  $p_3$ , que é 1. Para a aresta  $(v_4, v_2)$  deve-se atribuir o segundo bit de  $p_3$ , que é 1 e para a aresta  $(v_4, v_3)$  deve-se atribuir o terceiro bit de  $p_3$ , que é 0. De forma análoga, os bits 1 e 0 de  $p_2$  são atribuídos às arestas  $(v_5, v_1)$  e  $(v_5, v_2)$ , respectivamente, e o bit 0 de  $p_1$  deve ser atribuído à aresta  $(v_6, v_1)$ .

Para arestas entre dois vértices da clique  $v_i$  e  $v_j$  tais que  $i > j$ , será atribuído o  $j$ -ésimo bit da palavra  $p_{n-k+1}$  - nesse caso,  $p_3$ . Assim, as arestas  $(v_1, v_2)$  e  $(v_1, v_3)$  devem ser coloridas com o bit  $p_3(1)$ . E a aresta  $(v_2, v_3)$  deve ser colorida com o segundo bit de  $p_3$ , que é 1. A Figura 7 mostra o grafo já colorido.

**Figura 7 – Grafo *Threshold*  $G_1$  colorido**



**Fonte: Autoria Própria**

O Teorema 2.11 e o Algoritmo 2 apresentam uma coloração arco-íris para grafos *threshold* que não satisfazem a desigualdade do Teorema 2.10.

**Teorema 2.11.** (CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012) *Seja  $G = (V, E)$  um grafo *threshold* conexo com  $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$ . O grafo  $G$  tem  $rc(G) = \max\{p, 3\}$ , se*

$$\sum_{i=k}^n 2^{-d(v_i)} > 1,$$

onde  $k = \min\{i : 1 \leq i \leq n, d(v_i) \leq i - 1\}$  e  $p$  é o número de vértices pendentes em  $G$ .

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo *threshold* conexo com  $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$ , que satisfaz a desigualdade imposta no enunciado desse teorema. Então existem dois ou mais vértices pendentes em  $G$ , uma vez que para cada vértice pendente acrescenta-se  $\frac{1}{2}$  ao somatório. É suficiente exibir uma coloração arco-íris para  $G$  com três cores.

Sejam  $P = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  o conjunto dos vértices pendentes de  $G$ . Para cada vértice pendente, atribua à sua aresta uma cor correspondente à sua rotulação decrescida de 1 (a aresta incidente em  $v_1$  deve ser colorida com cor 0, a aresta incidente em  $v_2$  deve ser colorida com 1, e assim por diante). Observe que se  $p = |V| - 1$ , então  $G$  é um grafo estrela, e cada uma de suas arestas receberá uma cor diferente. Pinte a aresta entre os dois vértices de maior grau com cor 0 e pinte as outras arestas da seguinte forma: do terceiro vértice até o vértice  $n - p$ , pinte a aresta deste vértice com  $v_1$  usando a cor 1 e a aresta com  $v_2$  com cor 2. Pinte as arestas ainda não coloridas com a cor 0.  $\square$

O Algoritmo 2, detalhado a seguir, descreve a coloração apresentada no Teorema 2.11.

---

**Algoritmo 2: COLORACAOARCOIRISTHRESHOLD-CASO2**

---

**Entrada:** Um grafo *threshold* conexo  $G = (V, E)$ , com  $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$ .

**Saída:** Uma coloração arco íris  $C_G : E \rightarrow \{0, \dots, \max\{p, 3\} - 1\}$  de  $G$ , onde  $p$  é o número de vértices pendente em  $G$ .

```

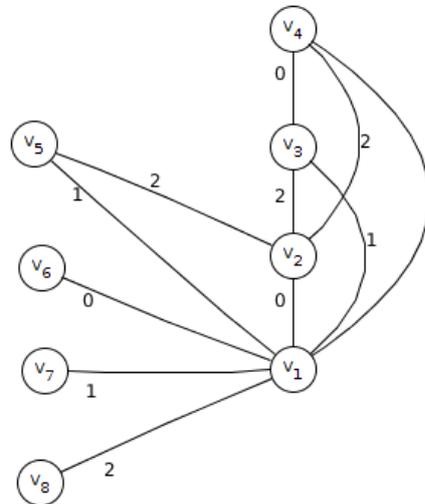
1 início
2    $P \leftarrow \{i \in V(G) : d_i = 1\}, p \leftarrow |P|$ 
3    $C_G(p_i, 1) \leftarrow i - 1$  para cada vértice folha  $p_1, \dots, p_p$ 
4   se  $p = n - 1$  então
5     retorna  $C_G$ 
6   fim
7    $C_G(1, 2) = 0$ 
8   para  $i = 3$  até  $i = n - p$  faça
9      $C_G(i, 1) = 1$ 
10     $C_G(i, 2) = 2$ 
11  fim
12   $C_G(e) = 0$  para cada aresta  $e$  de  $G$  que ainda não foi colorida.
13  retorna  $C_G$ 
14 fim

```

---

A Figura 8 apresenta um exemplo de grafo *threshold* colorido com o Algoritmo 2.

**Figura 8 – Grafo *Threshold*  $G_2$  colorido**



**Fonte: Autoria Própria**

Juntos, os teoremas 2.10 e 2.11 resolvem o Problema da Coloração Arco-Íris para todos os grafos *threshold*. É interessante observar que o número de conexão arco-íris para esses grafos é limitado a  $\max\{3, p\}$ , onde  $p$  é o número de vértices pendentes. Este é um resultado parecido com o obtido para grafos  $k$ -partidos completos, como será apresentado nas próximas seções.

### 2.2.3 Coloração Arco-Íris em Grafos Bipartidos Completos

Uma subclasse dos cografos amplamente estudada é a classe dos grafos bipartidos completos. Um grafo é dito bipartido completo se, e somente se, seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes,  $S$  e  $T$ , tal que para todo par de vértices  $v \in S$  e  $u \in T$  existe a aresta  $(v, u)$ . Considere um grafo bipartido completo com partição  $[S, T]$  do conjunto de vértices em dois conjuntos independentes. Se  $S$  e  $T$  têm, respectivamente,  $s$  e  $t$  vértices, então denota-se  $|S| = s$ ,  $|T| = t$  e o grafo é representado por  $K_{s,t}$ .

Esta seção apresenta o trabalho de Chartrand *et al.* (2008), que determinou o número de conexão arco-íris de todos os grafos bipartidos completos. O primeiro teorema apresenta o número de conexão arco-íris forte em um grafo bipartido completo. Esta demonstração é importante pois a mesma técnica de coloração será utilizada para determinar o número de conexão arco-íris desses grafos.

**Teorema 2.12.** (CHARTRAND *et al.*, 2008) Para inteiros  $s$  e  $t$  com  $1 \leq s \leq t$ ,

$$src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil.$$

*Demonstração.* Sabe-se que  $src(K_{1,t}) = t$ , pois  $K_{1,t}$  é uma árvore e satisfaz o Lema 2.6. Então considere um grafo  $K_{s,t}$  com  $s \geq 2$ . Seja  $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil = k$ . Logo  $1 \leq k - 1 < \sqrt[s]{t} \leq k$ . Portanto  $(k - 1)^s < t \leq k^s$  e assim  $(k - 1)^s + 1 \leq t \leq k^s$ .

