

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

ALEFFER ROCHA

**COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS EM GRAFOS RESULTANTES DE
PRODUTO CARTESIANO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**PONTA GROSSA
2017**

ALEFFER ROCHA

**COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS EM GRAFOS RESULTANTES DE
PRODUTO CARTESIANO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção de grau de Bacharel em Ciência da Computação, do Departamento Acadêmico de Informática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Sheila Morais de Almeida

PONTA GROSSA

2017



TERMO DE APROVAÇÃO

COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS EM GRAFOS RESULTANTES DE PRODUTO CARTESIANO

por

ALEFFER ROCHA

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em 5 de dezembro de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dra. Sheila Morais de Almeida
Orientador(a)

Prof(a). Dra. Diana Sasaki Nóbrega
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Membro titular

Prof. MSc. Saulo Jorge Beltrão de Queiroz
Membro titular

Prof(a). Dr(a). Helyane Bronoski Borges
Responsável pelo Trabalho de Conclusão de
Curso

Prof. MSc. Saulo Jorge Beltrão de Queiroz
Coordenador do curso

- A Folha de Aprovação assinada encontra-se arquivada na Secretaria Acadêmica -

Dedico este trabalho a Deus, família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela dádiva do conhecimento, aos meus pais que nunca mediram esforços para me atender, a minha querida vó Edeli, pelos melhores conselhos e ensinamentos através das suas experiências de vida e a minha família e amigos por estarem sempre presentes nos momentos que mais precisei. Agradeço a professora Sheila, qual acreditou em mim, me ouviu, me motivou e me inspirou. Não consigo encontrar palavras suficientes para agradecê-la por tudo que és e tudo que representa para mim.

*“Não só podemos ver um
pouco do futuro, mas o suficiente para
perceber que há muito a fazer.”*
Alan Turing

RESUMO

ROCHA, Aleffer. **Coloração Arco-íris em Grafos Resultantes de Produto Cartesiano.** 2017, 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2017.

Dado um grafo G , uma coloração de arestas de G é uma atribuição de cores para as arestas de G . Uma coloração de arestas é própria se arestas adjacentes têm cores distintas. Uma coloração arco-íris de um grafo conexo G é uma coloração de arestas, não necessariamente própria, tal que entre qualquer par de vértices de G existe um caminho cujas cores das arestas são duas a duas distintas. O número de conexão arco-íris de um grafo G , denotado por $rc(G)$, é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração arco-íris de G . Um grafo G é arco-íris crítico se a remoção de qualquer aresta de G aumenta o seu número de conexão arco-íris. Neste trabalho determinamos o número de conexão arco-íris para os grafos que são resultantes do produto cartesiano $C_m \times P_n$, quando m é ímpar, e $C_m \times C_n$, quando m e n têm paridades distintas. Para os casos em que m e n são ímpares, provamos que $rc(C_m \times C_n) \leq (m + n)/2$. Também mostramos que o produto cartesiano $P_m \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, é um caminho P_n , $n > 1$, ou um C_4 e que os produtos cartesianos $C_m \times P_n$ não são arco-íris críticos quando m é par e $n > 1$.

Palavras-chaves: Coloração Arco-íris. Produto Cartesiano. Número de Conexão Arco-íris. Grafos Arco-íris Críticos.

ABSTRACT

ROCHA, Alefer. **Coloração Arco-íris em Grafos Resultantes de Produto Cartesiano**. 2017, 48 f. Work of Conclusion Course (Graduation in Computer Science) - Federal University of Technology - Paraná. Ponta Grossa, 2017.

Given a graph G , an edge-coloring of G is an assignment of colors to the edges of G . A proper edge-coloring is an edge coloring if adjacent edges have different colors. A rainbow coloring of a connected graph G is an edge coloring that is not necessarily proper such that there is a path between any pair of vertices of G whose edge colors are pairwise distinct. The rainbow connection number of a graph G , denoted as $rc(G)$, is the least number of colors for which there is a rainbow coloring of G . A graph G is rainbow critical if its rainbow connection number increases when we remove any edge from G . In this work we determine the rainbow connection number for the cartesian product graphs $C_m \times P_n$ when m is odd and $C_m \times C_n$ when m and n have distinct parities. For the case in which n and m are odd, we prove that $rc(C_m \times C_n) \leq (m+n)/2$. We also show that the cartesian product $P_m \times P_n$ is rainbow critical if and only if it is a path P_n , $n > 1$, or a C_4 and that the cartesian product $C_m \times P_n$ is not rainbow critical when m is even and $n > 1$.

Key-words: Rainbow Coloring. Cartesian Product. Rainbow Connection Number. Rainbow Critical Graphs

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– (a) Grafo G possui uma coloração de arestas própria. (b) Grafo G com uma coloração de arestas não-própria	12
Figura 2	– Grafo G com caminho arco-íris em (a) e caminho não arco-íris em (b)	13
Figura 3	– Grafo G e uma de suas árvores geradoras H	14
Figura 4	– Produto cartesiano de dois grafos, G e H	15
Figura 5	– Grafo K_4 com uma coloração arco-íris	18
Figura 6	– Árvore com uma coloração arco-íris	19
Figura 7	– Grafo C_6 com uma coloração arco-íris	19
Figura 8	– Grafo C_7 com uma coloração arco-íris	20
Figura 9	– Exemplo de um grafo roda	20
Figura 10	– Grafo W_8 com uma coloração arco-íris	21
Figura 11	– Exemplo de um grafo de intervalos unitários e sua respectiva representação por intervalos unitários	22
Figura 12	– Exemplo de um grafo de intervalos unitários	23
Figura 13	– Grafo $G = P_3 \times P_4$ com uma coloração arco-íris	25
Figura 14	– Grafo $C_6 \times P_6$ com uma coloração arco-íris	26
Figura 15	– Grafo árvore G e $G - e$	27
Figura 16	– Ciclo C_4 e C_4 sem uma aresta e	27
Figura 17	– Ciclo K_4 e K_4 sem uma aresta e	28
Figura 18	– Grafos $P_4 \times P_4$ com uma coloração de arestas arco-íris e grafo $(P_4 \times P_4) - e$ com uma coloração de arestas	29
Figura 19	– Grafo $(C_6 \times P_6) - e$ com uma coloração arco-íris usando a técnica do Teorema 4	30
Figura 20	– Grafo $C_5 \times P_2$ com uma coloração arco-íris	32
Figura 21	– Grafo $C_5 \times P_5$ com uma coloração arco-íris	33
Figura 22	– Grafo $C_7 \times C_5$ com uma coloração arco-íris	34
Figura 23	– Grafo $C_5 \times K_4$ com uma coloração arco-íris	36
Figura 24	– Grafos $P_1 \times P_4$ e $(P_1 \times P_4) - e$	37
Figura 25	– Grafos $P_2 \times P_2$ e $(P_2 \times P_2) - e$	37
Figura 26	– Rotulação dos vértices do grafo $P_4 \times P_3$	38
Figura 27	– Grafo $(P_3 \times P_4) - e$ com caminho arco-íris	39
Figura 28	– Grafo $(P_3 \times P_4) - e$ com caminho arco-íris	39
Figura 29	– Grafo $C_4 \times P_2$ com vértices rotulados	40
Figura 30	– Grafo $(C_4 \times P_2) - e$ com caminho arco-íris	41
Figura 31	– Grafo $(C_4 \times P_2) - e$ com caminho arco-íris	41
Figura 32	– Grafo $(C_4 \times P_2) - e$ com caminho arco-íris	42
Figura 33	– Grafo $C_5 \times C_5$ com uma coloração arco-íris	43
Figura 34	– Grafo $C_7 \times C_7$ com uma coloração arco-íris	44

LISTA DE SÍMBOLOS

e	Aresta
$V(G)$	Conjunto de vértices do grafo G
$E(G)$	Conjunto de arestas do grafo G
$diam(G)$	Diâmetro do grafo G
$\epsilon(v)$	Excentricidade do vértice v
P_n	Grafo caminho com n vértices
C_n	Grafo ciclo com n vértices
K_n	Grafo completo com n vértices
W_n	Grafo roda com n vértices de grau 3 e um vértice de grau n
$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo G
$rc(G)$	Número de conexão arco-íris de G
$G \times H$	Produto cartesiano entre os grafos G e H
$G[S]$	Subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices S

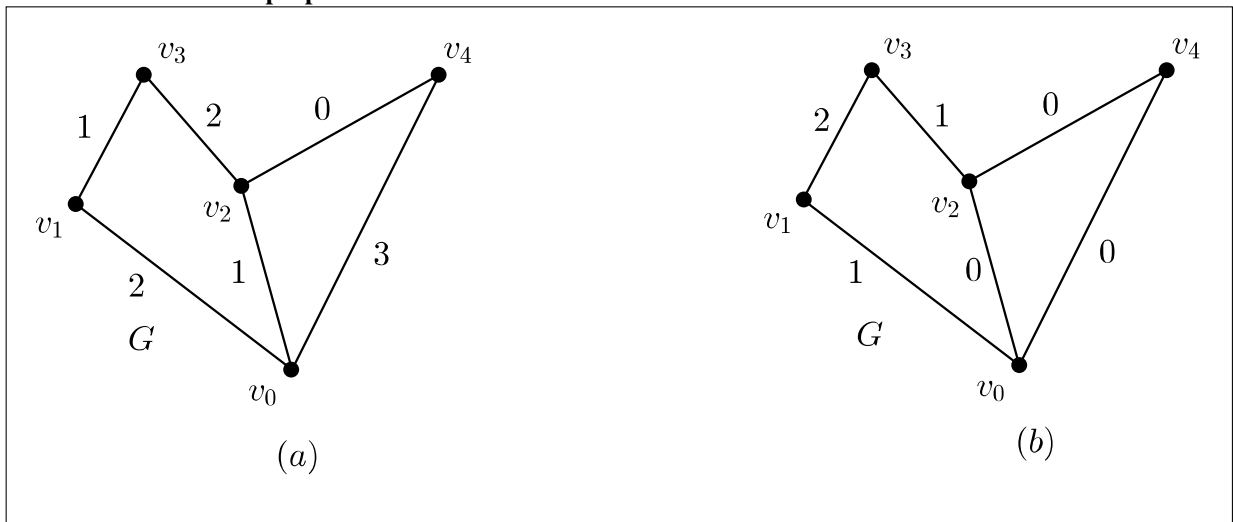
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	16
2	RESULTADOS ANTERIORES	17
2.1	NÚMERO DE CONEXÃO ARCO-ÍRIS	17
2.2	GRAFOS ARCO-ÍRIS CRÍTICOS	26
3	RESULTADOS	31
3.1	NÚMERO DE CONEXÃO ARCO-ÍRIS EM PRODUTOS CARTESIANOS	31
3.2	CRITICALIDADE ARCO-ÍRIS EM PRODUTOS CARTESIANOS	36
3.3	CONJECTURA	42
4	CONCLUSÃO	45
4.1	TRABALHOS FUTUROS	45
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

Uma coloração de arestas em G é uma atribuição de cores para as arestas de G . As cores em geral são representadas por números inteiros. Uma coloração de arestas é própria se arestas incidentes em um mesmo vértice têm cores distintas. A Figura 1(a) apresenta um grafo com uma coloração de arestas própria e a Figura 1(b) apresenta o mesmo grafo com uma coloração de arestas não própria. Observe que todas as arestas que incidem no vértice v_i na Figura 1(a), $0 \leq i \leq 4$, possuem cores distintas entre si, logo, esta é uma coloração de arestas própria. Na Figura 1(b) existe pelo menos um vértice (v_0) onde duas arestas (v_0v_2 e v_0v_4) têm a mesma cor e, portanto, esta coloração de arestas não é própria.

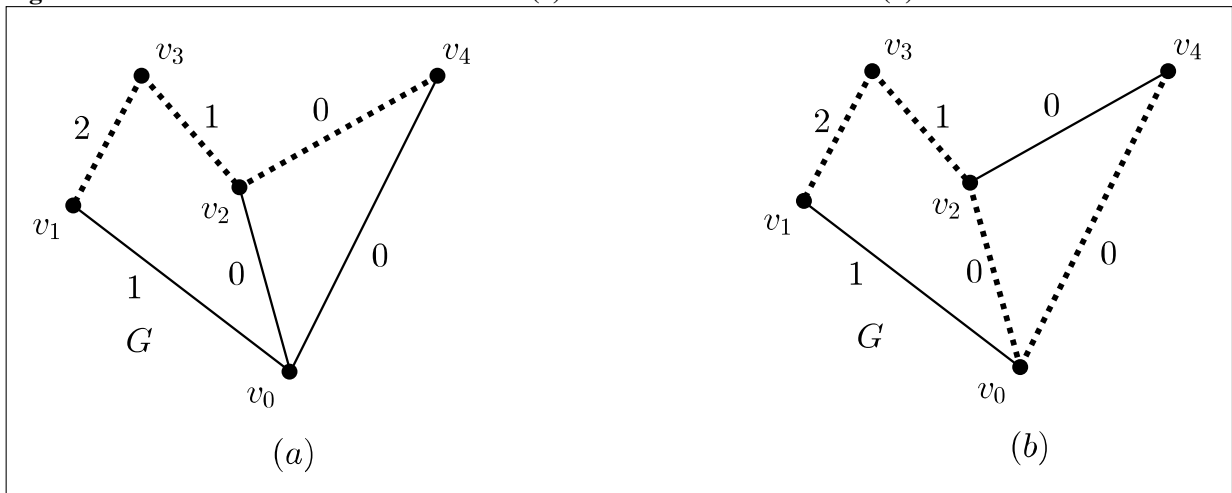
Figura 1 – (a) Grafo G possui uma coloração de arestas própria. (b) Grafo G com uma coloração de arestas não-própria



Fonte: Autoria própria

Dado um grafo G com uma coloração de arestas não necessariamente própria, um caminho entre os vértices v_i e v_j em G é arco-íris se as cores de quaisquer duas arestas do caminho são distintas. A Figura 2 apresenta um grafo com uma coloração arco-íris. Na Figura 2(a), o caminho arco-íris entre os vértices v_1 e v_4 está representado pelas arestas pontilhadas. Na Figura 2(b) pode-se observar que nem todos os caminhos entre v_1 e v_4 são arco-íris, um exemplo é o caminho representado pelas arestas pontilhadas, que neste caso tem duas arestas com cor 0.

Figura 2 – Grafo G com caminho arco-íris em (a) e caminho não arco-íris em (b)



Fonte: Autoria própria

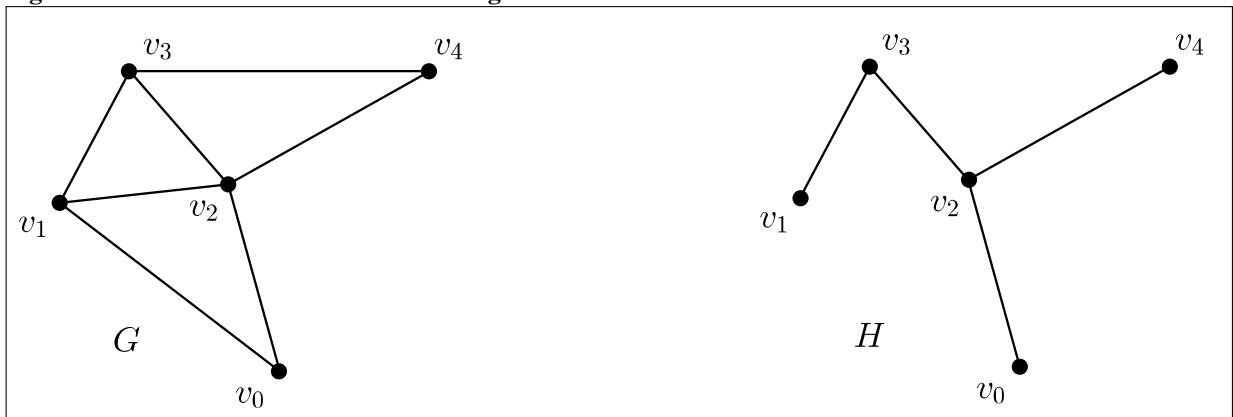
Uma coloração de arestas de G é uma coloração arco-íris se entre qualquer par de vértices de G existe um caminho arco-íris (CHARTRAND *et al.*, 2008). A coloração apresentada na Figura 2(a) é uma coloração arco-íris do grafo. O Problema da Coloração Arco-íris consiste em encontrar o menor número de cores que permite uma coloração arco-íris de um grafo G . Este número é conhecido como número de conexão arco-íris e é denotado $rc(G)$. No exemplo da Figura 2(a), a coloração arco-íris não utiliza o mínimo de cores, visto que mesmo se a aresta v_1v_3 tiver cor 0, existe um caminho arco-íris entre cada par de vértices. Para este exemplo, $rc(G) = 2$.

