

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

FERNANDA ALVES BASÍLIO POLETTO

**ANÁLISE DA FLUÊNCIA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO
SIMPLEMENTE APOIADAS USANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2015

FERNANDA ALVES BASÍLIO POLETTO

**ANÁLISE DA FLUÊNCIA EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO
SIMPLESMENTE APOIADAS USANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Área de Concentração: Construção Civil. Linha de Pesquisa: Sistemas Estruturais.

Orientador: João Elias Abdalla Filho, Ph.D.

Co-orientadora: Renata Sá Brito Stramandinoli, Dra.

CURITIBA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P765a Poletto, Fernanda Alves Basílio
2015 Análise da fluência em vigas de concreto armado simplesmente apoiadas usando o método dos elementos finitos / Fernanda Alves Basílio Poletto.-- 2015.
191 f. : il. ; 30 cm.

Texto em português, com resumo em inglês
Bibliografia: f. 148-155

1. Vigas de concreto. 2. Vigas de concreto - Simulação por computador. 3. Método dos elementos finitos. 4. Concreto armado - Modelos matemáticos. 5. Concreto armado - Normas. 6. Engenharia civil - Dissertações. I. Abdala Filho, João Elias, orient. II. Stramandinoli, Renata Sá Brito, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, inst. IV. Título.

CDD: Ed. 22 -- 624

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba



TERMO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO Nº

ANALISE DA FLUENCIA EM VIGAS SIMPLEMENTE APOIADAS USANDO O METODO DOS ELEMENTOS FINITOS

POR

FERNANDA ALVES BASÍLIO POLETTO

Esta dissertação foi apresentada às 09:00 do dia 27 de julho de 2015, como requisito parcial para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL**, área de Construção Civil, Linha de pesquisa Estruturas, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. O Candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho **APROVADO**.

Prof. Dr. João Elias Abdalla Filho
(Orientador - UTFPR)

Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado
(UTFPR)

Prof. Dr. Rogério Francisco Kuster Puppi
(UTFPR)

Profª. Drª. Renata Sá Brito Stramandinoli
(UTFPR)

Visto da Coordenação:

Prof. Dr. Ronaldo Luis dos Santos Izzo
Coordenador do PPGECC

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na coordenação do PPGECC.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus colegas e mestres que, ao longo dos anos, tiveram a paciência de me aconselhar e orientar, dividindo suas ideias e sugestões e contribuindo para o desenvolvimento deste trabalho. Antes de mais nada, porém, meus agradecimentos vão para o Professor Dr. João Elias Abdalla Filho e a Professora Dr^a. Renata Sá Brito Stramandinoli, não só por toda a compreensão e pela dedicação ao passar seus conhecimentos para frente, mas também pela orientação na elaboração desta dissertação.

Ao Professor Dr. Rogério Francisco Kuster Puppi, pelas contribuições dadas no exame de qualificação.

Ao Professor Dr. Ir Bernard Espion da Université Libre de Bruxelles, apesar de não tê-lo conhecido pessoalmente, pela disponibilidade em compartilhar seu trabalho, que foi de essencial valia para esta pesquisa.

Agradeço também ao Departamento de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC e aos colaboradores da UTFPR pelo apoio, sem o qual este projeto não se tornaria realidade.

Aos pesquisadores e professores da banca examinadora, em especial ao Professor Dr. Roberto Dalledone Machado, por ter contribuído com este estudo.

Aos amigos, pela compreensão e apoio.

A Deus por fortalecer a minha capacidade de vencer as dificuldades enfrentadas.

Finalmente, agradeço à minha família, especialmente aos meus pais, Janice e Fernando, e ao meu marido Ricardo, pelo amor, apoio, compreensão e pela alegria compartilhada durante cada etapa vencida desta jornada.

“These two ways of thinking, the way of time and history and the way of eternity and of timelessness, are both part of man's effort to comprehend the world in which he lives. Neither is comprehended in the other nor reducible to it. They are, as we have learned to say in physics, complementary views, each supplementing the other, neither telling the whole story”

(OPPENHEIMER, Robert J., 1953)

“Essas duas formas de pensar, uma do tempo e da história, outra atemporal e eterna, são partes do esforço do homem de compreender o mundo em que vive. São visões disjuntas, irreduzíveis uma a outra, complementares, nenhuma por si só capaz de contar a história toda”

(OPPENHEIMER, Robert J., 1953)

RESUMO

Poletto, Fernanda A. B. Análise da Fluência em Vigas de Concreto Armado Simplesmente Apoiadas Usando o Método dos Elementos Finitos. 2015. 191 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica do Paraná. Curitiba, 2015.

A fluência é um fenômeno de grande importância no concreto armado. Apesar de ser apontada como a causa de diversas patologias em estruturas, seus efeitos ainda são considerados de forma simplificada pelos projetistas estruturais. Além de estudar o fenômeno em estruturas de concreto armado e sua consideração atual utilizada na análise de estruturas, este trabalho compara as deformações de vigas simplesmente apoiadas de concreto armado, obtidas de forma analítica, e em ensaios experimentais com os resultados de simulações pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Os valores de deformações e deslocamentos calculados de forma analítica foram obtidos a partir de recomendações da Norma Brasileira NBR 6118 (2014) e do Código Modelo Simplificado CEB-FIP (1990), e os resultados experimentais foram extraídos de ensaios disponíveis na literatura. As simulações são realizadas no programa ANSYS *Workbench*, utilizando o elemento tridimensional SOLID 186 e a simetria das vigas. Posteriormente são realizadas análises de convergência utilizando o elemento bidimensional PLANE 183. Conclui-se ao final que as análises através do MEF são qualitativa e quantitativamente eficazes para estimativa dessa não linearidade e que o método de obtenção dos coeficientes de fluência utilizados é suficientemente preciso.

Palavras-chave: Fluência. Viscoelasticidade. Concreto Armado. Análise não linear. Elementos Finitos.

ABSTRACT

Poletto, Fernanda A. B. Creep analysis in reinforced concrete simply supported beams using the Finite Element Method. 2015. 191 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica do Paraná. Curitiba, 2015.

Reinforced concrete creep is a phenomenon of great importance. Despite being appointed as the main cause of several pathologies, its effects are yet considered in a simplified way by the structural designers. In addition to studying the phenomenon in reinforced concrete structures and its current account used in the structural analysis, this paper compares creep strains at simply supported reinforced concrete beams in analytical and in experimental forms with the finite element method (FEM) simulation results. The strains and deflections obtained through the analytical form were calculated with the Brazilian code NBR 6118 (2014) recommendations and the simplified method from CEB-FIP 90 and the experimental results were extracted from tests available in the literature. Finite element simulations are performed using ANSYS *Workbench* software, using its 3D SOLID 186 elements and the structure symmetry. Analyzes of convergence using 2D PLANE 183 elements are held as well. At the end, it is concluded that FEM analyses are quantitative and qualitative efficient for the estimation of this non-linearity and that the method utilized to obtain the creep coefficients values is sufficiently accurate.

Keywords: Creep. Viscoelasticity. Reinforced Concrete. Non-linear analysis. Finite Elements.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – EFEITO P-DELTA.....	34
FIGURA 2 – DIFERENTES TIPOS DE ANÁLISE PARA UM PÓRTICO.....	35
FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL, ESQUEMÁTICO	38
FIGURA 4 – CURVA TENSÃO X DEFORMAÇÃO TÍPICA DO CONCRETO PRISMÁTICO SOB CARREGAMENTO (ESQUEMÁTICO).....	40
FIGURA 5 – VARIAÇÃO DA RETRAÇÃO E DA FLUÊNCIA DEVIDO À CARGA E DESCARGA DE UMA PEÇA PRISMÁTICA DE CONCRETO (ESQUEMÁTICO).....	42
FIGURA 6 – VARIAÇÃO DA FLUÊNCIA COM O TEMPO EM UMA PEÇA PRISMÁTICA DE CONCRETO, CARREGADA AXIALMENTE, COM UMIDADE RELATIVA DO AR E TEMPERATURA CONSTANTES.....	45
FIGURA 7 – COMPARATIVO DO VALOR DA FLUÊNCIA EM FUNÇÃO DA UMIDADE RELATIVA DO AR PARA O CIMENTO NORMAL E PARA O CIMENTO DE ENDURECIMENTO RÁPIDO	46
FIGURA 8 – INTERFERÊNCIA DA IDADE DO CONCRETO NO INÍCIO DO CARREGAMENTO SOBRE A CURVA DE FLUÊNCIA DE PRISMAS DE CONCRETO DE CARACTERÍSTICAS: 12X12X36CM, RESISTÊNCIA CÚBICA APROXIMADAMENTE IGUAL A 49MPA; TENSÃO DE COMPRESSÃO APROXIMADAMENTE IGUAL A 10 MPA E TEMPERATURA IGUAL A 18°C	47
FIGURA 9 – INTERFERÊNCIA DA RETRAÇÃO E DA FLUÊNCIA NA FISSURAÇÃO DO CONCRETO	48
FIGURA 10 - CURVAS DE DEFORMAÇÃO E VELOCIDADE DE FLUÊNCIA VS. TEMPO	50
FIGURA 11 – INTERFERÊNCIA DA TENSÃO E DA TEMPERATURA NO FENÔMENO FLUÊNCIA. A) RELAÇÃO COM O TEMPO B) RELAÇÃO COM A TEMPERATURA.....	51
FIGURA 12 – FORMAS DE COMPORTAMENTO TENSÃO-DEFORMAÇÃO DEPENDENTES DE TEMPO SOB TEMPERATURA CONSTANTE. A) FLUÊNCIA SOB TENSÃO CONSTANTE. B) RECUPERAÇÃO DE FLUÊNCIA (H(T) DENOTA A FUNÇÃO DE HEAVISIDE). C) RELAXAÇÃO DE TENSÃO.....	52
FIGURA 13 – RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA DA TAXA DE DEFORMAÇÃO COM O COMPORTAMENTO DA TENSÃO-DEFORMAÇÃO	53
FIGURA 14 – COMPORTAMENTO PLÁSTICO IDEAL.....	54
FIGURA 15 – PLASTICIDADE DE ENDURECIMENTO POR TENSÃO OU POR DEFORMAÇÃO....	54
FIGURA 16 – SUPERFÍCIE DE ESCOAMENTO E CRITÉRIO NORMALIZADO PARA O ESPAÇO DE TENSÃO BIDIMENSIONAL.....	55
FIGURA 17 – MODELOS REOLÓGICOS VISCOPLÁSTICOS UNIDIMENSIONAIS	56
FIGURA 18 – SUPERFÍCIES DE ESCOAMENTO C- ϕ NOS PLANOS DA TENSÃO PRINCIPAL	61
FIGURA 19 – DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR QUE DEFINE L_A , L_B E L_0	69
FIGURA 20 – VARIAÇÃO $E_{CCF}(T)$	75
FIGURA 21 – VARIAÇÃO $\beta_F(T)$	77
FIGURA 22 – SESSÃO FISSURADA (ESTÁDIO II).....	83
FIGURA 23 – APLICAÇÃO INCREMENTAL DE CARGA AO LONGO DO TEMPO.....	88
FIGURA 24 – GEOMETRIA DO MODELO HOMOGÊNEO DO SOLID 186	107
FIGURA 25 – DIMENSÕES (EM CM) DAS VIGAS ENSAIADAS NA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO.....	112

FIGURA 26 – DIMENSÕES (EM CM) DAS VIGAS ENSAIADAS NA UNIVERSIDADE DE ILLINOIS	114
FIGURA 27 – DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA NO DESIGN MODELER	116
FIGURA 28 – MODELAGEM DA SIMETRIA	117
FIGURA 29 – GEOMETRIA DO PLANE 183.....	118
FIGURA 30 – MALHAS PARA ANÁLISES DE CONVERGÊNCIA UTILIZANDO O ELEMENTO PLANE 183 DO ANSYS PARA A VIGA A. (A): MALHA 2X44. (B): MALHA 3X88. (C): MALHA 4X116. (D): MALHA 5X145. (E): MALHA 6X174.....	119
FIGURA 31 – MALHAS PARA ANÁLISES DE CONVERGÊNCIA UTILIZANDO O ELEMENTO PLANE 183 DO ANSYS PARA A VIGA C3. (A): MALHA 2X33. (B): MALHA 3X49. (C): MALHA 6X100. (D): MALHA 7X115. (E): MALHA 8X119.....	120
FIGURA 32 – MALHAS PARA ANÁLISES DE CONVERGÊNCIA UTILIZANDO O ELEMENTO PLANE 183 DO ANSYS PARA A VIGA C4. (A): MALHA 2X33. (B): MALHA 3X52. (C): MALHA 6X100. (D): MALHA 7X116. (E): MALHA 8X123.....	121
FIGURA 33 – CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA UM MATERIAL VISCOELÁSTICO	121
FIGURA 34 – CONFIGURAÇÕES DAS ANÁLISES DO ANSYS – ETAPAS DE CARREGAMENTO 1 E 2.....	122
FIGURA 35 – COMPORTAMENTO DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA PELO MEF DAS VIGAS DA REFERÊNCIA 1. (A) VIGA A (B) VIGA B, (C) VIGA C, (D) VIGA D	130
FIGURA 36 – COMPORTAMENTO DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA PELO MEF DAS VIGAS DA REFERÊNCIA 2. (A) VIGA C1. (B) VIGA C3. (C) VIGA C4	131

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – FATOR DE CORREÇÃO H PARA ESTIMATIVA DE DEFLEXÕES.....	69
TABELA 2 – VALORES CARACTERÍSTICOS SUPERIORES DA DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA DA RETRAÇÃO $\varepsilon_{CS}(T^\infty, T_0)$ E DO COEFICIENTE DE FLUÊNCIA $\Phi(T^\infty, T_0)$	72
TABELA 3 – VALORES DA FLUÊNCIA E DA RETRAÇÃO EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE DE ENDURECIMENTO DO CIMENTO	78
TABELA 4 – VALORES DO COEFICIENTE ξ EM FUNÇÃO DO TEMPO	85
TABELA 5 – RELAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE FLUÊNCIA	101
TABELA 6 – REFERÊNCIA 1 DE ENSAIO FÍSICO: SEÇÃO BRUTA E ARMADURAS	113
TABELA 7 – REFERÊNCIA 1 DE ENSAIO FÍSICO: RESISTÊNCIA FÍSICA E CARREGAMENTO .	113
TABELA 8 – REFERÊNCIA 1 DE ENSAIO FÍSICO: DESLOCAMENTO TOTAL MEDIDO	114
TABELA 9 – REFERÊNCIA 2 DE ENSAIO FÍSICO: SEÇÃO BRUTA E ARMADURAS	115
TABELA 10 – REFERÊNCIA 2 DE ENSAIO FÍSICO: RESISTÊNCIA FÍSICA E CARREGAMENTO	115
TABELA 11 – REFERÊNCIA 2 DE ENSAIO FÍSICO: DESLOCAMENTO TOTAL MEDIDO	115
TABELA 12 – APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS DE DESLOCAMENTOS.....	127
TABELA 13 – COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS CALCULADOS ANALITICAMENTE COM OS ENSAIOS FÍSICOS.....	127
TABELA 14 – COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES EM MEF COM OS CÁLCULOS ANALÍTICOS	129

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – RESULTADO GRÁFICO DA CALIBRAÇÃO DE ALGUMAS LEIS DE FLUÊNCIA.....	111
GRÁFICO 2 – MÁXIMA DEFORMAÇÃO VS. TEMPO USANDO O MEF COM ELEMENTO PLANE 183 DO ANSYS PARA A VIGA A	123
GRÁFICO 3 – MÁXIMA DEFORMAÇÃO VS. TEMPO USANDO O MEF COM ELEMENTO PLANE 183 DO ANSYS PARA A VIGA C3.....	124
GRÁFICO 4 – MÁXIMA DEFORMAÇÃO VS. TEMPO USANDO O MEF COM ELEMENTO PLANE 183 DO ANSYS PARA A VIGA C4.....	124
GRÁFICO 5 – COMPARATIVO ENTRE MODELOS DO MEF 3D E 2D COM REFINO DE MALHA PARA DESLOCAMENTOS POR FLUÊNCIA DA VIGA A.....	125
GRÁFICO 6 – COMPARATIVO ENTRE MODELOS DO MEF 3D E 2D COM REFINO DE MALHA PARA DESLOCAMENTOS POR FLUÊNCIA DA VIGA C3	125
GRÁFICO 7 – COMPARATIVO ENTRE MODELOS DO MEF 3D E 2D COM REFINO DE MALHA PARA DESLOCAMENTOS POR FLUÊNCIA DA VIGA C4	126
GRÁFICO 8 – RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO TOTAL OBTIDA NAS VIGAS DA REFERÊNCIA 1. (A) VIGA A, (B) VIGA B, (C) VIGA C, (D) VIGA D.....	132
GRÁFICO 9 – RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO TOTAL OBTIDA NAS VIGAS DA REFERÊNCIA 2. (A) VIGA C1, (B) VIGA C3, (C) VIGA C4.	133
GRÁFICO 10 – COMPARATIVO ENTRE CÁLCULO ANALÍTICO PELO CEB-FIP E NBR E O MEF DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DA VIGA A	134
GRÁFICO 11 – COMPARATIVO ENTRE CÁLCULO ANALÍTICO PELO CEB-FIP E NBR E O MEF DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DA VIGA B	135
GRÁFICO 12 – COMPARATIVO ENTRE CÁLCULO ANALÍTICO PELO CEB-FIP E NBR E O MEF DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DA VIGA C	135
GRÁFICO 13 – COMPARATIVO ENTRE CÁLCULO ANALÍTICO PELO CEB-FIP E NBR E O MEF DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DA VIGA D	136
GRÁFICO 14 – COMPARATIVO ENTRE CÁLCULO ANALÍTICO PELO CEB-FIP E NBR E O MEF DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DA VIGA C1	136
GRÁFICO 15 – COMPARATIVO ENTRE CÁLCULO ANALÍTICO PELO CEB-FIP E NBR E O MEF DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DA VIGA C3	137
GRÁFICO 16 – COMPARATIVO ENTRE CÁLCULO ANALÍTICO PELO CEB-FIP E NBR E O MEF DAS DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DA VIGA C4	137
GRÁFICO 17 – COMPARATIVO DO DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO PARA A VIGA A	139
GRÁFICO 18 – COMPARATIVO DO DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO PARA A VIGA B	140
GRÁFICO 19 – COMPARATIVO DO DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO PARA A VIGA C	140
GRÁFICO 20 – COMPARATIVO DO DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO PARA A VIGA D	141
GRÁFICO 21 – COMPARATIVO DO DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO PARA A VIGA C1	141
GRÁFICO 22 – COMPARATIVO DO DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO PARA A VIGA C3	142
GRÁFICO 23 – COMPARATIVO DO DESLOCAMENTO AO LONGO DO TEMPO PARA A VIGA C4	142

LISTA DE SÍMBOLOS

- a: constante empírica; valores nodais do deslocamento u .
- a_c : deslocamento elástico.
- $a(i)$: deslocamento inicial.
- $a(t)$: deslocamento a longo prazo.
- A_c : área da seção transversal.
- A_s : armadura de flexão positiva.
- A_s : área de armadura;
- b: base da viga; constante empírica.
- b: forças volumétricas prescritas no elemento.
- $B_{H,T}$: coeficiente dependente da temperatura que substitui BH.
- c: constante empírica.
- d: distância entre a borda superior da viga e o eixo da armadura positiva.
- d': distância entre o eixo da armadura positiva e a borda inferior da viga.
- $d\Omega$: volume virtual onde está instalado o estado de tensões.
- D^{-1} : matriz de elasticidade simétrica (matriz de constitutiva).
- E_b : módulo de elasticidade do concreto.
- E_{ci} : módulo de elasticidade inicial.
- E_{cs} : módulo de elasticidade secante.
- E_{c28} : módulo de deformação tangente inicial aos 28 dias.
- F: valores de força internas; deformação plástica; critério de escoamento.
- F_c, f_c, f'_c : resistência à compressão do concreto.
- f_{ck} : resistência à compressão característica do concreto.
- f_{cm} : resistência média do concreto.
- f_{ct} : resistência à tração direta do concreto.
- J_2 : segundo invariante das tensões desviadoras.
- J_3 : terceiro invariante das tensões desviadoras.
- h: espessura equivalente do elemento.
- h_{fic} : espessura fictícia.
- I_c : momento de inércia da seção bruta de concreto.
- I_{II} : momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II.
- k: parâmetro de endurecimento (ou amolecimento) dependente do histórico de tensões.

