

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

IGOR RAMOS TIBURCIO

**COLORAÇÃO TOTAL SEMIFORTE DE GRAFOS TRIPARTIDOS
COMPLETOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PONTA GROSSA
2016

IGOR RAMOS TIBURCIO

**COLORAÇÃO TOTAL SEMIFORTE DE GRAFOS TRIPARTIDOS
COMPLETOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação, do Departamento Acadêmico de Informática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Sheila Morais de Almeida.

PONTA GROSSA
2016



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Ponta Grossa

Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Informática
Bacharelado em Ciência da Computação



TERMO DE APROVAÇÃO

COLORAÇÃO TOTAL SEMIFORTE DE GRAFOS TRIPARTIDOS COMPLETOS

por

IGOR RAMOS TIBURCIO

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em 10 de junho de 2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida
Orientadora

Prof. Dr. André Koscianski
Membro titular

Prof. Dr. Erikson Freitas de Morais
Membro titular

Prof. Dr. Augusto Foronda
Responsável pelo Trabalho de Conclusão
de Curso

Prof. Dr. Erikson Freitas de Morais
Coordenador do curso

RESUMO

TIBURCIO, Igor Ramos. **Coloração total semiforte de grafo tripartidos completos**. 2016. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2016.

A coloração total semiforte é uma coloração dos elementos de um grafo onde os vértices e arestas são coloridos de forma que as cores das arestas adjacentes e do vértice em que elas incidem diferem entre si, e para todos os vértices adjacentes os conjuntos de cores usadas são diferentes. O Problema da Coloração Total Semiforte é, dado um grafo G qualquer, determinar o menor número de cores que permite uma coloração total semiforte de G . Esse número é chamado de número cromático total semiforte e denotado por $\chi_a''(G)$.

Um grafo k -partido é um grafo cujos vértices podem ser particionados em k partes, onde quaisquer vértices em uma mesma parte são não-adjacentes entre si. Um grafo é k -partido completo se existe aresta entre todos os pares de vértices que estão em partes diferentes. No caso em que $k = 3$ de um grafo k -partido completo, o grafo é também conhecido como tripartido completo.

Este trabalho apresenta novos resultados a nosso conhecimento sobre o número de cores necessárias para uma coloração total semiforte em grafos tripartidos completos, chegando a conclusão de que se o grafo é tripartido completo, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Mais especificamente é provado que se G é um grafo tripartido completo cuja as três partes possuem a mesma cardinalidade, então o seu número cromático total semiforte é $\Delta(G) + 2$, e que se duas partes possuem tamanho p e a terceira parte tem cardinalidade maior que p , então o seu número cromático total semiforte é menor ou igual a $\Delta(G) + 2$.

Palavras-chaves: Grafos tripartidos. Coloração total semiforte. Coloração de arestas.

ABSTRACT

TIBURCIO, Igor Ramos. **Adjacent vertex distinguishing total coloring of complete tripartite graphs**. 2016. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2016.

An adjacent vertex distinguishing total coloring is a coloring on the vertices and edges of a graph such that adjacent edges and its common vertex have distinguishing colors, and for every two adjacent vertices their colors-sets are distinct. The Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring Problem is, given a graph G , determine the smallest number of colors that allows an adjacent vertex distinguishing total coloring of G . This number is called adjacent vertex distinguishing total chromatic number and is denoted $\chi_a''(G)$.

A k -partite graph is a graph whose graph vertices can be partitioned into k disjoint sets so that no two vertices within the same set are adjacent. A graph is a complete k -partite if every pair of graph vertices in the k sets are adjacent. In the $k = 3$ case of a complete k -partite graph, the graph is also known as complete tripartite graph.

This work presents new results on the number of colors required to do a proper adjacent vertex distinguishing total coloring of complete tripartite graphs, reaching the conclusion that if the graph is complete tripartite, then $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

More specifically it is proved that if G is a complete tripartite graph whose the three disjoint sets have the same cardinality, then its adjacent vertex distinguishing total chromatic number is $\Delta(G) + 2$, and if two disjoint sets have size p and the third part has a higher cardinality than p , then its adjacent vertex distinguishing total chromatic number is less than or equal to $\Delta(G) + 2$.

Keywords: Tripartite graphs. Adjacent vertex distinguishing total coloring. Edge coloring.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Grafo com 4 vértices, 5 arestas e $\Delta = 3$	9
Figura 2	– Coloração total não-válida e válida de um grafo	9
Figura 3	– 5-coloração total semiforte de um grafo $K_{3(1)}$	10
Figura 4	– Grafo com 6 vértices e 6 arestas com partes de tamanho 2.	13
Figura 5	– Grafo 3-partido com partes de tamanho 1,2,3.	13
Figura 6	– Grafo 2-partido completo	14
Figura 7	– Grafo com emparelhamento $M = \{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$	14
Figura 8	– Grafo com um emparelhamento perfeito $M = \{(v_1, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_6)\}$..	15
Figura 9	– Grafo G e seu complemento \overline{G}	15
Figura 10	– Grafo bipartido com 2-coloração de vértices	16
Figura 11	– Grafo classe 1 com 4 vértices e 5 arestas	17
Figura 12	– 4-coloração total com as cores $\{a, b, c, d\}$	17
Figura 13	– 5-coloração total semiforte	18
Figura 14	– Grafo $K_{4(2)}$ com nomeação canônica	19
Figura 15	– Subgrafos induzidos K_4^0 e K_4^1 , que são isomorfos ao grafo completo K_4 ..	20
Figura 16	– Grafo $K_{4(2)}$ com nomeação canônica e subgrafo $B_{0,1}$	20
Figura 17	– Componentes $\{K_4^0, K_4^1, K_4^2\} = \kappa$, e grafo representante G_r	21
Figura 18	– Grafo $K_{4(4)}$ e seu subgrafo κ com uma coloração total semiforte	23
Figura 19	– Grafo representante $G_r = K_4$ de um $K_{4(4)}$ com uma coloração de arestas .	24
Figura 20	– Grafo $K_{3(4)}$ e seu subgrafo κ com uma coloração total semiforte	25
Figura 21	– 6-coloração das arestas do subgrafo induzido β do grafo $K_{3(4)}$	26
Figura 22	– Grafo $K_{3(4)}$ e seu subgrafo induzido β com uma 9-coloração de arestas ...	27
Figura 23	– Componentes K_4^0, K_4^1 e K_4^2 com colorações totais semifortes	28
Figura 24	– Grafo $K_{3(5)}$ equipartido completo	30
Figura 25	– Grafo $K_{3,6}$ completo	31
Figura 26	– Grafo H induzido de um grafo $K_{3,4}$	32
Figura 27	– Grafo H com emparelhamento em $H[B \cup C]$	38
Figura 28	– Partes B e C de um grafo tripartido com cardinalidade p	40

LISTA DE SÍMBOLOS

$d(v)$	Grau de um vértice v
v_i	Vértice v de índice i
(v_i, v_j)	Aresta que incide nos vértices v_i e v_j
$\Delta(G)$	Grau máximo de G
$V(G)$	Vértices de G
$E(G)$	Arestas de G
$C(u)$	Rótulo do vértice u
$\chi''(G)$	Número cromático total de G
$\chi_a''(G)$	Número cromático total semiforte de G
\overline{G}	Grafo complemento de G
$\chi(G)$	Número cromático de G
$\chi'(G)$	Índice cromático de G
$K_{r(n)}$	Grafo com r partes e n vértices em cada uma
K_r	Grafo completo com r partes
$G[X]$	Subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices X
$K_{n,m}$	Grafo bipartido completo com partes de tamanho n e m .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	11
2	CONCEITOS BÁSICOS	13
3	COLORAÇÃO TOTAL SEMIFORTE DE GRAFOS EQUIPARTIDOS COM- PLETOS	19
4	COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS TRIPARTIDOS COMPLETOS	30
5	COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS k-PARTIDOS COMPLETOS	33
6	COLORAÇÃO TOTAL SEMIFORTE DE GRAFOS TRIPARTIDOS COM- PLETOS	37
7	CONCLUSÃO	42

1 INTRODUÇÃO

A formulação de uma maneira de particionar em subconjuntos um dado conjunto gera problemas interessantes e possui aplicação prática. Um exemplo é o problema de organização dos horários de reuniões de um órgão (EULER, 1736) (por exemplo o Senado Federal do Brasil), onde existem múltiplas reuniões acontecendo simultaneamente mas algumas pessoas precisam estar presentes em mais de uma delas, e há a vontade de realizar esses encontros eficientemente, no menor número de períodos dos dias da semana, sem que nenhum participante se veja obrigado a escolher uma, entre duas ou mais reuniões, que acontecem no mesmo horário. Na teoria de grafos, isso é estudado no processo chamado de coloração, em que aplicando-se ou não regras limitantes, as relações entre elementos de um conjunto são modeladas como um grafo.

Grafo é uma estrutura matemática abstrata usada para resolver problemas representados por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas. Os vértices são unidades indivisíveis que representam objetos que variam com o problema abordado, e as arestas são um conjunto de pares não ordenados de vértices, que normalmente expressam uma relação entre os objetos. Um conceito importante é o grau de um vértice v , denotado por $d(v)$, que é o número de arestas que incidem em v , com laços contados duas vezes, onde um laço é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Um conjunto de arestas múltiplas é um conjunto de arestas entre um mesmo par de vértices. Um grafo sem laços e sem arestas múltiplas é conhecido como grafo simples. Neste trabalho todos os grafos são simples. O grau máximo de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, é o maior dentre os graus dos vértices de G . A Figura 1 apresenta o grafo $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é o conjunto de vértices e $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$ é o conjunto de arestas. Observe que neste exemplo $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$ e $\Delta(G) = 3$. Vértices e arestas são chamados de elementos do grafo, dois elementos são adjacentes se são dois vértices ligados por uma aresta, ou duas arestas que possuem um vértice em comum, ou ainda um vértice e uma aresta incidente no mesmo. Como pode ser visto na Figura 1, o vértice v_3 é adjacente aos vértices $\{v_1, v_2, v_4\}$, assim como as arestas $\{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_3)\}$ são duas a duas adjacentes pois elas incidem em um vértice em comum (v_3) e a partir disso pode-se dizer que v_3 e essas arestas são elementos adjacentes entre si.

A coloração total é uma atribuição de cores aos vértices e arestas de forma que elementos adjacentes recebem cores diferentes (BEHZAD; CHARTRAND; COOPER, 1967). Dada uma coloração total, o conjunto das cores de u e das arestas que incidem em u é chamado de rótulo de u e é representado por $C(u)$. Observe que na Figura 2 o grafo G não possui uma coloração total válida, pois o rótulo do vértice v_1 possui duas ocorrências da cor a . O grafo H apresenta uma coloração total válida. O menor número de cores necessárias para se obter uma coloração total de um grafo G é chamado de número cromático total de G e é representado como $\chi''(G)$. O Problema da Coloração Total consiste em, dado um grafo G , determinar $\chi''(G)$. Em

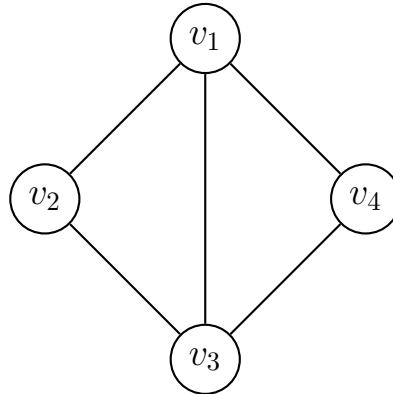


Figura 1 – Grafo com 4 vértices, 5 arestas e $\Delta = 3$

Fonte: Autoria própria.

relação a este problema, existe uma famosa conjectura de 1967, apresentada a seguir.

Conjectura 1. (BEHZAD; CHARTRAND; COOPER, 1967) *Seja G um grafo simples, então $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

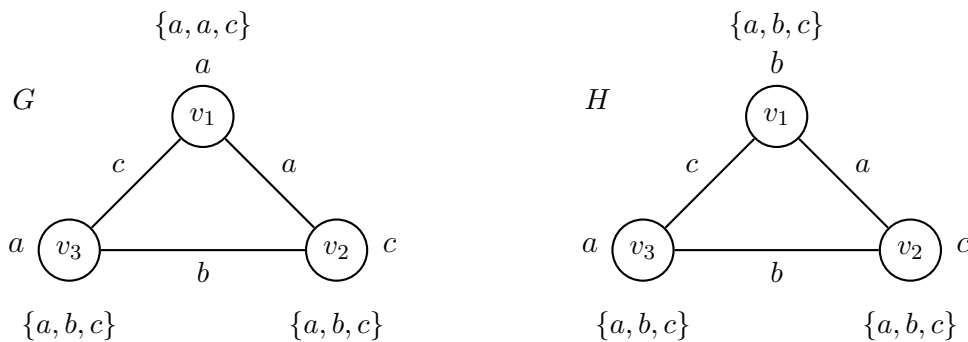


Figura 2 – Coloração total não-válida e válida de um grafo

Fonte: Autoria própria.

Uma coloração total semiforte é uma coloração total onde vértices adjacentes tem rótulos diferentes (ZHANG, 2005). O Problema da Coloração Total Semiforte é, dado um grafo G qualquer, determinar o menor número de cores que permite uma coloração total semiforte de G . Esse número é chamado de número cromático total semiforte e denotado por $\chi''_a(G)$. Observe que a Figura 3 apresenta uma 5-coloração total semiforte válida, pois os vértices adjacentes $\{v_1, v_2, v_3\}$ possuem rótulos diferentes: $C(v_1) = \{a, b, c\} \neq C(v_2) = \{a, b, d\} \neq C(v_3) = \{b, c, e\}$.

Esse problema tem sido bastante investigado nos últimos anos (HUANG, 2012; WANG; ZHU, 2010; HULGAN, 2009) e sua complexidade não é conhecida, entretanto é bem estabelecido que o Problema da Coloração Total é NP-difícil (SÁNCHEZ-ARROYO, 1989). Como o

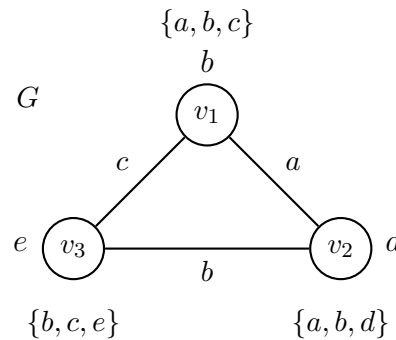


Figura 3 – 5-coloração total semiforte de um grafo $K_{3(1)}$

Fonte: Autoria própria.

Problema da Coloração Total Semiforte tem uma restrição a mais, acredita-se que o mesmo tenha uma complexidade similar.

Por definição $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 1$. Quando o Problema da Coloração Total Semiforte foi definido por ZHANG (2005), também foi determinado o número cromático total semiforte de algumas classes de grafos, tais como: grafos completos, ciclos, grafos bipartidos completos e árvores. Nesse processo, foi observado que como toda coloração total semiforte é uma coloração total, $\chi''(G) \leq \chi''_a(G)$. Também notou-se que quando o grafo G possui dois vértices adjacentes de grau máximo, $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$.

Teorema 2. (ZHANG, 2005) *Se G é um grafo simples que possui dois vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi''_a(G) \geq \Delta(G) + 2$.*

Prova. Sejam u e v dois vértices adjacentes de grau máximo que pertencem ao grafo G . Para qualquer k -coloração total semiforte de G , tanto $C(u)$ quanto $C(v)$ possuem $\Delta(G) + 1$ elementos. Por definição $C(u) \neq C(v)$ já que eles são adjacentes, ou seja, pelo menos um elemento de $C(u)$ é distinto dos elementos de $C(v)$. Deste modo, tem-se que $k \geq \Delta(G) + 2$. ■

Pela prova de ZHANG (2005) tem-se o seguinte resultado para grafos completos.

Teorema 3. *Se G é um grafo simples completo com n vértices, então $\chi''_a(G) = n + 1$, se n é par ou $\chi''_a(G) = n + 2$, se n é ímpar.*

Quase todas as classes que foram investigadas por ZHANG (2005) possuem $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 2$, com a exceção de grafos completos de ordem ímpar, que possuem $\chi''_a(K_{2n+1}) = \Delta(K_{2n+1}) + 3$. Com base nestes resultados foi proposta a Conjectura da Coloração Total Semiforte.