Será mostrado que  $src(K_{s,t}) \geq k$ . Assuma, por contradição, que  $src(K_{s,t}) \leq k - 1$ . Então existe uma Coloração Arco-Íris Forte com  $(k - 1)$  cores para o grafo  $K_{s,t}$ . Seja  $\alpha : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k - 1\}$ , uma  $(k - 1)$ -coloração Arco-Íris Forte de  $K_{s,t}$ . Sejam  $S$  e  $T$  os dois conjuntos independentes da partição do conjunto de vértices de  $K_{s,t}$ , onde  $|S| = s$  e  $|T| = t$ . Suponha que  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ . Para cada vértice  $w \in T$ , pode-se associar uma  $s$ -tupla ordenada código( $w$ ) =  $(c_1, c_2, \dots, c_s)$ , chamada de código de cores de  $w$ , onde  $c_i = \alpha(w, u_i)$ , para  $1 \leq i \leq s$ . Já que  $1 \leq c_i \leq k - 1$ , para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , o número de códigos de cores distintos que podem ser atribuídos aos vértices de  $T$  é  $(k - 1)^s$ . Entretanto, como  $t > (k - 1)^s$ , existem mais vértices em  $T$  do que códigos de cores disponíveis. Assim, existem pelo menos dois vértices distintos,  $w'$  e  $w''$  pertencentes a  $T$ , tais que código( $w'$ ) = código( $w''$ ). Como  $\alpha(w', u_i) = \alpha(w'', u_i)$  para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , o grafo  $K_{s,t}$  não possui um caminho arco-íris geodésico entre os vértices  $w'$  e  $w''$ , contradizendo a hipótese de que  $\alpha$  é uma  $(k - 1)$ -coloração Arco-Íris Forte para o grafo  $K_{s,t}$ . Portanto, como afirmado,  $src(K_{s,t}) \geq k$ .

Agora será provado que  $src(K_{s,t}) \leq k$ , mostrando a existência de uma  $k$ -coloração Arco-Íris Forte para o grafo  $K_{s,t}$ . Seja  $A = \{1, 2, \dots, k\}$ . O conjunto  $A^s$  é gerado a partir do produto cartesiano de  $s$  conjuntos iguais a  $A$ . Portanto,  $|A^s| = (k)^s$ . Seja  $T = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ . A cada vértice  $w_i$   $1 \leq i \leq t$ , deve-se atribuir um dos elementos de  $A^s$  da seguinte forma: ao vértice  $w_i$  com  $1 \leq i \leq s$  deve-se atribuir o elemento de  $A^s$  cuja  $i$ -ésima posição na  $s$ -tupla é igual a 2 e as demais posições da  $s$ -tupla têm valor 1. Por exemplo, deve-se atribuir a  $s$ -tupla

$(2, 1, 1, 1, \dots, 1, 1)$  ao vértice  $w_1$  e a  $s$ -tupla  $(1, 1, 1, \dots, 1, 2)$  ao vértice  $w_s$ . Os demais vértices em  $T$  podem receber quaisquer das demais  $s$ -tuplas de  $A^s$ , desde que sejam todas distintas entre si, ou seja, cada  $s$ -tupla é atribuída a no máximo um vértice de  $T$ . Observa-se que há  $s$ -tuplas suficientes para todos os vértices de  $T$ , pois  $k = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$  e  $|A^s| = (k)^s$ . Logo,  $|A^s| = (\lceil \sqrt[s]{t} \rceil)^s \geq (\sqrt[s]{t})^s = t = |T|$ .

Para cada  $i$  com  $1 \leq i \leq t$ , denote a  $s$ -tupla atribuída a  $w_i$  por  $(w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,s})$ . Por construção, tem-se  $1 \leq w_{i,j} \leq k$ , para cada  $i$  e  $j$  tal que  $1 \leq i \leq t$  e  $1 \leq j \leq s$ . Define-se a coloração de arestas  $\alpha : E(K_{s,t}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  por

$$\alpha(w_i, u_j) = w_{i,j}, \text{ onde } 1 \leq i \leq t \text{ e } 1 \leq j \leq s.$$

Então, a  $s$ -tupla atribuída a cada vértice  $w_i$ ,  $1 \leq i \leq t$  é o código de cores de  $w_i$  e será denotada por  $\text{código}(w_i)$ . Por construção, vértices distintos em  $T$  possuem códigos de cores distintos.

Será mostrado que  $\alpha$  é uma  $k$ -coloração Arco-Íris Forte para o grafo  $K_{s,t}$ . Nota-se que para qualquer  $w \in T$  e  $u \in S$ , o caminho  $wu$  é arco-íris e geodésico, já que todo vértice de um conjunto da partição  $[S, T]$  possui uma aresta para cada vértice do outro conjunto da partição  $[S, T]$ , pela própria definição de grafos bipartidos completos. Sejam  $w_a$  e  $w_b$  dois vértices de  $T$ . Já que esses vértices possuem códigos de cores distintos, existe algum  $l$ ,  $1 \leq l \leq s$ , tal que  $w_{a,l} \neq w_{b,l}$ . Logo,  $\alpha(w_a, u_l) \neq \alpha(w_b, u_l)$  e  $w_a u_l w_b$  é um caminho arco-íris geodésico no grafo  $K_{s,t}$ . Considere dois vértices  $u_p$  e  $u_q$  em  $S$  onde  $1 \leq p < q \leq s$ . Como  $p \leq s$ , por construção, o código de cores de  $w_p$  tem cor 1 em todas as suas coordenadas, exceto na posição  $p$ . Logo,  $\alpha(w_p, u_p) = 2$  e, como  $p \neq q$  tem-se  $\alpha(w_p, u_q) = 1$ . Portanto, o caminho  $u_p w_p u_q$  é um caminho arco-íris e geodésico no grafo  $K_{s,t}$ .  $\square$

A título de exemplo, considere o grafo  $K_{4,6}$  para o qual se deseja obter uma coloração arco-íris forte. Então,  $s = 4$ ,  $t = 6$ . Como  $\lceil \sqrt[4]{6} \rceil = 2$ ,  $k = 2$  e os códigos de cores dos primeiros  $s$  vértices de  $T$  seriam:

$$w_1 = (2, 1, 1, 1);$$

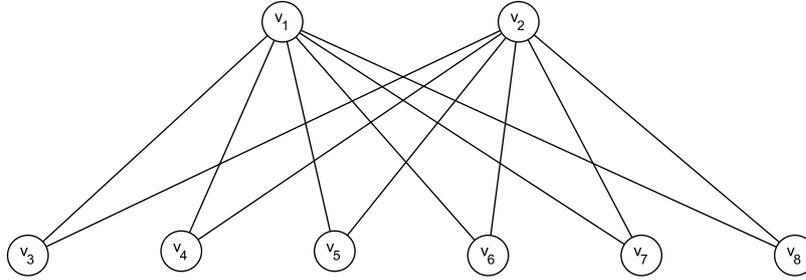
$$w_2 = (1, 2, 1, 1);$$

$$w_3 = (1, 1, 2, 1);$$

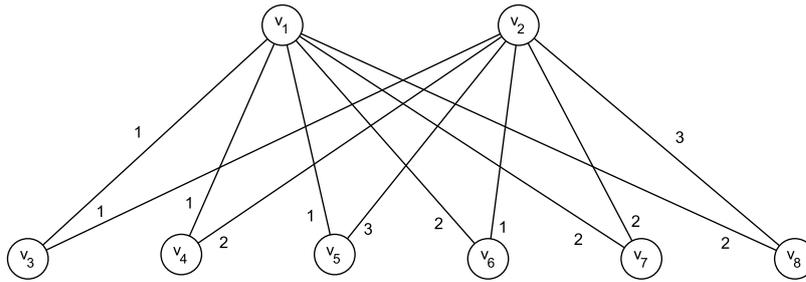
$$w_4 = (1, 1, 1, 2).$$

Com a coloração arco-íris proposta, existem caminhos arco-íris geodésicos entre  $u_3$  e qualquer outro vértice em  $S$ , por exemplo. De fato,  $w_{3,3} = 2 \neq 1 = w_{3,q}$  para  $q \neq 3$  e  $1 \leq q \leq s$ . Logo,  $u_3$  possui um caminho arco-íris para todo  $u_q$  dado por  $u_3 w_3 u_q$ .

Considere o bipartido completo  $K_{2,6}$  apresentado na Figura 9.