K : constante empírica.

\mathbf{K} : matriz de rigidez.

l : comprimento da peça.

\mathbf{L} ou $[\mathbf{L}]$: matriz dos gradientes das funções de interpolação N_j .

\mathbf{Ln} : nós do modelo.

M_a : momento fletor na seção crítica do vão.

M_d : esforço devido ao carregamento.

M_r : momento de fissuração.

M_{sd} : momento de cálculo solicitante.

\mathbf{N}_j : funções de interpolação associadas com os nós do modelo.

P_i : parcelas de carga.

Q : plasticidade potencial.

RH : umidade relativa do ambiente.

S : trabalho virtual realizado pelos esforços externos.

S_{inf} : área abaixo da linha neutra.

S_{sup} : área acima da linha neutra.

t : ações externas prescritas no limite de Γ_σ .

t : instante da deformação, idade fictícia, tempo, tempo de carregamento.

t' : idade de referência para a resistência característica do concreto;

T : temperatura.

t_0, t_0 : tempo inicial.

t_{0i} : idade em que foi aplicada a parcela de carga.

t_{ef} : idade fictícia.

T_i : temperatura média diária do ambiente.

u : perímetro do elemento em contato com a atmosfera; vetor do campo de deslocamentos.

U : trabalho virtual realizado pelos esforços internos; umidade relativa do ambiente.

U.R.: umidade relativa;

x_{II} , ou x_{LN} : posicionamento da linha neutra após a fissuração do concreto.

y : tensão de escoamento.

y_t : distância entre o centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada da peça.

W_c : módulo resistente da seção de concreto, sem considerar o aço.

α : coeficiente dependente do tipo do cimento.

α_f : fator de multiplicação da flecha imediata.

β_d : coeficiente relativo à deformação lenta reversível.

β_f : coeficiente relativo à deformação lenta irreversível.

β_c : coeficiente que descreve a evolução com o tempo da fluência após o carregamento.

γ : coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente.

γ : parâmetro de escoamento.

Γ : matriz simétrica dependente do estado de tensão vigente.

Γ : região onde as ações estão aplicadas.

Γ_u : limite da região onde as ações estão aplicadas.

Γ_σ : região limite das tensões.

$\delta\varepsilon$ ou ε : vetor das taxas de deformação.

δu : vetor de variação do deslocamento do elemento.

Δl_k : variação do comprimento da peça após a fluência.

$\Delta\sigma_c$: variação total de tensão no concreto.

$\Delta t_{ef,i}$: período no qual a temperatura média diária do ambiente é constante.

$\Delta\xi$: coeficiente função do tempo.

ε : deformação. $\dot{\varepsilon}$: velocidade de deformação.

ε^0 : deformação, autógena, inicial.

ε_c : deformação específica no concreto.

ε_{cc} : deformação por fluência.

ε_{ci} : deformação inicial no carregamento.

ε_{cn} : deformação que independe da tensão.

ε_{cs} : deformação por retração.

ε_{cT} : deformação térmica.

$\varepsilon_{c\sigma}$: deformação dependente da tensão.

ε^{cr} : deformação inelástica.

$\dot{\varepsilon}^{cr}$: taxa ou velocidade de deformação por fluência.

ε^e : deformações elásticas reversíveis.

ε_{el} ou ε^{el} : deformação elástica.

ε_k : fluência do concreto.

ε_L : deformação longitudinal.

ε^{pm} : deformação permanente (irrecuperável).

ε_{pl} : deformação plástica.

ε^{rec} : deformação inelástica recuperada.

ε_s : Deformação na armadura.

ε_T : deformação transversal.

ε_{tot} ou ε_c : deformação total.

$\dot{\varepsilon}^{VP}$: velocidade da deformação viscoplástica.

η : fator de correção, que inclui os efeitos de fissuração e de fluência.

ν : coeficiente de Poisson.

ρ : porcentagem de armadura na região de momento máximo.

ρ_a e ρ_b : porcentagens de armadura de tração/compressão nos suportes.

ρ_{cm} : média geométrica da porcentagem de armadura de compressão.

σ : tensão normal.

σ_0 : tensão inicial.

σ_b ou σ_c : tensão de compressão no concreto.

σ_L : compressão longitudinal.

σ_y ou σ_m : tensão de escoamento.

τ : tempo final de carregamento; idade de carregamento.

φ : coeficiente de fluência; coeficiente de proporcionalidade.

$\varphi(F)$: função da deformação plástica.

φ_0 : coeficiente de fluência nominal.

φ_{1c} : coeficiente dependente da umidade relativa.

φ_{2c} : coeficiente dependente da espessura fictícia.

φ_∞ : coeficiente de proporcionalidade para o valor final da fluência.

φ_a : coeficiente de deformação rápida.

φ_d : coeficiente de deformação lenta reversível.

$\varphi_{d\infty}$: valor final do coeficiente de deformação lenta reversível.

φ_f : coeficiente de deformação lenta irreversível.

$\varphi_{f\infty}$: valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível.

φ_t : coeficiente de proporcionalidade no instante t.

Ω ou \mathbf{V}_e : campo dos volumes externos.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	IV
RESUMO.....	VI
ABSTRACT	VII
LISTA DE FIGURAS	VIII
LISTA DE TABELAS	X
LISTA DE GRÁFICOS.....	XI
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XII
SUMÁRIO.....	XVI
1 INTRODUÇÃO	18
1.1 OBJETIVOS.....	19
1.2 JUSTIFICATIVA.....	19
1.3 METODOLOGIA	20
1.4 ESCOPO	22
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	22
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	24
3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	33
3.1 ANÁLISE NÃO LINEAR	33
3.2 DEFORMAÇÕES DO CONCRETO	36
3.2.1 Deformações Elásticas	39
3.2.2 Deformações Plásticas Independentes do Tempo	39
3.2.3 Deformações Dependentes do Tempo	41
3.2.3.1 Tipos e Causas.....	41
3.2.3.2 Variação da Retração	43
3.2.3.3 Variação da Fluência	44
3.3 FLUÊNCIA NAS ESTRUTURAS.....	49
3.3.1 Ensaios Físicos de Fluência Plana	49
3.3.2 Introdução ao Modelo Elastoviscoplastico	53
3.3.3 Superfície de Escoamento de Von-Mises	60
3.3.4 Modelo de Fluência do CEB-FIP-1990	62
3.3.4.1 Deformações Devido à Flexão – Método Simplificado	68
3.3.5 Modelo de Fluência da NBR 6118 (2014).....	70
3.3.5.1 Equações de Fluência da NBR 6118 (2014)	70
3.3.5.2 Anexo A da NBR 6118 (2014) – Efeito do Tempo no Concreto Estrutural ...	73
3.3.5.2.1 Hipóteses Admitidas para Cálculo	73
3.3.5.2.2 Valor da Deformação Devido à Fluência	75
3.3.5.2.3 Idade Fictícia do Concreto	78
3.3.5.2.4 Espessura Fictícia da Peça de Concreto	78
3.3.5.2.5 Deformação Total	79
3.3.5.2.6 Deformações na Armadura.....	80
3.3.5.3 Fissuração no Concreto Devido à Perda de Rigidez	80
3.3.5.3.1 Elementos Lineares Sujeitos a Solicitações Normais – Estados-Limite de Serviço	81
3.3.5.3.2 Estado Limite de Deformação Excessiva	81
3.3.5.3.3 Avaliação Aproximada da Flecha em Vigas	82
3.3.5.3.4 Flecha Imediata em Vigas de Concreto Armado	82
3.3.5.3.5 Cálculo da Flecha Adicional Diferida no Tempo para Vigas de Concreto Armado	85
3.3.6 Função de Fluência e Coeficiente de Fluência	86

3.3.6.1 Métodos para a Análise da Fluência.....	86
3.3.6.2 Princípio da Superposição e Representação Integral.....	87
3.4 MODELO DE CONCRETO E FLUÊNCIA.....	90
3.4.1 Modelo Computacional da Fluência.....	90
3.4.1.1 Consideração da Fluência Aplicada ao MEF.....	90
3.4.1.1.1 Não Linearidade Associada a Grandes Deformações e a Alterações de Propriedades Físicas.....	91
3.4.1.1.2 Algoritmo Numérico do MEF para Análise da Fluência em Estruturas ..	91
3.4.1.1.3 Variáveis de Tempo.....	96
3.4.1.2 Cálculo da Fluência no ANSYS e Equações de Fluência Utilizadas no MEF ...	99
3.4.2 Elemento SOLID 186.....	106
3.4.2.1 Modelos Físicos dos Materiais	109
4 METODOLOGIA	110
4.1 MÉTODOS DE AJUSTE DOS COEFICIENTES DE FLUÊNCIA	110
4.1.1 Calibração pela NBR 6118 (2014)	110
4.2 ENSAIOS DE REFERÊNCIA.....	112
4.3 MODELAGEM ESTRUTURAL NO ANSYS	115
5 ANÁLISES E RESULTADOS.....	123
5.1 ANÁLISES DE CONVERGÊNCIA	123
5.2 COMPARAÇÃO QUANTITATIVA.....	126
5.3 COMPORTAMENTO TENSÃO VS. DEFORMAÇÃO	129
5.4 COMPARAÇÃO QUALITATIVA.....	134
6 CONCLUSÕES.....	144
6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	146
REFERÊNCIAS.....	148
APÊNDICE A – CÁLCULO DO DESLOCAMENTO DAS VIGAS SEGUNDO A NBR 6118 (2014).....	156
APÊNDICE B – CÁLCULO DO DESLOCAMENTO DAS VIGAS SEGUNDO O CEB-FIP/90.....	157

1 INTRODUÇÃO

Um dos aspectos mais incertos e menos bem esclarecidos da engenharia é o comportamento dependente do tempo das estruturas (GILBERT, 1988).

A inabilidade dos engenheiros de reconhecer e quantificar os efeitos não lineares da fluência e da retração nas simulações estruturais é uma das diversas causas de falhas estruturais. As pesquisas das propriedades dependentes do tempo no concreto e os seus efeitos no comportamento das estruturas de concreto armado foram amplamente pesquisados nos últimos 100 anos. Tanta pesquisa gerou muita informação e muitas técnicas analíticas para estimativa das deformações, as quais são bem conhecidas por pesquisadores, mas, na prática, pouco usadas ou entendidas pelos profissionais. Por isso os projetos costumam ser elaborados utilizando procedimentos de cálculo simplificados, contidos em normas e códigos, para estimar o comportamento das estruturas em serviço.

As deformações dependentes do tempo possuem natureza acumulativa, e quanto maior o número de pavimentos de um edifício, por exemplo, maior a deformação diferencial (SMITH; COULL¹, 1991 e MARU et al.², 2003 apud OLIVEIRA, 2011). A tendência natural que se observa é esta: construções cada vez maiores. Claramente, com essa tendência, as falhas resultantes da simplificação dessas não linearidades também serão maiores.

Este trabalho é uma tentativa de avançar na utilização prática do método dos elementos finitos para a estimativa da fluência no concreto armado.

Mehta e Monteiro (2008) definem a fluência como o aumento gradual da deformação ao longo do tempo sob um dado nível de tensão constante. Essa manifestação é típica de materiais viscoelásticos e é um dos principais causadores das patologias resultantes do envelhecimento das estruturas. Além dos problemas estruturais que esse fenômeno pode causar, as dificuldades na modelagem de estruturas podem surgir em decorrência da dependência da fluência de diversos fatores, como, por exemplo, umidade e temperatura ambientes, maturidade do

¹ SMITH, B. S.; COULL, A. **Tall Building Structures: Analysis and Design**. 1ª. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.

² MARU, S.; ET AL. Effect of Creep and Shrinkage on RC Frames with High Beam Stiffness. **Journal of Structural Engineering**, v. 129, n. 4, p. 536-543, Abril 2003.

concreto, tempo de carregamento e dimensões dos elementos estruturais (SOUZA, 2012).

Tendo em vista estas dificuldades, a fluência e a retração em projetos estruturais vêm sendo calculadas de forma conservadora, o que aumenta o custo das estruturas de concreto armado e reduz sua competitividade (ALMEIDA, 2006).

1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é realizar a análise de fluência em vigas de concreto armado simplesmente apoiadas via o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Como objetivos específicos previstos no trabalho, tem-se:

- Calcular os deslocamentos e deformações devidos à fluência.
- Verificar se os resultados obtidos na simulação não linear via MEF são correspondentes aos resultados de ensaios físicos.
- Verificar se os resultados dos cálculos de deformação por fluência em vigas, obtidos na simulação via o MEF, são próximos aos calculados pela norma brasileira e pelo CEB-FIP.

1.2 JUSTIFICATIVA

Algumas das normas e manuais mais utilizados, incluindo a norma brasileira, distinguem as análises para o concreto armado em estado limite de ruptura e estado limite de serviço. Este último consiste em garantir que a estrutura tenha capacidade de manter-se em condições plenas de utilização durante a sua vida útil, não podendo apresentar danos que comprometam parte ou totalmente o uso para o qual foi projetada. Uma das verificações necessárias para o estado de limite de serviço é relativa ao deslocamento das estruturas, sendo necessário conhecer, além das deformações normais, também a deformação por fluência. A análise das estruturas em serviço, considerando a deformação imediata, é um assunto muito pesquisado e diversos estudos que abrangem essa área já foram realizados. Como exemplo destacam-se os trabalhos de Vasconcelos e Corrêa (2006), Oliveira (2007), Shuraim (1997), Ciloni (1993), Diógenes e Hanai (2010), entre outros. A estimativa do trabalho de estruturas em serviço após a execução da obra se torna um trabalho bastante complicado, pois, apesar de todo o memorial do que foi projetado estar muitas vezes disponível, não se pode garantir que todas as

variáveis calculadas em projeto tenham sido consideradas na prática. Existe, então, a necessidade de realizar análises mais complexas na tentativa de estimar variáveis utilizadas após a construção.

Além da dificuldade em estimar as variáveis reais após a construção, durante a fase de projeto, a estimativa da fluência também não é exata. Alguns dos aplicativos comumente utilizados em escritórios de projetos, tais como: TQS, EBERICK e CYPECAD, dimensionam e detalham estruturas de concreto armado, sem a consideração da fluência e da retração do concreto, ou consideram-nos de forma simplificada (OLIVEIRA, 2011).

Diferentes normas e códigos internacionais recomendam variados métodos para a previsão da fluência, o que causa uma certa dúvida de qual norma é mais recomendada. Em um estudo, o modelo de norma que apresentou os valores mais precisos de previsão de fluência em comparação com ensaios físicos ficou muito aquém do esperado, apresentando variação mínima de 18% dos coeficientes (FANOURLAKIS E BALLIM, 2003). As prescrições normativas existentes no Brasil, por sua vez, não são suficientes para impedir o surgimento de patologias decorrentes da deformação excessiva de vigas (LIMA, 2003).

Além das dúvidas referentes às recomendações, os dados de fluência são obtidos experimentalmente por meio de ensaios físicos, isso torna quase impossível dizer, a priori, qual a equação constitutiva de fluência que irá conduzir a resultados mais corretos (ALTENBACH, 2007). Portanto, a investigação do tema e o estudo das equações de fluência disponíveis para o concreto armado são importantes.

Apesar de a fluência e a retração serem fenômenos importantes para o cálculo de estruturas de concreto armado, o número de pesquisas referentes ao tema ainda é pequeno se comparado aos trabalhos que consideram apenas a deformação imediata, sendo este um tema complexo, o que justifica mais ainda um estudo sobre o assunto.

1.3 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho foi realizada a simulação numérico-computacional como metodologia de pesquisa e a posterior comparação dos resultados obtidos com os cálculos recomendados por normas e resultados de ensaios físicos disponíveis na literatura.

As análises via o MEF serão desenvolvidas no software ANSYS. Esse software foi escolhido por permitir simular diversos aspectos estruturais de um corpo, como análise não linear física e geométrica. Existem ainda diversos softwares comerciais que utilizam o MEF e que também possibilitam estas análises, como o ABAQUS, DIANA, ADINA, entre outros.

No ANSYS, estão disponíveis diversas opções de elementos para modelagem estrutural. Optou-se por representar a estrutura de concreto armado com elementos finitos de sólido tridimensional (SOLID 186).

Para o problema em questão, a equação de fluência do MEF possui coeficientes que precisam ser definidos. Para isso, é possível calibrar os coeficientes com as previsões de deformação dos modelos das normas e manuais mais utilizados. Essa calibração foi realizada por meio de uma regressão numérica envolvendo os resultados dos cálculos da ABNT NBR 6118 (2014) e as leis de previsão de fluência utilizadas pelo programa ANSYS.