Conjectura 4. *Seja G um grafo simples, então $\chi''_a(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Um grafo k -partido é um grafo cujos vértices podem ser particionados em k partes, onde quaisquer vértices em uma mesma parte são não-adjacentes entre si. Um grafo é k -partido completo se existe aresta entre todos os pares de vértices que estão em partes diferentes. Neste trabalho é apresentado um estudo da coloração total semiforte em grafos 3-partidos completos (conhecidos como tripartidos completos). Luiz (2014) provou a Conjectura 4 para todos os grafos tripartidos (completos ou não). Luiz (2014) também provou que se o grafo é tripartido completo e não possui vértices adjacentes de grau máximo ou se suas partes são V_1, V_2 e V_3 e tem tamanhos $|V_1| = |V_2|$ e $|V_3| \geq 2|V_1|$, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Ainda considerando os tripartidos completos, Luiz (2014) propôs a seguinte conjectura.

Conjectura 5. *Seja G um grafo tripartido completo com tripartição $[V_1, V_2, V_3]$ tal que $|V_1| = |V_2| \geq 1$ e $|V_1| \leq |V_3| < 2|V_1|$. Então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.*

Observa-se então que dentre os casos não cobertos nesses resultados estão os grafos que possuem vértices vizinhos com grau igual a $\Delta(G)$ e todas as partes com o mesmo tamanho. Quando o grafo k -partido possui todas as partes de mesmo tamanho, é chamado de equipartido. Um equipartido completo é, portanto, um grafo k -partido onde todas as partes tem mesmo tamanho e vértices de partes diferentes são adjacentes. Em relação aos grafos equipartidos completos, Luiz (2014) provou que se o grafo possui número de vértices (também conhecido como ordem) par, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$ e, caso contrário, $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$, provando a Conjectura 4 para esta classe. Além desse resultado, conjecturou:

Conjectura 6. *Se G é um grafo simples equipartido completo de ordem ímpar, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.*

Neste trabalho, prova-se a Conjectura 5 e são apresentadas novas evidências da veracidade da Conjectura 6, que é provada para todos os tripartidos que são equipartidos completos.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

No Capítulo 2 estão definidos alguns conceitos básicos de grafos, como a coloração de vértices e arestas e o conceito de grafos k -partidos. Esses conceitos são necessários no decorrer do trabalho para compreensão das provas e exemplos apresentados.

O Capítulo 3 aborda o trabalho de Luiz (2014) com o objetivo de apresentar os resultados anteriores e delimitar a contribuição deste trabalho de conclusão de curso no escopo da coloração total semiforte de grafos tripartidos completos.

No Capítulo 4 é apresentada a técnica de Rosenfeld (1971) de coloração total de grafos tripartidos. Essa técnica foi estudada pois o Problema da Coloração Total Semiforte ainda não foi resolvido em várias subclasses dos grafos k -partidos completos e o Problema da Coloração Total é similar ao Problema da Coloração Total Semiforte. Neste trabalho essa técnica foi adaptada

com sucesso na classe de grafos tripartidos completos, sendo usada para gerar um subgrafo que é mais facilmente analisado.

No Capítulo 5 apresenta-se a prova da coloração total de grafos k -partidos completos de Chew e Yap (1992). Essa técnica de coloração foi analisada na tentativa de ser adaptada para gerar uma coloração total semiforte de arestas em algumas classes de grafos. Não se obteve sucesso na demonstração de que a técnica garante uma coloração total semiforte de arestas, entretanto ela foi útil na determinação do número cromático total semiforte da classe analisada no Capítulo 6.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados deste trabalho, como a prova da Conjectura 5 e a solução do Problema da Coloração Total Semiforte em grafos tri-equipartidos completos de ordem ímpar. Estes resultados utilizam adaptações das técnicas apresentadas nos capítulos 4 e 5.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Particionar os vértices de um grafo G é dividi-los em subconjuntos ou partes de modo que cada parte deve conter pelo menos um vértice, a união de todas as partes deve formar o conjunto de vértices que dão origem ao grafo G e a interseção de quaisquer partes deve ser vazia. No exemplo da Figura 4 temos um grafo particionado em três partes (X, Y e Z).

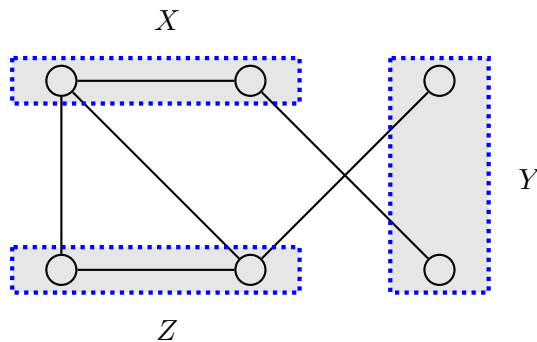


Figura 4 – Grafo com 6 vértices e 6 arestas com partes de tamanho 2.

Fonte: Autoria própria.

Um grafo k -partido é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes, onde um conjunto independente é um conjunto de vértices que são dois a dois não-adjacentes, ou seja, os vértices em uma mesma parte não possuem arestas entre si. No exemplo da Figura 5 um grafo com 6 vértices foi dividido em 3 conjuntos independentes, X, Y, e Z, de tamanhos 1, 2 e 3 respectivamente.

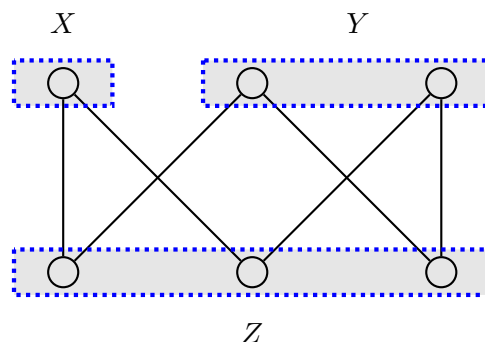


Figura 5 – Grafo 3-partido com partes de tamanho 1,2,3.

Fonte: Autoria própria.

Quando k é igual a 2, o grafo 2-partido é chamado de bipartido, quando k é igual a 3, o grafo 3-partido é chamado de tripartido. Quando todos os conjuntos independentes da partição têm o mesmo tamanho, o grafo é chamado de equipartido. Um grafo é k -partido completo se quaisquer dois vértices em conjuntos distintos da partição são adjacentes. Um grafo k -partido

completo cujas partes tem todas tamanho p é denotado por $K_{k(p)}$. A Figura 6 exibe um exemplo de um grafo bipartido completo, com partes X e Y de tamanho 3. Observe que o grafo apresentado é equipartido.

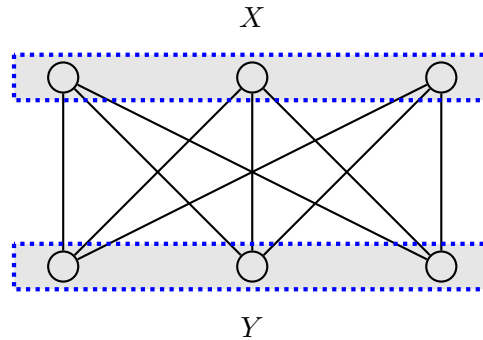


Figura 6 – Grafo 2-partido completo

Fonte: Autoria própria.

Um emparelhamento M é um conjunto de arestas com a propriedade de que todo vértice de G incide em no máximo uma aresta de M . Um emparelhamento é perfeito quando todo vértice de G incide em exatamente uma aresta de M . O emparelhamento perfeito contém no máximo $|V(G)|/2$ arestas e também pode-se dizer que emparelhamentos perfeitos só são possíveis quando o grafo possui número par de vértices.

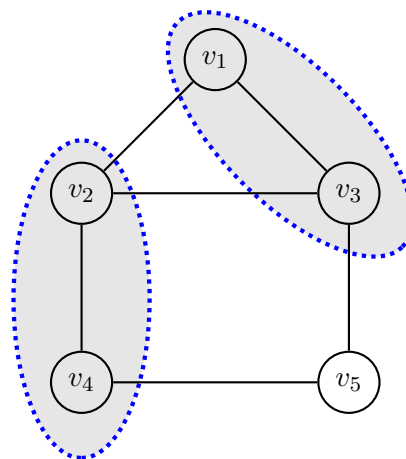


Figura 7 – Grafo com emparelhamento $M = \{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$

Fonte: Autoria própria.

Observe que no grafo da Figura 7 o emparelhamento $M = \{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$ destacado não é um emparelhamento perfeito. De fato, não é possível fazer um emparelhamento perfeito neste grafo, pois ele tem um número ímpar de vértices ($|V(G)| = 5$). A Figura 8 apresenta um emparelhamento perfeito $M = \{(v_1, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_6)\}$ de um grafo G com 6 vértices.

O complemento de um grafo $G = (V(G), E(G))$, denotado por \overline{G} , é o grafo com o conjunto de vértices $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{(v_i, v_j) : (v_i, v_j) \notin E(G)\}$. A Figura 9 mostra

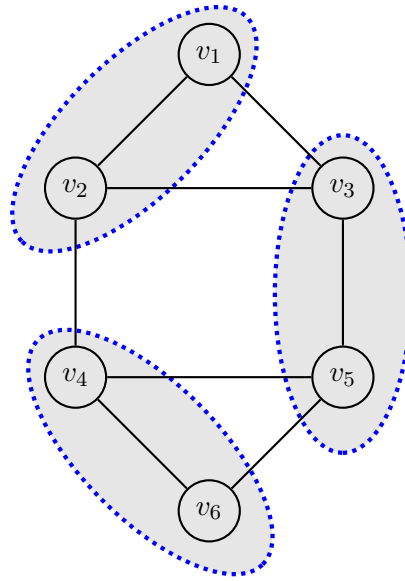


Figura 8 – Grafo com um emparelhamento perfeito $M = \{(v_1, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_6)\}$

Fonte: Autoria própria.

um grafo G com o seu respectivo complemento \overline{G} , observe que no grafo G o vértice v_1 é adjacente aos vértices $\{v_2, v_3\}$ e em seu complemento o vértice v_1 é adjacente aos vértices $\{v_4, v_5\}$.

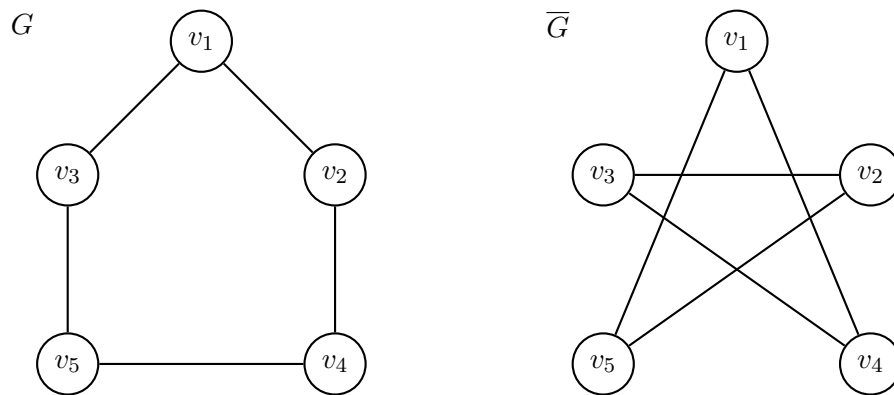


Figura 9 – Grafo G e seu complemento \overline{G}

Fonte: Autoria própria.

Seja G um grafo qualquer e X um subconjunto de seus vértices. Um grafo $G[X]$ é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ quando o conjunto de vértices de $G[X]$ é o próprio conjunto X e o conjunto de arestas de $G[X]$ é o subconjunto das arestas de G cujos extremos são vértices de X .

Dois grafos G e H são isomorfos se é possível fazer um mapeamento dos vértices de G em vértices de H em uma correspondência um para um de forma que u e v são vértices adjacentes em G se, e somente se, seus vértices correspondentes em H também são adjacentes. Como exemplo, os grafos G e o seu complemento \overline{G} apresentados na Figura 9 são isomorfos.

Um grafo G é k -regular quando todos os seus vértices tem grau k . Como exemplo, o

grafo da Figura 9 é 2-regular.

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$, uma coloração de vértices é uma atribuição de cores para os vértices do grafo G , onde vértices adjacentes não possuem a mesma cor. Ainda, pode-se dizer que uma coloração usando no máximo k cores é uma k -coloração de vértices de G , e que o menor número de cores necessárias para a coloração dos vértices de G é o seu número cromático, denotado por $\chi(G)$. No caso de grafos bipartidos, são necessárias apenas duas cores. Intuitivamente isso é fácil de ser demonstrado: existem dois conjuntos independentes, os vértices que estão no mesmo conjunto recebem a mesma cor, logo são necessárias apenas duas cores, como pode-se ver no exemplo da Figura 10. Calcular o número cromático de um grafo G qualquer é um problema NP-completo (WALKER; SKIENA, 1992). Brooks (2009) estabeleceu uma relação entre o maior grau de um grafo e o seu número cromático, conhecida como Teorema de Brooks.

Teorema 7. (BROOKS, 2009) *Seja G um grafo com grau máximo $\Delta(G)$, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$ a não ser que G seja um grafo completo ou tenha ciclo ímpar, neste caso $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

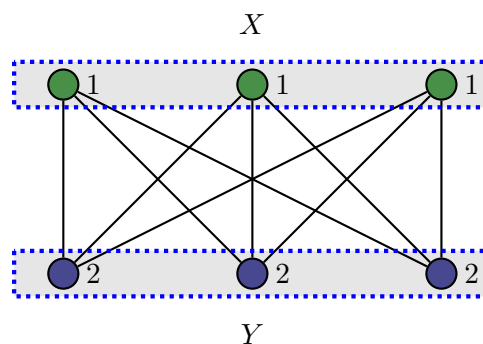


Figura 10 – Grafo bipartido com 2-coloração de vértices

Fonte: Autoria própria.

Seguindo o mesmo princípio, a coloração de arestas é uma designação de cores que satisfaz a regra de que dadas quaisquer duas arestas adjacentes, pertencentes a um grafo G , suas cores são distintas entre si. Similarmente à nomenclatura já apresentada, a coloração das arestas de G com k cores gera uma k -coloração de arestas e o menor número de cores necessárias para a coloração das arestas de G é chamado de índice cromático de G , denotado por $\chi'(G)$. Observe que essa definição implica necessariamente que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Vizing (1964) apresentou um algoritmo que pinta as arestas de qualquer grafo simples G com no máximo $\Delta(G) + 1$ cores. Esse resultado ficou conhecido como Teorema de Vizing, conforme enunciado a seguir.

Teorema 8. (VIZING, 1964) *Se G é simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Tais limites dividem os grafos em duas classes, os que precisam de $\Delta(G)$ cores são chamados de classe 1, enquanto os que precisam de $\Delta(G) + 1$ cores são grafos classe 2.

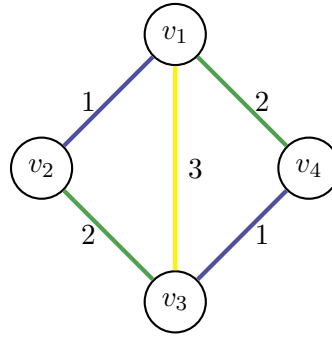


Figura 11 – Grafo classe 1 com 4 vértices e 5 arestas

Fonte: Autoria própria.

Uma forma de colorir os elementos de um grafo onde tanto as arestas quanto os vértices recebem cores foi introduzida por Behzad, Chartrand e Cooper (1967) com o nome de coloração total. Uma coloração total é uma atribuição de cores aos vértices e arestas do grafo de forma que elementos adjacentes têm cores diferentes. Uma k -coloração total é uma coloração total do grafo com k cores. O menor número de cores necessárias para uma coloração total de G é o número cromático total de G , denotado por $\chi''(G)$. Uma $\chi''(G)$ -coloração total é uma coloração total ótima. A Figura 12 apresenta uma 4-coloração total de um grafo G , onde o conjunto de cores utilizadas é $\{a, b, c, d\}$. Observe que essa coloração total é ótima.