**Figura 9 – Cografo  $G$ , um  $K_{2,6}$** **Fonte: Autoria Própria**

Logo  $s = 2$ ,  $t = 6$  e  $k = \lceil \sqrt[2]{6} \rceil = 3$ . Então,  $A^s = A^2 = \{1, 2, 3\}$  e  $|A^2| = 9$ . Portanto nove códigos de cores estão disponíveis para os vértices de  $T$  e são eles:  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(3, 2)$  e  $(3, 3)$ . A coloração final do grafo  $K_{2,6}$  após a aplicação da técnica do Teorema 2.12 é apresentada na Figura 10.

**Figura 10 – Cografo  $G$  multicolorido****Fonte: Autoria Própria**

Sabe-se que  $rc(G) \leq src(G)$  para qualquer grafo  $G$ . Então, apesar de o número de conexão arco-íris forte de um grafo bipartido completo  $K_{s,t}$ , com  $s \leq t$ , ser dado por  $\sqrt[s]{t}$ , Chartrand *et al.* (2008) provou que este não é um limite superior justo para o número de conexão arco-íris desses grafos. O Teorema 2.13 mostra que qualquer grafo bipartido completo tem uma coloração arco-íris com no máximo quatro cores.

**Teorema 2.13.** (CHARTRAND *et al.*, 2008) Para inteiros  $s$  e  $t$  com  $2 \leq s \leq t$ ,

$$rc(K_{s,t}) = \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}.$$

*Demonstração.* Observa-se que para  $2 \leq s \leq t$ ,  $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil \geq 2$ . Sejam  $S$  e  $T$  os dois conjuntos independentes de uma partição dos vértices do grafo  $K_{s,t}$ , onde  $|S| = s$  e  $|T| = t$ . Assuma que  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ . Três casos são considerados:

Caso 1:  $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil = 2$ . Neste caso,  $s \leq t \leq 2^s$ , pois  $2 \leq rc(K_{s,t}) \leq src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil = 2$ . Então  $rc(K_{s,t}) = 2$ .

Caso 2:  $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil = 3$ . Então,  $2^s + 1 \leq t \leq 3^s$ , pois  $2 \leq rc(K_{s,t}) \leq src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil = 3$ . Logo,  $rc(K_{s,t}) = 2$  ou  $rc(K_{s,t}) = 3$ . Resta provar que  $rc(K_{s,t}) = 3$ . Assuma, por contradição,

que exista uma 2-coloração Arco-Íris do grafo  $K_{s,t}$  e seja a mesma definida por uma função  $\alpha : E(K_{s,t}) \rightarrow \{1, 2\}$ . Então, existe um código de cores código( $w$ ) atribuído a cada vértice  $w \in T$ , que consiste em uma  $s$ -tupla ordenada  $(c_1, c_2, \dots, c_s)$ , onde  $c_i = \alpha(w, u_i) \in \{1, 2\}$ , para  $1 \leq i \leq s$ . Como  $t > 2^s$ , existem dois vértices distintos  $w'$  e  $w''$  pertencentes a  $T$  tais que código( $w'$ ) = código( $w''$ ). Já que as arestas de qualquer caminho entre os vértices  $w'$  e  $w''$  com tamanho 2 são coloridas com a mesma cor, não existe um caminho arco-íris entre  $w'$  e  $w''$ , uma contradição. Portanto, como afirmado,  $rc(K_{s,t}) = 3$  e a coloração arco-íris com três cores pode ser feita com a mesma técnica apresentada no Teorema 2.12.

Caso 3:  $\lceil \sqrt[t]{t} \rceil \geq 4$ . Então,  $t \geq 3^s + 1$ . Resta provar que  $rc(K_{s,t}) = 4$ . Primeiro, será mostrado que  $rc(K_{s,t}) \geq 4$ . Assuma, por contradição, que exista uma 3-coloração Arco-Íris para o grafo  $K_{s,t}$  e seja a mesma definida por uma função  $\alpha : E(K_{s,t}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . Então, existe um código de cores código( $w$ ) atribuído a cada vértice  $w \in T$ , que consiste em uma  $s$ -tupla ordenada  $(c_1, c_2, \dots, c_s)$ , onde  $c_i = \alpha(w, u_i) \in \{1, 2, 3\}$ , para  $1 \leq i \leq s$ . Como  $t > 3^s$  existem dois vértices distintos  $w'$  e  $w''$  pertencentes a  $T$  tais que código( $w'$ ) = código( $w''$ ). Já que cada caminho entre  $w'$  e  $w''$  tem tamanho par, qualquer caminho arco-íris necessariamente tem tamanho 2, por se tratar de um grafo bipartido. Entretanto, como código( $w'$ ) = código( $w''$ ), qualquer caminho de tamanho 2 entre  $w'$  e  $w''$  tem as arestas coloridas com a mesma cor. Assim, não existe um caminho arco-íris entre  $w'$  e  $w''$ , uma contradição.

Ainda considerando o caso 3, resta provar que  $rc(K_{s,t}) \leq 4$ . Será apresentada uma 4-coloração Arco-Íris para o grafo  $K_{s,t}$ . Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $T = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ ,  $T' = \{w_1, w_2, \dots, w_{3^s}\}$  e  $T'' = T - T'$ . Atribua aos vértices de  $T'$  os  $3^s$  elementos distintos de  $A^s$  e atribua aos vértices de  $T''$  o código cuja primeira coordenada é 4 e todas as coordenadas seguintes são 3. Correspondente a essa atribuição de códigos, existe uma coloração de arestas para o grafo  $K_{s,t}$  que pode ser definida pela função  $\alpha : E(K_{s,t}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ , de forma que  $\alpha(w_i, u_j) = k$  se a  $j$ -ésima coordenada do código( $w_i$ ) é igual a  $k$ . Afirma-se que essa coloração é, de fato, uma 4-coloração arco-íris do grafo  $K_{s,t}$ . Sejam  $x$  e  $y$  dois vértices não-adjacentes no grafo  $K_{s,t}$ . Suponha primeiro que  $x, y \in T$ . Existem três subcasos possíveis, descritos a seguir.

Caso 3.1:  $x, y \in T'$ . Como código( $x$ )  $\neq$  código( $y$ ), existe  $i$  com  $1 \leq i \leq s$  tal que código( $x$ ) e código( $y$ ) possuem  $i$ -ésimas coordenadas distintas. Então o caminho  $x u_i y$  é um caminho arco-íris entre os vértices  $x$  e  $y$ .

Caso 3.2:  $x \in T'$  e  $y \in T''$ . Suponha que a primeira coordenada de código( $x$ ) seja  $a$ . Por construção,  $1 \leq a \leq 3$ . Então  $x u_i y$  é um caminho arco-íris entre os vértices  $x$  e  $y$  cujas arestas são coloridas com  $a$  e 4.

Caso 3.3:  $x, y \in T''$ . Seja  $z \in T'$  tal que a primeira coordenada de código( $z$ ) seja 1 e a segunda coordenada de código( $z$ ) seja 2. Então  $x u_1 z u_2 y$  é um caminho arco-íris entre os vértices  $x$  e  $y$ , cujas arestas são coloridas com 4, 1, 2 e 3, respectivamente.

Agora suponha que  $x, y \in S$ . Assim  $x = u_i$  e  $y = u_j$  com  $1 \leq i < j \leq s$ . Logo existe um vértice  $w \in T$  cuja  $i$ -ésima e  $j$ -ésima coordenadas de código( $w$ ) são distintas. Portanto  $x w y$  é um caminho arco-íris entre os vértices  $x$  e  $y$ . Portanto essa coloração é uma 4-coloração

arco-íris do grafo  $K_{s,t}$ , e logo  $rc(K_{s,t}) = 4$  nesse caso.  $\square$

O Teorema 2.13 apresenta solução do Problema da Coloração Arco-Íris para mais um subconjunto dos cografos. Os grafos bipartidos completos podem ser generalizados, permitindo que o conjunto de vértices do grafo tenha uma partição em mais que dois conjuntos independentes. Se o conjunto de vértices puder ser particionado em  $k$  conjuntos independentes, com arestas entre quaisquer vértices em partes diferentes, o grafo é chamado de  $k$ -partido completo ou multipartido completo. Chartrand *et al.* (2008) resolveram o Problema da Coloração Arco-Íris para todos os  $k$ -partidos completos, uma subclasse mais ampla dos cografos. Esse resultado será visto na próxima seção.