A influência do tempo na resposta da estrutura foi investigada em duas etapas: na primeira foi analisada a resposta da estrutura para o carregamento em curto tempo, ou seja, imediato e, na segunda, a resposta é dependente do tempo.

Foram escolhidos alguns exemplos disponíveis na literatura de ensaios experimentais em vigas biapoiadas. Desses resultados, têm-se os valores de deformação medidos nas estruturas, que serão comparados aos valores obtidos na simulação computacional.

Os seguintes passos são seguidos para realização do trabalho:

- Estudar o comportamento do concreto, relativo às deformações.
- Estudar algumas leis de previsão de fluência, cujos coeficientes possam ser calibrados a partir de equações algébricas indicadas em normas.
- Estudar os elementos e o comportamento do concreto armado no MEF que serão aplicados neste trabalho.
- Calcular a fluência para exemplos de vigas de concreto armado, tendo como referência a norma brasileira de concreto armado NBR 6118 (2014) e o Código Modelo CEB-FIP 90.
- Calibrar os coeficientes das leis de fluência a partir dos cálculos recomendados pela NBR 6118 (2014).

- Simular computacionalmente os exemplos calculados para investigar a validade do modelo escolhido de fluência combinada às deformações elásticas do concreto armado.
- Avaliar os resultados obtidos pela simulação computacional e compará-los com resultados dos cálculos analíticos recomendados pela NBR 6118 (2014) e pelo CEB-FIP 90.

1.4 ESCOPO

Este trabalho considera a hipótese de que o comportamento estrutural do concreto armado pode ser simplificado. O concreto armado tem a característica de apresentar fissuração na tração e esmagamento na compressão.

As simulações de fluência no MEF utilizadas neste trabalho limitam o comportamento elasto-visco-plástico do concreto armado somente ao comportamento viscoelástico. O material utilizado na simulação possui propriedades que levarão a estrutura a reagir de forma igual tanto na tração quanto na compressão, não atingindo assim as tensões de falha do concreto.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

No primeiro capítulo deste trabalho apresenta-se uma introdução ao tema, os objetivos do trabalho, a justificativa e a metodologia.

No capítulo 2, de revisão bibliográfica, são apresentados resultados e recomendações de autores que já realizaram pesquisas sobre análises de estruturas com consideração da fluência. Suas contribuições são importantes para criar a base conceitual para os novos estudos do presente trabalho.

O capítulo 3 aborda os temas indispensáveis para uma melhor compreensão deste trabalho. Inicia-se pelas análises não lineares, tanto geométricas quanto materiais. Na sequência, são abordadas as deformações do concreto, tanto elásticas e plásticas, quanto às deformações em função do tempo. É feito um breve resumo sobre tipos e causas das deformações dependentes do tempo. Ainda são apresentadas as funções de fluência e os coeficientes de fluência, abordando os métodos para análise do fenômeno, detalhando as equações mais utilizadas nas normas e manuais de concreto utilizados neste trabalho. Este capítulo trata ainda sobre os modelos de concreto e de fluência do ANSYS, com o embasamento teórico relacionado ao MEF. Apresentam-se a geometria dos

elementos, assim como as formulações utilizadas para efetuar as análises. O modelo computacional da fluência é apresentado a seguir e são esclarecidos os aspectos referentes à formulação do fenômeno no método dos elementos finitos.

No capítulo 4 são descritos os métodos de ajuste dos coeficientes referentes à fluência, necessários para o cálculo apropriado dos resultados. Os ensaios físicos de referência utilizados para comparação de resultados e a metodologia para a realização das simulações também são apresentados neste capítulo.

As análises dos resultados obtidos são apresentadas no capítulo 5, em que os resultados são apresentados e interpretados. Finalmente, o capítulo 6 apresenta as conclusões finais do trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta os resultados e as recomendações de autores que já realizaram pesquisas sobre a fluência, considerando as não linearidades físicas no concreto armado e em outros materiais, sobre análises não lineares utilizando o método dos elementos finitos.

Segundo Neville (1982), as intensidades da retração e da fluência são da mesma ordem de grandeza da deformação elástica nas tensões usuais. Portanto, os fenômenos de retração e fluência devem ser levados em conta tanto quanto as demais deformações do concreto armado.

A fluência do concreto possui vantagens e desvantagens para as estruturas. Ela pode provocar o aumento das flechas em vigas, perdas de protensão, desvios de prumo em pilares, entre outros. Porém, como compensação, o fenômeno contribui para a eliminação de concentrações de tensões e ajuda a balancear estruturas hiperestáticas, compensando recalques diferenciais (ARAÚJO, 2002).

Os primeiros estudos envolvendo o comportamento da fluência dependente de temperatura mostraram que a deformação por fluência cresce muito em temperaturas altas ($T > 30^{\circ}\text{C}$), segundo Carmichael e Hornby³ (1973) e Nasser e Lohtia⁴ (1974 apud LEONHARDT; MÖNNIG 1977). Sabe-se, por observação em pontes, que em temperaturas entre 5°C e -15°C a deformação por fluência praticamente cessa.

Alguns trabalhos sobre fluência se preocuparam em descrever o comportamento dependente do tempo (*time-dependent*) do material. Dentre os primeiros trabalhos encontra-se o de BAILEY⁵ (1935 apud BOYLE; SPENCE, 1983), os métodos descritos no trabalho e os objetivos buscados são similares aos praticados hoje em dia. O número de pesquisas sobre fluência aumentou no fim da década de 1950.

Os problemas envolvendo fluência em materiais e estruturas são amplamente discutidos em diversas conferências e artigos científicos. O Instituto

³ CARMICHAEL, G. T. H.; HORNBY, J. W. The Strain Behaviour of Concrete in Prestressed Concrete Pressure Vessels. **Magazine of Concrete Research**, v. 82, p. 5-16, 1973.

⁴ NASSER, K. W.; LOHTIA, R. P. Creep of Mass Concrete at High Temperatures. **ACI Journal** 68, n. 4, p. 276-281, 1974.

⁵ BAILEY, R. W. The utilization of creep test data in engineering design. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, June 1935. 131-349.

Politécnico de Toulouse, na França, organizou em julho a décima terceira conferência internacional “Creep 2015” sobre fluência e fissuras em materiais e estruturas de engenharia. Em 2014, a décima segunda conferência ocorreu no Japão. (INPACT SAIC, 2015). A União Internacional de Mecânica Teórica e Aplicada (IUTAM) organiza, a cada dez anos, o simpósio “Creep in Structures”, em português “Fluência nas Estruturas” (1960 – Stanford, 1970 - Gothenburg, 1980 - Leicester, 1990 - Cracow, 2000 - Nagoya (IUTAM, 2000)) para estabelecer tópicos novos e fundamentais sobre a fluência e atrair cientistas e engenheiros para a pesquisa e aplicação dessa área (IUTAM, 2015). Em 2010, o IUTAM apoiou o evento, que foi realizado em Paris, na França, porém não foi designado por simpósio e sim por conferência.

Boyle e Spence (1983) relacionaram alguns programas de computador existentes que podem desenvolver análises de fluência para um material. A seguir estão relacionados os softwares citados pelos autores. Alguns mais recentes, foram incluídos na lista:

ABAQUS	Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., EUA
ADINA	ADINA Engineering Inc., EUA
ANSYS	Swanson Analysis Systems Inc., EUA
ASAS-NL	Atkins Research & Development, UK
MARC	MSC Software Corp, EUA
PAFEC	PAFEC Ltd., UK

Existem, obviamente, diversos outros softwares ou programas sem registro em circulação, muitos para serem mencionados neste trabalho. Owen e Hinton (1980) produziram um livro, no qual um programa de computador para problemas elastoviscoplasticos (plasticidade e fluência) é descrito inteiramente. Bazant (1982b) apresentou um artigo no qual um programa de computador que simulava o comportamento da fluência e retração em estruturas foi inteiramente descrito na linguagem FORTRAN. A maioria dos programas mencionados lida não só com problemas de fluência, mas também com não linearidades estruturais (como plasticidade ou grandes deformações).

Lazzari et al. (2014) implementaram um modelo elastoplástico com fissuração, com a ajuda de uma ferramenta computacional de customização do ANSYS, onde foram adicionadas novas subrotinas ao programa principal em linguagem FORTRAN.

Pimenta⁶ (2003 apud OLIVEIRA, 2007) realizou diversas análises não lineares físicas de peças estruturais de concreto armado utilizando o software ANSYS. As peças foram analisadas com o emprego de diferentes elementos e modelos constitutivos para representar o concreto e o aço. Segundo o autor, os modelos baseados em plasticidade, quando comparados aos modelos elásticos, mostraram-se eficientes e forneceram resultados próximos dos experimentais. É importante ressaltar que os modelos que representaram com mais fidelidade o comportamento real das estruturas foram aqueles que utilizaram elementos sólidos com critério de ruptura à tração e de plastificação à compressão. Além disso, os resultados dos modelos com armadura discreta e dispersa mostraram-se muito próximos, sendo mais vantajosa a utilização do modelo de armadura dispersa, por proporcionar uma modelagem bem mais simples, decorrente do menor número de elementos gerados e de proporcionar mais liberdade na discretização.

Segundo Altenbach (2007), o maior desafio da modelagem da fluência para análises estruturais é desenvolver uma ferramenta que permita simular o comportamento dependente do tempo (*time-dependent*) em estruturas de engenharia até atingir o estado crítico, ou o estado de ruptura. O mesmo autor desenvolveu estudos de simulação computacional da fluência até o estado de ruptura. Os estudos desenvolvidos utilizaram materiais homogêneos, como o aço.

Para o concreto armado não é frequente encontrar estudos de simulações que envolvem o estado terciário, ou de ruptura, da fluência. Além disso, os coeficientes das funções de fluência das simulações pelo método dos elementos finitos precisam ser calibrados a partir de valores esperados da deformação real.

Kataoka *et al.* (2009) apontam a fluência como uma das principais patologias em estruturas de concreto, apesar de seu comportamento ser pouco estudado em concretos feitos com cimentos nacionais. A deformação por fluência, considerando concreto de linha de produção brasileira foi monitorada pelos autores utilizando o equipamento DataTaker e o programa DeTransfer. Corpos de prova cilíndricos foram monitorados pelo período de um mês. As deformações por fluência dos ensaios experimentais foram próximas do previsto pela NBR 6118 (2014).

⁶ PIMENTA, A. L. G. S. **Estudo e Aplicações de Modelos Constitutivos para Avaliação do Comportamento Não Linear em Peças de Concreto Armado**. Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2003. (Dissertação - Mestrado).

Marques et al (2013) fizeram comparações entre resultados físicos de fluência por secagem de corpos de prova de concreto autoadensável carregados em idades diferentes e mantidos em câmara climatizada e em ambiente de clima não controlado. Também compararam os resultados dos ensaios aos resultados de modelos de previsão disponíveis na literatura. Nesse trabalho, foi comprovado que concretos carregados com maiores idades apresentam menores deformações por fluência. Também foi comprovado que as alterações na umidade durante o primeiro mês de ensaio possuem maior influência nas deformações.

Martinelli (2003), ao desenvolver um programa em método dos elementos finitos que realiza a análise tridimensional em lajes de concreto armado com e sem armadura de cisalhamento, utilizou um modelo elastoplástico com endurecimento para descrever o comportamento do concreto comprimido. De acordo com a autora, esse modelo corresponde à solução estável do modelo elastoviscoplasticidade. O Código-Modelo CEB-FIP 1990 recomenda a superposição linear de fluência para níveis de tensão menores que $0,4f_{cm}$ (40% da resistência média a compressão), que foi a faixa de tensões trabalhadas. Para o comportamento linear da fluência, a determinação dos parâmetros necessários foi apresentada por Clure⁷ (1994 apud MARTINELLI, 2003). Segundo Cook (1995), análises não lineares demandam mais do que análises lineares, em termos de recursos computacionais e experiência do analista. Na análise não linear, muito mais do que na análise linear, a natureza do problema pode se tornar clara somente após resolvê-lo. Os elementos apropriados, a divisão da malha, os algoritmos de solução e as etapas de carregamento podem não ser deduzidos pelo analista sem uma análise preliminar. Dessa forma, uma tentativa de resolver um problema não linear “de uma vez só” provavelmente irá falhar. Sendo assim, é recomendável realizar uma análise simplificada antes de partir para os resultados através de elementos finitos. Isso pode ser particularmente difícil quando o problema é não linear, e um pouco dessa dificuldade pode ser mais qualitativa do que quantitativa. Para realizar uma análise não linear deve-se ter alguns resultados de ensaios experimentais para comparação.

Sampaio (2004) montou as curvas de fluência adotando valores para as suas respectivas constantes ao realizar um trabalho de pesquisa, cujo objetivo

⁷ CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplasticidade de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. CPGEC/UFRGS. Porto Alegre, p. 145. 1994. (Dissertação - Mestrado).

principal foi comparar o comportamento de vigas biapoiadas de concreto armado submetidas à fluência, modeladas pelo método dos elementos finitos e calculadas pelas recomendações da NBR 6118:2003, com vigas ensaiadas experimentalmente. Os ensaios utilizados não levaram as vigas à ruptura, portanto, o estado de fluência atingido foi, no máximo, secundário. O comportamento qualitativo dos diagramas de deslocamento x tempo obtido no estudo foi satisfatório. Nesse trabalho, entre outras coisas, concluiu-se que uma das prováveis causas para a divergência dos resultados obtidos nos ensaios físicos dos modelos da NBR 6118/2003 e do CEB-FIP 1990 seria a desatualização dos modelos destas normas. Essa desatualização foi atribuída à utilização de materiais com propriedades físicas diferentes dos materiais utilizados atualmente, ou seja, não foi levada em consideração, na elaboração destas normas, a evolução tecnológica no comportamento de tais materiais.

Santos (2006) calibrou os coeficientes da função de fluência utilizada na simulação com a função de fluência da NBR 6118:2003 em seu trabalho. Este autor desenvolveu uma metodologia baseada no método dos elementos finitos para análise de estruturas de concreto sob efeito do tempo. Foi investigada a capacidade de simular a fluência em estruturas com variação de umidade relativa do ambiente, espessura fictícia, instante de carregamento, tipo de cimento, *slump test* e temperatura média, além de análises com elementos de cabo de protensão. As simulações apontaram que quanto maior a umidade relativa do ar, menor a difusão de água na estrutura de concreto, diminuindo assim o coeficiente de fluência ϕ , que reduz a taxa de deformação por fluência na estrutura. As demais verificações apontaram que o método desenvolvido para as simulações se mostrou consistente.

Teixeira (2006) utilizou o software ANSYS para a análise de tensões e deformações por fluência no concreto compactado com rolo por método dos elementos finitos. A calibração dos coeficientes de fluência foi realizada isolando os coeficientes da função de fluência do ANSYS ao igualar a mesma com previsão de fluência de ensaios experimentais. Os resultados dos ensaios experimentais foram convertidos em uma formulação de fluência que pudesse ser utilizada na comparação das equações. Para a conversão foi utilizado o método dos mínimos quadrados por meio do software Maple. Lima (2007) também realizou análises de fluência, porém o mesmo utilizou um método numérico diferente de regressão

numérica e o modelo de cálculo baseado no CEB-FIP para calibração das curvas de deformação por fluência.

Marí et al. (2009) desenvolveram um método simplificado para o cálculo das deformações diferidas (a longo prazo) e deslocamentos em peças estruturais submetidas à flexão. Os coeficientes de fluência e de deformação por retração aparecem explicitamente na fórmula. A forma da função de fluência utilizada é a série de Dirichlet, em que os valores de três incógnitas são ajustados a partir de fórmulas empíricas ou experimentais, de acordo com recomendações de normas internacionais, pelo método dos mínimos quadrados. Nesse trabalho, o autor utilizou o código modelo CEB-FIP para os modelos de fluência e retração.

Para a calibração do modelo desenvolvido por Oliveira (2011), foram utilizados cálculos a partir de equações de fluência de normas. O autor desenvolveu um método para análise de estruturas planas em concreto armado. O trabalho considerou efeitos de segunda ordem e fluência. Para a análise foram utilizados cálculos por meio do método dos elementos finitos com elementos de barra de seis graus de liberdade. O efeito viscoelástico da fluência no concreto foi efetuado pelo modelo de Maxwell em camadas.

Madureira et al. (2013) simularam as deformações por fluência em pilares de concreto armado. Os estudos tiveram foco principal na análise da influência da taxa de armadura e da umidade sobre o fenômeno. A análise foi realizada para vinte e dois casos, diferenciados pela dimensão da seção transversal, pela taxa de armadura e pela umidade do meio ambiente. Utilizaram para isso o procedimento iterativo incremental e aproximação por método dos elementos finitos, com um modelo que não exige muito da memória computacional por não precisar do armazenamento do histórico de tensões. Esse é chamado de modelo de estado e considera somente as tensões do instante anterior ao analisado. Os coeficientes de fluência utilizados foram baseados em resultados da NBR 6118/07. Para a análise foi utilizado o software ACNL (Análise Constitutiva Não Linear). A eficiência do programa foi validada por meio da comparação de seus resultados com os obtidos através de um algoritmo simplificado, elaborado com base na Mecânica dos Sólidos. Constatou-se que a tensão no concreto diminui ao longo do tempo, como esperado, e que esse alívio de tensão é maior em pilares com taxas de armadura altas. Em pilares com taxas de armadura baixas foi constatado o aumento da tensão nas armaduras, chegando próximo à tensão de escoamento do material. A atuação da

umidade na deformação por fluência foi constatada verificando-se que a deformação é maior em ambientes com menor umidade.