Um grafo é conexo se, e somente se, existe um caminho entre qualquer par de vértices. Quando existe um par de vértices que não estão conectados por um caminho, dizemos que o grafo é desconexo. É importante ressaltar que se G é desconexo então existe pelo menos um par de vértices, u e v , entre os quais não existe caminho. Portanto, não há cores suficientes para se ter um caminho arco-íris entre u e v , e, conseqüentemente, o número de conexão arco-íris é infinito.

Sabe-se que o Problema da Coloração Arco-íris é NP-difícil (CHAKRABORTY *et al.*, 2011) e decidir se $rc(G) = k$, para $k \geq 3$, fixo, é um problema NP-completo (ANANTH; NASRE; SARPATWAR, 2011). Entretanto, em algumas classes de grafos, o número de conexão arco-íris é trivial, por exemplo, para uma árvore T com n vértices $rc(T) = n - 1$; para um grafo completo K_n , $rc(K_n) = 1$; e para um ciclo C_n , $rc(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ (CHARTRAND *et al.*, 2008).

Em face da dificuldade de calcular o valor de $rc(G)$ para um grafo qualquer, alguns trabalhos estabelecem limitantes superiores (cada vez mais justos) para o número de conexão arco-íris. Um dos primeiros resultados nesse sentido explora a quantidade de arestas presentes na árvore geradora de G . Para compreender o conceito de uma árvore geradora, primeiro, é necessário compreender o conceito de subgrafo. Um *subgrafo* H de um grafo conexo G é o grafo com conjunto de vértices $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Uma *árvore geradora* em um grafo G é um subgrafo conexo de G com conjunto de vértices $V(G)$ e que não contém ciclos. A Figura 3 apresenta como exemplo um grafo G , e uma de suas árvores geradoras H .

Figura 3 – Grafo G e uma de suas árvores geradoras H



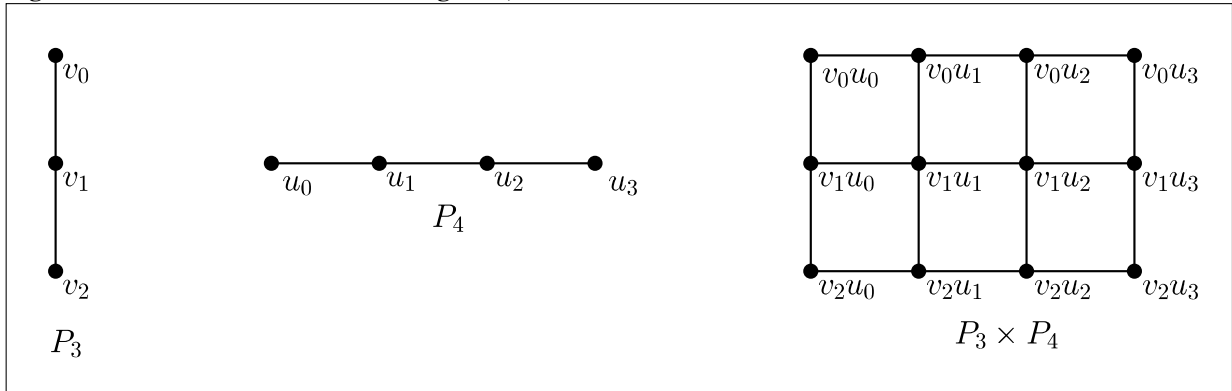
Fonte: Autoria própria

Assim, para obter uma coloração arco-íris de qualquer grafo simples e conexo G , é suficiente atribuir cores distintas para todas as arestas de uma das suas árvores geradoras. Sabe-se que qualquer árvore com n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas. Então, uma coloração arco-íris de uma árvore geradora de um grafo G usa $|V(G)| - 1$ cores e, portanto, $rc(G) \leq |V(G)| - 1$.

Alguns resultados acerca de limitantes superiores para $rc(G)$ relacionam o número de conexão arco-íris de G com o menor número de arestas incidentes em um mesmo vértice de G . Este parâmetro é denotado por $\delta(G)$ e chamado de grau mínimo de G . O limitante superior mais justo conhecido para $rc(G)$ em relação ao grau mínimo de G deve-se a Chandran *et al.* (2012), que mostram que $rc(G) \leq (3n)/(\delta(G) + 3)$ para qualquer grafo conexo com n vértices. Observa-se que em muitos casos o limitante apresentado por Chandran *et al.* é mais justo que o limitante obtido a partir da árvore geradora de G .

Ainda considerando a dificuldade para se determinar o valor de $rc(G)$ em um grafo G qualquer, outros estudos se concentram na solução do problema em classes de grafos mais restritas. Uma dessas classes é a dos grafos resultantes da operação de produto cartesiano. O *produto cartesiano* entre dois conjuntos, A e B , é o conjunto de todos os pares ordenados, cujo primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B , ou seja, $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$. Agora, considere dois grafos, $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{|V(G)|-1}\}$, e $H = (V(H), E(H))$, $V(H) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{|V(H)|-1}\}$. O produto cartesiano de G e H , denotado por $G \times H$, é um grafo com o conjunto de vértices dado pelo produto cartesiano $V(G) \times V(H)$, onde existe aresta entre dois vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l) se e somente se $v_i v_k \in E(G)$ e $u_j = u_l \in V(H)$ ou se $u_j u_l \in E(H)$ e $v_i = v_k \in V(G)$. Observe que cada vértice do grafo $G \times H$ é um par de vértices (v, u) tal que $v \in V(G)$ e $u \in V(H)$. Na Figura 4 é apresentado o produto cartesiano $G \times H$, tal que $G = P_3$ e $H = P_4$.

Figura 4 – Produto cartesiano de dois grafos, G e H



Fonte: Autoria própria

Para os grafos resultantes de produtos cartesianos, Li e Sun (2010) apresentam o Teorema 1, que estabelece uma relação entre o número de conexão arco-íris e o diâmetro dos grafos participantes da operação do produto cartesiano. O conceito de diâmetro de um grafo G depende do conceito de *excentricidade* de um vértice v , que é a maior distância entre v e qualquer outro vértice do grafo G . O *diâmetro* de um grafo G , denotado por $diam(G)$, é a maior excentricidade de um vértice de G .

Teorema 1. (LI; SUN, 2010) *Seja $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, $n \geq 2$, tal que G_i é conexo, $1 \leq i \leq n$. Então $rc(G) \leq \sum_{i=1}^n rc(G_i)$. Além disso, se $diam(G_i) = rc(G_i)$ para todo G_i , $1 \leq i \leq n$, então, $rc(G) = \sum_{i=1}^n rc(G_i)$.*

Geralmente um grafo caminho com n vértices é denotado por P_n . Da mesma forma um grafo ciclo com n vértices é denotado por C_n . É importante observar que o $diam(P_n) = n - 1$ e o $diam(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$. Desta informação, do Teorema 1 e como $rc(G) = diam(G)$ quando G é uma árvore ou um ciclo par (CHARTRAND *et al.*, 2008), pode-se inferir os seguintes corolários.

Corolário 1. $rc(P_m \times P_n) = m + n - 2$, para dois caminhos P_m e P_n com $2 \leq m \leq n$.

Corolário 2. $rc(C_m \times C_n) = (m + n)/2$ para dois ciclos C_m e C_n com $3 < m \leq n$, m e n pares.

Corolário 3. $rc(P_m \times C_n) = m - 1 + n/2$ para um caminho e um ciclo com n par e $n > 3$.

Pelo Corolário 1, o número de conexão arco-íris dos grafos $P_m \times P_n$, $2 \leq m \leq n$, é conhecido. Observe que isso não implica na existência de um algoritmo eficiente para uma coloração arco-íris ótima desses grafos. Entretanto, Rao e Murali (2014) apresentam uma prova desse mesmo resultado da qual se pode obter um algoritmo polinomial para tal coloração.

Além do interesse em determinar o número de conexão arco-íris, há estudos sobre a criticalidade dos grafos quanto ao número de conexão arco-íris. Um grafo G é chamado grafo arco-íris crítico se, ao remover uma aresta qualquer de G , o número de conexão arco-íris de G aumenta (RAO; MURALI, 2014). No mesmo trabalho em que os autores definiram o conceito de grafo arco-íris crítico, eles afirmaram que os produtos cartesianos $P_m \times P_n$, $m, n \geq 2$, e

$C_m \times P_n$, m par e $n \geq 2$, são grafos arco-íris críticos. Essa afirmação merece uma discussão cuidadosa, que será feita neste documento.

Neste trabalho, determinamos o número de conexão arco-íris do produto cartesiano de ciclo ímpar com caminho e de ciclo com ciclo quando pelo menos um ciclo é ímpar. Também apresentamos um limitante superior mais justo que o apresentado por Li e Sun (2010) para o produto cartesiano de dois ciclos ímpares. Apesar das contribuições de Rao e Murali (2014) para coloração arco-íris como, por exemplo, a formalização do conceito de criticalidade arco-íris, nem todos os resultados apresentados em (RAO; MURALI, 2014) estão corretos. Para tal afirmação, apresentamos uma prova de que o grafo $P_m \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, é um caminho P_n , $n > 1$, ou um C_4 e provamos que os produtos cartesianos $C_m \times P_n$ não são arco-íris críticos quando m é par e $n > 1$.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

O trabalho está organizado em quatro capítulos. O Capítulo 2 é composto de duas seções que apresentam um estudo sobre o Problema da Coloração Arco-íris e criticalidade arco-íris. A Seção 2.1 apresenta o Problema da Coloração Arco-íris e o número de conexão arco-íris em algumas classes de grafos conhecidas. A Seção 2.2 mostra alguns resultados sobre a criticalidade arco-íris de grafos resultantes de produto cartesiano.

O Capítulo 3 está dividido em duas seções que apresentam os resultados obtidos durante o desenvolvimento desta pesquisa. A Seção 3.1 apresenta o número de conexão arco-íris dos grafos resultantes de produto cartesiano entre dois ciclos, entre um ciclo ímpar e um caminho e entre um ciclo ímpar e um grafo completo. A Seção 3.2 discute a criticalidade de alguns grafos resultantes do produto cartesiano de ciclos e caminhos.

O Capítulo 4 apresenta a conclusão deste trabalho e aponta questões interessantes para trabalhos futuros.

2 RESULTADOS ANTERIORES

Neste capítulo são apresentados alguns resultados de estudos preliminares sobre o Problema da Coloração Arco-íris, divididos em duas seções. Na primeira seção são apresentados resultados anteriores sobre o número de conexão arco-íris. A Seção 2.2 apresenta resultados já conhecidos sobre criticalidade arco-íris. Tais resultados são de grande importância como ponto de partida para maior compreensão do problema e para as provas apresentadas no Capítulo 3.

2.1 NÚMERO DE CONEXÃO ARCO-ÍRIS

O primeiro resultado referente ao número de conexão arco-íris é a imposição de limitantes inferiores e superiores para o número de conexão arco-íris dada por Chartrand *et al.* (2008).

Proposição 1. (CHARTRAND *et al.*, 2008) *Se G é um grafo conexo e não trivial com n vértices, então $\text{diam}(G) \leq rc(G) \leq n$.*

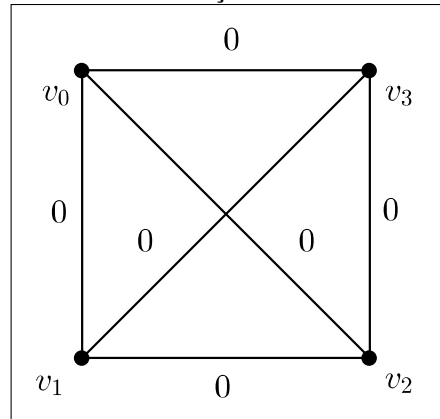
Além disso, Chartrand e colegas caracterizam a classe dos grafos com $rc(G) = 1$ e com $rc(G) = n - 1$, como, apresentado a seguir.

Proposição 2. (CHARTRAND *et al.*, 2008) *Seja G um grafo conexo não trivial com m arestas. Então:*

- (a) $rc(G) = 1$ se e somente se G é um grafo completo,
- (b) $rc(G) = m$ se e somente se G é uma árvore.

Demonstração. Primeiro vamos verificar o item (a). Seja G um grafo completo, então atribua cor 0 para todas as arestas de G . Como existe um caminho arco-íris para todo e qualquer par de vértices e o número de cores utilizadas é 1, $rc(G) = 1$. A Figura 5 apresenta um exemplo onde é atribuída uma coloração arco-íris para o grafo K_4 .

Figura 5 – Grafo K_4 com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Por outro lado, se G não é um grafo completo, então G possui pelo menos dois vértices v_i e v_j não adjacentes. Neste caso, qualquer caminho entre esses vértices contém pelo menos duas arestas e, portanto, $rc(G) \geq 2$. Logo, os grafos completos são os únicos com $rc(G) = 1$.

Agora vamos verificar (b). Suponha primeiro que G tem m arestas e não é uma árvore. Então G contém um ciclo $v_k v_{k+1} \dots v_k$, onde $k \geq 3$. Utilize cor 0 para as arestas $v_k v_{k+1}$ e $v_{k+1} v_{k+2}$ e $m - 2$ cores distintas e diferentes de 0 para as outras arestas G . Logo, G possui uma coloração arco-íris com $m - 1$ cores. Portanto $rc(G) \leq m - 1$. Resta considerar o caso em que G é uma árvore com m arestas. Assuma, por contradição, que $rc(G) \leq m - 1$. Seja c uma função que atribui o mínimo de cores para se obter uma coloração arco-íris em G . Então existem as arestas distintas e_k e e_l de tal modo que $c(e_k) = c(e_l)$. Sejam $e_k = v_i v_j$ e $e_l = v_x v_y$, para valores de i, j, x e y inteiros no intervalo $[0, |V(G)|[$. Suponha sem perda de generalidade que o caminho entre v_i e v_y é $v_i v_j \dots v_x v_y$. Caso contrário, é suficiente trocar os nomes entre v_i e v_j e entre v_x e v_y de forma que este caminho contém obrigatoriamente as arestas e_k e e_l . Como G é uma árvore, este é o único caminho entre v_i e v_y . Como $v_i v_j \dots v_x v_y$ não é um caminho arco-íris, a coloração dada não é arco-íris, uma contradição. Como a árvore tem m arestas, existe uma coloração das arestas com m cores de forma que todas as arestas da árvore têm cores distintas. Logo $rc(G) = m$. Na Figura 6 temos uma árvore com m arestas, $m = 8$, com uma coloração arco-íris usando 8 cores.

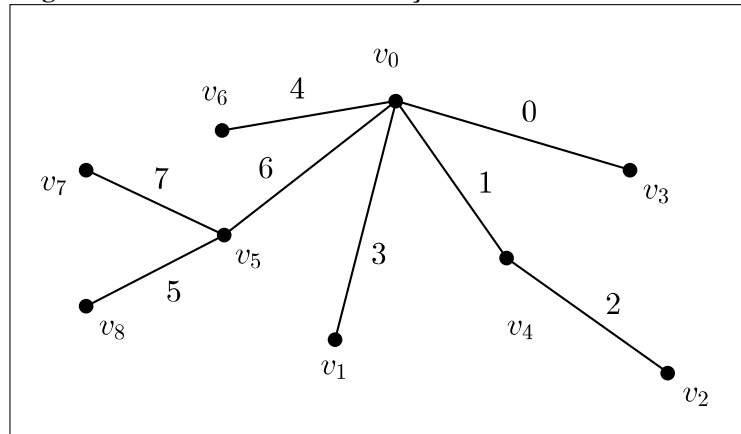
□

O conceito de caminho geodésico é importante para demonstração da Proposição 3. Para dois vértices $v_i, v_j \in G$, G conexo, um caminho de v_i a v_j é *geodésico* em G se é o menor caminho entre v_i e v_j .

Proposição 3. (CHARTRAND et al., 2008) Para todo ciclo C_n com $n \geq 4$, $rc(C_n) = \lceil n/2 \rceil$.

Demonstração. Seja $C_n = v_0 v_1 \dots v_{n-1} v_n = v_0$. Vamos considerar dois casos, quando n é um inteiro par e quando n é um inteiro ímpar.

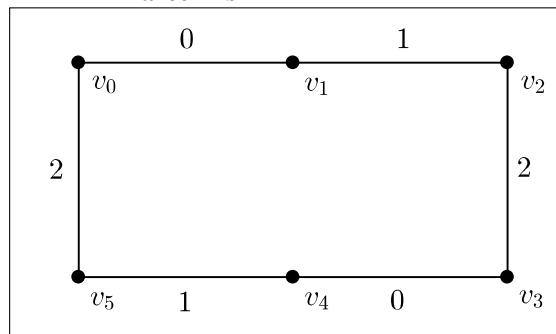
Figura 6 – Árvore com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Caso 1: Seja $n = 2k$, um inteiro par, $k \geq 2$. Então, $rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$. Seja c_0 uma coloração arco-íris do grafo C_n , definida como $c_0(v_i v_{i+1}) = i$ para $0 \leq i < k$, e $c_0(v_i v_{i+1}) = i - k$ para $k \leq i \leq n - 2$. Note que c_0 usa k cores. Logo, $rc(C_n) \leq k$. Como $k = diam(C_n) \leq rc(C_n) \leq k$, pode-se concluir que $rc(C_n) = k$. A Figura 7 apresenta um grafo C_{2k} , $k = 3$, com uma coloração arco-íris.