#### 2.2.4 Coloração Arco-Íris em Grafos Multipartidos Completos

Um grafo  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  é um grafo  $k$ -partido completo se seu conjunto de vértices pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes,  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , tal que  $|S_i| = n_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ , e existe aresta entre quaisquer dois vértices que pertencem a conjuntos independentes distintos. Da mesma forma que nos grafos bipartidos completos, o primeiro teorema desta seção determina o número de conexão arco-íris forte para os multipartidos completos. Depois, a mesma técnica é aproveitada para a determinação do número de conexão arco-íris destes grafos.

**Teorema 2.14.** (CHARTRAND *et al.*, 2008) *Seja  $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  um grafo  $k$ -partido completo, onde  $k \geq 3$  e  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$  tal que  $\sum_{i=1}^{k-1} n_i$  e  $t = n_k$ . Então:*

$$src(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } n_k = 1 \\ 2, & \text{se } n_k \geq 2 \text{ e } s > t \\ \lceil \sqrt[s]{t} \rceil, & \text{se } s \leq t \end{cases}$$

*Demonstração.* Seja  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ . Se  $n_k = 1$ , então,  $G = K_n$ . Pelo Lema 2.5,  $src(G) = 1$ . Suponha agora que  $n_k \geq 2$  e  $s > t$ . Já que  $n_k \geq 2$ , segue que  $G \neq K_n$  e então  $src(G) \geq 2$ . Resta mostrar que  $src(G) \leq 2$ .

Particione o conjunto  $S = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  em dois subconjuntos:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \text{ e } B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$$

onde  $p + q = k$ , de forma que,

$$a = \sum_{i=1}^p a_i \leq \sum_{j=1}^q b_j = b$$

e  $b - a$  é o mínimo inteiro não negativo entre todas as possíveis partilhas de  $S$ . Assim,  $K_{a,b}$  é um subgrafo gerador de  $G$ . Como  $diam(K_{a,b}) = 2$ , para cada dois vértices não adjacentes

$u$  e  $v$  de  $K_{a,b}$ , um caminho  $P$  é um caminho  $u - v$  geodésico em  $K_{a,b}$  se, e somente se,  $P$  é um caminho  $u - v$  geodésico em  $G$ . Pelo teorema 2.12,  $src(G) \leq src(K_{a,b}) = \lceil \sqrt[a]{b} \rceil$ . Será provado que  $b \leq 2^a$ . Suponha, por contradição, que  $b > 2^a$ . Como  $s > t$ , conclui-se que  $q \geq 2$ . Considera-se dois casos, com  $a \leq 3$  ou com  $a \geq 4$ . Se  $G$  é um  $k$ -partido completo com  $a \leq 3$ , então os únicos pares ordenados  $(a, b)$  possíveis tais que  $b - a$  seja o menor inteiro não-negativo,  $q \geq 2$  e  $s > t$  são  $(2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$ , contrariando a hipótese de que  $b > 2^a$ . Considerado  $a \geq 4$ , seja  $b_1$  o menor elemento de  $B$ . Assim  $a + b_1 > b - b_1$ . Como  $a \geq 4$ , é possível rearranjar essa inequação da seguinte forma:

$$b_1 > \frac{b - a}{2} > \frac{2^a - a}{2} > \frac{3a - a}{2} = a.$$

Seja  $A' = b_1$  e seja o conjunto  $B' = S - b_1$ . Como  $b_2 \in B'$ ,  $b_1 \leq b_2$  e  $a < b_1$ , isso contradiz as propriedades que definem os conjuntos  $A$  e  $B$ , pois o menor elemento do conjunto  $B$  não pode ser maior do que a soma de todos os elementos do conjunto  $A$ , já que assim  $b - a$  não será o menor inteiro não-negativo possível entre todas as possíveis partilhas de  $S$ . Portanto, como afirmado,  $b \leq 2^a$ . Neste caso,  $src(G) \leq \lceil \sqrt[a]{b} \rceil \leq \lceil \sqrt[a]{2^a} \rceil = 2$ , pelo Teorema 2.12.

Agora, suponha que  $s \leq t$ . Seja  $T$  o conjunto independente específico de  $n_k = t$  vértices de  $G$ . Como  $K_{s,t}$  é um subgrafo gerador conexo de  $G$ , segue-se novamente, já que  $diam(G) = 2$ , que  $src(G) \leq src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$ . Resta provar que  $src(G) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$ . Assuma, por contradição, que  $src(G) = l < \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$ . Então,  $t > l^s$ . Isso implica na existência de uma  $l$ -coloração Arco-Íris Forte  $\alpha$  para o grafo  $G$ . Já que cada vértice de  $G$  pertencente a  $T$  terá grau  $s$  em  $G$ , a coloração  $\alpha$  produz um código de cores para cada vértice  $w \in T$  consistindo em uma  $s$ -tupla ordenada, onde cada coordenada consiste em um elemento do conjunto  $\{1, 2, \dots, l\}$ . Já que o número de códigos de cores distintos para os vértices de  $T$  é no máximo  $l^s$  e  $|T| = t > l^s$ , existem dois vértices  $w'$  e  $w''$  em  $T$  que possuem o mesmo código de cor. Isso implica que as duas arestas em cada caminho geodésico entre  $w'$  e  $w''$  em  $G$  tem a mesma cor, contradizendo a hipótese de que  $\alpha$  é uma  $l$ -coloração Arco-Íris Forte para o grafo  $G$ . Uma coloração arco-íris com  $\lceil \sqrt[s]{t} \rceil$  cores para  $G$  pode ser obtida pela técnica apresentada no Teorema 2.12.  $\square$

**Teorema 2.15.** (CHARTRAND et al., 2008) *Seja  $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  um grafo  $k$ -partido completo, onde  $k \geq 3$  e  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$  tal que  $s = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  e  $t = n_k$ . Então:*

$$rc(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } n_k = 1 \\ 2, & \text{se } n_k \geq 2 \text{ e } s > t \\ \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 3\} & \text{se } s \leq t \end{cases}$$

*Demonstração.* Seja  $s = \sum_{i=1}^k n_i$ . Se  $n_k = 1$ , então,  $G = K_n$ . Pelo Lema 2.5,  $src(G) = 1$ . Suponha agora que  $n_k \geq 2$  e  $s > t$ . Pelo Teorema 2.14,  $src(G) = 2$  e portanto pelo Lema 2.7,  $rc(G) = 2$ .