Kataoka e Bittencourt (2014) analisaram a influência da taxa de armadura na transferência de carga devido à fluência e retração no concreto em pilares. A fluência e a retração no concreto armado causam redistribuição de tensões, provocando, ao longo do tempo, diminuição da tensão no concreto e aumento da tensão na armadura. Como resultado dessa redistribuição, em pilares subarmados, as armaduras podem chegar a escoar e pilares carregados excentricamente podem sofrer flambagem, mesmo em cargas de serviço. A análise foi feita confrontando os resultados de ensaios experimentais com simulação numérica utilizando modelo tridimensional para pilares de concreto armado com taxas de armadura de 0%, 1,4% e 2,8%, carregados com 30% e 40% da resistência média a compressão do concreto aos 7 dias. Para a simulação, foi utilizado o método dos elementos finitos por meio do software DIANA 9.3. Os elementos sólidos isoparamétricos para a modelagem do concreto possuem 20 nós e o modelo utilizou representação discreta para a armadura com elementos de barra de 2 nós. As curvas de fluência foram simuladas através do modelo reológico de Maxwell-Chain. O modelo de concreto considerado na simulação é viscoelástico e a calibração das curvas de fluência foi realizada a partir de três métodos: resultados de ensaios experimentais de fluência em corpo de prova, resultados de ensaios experimentais no pilar sem armadura e resultado numérico do código modelo ACI209, que está disponível no software. Os autores concluíram que a simulação numérica não representou o comportamento do concreto ao longo do tempo satisfatoriamente, principalmente no início da previsão, mas que é possível representar a redistribuição de tensões nas armaduras de pilares com taxas de 1,4% e 2,8% para 91 dias, calibrando as curvas de fluência com os resultados do ensaio experimental do pilar sem armadura.

Pimentel (2014) utilizou o programa ANSYS para a análise de fluência em *flares*⁸ de estruturas metálicas com carregamento termomecânico. O método utilizado para a análise de fluência foi o implícito, considerando fluência primária e secundária. Para a determinação das constantes de fluência utilizou a metodologia de regressão não linear, que se mostrou satisfatória, uma vez que os resultados do

⁸ *Flares* são estruturas normalmente verticais, altas, compostas por elementos de seção transversal tubular. Utilizados em: refinarias, plataformas offshore, plantas petroquímicas de processamento de gás natural e siderúrgicas.

modelo bidimensional apresentaram precisão de 92,5% em comparação com resultados experimentais.

Os modelos iniciais podem usar uma malha relativamente grossa, etapas de carregamento longas e uma tolerância de convergência liberal. Na sequência da análise, todos esses itens podem ser refinados. Geralmente é necessário atingir o carregamento final em diversas etapas, por motivos computacionais e não por motivos físicos. Uma etapa de carregamento muito longa pode produzir problemas de convergência. Também pode produzir uma mudança abrupta do diagrama carregamento versus deslocamento que pode ser confundida com um comportamento físico real (COOK, 1995). Altenbach (2007) realizou análises de convergência de modelos bidimensionais com consideração da fluência. O autor comparou os resultados das simulações para uma viga de aço utilizando os softwares ANSYS e Abaqus. O comportamento qualitativo dos resultados das simulações foi satisfatório para ambos os softwares, mas o comportamento numérico dos resultados foi mais preciso utilizando o Abaqus.

Alguns trabalhos realizados mostram a comparação entre os cálculos considerando fluência e retração sugeridos por normas e códigos internacionais.

Em uma revisão sobre a precisão de previsões de fluência produzidas por nove modelos de códigos e normas internacionais comumente utilizados, realizada por Fanourakis e Ballim (2003), os resultados mostraram que o modelo que apresentou os valores mais precisos de previsão de fluência, dos nove testados, foi o CEB-FIP (1970), com variação de 18% dos coeficientes. Isso significa que nenhum dos modelos chegou aos valores medidos nos ensaios físicos de comparação com muita precisão. Apesar de possuir o segundo modelo mais preciso, os autores indicaram a BS 8110⁹ (1985) para os cálculos na África do Sul. Os mesmos recomendaram o uso dessa norma pela simplicidade do código, pois a precisão das previsões não aumentou com a complexidade do método aplicado ou com o maior número de variáveis consideradas no método.

Em uma verificação realizada por Lima (2003) foi utilizado o princípio dos trabalhos virtuais, considerando os principais fatores que afetam os deslocamentos, como taxa de armadura, tipo e intensidade do carregamento e retração e fluência do

⁹ BS 8110 - *British Standard for Structural Use of Concrete*. É a norma britânica para projeto e construção de estruturas de concreto armado e protendido.

concreto. Segundo o mesmo autor, a norma brasileira limita a esbeltez (relação vão-altura) de vigas e lajes com o objetivo de limitar o deslocamento máximo. Este artifício possibilitava uma forma de pré-dimensionamento da seção do elemento estrutural, fornecendo ao projetista um valor para uma seção otimizada. Além de tabelas com limitação de esbeltez em função do tipo de apoio, a norma ainda indicava fatores de correção relativos à quantidade de armadura e tensões no aço. Para uma viga, foi observado que, para o estado limite de utilização, no qual o deslocamento máximo não deve exceder $L/300$, a carga máxima em serviço com a consideração da fluência chega a ser 70% menor do que o valor da carga máxima que a viga poderia atingir. A conclusão é que as prescrições normativas existentes no Brasil são insuficientes para impedir o surgimento de patologias decorrentes da deformação excessiva de vigas, pois os fatores de correção são limitados e não consideram os fatores verificados nesse trabalho.

Araújo (2005) realizou análises para comparação entre cálculos de vigas por métodos analíticos não lineares e os cálculos simplificados de fluência e retração sugeridos pelo ACI-318 (1995) e pelo CEB-FIP (1985). Os resultados obtidos para deslocamentos instantâneos calculados pelo CEB chegaram a ser quase 70% maiores que os calculados analiticamente. Essa diferença chegou a quase 21% para a ACI. Porém, como conclusão, o trabalho classifica os dois métodos simplificados como apropriados para o cálculo de deslocamentos instantâneos de vigas de concreto armado. Para deslocamentos considerando fluência e retração, o trabalho conclui que o método da ACI não traz resultados satisfatórios.

A bibliografia mostra que o ANSYS é um software adequado para a simulação da fluência no problema em questão. O elemento SOLID 186 possui as características necessárias para a análise de fluência. Quanto as diferentes rigidezes do concreto armado para a tração e compressão, seria possível simular utilizando o elemento SOLID 65, porém sob certos níveis de tensão esse elemento torna-se instável.

As referências relacionadas nesta revisão mostram que a simulação da fluência através do MEF é um assunto que resultou em poucos estudos no Brasil, sendo assim, os estudos deste trabalho pretendem colaborar com a disseminação dos conhecimentos já alcançados nessa área ao redor do mundo.

3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo serão abordados os conceitos teóricos fundamentais para o desenvolvimento dos estudos deste trabalho, como análise não linear, fluência em estruturas, cálculo de fluência por meio de normas, e as leis constitutivas da fluência no MEF.

3.1 ANÁLISE NÃO LINEAR

Existem muitas hipóteses a serem levantadas nas análises lineares, a primeira é a relação tensão-deformação (*stress-strain*), a segunda é o comportamento da deformação. A tensão é supostamente proporcional à deformação em uma relação direta na primeira hipótese. Já na segunda, as deformações da estrutura são proporcionais às cargas nela aplicadas. Um problema de análise de tensão é linear somente se todas as condições de proporcionalidade forem obedecidas. Na mecânica estrutural um problema é considerado não linear quando a rigidez da estrutura depende dos deslocamentos ou do estágio de carregamento em que ela se encontra (ALVES FILHO, 2012).

O comportamento estrutural não linear surge devido a diversas causas, que podem ser agrupadas nas seguintes categorias principais: não linearidades geométricas e não linearidades materiais ou físicas.

Se uma estrutura passa por grandes deformações, sua mudança na configuração geométrica pode fazer com que a mesma responda não linearmente. Deslocamentos ou rotações muito grandes são características de não linearidade geométrica. Se o equilíbrio é formulado na estrutura em sua posição deformada, levando-se em consideração momentos adicionais devido a forças axiais, diz-se que a análise é em 2ª ordem.

Diversos fatores podem influenciar as propriedades da relação tensão/deformação de um material, incluindo o histórico de carregamentos (como na resposta elastoplástica), condições de meio ambiente (como temperatura e umidade) e a quantidade de tempo que o carregamento foi aplicado (como na resposta da fluência). A não linearidade material ou física é uma característica do comportamento do concreto armado. Essa característica do material é, entre outros fatores, devida ao efeito da fissuração, da fluência e do escoamento das armaduras.

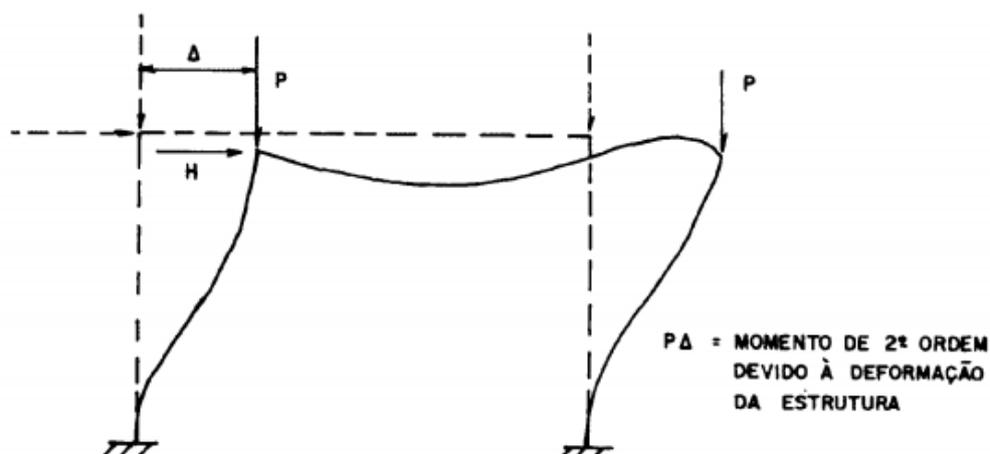


Figura 1 – Efeito P-Delta

Fonte: Silva (1996).

Pode-se analisar uma estrutura, como por exemplo, o pórtico da Figura 1, utilizando diferentes combinações de hipóteses da forma de trabalho do material e da estrutura, conforme representa a Figura 2. A forma mais simples de analisar um pórtico, por exemplo, é através da análise elástica linear de 1ª ordem. Nesta análise o material é assumido elástico-linear e as equações de equilíbrio são escritas a partir da configuração indeformada da estrutura. Na Figura 2, essa análise é ilustrada pela linha “A”.

Quando equações de equilíbrio são escritas a partir da configuração deformada, que é o caso da análise elástica de segunda ordem, Figura 1, obtém-se a curva “B” da Figura 2. Para pequenas deformações, o limite superior da análise elástica de segunda ordem é a carga de flambagem elástica do pórtico (P_{cr}).

Se o material tem o comportamento rígido-plástico e as equações de equilíbrio são baseadas na estrutura indeformada, a análise é representada pela linha “C” e denomina-se análise rígido-plástica em 1ª. ordem. Se a formulação da estrutura for feita com base na geometria deformada, para um material rígido-plástico, a relação carga-deformação é representada pela linha “D” e a análise é dita rígido-plástica em segunda ordem.

Para o material elastoplástico trabalhando em teoria de 1ª ordem, o comportamento é assumido elástico até certo limite, a partir daí é perfeitamente plástico. Para essa análise o equilíbrio é formulado na posição inicial da estrutura, a resposta carga-deslocamento é representada pela curva “E” e o seu limite superior é

estabelecido pela carga de colapso plástico (P_p). Se o equilíbrio for formulado na configuração deformada da estrutura, obtém-se a curva “F”, que representa a análise elastoplástica em 2ª ordem, conhecida também como análise não linear em 2ª ordem. O comportamento real da estrutura é representado pela curva “G” e a curva “F” é a que mais se aproxima desse comportamento.

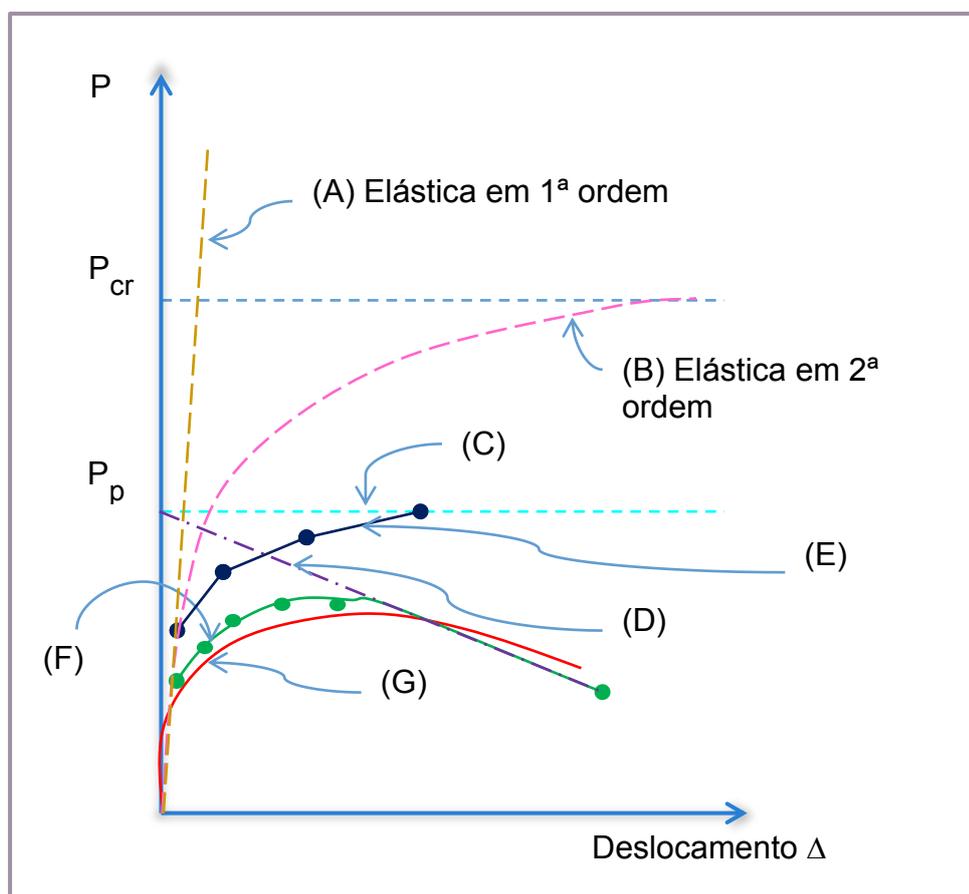


Figura 2 – Diferentes Tipos de Análise para um Pórtico

Fonte: Silva (1996).

A diferença entre as curvas “F” e “G” da Figura 2 depende de diversos fatores, tais como:

- Imperfeições iniciais das barras.
- Influência dos efeitos não lineares dos materiais, entre outros.

Embora a análise linear seja a mais utilizada em escritórios de projetos, há uma crescente necessidade de se considerar a não linearidade em estruturas de concreto armado, pois se pode prever com mais exatidão a resposta dos elementos estruturais às solicitações e, assim, economizar material na construção e aprimorar a capacidade de análise de patologias em obras.

Uma vasta revisão teórica sobre análise não linear física e geométrica pode ser encontrada em Owen e Hinton (1980), Bathe (1996) e Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005), e nos trabalhos de Stramandinoli (2007) e Gelatti (2012).

3.2 DEFORMAÇÕES DO CONCRETO

O concreto armado possui comportamento tipicamente elasto-viscoplástico, isto é, apresenta viscosidade, elasticidade e plasticidade. No concreto endurecido, segundo Leonhardt e Mönning (1977) devem ser distinguidos os seguintes tipos de deformações:

- Elásticas: Devidas ao carregamento ou à temperatura, estas deformações desaparecem completamente após a retirada do estímulo que as causou.
- Plásticas: Devido às cargas elevadas de curta duração, estas deformações não desaparecem completamente após a retirada do carregamento.
- Deformações que são função do tempo e das condições climáticas. Como consequência da alteração do gel do cimento no concreto, estas deformações podem ser classificadas em:
 - Retração ou “*shrinkage*” e expansão ou “*swelling*”: São deformações independentes do carregamento e devido à variação da umidade no gel do cimento.
 - Deformação lenta, conhecida como fluência ou “*creep*” e deformação lenta recuperável ou “*creep recovery*”. São deformações que dependem do carregamento e são devido à variação de volume do gel de cimento, que ocorre devido à aplicação ou retirada do carregamento.

Após o carregamento, depois de pouco tempo tem-se início a deformação lenta, dificultando a constatação da ocorrência de deformações puramente elásticas. Por esse motivo, nas medições de deformações feitas em ensaios em estruturas, é necessário determinar o tempo entre o carregamento e a medição, além da temperatura e da umidade do ar.

Segundo Neville (1982), a grandeza das deformações observadas e a curvatura do gráfico da tensão e deformação dependem, pelo menos em parte, da velocidade de aplicação da carga. Quando, por exemplo, a carga é aplicada muito rapidamente, em menos de 0,01 segundo, as deformações observadas reduzem

bastante e a curvatura torna-se bem menor. Quando se aumenta o tempo de carregamento de 5 segundos até aproximadamente 2 minutos, a deformação pode aumentar até 15%, porém entre 2 e 10 minutos, ou mesmo até 20 minutos (tempo usual em máquinas de ensaio) o aumento da deformação é bem pequeno. O fato de a deformação instantânea depender da velocidade de carregamento dificulta a distinção entre a deformação elástica e a deformação por fluência. Para fins práticos, estabeleceu-se a seguinte convenção: a deformação que ocorre durante o carregamento é considerada elástica e o aumento subsequente é admitido como somente devido à fluência.

Apesar de o concreto apresentar um comportamento não linear, as deformações são calculadas principalmente com o auxílio da Teoria da Elasticidade. A relação $\varepsilon = \sigma/E$ é, fundamentalmente, a equação inicial, onde ε é a deformação específica, “E” é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young e σ são as tensões às quais a peça é submetida.

A explicação para a não linearidade da relação tensão-deformação do concreto vem dos estudos sobre microfissuração progressiva do concreto sob carregamentos, realizados por pesquisadores da Cornell University¹⁰. Os estudos foram revisados por Glucklich¹¹ (1968 apud MEHTA; MONTEIRO, 2008) e encontram-se representados na Figura 3.

A Figura 3 mostra que o comportamento do concreto pode ser dividido em quatro estágios distintos quanto à relação entre o nível de tensão (expresso em porcentagem da carga última) e a microfissuração do concreto. Em condições de exposição atmosférica normais, nas quais um concreto é submetido aos efeitos da retração por secagem ou retração térmica, devido a diferenças entre os módulos de elasticidade da matriz de concreto e do agregado graúdo, surgem deformações diferenciais entre os dois, causando fissuras na zona de transição na interface. Dessa forma, mesmo antes da ação de uma carga externa, já podem existir microfissuras na zona de transição entre a matriz argamassa e o agregado graúdo. A quantidade e a abertura dessas fissuras dependem das características de

¹⁰ HSU, T. C. et al. J. ACI Proc., v. 60, n. 2, p. 209-223, 1963. e SHAH, S. P.; SLATE, F. O. **Proceedings of a Conference on Structure of Concrete**. Cement and Concrete Association. Slough, UK: Wexham Springs. 1968. p. 82-92.