Figura 7 – Grafo C_6 com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

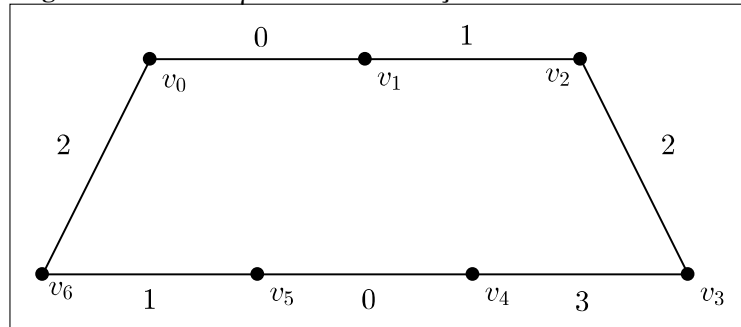
Caso 2: Quando n é um inteiro ímpar. Seja $n = 2k + 1$ para algum inteiro $k \geq 2$. Seja c_1 uma coloração arco-íris do grafo C_n , definida como $c_1(v_i v_{i+1}) = i$ para $0 \leq i \leq k$, e $c_1(v_i v_{i+1}) = i - k - 2$ para $k + 1 \leq i < n$. Portanto c_1 é uma coloração arco-íris de tamanho $k + 1$ em C_n . Então, $rc(C_n) \leq k + 1$.

Uma vez que $rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$, há duas possibilidades: ou $rc(C_n) = k$ ou $rc(C_n) = k + 1$. Assuma, por contradição, que $rc(C_n) = k$. Sejam c' uma coloração arco-íris de C_n com k cores e v_i e $v_{i+(n+1)/2} \in V(C_n)$, $0 \leq i < n/2$. Então, o caminho de v_i a $v_{i+(n+1)/2}$ geodésico é arco-íris e o outro caminho de v_i a $v_{i+(n+1)/2}$ não é arco-íris já que tem tamanho $k + 1$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $c'(v_k v_{k+1}) = k - 1$. Considere os vértices v_0 , v_k e v_{k+1} . Uma vez que os caminhos geodésicos, $P = v_0 v_1 \dots v_k$ e $P' = v_0 v_{n-1} v_{n-2} \dots v_{k+1}$ são arco-íris, alguma aresta no caminho P está colorida com cor $k - 1$, assim como alguma aresta no caminho de P' . Uma vez que o caminho geodésico $v_1 v_2 \dots v_{k+1}$ é arco-íris, conclui-se

que $c'(v_0v_1) = k - 1$. Analogamente, o caminho geodésico $v_{n-1}v_{n-2}v_{n-3} \dots v_k$ é um caminho arco-íris e, sendo assim, $c'(v_{n-1}v_0) = k - 1$. Isto implica que não existe um caminho arco-íris de v_1 a v_{n-1} em G , uma contradição. Portanto $rc(C_n) = k + 1$. A Figura 8 apresenta um grafo C_{2k+1} , $k = 3$, com uma coloração arco-íris.

Figura 8 – Grafo C_7 com uma coloração arco-íris

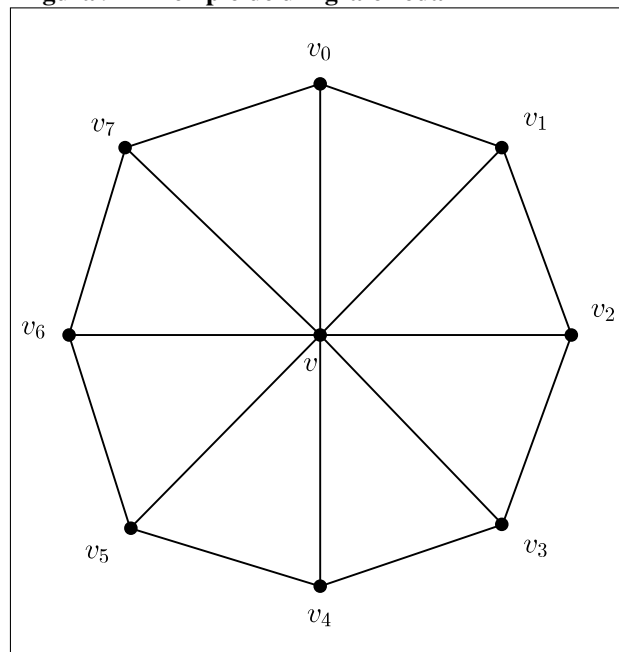


Fonte: Autoria própria

□

Outra classe de grafos para a qual Chartrand *et al.* (2008) determinaram o número de conexão arco-íris é a classe dos grafos roda. Um grafo roda, W_n , consiste de um ciclo $C_n = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0$, $n \geq 3$ e um outro vértice v adjacente a todos os vértices do ciclo C_n . A Figura 9 apresenta um exemplo de um grafo roda W_8 .

Figura 9 – Exemplo de um grafo roda



Fonte: Autoria própria

Proposição 4. (CHARTRAND *et al.*, 2008) O grafo roda W_n , $n \geq 3$, tem número de conexão

arco-íris dado por:

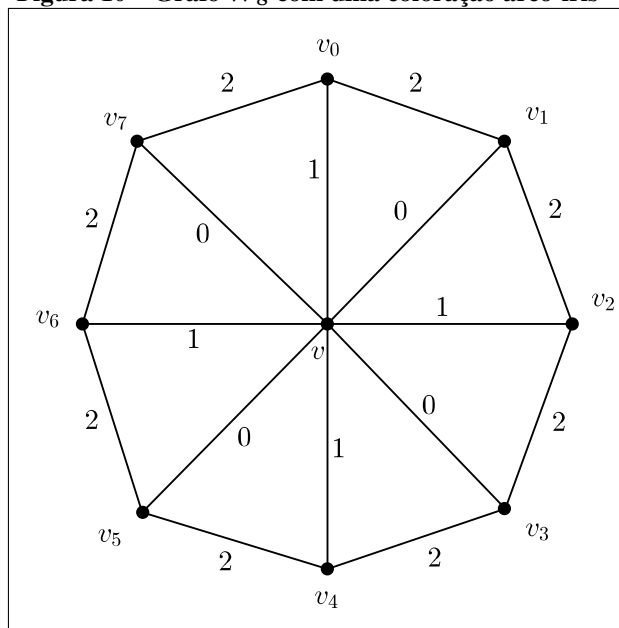
$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 3, \\ 2, & \text{se } 4 \leq n \leq 6, \\ 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

Demonstração. Uma vez que $W_3 = K_4$, $rc(W_3) = 1$ pela Proposição 2. Para $4 \leq n \leq 6$, o grafo W_n não é completo e, sendo assim, $rc(W_n) \geq 2$. Neste caso, para provar que $rc(W_n) = 2$ é suficiente apresentar uma coloração arco-íris do grafo W_n com duas cores. Seja $c : E(W_n) \rightarrow \{0, 1\}$ uma coloração arco-íris definida por $c(v_i v) = 0$ quando i é ímpar, $c(v_i v) = 1$ quando i é par, $c(v_i v_{i+1}) = 0$ quando i é ímpar e $c(v_i v_{i+1}) = 1$ quando i é par. Portanto, $rc(W_n) = 2$ para $4 \leq n \leq 6$.

Por fim, suponha que $n \geq 7$. Seja a coloração arco-íris $c : E(W_n) \rightarrow \{0, 1, 2\}$, definida por $c(v_i v) = 0$ se i é ímpar, $c(v_i v) = 1$ se i é par, e $c(v_i v_{i+1}) = 2$, para $0 \leq i < n$. Logo, $rc(W_n) \leq 3$. Agora vamos mostrar que $rc(W_n) \geq 3$. Se W_n não é completo, $rc(W_n) \geq 2$. Assuma, por contradição, que $rc(W_n) = 2$. Seja c' uma coloração arco-íris, $c' : E(W_n) \rightarrow \{0, 1\}$. Sem perda de generalidade, assuma que $c'(v_0 v) = 0$. Para cada i , $3 \leq i \leq n-3$, $v_0 v v_i$ é o único caminho de tamanho 2 entre v_0 e v_i no grafo W_n . Então, $c'(v_i v) = 1$, $3 \leq i \leq n-3$. Uma vez que $c(v_3 v) = 1$, $c(v_{n-1} v) = 0$. Isso força $c(v_2 v) = 1$, que por sua vez força $c(v_{n-2} v) = 0$. Similarmente, $c(v_{n-2} v) = 0$ força $c(v_1 v) = 1$. Uma vez que $c(v_1 v) = 1$ e $c(v_4 v) = 1$, não há um caminho arco-íris entre v_1 e v_4 em W_n , uma contradição. Portanto, $rc(W_n) = 3$ para todo $n \geq 7$. \square

A Figura 10 ilustra o grafo W_8 com uma coloração arco-íris atribuída com base na Proposição 4.

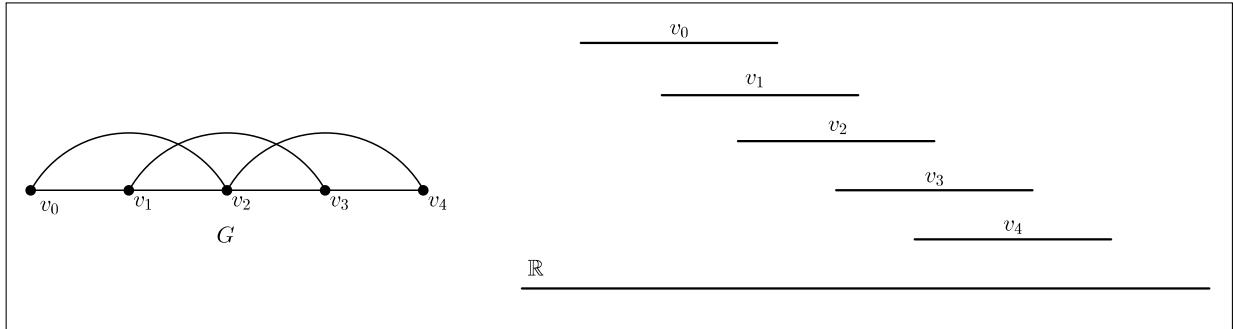
Figura 10 – Grafo W_8 com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Um *grafo de intervalos unitários* é um grafo que possui uma representação por intervalos em uma reta real \mathbb{R} , onde todo intervalo tem tamanho unitário, cada intervalo representa um vértice do grafo e existe aresta entre dois vértices se, e somente se, os intervalos correspondentes têm interseção não-vazia. A Figura 11 apresenta um exemplo de um grafo de intervalos unitários com a sua representação por intervalos unitários.

Figura 11 – Exemplo de um grafo de intervalos unitários e sua respectiva representação por intervalos unitários



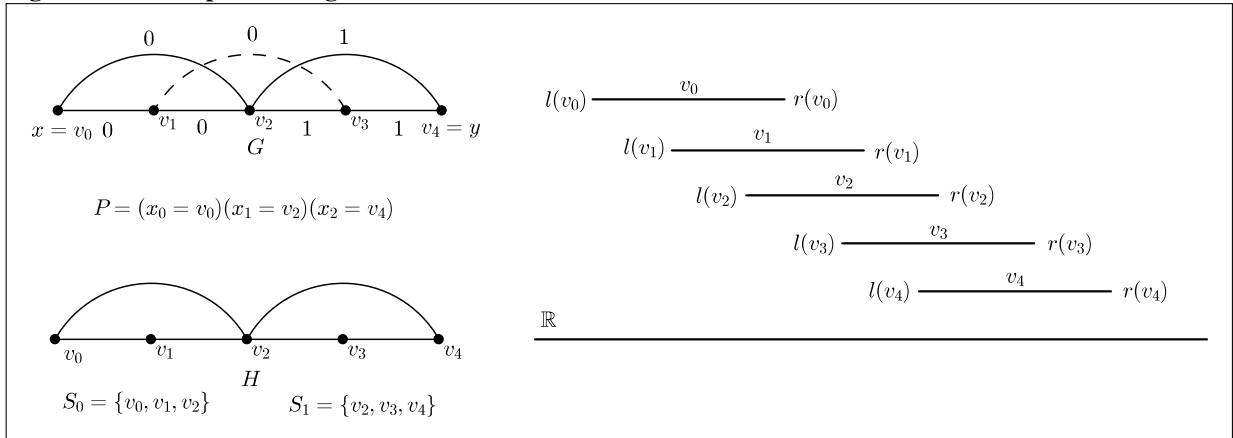
Fonte: Autoria própria

Para compreendermos o resultado apresentado por Chandran *et al.* (2012) referente ao número de conexão arco-íris de grafos de intervalos unitários com $\delta(G) \geq 2$, é necessário conhecer os conceitos de subgrafo induzido, clique e caminho dominante. Um subgrafo H é *subgrafo induzido* de G se, $V(H) \subseteq V(G)$ e para qualquer par de vértices x e y pertencentes a $V(H)$ existe aresta se, e somente se, existe aresta entre x e y em G . Denotamos H por $G[V(H)]$. Uma *clique* de G é um subgrafo induzido de G onde todos os vértices são adjacentes entre si. Um *caminho dominante* em G , é um caminho P tal que todo vértice de G pertence a P ou é adjacente a um vértice em P .

Teorema 2. (CHANDRAN *et al.*, 2012) *Se G é um grafo de intervalos unitários tal que $\delta(G) \geq 2$, então $rc(G) = diam(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo de intervalos unitários com $\delta(G) \geq 2$. Considere uma representação \mathbb{R} do grafo G por intervalos unitários. Para cada $v \in V(G)$, $l(v)$ e $r(v)$ denotam, respectivamente, os extremos esquerdo e direito do intervalo que representa o vértice v na representação \mathbb{R} . Sejam x e y os vértices representados, respectivamente, pelos intervalos mais à esquerda e mais à direita da representação \mathbb{R} . Seja $P = x_0x_1x_2 \dots x_{k-1}$, $x = x_0$ e $y = x_{k-1}$, o menor caminho de x a y no grafo G . Note que $k \leq diam(G) + 1$ e que P é um caminho dominante em G . Seja $S_i = \{v \in V(G) | l(v) \leq r(x_i) \leq r(v)\}$, $i = 0, 1, \dots, k-2$. Observe que cada S_i induz uma clique em G . Seja H um subgrafo de G com $V(H) = \cup_{i=1}^{k-2} S_i$ e $E(H) = \cup_{i=1}^{k-2} E(G[S_i])$. Observe que $V(H) = V(G)$. Pinte cada aresta em $E(G[S_i]) \setminus \cup_{i=1}^{i-1} E(G[S_i])$ com cor i , $i = 0, 1, \dots, k-2$. Pinte as arestas restantes de G com cor 0. A Figura 12 apresenta o mesmo grafo da Figura 11 com uma coloração arco-íris obtida com esta técnica, onde a aresta tracejada no grafo trata-se de uma aresta de $G \setminus \cup_{i=0}^{k-1} E(G[S_i])$.

Figura 12 – Exemplo de um grafo de intervalos unitários



Fonte: Autoria própria

Garantimos que esta é uma coloração arco-íris em G . Para cada par de vértices u e v em G , seja P' o menor caminho entre eles em H . Certamente o caminho P' não compartilha mais do que uma aresta em cada clique. Na coloração apresentada anteriormente, duas arestas de G possuem a mesma cor se, e somente se, pertencem à mesma clique. Então P' é um caminho arco-íris. Portanto, $rc(G) \leq k - 1 \leq diam(G)$, onde o diâmetro de G é um limitante inferior para o número de conexão arco-íris, concluindo, $rc(G) = diam(G)$. \square

Em relação ao número de conexão arco-íris em grafos resultantes do produto cartesiano, Li e Sun (2010) apresentam o Teorema 1, para o qual daremos uma ideia de prova a partir da Observação 1.

Observação 1. $rc(G \times H) \leq rc(G) + rc(H)$.

Esta observação permite estabelecer a Proposição 5, que determina o valor exato do número de conexão arco-íris de um grafo $G \times H$ quando $diam(G) = rc(G)$ e $diam(H) = rc(H)$.