Suponha agora que  $s \leq t$ . Já que  $n_k \geq 2$ , segue que  $G \neq K_n$  e então  $rc(G) \geq 2$ . Pelo Teorema 2.14,  $src(G) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$  e portanto  $rc(G) \leq \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$ . Para mostrar que  $rc(G) \leq 3$ , será dada uma 3-coloração Arco-Íris de  $G$ . Sejam  $[V_1, V_2, \dots, V_k]$  uma partição do conjunto de vértices de  $G$ , com  $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i}\}$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Além disso, seja  $U = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{k-1} = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ , tal que  $u_i = v_{k-1,i}$  para  $1 \leq i \leq n_{k-1}$ , ou seja, os primeiros elementos de  $U$  serão os vértices contidos na partição  $V_k$ . Defina uma coloração  $c^*$  das arestas de  $G$  por:

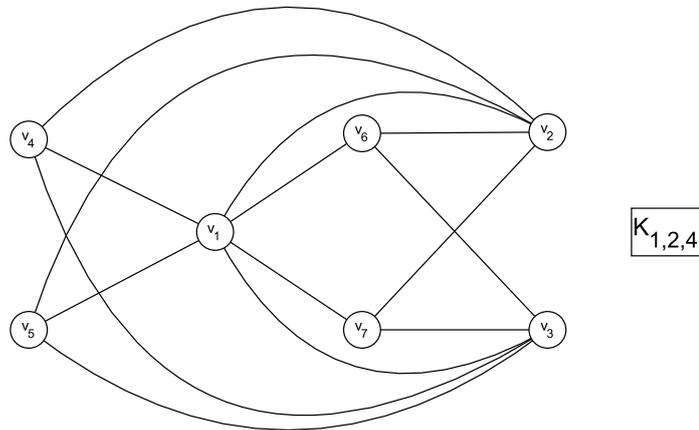
$$rc(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } e = v_{i,j}v_{i+1,j} \text{ para } 1 \leq i \leq k-2 \text{ e } 1 \leq j \leq n_i, \\ 1, & \text{se } e = u_l v_{k,l} \text{ para } 1 \leq l \leq s, \\ 2, & \text{se } v_{1,j}v_{k,l}, \text{ para } 1 \leq j \leq n_1 \text{ e } s+1 \leq l \leq t, \\ 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam  $x$  e  $y$  dois vértices não adjacentes de  $G$ . Então  $x, y \in V_i$  para algum  $i$  com  $1 \leq i \leq k$ . Seja  $x = v_{i,p}$  e  $y = v_{i,q}$ , onde  $1 \leq p < q \leq n_i$ . Se  $1 \leq i \leq k-1$ , então  $x v_{i+1,p} y$  é um caminho arco-íris entre os vértices  $x$  e  $y$  em  $G$  cujas arestas são coloridas com 1 e 3. Assim, resta assumir que  $i = k$ . Se  $1 \leq p < q \leq s$ , então  $x u_p y$  é um caminho arco-íris entre os vértices  $x$  e  $y$  em  $G$  cujas arestas são coloridas com 1 e 3. Se  $s+1 \leq p < q \leq t$ , então  $x v_{1,1} v_{2,1} y$  é um caminho arco-íris entre os vértices  $x$  e  $y$  em  $G$ , cujas arestas são coloridas com 2, 1 e 3, respectivamente. Se  $1 \leq p \leq s$  e  $s+1 \leq q \leq t$ , então  $x v_{1,1} y$  é um caminho arco-íris entre os vértices  $x$  e  $y$  em  $G$ , cujas arestas são coloridas com 3 e 2. Assim,  $rc(G) \leq 3$  e portanto, como afirmado,  $rc(G) \leq \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 3\}$ .

Assuma, por contradição, que  $rc(G) < \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 3\} \leq 3$ . Como  $rc(G) \leq 2$ , segue-se que  $rc(G) = 2$ . Seja  $c'$  uma 2-coloração arco-íris de  $G$ . Pode-se associar um código de cores código( $w$ ) =  $(a_1, a_2, \dots, a_s)$  para cada vértice  $w \in V_k$ , onde  $a_i = c'(u_i, w) \in \{1, 2\}$  para  $1 \leq i \leq s$ . Já que  $\sqrt[s]{t} > 2$ , segue-se que  $t > 2^s$  e assim existem dois vértices  $w'$  e  $w''$  em  $V_k$  tais que código( $w'$ ) = código( $w''$ ). Então as duas arestas de cada caminho entre os vértices  $w'$  e  $w''$  de tamanho 2 são coloridas com a mesma cor e portanto não existe caminho arco-íris entre os vértices  $w'$  e  $w''$  no grafo  $K_{s,t}$ , uma contradição. Assim, como afirmado,  $rc(K_{s,t}) = 3 = \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 3\}$  nesse caso.  $\square$

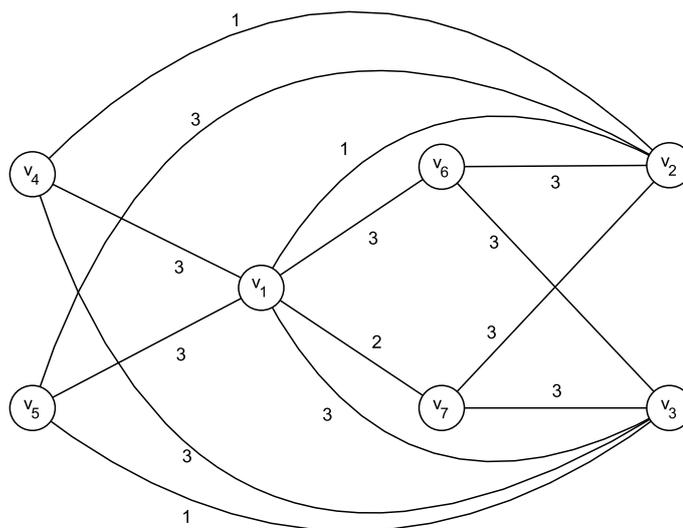
Considere o grafo multipartido completo  $K_{1,2,4}$  ilustrado na Figura 11. A Figura 12 mostra o grafo  $K_{1,2,4}$  com uma coloração obtida pela técnica do Teorema 2.15.

**Figura 11 – Cografo multipartido  $K_{1,2,4}$**



**Fonte: Autoria Própria**

**Figura 12 – Cografo multipartido  $K_{1,2,4}$  colorido**



**Fonte: Autoria Própria**

### 3 NOVOS RESULTADOS

Esta seção contém os resultados obtidos ao longo deste estudo. O Teorema 3.1 demonstra que um cografo  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$  pode ser colorido com até 4 cores para  $k = 2$  e até 3 cores para  $k \geq 3$  a partir de um  $k$ -partido correspondente. O Lema 3.2 demonstra as condições para a existência de vértices pendentes em um cografo  $G$ . Por fim, o Teorema 3.3 estabelece um limite superior para a coloração de um cografo  $G$  a partir do número de vértices pendentes que  $G$  possui.

**Teorema 3.1.** *Seja  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$  um cografo conexo tal que  $|V(G_i)| = n_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Se  $k = 2$  e  $2 \leq n_1 \leq n_2$ , então  $rc(G) \leq 4$ . Se  $k \geq 3$ , então  $rc(G) \leq 3$ .*

*Demonstração.* Seja  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$  um cografo conexo.

Construa um grafo  $k$ -partido completo,  $K_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}$  a partir de  $G$  removendo as arestas que existem entre quaisquer dois vértices pertencentes à  $G_1$ , entre quaisquer dois vértices pertencentes à  $G_2$ , e assim sucessivamente até remover as arestas que existem entre os vértices de  $G_k$ . Então os vértices de cada subgrafo  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , constituem um conjunto independente  $S_i \in V(K_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k})$ . O grafo  $k$ -partido completo  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  será chamado de  $k$ -partido completo correspondente a  $G$ .

Se  $k = 2$ , então  $2 \leq n_1 \leq n_2$  e, pelo Teorema 2.13,  $rc(K_{n_1, n_2}) \leq 4$ . Se  $k \geq 3$ , pelo Teorema 2.15,  $rc(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \leq 3$ .