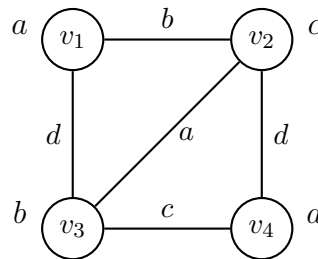


Figura 12 – 4-coloração total com as cores $\{a, b, c, d\}$

Fonte: Autoria própria.

Se v é um vértice de G , onde $d(v) = \Delta(G)$, então são necessárias $\Delta(G)$ cores distintas para colorir as arestas incidentes em v e mais uma cor, para colorir o próprio vértice v . Logo, por definição, tem-se que $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$. Como visto, a Conjectura 1, também conhecida como Conjectura da Coloração Total (ou CCT), propõe que o número cromático total de um grafo G qualquer é menor ou igual a $\Delta(G) + 2$. Se a CCT for verdadeira, existem apenas duas possibilidades para o número cromático total de um grafo G qualquer, $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ ou $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$. Em analogia ao que ocorre na coloração de arestas, grafos que tem uma coloração total com $\Delta(G) + 1$ cores são chamados de grafos tipo 1, enquanto aqueles que necessitam de $\Delta(G) + 2$ cores são tipo 2. Neste trabalho, dizemos que uma cor c falta em um vértice v se nem v e nenhuma aresta incidente em v estão coloridos com a cor c .

Seja u um vértice qualquer em um grafo que possui uma coloração total. O conjunto formado pela cor de u unida com as cores das arestas que incidem em u é chamado de rótulo de

u e é representado por $C(u)$. Em ZHANG (2005), é introduzido o conceito de coloração total semiforte de um grafo G , que impõem a uma coloração total de G a restrição de que para toda aresta $(u, v) \in E(G)$ tem-se $C(u) \neq C(v)$. Similarmente, o número cromático total semiforte de G , $\chi_a''(G)$, é o menor número de cores necessárias para uma coloração total semiforte de G . Observe que o exemplo da Figura 12 não é uma coloração total semiforte, pois os vértices v_2 e v_3 são adjacentes e possuem o mesmo rótulo, $C(v_2) = C(v_3) = \{a, b, c, d\}$. A Figura 13 apresenta uma 5-coloração total semiforte do grafo completo com 4 vértices.

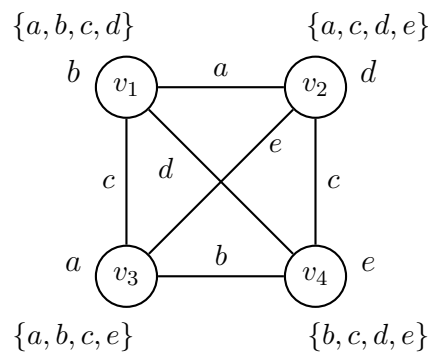


Figura 13 – 5-coloração total semiforte

Fonte: Autoria própria.

A Conjectura da Coloração Total Semiforte foi verificada para grafos com $\Delta(G) = 3$ (CHEN, 2008; HULGAN, 2009). Chen e Zhang (2008) determinaram o número cromático total semiforte de Halin generalizados com $\Delta(G) \geq 6$ e Chen e Guo (2009) determinaram para os hipercubos. Mello e Pedrotti (2010) verificaram a conjectura para os grafos indiferença e determinaram o número cromático total semiforte para algumas de suas subclasses. Wang e Wang (2008) determinaram o número cromático total semiforte de grafos exoplanares com $\Delta(G) \geq 3$ e HUANG (2012) provou que todo grafo planar com $\Delta(G) \geq 13$ possui $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Luiz (2014) apresentou uma prova mais concisa para os grafos simples com $\Delta(G) = 3$ sem vértices adjacentes com grau máximo, e determinou o número cromático total semiforte para os snarks-flor, os snarks de Goldberg, os snarks de Blanusa generalizados, os snarks de Loupekine LP_1 e grafos equipartidos completos de ordem par.

No próximo capítulo são apresentados alguns resultados sobre coloração total semiforte em grafos tripartidos e em equipartidos completos.

3 COLORAÇÃO TOTAL SEMIFORTE DE GRAFOS EQUIPARTIDOS COMPLETOS

Considere um grafo r -partido completo cujas partes tem tamanho n , $K_{r(n)}$. Se $n = 1$, $K_{r(n)}$ é isomorfo ao grafo K_r , cujo o número cromático total semiforte já é conhecido, pelo Teorema 3. Quando $r = 1$, os vértices do grafo $K_{1(n)}$ não são adjacentes entre si, portanto cada vértice pode ser colorido com a mesma cor e então $\chi''_a(G) = 1$. Para $r > 1$ e $n > 1$, Luiz (2014) determina o número cromático total semiforte quando o grafo $K_{r(n)}$ tem número de vértices par e prova a Conjectura 4 quando o número de vértice é ímpar. Neste capítulo, são apresentadas as principais ideias da técnica utilizada para a obtenção de tais resultados.

Primeiro, é definida uma nomeação canônica dos vértices dos grafos equipartidos completos da seguinte maneira: para $0 \leq j \leq r - 1$, cada vértice da partição V_j é denotado por u_j^i com $0 \leq i \leq n - 1$. A Figura 14 mostra uma nomeação canônica do $K_{4(2)}$.

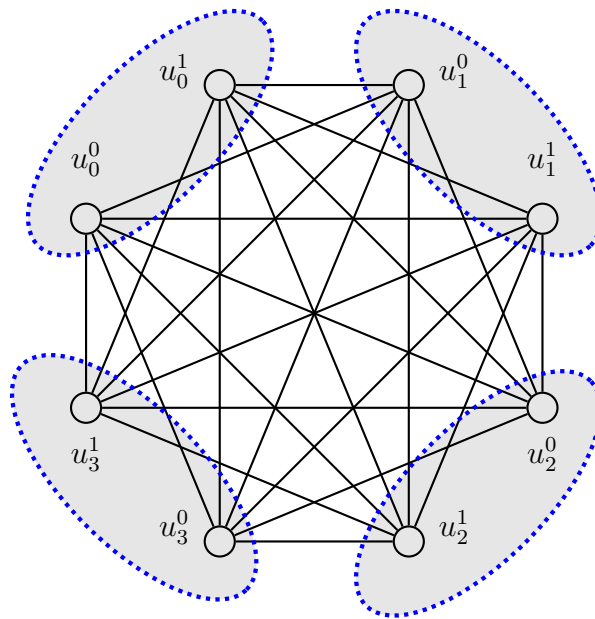


Figura 14 – Grafo $K_{4(2)}$ com nomeação canônica

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

Considere o grafo $K_{r(n)}$ munido da nomeação canônica. Definem-se os subgrafos $K_j^i := G[\{u_0^i, u_1^i, \dots, u_{r-1}^i\}]$, $0 \leq i \leq n - 1$, que são isomorfos ao K_r . Note que cada subgrafo K_j^i é $(r - 1)$ -regular. A Figura 15 mostra os subgrafos induzidos K_4^0 e K_4^1 , gerados após a aplicação da nomeação canônica. Note que os mesmos são isomorfos ao grafo completo K_4 . Assim, o $K_{r(n)}$ possui n subgrafos induzidos disjuntos que são isomorfos ao K_r .

Agora constrói-se um subgrafo induzido do $K_{r(n)}$ chamado $B_{i,j}$, tal que ele seja um grafo bipartido com as partes $V(K_r^i)$ e $V(K_r^j)$, $0 \leq i < j \leq n - 1$ munido das arestas que ligam os vértices do K_r^i aos vértices do K_r^j . Observa-se que $B_{i,j}$ também é um grafo $(r - 1)$ -regular, pois não possui as arestas (u_k^i, u_k^j) , $0 \leq k \leq r - 1$, já que os vértices u_k^i e u_k^j pertencem a uma

mesma parte V_k no grafo $K_{r(n)}$. A Figura 16 exibe o grafo $K_{4(2)}$ com a nomenclatura canônica e o seu subgrafo $B_{0,1}$, induzido pelas arestas que ligam os vértices do K_4^0 aos vértices do K_4^1 .

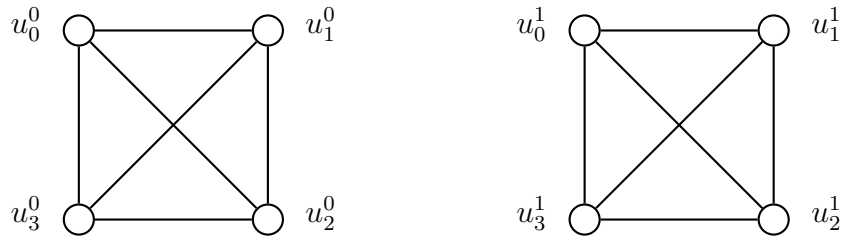


Figura 15 – Subgrafos induzidos K_4^0 e K_4^1 , que são isomorfos ao grafo completo K_4

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

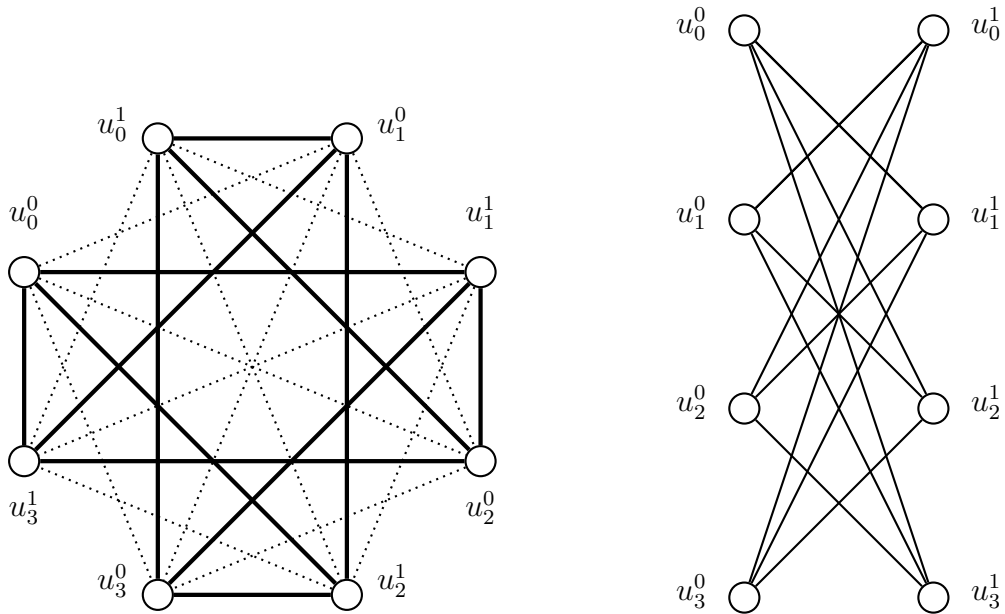


Figura 16 – Grafo $K_{4(2)}$ com nomenclatura canônica e subgrafo $B_{0,1}$

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

Usando a notação acima, fica definida a decomposição canônica $[\kappa, \beta]$ do $K_{r(n)}$ como a união dos subgrafos κ e β , disjuntos nas arestas, tais que:

$$\kappa := \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} K_r^i \text{ e } \beta := \bigcup_{0 \leq i < j \leq n-1} B_{i,j}.$$

Assim, $K_{r(n)} \equiv (\kappa \cup \beta)$. Observe que para $n \geq 2$, κ é um grafo não conexo composto pelas componentes K_r^i , $0 \leq i \leq n-1$.

Dois vértices u_l^i e u_p^j pertencentes a $V(K_{r(n)})$ são denominados vértices correspondentes se $l = p$ e $i \neq j$; ou seja, eles são vértices correspondentes se e somente se não são adjacentes, pertencendo à mesma parte do grafo $K_{r(n)}$. Veja que na Figura 16 os vértices u_3^1 e u_3^0 são correspondentes. Duas arestas $(u_l^i, u_p^i), (u_s^j, u_t^j) \in E(K_{r(n)})$ são correspondentes se $l = s, p = t$ e $i \neq j$. Na Figura 16 (u_3^1, u_2^1) e (u_3^0, u_2^0) são arestas correspondentes.

Seja G_r o grafo simples obtido a partir de $[\kappa, \beta]$. G_r é um grafo representante do $K_{r(n)}$. A decomposição canônica do $K_{r(n)}$ pode ser representada pelo grafo G_r como: cada vértice $v_i \in V(G_r)$ corresponde a uma componente $K_r^i \subset \kappa$ e cada aresta $(v_i, v_j) \in E(G_r)$ corresponde ao grafo bipartido $B_{i,j} \subseteq \beta$. Note que $G_r \equiv K_n$. A Figura 17 apresenta o grafo representante do $K_{4(3)}$, onde cada vértice é uma componente K_r^i e as arestas entre elas representam as arestas dos grafos bipartidos $B_{0,1}$, $B_{0,2}$ e $B_{1,2}$.

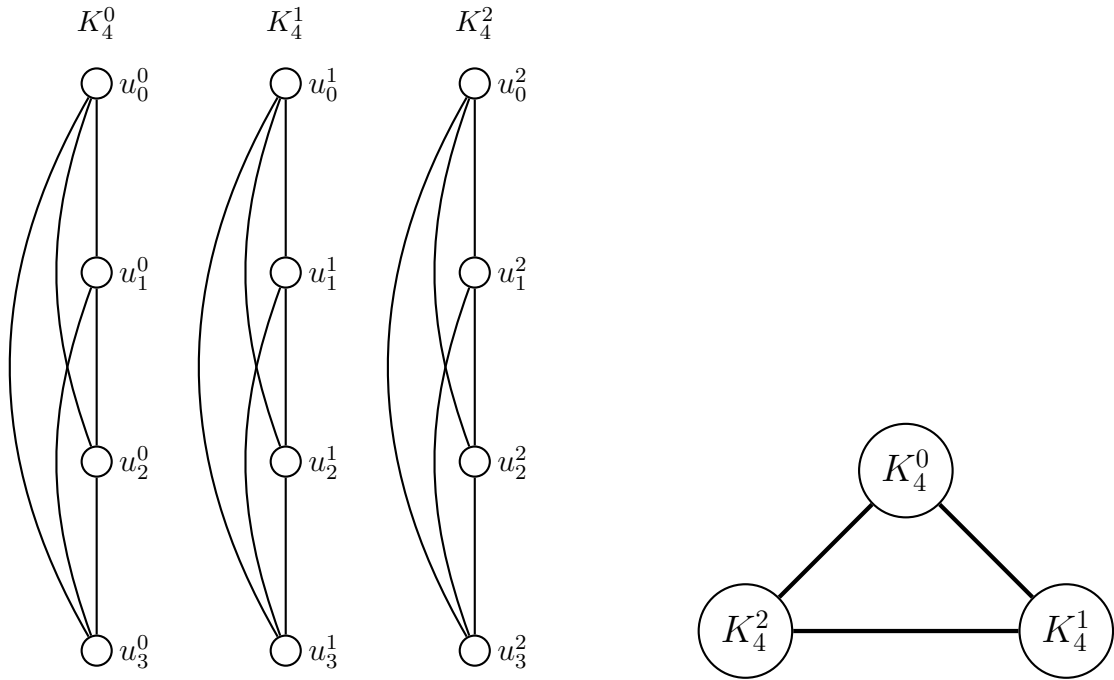


Figura 17 – Componentes $\{K_4^0, K_4^1, K_4^2\} = \kappa$, e grafo representante G_r

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

Para provar que o número cromático total semiforte do grafo $K_{r(n)}$ de ordem par é $\Delta(G) + 2$, Luiz (2014) faz uso dos seguintes lemas.