Proposição 5. (LI; SUN, 2010) *Sejam G e H dois grafos com $rc(G) = diam(G)$ e $rc(H) = diam(H)$. Então $rc(G \times H) = rc(G) + rc(H)$.*

Demonstração. Usando a Observação 1 e o fato que de $diam(G \times H) = diam(G) + diam(H)$, tem-se $diam(G) + diam(H) = diam(G \times H) \leq rc(G \times H) \leq rc(G) + rc(H) = diam(G) + diam(H)$. Portanto, vale o enunciado. \square

Considere o produto cartesiano $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$. Observe que é possível generalizar a Proposição 5 para o Teorema 1 no caso em que cada grafo tem $rc(G_i) = diam(G_i)$, $1 \leq i \leq n$. A demonstração é por indução. A base é dada pela própria Proposição 5 considerando $G = G_1$ e $H = G_2$. Suponha, por hipótese, que se $rc(G_i) = diam(G_i)$, $1 \leq i \leq k$, então $rc(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k) = \sum_{i=1}^k rc(G_i)$. Considere o grafo $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k \times G_{k+1}$ e suponha que $rc(G_i) = diam(G_i)$, $1 \leq i \leq k + 1$. Pela hipótese, $rc(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k) = \sum_{i=1}^k rc(G_i) = \sum_{i=1}^k diam(G_i) = diam(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k)$. Então, pela Proposição 5,

$rc(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k \times G_{k+1}) = \sum_{i=1}^k rc(G_i) + rc(G_{k+1})$. Assim, obtém-se o mesmo resultado do Teorema 1 para o caso em que $rc(G_i) = diam(G_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Como $rc(P_n) = diam(P_n)$, para qualquer n inteiro, o Problema da Coloração Arco-Íris já está resolvido para o produto cartesiano de grafos caminhos, pelo Teorema 1. Entretanto, a determinação do número de conexão arco-íris dos grafos $P_m \times P_n$ não resultou em uma coloração arco-íris ótima para estes grafos. Rao e Murali (2014) apresentam uma prova construtiva para esse resultado, da qual pode-se extrair um algoritmo eficiente para uma coloração arco-íris dos grafos $P_m \times P_n$, $m, n \geq 2$. Essa demonstração é dada no Teorema 3, a seguir.

Teorema 3. (RAO; MURALI, 2014) *Se P_m e P_n são dois caminhos com $m, n \geq 2$, então $rc(P_m \times P_n) = m + n - 2$.*

Demonstração. Sejam os vértices de $P_m \times P_n$ denotados por (v_i, u_j) , tal que $v_i \in V(P_m)$ e $u_j \in V(P_n)$, $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$.

Sejam $P'_j = (v_0, u_j)(v_1, u_j) \dots (v_{m-1}, u_j)$, $0 \leq j \leq n-1$, e $P''_i = (v_i, u_0)(v_i, u_1) \dots (v_i, u_{n-1})$, $0 \leq i \leq m-1$.

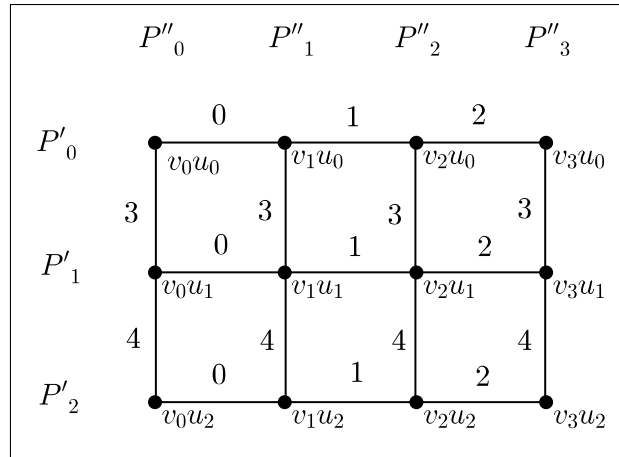
Considere o caminho $P'_0 = (v_0, u_0)(v_1, u_0) \dots (v_{m-1}, u_0) \in G$. Uma vez que P'_0 possui m vértices e $m-1$ arestas, atribua $m-1$ cores para as arestas de P'_0 , ou seja, $c : E(P'_0) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m-2\}$, $c((v_0, u_0)(v_1, u_0)) = 0$, $c((v_1, u_0)(v_2, u_0)) = 1, \dots, c((v_{m-2}, u_0)(v_{m-1}, u_0)) = m-2$. De mesmo modo, atribua esta coloração para os caminhos $P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}$. Temos que $rc(P'_j) = m-1$, $0 \leq j < n$.

Agora considere o caminho $P''_0 = (v_0, u_0)(v_0, u_1) \dots (v_0, u_{n-1}) \in G$. Uma vez que P''_0 possui n vértices e $n-1$ arestas, atribuímos $n-1$ novas cores para P''_0 , ou seja, $c : E(P''_0) \rightarrow \{m-1, m, m+1, \dots, m+n-3\}$, $c((v_0, u_0)(v_0, u_1)) = m-1$, $c((v_0, u_1)(v_0, u_2)) = m, \dots, c((v_0, u_{n-2})(v_0, u_{n-1})) = m+n-3$. De mesmo modo, atribua esta coloração para os caminhos $P''_1, P''_2, \dots, P''_{m-1}$. Temos que $rc(P''_i) = n-1$, $0 \leq i < m$.

Observe que, ao fazer uma atribuição de cores para os grafos $P_m \times P_n$ da forma descrita, as arestas de qualquer caminho P''_i , $0 \leq i < m$, possuem cores distintas das arestas de qualquer caminho P'_j , $0 \leq j < n$, garantindo então um caminho arco-íris entre os vértices $(v_p, u_q) \in P''_i$ e $(v_r, u_s) \in P'_j$. Quando os vértices (v_p, u_q) e (v_r, u_s) pertencem ao mesmo caminho P''_i , ou seja, quando $p = r = i$, $0 \leq i < m$, existe caminho arco-íris entre eles no próprio caminho P''_i . Um argumento similar pode ser usado para garantir que existe um caminho arco-íris entre (v_p, u_q) e (v_r, u_s) quando $q = s = j$, $0 \leq j < n$. Portanto, temos $rc(G) = m + n - 2$. \square

A Figura 13 apresenta o grafo $P_3 \times P_4$ com uma coloração arco-íris utilizando a técnica apresentada no Teorema 3.

Figura 13 – Grafo $G = P_3 \times P_4$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Rao e Murali (2014) apresentam ainda uma coloração arco-íris para o grafo $C_m \times P_n$, $m \geq 3$, inteiro par e $n \geq 2$. Embora esta não seja uma coloração ótima, como veremos no Capítulo 3, foi a primeira coloração arco-íris apresentada para esses grafos na literatura.

Teorema 4. (RAO; MURALI, 2014) *O produto cartesiano $C_m \times P_n$, $m \geq 3$, inteiro par e $n \geq 3$, tem uma coloração arco-íris com $m + n - 4$ cores.*

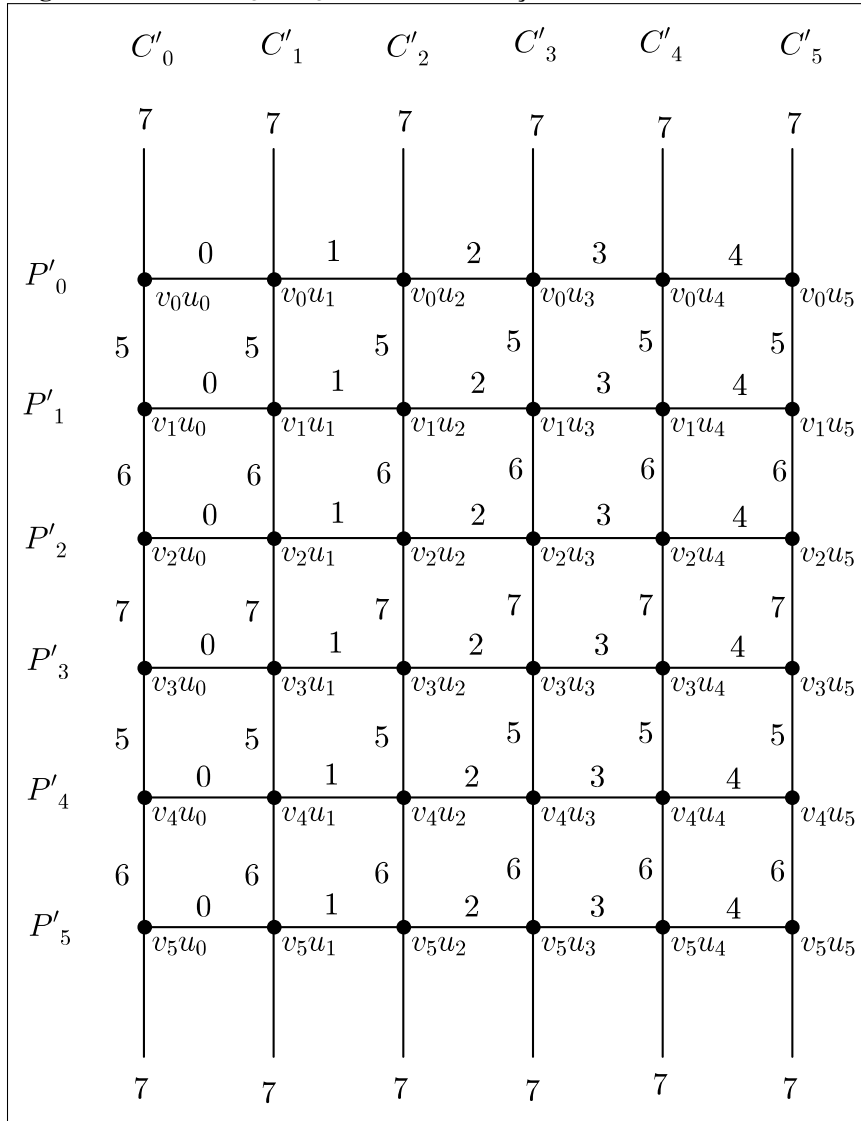
Demonstração. Sejam os vértices de $C_m \times P_n$ denotados por (v_i, u_j) , tal que $v_i \in V(C_m)$ e $u_j \in V(P_n)$, $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$.

Sejam $P'_j = (v_j, u_0)(v_j, u_1) \dots (v_j, u_{n-1})$, $0 \leq j < m$, e $C'_i = (v_0, u_i)(v_1, u_i) \dots (v_{m-1}, u_i)(v_0, u_i)$, $0 \leq i < n$. Considere o caminho $P'_j = (v_j, u_0)(v_j, u_1) \dots (v_j, u_{n-1}) \in G$, $0 \leq j < m$. Uma vez que P'_j possui n vértices e $n - 1$ arestas, atribua $n - 1$ cores para as arestas de P'_j , $c : E(P'_j) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n - 2\}$ onde $c((v_j, u_0)(v_j, u_1)) = 0, c((v_j, u_1)(v_j, u_2)) = 1 \dots c((v_j, u_{n-2})(v_j, u_{n-1})) = n - 2$. Agora considere o ciclo $C'_i = (v_0, u_i)(v_1, u_i) \dots (v_{m-1}, u_i)(v_0, u_i)$, tal que m é um inteiro par, $0 \leq i < n$. Seja, $c : E(C'_i) \rightarrow \{n, n + 1, n + 2, \dots, m + n - 5\}$, tal que $c((v_k, u_i)(v_{k+1}, u_i)) = n - 1 + k, 0 \leq k < m - 3$, e $c((v_k, u_i)(v_{k+1}, u_i)) = n - 1 + k - 3, m - 3 \leq k \leq m - 1$.

Logo, o grafo $C_m \times P_n$ tem uma coloração arco-íris com $m + n - 4$ cores. \square

A Figura 14 apresenta o grafo $C_6 \times P_6$ com uma coloração arco-íris utilizando $m + n - 4$ cores, fazendo uso da técnica apresentada no Teorema 4.

Figura 14 – Grafo $C_6 \times P_6$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

2.2 GRAFOS ARCO-ÍRIS CRÍTICOS

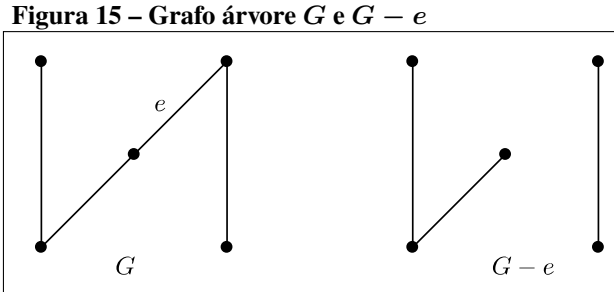
Além do interesse em determinar o número de conexão arco-íris, há estudos sobre a criticalidade dos grafos quanto ao número de conexão arco-íris, proposto pelos autores Rao e Murali (2014).

Definição 1. (RAO; MURALI, 2014) Um grafo G é arco-íris crítico se, ao remover uma aresta qualquer de G , o número de conexão arco-íris de G aumenta.

Seja G uma árvore com n vértices, $n \geq 2$. Ao remover uma aresta $e \in E(G)$, o grafo G torna-se desconexo, ou seja, existe um par de vértices $u, v \in G$ entre os quais não existe um caminho. Como definido no Capítulo 1, o número de conexão arco-íris de um grafo desconexo é infinito, portanto, $rc(G) < rc(G - e)$. Desta maneira, podemos concluir a Proposição 6.

Proposição 6. Se G é uma árvore com $n \geq 2$ vértices, G é arco-íris crítico.

A Figura 15 apresenta os grafos G e $G - e$ como exemplo para compreensão da Proposição 6.

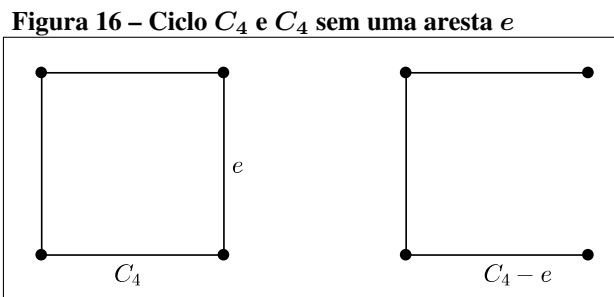


Fonte: Autoria própria

Seja C_n um ciclo de tamanho n , $n \geq 3$. Ao remover uma aresta e de C_n , C_n torna-se um caminho P_n . Pelas Proposições 2 e 3 temos que $rc(C_n) < rc(C_n - e)$, concluindo assim a Proposição 7.

Proposição 7. C_n , $n \geq 3$, é arco-íris crítico.

A Figura 16 apresenta os grafos C_4 e $C_4 - e$ como exemplo para compreensão da Proposição 7.



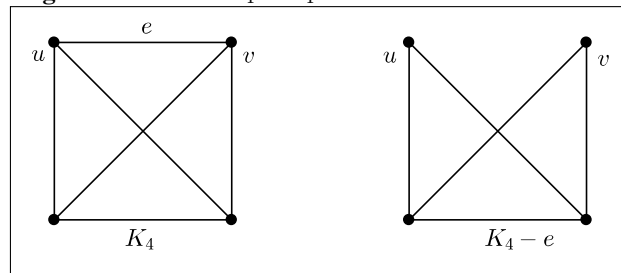
Fonte: Autoria própria

Seja K_n , $n \geq 4$, um grafo completo. Ao remover uma aresta $e = \{u, v\}$ de K_n , os vértices u e v não serão mais adjacentes, portanto, a distância de u a v passa a ser dois. Então serão necessárias no mínimo 2 cores para obtermos uma coloração arco-íris entre qualquer par de vértices de $K_n - e$, ou seja, $rc(K_n) < rc(K_n - e)$. Desta forma, podemos concluir a Proposição 8.

Proposição 8. K_n , $n > 1$, é arco-íris crítico.

A Figura 17 apresenta os grafos K_4 e $K_4 - e$ como exemplo para compreensão da Proposição 8.

Figura 17 – Ciclo K_4 e K_4 sem uma aresta e



Fonte: Autoria própria

Rao e Murali (2014) provam que se um grafo $P_m \times P_n$ for colorido utilizando a técnica apresentada no Teorema 3, então a remoção de qualquer aresta do grafo faz com que exista um par de vértices entre os quais não exista caminho arco-íris, como apresentado a seguir.

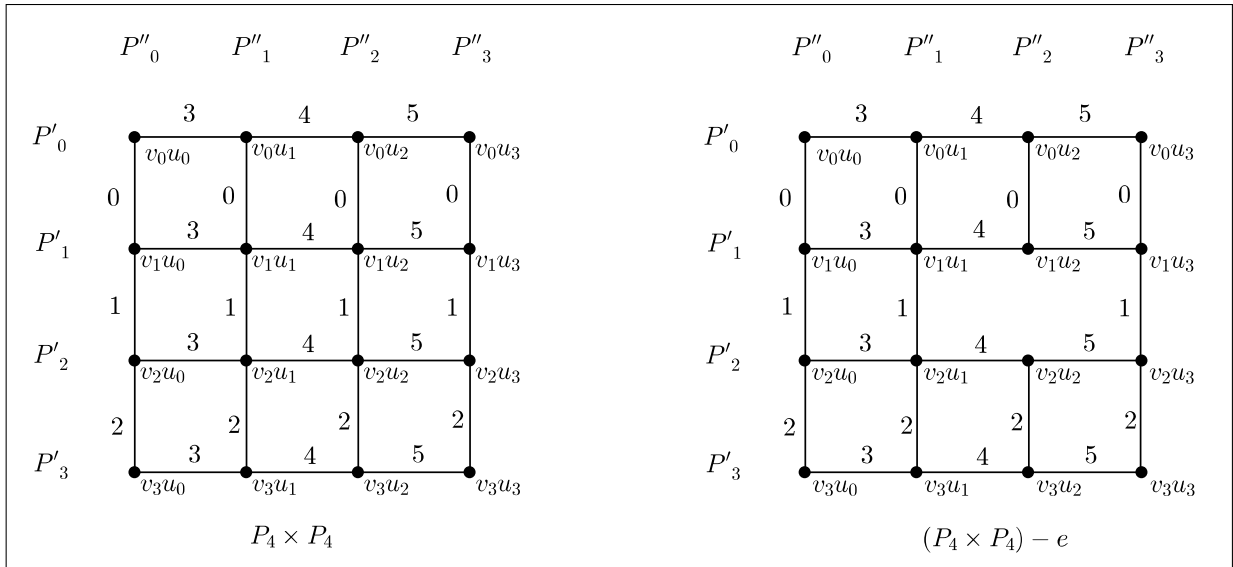
Teorema 5. (RAO; MURALI, 2014) *Seja $P_m \times P_n$, $m, n > 1$. Se $P_m \times P_n$ for colorido de acordo com o Teorema 3, então existe uma aresta e cuja remoção faz com que não exista caminho arco-íris entre seus vértices.*

Demonstração. Sejam os vértices de G denotados por $v_i u_j$, tal que $v_i \in V(P_m)$ e $u_j \in V(P_n)$, $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$.