¹¹ GLUCKLICH, J. **Proceedings of International Conference on the Structure of Concrete**. Cement and Concrete Association. Slough, U. K.: Wexham Springs. 1968. p. 176-185.

exsudação e do histórico de cura do concreto, dentre outros fatores. Abaixo de aproximadamente 30% da carga última, as fissuras da zona de transição na interface permanecem estáveis, portanto a curva tensão-deformação permanece linear, conforme ilustrado no estágio 1 da Figura 3.

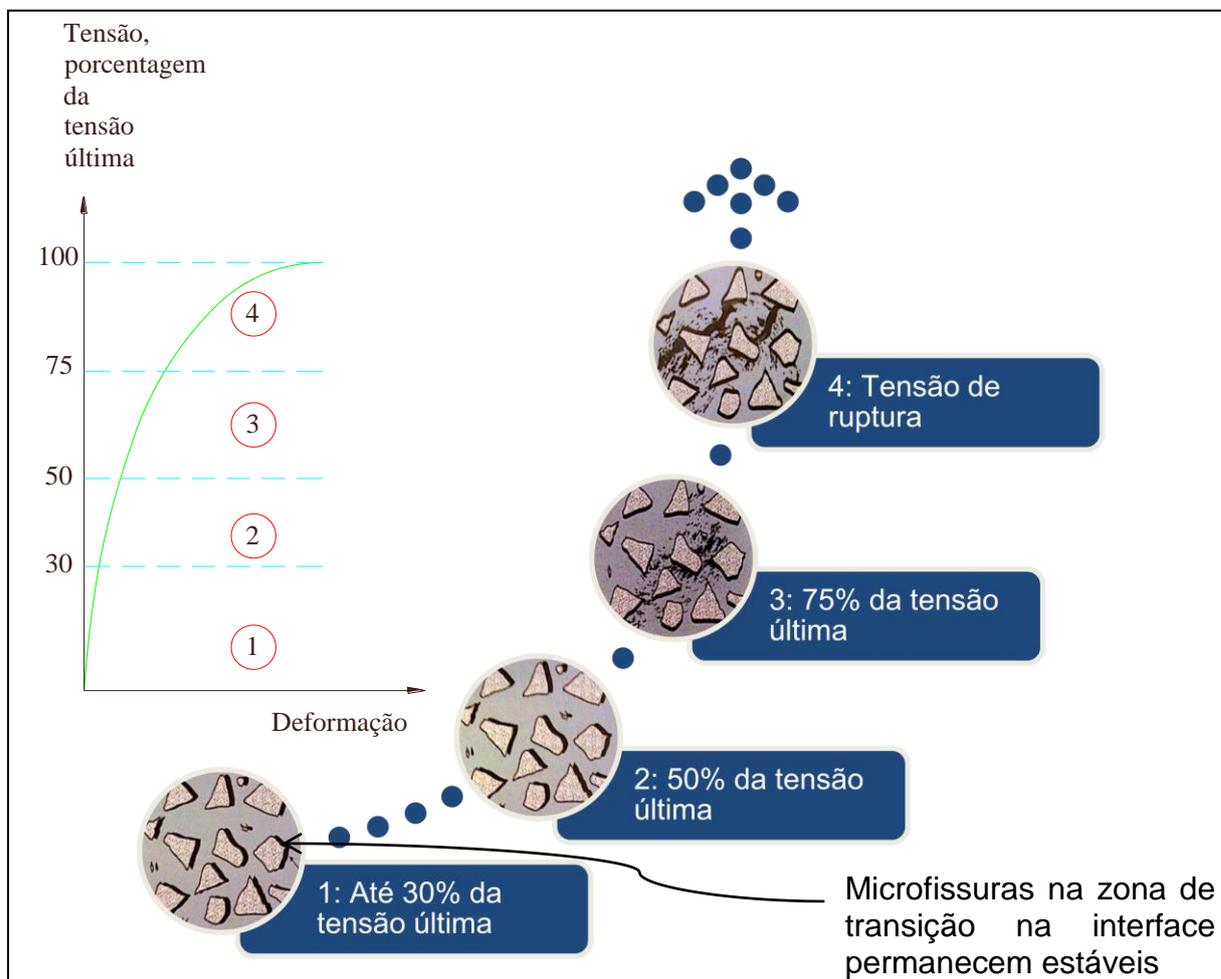


Figura 3 – Representação do Comportamento Tensão-Deformação do Concreto sob Compressão Uniaxial, Esquemático

Fonte: Adaptado de Glucklich (1968 apud MEHTA; MONTEIRO, 2008).

Quando a tensão no concreto supera os cerca de 30% da carga última e continua crescendo, as microfissuras de transição na interface começam a aumentar em comprimento, abertura e quantidade. Assim, a relação deformação/tensão aumenta e a curva começa a se desviar sensivelmente da linearidade. Entretanto, até aproximadamente 50% da tensão última, parece existir um sistema estável de microfissuras na zona de transição na interface. Esse é o estágio 2 da Figura 3, onde a fissuração da matriz é insignificante. No estágio 3, entre 50 e 60% da carga última, a matriz sofre a formação de novas fissuras. Se a tensão aumenta até cerca

de 70% da carga última, o sistema de fissuração na zona de transição na interface não só se torna instável, mas também aumenta a proliferação e propagação das fissuras na matriz, fazendo com que a curva tensão-deformação se afaste consideravelmente do formato linear, inclinando-se na horizontal. No estágio 4, entre 75 e 80% da carga última, a taxa de liberação de energia de deformação aparentemente alcança o nível crítico necessário para o crescimento espontâneo das fissuras sob tensão constante e o material se deforma até romper.

A seguir são apresentados os diversos comportamentos do concreto de agregados normais quanto às deformações.

3.2.1 Deformações Elásticas

Neville (1982) usou a seguinte sentença para definir um material perfeitamente elástico:

“Um material é denominado perfeitamente elástico se as deformações aparecerem ou desaparecerem imediatamente com a aplicação e remoção de tensões.”

Segundo o autor, a definição de material elástico não implica a linearidade da relação entre tensão e deformação. O comportamento elástico associado a uma relação não linear entre tensão e deformação é observado, por exemplo, no vidro e em alguns minerais.

As características elásticas de um material são uma medida de sua rigidez, segundo Mehta e Monteiro (2008). Apesar das características de comportamento não linear do concreto, é necessário determinar o seu módulo de elasticidade.

3.2.2 Deformações Plásticas Independentes do Tempo

Para carregamentos de curta duração (*short time loading*) e para tensões acima de 30% da resistência à compressão do concreto (F_c), o material apresenta um traçado com curvatura acentuada nos diagramas tensão-deformação. Na Figura 4 está representada a curva, em que se nota que com o descarregamento do corpo de prova a deformação não volta a zero. As deformações elásticas e plásticas somam-se, sendo a deformação total representada por:

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} \quad (1)$$

Neville (1982) ressalta que a expressão “módulo de deformação elástica” ou “módulo de Young” só pode ser aplicada à parte reta da curva tensão-deformação, ou, quando não houver parte reta, à tangente da curva na origem. Nesse caso, dá-se o nome de módulo de deformação tangente inicial (ou módulo tangente inicial).

De acordo com esse autor, o valor do módulo tangente inicial tem pouca importância na prática. Porém, ele é utilizado até hoje nos cálculos de estruturas recomendados por norma.

Para as solicitações mais elevadas, pode-se notar na figura que as deformações não podem mais ser calculadas com módulo de elasticidade constante.

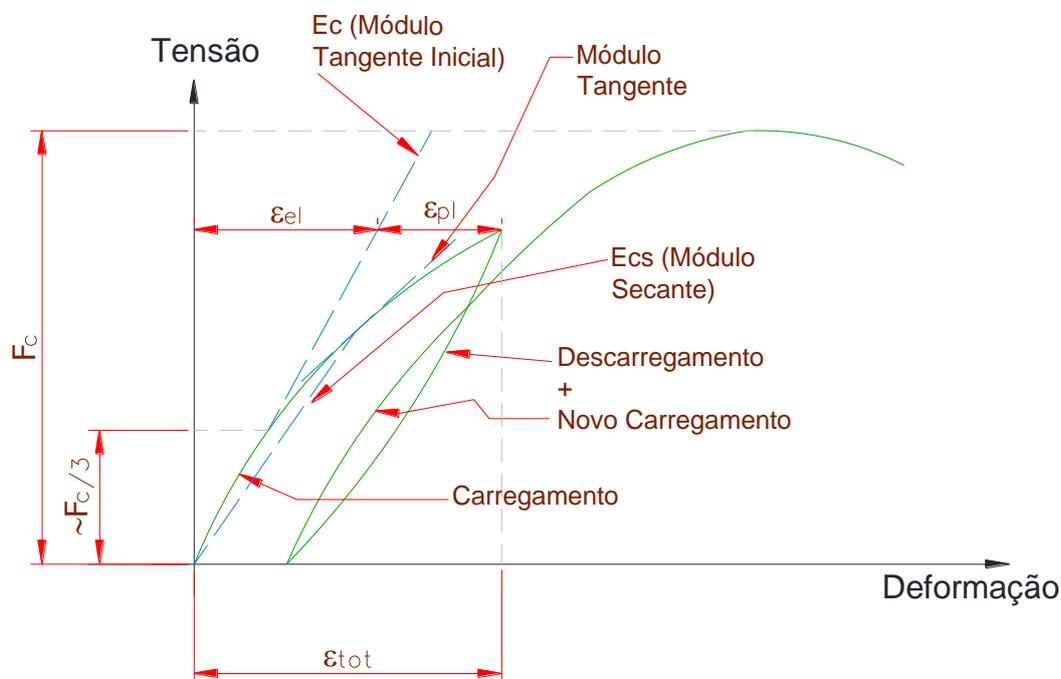


Figura 4 – Curva Tensão x Deformação Típica do Concreto Prismático sob Carregamento (esquemático)

Fonte: Adaptado de Neville (1982) e Leonhardt e Mönnig (1977)

A resistência do concreto tem influência no comportamento tensão-deformação. Concretos de menor resistência possuem maior capacidade de deformação plástica. O sentido da concretagem e a direção do carregamento também têm influência no traçado dos diagramas tensão-deformação e no valor da resistência à compressão.

As peças concretadas na direção do carregamento desenvolvem deformações maiores que as demais e assim a resistência da peça é,

analogamente, menor que a de peças carregadas transversalmente. Segundo Leonhardt e Mönning (1977), esse fato se deve aos vazios sob os agregados graúdos, por meio da deposição da argamassa nesses espaços.

3.2.3 Deformações Dependentes do Tempo

3.2.3.1 Tipos e Causas

Devido às alterações climáticas (no ar e na água), o concreto pode apresentar alterações de volume. As alterações devido às influências do meio ambiente e que são independentes do carregamento são conhecidas como retração e expansão. A primeira é a diminuição do volume, ocasionada pela evaporação da água não consumida na reação química de pega do concreto. A segunda é o aumento de volume, ocasionado pela absorção da água ambiente, em locais de alta umidade do ar ou até sob a água.

Dois outros fenômenos dependentes do tempo estão relacionados aos carregamentos e às deformações. São eles: fluência e relaxação.

O fenômeno que ocorre quando há um aumento de deformação com o tempo sob a ação de carregamentos ou de tensões permanentes é denominado fluência, como introduzido no capítulo 1. A tendência é que ele seja ativado por altas tensões, embora ele possa ocorrer também em tensões intermediárias. A relaxação é a diminuição de uma tensão inicial em um comprimento mantido constante.

Conforme Leonhardt¹² (1961 apud LEONHARDT e MÖNNIG, 1977), essas variações não elásticas de tensões e deformações têm suas causas na microestrutura da matriz de argamassa.

As propriedades do concreto que variam ao longo do tempo são chamadas de propriedades reológicas (ARAÚJO, 2002). A fluência rápida ocorre nas vinte e quatro horas iniciais após a concretagem e a fluência lenta ocorre após esse tempo (SILVA, 1997).

Durante a contração da massa do gel de cimento ocorre a retração, que é parcialmente reversível em locais de alta umidade do ar ou dentro d'água.

¹² LEONHARDT, F. Die Mindestbewehrung im Stahlbetonbau. **Beton und Stahlbetonbau**, v. 9, p. 218-223, 1961

O deslocamento dos grãos ocorre em direções lineares, de regiões com grande concentração de material para menor concentração. Pode ocorrer em baixas tensões, mas normalmente precisa de altas temperaturas (ALTENBACH, 2007).

Por ser sensível à temperatura e à umidade, a fluência e a retração são influenciadas pelas tensões capilares e especialmente pelo clima. Nestes fenômenos, as peças submetidas a tensões permanentes sofrem uma contração no gel do cimento, pois a água existente nos microporos do gel, não fixada quimicamente, é comprimida nos capilares e evapora. A fluência atinge uma paralisação após 15 a 20 anos, após diminuir com o passar do tempo.

Conforme a equação $\varepsilon_T = \nu \times \varepsilon_L$, onde ε_T é a deformação transversal, ε_L é a longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson, que representa a porcentagem de transferência das deformações de um sentido para outro, devido à deformação elástica, se existir uma compressão longitudinal σ_L , também ocorrerá uma deformação transversal. É necessário conhecer as deformações transversais devido à fluência para poder determinar a fluência num estado duplo de tensões.

Da mesma forma que a retração é parcialmente reversível, a fluência também é. Quando uma peça é descarregada, ocorre uma recuperação elástica. Após essa recuperação ocorre uma recuperação com o tempo, denominada “deformação lenta recuperável ou fluência recuperável” ou ainda “deformação elástica retardada”, conforme representado na Figura 5. A parcela restante da deformação é residual ou irreversível.

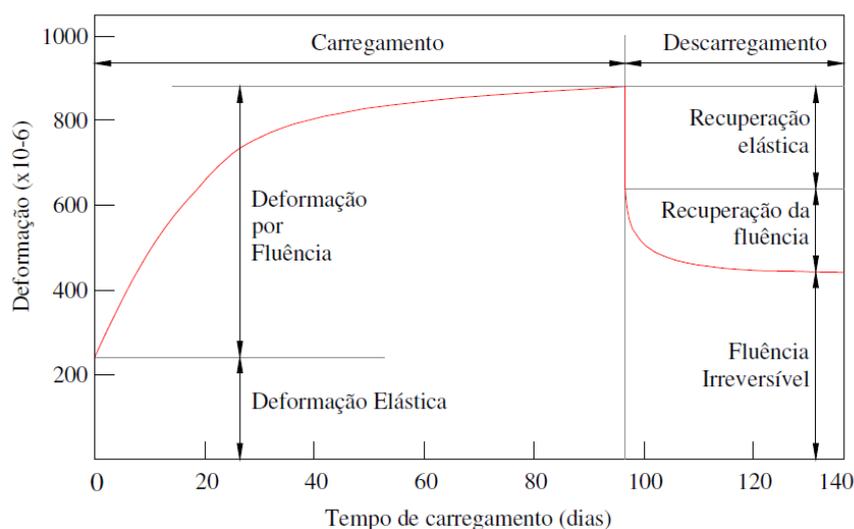


Figura 5 – Variação da Retração e da Fluência Devido à Carga e Descarga de uma Peça Prismática de Concreto (esquemático)

Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977) e Mehta e Monteiro (2008).

O volume do concreto endurecido é menor que o volume do concreto fresco, o motivo disso é a perda da água e do ar incorporados na mistura. Após o endurecimento, o concreto apresenta uma composição sólida e seu interior possui poros capilares muito finos preenchidos em parte por uma parcela excedente da mistura composta por água e ar. Quando a cura finalizar, parte da água em excesso irá evaporar, desencadeando então os fenômenos capilares, responsáveis por determinadas deformações do concreto (TEIXEIRA, 2006).

Na relaxação, assim como na fluência, a expulsão da água não combinada começa no início do processo de deformação. O estado de tensões internas diminui devido à perda de água e ao volume permanecer invariável, pois o concreto já está endurecido. Ou seja, a água restante nos capilares é espremida com menor força. A relaxação possui intensidade decrescente e é função do clima.

A influência da umidade relativa é menor, no caso de elementos que tenham sido carregados após o elemento ter atingido o equilíbrio higroscópico com o meio. Dessa forma, na verdade, não é a umidade relativa que tem grande efeito sobre o fenômeno da fluência, mas o processo de secagem (NEVILLE, 1982) (MEHTA e MONTEIRO, 2008) e (SANTOS, 2006).

Os fenômenos de fluência e relaxação ocorrem em todas as formas de solicitação (torção, compressão, tração, cisalhamento) e devem ser considerados na compressão com mais frequência.

As deformações dependentes do tempo têm dependência muito grande das propriedades da massa do gel, ou seja, o fator de água-cimento e o teor de cimento. Quando a peça é carregada com poucos dias de idade ou com pouca secagem (logo após o endurecimento) ela sofre mais fluência que um concreto de maior maturidade.

3.2.3.2 Variação da Retração

A retração é influenciada pelos seguintes fatores: umidade do ar, idade e o grau de maturidade no início da secagem do concreto, espessura, teor de cimento e o fator água-cimento e temperatura ambiente.

A umidade do ar tem influência tanto na duração quanto no valor da retração. De acordo com Leonhardt e Mönning (1977), o maior valor de retração ocorre em edifícios muito aquecidos, principalmente em regiões de clima seco e seu valor é de aproximadamente 60×10^{-5} .

A idade e o grau de maturidade no início da secagem do concreto influenciam muito no valor da retração. Após um ano de idade e em climas úmidos, o valor da retração pode diminuir em até 40% em relação a climas de umidade média. A influência da idade é muito pequena entre 10 e 28 dias, logo, a influência da idade é geralmente desprezada na prática para esse período.

A retração de prismas de concreto com seção transversal de aproximadamente 12x12cm estabiliza após 2 a 4 anos em locais de umidade relativa do ar constante. Amostras mais espessas precisariam de um tempo mais longo. Em peças de seção transversal com diâmetro maior que 1m, por exemplo, seriam necessários até 15 anos, devido a maior lentidão da secagem; peças mais espessas atingem um alto grau de maturidade no centro da seção já no início da secagem, apresentando um menor encurtamento final por retração. A espessura influencia bastante nos cálculos da retração, devendo assim ser considerada.

O teor de cimento e o fator água-cimento também influenciam o valor da retração, como mencionado anteriormente. A relação se dá da seguinte forma: um teor mais elevado de cimento e/ou fator maior de água-cimento aumentam as deformações de retração.