Lema 9. *Seja K_n um grafo completo, com $n \geq 2$, e π uma $(n + 1)$ -coloração total semiforte desse grafo. Então, n é par e existe uma cor que induz um emparelhamento perfeito.*

Prova. Seja K_n um grafo completo, com $n \geq 2$ com de uma $(n + 1)$ -coloração total semiforte. Suponha $n = 1 \pmod{2}$. Por definição da coloração total semiforte, todos os vértices do K_n devem receber cores distintas. Logo, existe uma cor i que colore apenas arestas do K_n . Observe que a cor i deve ocorrer em todo vértice do K_n , pois se este não for o caso, haverá dois vértices $u, v \in V(K_n)$ tais que $C(u) = C(v)$. No entanto, isto é impossível, considerando que existe um número ímpar de vértices. Portanto, n é par. Como visto acima, existe uma cor que induz um emparelhamento perfeito. ■

Lema 10. *Seja G um grafo bipartido $(r - 1)$ -regular, onde r é um inteiro positivo ímpar, com partes $X = \{x_0, \dots, x_{r-1}\}$ e $Y = \{y_0, \dots, y_{r-1}\}$ tal que $(x_i, y_i) \notin E(G)$. Então existe uma r -coloração de arestas $\pi = E(G) = \{0, \dots, r - 1\}$ tal que $\pi(x_i, y_j) \notin \{i, j\}$.*

Prova. Sejam r um inteiro positivo ímpar e G um grafo $K_{r,r}$ com partes $X = \{x_0, \dots, x_{r-1}\}$ e $Y = \{y_0, \dots, y_{r-1}\}$. Pelo Teorema de König (1916), $\chi'(G) = r$. Seja ϕ uma r -coloração de arestas de G definida da seguinte maneira: $\phi(x_i, y_{(i+p) \pmod{r}}) = (i + 2p) \pmod{r}$, para $0 \leq i \leq r - 1$ e $0 \leq p \leq r - 1$.

A coloração ϕ usa r cores e $\phi(x_i, y_i) = i$, para $0 \leq i \leq r - 1$. Primeiramente, prova-se que $\phi(x_i, y_j) \neq \phi(x_i, y_s)$ para quaisquer duas arestas distintas $(x_i, y_j), (x_i, y_s) \in E(G)$. Considere $j = (i + p_1) \pmod{r}$ e $s = (i + p_2) \pmod{r}$. Como $j \neq s$, conclui-se que $p_1 \neq p_2$. Deste modo, $i + 2p_1$ e $i + 2p_2$ pertencem a classes de módulo r distintas. Portanto, as arestas (x_i, y_j) e (x_i, y_s) recebem cores distintas. Agora, prova-se que $\phi(x_j, y_t) \neq \phi(x_s, y_t)$, para quaisquer duas arestas distintas (x_j, y_t) e (x_s, y_t) pertencentes a $E(H)$. Considere $t = (j + p_1) \pmod{r} = (s + p_2) \pmod{r}$. Como $j \neq s$, tem-se que $p_1 \neq p_2$. Deste modo, $(t + 2p_1) \pmod{r}$ e $(t + 2p_2) \pmod{r}$ pertencem a classes de módulo r distintas. Portanto, $\phi(x_j, y_t) \neq \phi(x_s, y_t)$ e ϕ é uma r -coloração de arestas de G com a propriedade de que $\phi(x_i, y_i) = i$, para $0 \leq i \leq r - 1$. Seja H um grafo bipartido $(r-1)$ -regular com partes $X = \{x_0, \dots, x_{r-1}\}$ e $Y = \{y_0, \dots, y_{r-1}\}$ tal que $(x_i, y_i) \notin E(H)$, $0 \leq i \leq r - 1$. H está contido em G . Assim, seja π a restrição da coloração ϕ aos elementos do subgrafo H , ou seja, $\pi(x_i, y_j) = \phi(x_i, y_j)$ para $0 \leq i, j \leq r - 1$ e $i \neq j$. Como $\phi(x_i, y_i) = i$, conclui-se que $\pi(x_i, y_j) \notin \{i, j\}$. ■

O Teorema 11 mostra que a Conjectura Total Semiforte é verdadeira para grafos equipartidos completos e ainda determina o número cromático total semiforte dos grafos equipartidos completos de ordem par.

Teorema 11. (LUIZ, 2014) *Seja G um grafo $K_{r(n)}$ equipartido completo com $r \geq 2$ e $n \geq 2$. Se G possui ordem par, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$, se não possui, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 3$.*

Em Luiz (2014), a demonstração do Teorema 11 é dividida em quatro partes, de acordo com a paridade de n e r . Trata-se de uma prova longa e complexa. Abaixo são apresentadas as principais ideias utilizadas nessa demonstração.

Seja G um grafo $K_{r(n)}$, $r \geq 2$ e $n \geq 2$, equipartido completo com uma decomposição canônica $[\kappa, \beta]$. Ajuste a notação de forma que $V(K_r^i) = \{u_0^i, u_1^i, \dots, u_{r-1}^i\}$. Pelo Teorema 2, $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2 = n(r - 1) + 2$.

Para cada caso é construída uma coloração total semiforte de G chamada π com $\Delta(G) + 2$ cores. Para obter π , primeiramente é feita uma coloração total semiforte ϕ do subgrafo κ e, posteriormente, é feita uma coloração de arestas λ para o subgrafo β . A coloração π é portanto definida de modo que ϕ seja uma restrição de π aos elementos de κ , e λ seja uma restrição de π às arestas de β .

Caso 1. $r, n \equiv 0 \pmod{2}$

Constrói-se ϕ usando $r + 1$ cores pelo Lema 9 e, posteriormente, constrói-se λ com $(n - 1)(r - 1)$ novas cores. Logo π usa $n(r - 1) + 2 = \Delta(G) + 2$ cores.

Pelo Teorema 3 temos que $\chi_a''(K_r^i) = r + 1$, ou seja, o grafo K_r^i tem uma $(r + 1)$ -coloração total semiforte. Seja ϕ^i , com $0 \leq i \leq n - 1$, tal coloração aplicada a componente K_r^i . Para quaisquer ϕ^i e ϕ^j , $i \neq j$, faça com que os vértices correspondentes e arestas correspondentes de G recebam a mesma cor. A Figura 18 mostra as componentes K_r^i que formam κ a partir da decomposição canônica do grafo $K_{4(4)}$, repare que essa coloração ϕ usa 5 cores.

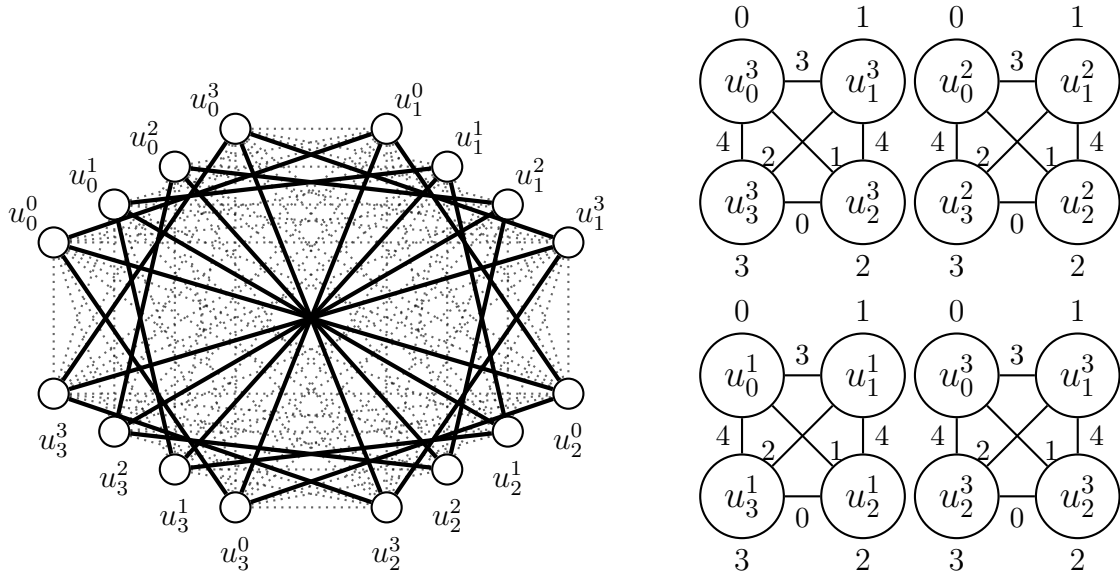


Figura 18 – Grafo $K_{4(4)}$ e seu subgrafo κ com uma coloração total semiforte

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

Observe que as colorações totais semifortes ϕ^i determinam uma coloração total semiforte ϕ para κ dado que dois vértices de κ são adjacentes se, e somente se, pertencem a uma mesma componente.

Agora, para concluir π , falta colorir as arestas do subgrafo β . Cada $B_{i,j} \subseteq \beta$ é um grafo bipartido $(r - 1)$ -regular. Por König (1916), $B_{i,j}$ admite uma coloração de arestas com $r - 1$ cores. Observe que, para quaisquer dois subgrafos $B_{i,j}$ e $B_{k,l}$ disjuntos nos vértices, as $r - 1$ cores utilizadas podem ser iguais. Para determinar se os subgrafos $B_{i,j}$ e $B_{k,l}$ são disjuntos nos vértices, utiliza-se o grafo representante G_r do $K_{r(n)}$.

Considere as classes de cores de uma $\chi'(G_r)$ -coloração de arestas do grafo representante G_r . Observe que nesta coloração cada classe de cor é um emparelhamento perfeito de G_r , pois G_r é isomorfo ao K_n e n é par. Também é necessário lembrar que a aresta (v_i, v_j) pertence ao conjunto $V(G_r)$ e representa o grafo bipartido $B_{i,j} \subseteq \beta$. Logo, para cada emparelhamento perfeito M_k de G_r , existe uma família de subgrafos $\xi_k \subseteq \beta$ tal que $(v_i, v_j) \in M_k$ se, e somente se, $B_{i,j} \in \xi_k$, $1 \leq k \leq \chi'(G_r)$. Portanto é possível concluir que, para cada família ξ_k , é necessário um total de $r - 1$ cores para colorir as arestas dos grafos que a compõe. Como $\chi'(G_r) = n - 1$, existem exatamente $n - 1$ famílias ξ_k . Isto implica que são usadas um total de $(n - 1)(r - 1)$ novas cores para colorir as arestas de β . A Figura 19 mostra um grafo G_r , representante do $K_{4(4)}$, com uma $\chi'(G_r)$ -coloração de arestas usando as cores $\{1, 2, 3\}$. Observe que três emparelha-

mentos perfeitos distintos são possíveis: $M_1 = \{(u_0, u_1), (u_2, u_3)\}$, $M_2 = \{(u_0, u_3), (u_1, u_2)\}$ e $M_3 = \{(u_0, u_2), (u_1, u_3)\}$. M_1 implica em $\xi_1 = \{B_{0,1}, B_{2,3}\}$, M_2 implica em $\xi_2 = \{B_{0,3}, B_{1,2}\}$ e M_3 implica em $\xi_3 = \{B_{0,2}, B_{1,3}\}$, e cada um deles recebem 3 cores diferentes, de forma que o conjunto de cores de $\xi_j \neq \xi_h$ para todo $h \neq j$.

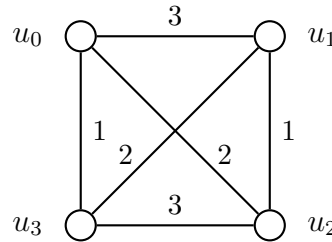


Figura 19 – Grafo representante $G_r = K_4$ de um $K_{4(4)}$ com uma coloração de arestas

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

Pela definição de π , vértices adjacentes recebem cores diferentes. Quaisquer elementos adjacentes pertencentes ao subgrafo κ possuem cores distintas porque κ recebeu uma coloração total semiforte. Além disso, quaisquer duas arestas adjacentes de β possuem cores distintas, pois β recebeu uma coloração de arestas. Como todas as cores usadas na coloração total semiforte de κ são distintas das cores usadas na coloração de arestas de β , tem-se que cada vértice e aresta incidentes possuem cores distintas, assim como quaisquer duas arestas adjacentes. Portanto, π é uma coração total de G .

A coloração π também é uma coloração total semiforte de G . Observe que para qualquer vértice $u_i^i \in V(G)$, tem-se que $C_\pi(u_i^i) = C_\phi(u_i^i) \cup C_\lambda(u_i^i)$. Para concluir, o autor prova que $C_\pi(u_i^i) \neq C_\pi(u_p^j)$ para quaisquer dois vértices adjacentes u_i^i e $u_p^j \in V(G)$, com $l \neq p$. Se $j = i$, os vértices u_i^i e u_p^j pertencem a uma mesma componente de κ , e o resultado segue a partir da construção da coloração ϕ e do fato de que as cores de λ são disjuntas das cores de ϕ . Suponha que $i \neq j$. Pela construção da coloração ϕ , os rótulos de u_i^i e u_p^j são diferentes, pois eles não são vértices correspondentes e as suas arestas incidentes também não o são. Além disso, todas as cores usadas para colorir as arestas de β são disjuntas das cores usadas pela coloração ϕ .

Caso 2. $r \equiv 1 \pmod{2}$ e $n \equiv 0 \pmod{2}$

Neste caso, inicialmente constrói-se uma coloração ϕ usando $2r$ cores e, em seguida, constrói-se uma coloração λ com $(n - 2)(r - 1) + r$ cores, de forma que r -cores são também utilizadas em ϕ . Assim, a coloração π resultante usa $n(r - 1) + 2 = \Delta(G) + 2$ cores.

Como r é ímpar, $\chi'(K_r^i) = r$. Para cada K_r^i , constrói-se uma $2r$ -coloração total semiforte ϕ^i . Para cada ϕ^i as arestas são coloridas com cores do conjunto $\{0, \dots, r - 1\}$, enquanto cada vértice u_j^i recebe a cor $r + j$, $0 \leq j \leq r - 1$. A Figura 20 mostra um grafo $K_{3(4)}$ e os quatro grafos K_r^i que formam κ , com suas ϕ^i colorações totais semifortes. Observe que 6 cores são usadas e que quaisquer dois vértices ou arestas correspondentes possuem cores idênticas.

Agora é necessário mostrar que a coloração ϕ^i é uma coloração total semiforte. Note que os vértices de K_r^i receberam cores distintas e K_r^i recebeu uma coloração de arestas. Além disso,

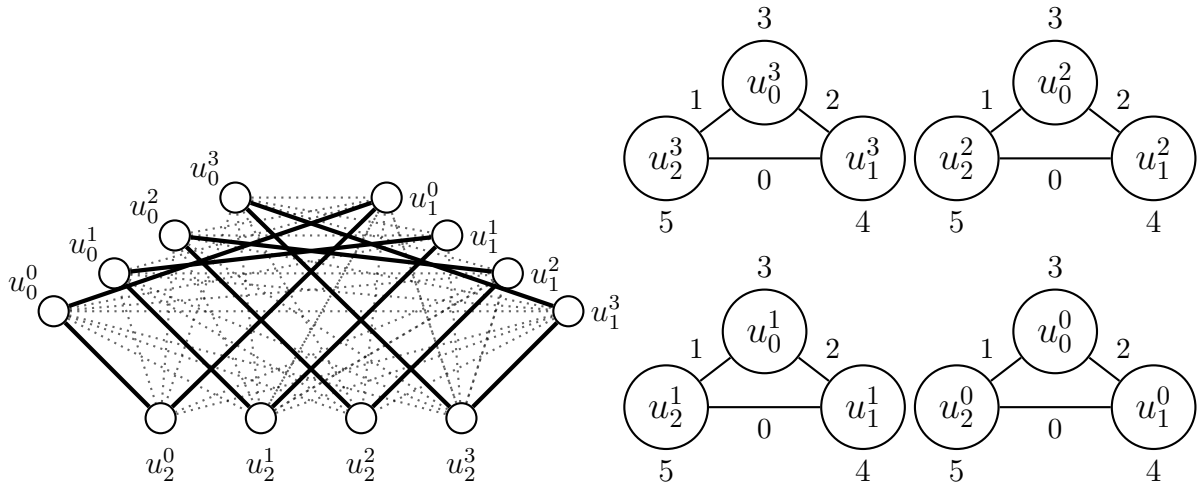


Figura 20 – Grafo $K_{3(4)}$ e seu subgrafo κ com uma coloração total semiforte

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

como o conjunto das cores utilizadas nos vértices é disjunto do conjunto das cores utilizadas nas arestas, quaisquer vértice e aresta incidentes possuem cores distintas e quaisquer dois vértices adjacentes são distinguidos pela cor que receberam no vértice. Portanto ϕ^i é uma $2r$ -coloração total semiforte para K_r^i e a coloração total semiforte ϕ do subgrafo κ é definida como no caso anterior.