Seja $e \in E(P_m \times P_n)$, $e = \{(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})\}$. A distância do vértice (v_i, u_j) ao vértice (v_i, u_{j+1}) é 1. Ao remover a aresta e , a distância entre os vértices (v_i, u_j) e (v_i, u_{j+1}) passa a ser 3. O conjunto de vértices, $\{(v_i, u_j), (v_i, u_{j+1}), (v_{i+1}, u_j), (v_{i+1}, u_{j+1})\}$, forma um ciclo C_4 e a remoção da aresta e neste ciclo resulta em um caminho P_3 . Como as arestas do grafo $P_m \times P_n$ foram coloridas de acordo com a técnica apresentada no Teorema 3, a remoção de e resulta na remoção do caminho arco-íris entre os vértices (v_i, u_j) e (v_i, u_{j+1}) . \square

A Figura 18 apresenta os grafos $P_4 \times P_4$, com a coloração do Teorema 3 e $(P_4 \times P_4) - e$ como exemplo para o Teorema 5. Para este exemplo, $e = \{(v_1, u_2)(v_2, u_2)\} \in E(P_4 \times P_4)$ e $\{(v_1, u_2), (v_2, u_2), (v_1, u_3), (v_2, u_3)\}$ formam o ciclo C_4 que tornam-se um caminho, com a remoção de e . Observe que não existe um caminho arco-íris entre os vértices (v_1, u_2) e (v_2, u_2) em $(P_4 \times P_4) - e$.

Figura 18 – Grafos $P_4 \times P_4$ com uma coloração de arestas arco-íris e grafo $(P_4 \times P_4) - e$ com uma coloração de arestas



Fonte: Autoria própria

Rao e Murali (2014) também provam se um grafo $C_m \times P_n$, $m > 3$ par e $n \geq 1$, está colorido de acordo com a técnica apresentada no Teorema 4, então existe uma aresta cuja remoção faz com que não exista caminho arco-íris entre seus vértices.

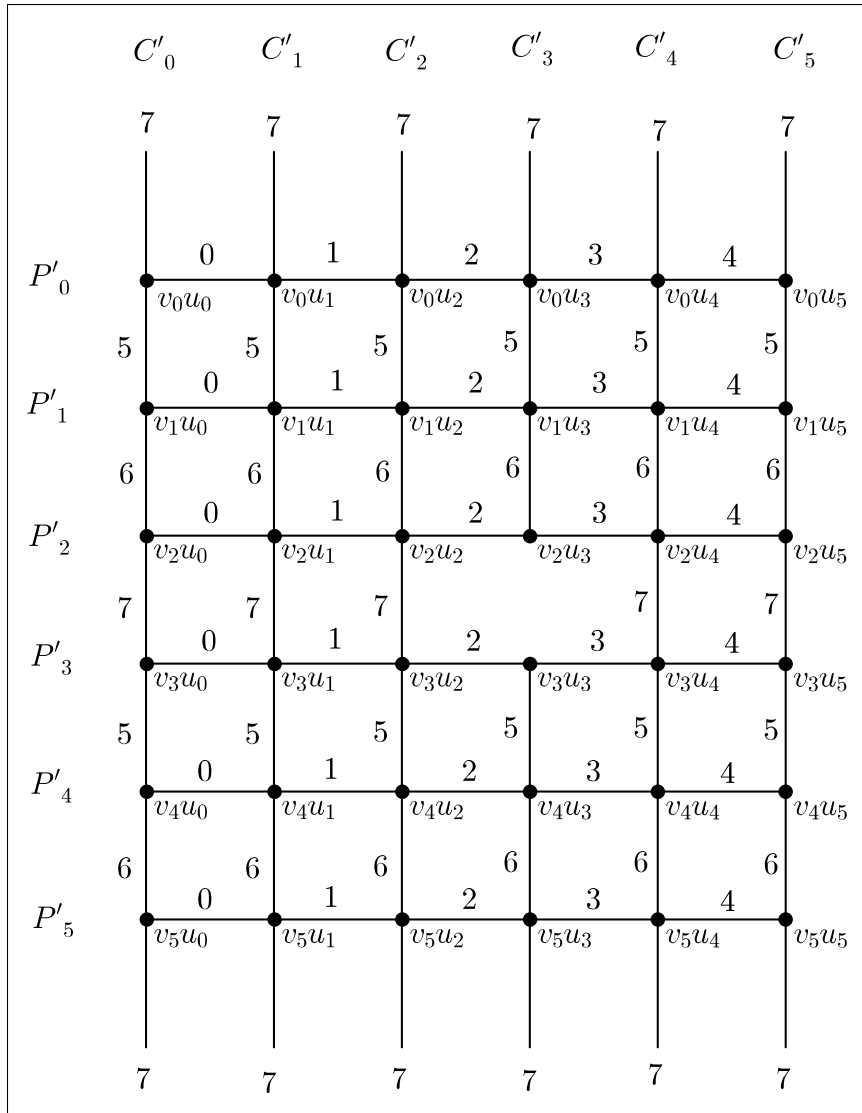
Teorema 6. (RAO; MURALI, 2014) *Se o grafo $C_m \times P_n$, $m \geq 3$, m inteiro, $n > 1$, está colorido de acordo com o Teorema 4, então existe uma aresta e cuja remoção faz com que não exista caminho arco-íris entre seus vértices.*

Demonstração. Sejam os vértices de $C_m \times P_n$ denotados por (v_i, u_j) , tal que $v_i \in V(C_m)$ e $u_j \in V(P_n)$, $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$.

Seja $e = \{(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})\}$. A distância do vértice (v_i, u_j) ao vértice (v_i, u_{j+1}) é 1. Ao remover a aresta e , a distância entre os vértices (v_i, u_j) e (v_i, u_{j+1}) passa a ser 3. O conjunto de vértices, $\{(v_i, u_j), (v_i, u_{j+1}), (v_{i+1}, u_j), (v_{i+1}, u_{j+1})\}$, forma um ciclo C_4 . A remoção da aresta e neste ciclo resulta em um caminho P_3 . Com a atribuição de cores apresentada no Teorema 4, a remoção de e resulta na remoção do único caminho arco-íris entre os vértices (v_i, u_j) e (v_i, u_{j+1}) . \square

A Figura 19 apresenta o grafo $(C_6 \times P_6) - e$ como exemplo para o Teorema 6. Para este exemplo, $e = \{(v_2, u_3)(v_3, u_3)\} \in E(C_6 \times P_6)$ e $\{(v_2, u_3), (v_3, u_3), (v_2, u_4), (v_3, u_4)\}$ é o conjunto de vértices que formam o ciclo C_4 e o caminho P_3 , com a remoção de e . Observe que, com a remoção de e , não existe um caminho arco-íris entre os vértices (v_1, u_2) e (v_2, u_2) em $(C_6 \times P_6) - e$.

Figura 19 – Grafo $(C_6 \times P_6) - e$ com uma coloração arco-íris usando a técnica do Teorema 4



Fonte: Autoria própria

3 RESULTADOS

Este capítulo será dividido em duas seções, sendo a Seção 3.1 composta pelos resultados referentes ao número de conexão arco-íris do produto cartesiano entre dois ciclos, entre um ciclo ímpar e um caminho e entre um ciclo ímpar e um grafo completo. A Seção 3.2 composta pelos resultados referentes a criticalidade de alguns grafos resultantes de produto cartesiano entre os grafos das classes dos grafos ciclos e caminhos.

3.1 NÚMERO DE CONEXÃO ARCO-ÍRIS EM PRODUTOS CARTESIANOS

Primeiro será apresentada a prova de que $rc(C_m \times P_n) = \lfloor m/2 \rfloor + n - 1$ quando m é ímpar.

É importante observar que os grafos $C_m \times P_n$ e $P_n \times C_m$ são isomorfos. Em seguida, determinamos $rc(C_m \times C_n)$ quando $m = n = 3$ e quando m e n têm paridades distintas.

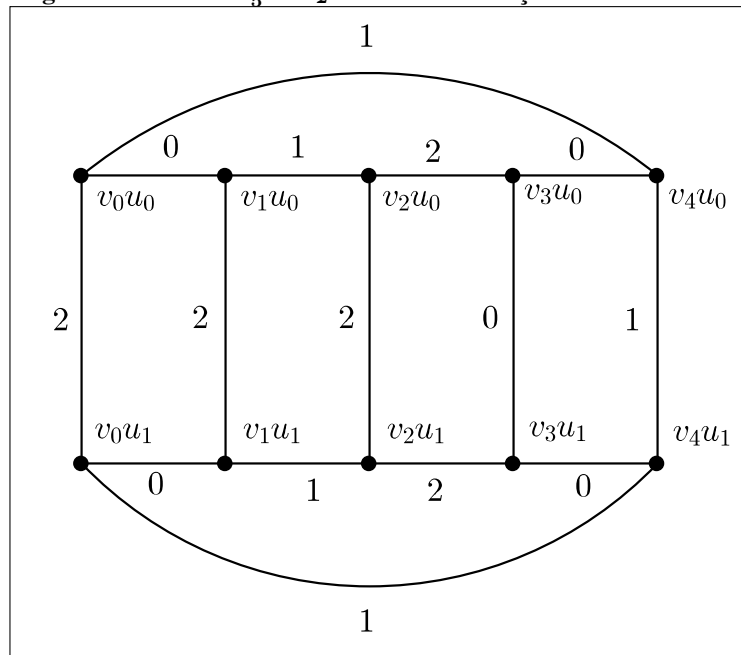
No caso em que m e n são ambos ímpares, sabe-se que $rc(C_m \times C_n) \geq \text{diam}(C_m \times C_n) = (m+n)/2 - 1$. Neste caso, apresentamos uma coloração arco-íris com $(m+n)/2$ cores.

Teorema 7. (ROCHA; ALMEIDA, 2017a) *Se $C_m \times P_n$ tem m ímpar e $n \geq 2$, então $rc(C_m \times P_n) = \lfloor m/2 \rfloor + n - 1$.*

Demonstração. Seja $C_m \times P_n$, tal que m é ímpar, $n \geq 2$, $V(C_m) = \{v_0, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ e $V(P_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$. Note que $\text{diam}(C_m \times P_n) = \lfloor m/2 \rfloor + n - 1$. Pela Proposição 1, $rc(C_m \times P_n) \geq \text{diam}(C_m \times P_n)$. Então é suficiente apresentar uma coloração arco-íris com $\lfloor m/2 \rfloor + n - 1$ cores.

Suponha $n = 2$. Sejam $C_j = (v_0, u_j)(v_1, u_j) \dots (v_{m-1}, u_j)(v_0, u_j)$, $j \in \{0, 1\}$, e $P_i = (v_i, u_0)(v_i, u_1)$, $0 \leq i < m$. Em cada ciclo C_j , $j \in \{0, 1\}$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ com cor i , $0 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$; pinte $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ com cor $i - \lfloor m/2 \rfloor$, $\lfloor m/2 \rfloor \leq i < m - 1$; e pinte $(v_{m-1}, u_j)(v_0, u_j)$ com cor $\lfloor m/2 \rfloor - 1$, $j \in \{0, 1\}$. Para cada caminho P_i , se $0 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$, pinte $(v_i, u_0)(v_i, u_1)$ com cor $\lfloor m/2 \rfloor$; e se $\lfloor m/2 \rfloor \leq i < m$, pinte $(v_i, u_0)(v_i, u_1)$ com cor $i - \lfloor m/2 \rfloor$. A Figura 20 apresenta o grafo $C_5 \times P_2$, como exemplo, com a coloração descrita neste parágrafo.

Figura 20 – Grafo $C_5 \times P_2$ com uma coloração arco-íris

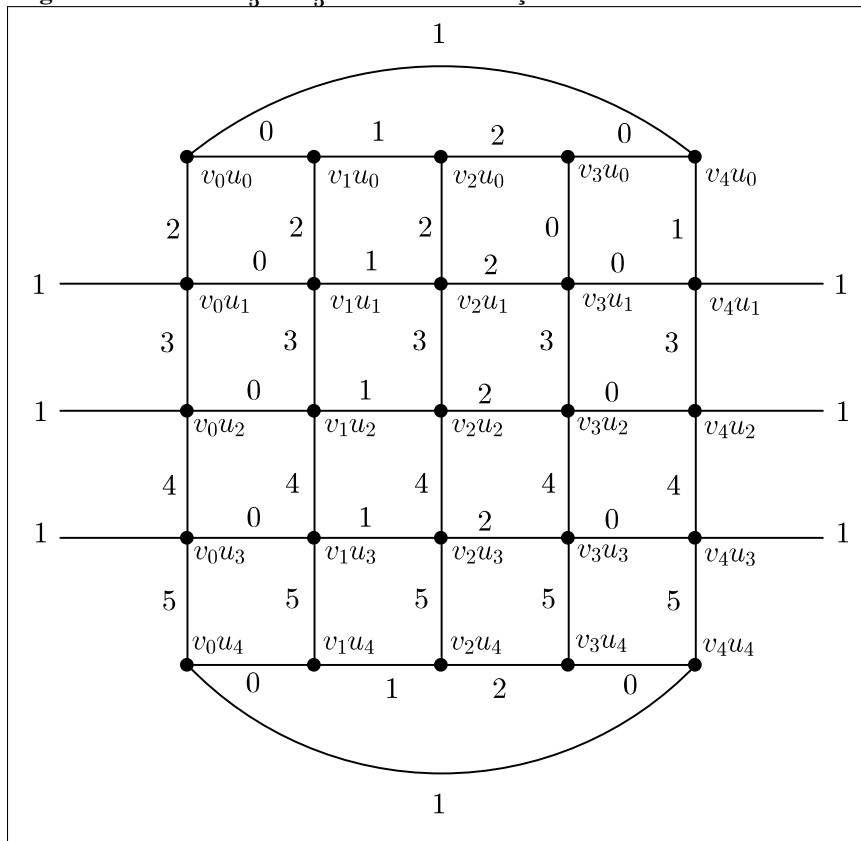


Fonte: Autoria própria

Vamos mostrar que existe um caminho arco-íris entre cada par de vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l) , $0 \leq i, k < m$ e $0 \leq j, l \leq 1$. Se $j = l$, então o caminho arco-íris é o menor caminho entre (v_i, u_j) e (v_k, u_l) no ciclo C_j . Então, suponha $j \neq l$ e, sem perda de generalidade, seja $j = 0$ e $l = 1$. Considere as operações aritméticas módulo m . Seja P' o menor caminho de (v_i, u_0) a (v_k, u_0) em C_0 . Se $(v_{i-1}, u_0) \in P'$, então $(v_i, u_0)(v_i, u_1)$ concatenado ao menor caminho de (v_i, u_1) a (v_k, u_1) em C_1 é um caminho arco-íris. Senão, P' concatenado a $(v_k, u_0)(v_k, u_1)$ é um caminho arco-íris.

Agora, suponha $n > 2$. Pinte as arestas dos ciclos C_j , $0 \leq j < n$, e as arestas $(v_i, u_0)(v_i, u_1)$, $0 \leq i < m$, da mesma forma que no caso $n = 2$. Seja H o subgrafo de G já colorido. Resta colorir as arestas dos caminhos $P'_i = (v_i, u_1)(v_i, u_2) \dots (v_i, u_{n-1})$, $0 \leq i < m$. Para cada caminho P'_i , $0 \leq i < m$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$, $1 \leq j < n - 1$, com cor $j + \lfloor m/2 \rfloor$. A Figura 21 apresenta o grafo $C_5 \times P_5$, como exemplo, com a coloração descrita neste parágrafo.