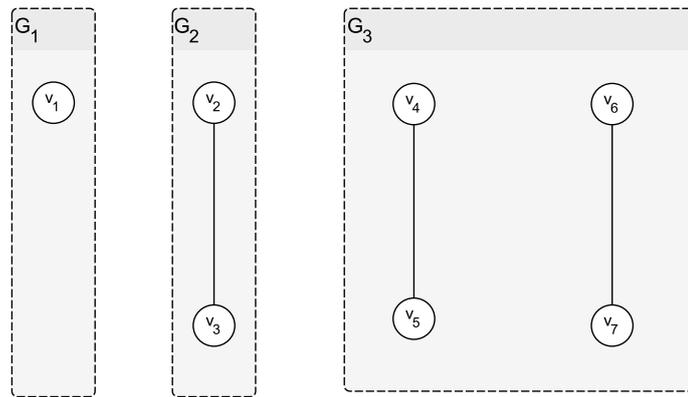
Considere uma coloração arco-íris do grafo  $k$ -partido completo correspondente a  $G$ , dada pelo Teorema 2.13 ou pelo Teorema 2.15, onde as cores são números inteiros positivos e consecutivos a partir de 1. Como  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  é um subgrafo gerador de  $G$ , a cor de cada aresta do  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  pode ser usada para colorir a aresta correspondente em  $G$ . Então, resta pintar as arestas que conectam dois vértices do mesmo subgrafo  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Pinte todas as arestas de  $E(G) \setminus E(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$  com cor 1. Existe um caminho arco-íris entre quaisquer dois vértices de  $G$ , pois como  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  é subgrafo gerador de  $G$  e tem uma coloração arco-íris, o mesmo caminho arco-íris que conecta quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  no  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  também existe em  $G$  e está colorido com as mesmas cores. Como a cor 1, utilizada nas arestas dos subgrafos  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , é uma das cores já utilizadas nas arestas do grafo  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ,  $rc(G) \leq rc(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ . Pelo Teorema 2.13,  $rc(G) \leq 4$  se  $k = 2$ . Pelo Teorema 2.15,  $rc(G) \leq 3$  se  $k \geq 3$ .  $\square$

Para um exemplo de uso da técnica apresentada no Teorema 3.1, considere os seguintes cografos  $G_1, G_2$  e  $G_3$  ilustrados na Figura 13.

A Figura 14 apresenta o cografo  $G = G_1 + G_2 + G_3$ .

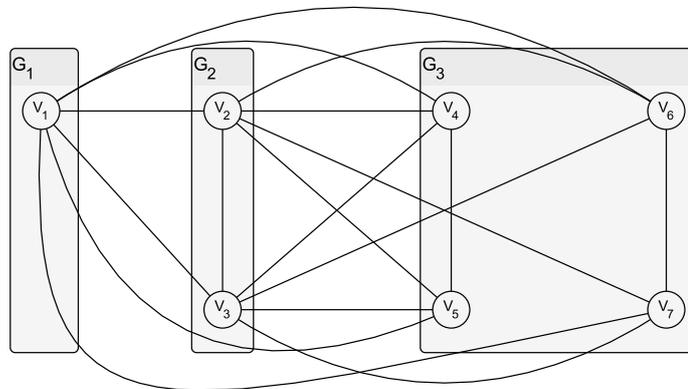
Após a remoção das arestas contidas em  $G_2$  e  $G_3$ ,  $G$  torna-se o grafo 3-partido completo  $K_{1, 2, 4}$  apresentado na Figura 15.

**Figura 13 – Cografos  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$**



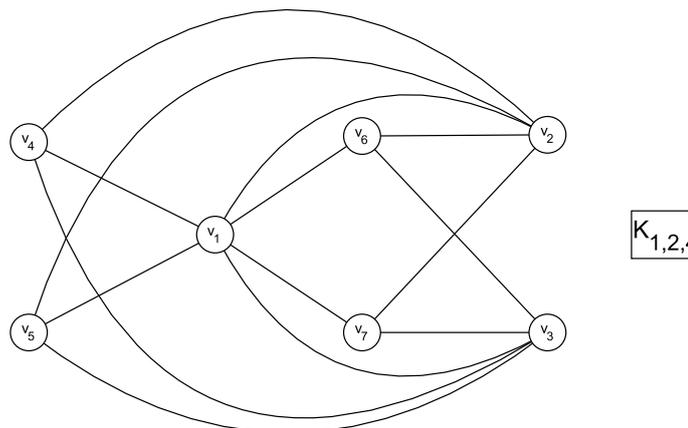
**Fonte: Autoria Própria**

**Figura 14 – Cografo  $G = G_1 + G_2 + G_3$**



**Fonte: Autoria Própria**

**Figura 15 – Cografo 3-partido  $K_{1,2,4}$**

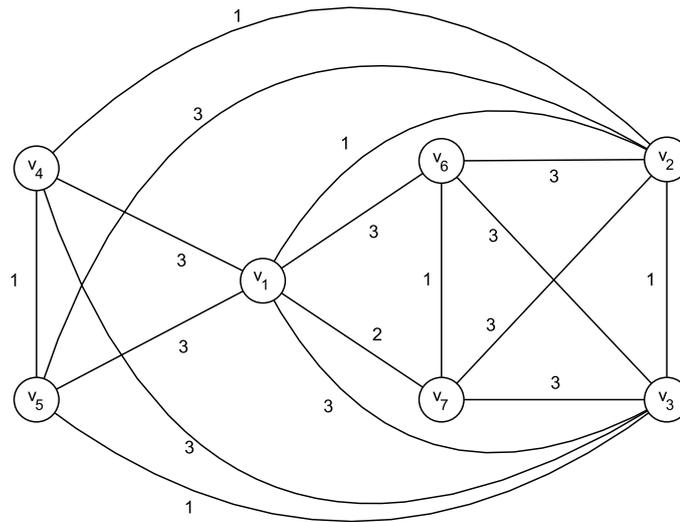


**Fonte: Autoria Própria**

Considerando a coloração arco-íris obtida para o  $K_{1,2,4}$  na Seção 2.2.4, após a reinserção das arestas dos subgrafos  $G_2$  e  $G_3$ , a coloração final de  $G$  é apresentada na Figura 16.

Observa-se que a coloração de  $G$  na Figura 16 é uma coloração arco-íris e  $rc(G) \leq 3$ .

**Figura 16 – Cografo  $G$  colorido**



**Fonte: Autoria Própria**

O próximo lema caracteriza os cografos conexos que tem vértices pendentos.

**Lema 3.2.** *O grafo  $G$  é um cografo conexo com vértices pendentos se, e somente se,  $G = G_1 + G_2$  tal que  $G_1$  tem ordem 1 e  $G_2$  tem vértices com grau igual a zero.*

*Demonstração.* Primeiro vamos provar a condição necessária. Seja  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$  um cografo conexo com vértices pendentos. Vamos mostrar que se  $k \geq 3$ , então não há vértices pendentos em  $G$ . Considere  $k \geq 3$  e assuma que  $G_i$  tem pelo menos um vértice, para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq k$ . Então, a operação de junção adiciona pelo menos  $k - 1$  arestas a cada vértice  $v \in G_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , conectando-o a cada um dos outros cografos  $G_j$  tal que  $j \neq i$  e  $3 \leq j \leq k$ . Como  $k \geq 3$ , todo vértice tem grau pelo menos 2 em  $G$ . Assim, nenhum vértice poderá ser pendente. Logo, se  $G$  tem vértices pendentos,  $k \leq 2$ . Considere  $k \leq 2$ . Por definição de cografo, ou  $G = K_1$  e não tem vértices com grau 1 (não tem vértices pendentos) ou  $G$  resulta de uma operação de junção e, neste caso,  $k = 2$ .

Seja  $k = 2$  e suponha que pelo menos um entre  $G_1$  e  $G_2$  têm vértices com grau maior ou igual a 1. Esses vértices não podem ser pendentos em  $G$ , já que após a operação de junção  $G_1 + G_2$ , tais vértices terão grau pelo menos 2. Portanto, os vértices pendentos em  $G$  têm grau zero em  $G_1$  ou  $G_2$ . Suponha que ambos os grafos,  $G_1$  e  $G_2$  tem ordem pelo menos dois. Então, após a operação de junção  $G_1 + G_2$ , cada vértice de  $G_1$  e de  $G_2$  será conectado a pelo menos mais dois vértices e não poderá ser vértice pendente. Portanto, se  $G$  tem vértices pendentos, pelo menos um entre  $G_1$  e  $G_2$  tem ordem 1. Seja  $G_1$  o cografo com exatamente 1 vértice. Então, os vértices pendentos em  $G$  devem ter grau zero em  $G_2$ .