Sabe-se que a temperatura ambiente do ar também tem influência na retração, pois quanto maior a temperatura, maior a secagem do concreto, portanto maior a retração. A observação de obras mostra que no inverno a retração atinge uma paralisação. Assim, deve-se levar em consideração esse fator na prática.

3.2.3.3 Variação da Fluência

Para solicitações até a ordem de $\sigma_b < 0,4 \times F_c$, onde σ_b é a tensão de compressão no concreto e F_c é a resistência prismática, a fluência é proporcional à deformação elástica inicial.

O coeficiente de proporcionalidade “ φ ” pode ser multiplicado pela deformação elástica para calcular a fluência, conforme a seguinte fórmula:

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta l_k}{l} = \varphi \times \varepsilon_{el} = \varphi \times \frac{\sigma_b}{E_b} \quad (2)$$

Onde:

ε_k =Fluência do concreto;

Δl_k =Variação do comprimento da peça após a fluência;

l =Comprimento da peça;

ε_{el} =Deformação elástica inicial;

σ_b =Tensão de compressão no concreto; e

E_b =Módulo de elasticidade do concreto.

As propriedades da fluência do concreto são caracterizadas pelo valor da fluência no tempo $t=\infty$, ou seja, no tempo em que cessa a deformação.

Para peças prismáticas de concreto submetidas à compressão centrada, a variação da fluência com o tempo está ilustrada na Figura 6, onde ε_k é escrito em função de φ_t (coeficiente de proporcionalidade no instante “t”) referenciado por φ_∞ (coeficiente de proporcionalidade para o valor final da fluência). Pode-se observar que a variação da fluência é semelhante à da retração, porém, a fluência possui uma duração mais longa.

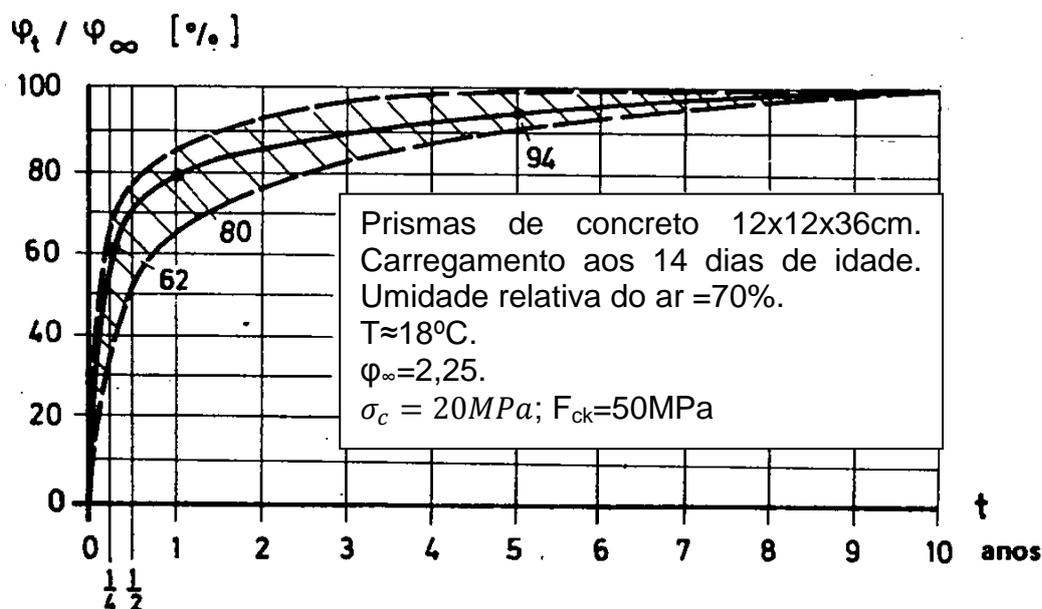


Figura 6 – Variação da Fluência com o Tempo em uma Peça Prismática de Concreto, Carregada Axialmente, com Umidade Relativa do Ar e Temperatura Constantes

Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977).

De acordo com Wittmann¹³ (1971 apud LEONHARDT; MÖNNIG, 1977), na maioria das vezes o cálculo da variação da deformação por fluência com o tempo é efetuado por meio de uma função exponencial, como, por exemplo, a “equação de Dischinger”, descrita na equação (3):

¹³ WITTMANN, F. Über den Zusammenhang von Kriechverformung und Spannungsrelaxation des Betons. **Beton und Stahlbetonbau** 66, Vol. 3, 1971. 63-65.

$$\varphi_t = (1 - e^{-\lambda \times t}) \times \varphi_\infty \quad (3)$$

Onde:

$\lambda = 0,03$ a $0,04$; e

t = Instante da deformação, em dias.

Para obter-se uma melhor concordância com a variação real, Krüger¹⁴ (1969 apud LEONHARDT; MÖNNIG, 1977) propôs a expressão da equação (4):

$$\varphi_t = \frac{t}{(a - b \times \varphi_\infty) + t} \times \varphi_\infty \quad (4)$$

Onde:

t = Instante da deformação, em dias;

$a = 26$ para concretos endurecidos normalmente e $a = 66$ para cura a vapor;

$b = 2$ para concretos endurecidos normalmente e $b = 15$ para cura a vapor.

As consequências da fluência no concreto são as mesmas da retração, uma vez que ambas possuem causas semelhantes.

Quanto menor a umidade relativa do ambiente, mais deformação por fluência o concreto sofre. Na Figura 7 pode-se ver a influência da umidade relativa do ar na deformação por fluência. Essa influência deve ser considerada no cálculo, inclusive para concretos dentro d'água.

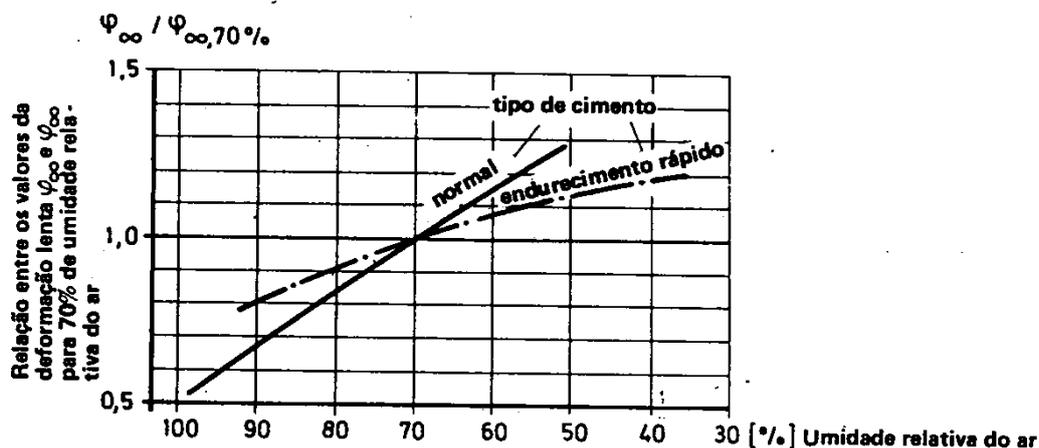


Figura 7 – Comparativo do valor da fluência em função da umidade relativa do ar para o cimento normal e para o cimento de endurecimento rápido

Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönnig, 1977 e 2a. Reimpressão 2008.

¹⁴ KRÜGER, W. Zum Zeitlichen Verlauf der Kriechkurven von Unbedampften und Bedampften Betonen. *Beton* 19, Vol. 4 1969. 155-158.

O grau de maturidade do concreto no início do carregamento interfere no valor de fluência do concreto desenvolvido ao longo dos anos. Essa ação é maior na deformação por fluência que na retração. A Figura 8 mostra o comparativo de valores para diferentes idades do concreto.

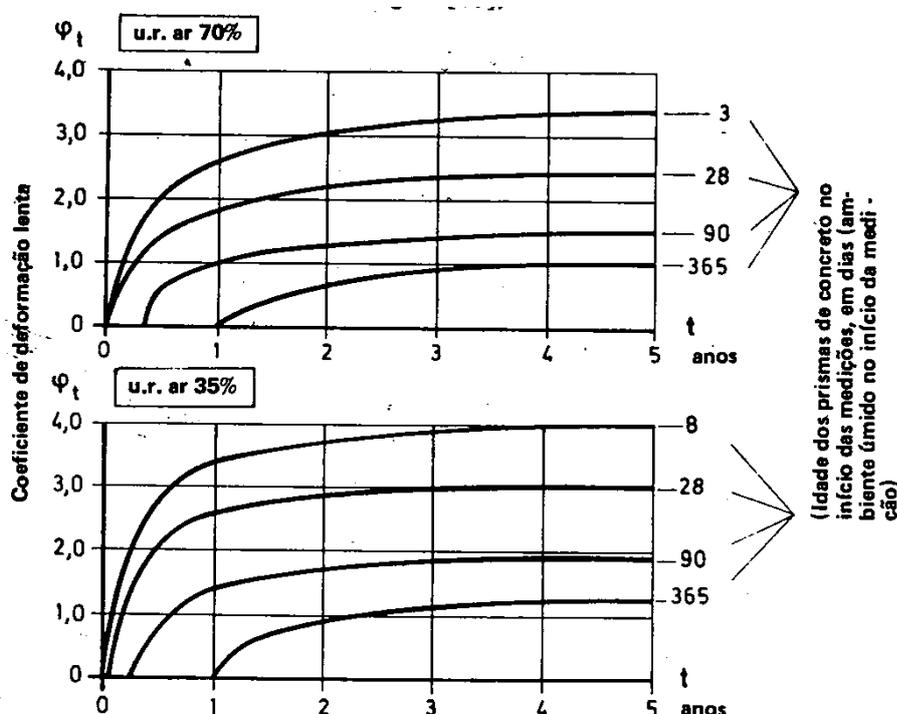


Figura 8 – Interferência da Idade do Concreto no Início do Carregamento sobre a Curva de Fluência de Prismas de Concreto de Características: 12x12x36cm, Resistência Cúbica Aproximadamente Igual a 49Mpa; Tensão de Compressão Aproximadamente Igual a 10 MPa e Temperatura Igual a 18°C

Fonte: Leonhardt e Mönning (1977).

A deformação por fluência é menor em peças mais espessas. A espessura das peças repercute na fluência, pois a secagem no interior de peças mais esbeltas é mais rápida que em peças espessas.

Quanto maior o consumo de cimento e água, maior será a deformação por fluência. Deve-se manter baixo o teor de argamassa e adotar-se uma granulometria descontínua para obter-se um concreto com pequenos valores de fluência.

A temperatura também possui uma atuação muito forte na deformação por fluência. Em temperaturas baixas, a fluência é menor.

Cimentos de alta resistência inicial dão origem a um elevado grau de maturidade em poucos dias em comparação com cimentos de endurecimento

normal. Como mencionado anteriormente, o grau de maturidade de concreto interfere na deformação por fluência, portanto, a qualidade do cimento também.

Esperam-se fissuras no material quando a deformação imediata da peça, somada à relaxação por retração, induzem a um nível de tensão que excede sua resistência à tração. As curvas de resistência do concreto versus tensão de tração com e sem relaxação encontram-se esquematizadas na Figura 9. A relaxação da tensão ocorre em conjunto com o fenômeno da fluência. A curva b ilustra o caso em que um elemento de concreto está restringido e a viscoelasticidade do concreto se manifesta na progressiva diminuição da tensão ao longo do tempo. Na prática, as relações tensão-deformação do concreto são muito mais complexas do que o indicado na figura. O concreto não é um material realmente elástico, além disso, tanto as deformações quanto as restrições não são uniformes por toda a peça de concreto. Assim, as distribuições de tensão resultantes tendem a variar de um ponto para outro.

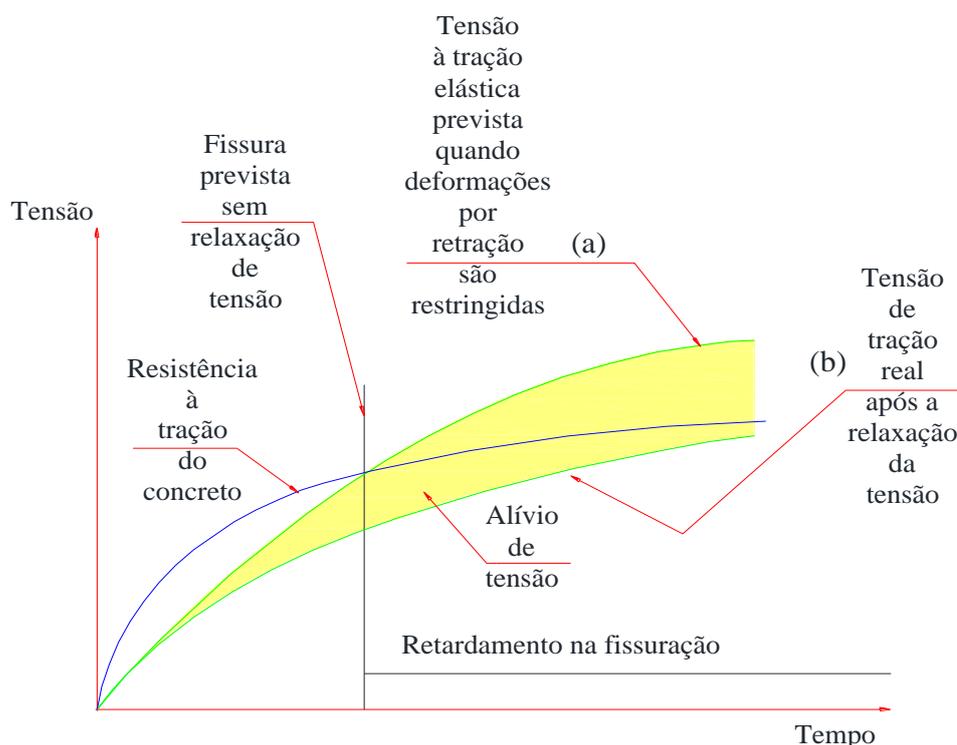


Figura 9 – Interferência da Retração e da Fluência na Fissuração do Concreto

Fonte: Adaptado de Troxell, Davis e Kelly¹⁵ (1968 apud MEHTA; MONTEIRO, 2008).

¹⁵ TROXELL, G. E.; DAVIS, H. E.; KELLY, J. W. **Composition and Properties of Concrete**. New York: McGraw-Hill, 1968.

3.3 FLUÊNCIA NAS ESTRUTURAS

Pode-se entender a fluência em estruturas como mudanças nos estados de tensão e deformação, dependentes do tempo, que acontecem em elementos estruturais como consequência de carregamento e de temperaturas externas. Como exemplos destas mudanças incluem-se deformações progressivas, relaxação e redistribuição de tensões, redução local de resistência de um material, etc. Nas estruturas, os estados de tensão e deformação não são homogêneos e são multiaxiais, na maioria dos casos (ALTENBACH, 2007).

A seguir, são apresentadas brevemente as características básicas do fenômeno fluência de acordo com resultados de ensaios de fluência publicados recentemente. Os experimentos citados foram realizados em laboratório, sob estados de tensão unidimensionais.

3.3.1 Ensaios Físicos de Fluência Plana

Os ensaios físicos de fluência plana fazem parte dos testes básicos realizados na avaliação do comportamento de um material. Os ensaios descritos a seguir servem para todos os tipos de materiais (ALTENBACH, 2007).

Nos ensaios de fluência, um corpo cilíndrico é aquecido até a faixa de temperatura $T=(0,3 \text{ a } 0,5)T_m$ (onde “ T_m ” é a temperatura de derretimento do material e a faixa 0,3 a 0,5 é usada para o aço) e carregado até a força de tração “ F ”. O valor da tensão normal do corpo “ σ ” é normalmente muito inferior ao valor de tensão de escoamento do material “ σ_y ”. A resposta instantânea do material é, então, elástica. A carga e a temperatura são mantidas constantes durante o ensaio e a deformação “ ε ” é inserida no gráfico versus o tempo “ t ”. A curva típica da fluência para um metal é apresentada no gráfico da Figura 10. A resposta instantânea é caracterizada pelo valor da deformação ε^{el} . A resposta variável com o tempo é o aumento lento da deformação ε , com uma taxa variável dessa deformação. Segundo Andrade¹⁶ (1910 apud ALTENBACH, 2007), os estágios da deformação, considerados numa curva de fluência típica, são três: o primeiro estágio (fluência reduzida, primária ou transiente), o segundo estágio (fluência estacionária ou secundária) e o terceiro estágio (fluência acelerada ou terciária). Durante a fluência

¹⁶ ANDRADE, E. N. D. C. On the Viscous Flow in Metals, and Allied Phenomena. **Proceedings of the Royal Society**, London, 9 June 1910. 1-12.

primária, a taxa de velocidade de fluência é decrescente até atingir certo valor, designado por taxa mínima de fluência ou velocidade mínima de fluência. O estágio secundário caracteriza-se por uma taxa aproximadamente constante de fluência, essa é a fase dominante do regime, nela as deformações ocorridas não são totalmente recuperadas. Durante o estágio terciário, a taxa de fluência aumenta. No fim do estágio terciário o corpo se rompe devido à fluência.