Figura 21 – Grafo $C_5 \times P_5$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Observe que cada caminho P'_i , $0 \leq i < m$, é arco-íris e não contém cores usadas nas arestas de H . Então cada par de vértices em G tem um caminho arco-íris. De fato, qualquer par de vértices contido em $C_0 \cup C_1$ possui um caminho arco-íris já apresentado no caso $n = 2$. Considere o par de vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l) , tal que $j \geq 1$ e $l > 1$. Então, o menor caminho entre (v_i, u_j) e (v_k, u_j) no ciclo C_j é arco-íris, e o caminho de (v_k, u_j) a (v_k, u_l) em P'_k é arco-íris por construção. Agora, considere um caminho entre (v_i, u_0) e (v_k, u_1) , $l > 1$. O caminho arco-íris de (v_i, u_0) a (v_k, u_1) , apresentado no caso $n = 2$, concatenado ao caminho de (v_k, u_1) a (v_k, u_l) , contido em P'_k , é arco-íris. Portanto, $rc(C_m \times P_n) = \lfloor m/2 \rfloor + n - 1$. \square

Teorema 8. (ROCHA; ALMEIDA, 2017a) *Seja $C_m \times C_n$ um grafo com m ímpar.*

$$rc(C_m \times C_n) \begin{cases} = 2, & \text{se } m = n = 3; \\ = \lfloor n/2 \rfloor + 1, & \text{se } m = 3 \text{ e } n > 3; \\ = (m-1)/2 + n/2, & \text{se } m, n > 3 \text{ e } n \text{ é par}; \\ \leq (m+n)/2, & \text{se } m, n > 3 \text{ e } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Demonstração. Considere $C_m \times C_n$ um grafo com m ímpar, $V(C_m) = \{v_0, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ e $V(C_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$. Sejam $X_j = (v_0, u_j)(v_1, u_j) \dots (v_{m-1}, u_j)(v_0, u_j)$, $0 \leq j < n$, e $Y_i = (v_i, u_0)(v_i, u_1) \dots (v_i, u_{n-1})(v_i, u_0)$, $0 \leq i < m$.

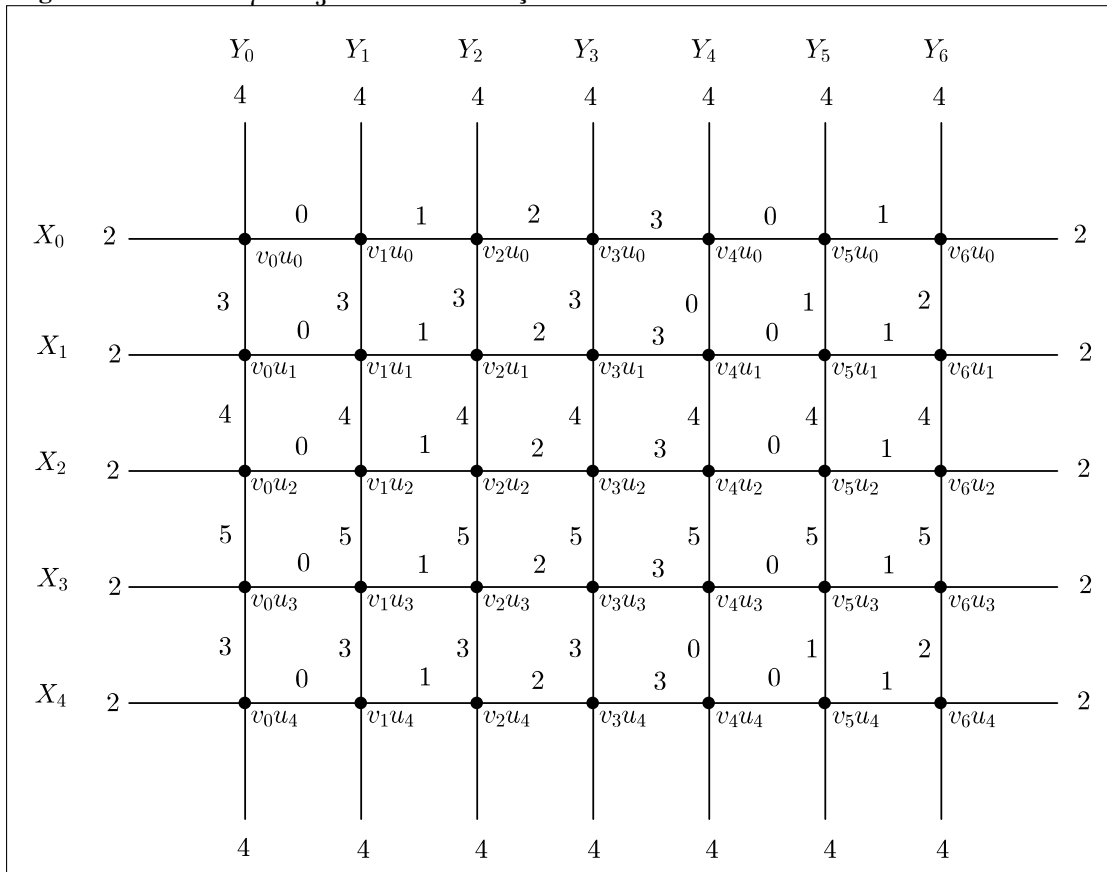
Se $m = n = 3$, pinte as arestas de cada ciclo X_j com cor 0, $0 \leq j < 3$, e pinte as arestas de cada ciclo Y_i com cor 1, $0 \leq i < m$. Por inspeção, é possível verificar que trata-se de

uma coloração arco-íris. Resta considerar os casos em que pelo menos um entre m e n é maior que 3.

Se $m = 3$ e $n > 3$, pinte cada ciclo Y_i , $0 \leq i < m$, da seguinte forma. Se $0 \leq j < \lceil n/2 \rceil$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor j . Se $\lceil n/2 \rceil \leq j < n - 1$, pinte $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $j - \lceil n/2 \rceil$. Pinte $(v_i, u_0)(v_i, u_{n-1})$ com cor $\lfloor n/2 \rfloor - 1$. Pinte as arestas de cada ciclo X_j , $0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$, com cor $\lfloor n/2 \rfloor$; e pinte as arestas de cada ciclo X_j , $\lfloor n/2 \rfloor < j < n$, com cor $j - \lceil n/2 \rceil$. Observe que os vértices de quaisquer dois ciclos, Y_p e Y_q , $0 \leq p < q \leq 2$, induzem um subgrafo isomorfo aos $C_n \times P_2$ e, portanto, os mesmos argumentos usados na prova do primeiro caso do Teorema 7 garantem que esta é uma coloração arco-íris.

Então, considere $m, n > 3$. Pinte cada ciclo X_j , $0 \leq j < n$, da seguinte forma. Se $0 \leq i < \lceil m/2 \rceil$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ com cor i . Se $\lceil m/2 \rceil \leq i < m - 1$, pinte $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ com cor $i - \lceil m/2 \rceil$. Pinte $(v_0, u_j)(v_{m-1}, u_j)$ com cor $\lfloor m/2 \rfloor - 1$. Pinte as arestas $(v_i, u_j)(v_i, u_{(j+1) \bmod n}) \in Y_i$, $0 \leq i < m$, da seguinte forma. Se $0 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$ e $j \equiv 0 \pmod{\lceil n/2 \rceil}$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $\lfloor m/2 \rfloor$. Se $\lceil m/2 \rceil \leq i < m$ e $j \equiv 0 \pmod{\lceil n/2 \rceil}$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $i - \lceil m/2 \rceil$. Se $j \not\equiv 0 \pmod{\lceil n/2 \rceil}$ e $1 \leq j < \lceil n/2 \rceil$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ com cor $j + \lfloor m/2 \rfloor$, $0 \leq i < m$. Se $j \not\equiv 0 \pmod{\lceil n/2 \rceil}$ e $\lceil n/2 \rceil < j < n$, pinte a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{(j+1) \bmod n})$ com cor $j + \lfloor m/2 \rfloor - \lceil n/2 \rceil$, $0 \leq i < m$. A Figura 22 apresenta o grafo $C_7 \times C_5$, como exemplo, com a coloração apresentada neste parágrafo.

Figura 22 – Grafo $C_7 \times C_5$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Considere um par de vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l) , $0 \leq i, k < m$ e $0 \leq j, l < n$. Seja H o subgrafo induzido pelas arestas coloridas com as cores do conjunto $\{0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor\}$. Se (v_i, u_j) e (v_k, u_l) pertencem à mesma componente conexa em H , então existe um caminho arco-íris entre esses vértices, como provado no Teorema 7. Então, suponha que (v_i, u_j) e (v_k, u_l) pertencem a componentes conexas distintas em H , O_1 e O_2 , respectivamente. Existe em O_1 um caminho arco-íris P entre (v_i, u_j) e (v_k, u_j) . Além disso, se O_1 é um subgrafo isomorfo a $C_m \times P_2$, então existe em O_1 um caminho arco-íris P' entre (v_i, u_j) e (v_k, u_t) , onde ou $t = j - 1$ ou $t = j + 1$. Como P e P' são caminhos em O_1 , ambos estão coloridos com cores do conjunto $\{0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor\}$. Por construção, em $C_m \times C_n$, ou existe um caminho arco-íris entre (v_k, u_j) e (v_k, u_l) ou existe um caminho arco-íris entre (v_k, u_j) e (v_k, u_t) , com cores do conjunto $\{\lfloor m/2 \rfloor, \lfloor m/2 \rfloor + 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil - 1\}$. Portanto, existe um caminho arco-íris entre (v_i, u_j) e (v_k, u_l) .

Para $m, n > 3$, foram usadas $\lfloor m/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$ cores. Logo, se n é par, $\text{diam}(C_m \times C_n) = (m-1)/2 + n/2 \leq rc(C_m \times C_n) \leq (m-1)/2 + n/2$. Portanto, $rc(C_m \times C_n) = (m-1)/2 + n/2$. Quando n é ímpar, $\text{diam}(C_m \times C_n) = (m-1)/2 + (n-1)/2 \leq rc(C_m \times C_n) \leq (m-1)/2 + (n+1)/2 = (m+n)/2$. \square

Com os resultados dos Teoremas 1, 7 e 8, fica determinado o número de conexão arco-íris para os grafos resultantes de produtos cartesianos entre dois caminhos, entre ciclos e caminhos e entre dois ciclos, com exceção dos grafos $C_m \times C_n$ com m e n ímpares, $m, n > 3$. Neste subconjunto, apresentamos um limite superior para o número de conexão arco-íris que é no máximo uma unidade maior que o ótimo.

Os resultados apresentados nos Teoremas 7 e 8 foram publicados nos Anais do XXXVII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação ??.

Teorema 9. Se $C_m \times K_n$ tem $m \geq 5$ ímpar e $n \geq 3$, então $rc(C_m \times K_n) = \lfloor m/2 \rfloor + 1$.

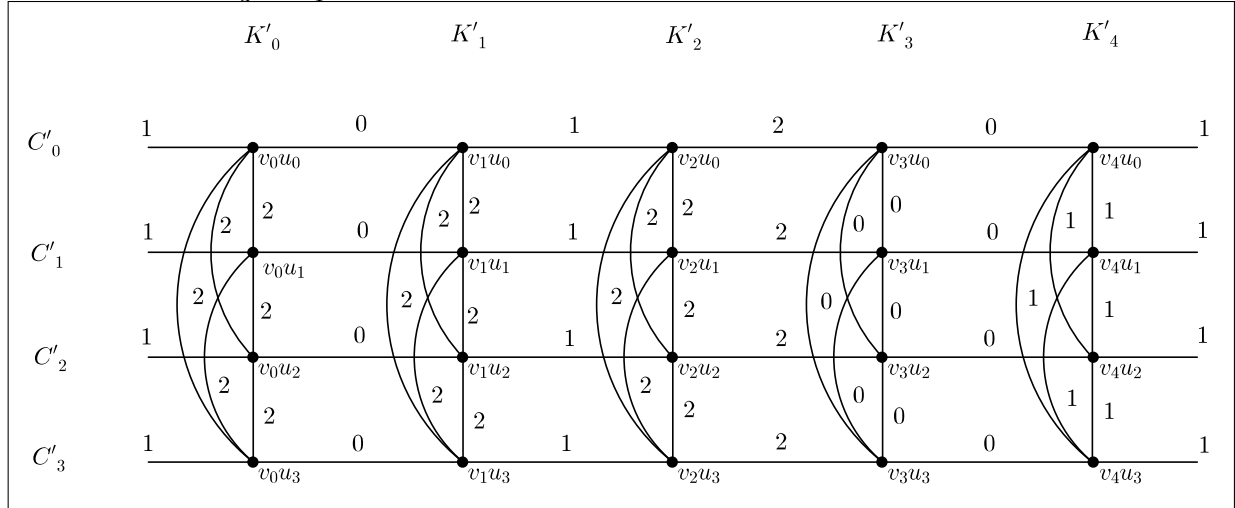
Demonstração. Considere $C_m \times K_n$, $m \geq 5$, ímpar e $n \geq 3$, $V(C_m) = \{v_0, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ e $V(K_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$. Sejam $C'_j = (v_0, u_j)(v_1, u_j) \dots (v_{m-1}, u_j)(v_0, u_j)$, $0 \leq j < n$, e K'_i o subgrafo induzido por $\{(v_i, u_0), (v_i, u_1) \dots (v_i, u_{n-1})\}$, $0 \leq i < m$.

Seja $m = 3$ e $n \geq 3$, ímpar, pelo Teorema 7, já está provado. Considere os casos que $m > 3$ $n \geq 5$, m ímpar, vamos colorir o grafo utilizando $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ cores.

Note que o $\text{diam}(C_m \times K_n) = \lfloor m/2 \rfloor + 1$, logo, para uma coloração arco-íris do grafo são necessárias no mínimo $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ cores. Sejam $C'_j = (v_0, u_j)(v_1, u_j) \dots (v_{m-1}, u_j)$, $0 \leq j < n$. Pinte as arestas de C'_j da seguinte maneira, se $0 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$, então a aresta $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ recebe cor i , se $\lfloor m/2 \rfloor < i < m - 1$, então a aresta $(v_i, u_j)(v_{i+1}, u_j)$ recebe cor $i - \lfloor m/2 \rfloor$. Pinte a aresta $(v_{m-1}, u_j)(v_0, u_j)$ com cor $m - 1 - \lfloor m/2 \rfloor$. Sejam K'_i os subgrafos do $C_m \times K_n$ induzidos pelos conjuntos de vértices $\{(v_i, u_j), (v_i, u_{j+1}), \dots, (v_i, u_{n-1})\}$, $0 \leq j < m$. Se $0 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$, pinte as arestas de K'_i com cor $\lfloor m/2 \rfloor$, para $\lfloor m/2 \rfloor < i < m - 1$, pinte as

arestas de K_i com cor i . A Figura 23 apresenta o grafo $C_5 \times K_4$, como exemplo, com a coloração descrita neste parágrafo.

Figura 23 – Grafo $C_5 \times K_4$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Agora vamos mostrar que existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices de $C_m \times K_n$. Sejam (v_p, u_q) e (v_r, u_s) dois vértices de $C_m \times K_n$. Se $p = r$, sem perda de generalidade, podemos assumir que $p > r$. Então o caminho arco-íris de (v_p, u_q) a (v_r, u_s) é o menor caminho entre (v_p, u_q) e (v_r, u_s) em $C_m \times K_n$. Se $q = s$, sem perda de generalidade, $q > s$, estes vértices pertencem a um K'_i , portanto, estão a distância 1, logo, o caminho arco-íris de (v_p, u_q) a (v_r, u_s) é composto de uma única aresta e é arco-íris. Resta mostrar o caminho arco-íris de (v_p, u_q) a (v_r, u_s) quando $p \neq r$ e $q \neq s$. Se $0 \leq q \leq \lfloor m/2 \rfloor$ o caminho arco-íris de (v_p, u_q) a (v_r, u_s) é o caminho de (v_p, u_q) a (v_r, u_q) em K'_q concatenado com o menor caminho entre (v_r, u_q) e (v_r, u_s) em C'_s . Se $0 \leq q \leq \lfloor m/2 \rfloor$ o caminho arco-íris de (v_p, u_q) a (v_r, u_s) é o menor caminho entre (v_p, u_q) e (v_p, u_s) em C'_s concatenado com caminho (v_p, u_s) a (v_r, u_s) em K'_r . Portanto, $rc(C_m \times K_n) = \lfloor m/2 \rfloor + 1$. \square

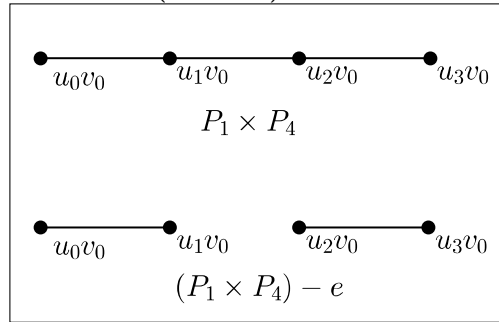
3.2 CRITICALIDADE ARCO-ÍRIS EM PRODUTOS CARTESIANOS

Esta seção apresenta resultados sobre a criticalidade dos produtos cartesianos entre dois caminhos e entre um ciclo e um caminho. Os resultados estão divididos em dois teoremas, onde o primeiro garante que $P_m \times P_n$ é crítico apenas quando é um caminho P_n , $n > 1$, ou um C_4 ; e o segundo teorema garante que grafos $C_m \times P_n$ com m par e $n > 1$ não são arco-íris críticos. É importante observar que $P_m \times P_n$ e $P_n \times P_m$ são grafos isomorfos, bem como $C_m \times P_n$ e $P_n \times C_m$.