O próximo passo é colorir as arestas do subgrafo β . Sabe-se que as arestas dos subgrafos $B_{i,j}$ podem ser coloridas com $r - 1$ cores. Como n é par, o grafo representante G_r possui $n - 1$ emparelhamentos perfeitos. Para $n - 2$ destes emparelhamentos perfeitos, aplica-se a mesma técnica utilizada no Caso 1, usando $(n - 2)(r - 1)$ novas cores para colorir as arestas dos grafos dos conjuntos ξ_k , $1 \leq k \leq n - 2$. Já para o último emparelhamento perfeito (M_{n-1}) pode-se usar $r - 1$ cores, já que quaisquer dois subgrafos bipartidos pertencentes a ξ_{n-1} são disjuntos. Portanto, para cada $B_{i,j} \in \xi_{n-1}$ aplique o Lema 10, obtendo uma coloração de arestas tal que $\lambda(u_l^i, u_p^j) \notin \{r+l, r+p\}$. Logo, $(n-2)(r-1)+r$ cores são utilizadas para colorir β , sendo que r dessas cores são reaproveitadas em κ sem causar conflito. Grafo $K_{3(4)}$ da Figura 20 gera 6 grafos bipartidos $B_{i,j}$ com as arestas que não pertencem aos grafos completos K_r^i , a Figura 21 mostra uma 6-coloração de arestas dos $B_{i,j} \in \beta$ utilizando as cores $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Observa-se que $\xi_1([B_{0,3}, B_{1,2}]) = \{6, 7\}$, $\xi_2([B_{0,2}, B_{1,3}]) = \{8, 9\}$ e $\xi_{n-1} = \xi_3([B_{0,1}, B_{2,3}]) = \{3, 4, 5\}$.

A seguir são apresentados os argumentos utilizados para garantir que a coloração total $\pi = [\beta \cup \kappa]$ também é uma coloração total semiforte. Percebe-se que quaisquer dois vértices pertencentes a uma mesma componente K_r^i possuem conjuntos de cores distintos, garantido pela coloração total semiforte dada para o subgrafo κ . Como as cores usadas para colorir as arestas de β ocorrem em cada vértice de G , quaisquer dois vértices adjacentes u e v pertencentes a componentes distintas de κ são também distinguidos pela coloração total semiforte dada para κ . Cada subgrafo $K_r^i \subset \kappa$ recebeu uma coloração de arestas com cores do conjunto $\{0, \dots, r - 1\}$ e essa coloração de arestas garante que em cada vértice u_l^i a cor l está ausente. Esta propriedade perma-

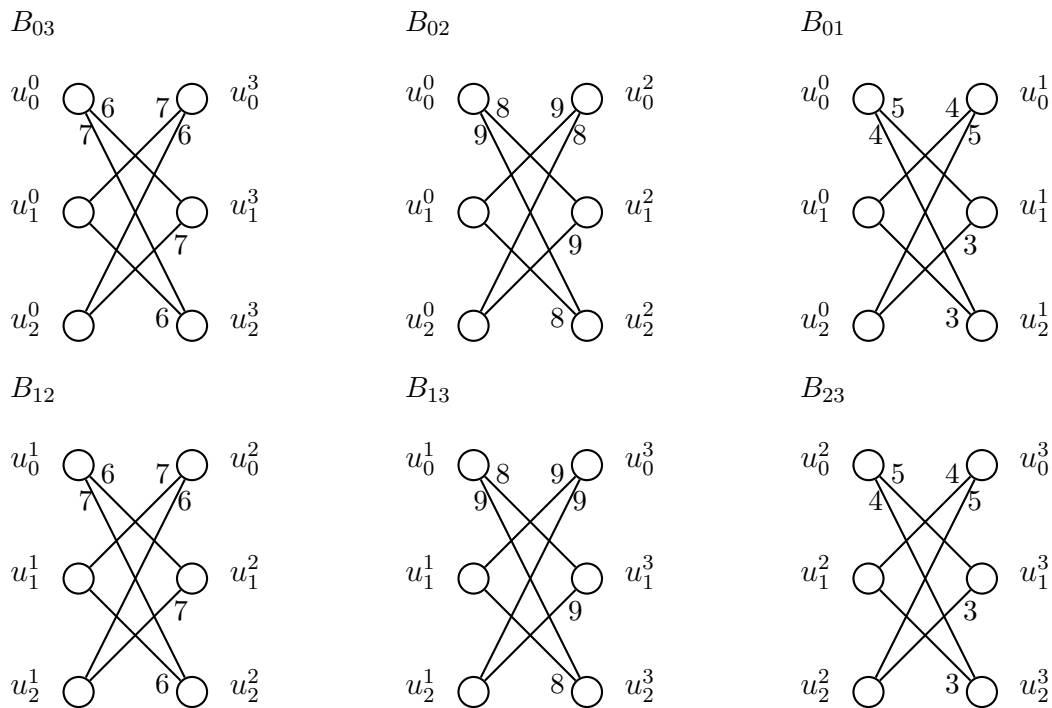


Figura 21 – 6-coloração das arestas do subgrafo induzido β do grafo $K_{3(4)}$

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

nece válida para a coloração π , pois as cores utilizadas na coloração de arestas do subgrafo κ não foram reutilizadas na coloração de arestas do subgrafo β . Logo, para todo vértice u_i^j pertencente à parte V_i tem-se que $\overline{C_\pi}(u_i^j) = \{i\}$, $0 \leq i \leq r - 1$. Portanto, $\overline{C_\pi}(u) \neq \overline{C_\pi}(v)$ para quaisquer dois vértices adjacentes $u, v \in V(G)$ e com isso conclui-se que π é uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total semiforte de G .

Caso 3. $r \equiv 0 \pmod{2}$ e $n \equiv 1 \pmod{2}$

Neste caso constrói-se uma coloração λ usando $n(r - 1)$ cores e então constrói-se um coloração ϕ com $r + 1$ cores, sendo que somente duas delas são novas. Isso garante que a coloração π obtida usa $n(r - 1) + 2 = \Delta(G) + 2$ cores.

Uma vez que n é ímpar, existe uma coloração de arestas de G_r com n cores. Considere essa $\chi'(G_r)$ -coloração de arestas do grafo representante G_r . Seguindo o modelo já apresentado nos outros casos, obtêm-se uma $n(r - 1)$ -coloração de arestas λ para o subgrafo β a partir da coloração de arestas do grafo G_r . Lembre-se que a coloração do G_r permite identificar os subgrafos bipartidos disjuntos para que eles recebam as mesmas cores. A Figura 22 mostra os subgrafos bipartidos $B_{i,j} \in \beta$, induzidos do grafo $K_{3(4)}$, com uma 9-coloração de arestas. Assuma que pelo método de coloração de arestas de G_r , para cada $0 \leq i \leq n - 1$, a cor i falta no vértice $V_i \in V(G_r)$. Isso significa que, para $0 \leq i \leq n - 1$, existe um conjunto de $r - 1$ cores de λ que não aparecem nos vértices da componente K_r^i . Chame este conjunto de cores de $S_i = \{c_0^i, c_1^i, \dots, c_{r-1}^i\}$.

Agora, constrói-se uma $(r + 1)$ -coloração total semiforte ϕ para o subgrafo κ . Seja ϕ^i

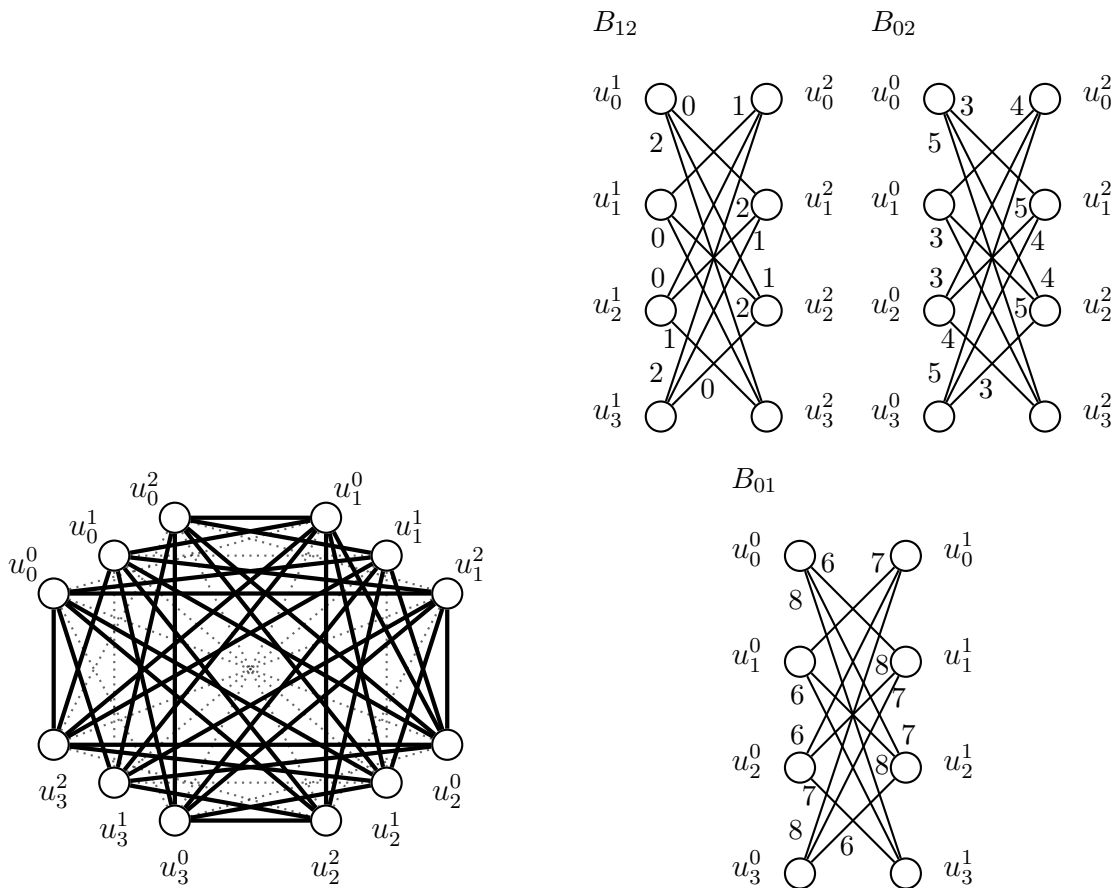


Figura 22 – Grafo $K_{3(4)}$ e seu subgrafo induzido β com uma 9-coloração de arestas

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

a coloração total semiforte da componente K_r^i , usando as cores $S_i \cup \{x, y\}$, $0 \leq i \leq n - 1$, tal que x e y são duas cores novas. Com o uso do Lema 9, tem-se que existe uma cor que induz um emparelhamento perfeito de um grafo completo K_r de ordem par com uma $(r+1)$ -coloração total semiforte. Para cada K_r^i ajuste a notação tal que: (i) a cor y induza um emparelhamento perfeito em K_r^i ; (ii) $\phi^i(u_{r-1}^i) = x$; e (iii) $\phi^i(u_j^i) = c_j^i, 0 \leq j \leq r - 2$. Observe que os vértices coloridos com a cor x não são adjacentes pois pertencem a mesma parte V_{r-1} . A Figura 23 apresenta os três grafos completos que formam o κ induzido do grafo $K_{3(4)}$, com uma 11-coloração total semiforte. Observe que as cores $\{0, 1, 2, \dots, 7, 8\}$ foram utilizadas na coloração de arestas de β , ou seja, apenas 2 novas cores foram utilizadas (9 e 10).

Para concluir, verifica-se que a coloração π obtida usa $\Delta(G)+2$ cores e é uma coloração total semiforte de G . Primeiro o autor prova que π é coloração total. Observe que a coloração total semiforte do subgrafo κ garante que quaisquer dois elementos adjacentes ou incidentes pertencentes a uma mesma componente K_r^i possuem cores distintas e quaisquer duas arestas adjacentes pertencentes ao subgrafo β recebem cores distintas. De acordo com a definição do conjunto de cores S_i , tem-se que as cores de S_i não ocorrem nas arestas dos grafos bipartidos $B_{i,p}$, $0 \leq p \leq n - 1$, $p \neq i$. Também tem-se que $\pi(u_k^i) \in S_i \cup \{x\}$ e x não é usado para colorir as arestas de β . Deste modo, quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores distintas e

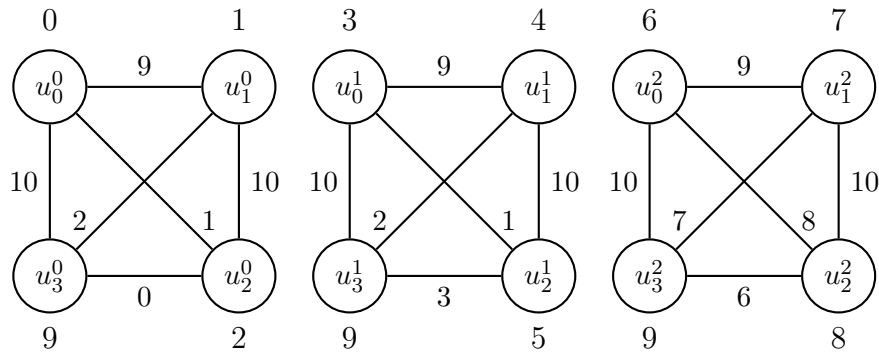


Figura 23 – Componentes K_4^0 , K_4^1 e K_4^2 com colorações totais semifortes

Fonte: Adaptado de Luiz (2014)

cada vértice e aresta incidentes possuem cores distintas. Resta analisar dois vértices adjacentes $u_k^i, u_l^j \in V(G)$, $i \neq j$.

Observe que $\pi(u_k^i) \in S_i \cup \{x\}$ e $\pi(u_l^j) \in S_j \cup \{x\}$. Devido a forma como são construídos, S_i e S_j são disjuntos e no máximo um dos vértices u_k^i e u_l^j receberam a cor x , pois esses vértices são adjacentes. A partir dessa informação, pode-se concluir que π é uma coloração total, logo, resta provar que π também é uma coloração total semiforte. Lembra-se que, para todo vértice $u_l^i \in V(G)$, $\overline{C}_\pi(u_l^i) = \overline{C}_\phi(u_l^i) \cup \overline{C}_\lambda(u_l^i)$. Considera u_k^i e u_l^i dois vértices adjacentes pertencentes ao subgrafo K_r^i . Pela definição de λ , tem-se que $\overline{C}_\lambda(u_k^i) = \overline{C}_\lambda(u_l^i)$. Entretanto a coloração ϕ enquanto restrita ao subgrafo K_r^i é uma coloração total semiforte. Contanto que $l \neq k$, pela forma como foi definido a coloração ϕ , tem-se que $\overline{C}_\phi(u_l^i) = \overline{C}_\phi(u_k^i)$, assim conclui-se que $\overline{C}_\pi(u_l^i) \neq \overline{C}_\pi(u_k^i)$.

Agora, dado que os dois vértices adjacentes u_l^i e u_k^j pertencem a subgrafos distintos K_r^i e K_r^j , respectivamente. Note que u_l^i e u_k^j não são vértices correspondentes, pois $l \neq k$. Também perceba que o vértice u_l^j , corresponde ao vértice u_l^i . Para cada conjunto $S_i \cup \{x\}$, $0 \leq i \leq n - 1$, define-se $(c_0^i, \dots, c_{r-2}^i, x)$ como uma ordenação deste conjunto. Considere os vértices correspondentes u_k^i e u_k^j . Pela definição de π , tem-se que $\overline{C}_\pi(u_k^i) \in S_i \cup \{x\}$ e $\overline{C}_\pi(u_k^j) \in S_j \cup \{x\}$. Além disso, $\overline{C}_\pi(u_k^i)$ e $\overline{C}_\pi(u_k^j)$ possuem a mesma posição na ordenação previamente definida. Por outro lado, $\overline{C}_\pi(u_l^i) \in S_i \cup \{x\}$ e $\overline{C}_\pi(u_l^i) \neq \overline{C}_\pi(u_k^i)$. Conclui-se então, que $\overline{C}_\pi(u_l^i) \neq \overline{C}_\pi(u_k^j)$.