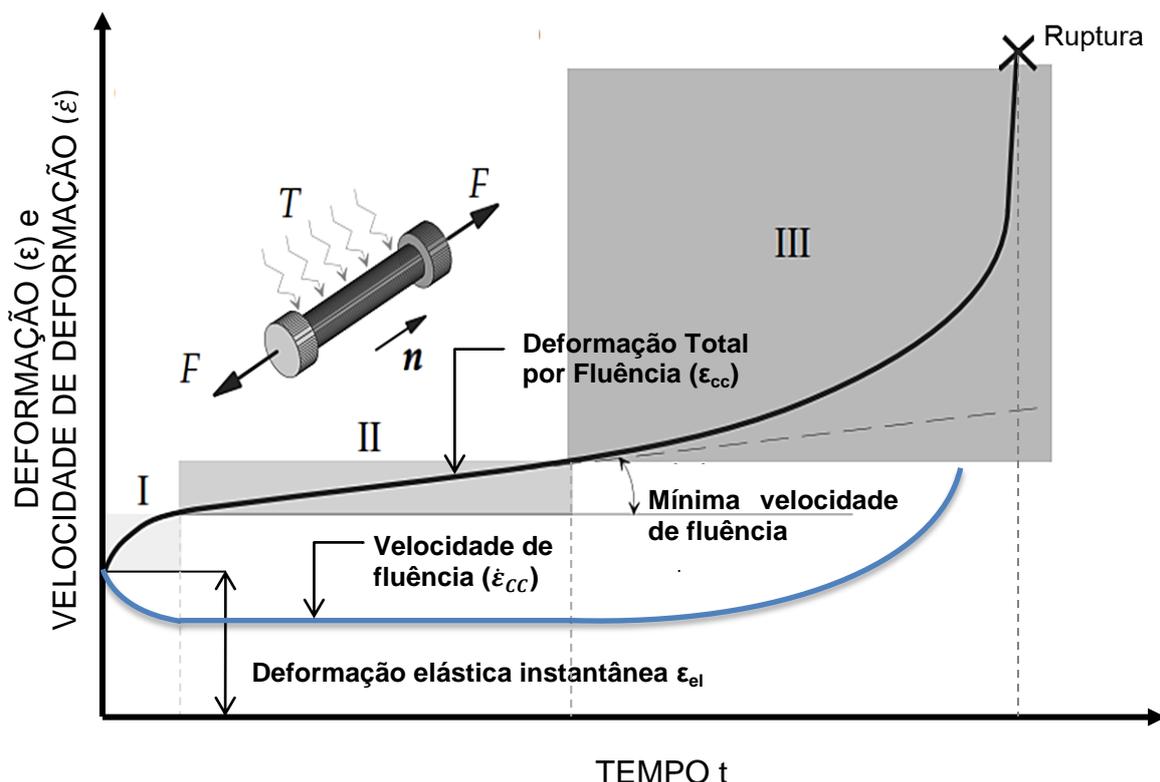


Figura 10 - Curvas de Deformação e Velocidade de Fluência vs. Tempo

Fonte: Adaptado de Altenbach (2007) e Cavalcante e Ramos (2010).

As propriedades do material que podem ser deduzidas a partir da curva de fluência plana são: a duração dos estágios; o valor da taxa mínima de fluência; o tempo para o rompimento do material; e a deformação antes do rompimento.

O formato da curva de fluência e a duração dos estágios dependem muito da tensão e da temperatura aplicados, conforme a Figura 11. Para conseguir obter as propriedades mecânicas do material, uma série de ensaios de fluência são realizados para diferentes tensões e temperaturas. Dos resultados das curvas de tensão obtidas pode-se traçar os gráficos de taxa mínima de fluência x curva de tensão, taxa mínima de fluência x curva de temperatura, taxa de fluência x curva de tempo e tensão x curva de tempo de ruptura (curva de resistência a longo prazo). As

amplitudes de valores de tensão e temperatura devem ser selecionadas de acordo com as variações esperadas na estrutura durante o serviço. Boyle e Spence (1983), entre outros, produziram exemplos das curvas mencionadas acima para diversos materiais.

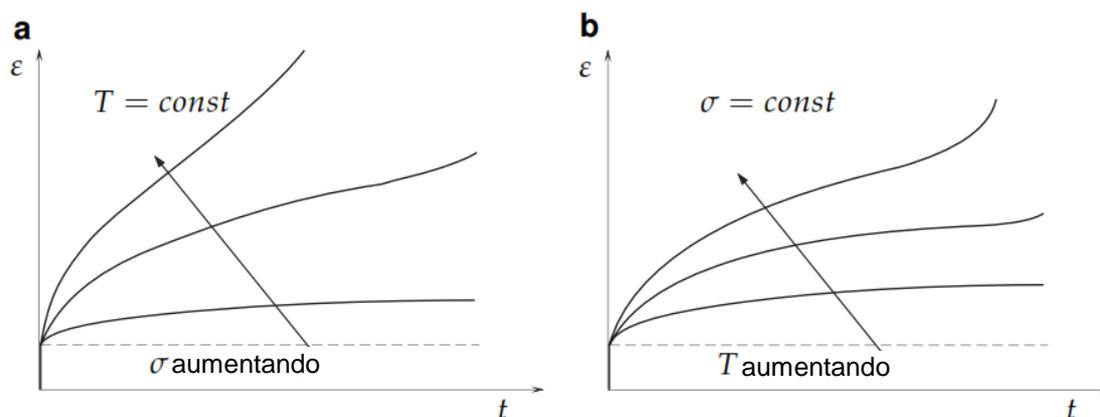


Figura 11 – Interferência da Tensão e da Temperatura no Fenômeno Fluência. a) Relação com o Tempo b) Relação com a Temperatura

Fonte: Adaptado de Altenbach (2007).

A seguir, serão abordadas duas formas adicionais de comportamento tensão x deformação variável com o tempo em ensaios uniaxiais, que são: recuperação de fluência e relaxação. Na Figura 12, observa-se que a recuperação de fluência geralmente ocorre quando, após certo período de tempo agindo na peça, a carga é removida. Na Figura 12.b, após o descarregamento a deformação diminui em um valor de ϵ^{el} (recuperação da deformação elástica). Então, diminui devagar para o valor permanente (irrecuperável) ϵ^{pm} , enquanto que ϵ^{rec} é o valor da deformação inelástica recuperada. Uma curva de relaxação típica é mostrada na Figura 12.c. A relaxação de tensão é observada quando a deformação é mantida constante no tempo ($\epsilon = \text{const.}$). Um corpo unidimensional é instantaneamente deformado para o valor $\epsilon^{\text{el}} = \sigma/E$, onde E é o módulo de Young. Durante a aplicação do carregamento do ensaio, a tensão decai continuamente de forma que a deformação inicial continue constante. A relaxação não é observável abaixo de uma tensão inicial (deformação), a qual é conhecida por tensão limite.

Em muitos casos, pode-se considerar a fluência (ϵ^{cr} ou deformação inelástica) como a diferença entre a deformação medida ϵ e a deformação elástica calculada (ϵ^{el}). As curvas de fluência podem ser apresentadas como deformação por fluência x curva de tempo, como na Figura 12.a e Figura 12.b. No caso da

relaxação, normalmente assume-se que a taxa de deformação inicial total é a soma das taxas de deformação elástica e por fluência. A taxa de deformação inicial da relaxação é igual a zero. No caso de peça restrita, tem-se:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}^{cr} = 0 \quad (5)$$

De acordo com essa suposição, durante o teste de relaxação ocorre a deformação por fluência e sua taxa diminui com o tempo. Esse caso está ilustrado na Figura 12 c.

Além de fluência e relaxação, na literatura são discutidos vários outros ensaios sob diferentes condições de carregamento e/ou deformação. Exemplos para curvas de fluência sob carregamento gradual são apresentados nos trabalhos de Faruque, Zaman e Hossain (1996), entre outros. Nesse caso, os testes de fluência começam com certo valor de carregamento. Após a taxa de fluência atingir um estado estável, o carregamento é aumentado rapidamente (ou diminuído) e mantido constante por um período de tempo (tempo de espera). Estes testes permitem analisar efeitos transitórios de fluência, por exemplo, a duração da fluência primária após a rápida mudança no carregamento. Além disso, eles indicam que a taxa de fluência estabilizada sob certo valor de carregamento depende não só do valor de tensão aplicado, mas também do histórico de carregamentos (por exemplo: do número de ciclos de tensão anteriores, do tempo de espera, etc.).

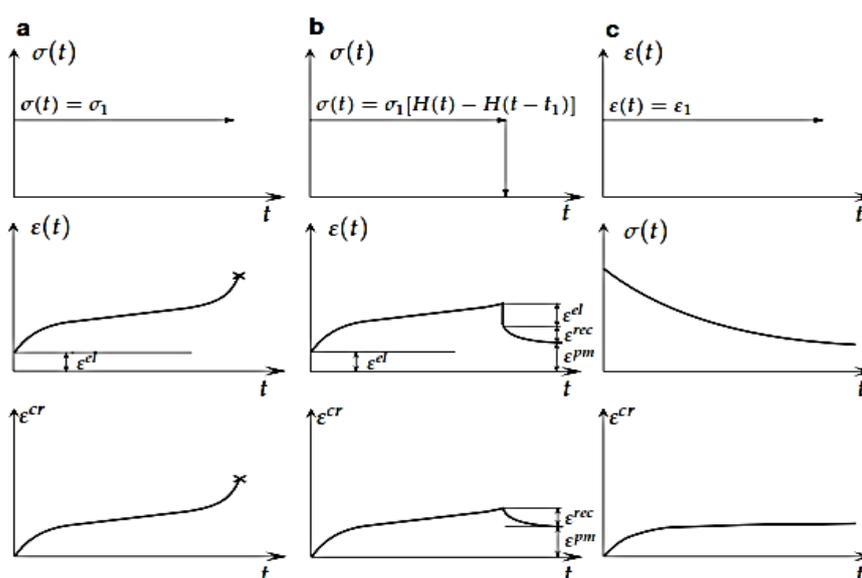


Figura 12 – Formas de Comportamento Tensão-Deformação Dependentes de Tempo sob Temperatura Constante. a) Fluência sob Tensão Constante. b) Recuperação de Fluência ($H(t)$ denota a função de Heaviside). c) Relaxação de Tensão

Fonte: Adaptado de Altenbach (2007).

Alguns diagramas tensão x deformação típicos encontram-se ilustrados na Figura 13. Estes diagramas foram obtidos com um ensaio controlado de deformação utilizando valores constantes de taxa de deformação e temperatura. Conforme explicado neste capítulo, o comportamento tensão x deformação depende, significativamente, do valor da taxa (velocidade) de deformação. O gráfico da Figura 13 mostra que após certo limite de tensão a deformação é fortemente influenciada pela velocidade de carregamento.

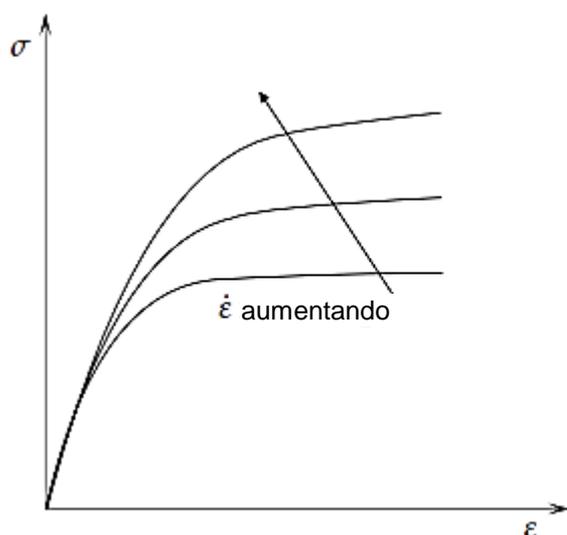


Figura 13 – Relação de Dependência da Taxa de Deformação com o Comportamento da Tensão-Deformação

Fonte: Adaptado de Altenbach (2007).

Diversos exemplos de dados retirados de ensaios experimentais para aço, obtidos com controle de deformação, podem ser encontrados em Stoufer e Dame (1996) e Krempl (1999).

O tipo de processamento do material (exemplo: aço galvanizado a frio ou a quente) interfere no fenômeno fluência, pois essa é altamente sensível a esse fator. A taxa de fluência após o carregamento para a deformação plástica é significativamente mais baixa se comparada à taxa de fluência do material “virgem”.

3.3.2 Introdução ao Modelo Elastoviscoplastico

O modelo de comportamento dos materiais usado neste trabalho para a consideração da fluência é elastoviscoplastico e a teoria é explicada por Zienkiewicz e Corneau (1974).

Alguns materiais possuem um comportamento plástico próximo do ideal no qual uma tensão de escoamento limite, (Y , y ou σ_y), existe e para essa tensão as deformações são indeterminadas. Para todas as tensões abaixo desse limite, supõe-se que a relação tensão-deformação é elástica linear (ou não linear). A Figura 14 ilustra isso.

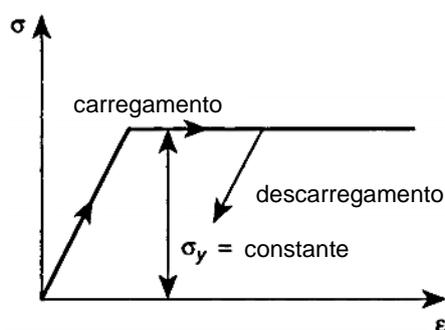


Figura 14 – Comportamento Plástico Ideal

Fonte: Adaptado de Zienkiewicz et al, (2005).

Um refinamento desse modelo é o do material plástico de endurecimento/amolecimento (Figura 15) no qual a tensão de escoamento depende de um parâmetro denominado “ k ” (como, por exemplo, a deformação plástica acumulada ϵ^p). É desse tipo de plasticidade que se trata este trabalho.

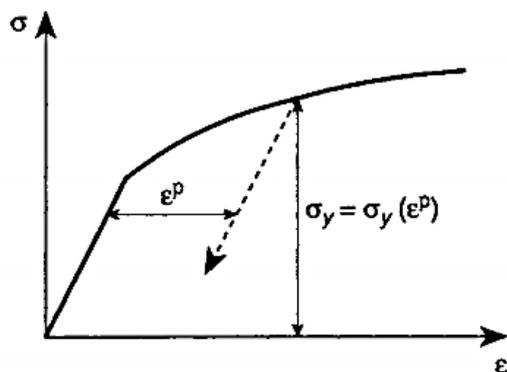


Figura 15 – Plasticidade de Endurecimento por Tensão ou por Deformação

Fonte: Adaptado de Zienkiewicz et al, (2005).

Von Mises¹⁷ foi o primeiro a sugerir que o comportamento que define os incrementos de deformação plástica tem relação com a superfície de escoamento. Na atualidade essa hipótese é bem aceita para muitos materiais; essa superfície de

¹⁷ MISES, R. von. **Mechanik der Plastischen Formänderung der Kristallen**. Z. angew. Math. Mech., 8:161-185, 1928.

escoamento e o critério de escoamento podem ser visualizados na Figura 16, onde o tamanho e posição da superfície dependem do valor do parâmetro k e σ_1 , σ_2 , ε_1 e ε_2 são as tensões e deformações principais.

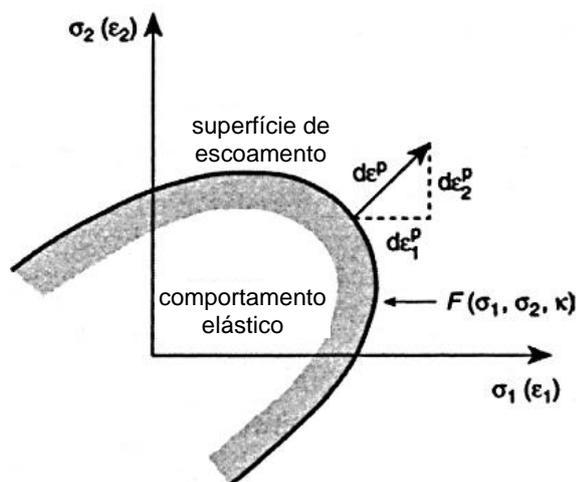


Figura 16 – Superfície de Escoamento e Critério Normalizado para o Espaço de Tensão Bidimensional

Fonte: Adaptado de Zienkiewicz et al, (2005).

Na Figura 16 $F(\sigma_1, \sigma_2, k)$ é a função que determina a superfície de escoamento.

No modelo elastoviscoplastico existem, além das deformações elásticas reversíveis (ε^e), um conjunto adicional de deformações (ε^{vp}), cujas características são marcadas por uma taxa de deformação igual a zero quando as tensões encontram-se abaixo de um patamar (ou do limite de escoamento) e apresentam uma taxa de deformação finita somente após o valor limite ser excedido.

Em um contexto unidimensional, esse modelo pode ser ilustrado pelo modelo reológico da Figura 17 (a), na qual o elemento viscoplastico permanece inativo quando $|\sigma| < \sigma_y$.

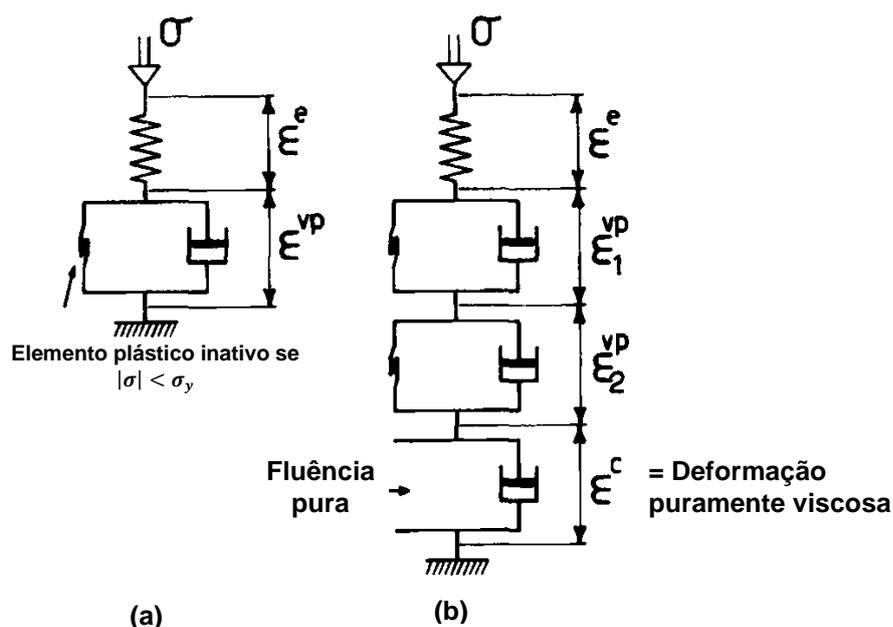


Figura 17 – Modelos Reológicos Viscoplásticos Unidimensionais

Fonte: Adaptado de Zienkiewicz e Corneau, (1974).

Combinando-se mais de um modelo viscoplástico em série tem-se um comportamento unidimensional visto na Figura 17 (b).

O conceito de viscoplasticidade não é novo; o chamado material Bingham é uma das suas versões mais antigas, introduzido em 1922 por Bingham¹⁸ (1922 apud ZIENKIEWICZ & CORMEAU 1974). Perzyna (1966) apresentou uma pesquisa que mostrou a evolução do modelo e Zienkiewicz e Corneau (1974) modificaram um pouco a formulação. Geralmente a deformação total desse modelo é dividida nas seguintes partes:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{vp} + \varepsilon^0 \quad (6)$$

Onde:

ε^e : é a deformação elástica;

ε^{vp} : é a deformação viscoplástica; e

ε^0 : é a deformação, autógena, inicial – como, por exemplo, as devidas a mudanças de temperatura.

¹⁸ BINGHAM, E. C. **Fluidity and Plasticity**. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1922.