A prova de suficiência é mais simples. Sejam  $G_1$  um cografo com apenas um vértice  $w$  e  $G_2$  um cografo que tem vértices com grau zero. Então para cada vértice  $v \in V(G_2)$  que tem grau zero em  $G_2$ , a operação de junção  $G_1 + G_2$  cria exatamente uma aresta incidente em  $v$ , que é a aresta  $(v, w)$ . Portanto,  $v$  é vértice pendente em  $G$ .  $\square$

**Teorema 3.3.** *Se  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$  é um cografo conexo com  $t \geq 0$  vértices pendentes, então*

$$\begin{cases} rc(G) = t, & \text{se } t \geq 4; \\ rc(G) \leq 4, & \text{se } t < 4. \end{cases}$$

*Demonstração.* Seja  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ , um cografo conexo com  $t \geq 0$  vértices pendentes. Se  $t \neq 0$ , então pelo Lema 3.2  $G = G_1 + G_2$ ,  $G_1$  tem ordem 1 e  $G_2$  tem  $t$  vértices com grau zero. Observe que o subgrafo de  $G$  induzido pelos vértices de  $G_1$  e pelos  $t$  vértices com grau zero em  $G_2$  é um grafo estrela  $T$  com  $t$  arestas e, pelo Lema 2.6 precisa de  $t$  cores para ter uma coloração arco-íris. Como quaisquer dois vértices desse subgrafo induzido tem um único caminho entre eles em  $G$ , é possível concluir que  $rc(G) \geq t$ .

Se o grafo estrela  $T$  existir, considere uma coloração arco-íris de  $T$  com  $t$  cores. Resta colorir as demais arestas de  $G$ , se existirem, de forma a garantir uma coloração arco-íris para  $G$ . Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_q$ , as componentes conexas de  $G_2$  com pelo menos dois vértices. Suponha que cada uma das  $z$  primeiras componentes,  $C_1, C_2, \dots, C_z$ ,  $0 \leq z \leq q$ , têm pelo menos um vértice adjacente a todos os outros vértices da mesma componente e vamos chamar esse vértice de vértice universal em  $C_i$ , para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq z$ . O vértice universal em  $C_i$  será denotado por  $r_i$ ,  $0 \leq i \leq z$ . Pinte as arestas que conectam dois vértices da mesma componente  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq z$ , com cor 1. Pinte a aresta entre  $G_1$  e  $r_i$  com a cor 2,  $1 \leq i \leq z$ . Pinte a aresta entre  $G_1$  e cada vértice de  $C_i$ , exceto  $r_i$ , com a cor 3,  $1 \leq i \leq z$ .

Por fim, vamos considerar as componentes conexas de  $G_2$  que não tem vértice universal. Observe que essas componentes têm ordem pelo menos 4. Escolha um vértice qualquer em cada componente  $C_i$ ,  $z+1 \leq i \leq q$ , e chame-o de  $r_i$ . Como  $G$  é um cografo e  $diam(G) = 2$ , todo vértice de  $C_i$  é adjacente a  $r_i$  ou é adjacente a um vizinho de  $r_i$ , para todo  $i$  tal que  $z+1 \leq i \leq q$ . Então, em cada componente  $C_i$ ,  $z+1 \leq i \leq q$ , pinte a aresta entre  $r_i$  e  $G_1$  com cor 2. Para cada  $i$  tal que  $z+1 \leq i \leq q$ , pinte as arestas que conectam  $r_i$  a seus vizinhos da componente  $C_i$  com cor 1, pinte as arestas que conectam  $G_1$  aos demais vértices de  $C_i$  com cor 3 e pinte todas as outras arestas que conectam dois vértices em  $C_i$  com cor 4.

Vamos provar agora que esta é uma coloração arco-íris de  $G$ . Primeiro, note que existe um caminho arco-íris de tamanho 1 entre o vértice de  $G_1$  e qualquer outro vértice de  $G$ . Agora, vamos considerar dois vértices quaisquer,  $v$  e  $w$ , que pertençam a componentes não triviais de  $G_2$ . Existe um caminho arco-íris entre  $v$  e  $w$  em  $G$ . Sejam  $u \in G_1$ ,  $v \neq u$ ,  $w \neq u$ ,  $C_v$  a componente conexa de  $G_2$  que contém  $v$  e  $C_w$  a componente conexa de  $G_2$  que contém  $w$ . Se  $v$  e  $w$  são adjacentes a  $r_v \in C_v$  e  $r_w \in C_w$ , então o caminho arco-íris entre  $v$  e  $w$  é  $v u r_w w$ . Note que este é um caminho arco-íris mesmo quando  $v$  e  $w$  pertencem à mesma componente conexa de  $G_2$ . Se  $v$  é adjacente a  $r_v$  e  $w = r_w$  (ou vice-versa), então existe um caminho arco-íris  $w u v$ . Se  $v = r_v$ ,  $w = r_w$  e  $r_v \neq r_w$ , então o caminho arco-íris entre eles é  $w u y v$ , onde  $y$  é um vértice adjacente a  $r_v$ .

Resta considerar os vértices que estão à distância 2 de  $r_i$  na componente  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq z$ . Seja  $w$  um vértice que pertence à componente conexa  $C_w$  no grafo  $G_2$  e que está à distância 2 de  $r_w$ . Vamos mostrar que  $w$  tem caminho arco-íris com qualquer outro vértice  $v \in G_2$ . Primeiro suponha que  $v = r_v$  ou  $v$  é adjacente a  $r_v$ , para alguma componente  $C_v$ ,  $1 \leq v \leq z$ . Como  $G$  é um cografo,  $w$  tem um vizinho  $h$  adjacente a  $r_w$ . A aresta  $(w, h)$  está colorida com cor 4 e  $h$  tem caminho arco-íris com o vértice  $v$ , usando somente cores de 1 a 3. Portanto, existe um caminho arco-íris com cores de 1 a 3 entre  $h$  e  $v$ . Consequentemente, existe um caminho arco-íris entre  $w$  e  $v$ . Agora suponha que ambos,  $v$  e  $w$ , não pertencem à  $R = \{r_i : 1 \leq i \leq z\}$  e também não são adjacentes aos vértices do conjunto  $R$ . Então o caminho  $w u r_v h v$  é arco-íris, onde  $h$  é o vizinho de  $v$  que é vizinho de  $r_v$ .

Agora, é preciso mostrar que os vértices pendentes têm caminho arco-íris com vértices de  $G$  que não são pendentes. Caso a aresta incidente no vértice pendente  $v$  tenha cor  $c > 4$ , então existe um caminho arco-íris, pois existe um caminho arco-íris  $u - w$  do vértice  $u \in G_1$  a qualquer vértice  $w \neq v$  que não usa a cor  $c$ . É suficiente fazer o caminho  $v u - w$ . Se no vértice pendente  $v$  incide a cor 1, então existe um caminho arco-íris entre  $v$  e qualquer  $w \in C_i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , dado por  $v u w$ . Se no vértice pendente  $v$  incide a cor 2, então existe um caminho arco-íris entre  $v$  e qualquer  $w \neq r_i$ ,  $w \in C_i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , dado por  $v u w$ . Se  $w = r_i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , então o caminho arco-íris entre  $v$  e  $w$  é  $v u h w$ , onde  $h$  é qualquer vizinho de  $w$  na componente  $C_i$ . Se no vértice pendente  $v$  incide a cor 3, então existe um caminho arco-íris entre  $v$  e qualquer  $r_i \in C_i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , dado por  $v u r_i$ . Além disso, se  $w$  é um vértice da mesma componente que  $r_i$ , então existe um caminho arco-íris entre  $r_i$  e  $w$  que não usa as cores 2 e 3. Portanto, existe um caminho arco-íris entre  $v$  e  $w$ . Se no vértice pendente  $v$  incide a cor 4, então existe um caminho arco-íris entre  $v$  e qualquer  $w \in R$  ou adjacente a  $R$ , dado por  $v u w$ .