Caso 4. $r \equiv 1 \pmod{2}$ e $n \equiv 1 \pmod{2}$

Neste caso, inicialmente constrói-se a coloração de arestas λ para o subgrafo β usando $n(r - 1)$ cores e, em seguida, constrói-se a coloração total semiforte ϕ do subgrafo κ com $r + 2$ cores usando três cores novas. Portanto, a coloração π usa $n(r - 1) + 3 = \Delta(G) + 3$ cores. Como n é ímpar, temos que $\chi'(G_r) = n$. Considera-se uma n -coloração de arestas do grafo representante G_r . Aplicando o mesmo método dos casos anteriores, obtemos uma $n(r - 1)$ -coloração de arestas λ para o subgrafo β . Pela construção da coloração de arestas padrão de G_r , para cada $0 \leq i \leq n - 1$, a cor i não está presente no vértice $V_i \in V(G_r)$. Portanto para a $0 \leq i \leq n - 1$, existe um conjunto de cores S_i com $r - 1$ cores de λ que não ocorrem nos

vértices da componente K_r^i . Define-se $S_i := \{c_0^i, c_1^i, \dots, c_{r-2}^i\}$.

Cada subgrafo K_r^i é um grafo completo de ordem ímpar. Por isso constrói-se uma $(r+2)$ -coloração total semiforte ϕ para o subgrafo κ . Isso é possível se definido uma $(r+2)$ -coloração total semiforte canônica ϕ^i para K_r^i usando as cores $S_i \cup \{x, y, z\}$, $0 \leq i \leq n-1$. Para cada K_r^i , ajusta-se a notação de modo que $\phi^i(u_j^i) = c_j^i$, $0 \leq j \leq r-2$, e $\phi^i(u_{r-1}^i) = x$. As cores y e z colorem apenas arestas do K_r^i . Observa-se que os vértices coloridos com a cor x não são adjacentes pois eles pertencem a mesma parte V_{r-1} no grafo G .

4 COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS TRIPARTIDOS COMPLETOS

Rosenfeld (1971) analisou a Conjectura da Coloração Total (Conjectura 1) em alguns grafos e provou a CCT para grafos tripartidos completos, como mostrado no seguinte teorema.

Teorema 12. *Se G é um grafo tripartido completo então $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Prova. Sejam $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ e $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ os três conjuntos independentes de vértices de um grafo tripartido completo G , com $k \leq m \leq n$. Se $k < m$, pode-se adicionar $m - k$ vértices em A , obtendo um grafo tripartido completo G' com $\chi''(G') = \chi''(G)$. Como G' contém G como um subgrafo, a coloração total do G' é uma coloração total de G . Então, pode-se assumir que $k = m$. Se $n = m$ ou $n > m + 1$ aplicam-se as cores 1, 2 e 3, respectivamente, nos vértices das partes A , B e C , e colore-se as arestas (a_i, b_i) com cor 3, (b_i, c_i) com cor 1 e (a_i, c_i) com cor 2, para $1 \leq i \leq m$. A Figura 24 apresenta um grafo $K_{3(5)}$ equipartido completo que recebeu esta coloração.

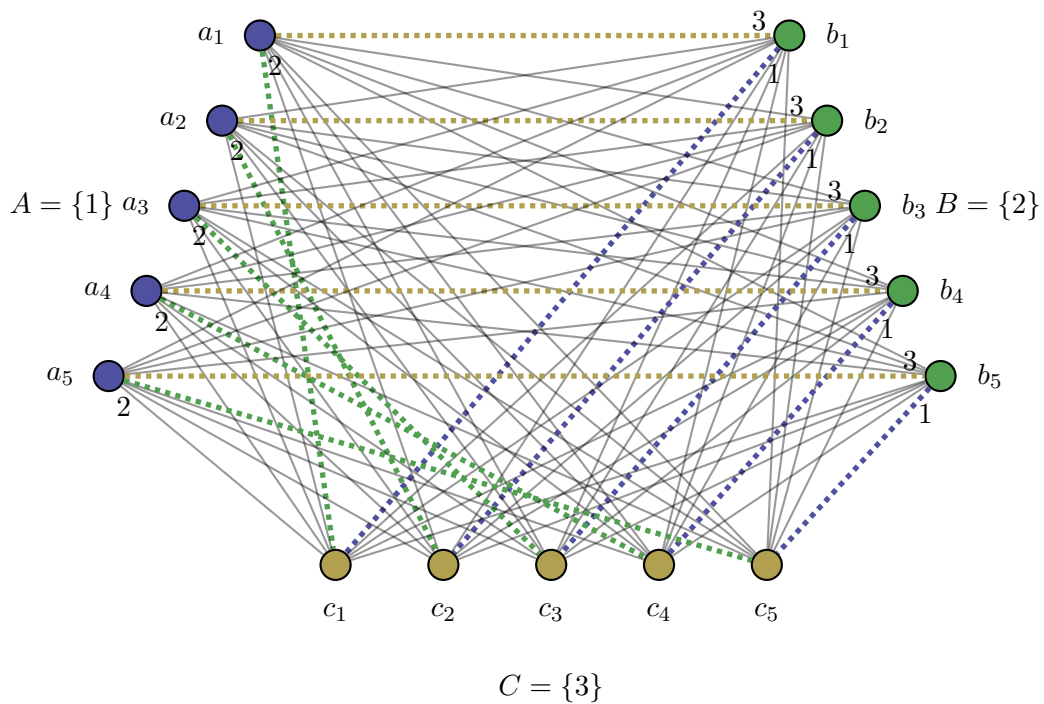


Figura 24 – Grafo $K_{3(5)}$ equipartido completo

Fonte: Autoria própria.

Removendo as arestas de G que formam uma coloração $\beta = \{(a_i, b_i), (a_i, c_i), (b_i, c_i)\}$, $1 \leq i \leq m$, obtêm-se um subgrafo H . Observe que $\Delta(H) = \Delta(G) - 2$, já que quando $m = n$ todos os vértices tem o mesmo grau em G e conseqüentemente todos tem grau $\Delta(G) - 2$ em H ; e quando $n > m + 1$, qualquer vértice c_i tal que $i > m$ tem grau $d(c_i) = 2m = m + m + 2 - 2 \leq$

$m + n - 2 = \Delta(H) = \Delta(G) - 2$. Segundo o Teorema 8, $\chi'(H) \leq \Delta(H) + 1 = \Delta(G) - 1$. Portanto $\chi''(G) \leq \chi'(H) + 3 \leq \Delta(H) + 1 + 3 = \Delta(G) + 2$.

Se $n = m+1$, usa-se a coloração acima para os vértices e arestas $\{(a_i, b_i), (a_i, c_i), (b_i, c_i)\}$, $1 \leq i \leq m - 1$ e colore-se (a_m, b_m) com cor 3, (b_m, c_m) com cor 1 e (a_m, c_{m+1}) com cor 2, como apresentado na Figura 25.

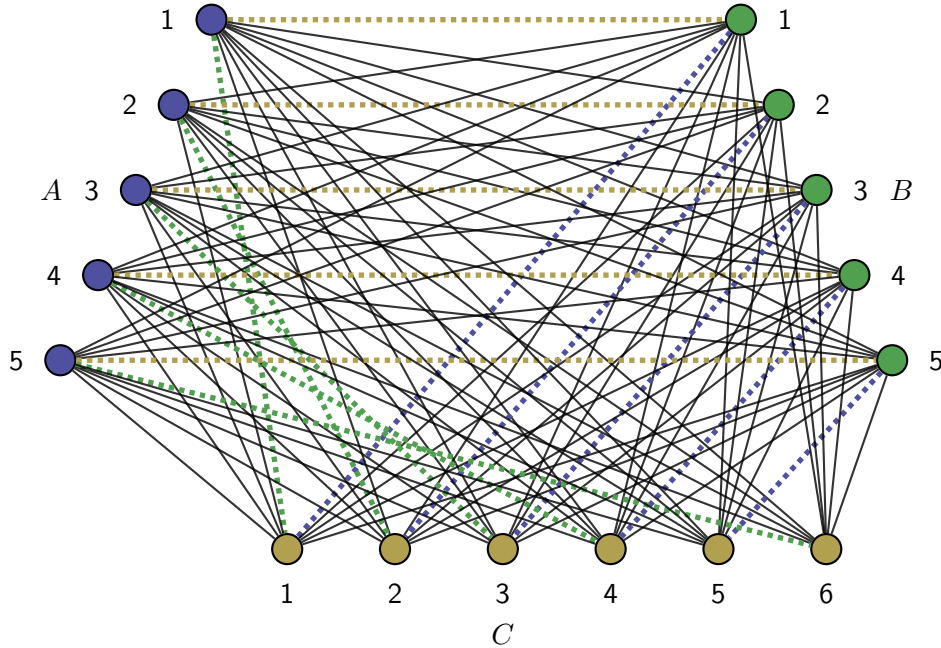


Figura 25 – Grafo $K_{3,6}$ completo

Fonte: Autoria própria.

Veja que no grafo H resultante da remoção das arestas coloridas, o grau de qualquer vértice $v \in A \cup B$ é $n + m - 2 = m + 1 + m - 2 = 2m - 1$; o grau de qualquer vértice $c_i \in C$ tal que $i < m$ é $2m - 2$ e os graus de c_m e c_{m+1} são $d(c_m) = d(c_{m+1}) = 2m - 1$. Portanto, $\Delta(H) = 2m - 1 = \Delta(G) - 2$. Como no caso anterior, pelo Teorema de Vizing (Teorema 8), pode-se colorir H com $\Delta(H) + 1$ cores e utilizam-se outras três cores para os vértices e arestas removidas de G . Portanto, $\chi''(G) \leq \Delta(H) + 1 + 3 = \Delta(G) + 2$.

■

Para entender o porquê da prova ser dividida em dois casos pode-se observar o grafo H induzido de um grafo G com três partes A, B, C , onde $|A| = |B| = m$ e $|C| = m + 1 = n$, apresentado na Figura 26. Ele foi construído seguindo a proposta do primeiro caso, logo os vértices $\{a_i, b_i, c_i\}$ para $1 \leq i \leq m$ possuem o mesmo número de arestas ($m + n - 2 = m + m + 1 - 2 = 2m - 1$), enquanto o vértice c_1 possui $2m$ arestas. Então o Δ -vértice é c_1 e não um dos outros vértices. Pelo Teorema 8, H pode ser colorido com $\Delta(H) + 1$ cores, ou seja, $2m + 1$ cores. Então G pode ser colorido com $\Delta(H) + 1 + 3 = 2m + 4 = \Delta(G) + 3$ cores, o que não prova a CCT, por isso esse caso é especial.

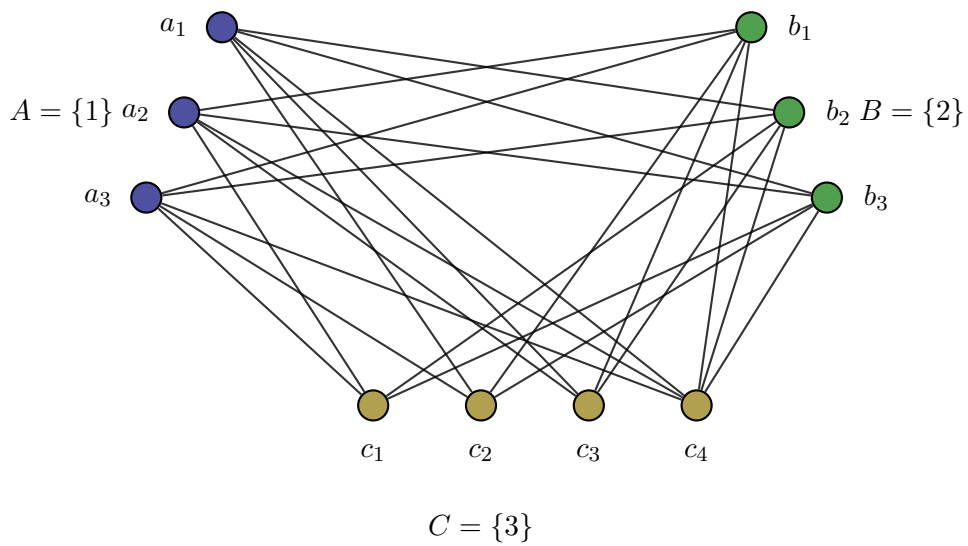


Figura 26 – Grafo H induzido de um grafo $K_{3,4}$

Fonte: Autoria própria.

Observa-se que se a coloração de arestas de H for uma coloração semiforte de arestas, a coloração total de G é também uma coloração total semiforte. Uma coloração de arestas é semiforte se para cada par de vértices adjacentes, u e v , o conjunto das cores atribuídas às arestas de u é diferente do conjunto das cores atribuídas às arestas de v . Então é interessante saber se grafos com a estrutura do tripartido H tem coloração de arestas semiforte. Como a técnica de coloração de arestas utilizada na demonstração do Teorema 12 não é bem definida (utiliza-se apenas o Teorema 8), optou-se por estudar outra técnica de coloração total na qual a coloração das arestas é um pouco mais detalhada. Esta técnica é apresentada no próximo capítulo. O objetivo do estudo foi averiguar a possibilidade de se obter uma coloração de arestas semiforte para o subgrafo H construído.

5 COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS k -PARTIDOS COMPLETOS

Os lemas e teoremas apresentados neste capítulo são descritos em Yap (1996). Eles foram estudados com o objetivo de encontrar uma coloração de arestas semiforte para o grafo H gerado com a técnica de Rosenfeld (Capítulo 4). O principal resultado apresentado neste capítulo é a prova de que grafos k -partidos completos de ordem ímpar são tipo 1, ou seja, $\Delta(G)$ cores são suficientes para se obter uma coloração total. Para compreensão desta prova, é necessário o conhecimento de alguns resultados anteriores, que são brevemente descritos a seguir.

Lema 13. (YAP, 1996) *Para todo e qualquer inteiro $k \geq 2$, se G é um grafo k -partido equipartido completo de ordem par, então G tem um emparelhamento perfeito.*

Prova. Sejam V_1, V_2, \dots, V_k as partes de G que são conjuntos independentes.

Se k é par, então a união dos emparelhamentos máximos de $G[V_1 \cup V_2], \dots, G[V_{k-1} \cup V_k]$ é um emparelhamento perfeito de G .

Se k é ímpar, então $|V_i| = p$ é par. Divida cada parte V_i , $1 \leq i \leq k$, em duas partes de mesmo tamanho, X_i e Y_i . Note que $|X_i| = |Y_i| = |V_i|/2 = p/2$, para $1 \leq i \leq k$. Então a união dos emparelhamentos máximos de $G[X_1 \cup X_2], G[Y_2 \cup Y_3], G[X_3 \cup Y_1], G[V_4 \cup V_5], \dots, G[V_{k-1} \cup V_k]$ é um emparelhamento perfeito de G . ■

Teorema 14. (YAP, 1996) *O grafo bipartido $K_{r,n}$ é tipo 1 se $r \neq n$, caso contrário é tipo 2.*

O núcleo de um grafo G é o subgrafo de G induzido pelos vértices com grau igual a $\Delta(G)$. Fournier (1977) provou que quando o núcleo de um grafo G não contém ciclos, G possui uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores, ou seja, G é classe 1 (possui uma coloração de arestas com $\Delta(G) - cores$). Esse resultado é enunciado no seguinte teorema.