Teorema 10. (ROCHA; ALMEIDA, 2017b) *Sejam m e n inteiros positivos. O grafo $G = P_m \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, é um grafo P_n , $n > 1$ ou um C_4 .*

Demonstração. Primeiro, observe que o grafo P_1 não possui arestas e em todo caminho P_n tal que $n > 1$, existe uma aresta cuja a remoção desconecta o grafo. Por definição, o número de conexão arco-íris do grafo desconexo é infinito. Logo, quando $n > 1$, P_n é arco-íris crítico. A Figura 24 apresenta, como exemplo, os grafos $P_1 \times P_4$ e $(P_1 \times P_4) - e$, onde a remoção de e desconecta o grafo.

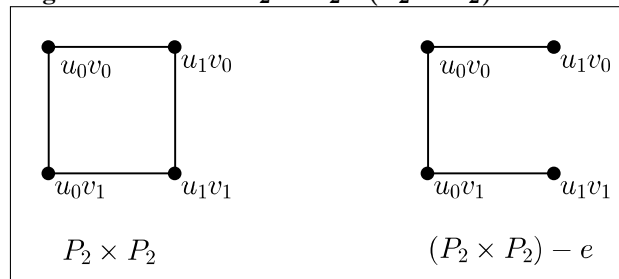
Figura 24 – Grafos $P_1 \times P_4$ e $(P_1 \times P_4) - e$



Fonte: Autoria própria

O grafo $P_2 \times P_2$ é um ciclo com quatro vértices e, pelo Teorema 3, $rc(P_2 \times P_2) = rc(C_4) = 2$. O grafo $P_2 \times P_2$ sem qualquer de suas arestas é um caminho P_4 e pelo Teorema 2 tem $rc(P_4) = 3$. A Figura 25 apresenta, como exemplo, o grafo $P_2 \times P_2$ seguido do grafo $(P_2 \times P_2) - e$, mostrando que este grafo é arco-íris crítico.

Figura 25 – Grafos $P_2 \times P_2$ e $(P_2 \times P_2) - e$

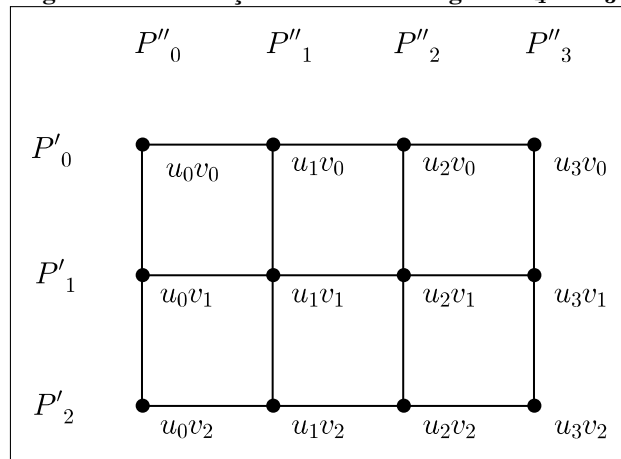


Fonte: Autoria própria

Para todos os outros casos, é suficiente mostrar que existe uma aresta e no grafo $P_m \times P_n$ cuja remoção não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo. Sem perda de generalidade, suponha que $m \geq n \geq 2$ e $P_m \times P_n$ não é um C_4 .

Para identificação dos vértices do produto cartesiano, suponha que os vértices de P_m estão rotulados, u_0, u_1, \dots, u_{m-1} , de forma que u_i é adjacente a u_{i+1} no P_m , $0 \leq i < m - 1$. Similarmente, suponha que os vértices de P_n estão rotulados, v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , e v_i é adjacente a v_{i+1} , $0 \leq i < n - 1$. Então, cada vértice do $P_m \times P_n$ é um par (u_i, v_j) , $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$. A Figura 26 apresenta os vértices do grafo $P_4 \times P_3$ rotulados.

Figura 26 – Rotulação dos vértices do grafo $P_4 \times P_3$



Fonte: Autoria própria

No grafo $P_m \times P_n$, definimos os subgrafos P'_i e P''_i da seguinte forma: $P'_i = (u_0, v_i)(u_1, v_i) \dots (u_{m-1}, v_i)$, $0 \leq i < n$ e $P''_i = (u_i, v_0)(u_i, v_1) \dots (u_i, v_{n-1})$, $0 \leq i < m$.

Vamos mostrar que a remoção de uma aresta $e = (u_k, v_f)(u_k, v_{f+1})$ em um caminho P''_k , $0 \leq k < m$, $0 \leq f < n - 1$, não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo.

Pinte os caminhos P''_i , $0 \leq i < m$, de forma que cada aresta $(u_i, v_j)(u_i, v_{j+1})$ receba cor j , $0 \leq j < n - 1$. Pinte os caminhos P'_i de forma que cada aresta $(u_j, v_i)(u_{j+1}, v_i)$ receba a cor $n - 1 + [(i + j) \bmod (m - 1)]$. Observe que qualquer caminho P'_i ou P''_j é arco-íris, $0 \leq i < n$, $0 \leq j < m$. Além disso, o conjunto das cores usadas em qualquer caminho P'_i é disjunto do conjunto das cores usadas em qualquer caminho P''_j , $0 \leq i < n$, $0 \leq j < m$. Por fim, observe que as arestas $(u_a, v_i)(u_a, v_{i+1})$ e $(u_b, v_i)(u_b, v_{i+1})$ estão coloridas com a mesma cor, para quaisquer i , a e b , $0 \leq i < n - 1$, $0 \leq a, b < m$.

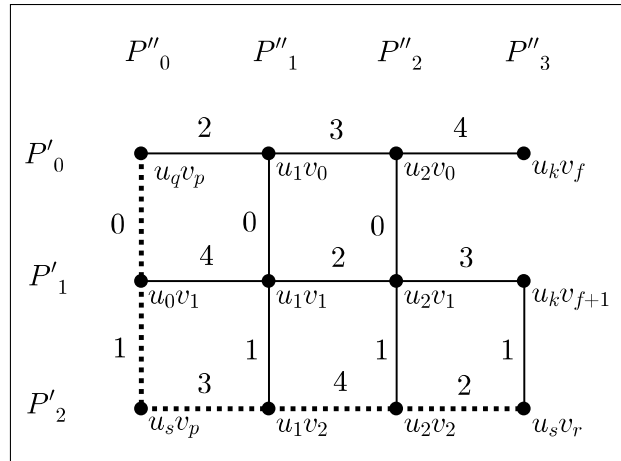
Resta provar que entre qualquer par de vértices (u_q, v_p) e (u_s, v_r) , $0 \leq q, s < m$ e $0 \leq p, r < n$, existe um caminho arco-íris no grafo $(P_m \times P_n) - e$, onde $e = (u_k, v_f)(u_k, v_{f+1})$.

Quando $p \neq r$ e $q \neq s$, pelo menos um dos seguintes caminhos arco-íris existe:

1. caminho de (u_q, v_p) a (u_s, v_p) em P'_p concatenado com o caminho de (u_s, v_p) a (u_s, v_r) em P''_s ;
2. ou o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_r) em P''_q concatenado com o caminho de (u_q, v_r) a (u_s, v_r) em P'_r .

A Figura 27 apresenta, como exemplo, o grafo $P_4 \times P_3$ com uma aresta removida, onde as arestas pontilhadas indicam o caminho arco-íris. Observe que, neste caso, o caminho arco-íris descrito no item (2) deixou de existir quando a aresta foi removida. Entretanto o caminho descrito no item (1) ainda existe e é apresentado nesse exemplo.

Figura 27 – Grafo $(P_3 \times P_4)$ – e com caminho arco-íris

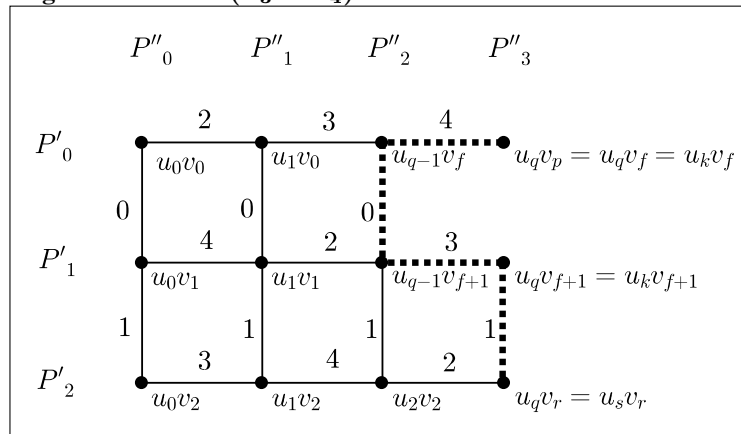


Fonte: Autoria própria

Se $q = s$, suponha sem perda de generalidade que $p < r$. Se $k \neq q$ ou se $f \notin [p, r - 1]$, então o caminho arco-íris é o caminho entre (u_q, v_p) e (u_q, v_r) em P''_q . Por outro lado, se $k = q$ e $f \in [p, r - 1]$, o caminho arco-íris entre (u_q, v_p) e (u_q, v_r) depende do valor de q . Quando $q > 0$, um caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_f) em P''_q , concatenado com o caminho $(u_q, v_f)(u_{q-1}, v_f)(u_{q-1}, v_{f+1})(u_q, v_{f+1})$, concatenado com o caminho de (u_q, v_{f+1}) a (u_q, v_r) em P''_q . Quando $q = 0$, um caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_f) em P''_q , concatenado com o caminho $(u_q, v_f)(u_{q+1}, v_f)(u_{q+1}, v_{f+1})(u_q, v_{f+1})$, concatenado com o caminho de (u_q, v_{f+1}) a (u_q, v_r) em P''_q .

A Figura 28 apresenta, como exemplo, o grafo $P_4 \times P_2$ com uma aresta removida, onde as arestas pontilhadas indicam o caminho arco-íris entre os vértices (u_q, v_p) e (u_s, v_r) , onde $q > 0$.

Figura 28 – Grafo $(P_3 \times P_4)$ – e com caminho arco-íris



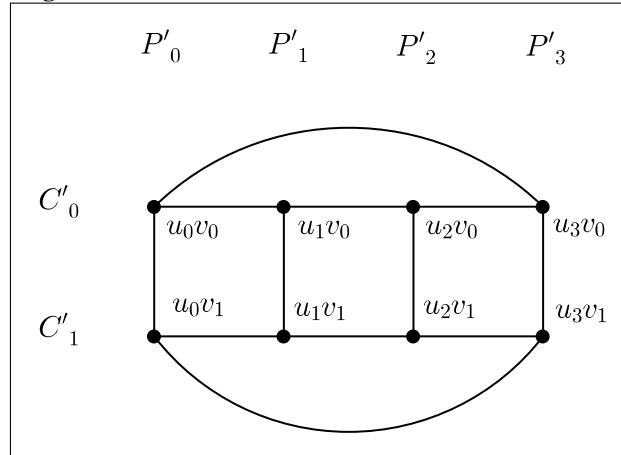
Fonte: Autoria própria

Se $p = r$, suponha sem perda de generalidade que $q < s$. O caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_s, v_p) em P'_p . □

Teorema 11. (ROCHA; ALMEIDA, 2017b) *Sejam m e n inteiros positivos. O grafo $C_m \times P_n$, m par e $n \geq 2$, não é arco-íris crítico.*

Demonstração. Considere o grafo $C_m \times P_n$, onde C_m é um ciclo com m par e P_n é um caminho $n \geq 2$. Suponha os vértices de C_m rotulados sequencialmente, u_0, u_1, \dots, u_{m-1} , e os vértices de P_n também rotulados sequencialmente, v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . A Figura 29 apresenta, como exemplo, o produto cartesiano $C_4 \times P_2$ com seus vértices rotulados.

Figura 29 – Grafo $C_4 \times P_2$ com vértices rotulados



Fonte: Autoria própria

Denotamos por C'_i os subgrafos de $C_m \times P_n$ dados por $(u_0, v_i)(u_1, v_i) \dots (u_{m-1}, v_i)(u_0, v_i)$, $0 \leq i < n$. Denotamos por P'_i os subgrafos de $C_m \times P_n$ dados por $(u_i, v_0)(u_i, v_1) \dots (u_i, v_{n-1})$, $0 \leq i < m$.

Primeiro, vamos colorir o grafo $C_m \times P_n$. Pinte C'_i , $0 \leq i < n$, i par, da seguinte forma. Se $0 \leq j < m-1$, pinte a aresta $(u_j, v_i)(u_{j+1}, v_i)$ com a cor $j \bmod m/2$. Pinte $(u_{m-1}, v_i)(u_0, v_i)$ com a cor $m/2 - 1$.

Pinte C'_i , $0 \leq i < n$, i ímpar, da seguinte forma. Se $0 \leq j < m-1$, pinte a aresta $(u_j, v_i)(u_{j+1}, v_i)$ com a cor $(j+1) \bmod m/2$. Pinte $(u_{m-1}, v_i)(u_0, v_i)$ com a cor 0.

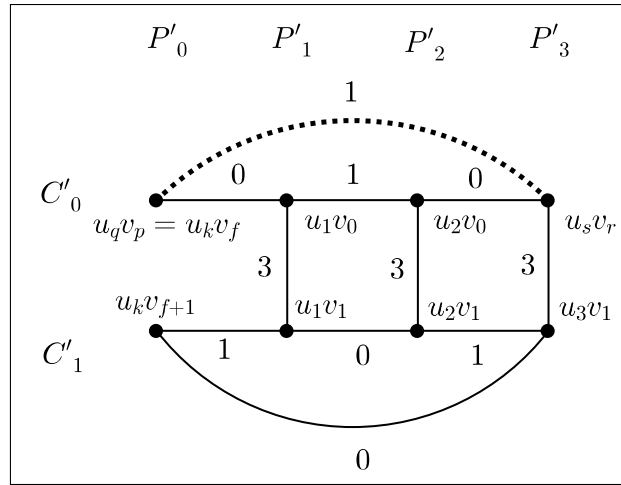
Pinte cada aresta $(u_i, v_j)(u_i, v_{j+1}) \in P'_i$, $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n-1$, com cor $m/2 + j$.

Observe que a coloração de cada ciclo C'_i e cada caminho P'_j é arco-íris, $0 \leq i < n$ e $0 \leq j < m$. Para garantir que $C_m \times P_n$ não é arco-íris crítico, basta mostrar que existe uma aresta cuja remoção não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo. Então, vamos considerar o grafo $(C_m \times P_n) - e$, onde $e = (u_k, v_f)(u_k, v_{f+1})$, $0 \leq k < m$ e $0 \leq f < n-1$. Mostraremos que a remoção da aresta e não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo $C_m \times P_n$.

Sejam (u_q, v_p) e (u_s, v_r) dois vértices quaisquer de $C_m \times P_n$. Vamos apresentar um caminho arco-íris entre (u_q, v_p) e (u_s, v_r) no grafo $(C_m \times P_n) - e$.

Se $p = r$, então o caminho arco-íris entre (u_q, v_p) e (u_s, v_r) é o menor caminho entre esses vértices no subgrafo C'_p . A Figura 30 apresenta, como exemplo, o produto cartesiano $(C_4 \times P_2) - e$ para este caso.

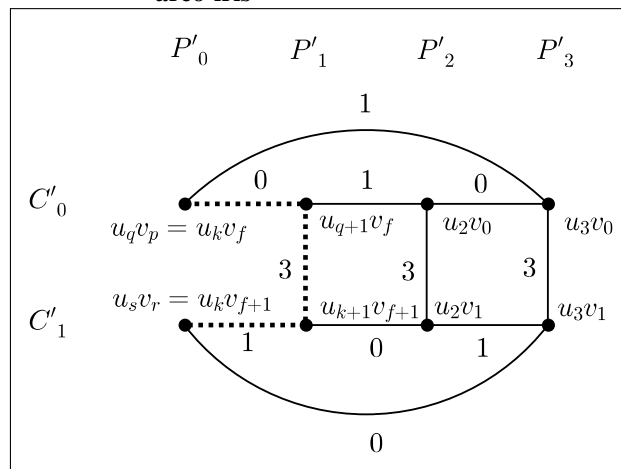
Figura 30 – Grafo $(C_4 \times P_2)$ – e com caminho arco-íris



Fonte: Autoria própria

Se $q = s$, suponha sem perda de generalidade que $p < r$. Se $k \neq q$ ou se $f \notin [p, r - 1]$, então o caminho arco-íris é o caminho entre (u_q, v_p) e (u_q, v_r) em P'_q . Por outro lado, se $k = q$ e $f \in [p, r - 1]$, o caminho arco-íris entre (u_q, v_p) e (u_q, v_r) depende do valor de q . Quando $q > 0$, um caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_f) em P'_q , concatenado com o caminho $(u_q, v_f)(u_{q-1}, v_f)(u_{q-1}, v_{f+1})(u_q, v_{f+1})$, concatenado com o caminho de (u_q, v_{f+1}) a (u_q, v_r) em P'_q . Quando $q = 0$, um caminho arco-íris é o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_f) em P'_q , concatenado com o caminho $(u_q, v_f)(u_{q+1}, v_f)(u_{q+1}, v_{f+1})(u_q, v_{f+1})$, concatenado com o caminho de (u_q, v_{f+1}) a (u_q, v_r) em P'_q . A Figura 31 apresenta, como exemplo, o produto cartesiano $C_4 \times P_2$ com uma aresta removida, onde as arestas pontilhadas indicam o caminho arco-íris entre os vértices $u_q v_p$ e $u_s v_r$, onde $q = s = 0$, $k = q$ e $f \in [p, r - 1]$.