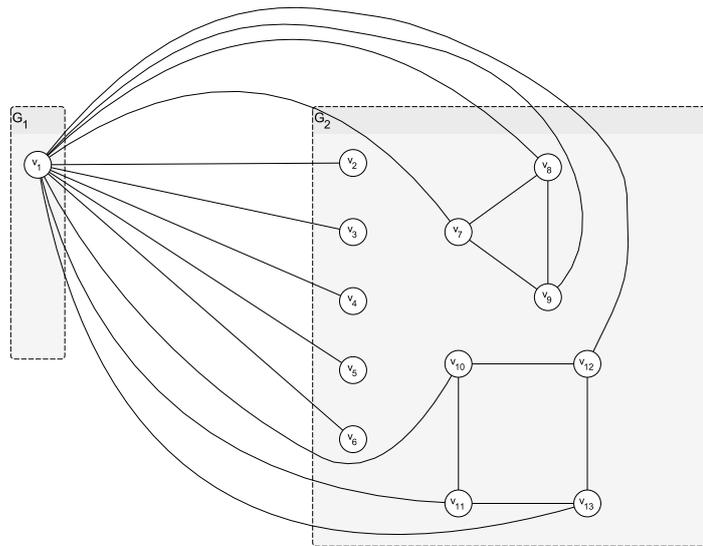
Portanto, se  $G_1$  é o grafo trivial, então  $rc(G) = t$  quando  $t \geq 4$  e  $rc(G) \leq 4$  quando  $t < 4$ .

Agora suponha que  $t = 0$ . Então  $G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_k$ . Se  $k \geq 3$ ,  $rc(G) \leq 3$ , pelo Teorema 3.1. Se  $k = 2$  e  $G_1$  tem ordem pelo menos 2, então  $rc(G) \leq 4$ , pelo Teorema 3.1. Se  $k = 2$ ,  $G_1$  tem ordem 1 e  $t = 0$ , a mesma coloração apresentada acima é uma coloração arco-íris para  $G$  e, portanto,  $rc(G) \leq 4$ .  $\square$

Observa-se que o número de vértices pendentes de um cografo  $G$ , que chamamos de  $p$ , é um limitante inferior para o número de conexão arco-íris de  $G$ . Portanto, se  $p > 3$ ,  $rc(G) > 3$ . Pelos próprios teoremas 2.13 e 2.15, existem casos em que se pode concluir que o número de conexão arco-íris de  $G$  é limitado a 2, bastando satisfazer as condições para tal nesses teoremas. Ou seja, se  $G$  é cografo resultante da operação de junção entre  $G_1$  e  $G_2$  e  $n_2 \leq 2^{n_1}$ ,  $rc(G) = 1$  para o  $K_2$  e  $rc(G) = 2$  nos demais casos. Se  $G$  é cografo resultante da operação de junção entre  $G_1, G_2, \dots, G_k$ ,  $k \geq 3$ ,  $n_k \geq 2$  e  $\sum_{i=1}^{k-1} n_i > n_k$ , então  $rc(G) = 2$ .

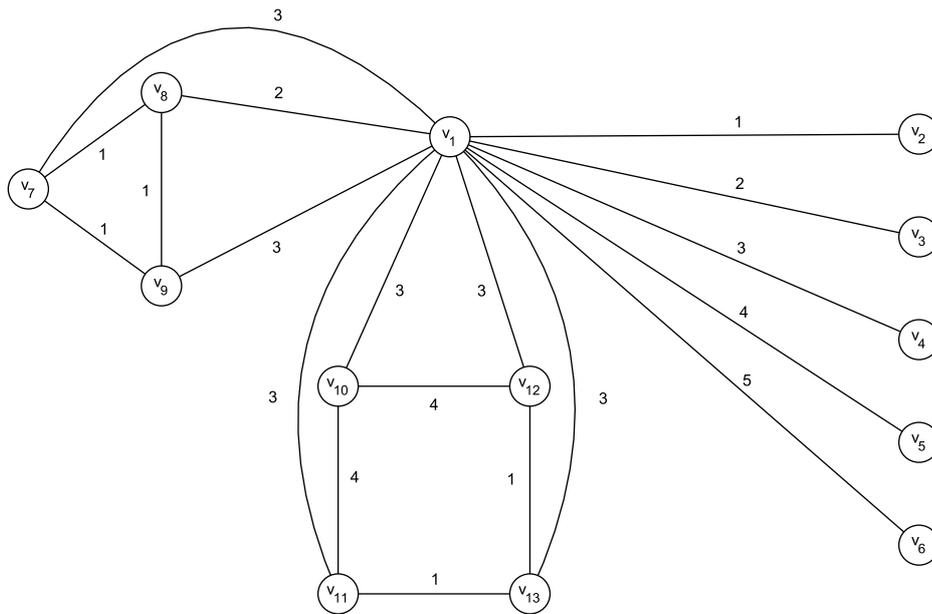
Considere, como exemplo, o cografo  $G$ , representado na Figura 17.

**Figura 17 – Cografo  $G = G_1 + G_2$**



**Fonte: Autoria Própria**

**Figura 18 – Cografo  $G$  colorido**



**Fonte: Autoria Própria**

A coloração arco-íris obtida para o grafo  $G$  após aplicação do teorema é apresentada na Figura 18.

## 4 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, determinou-se um limitante superior justo para o  $rc(G)$  quando  $G$  é um cografo. A principal contribuição deste trabalho é apresentar o número de conexão arco-íris para alguns cografos em que este valor era desconhecido. Por exemplo, quando  $G$  é um cografo com  $p \geq 4$  vértices pendentes, ficou provado que  $rc(G)$  é exatamente  $p$ . Também é possível concluir que se  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 2$ , é um cografo sem vértices pendentes, então seu número de conexão arco-íris é limitado superiormente pelo número de conexão arco-íris do grafo multipartido completo  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , onde  $n_i$  é o tamanho do conjunto de vértices de  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Como o diâmetro dos cografos é no máximo 2, ainda pode haver casos em que as técnicas apresentadas estejam usando até duas cores a mais que o ótimo no caso de cografos  $G_1 + G_2$  ou uma cor a mais que o ótimo no caso de cografos  $G_1 + G_2 + \dots + G_k$  com  $k \geq 3$ . Entretanto, vale lembrar que se  $G$  é um cografo  $G_1 + G_2$  sem vértices pendentes, o limite de 4 cores é justo, já que existem grafos bipartidos completos que não podem ser coloridos com menos que 4 cores, como alguns descritos no Teorema 2.13. Da mesma forma, se  $G$  é um cografo  $G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 3$ , sem vértices pendentes, o limite de 3 cores é justo, já que existem grafos multipartidos completos que não podem ser coloridos com menos que 3 cores, como alguns descritos no Teorema 2.15.

## REFERÊNCIAS

- BRANDSTADT, A.; *et al.* **Graph classes: a survey.** [S.l.]: Siam, 1999. v. 3.
- BRETSCHER, A.; *et al.* A simple linear time lexbfs cograph recognition algorithm. In: SPRINGER. **International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science.** [S.l.], 2003. p. 119–130.
- CHANDRAN, L. S; RAJENDRAPRASAD, D. Rainbow colouring of split and threshold graphs. In: SPRINGER. **International Computing and Combinatorics Conference.** [S.l.], 2012. p. 181–192.
- CHARTRAND, G. *et al.* Rainbow connection in graphs. **Mathematica Bohemica**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 133, n. 1, p. 85–98, 2008.
- CHARTRAND, G; ZHANG, P. **Chromatic Graph Theory.** [S.l.]: CRC Press, 2008.
- CORNEIL, D. G; LERCHS, H; BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 3, n. 3, p. 163–174, 1981.
- KRAFT, L. G. **A device for quantizing, grouping, and coding amplitude-modulated pulses.** Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 1949.
- LERCHS, H. On cliques and kernels. Department of Computer Science, University of Toronto, 1971.