Teorema 15. (FOURNIER, 1977) *Se o núcleo de um grafo G é uma floresta, então G é classe 1.*

Lema 16. *Para quaisquer inteiros positivos n e p com paridades diferentes e tais que $n > p$, é possível construir um grafo $(n - p - 1)$ -regular de ordem n .*

Prova. Seja $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Logo, G tem ordem n . Seja $E(G) = \{(v_i, v_j) : 0 < j - i \pmod{n} \leq (n - p - 1)/2\}$. Como n e p têm paridades diferentes, $(n - p - 1)/2$ é um inteiro. Como a operação é tomada em módulo e como $(n - p - 1)/2 < n/2$, para cada vértice v_i existem dois vértices distintos v_{j_1} e v_{j_2} tais que $j_1 - i \pmod{n} \leq (n - p - 1)/2$, $j_2 - i \pmod{n} \leq (n - p - 1)/2$ e $j_1 - i \equiv j_2 - i \pmod{n}$. Portanto, haverá $2 \frac{n-p-1}{2}$ arestas incidentes em cada vértice $v_i \in V(G)$, ou seja, G é $(n - p - 1)$ -regular. ■

Lema 17. *Para quaisquer inteiros positivos n e p tais que n e p são pares e $n > p$, é possível construir um grafo $(n - p - 1)$ -regular de ordem n .*

Prova. Seja $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Logo, G tem ordem n . Seja $E(G) = E_1 \cup E_2$, tal que $E_1 = \{(v_i, v_{i+\frac{n}{2}}) : 0 \leq i < \frac{n}{2}\}$ e $E_2 = \{(v_i, v_j) : 0 < j - i \pmod{n} \leq (n - p - 2)/2\}$. Como n e p são pares, $n - p - 2$ é par. Como $(n - p - 2)/2 < n/2$ e como as operações são tomadas módulo n , para cada vértice v_i existem dois vértices distintos v_{j_1} e v_{j_2} tais que $j_1 - i \pmod{n} \leq (n - p - 2)/2$, $j_2 - i \pmod{n} \leq (n - p - 2)/2$ e $j_1 - i \equiv j_2 - i \pmod{n}$. Portanto, haverá $2 \frac{n-p-2}{2}$ arestas do conjunto E_2 incidentes em cada vértice $v_i \in V(G)$. Como E_1 é um emparelhamento perfeito dos vértices de $V(G)$ e como nenhuma aresta de E_1 pertence à E_2 , pois $(i + n/2) - i \equiv i - (i + n/2) \pmod{n}$ e $(i + n/2) - i \pmod{n} > (n - p - 2)/2$, tem-se que G é $(n - p - 1)$ -regular. ■

Chew e Yap (1992) e Hoffman e Rodger (1992) provaram independentemente que todo grafo k -partido de ordem ímpar é tipo 1, portanto possui $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$. Hoffman e Rodger (1992) criaram uma prova do índice cromático de grafos k -partidos completos de ordem par e a partir desse teorema deduziram que os grafos de ordem ímpar são tipo 1. Chew e Yap (1992) fizeram a prova direta a seguir.

Teorema 18. (YAP, 1996) *Todo grafo k -partido completo de ordem ímpar é tipo 1.*

Prova. Seja G um grafo k -partido completo com partição $[V_1, V_2, \dots, V_k]$. Pelo Teorema 14, pode se assumir que $k \geq 3$. Denotamos $|V_i| = p_i$, $1 \leq i \leq k$. Supondo, sem perda de generalidade, que as partes estão em ordem não-decrescente de tamanho, ou seja, $p = p_1 = p_2 = \dots = p_t < p_{t+1} \leq p_{t+2} \leq \dots \leq p_k$. Então, existem t partes com a menor cardinalidade $p = p_1$. Vamos denotar por v_i^j o j -ésimo vértice da parte V_i , $1 \leq i \leq r$ e $0 \leq j < p_i$.

A primeira etapa da prova consiste em construir, a partir de G , um grafo G^* cujos vértices tem grau $\Delta(G) - 1$ se não pertencem a V_1 e tem grau $\Delta(G)$ caso contrário. Além disso, queremos que o grafo G^* seja construído de tal forma que tenha uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores. Ao se encontrar um grafo com as características de G^* , a coloração de arestas do mesmo é estendida para uma coloração total do grafo G utilizando uma nova cor, garantindo que $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ e que, portanto, G é tipo 1.

Para a construção de G^* , vamos dividir a demonstração em dois casos:

Caso 1: quando p é par. Se $t = 1$, então, V_1 é o conjunto dos vértices de grau máximo em G . Vamos chamar esses vértices de $\Delta(G)$ -vértices. Para que os vértices do conjunto $V(G) \setminus V_1$ tenham grau $\Delta(G) - 1$, construa em cada parte V_i , $i > 1$, um grafo $(p_i - p - 1)$ -regular. Tal grafo existe, de acordo com o Lema 16 se p_i é ímpar ou de acordo com o Lema 17 se p_i é par. Então, o novo grafo G^* tem vértices com grau $\Delta(G)$ em V_1 e com grau $\Delta(G) - 1$ em $V(G) \setminus V_1$. Como o núcleo de G^* é composto do conjunto independente V_1 e, portanto, é uma floresta, pelo Teorema 15, G tem uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores.

Se $t = 2$, como $|V(G)|$ é ímpar, existe uma parte V_m , $m > t$ tal que p_m é ímpar. Para que todos os vértices das partes V_i , $i > 2$, tenham grau $\Delta(G) - 1$, construa com os vértices da parte V_i um grafo $(p_i - p - 1)$ -regular. Tal grafo existe, de acordo com o Lema 16 se p_i é

ímpar ou com o Lema 17 quando p_i é par. Agora, os vértices em V_1 e V_2 são $\Delta(G)$ -vértices. Para que os vértices em V_1 sejam os únicos com grau $\Delta(G)$, insira em V_m as arestas do emparelhamento $M = \{(v_m^i, v_m^{i+\frac{p_i-1}{2}}) : 0 \leq i < \frac{p}{2}\}$, e remova as arestas do emparelhamento $F = \{(v_m^i, v_2^i), (v_m^{i+\frac{p_i-1}{2}}, v_2^{i+\frac{p}{2}}) : 0 \leq i < \frac{p}{2}\}$. Note que como p_m é ímpar, por construção, as arestas de M não pertenciam ao grafo $(p_m - p - 1)$ -regular construído com os vértices de V_m . Agora, G^* tem todos os seus $\Delta(G)$ -vértices em V_1 e, pelo Teorema 15, tem uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ -cores.

Se $t \geq 3$, como p é par, remova do subgrafo $G[V_2, V_3, \dots, V_t]$ um emparelhamento perfeito. Tal emparelhamento existe, já que p é par e, portanto, $G[V_2, V_3, \dots, V_t]$ tem ordem par e pode-se aplicar o Lema 13. Agora, apenas os vértices em V_1 são $\Delta(G)$ -vértices. Para que todos os vértices em $V(G) \setminus V_1$ tenham grau $\Delta(G) - 1$, construa em cada parte V_i , $i > 1$, um grafo $(p_i - p - 1)$ -regular. Tal grafo pode ser construído, de acordo com o Lema 16 se p_i é ímpar, ou de acordo com o Lema 17 se p_i é par. O novo grafo G^* tem todos os $\Delta(G)$ -vértices em V_1 e, pelo Teorema 15, tem uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores.

Caso 2: quando p é ímpar. Para cada parte V_i tal que p_i é par, construa com os vértices desta parte um grafo $(p_i - p - 1)$ -regular. Tal grafo existe, pelo Lema 16. Sejam W_1, W_2, \dots, W_q as partes com número de vértices ímpar, excluindo-se desse conjunto a parte V_1 . Como o grafo tem número de vértices ímpar, q deve ser par. Supondo, sem perda de generalidade, que $|W_1| \leq |W_2| \leq |W_3| \leq \dots \leq |W_q|$. Para cada par (W_i, W_{i+1}) com i ímpar e $1 \leq i < q$, seja M_i o emparelhamento entre os vértices w_i^j e w_{i+1}^j , $0 \leq j < |W_i|$. Para cada parte W_i , construa um grafo $(p_i - p)$ -regular, inserindo as arestas do conjunto $E_i = \{(w_i^h, w_i^j) : 0 \leq j - h \pmod{p_i} \leq (p_i - p)/2\}$. Agora, remova do grafo as arestas $M_1 \cup M_3 \cup \dots \cup M_{q-1}$. Observe que para todo i ímpar, todos os vértices da parte W_i foram cobertos pelo emparelhamento M_i . Para as partes W_i com i par, observe que os vértices não cobertos pelo emparelhamento M_{i-1} estão com grau $\Delta(G)$ no grafo construído (após a remoção do emparelhamento M_{i-1}). Então a quantidade de vértices da parte W_i que não foram cobertos pelo emparelhamento M_{i-1} é par. Seja w_i^k o menor vértice da parte W_i não coberto por M_{i-1} , para todo i par, $2 \leq i \leq q$. Remova do grafo o emparelhamento $\{(w_i^k, w_i^{k+1}), (w_i^{k+2}, w_i^{k+3}), \dots, (w_i^{|W_i|-2}, w_i^{|W_i|-1})\}$. Agora todos os vértices do grafo construído tem grau $\Delta(G) - 1$, exceto os vértices de V_1 , que tem grau $\Delta(G)$. Portanto, o novo grafo G^* tem uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores.

Para qualquer caso, considere-se o grafo G^* com uma coloração de arestas que utiliza $\Delta(G)$ cores. Por Plantholt (1981), G^* tem uma coloração de arestas equilibrada com $\Delta(G)$ cores. Como o número de vértices do grafo G^* é ímpar, cada cor incide em $\Delta(G)/2$ vértices e falta em um vértice. Como existem $\Delta(G)$ vértices com grau $\Delta(G)-1$, cada cor falta (não colore arestas) em um único vértice. Esta cor é usada para colorir o respectivo vértice. Remove-se de G^* as arestas que conectam vértices de uma mesma parte. Reinsire-se as arestas que conectam vértices de partes distintas e que foram removidas na construção de G^* . Por construção, tais arestas constituem um emparelhamento em G . Agora, pinte estas arestas e os vértices de V_1 com a cor $\Delta(G) + 1$. ■

Observe-se que ao se remover as cores dos vértices do grafo k -partido completo considerado no Teorema 18, obtém-se uma coloração de arestas semiforte de G , visto que as cores utilizadas para colorir vértices de $V(G) \setminus V_1$ são todas distintas e diferentes de $V(G) + 1$ e que todo vértice de V_1 tem cor $\Delta(G) + 1$. Entretanto, se considerarmos que G é um grafo tripartido de ordem ímpar completo e removermos de G as arestas necessárias para a construção do subgrafo H (do Capítulo 4), não é mais possível garantir que as novas cores que faltam nos vértices não afetaram os rótulos, tornando dois ou mais deles iguais. Ainda assim, esta técnica pode ser adaptada para a obtenção de uma coloração total semiforte de alguns grafos tripartidos completos, como será visto no próximo capítulo.

6 COLORAÇÃO TOTAL SEMIFORTE DE GRAFOS TRIPARTIDOS COMPLETOS

Os principais resultados desse trabalho, descritos neste capítulo, são a prova da Conjectura 5, apresentada em Luiz (2014), segundo a qual um grafo tripartido completo $G = [V_1, V_2, V_3]$ com $|V_1| = |V_2| \geq 1$ e $|V_1| \leq |V_3| < 2|V_1|$ tem $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$; e a apresentação de novas evidências para a Conjectura 6, com a prova de que todo grafo tri-equipartido completo de ordem ímpar tem $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.

Para as provas foram adaptadas duas técnicas de coloração total de grafos (ROSENFELD, 1971; CHEW; YAP, 1992), que induzem a criação de um subgrafo H que é colorido de forma que resulte em uma coloração total semiforte. A partir disso, é possível demonstrar que o grafo original G também possui uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total semiforte.

Observe que se G é um grafo tripartido completo, então ou suas partes tem todas a mesma cardinalidade, ou todas tem cardinalidades distintas, ou duas têm cardinalidades iguais e uma diferente, podendo a cardinalidade diferente ser a maior ou a menor. O estudo realizado neste trabalho de conclusão de curso sobre a coloração total semiforte de grafos tripartidos completos abrangeu todos esses casos. O próximo teorema apresenta o número cromático total semiforte para grafos tripartidos com todas as partes de mesmo tamanho; os teoremas seguintes consideram os casos em que duas partes tem tamanhos iguais e uma tem tamanho distinto. Por fim, considera-se o caso em que todas as partes tem tamanhos distintos.

Teorema 19. *Seja G um grafo tri-equipartido completo de ordem ímpar, então $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.*

Prova. Considere um grafo G tri-equipartido completo com partes $\{A, B, C\}$. Primeiramente aplicamos a técnica do Teorema 12 no grafo G até obter um subgrafo H . Lembra-se que $H = G - F$, onde F é o conjunto de arestas (a_i, b_i) , (b_i, c_i) e (a_i, c_i) , $1 \leq i \leq p$, onde $p = |A| = |B| = |C|$. Observe que $\Delta(H) = 2p - 2$; p é ímpar e $p \geq 2$. Rotule os vértices das partes $\{A, B, C\}$ como: $v_i^0, v_i^1, \dots, v_i^j, \dots, v_i^{p-1}$, onde o índice $i \in \{A, B, C\}$ indica a qual parte pertence o vértice, e o índice $0 \leq j \leq p - 1$ distingue vértices de uma mesma parte. Seja M um emparelhamento perfeito em $H[B \cup C]$, construído da seguinte forma: $M = \{(v_B^j, v_C^{j+1 \pmod{p}}), 0 \leq j \leq p - 1\}$. A Figura 27 mostra um subgrafo gerador do grafo tri-equipartido completo $K_{3(3)}$ com o emparelhamento $M = \{(v_B^0, v_C^1), (v_B^1, v_C^2), (v_B^2, v_C^0)\}$.

Considere o grafo $H' = H \setminus M$. O núcleo de H' é um conjunto independente formado pelos vértices de A . Então, pelo Teorema 15, H' é classe 1, portanto podemos colorir as arestas de H' com $\Delta(H)$ cores. Por Plantholt (1981), se H' tem uma coloração de arestas com $\Delta(H)$ cores, então H' tem uma $\Delta(H)$ -coloração de arestas equilibrada. Como $|E(H')| = p(2p - 2) + p(p - 2)$, tem-se:

- $(2p-3)$ cores são utilizadas para colorir $\frac{3p-1}{2}$ arestas.

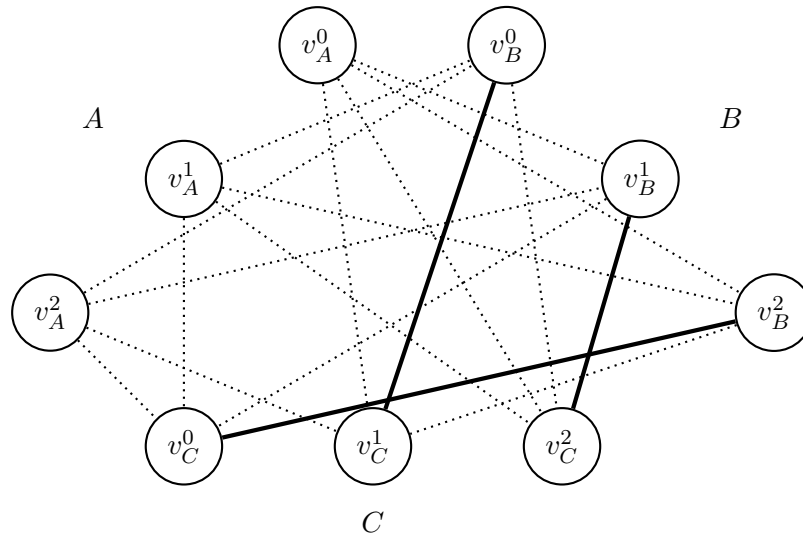


Figura 27 – Grafo H com emparelhamento em $H[B \cup C]$

Fonte: Autoria própria.

- 1 cor é utilizada para colorir $\binom{3p-1}{2} - 1$ arestas.