Figura 31 – Grafo $(C_4 \times P_2)$ – e com caminho arco-íris



Fonte: Autoria própria

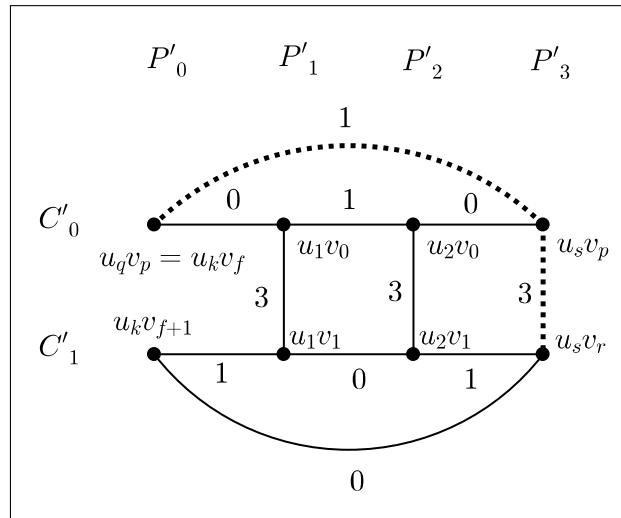
Se $p \neq r$ e $q \neq s$, então um dos seguintes caminhos arco-íris existe:

1. o menor caminho entre (u_q, v_p) a (u_s, v_p) em C'_p concatenado com o caminho de (u_s, v_p) a (u_s, v_r) em P'_s ;

2. ou o caminho de (u_q, v_p) a (u_q, v_r) em P'_q concatenado com o menor caminho de (u_q, v_r) a (u_s, v_r) em C'_r .

A Figura 32 apresenta, como exemplo, o grafo $C_4 \times P_2$ com uma aresta removida, onde as arestas pontilhadas indicam o caminho arco-íris. Observe que neste caso, o caminho arco-íris descrito no item (2) deixou de existir quando a aresta foi removida. Entretanto o caminho descrito no item (1) ainda existe e é representado nesse exemplo.

Figura 32 – Grafo $(C_4 \times P_2)$ – e com caminho arco-íris



Fonte: Autoria própria

Como existe pelo menos uma aresta em $C_m \times P_n$ que quando removida não altera o número de conexão arco-íris do grafo, conclui-se que o grafo $C_m \times P_n$ não é arco-íris crítico. \square

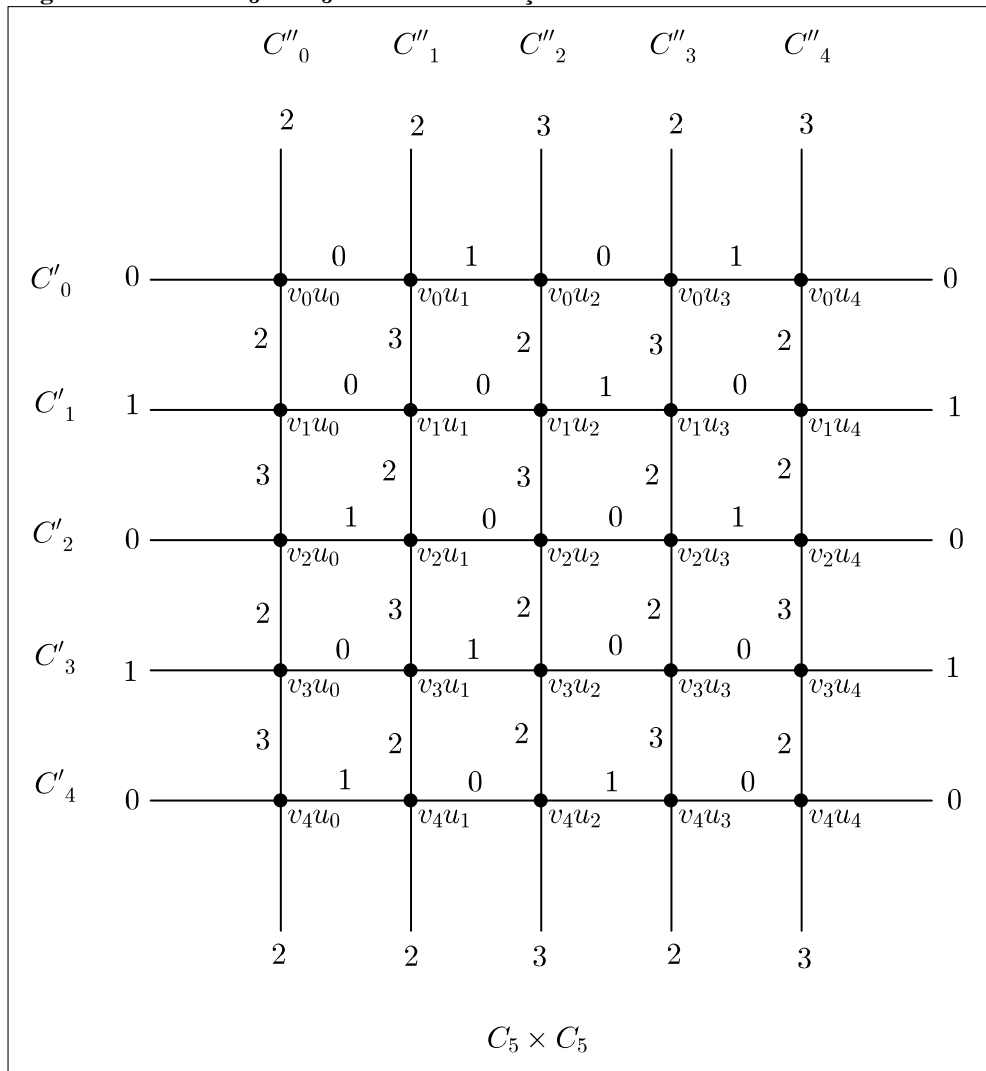
Os resultados apresentados nos Teoremas 10 e 11 foram publicados nos Anais do II Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais ??.

3.3 CONJECTURA

Quando $G = C_m \times C_n$, $m, n > 3$, ímpares, melhoramos o limitante superior do número de conexão arco-íris deste produto cartesiano, apresentado por Li e Sun (2010). Quando $m = n$, temos fortes evidências de que $rc(C_m \times C_m) = 2\lfloor m/2 \rfloor$. A Figura 33, por exemplo, apresenta o Grafo $C_5 \times C_5$ com uma coloração arco-íris, porém, não conseguimos formalizar matematicamente a demonstração de que existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices do grafo.

Observe que o grafo da Figura 33 foi colorido de tal forma que houvesse deslocamento nas cores das arestas tanto dos subgrafos C'_i quanto dos subgrafos de C''_i , $0 \leq i < m, n$. Este padrão também pode ser aplicado para $C_m \times C_m$ com $m > 5$. A Figura 34 apresenta, como

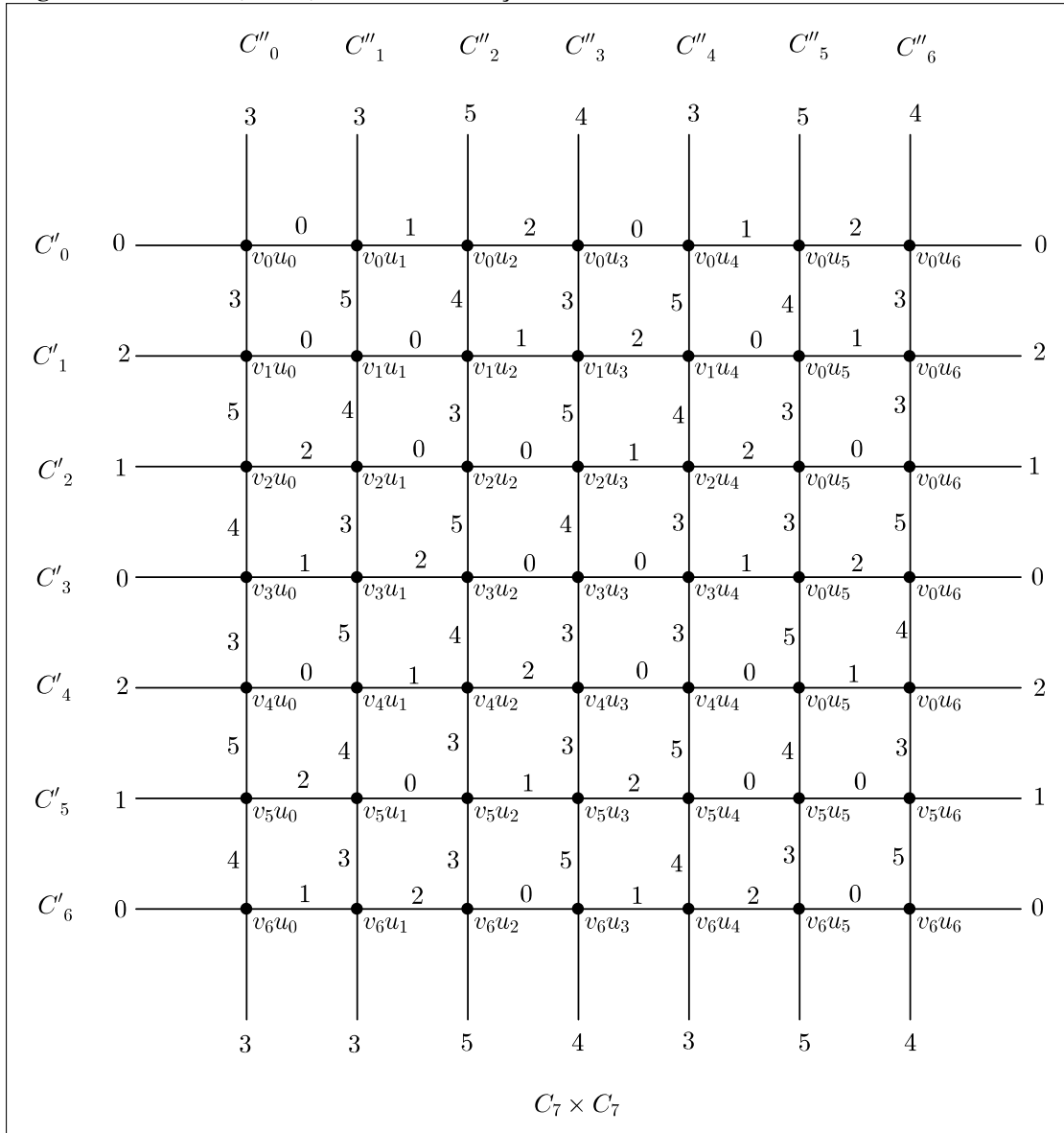
Figura 33 – Grafo $C_5 \times C_5$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

exemplo, o grafo $C_7 \times C_7$ com uma coloração arco-íris, seguindo o mesmo padrão aplicado no grafo da Figura 33.

Figura 34 – Grafo $C_7 \times C_7$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Dados os argumentos e exemplos apresentados nas Figuras 33 e 34, propomos a Conjectura 1.

Conjectura 1. Se $C_m \times C_n$ tem $m = n \geq 5$, ímpares, então $rc(C_m \times C_n) = \lfloor m/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor$.

4 CONCLUSÃO

Com relação ao $rc(G)$, sendo G o grafo resultante do produto cartesiano de dois grafos, o Quadro 1 apresenta um resumo de resultados já conhecidos e apresentados neste trabalho para o produto cartesiano que envolvem caminhos, ciclos e grafos completos.

Quadro 1 – Resultados conhecidos sobre o número de conexão arco-íris do produto cartesiano entre dois grafos G e H

G	H	$rc(G \times H)$	AUTORIA
$P_m, m \geq 2$	$P_n, n \geq 2$	$= m + n - 2$	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008) e (LI; SUN, 2010)
$C_m, m \geq 4, m$ par	$P_n, n \geq 2$	$= m/2 + n - 1$	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008) e (LI; SUN, 2010)
$C_m, m \geq 3, m$ ímpar	$P_n, n \geq 2$	$= \lfloor m/2 \rfloor + n - 1$	Presente trabalho.
$C_m, m = 3$	$C_n, n = 3$	$= 2$	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008) e (LI; SUN, 2010)
$C_m, m > 3, m$ ímpar	$C_n, n > 3, n$ par	$= (m - 1)/2 + n/2$	Presente trabalho.
$C_m, m \geq 3, m$ ímpar	$C_n, n \geq 3, n$ ímpar	$\leq (m + n)/2$	Presente trabalho.
$C_m, m \geq 5, m$ ímpar	$K_n, n \geq 3$	$= \lfloor m/2 \rfloor + 1$	Presente trabalho.

Fonte: Autoria própria

Embora $P_1 \times P_n, n \geq 2$ seja uma família de grafos arco-íris críticos resultantes do produto cartesiano de dois caminhos, provamos que o produto cartesiano $P_m \times P_n$ não é arco-íris crítico quando $m \geq n \geq 2$ e o grafo não é um C_4 . Observe que este resultado contrapõe o resultado apresentado por Rao e Murali (2014). Os autores observaram que existe uma aresta e nos grafos $P_m \times P_n$ e $C_m \times P_n$ cuja remoção faz com que não exista caminho arco-íris entre os vértices desta aresta e concluíram erroneamente que tais grafos são arco-íris críticos. O erro está em considerar apenas a coloração dada nos Teoremas 3 e 4 para chegar a esta conclusão. A lição é que para provar que um grafo G é arco-íris crítico é preciso mostrar que não existe nenhuma coloração arco-íris para o grafo $G - e$ com $rc(G)$ cores. Em outras palavras, para mostrar que G é arco-íris crítico não é suficiente provar que a mesma coloração arco-íris apresentada para G não é arco-íris em $G - e$. Apresentamos uma coloração arco-íris diferente para os mesmos grafos na qual a remoção de uma aresta específica não aumenta o número de conexão arco-íris e que, portanto, tais grafos não são arco-íris críticos, de acordo com a Definição 1.

4.1 TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros, sugere-se determinar o número de conexão arco-íris quando um dos grafos do produto cartesiano têm diâmetro menor que seu número de conexão arco-íris. Melhorar o limitante superior conhecido para esses casos é por si só uma questão interessante. Por exemplo, pode-se investigar essa questão considerando-se os produtos cartesianos entre ciclos

ímpares e quaisquer grafos. Um possível resultado desse estudo é a prova da Conjectura 1.

REFERÊNCIAS

- ANANTH, Prabhanjan; NASRE, Meghana; SARPATWAR, Kanthi K. Rainbow Connectivity: Hardness and Tractability. In: CHAKRABORTY, Supratik; KUMAR, Amit (Ed.). **IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2011)**. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2011. (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), v. 13), p. 241–251.
- CHAKRABORTY, S. *et al.* Hardness and algorithms for rainbow connectivity. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 21, p. 330–347, 2011.
- CHANDRAN, L. S. *et al.* Rainbow connection number and connected dominating sets. **Journal of Graph Theory**, v. 71, p. 206–218, 2012.
- CHARTRAND, Gary *et al.* Rainbow connection in graphs. **Mathematica Bohemica**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 133, n. 1, p. 85–98, 2008.
- LI, X; SUN, Y. Characterize graphs with rainbow connection number $m-2$ and rainbow connection numbers of some graph operations. **Preprint**, 2010.
- RAO, K Srinivasa; MURALI, R. Rainbow critical graphs. **International Journal of Computer Application**, v. 4, n. 4, p. 252–259, 2014.
- ROCHA, Aleffer; ALMEIDA, Sheila M. Coloração arco-íris em grafos resultantes de produto cartesiano. In: **Anais do XXXVII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação**. São Paulo, SP: [s.n.], 2017. p. 83–86.
- _____. Criticalidade arco-íris dos grafos resultantes de produto cartesiano de ciclos e caminhos. In: **Anais do II Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais**. Ponta Grossa, PR: [s.n.], 2017.