De fato:

$$|E(H')| = 2p^2 - 2p + 1p^2 - 2p = 3p^2 - 4p = \frac{6p^2 - 8p}{2} = \frac{6p^2 - 9p - 2p + 3p + 3 - 3}{2} = \binom{3p-1}{2} (2p - 3) + \binom{3p-1}{2} - 1.$$

Então temos que $2p - 3$ cores faltam em exatamente 1 vértice e 1 cor falta em 3 vértices de $V_2 \cup V_3$. Se os 3 vértices onde falta a mesma cor estão na mesma parte então todos os vértices adjacentes em H' têm rótulos distintos. Neste caso basta pintar as arestas do emparelhamento M com a cor $\Delta(H) + 1$, os vértices e as arestas do conjunto F com as mesmas cores aplicadas no Teorema 12. Com isso, a cor $\Delta(H) + 1$ e as cores aplicadas no Teorema 12 incidem em todos os vértices, não alterando as diferenças existentes entre os rótulos. Portanto G tem uma coloração total semiforte. Caso contrário, suponha, sem perda de generalidade, que os vértices onde falta a mesma cor são v_B^i, v_C^j e v_C^k .

Considere o grafo H colorido com as mesmas cores utilizadas nas arestas de H' . Pinta-se as arestas de M com a cor $\Delta(H) + 1$. Assuma que a cor que falta em três vértices é c . Observa-se que a cor que falta em todo vértice de A é $\Delta(H) + 1$, as cores que faltam em B são todas distintas e as cores que faltam em C são todas distintas exceto em v_C^j e v_C^k , onde falta a cor c . Substitua-se a cor do vértice v_B^i pela cor c . Agora o único vértice onde falta a cor 2 é o vértice v_B^i e portanto o seu rótulo é distinto dos demais. Como todas as cores que faltam nos vértices de C são distintas das cores que faltam nos vértices da parte B e diferentes de $\Delta(H) + 1$, que é a cor que falta nos vértices da parte A , então todos os rótulos são distintos.

O total de cores utilizadas é igual $\Delta(H) + 1$ mais 3 cores da técnica do Teorema 12. Como $\Delta(H) = \Delta(G) - 2$, foram utilizadas $\Delta(G) + 2$ cores. Pelo Teorema 2, $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2$ para grafos com dois vértices adjacentes de grau máximo, portanto para grafos tri-equipartidos

completos de ordem ímpar $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$. ■

Com esse resultado, fica determinado o número cromático total semiforte de todos os grafos tri-equipartidos, como enuncia o Corolário 20.

Corolário 20. *Seja G um grafo tri-equipartido completo, $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.*

Se G é de ordem par, o Corolário 20 é válido pelo Teorema 11, caso contrário, pelo Teorema 19.

Esta é uma evidência para a Conjectura 6.

Teorema 21. *Se G é um grafo tripartido completo com partes $|A| < |B| = |C|$, então, $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Prova. Primeiro complete A com vértices até ter cardinalidade igual a $|B|$ e conecte cada um desses novos vértices a todos os vértices do conjunto $B \cup C$.

Agora, aplica-se a técnica de Rosenfeld (Teorema 12) e encontre o subgrafo H (sem as arestas coloridas (v_a^i, v_b^i) , (v_b^i, v_c^i) e (v_a^i, v_c^i) , $1 \leq i \leq |B|$). Observa-se que em G as arestas (v_a^i, v_b^i) estão coloridas com a cor 3, as arestas (v_b^i, v_c^i) estão coloridas com cor 1 e as arestas (v_a^i, v_c^i) estão coloridas com cor 2, $1 \leq i \leq |B|$. Faça-se o emparelhamento entre as partes A e B com arestas $(v_a^j, v_b^{j+1 \pmod{|B|}})$, $0 \leq j \leq |B|$. Pinta-se esse emparelhamento com cor $\Delta(H) + 4$. Pinta-se $H' = H \setminus M$ com $\Delta(H)$ cores do conjunto $\{4, 5, 6, \dots, \Delta(H') + 3\}$. Essa coloração é possível pois o núcleo de H' é uma floresta, então se aplica o Teorema 15.

Pinte cada vértice $v \in B$ com uma cor que não foi usada nas arestas de v durante a coloração de arestas de H' . Esta cor existe, pois todo vértice de B tem grau $\Delta(H') - 1$ em H' e foram usadas $\Delta(H')$ cores. Observe que não há problema se dois vértices de B forem coloridos com a mesma cor, pois não são adjacentes. Pinte cada vértice das partes A e C com as cores 1 e 3, respectivamente. Remova-se vértices e arestas falsos. Os rótulos em A se distinguem dos demais pela sua cardinalidade. Seja $|A| = p_1$. O rótulos de B até o vértice b_{p_1} se distinguem dos rótulos de C até c_{p_1} pois em B os rótulos têm a cor $\Delta(H) + 4$ e não têm a cor 2, enquanto em C os rótulos têm a cor 2 e não tem a cor $\Delta(H) + 4$. A partir de $v_b^{p_1+1}$ e $v_c^{p_1+1}$, os rótulos são distintos pois a cor 3 só ocorre nos vértices da parte C (que não tem a cor $\Delta(H) + 4$, enquanto em B tais vértices não tem a cor 2, nem 3.

A Figura 28 mostra as cores que distiguem B e C em um grafo com cardinalidade $|B| = p$. Nesta figura existem duas listas (B e C) onde cada caixa representa um vértice presente na respectiva parte, embaixo está seu índice e em cima as cores que indicidem e distinguem ele dos demais vértices presentes na lista oposta.

Como foram usadas $\Delta(H) + 4 = \Delta(G) + 2$ cores, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$. ■

Nota-se que nos casos cobertos pelo Teorema 21, o grafo não contém vértices adjacentes de grau máximo. Luiz (2014) prova o seguinte teorema, usando uma adaptação da técnica apresentada no Capítulo 3.

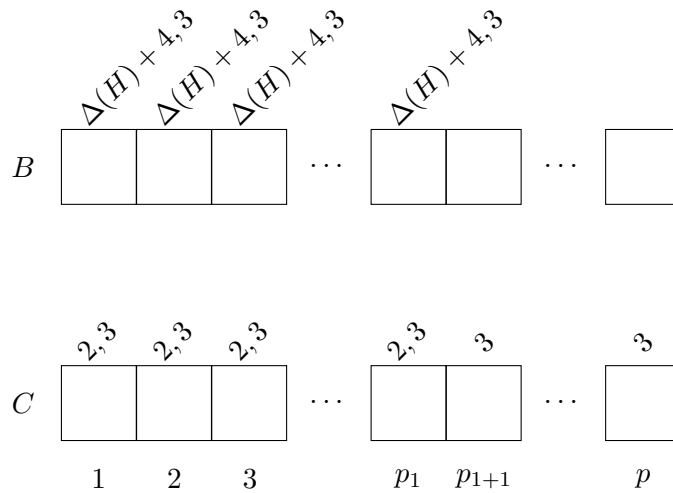


Figura 28 – Partes B e C de um grafo tripartido com cardinalidade p

Fonte: Autoria própria.

Teorema 22. (LUIZ, 2014) *Se G é grafo tripartido completo sem vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Note que o Teorema 22 cobre o caso apresentado no Teorema 21. Neste caso, a contribuição que agora é apresentada é a utilização de uma técnica diferente.

Luiz (2014) também determinou o número cromático total semiforte de alguns outros grafos tripartidos completos, como enunciado a seguir.

Teorema 23. (LUIZ, 2014) *Se G é grafo tripartido completo com partição $[A, B, C]$ tal que $2|A| = 2|B| \leq |C|$, então, $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.*

E a partir desse resultado conjecturou que um grafo tripartido completo $G = [V_1, V_2, V_3]$ com $|V_1| = |V_2| \geq 1$ e $|V_1| \leq |V_3| < 2|V_1|$ tem $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$, como já apresentado na Conjectura 5.

A seguir é apresentada a prova da Conjectura 5.

Teorema 24. *Se G é grafo tripartido completo com partição $|A| = |B| < |C|$, então, $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$.*

Prova. Primeiro é feita uma análise dos graus dos vértices do grafo G . Se v é um vértice que pertence a parte A ou B , então $d(v) = |A| + |C|$ pois ele é adjacente a todos os vértices de C e aos vértices da outra parte de cardinalidade $|A|$ da qual ele não faz parte. Todos os vértices de C possuem grau $2|A|$, pois eles são adjacentes aos vértices de $A \cup B$. O grafo G , portanto, possui $\Delta(G) = |A| + |C| > 2|A|$, uma vez que $|A| < |C|$.

Emparelha-se entre B e C cobrindo B . Pinta-se essas arestas com cor $\Delta(G) + 1$ e remova-as. Agora, o núcleo do grafo é uma floresta constituída pelos vértices da parte A . Pelo Teorema 15, este grafo tem uma $\Delta(G)$ -coloração de arestas. Pinta-se os vértices de C com

cores que sobraram. Pinte os vértices de A com cor $\Delta(G) + 1$ e pinta-se os vértices de B com cor $\Delta(G) + 2$.

Os vértices da parte C se distinguem dos demais pelo tamanho dos rótulos. Os vértices da parte A se distinguem dos vértices de B porque todo vértice de B tem a cor $\Delta(G) + 2$ e $\Delta(G) + 2$ falta em todos os vértices de A . Foram usadas $\Delta(G) + 2$ cores para uma coloração total semiforte de G . Pelo Teorema 2, $\chi_a''(G) \geq \Delta(G) + 2$. Portanto, $\chi_a''(G) = \Delta(G) + 2$ ■

Agora, resta considerar o caso em que G é um grafo tripartido completo cujas partes tem cardinalidades duas a duas distintas.

Teorema 25. *Seja G um grafo tripartido completo com partição $[A, B, C]$ tal que quaisquer duas partes tem cardinalidades diferentes. Então, $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Prova. Qualquer coloração total é uma coloração total semiforte pois as cardinalidades dos rótulos de vértices adjacentes são diferentes. Pelo Teorema 12 todo grafo tripartido completo tem uma $(\Delta(G) + 2)$ -coloração total. Portanto, $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$. ■

Note que o Teorema 22, dado por Luiz (2014), também cobre os casos em que todas as cardinalidades de um grafo tripartido completo são distintas entre si.

Com as novas provas apresentadas neste trabalho de conclusão de curso, estabelece-se um novo limite superior para o número cromático total semiforte de grafos tripartidos completos, como mostra o seguinte corolário.

Corolário 26. *Seja G um grafo simples tripartido completo, $\chi_a''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Se as cardinalidades das três partes são diferentes, o Corolário 26 está provado pelo Teorema 25. Se G é tri-equipartido completo, fica provado pelo Corolário 20. Caso G tenha duas partes de cardinalidade p e uma terceira de cardinalidade maior que p , então o Teorema 24 resolve. Por último se uma parte tem cardinalidade p e as outras duas possuem cardinalidade menor que p , o problema está resolvido pelo Teorema 21.

7 CONCLUSÃO

Com o resultado apresentado neste trabalho, a Conjectura 4 é verdadeira e estabelece-se um limite mais preciso para o número cromático total semiforte de grafos tripartidos completos. Entretanto para os casos em que os grafos tripartidos completos não têm vértices adjacentes de grau máximo ainda fica em aberto o problema de decidir se os mesmos tem número cromático total semiforte igual $\Delta(G) + 1$ ou $\Delta(G) + 2$.

Neste trabalho foram apresentados os números cromáticos totais semifortes de grafos tri-equipartidos completos e de grafos tripartidos completos com duas partes de tamanho p e uma parte de cardinalidade maior que p . Portanto resta a verificação dos números cromáticos totais semifortes dos grafos tripartidos completos com três partes de tamanhos distintos ou com duas partes de cardinalidade p e uma com cardinalidade menor que p . Uma generalização que abordaria este problema em trabalhos futuros seria a determinação do número cromático total semiforte de grafos cujos núcleos são florestas. O número cromático total semiforte de árvores e grafos bipartidos já é conhecido (ZHANG, 2005), então o estudo de suas técnicas de provas para a solução do problema para grafos com núcleos acíclicos pode ser promissor.

Ainda existem outras subclasses de grafos k -partidos completos para as quais não há solução (casos em que $k \geq 4$). Para trabalhos futuros, a verificação e possível adaptação das técnicas apresentadas neste trabalho a outros grafos multipartidos completos pode ser um bom ponto de partida.

REFERÊNCIAS

- BEHZAD, M.; CHARTRAND, G.; COOPER, J. K. The colour numbers of complete graphs. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford University Press (OUP), s1-42, n. 1, p. 226–228, jan. 1967. ISSN 1469-7750.
- BIGGS, N. L.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. **Graph Theory: 1736-1936**. first. Oxford, UK: Oxford Univ. Press, 1976.
- BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. **Classic Papers in Combinatorics**, Springer Science + Business Media, p. 118–121, 2009.
- CHEN, M.; GUO, X. Adjacent vertex-distinguishing edge and total chromatic numbers of hypercubes. **Information Processing Letters**, Elsevier BV, v. 109, n. 12, p. 599–602, maio 2009. ISSN 0020-0190.
- CHEN, X. On the adjacent vertex distinguishing total coloring numbers of graphs with $\delta(g) = 3$. **Discrete Mathematics**, v. 308, n. 17, p. 4003–4007, set. 2008.
- CHEN, X. en; ZHANG, Z. fu. Avdte numbers of generalized halin graphs with maximum degree at least 6. **Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.**, Springer Science + Business Media, v. 24, n. 1, p. 55–58, jan. 2008. ISSN 1618-3932.
- CHEW, K. H.; YAP, H. P. Total chromatic number of complete r-partite graphs. **Journal of Graph Theory**, Wiley-Blackwell, v. 16, n. 6, p. 629–634, dez. 1992. ISSN 1097-0118.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. **Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**, v. 8, p. 128–140, 1736. (tradução para inglês em (BIGGS; LLOYD; WILSON, 1976)).
- FOURNIER, J. Méthode et théorème générale de coloration des arêtes. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 56, p. 437–453, 1977.
- HOFFMAN, D. G.; RODGER, C. A. The chromatic index of complete multipartite graphs. **Journal of Graph Theory**, Wiley-Blackwell, v. 16, n. 2, p. 159–163, jun. 1992. ISSN 1097-0118.
- HUANG, D. Adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs with large maximum degree. **Sci Sin Math**, Science China Press., Co. Ltd., v. 42, n. 2, p. 151, 2012. ISSN 1674-7216.
- HULGAN, J. Concise proofs for adjacent vertex-distinguishing total colorings. **Discrete Mathematics**, Elsevier BV, v. 309, n. 8, p. 2548–2550, abr. 2009. ISSN 0012-365X.
- KÖNIG, D. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. **Mathematische Annalen**, v. 77, p. 453–465, 1916.
- LUIZ, A. G. **Sobre a coloração total semiforte**. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, 2014.
- MELLO, C. P. de; PEDROTTI, V. Adjacent-vertex-distinguishing total coloring of indifference graphs. **Matematica Contemporanea**, v. 39, p. 101–110, 2010.
- PLANTHOLT, M. The chromatic index of graphs with a spanning star. **Journal of Graph Theory**, Wiley-Blackwell, v. 5, n. 1, p. 45–53, 1981. ISSN 1097-0118.

ROSENFELD, M. On the total coloring of certain graphs. **Israel Journal of Mathematics**, Springer Science + Business Media, v. 9, n. 3, p. 396–402, set. 1971. ISSN 1565-8511.

SÁNCHEZ-ARROYO, A. Determining the total colouring number is np-hard. **Discrete Mathematics**, Elsevier BV, v. 78, n. 3, p. 315–319, 1989. ISSN 0012-365X.

VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. **Diskret. Analiz**, n. 3, p. 25–30, 1964.

WALKER, R.; SKIENA, S. Implementing discrete mathematics: Combinatorics and graph theory with mathematica. **The Mathematical Gazette**, JSTOR, v. 76, n. 476, p. 286, jul. 1992. ISSN 0025-5572.

WANG, Y.; WANG, W. Adjacent vertex distinguishing total colorings of outerplanar graphs. **Journal of Combinatorial Optimization**, Springer Science + Business Media, v. 19, n. 2, p. 123–133, maio 2008. ISSN 1573-2886.

WANG, Z.; ZHU, E. The adjacent vertex distinguishing total chromatic number of graphs. **2010 4th International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering**, IEEE, jun. 2010. ISSN 2151-7614.

YAP, H.-P. **Total colourings of Graphs**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin, 1996.

ZHANG, Z. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. **Sci China Ser A**, Science China Press., Co. Ltd., v. 48, n. 3, p. 289, 2005. ISSN 1006-9283.