Todas as deformações apresentadas são representadas por vetores de seis componentes, em um modelo tridimensional, conforme a Equação (7), onde o índice sobrescrito “T” significa matriz transposta.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}] \quad (7)$$

Definindo-se o vetor de tensão correspondente como $\boldsymbol{\sigma}$, pode-se escrever, para um material elástico linear:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^{-1} \times \boldsymbol{\sigma} \quad (8)$$

Onde:

\mathbf{D}^{-1} : é a matriz de elasticidade simétrica (matriz constitutiva).

As deformações viscoplásticas podem agora ser definidas. Uma condição de escoamento é dada pela Equação (9) (ZIENKIEWICZ e CORMEAU, 1974); geralmente postula-se, como um fato experimental, que o escoamento pode ocorrer somente se a tensão satisfizer o critério de escoamento da Equação (9) (ZIENKIEWICZ et al, 2005). Nessa equação, $F < 0$ denota um comportamento puramente elástico, nota-se que a taxa de deformação será função dos valores positivos de F . Nessa mesma Equação, y é a tensão de escoamento, k é o parâmetro de endurecimento (ou amolecimento) dependente do histórico de tensões e \vec{F} o tensor da superfície de escoamento (em um estado multiaxial, ao contrário do estado uniaxial de tensões, o conceito de escoamento precisa ser generalizado; k e $\boldsymbol{\sigma}$ são funções de nove componentes de tensores, ao invés dos seis componentes já utilizados na equação (7) (ZIENKIEWICZ et al, 2005).

$$F(\boldsymbol{\sigma}, k) \equiv \vec{F}(\boldsymbol{\sigma}, k) - y(k) = 0 \quad (9)$$

Para definir-se a relação entre os diversos componentes da deformação, utiliza-se um conceito da teoria da plasticidade clássica, denominado plasticidade potencial, definido pela Equação (10). A partir desse conceito, escreve-se a Equação (11).

$$Q(\boldsymbol{\sigma}) \quad (10)$$

$$\frac{d\varepsilon^{vp}}{dt} \equiv \dot{\varepsilon}^{vp} = \gamma \times \left\langle \varphi \left(\frac{F}{F_0} \right) \right\rangle \times \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (11)$$

Onde:

$\dot{\varepsilon}^{vp}$: é a taxa, ou velocidade, de deformação viscoplástica;

$\frac{d\varepsilon^{vp}}{dt}$: é a derivada em relação ao tempo da deformação viscoplástica, ou taxa de velocidade de deformação viscoplástica;

γ : é um parâmetro de escoamento, variável de acordo com o material utilizado e que pode ser descrito por algumas variáveis estabelecidas, como por exemplo: tempo, constantes de deformação total, etc.; e

F_0 : Denota qualquer valor conveniente, com referência a F , para tornar a expressão não dimensional.

Para garantir que não haverá escoamento viscoplástico antes da tensão de escoamento ser atingida, escreve-se:

$$\varphi(F) = \begin{cases} 0, & F < 0 \\ \varphi(F), & F \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

Em outras palavras, a equação (12) também pode ser escrita na forma da equação (13). (BATHE, 2010)

$$\langle \sigma - \sigma_y \rangle = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_y \\ \langle \sigma - \sigma_y \rangle, & \sigma \geq \sigma_y \end{cases} \quad (13)$$

Onde:

σ : é a tensão efetiva atual; e

σ_y : é a tensão de escoamento do material, que pode variar com o tempo infinitesimal, pois o material pode desenvolver o comportamento elástico, depois o plástico, variando o módulo de elasticidade, em uma relação que pode ser linear ou não linear. Bathe (2010) se refere ao módulo de elasticidade para a fase plástica como “*strain-hardening*” ou endurecimento por tensão.

Se a Equação (14) for satisfeita, trata-se de uma lei associativa¹⁹.

$$Q \equiv F \quad (14)$$

Se a condição for condizente à Equação (15), tem-se uma situação não associativa.

$$Q \neq F \quad (15)$$

As simplificações para o caso associativo são feitas simplesmente substituindo $Q = F$.

¹⁹ Na álgebra, uma lei associativa permite que fatores multiplicados entre si sejam substituídos por um operador único (MILLER, 1904).

Uma expressão suficientemente geral para a taxa de deformação viscoplástica é escrita a partir da lei potencial para φ , conforme a Equação (16).

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \gamma \times \left\langle \left(\frac{F}{F_0} \right)^n \right\rangle \times \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (16)$$

Onde:

n : é um expoente positivo, geralmente utilizado para a simplificação da função $\varphi(F)$, escreve-se $\varphi(F) = F^n$ (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2005). Esse expoente é outra constante do material, assim como γ (BATHE, 1996).

A equação (16) também pode ser escrita no formato da equação (17).

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \gamma \times \left\langle \frac{\sigma}{\sigma_y} - 1 \right\rangle \quad (17)$$

Diversos critérios de resistência podem ser introduzidos na formulação, dependendo da natureza dos materiais usados. Para os cálculos seguintes, será dada atenção aos materiais isotrópicos para os quais ambos F e Q podem ser definidos em termos de constantes de tensão. Define-se então:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = F(\sigma_m, J_2, J_3) \quad (18)$$

Onde:

σ_m , ou σ_y : é a tensão de escoamento do material;

J_2 : é o segundo invariante das tensões desviadoras; e

J_3 : é o terceiro invariante das tensões desviadoras.

De maneira similar à Equação (18), define-se Q , no qual σ_m, J_2, J_3 são as três constantes de tensão. Definem-se as constantes para um material isotrópico utilizando notação de tensores (ZIENKIEWICZ e CORMEAU, Apêndice B, 2005) como:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \times \sigma_{ii}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \times S_{ij} \times S_{ij} \quad (19)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \times S_{ij} \times S_{jk} \times S_{ki}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \times \sigma_m$$

Nas expressões (19) a notação indicial i, j e k podem ser substituídas por 1, 2 e 3.

Uma alternativa conveniente para a terceira constante é definida pela angulação de Lode:

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta = \frac{1}{3} \times \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \leq \frac{\pi}{6} \quad (20)$$

3.3.3 Superfície de Escoamento de Von-Mises

A primeira forma da Equação (21) é uma aproximação dada por Drucker & Prager²⁰ (1952 apud ZIENKIEWICZ & CORMEAU, 1974) para descrever materiais sólidos.

$$F = \frac{6 \times \text{sen}(\varphi)}{3 - \text{sen}(\varphi)} \times \sigma_m + \sqrt{3} \times \sqrt{J_2} - \frac{6 \times c \times \text{cos}(\varphi)}{3 - \text{sen}(\varphi)} \quad (21)$$

Se $\varphi = 0$ a fórmula se reduz simplesmente ao bastante conhecido critério de Huber-von Mises ou critério de Von-Mises:

$$F = \sqrt{3} \times \sqrt{J_2} - 2 \times c \cong \sqrt{3} \times \sqrt{J_2} - y \quad (22)$$

Onde:

y = tensão de escoamento,

Estas superfícies são angulares e encontram-se ilustradas nos planos da tensão principal na Figura 18.

²⁰ DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. Soil Mechanics and Plastic Analysis on Limit Design. **Quart. Appl. Math.**, **10**, 1952. 157-165.

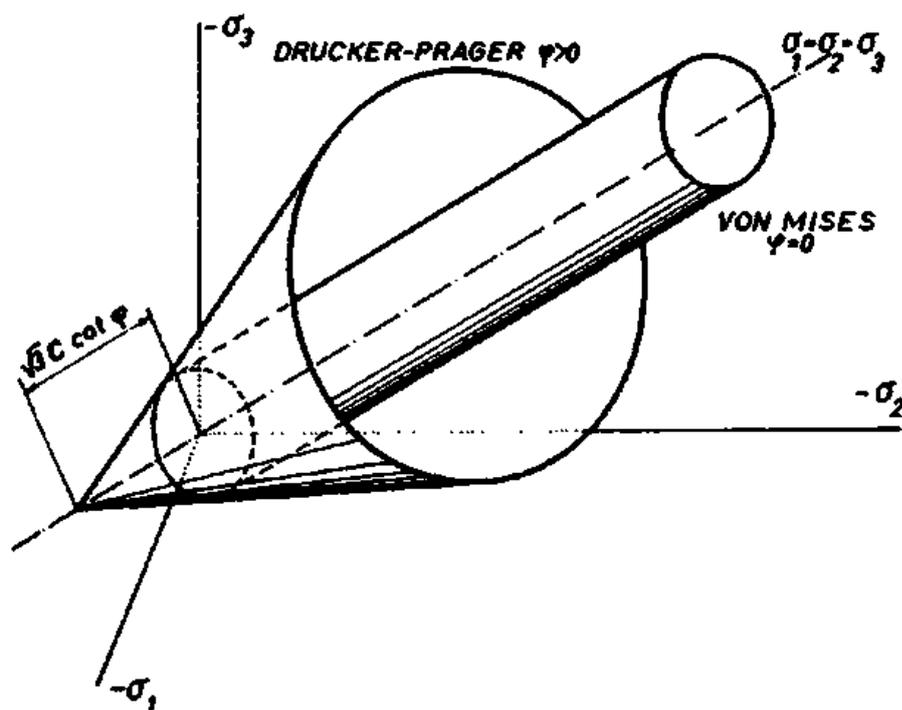


Figura 18 – Superfícies de Escoamento $c-\varphi$ nos Planos da Tensão Principal

Fonte: ZIENKIEWICZ e CORMEAU, Cap. 2.4 (2005).

Qualquer uma das duas expressões (21) e (22) podem ser utilizadas para definir potenciais de fluência não associadas adequadas e pode-se verificar que sempre é possível escrever a equação de fluência da seguinte forma:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \Gamma \times \sigma \quad (23)$$

Onde:

Γ é uma matriz simétrica dependente do estado de tensão vigente. A descrição detalhada dessa matriz pode ser encontrada no artigo de Zienkiewicz e Cormeau, (1974).

Para representar a fluência, a tensão y deve ser reduzida a zero na equação (9). Nesse caso, em qualquer nível de tensão vão ocorrer valores finitos da taxa de deformação por fluência. Pode-se verificar que a fórmula padrão para fluência em metais resulta da aplicação do critério de Von-Mises à expressão dada para Γ da Equação (23), utilizando a formulação utilizada no desenvolvimento da matriz Γ e a Equação (16) com um expoente n que para a maioria dos metais fica entre 3 a 7. Pode-se escrever explicitamente a Equação (24). Essa fórmula é reconhecida como lei de fluência ou lei de Norton.

$$\dot{\varepsilon}^{vp} \equiv \dot{\varepsilon}^{creep} = \bar{\gamma}(k) \times J_2^n \times \mathbf{M}^I \times \boldsymbol{\sigma} \quad (24)$$

Onde:

$\bar{\gamma}$: é um parâmetro de escoamento; e

\mathbf{M}^I : é uma das matrizes simétricas utilizadas na construção da matriz Γ .

3.3.4 Modelo de Fluência do CEB-FIP-1990

O COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (CEB) (1991) define em seu código a deformação total no tempo t , $\varepsilon_c(t)$, de um elemento carregado uniaxialmente no tempo t_0 com uma tensão constante $\sigma_c(t_0)$. Essa definição é expressa por:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (25)$$

Onde:

$\varepsilon_{ci}(t_0)$: é a deformação inicial no carregamento;

$\varepsilon_{cc}(t)$: é a deformação por fluência no tempo $t > t_0$;

$\varepsilon_{cs}(t)$: é a deformação por retração; e

$\varepsilon_{cT}(t)$: é a deformação térmica.

Simplificando essa expressão, o CEB-FIP faz a seguinte relação:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t) + \varepsilon_{cn}(t) \quad (26)$$

Na qual:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) \quad (27)$$

$$\varepsilon_{cn}(t) = \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (28)$$

Sendo que:

$\varepsilon_{c\sigma}(t)$: é a deformação dependente da tensão; e

$\varepsilon_{cn}(t)$: é a deformação que independe da tensão.

O modelo simplificado de fluência do COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (CEB-FIP) (1991) considera que para concretos estruturais de f_{ck} entre 12 e 80MPa, sob níveis de tensão em serviço (tensão de compressão) $|\sigma_c| < 0,4f_{cm}(t_0)$ (t_0 é a idade do carregamento em que a tensão é medida), as análises de estruturas em termos de deslocamentos e tensões na seção devem ser conduzidas assumindo-se a linearidade.

O modelo considera ainda que o concreto deve estar exposto em ambiente com umidade relativa na faixa de 40 a 100% e temperaturas médias entre 5°C e 30°C.

As recomendações podem ser estendidas a concretos submetidos a tensões de tração, apesar de as relações fornecidas serem direcionadas à previsão de efeitos de fluência em peças comprimidas.

Para uma tensão constante aplicada no tempo t_0 , considerando a fluência como um fenômeno linearmente ligado à tensão, tem-se que:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}} \times \varphi(t, t_0) \quad (29)$$

Onde:

$\varepsilon_{cc}(t, t_0)$: é a deformação por fluência no tempo $t > t_0$;

$\varphi(t, t_0)$: é o coeficiente de fluência da Equação (32);

E_{ci} : é o módulo de elasticidade aos 28 dias, que na falta de dados de ensaios pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$E_{ci} = E_{c0} \times \left(\frac{f_{ck} + \Delta f}{f_{cm0}} \right)^{1/3} \quad (30)$$

Onde:

f_{ck} : é a resistência característica (em MPa);

Δf : Utiliza-se 8MPa;

f_{cm0} : Utiliza-se 10MPa;

E_{c0} : Utiliza-se $2,15 \times 10^4$ MPa.

O efeito da temperatura no módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias pode ser calculado pela equação (31):

$$E_{ciCEB}(T) = E_{ci} \times \left(1,06 - 0,003 \times \frac{T}{T_0} \right) \quad (31)$$

Onde:

$E_{ciCEB}(T)$: é o módulo de elasticidade na temperatura T;

E_{ci} : é o módulo de elasticidade em temperatura ambiente igual a 20°C, conforme a equação (30);

T: é a temperatura em °C; e

T_0 : assume-se 1°C.

O coeficiente de fluência pode ser expresso como:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \times \beta_c(t, t_0) \quad (32)$$

Onde:

β_c : é o coeficiente que descreve a evolução com o tempo da fluência após o carregamento;

t: é a idade do concreto no momento considerado (em dias);

t_0 : é a idade do concreto no carregamento, ajustada conforme a equação (42) (em dias);

φ_0 : é o coeficiente de fluência nominal, conforme a equação (33):

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \times \beta(f_{cm}) \times \beta(t_0) \quad (33)$$

Com:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - (RH/RH_0)}{0,46 \times (h/h_0)^{1/3}} \quad (34)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{\left(f_{cm}/f_{cm0}\right)^{0,5}} \quad (35)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + \left(t_0/t_1\right)^{0,2}} \quad (36)$$

Nas equações (34) a (36), tem-se:

h: é a espessura equivalente do elemento (em mm), expressa por:

$$h = \frac{2 \times A_c}{u} \quad (37)$$

f_{cm} : é a resistência à compressão média do concreto aos 28 dias, (em MPa), expressa por:

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \text{ sendo } \Delta f = 8\text{MPa} \quad (38)$$

f_{cm0} : 10MPa;

RH: é a umidade relativa do ambiente (em %);

RH₀: 100%;

h₀: 100mm; e

t₁: 1 dia.

Na Equação (37), tem-se que:

A_c : é a área da seção transversal (em mm²); e

u : é o perímetro do elemento em contato com a atmosfera (em mm).

O efeito da temperatura na resistência à compressão do concreto pode ser calculado pela fórmula (39):

$$f'_{cm}(T) = f_{cm} \times \left(1,06 - 0,003 \times \frac{T}{T_0} \right) \quad (39)$$

Onde:

$f'_{cm}(T)$: é a resistência de compressão na temperatura T;

f_{cm} : é a resistência média à compressão na temperatura de 20°C, conforme a equação (38);

T: é a temperatura em °C; e

T_0 : Assume-se 1°C.

A evolução da fluência com o tempo, da Equação (32), é calculada da seguinte forma:

$$\beta_c(t - t_0) = \left[\frac{(t - t_0)/t_1}{\beta_H + (t - t_0)/t_1} \right]^{0,3} \quad (40)$$

Com:

$$\beta_H = 150 \times \left\{ 1 + \left(1,2 \times \frac{RH}{RH_0} \right)^{18} \right\} \times \frac{h}{h_0} + 250 \leq 1500 \quad (41)$$

Onde:

t_1 : 1 dia;

RH_0 : 100%; e

h_0 : 100mm.

O CEB-FIP também leva em consideração o tipo de cimento e a temperatura da cura para a previsão das curvas de fluência.

O coeficiente de fluência do concreto deve ser calculado considerando o tipo de cimento, modificando-se a idade na data do carregamento t_0 , de acordo com a equação (42):

$$t_0 = t_{0,T} \times \left[\frac{9}{2 + \left(t_{0,T} / t_{1,T} \right)^{1,2}} + 1 \right]^{\alpha} \geq 0,5 \text{ dias} \quad (42)$$

Onde:

$t_{1,T}$: 1 dia

α : este expoente é dependente do tipo do cimento, $\alpha = -1$ para cimentos de endurecimento lento (SL), $\alpha = 0$ para cimentos de endurecimento rápido ou normal (R e N) e $\alpha = 1$ para cimentos de endurecimento rápido e de alta resistência (RS);

$t_{0,T}$: ou t_T , é a idade do concreto no carregamento (em dias), ajustada de acordo com a equação (43):

$$t_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \times e^{\left[13,65 - \frac{4000}{273 + T \Delta t_i / T_0} \right]} \quad (43)$$

Em que:

Δt_i : é o número de dias em que a temperatura T prevalece;

$T \Delta t_i$: é a temperatura (em °C) durante o período de tempo Δt_i ;

T_0 : 1°C.

O efeito da temperatura na maturidade do concreto deve ser levado em conta ajustando a idade do concreto conforme a equação (43).

As equações (44) a (49) descrevem o efeito de uma temperatura constante, diferente de 20°C, enquanto o concreto está sob a ação de carregamentos.

O efeito da temperatura sobre o desenvolvimento da fluência é levado em consideração utilizando $\beta_{H,T}$ da equação (44):

$$\beta_{H,T} = \beta_H \times \beta_T \quad (44)$$

Com:

$$\beta_T = e^{\left[\frac{1500}{\left(273 + \frac{T}{T_0} \right)} - 5,12 \right]} \quad (45)$$

Onde:

$\beta_{H,T}$: é o coeficiente dependente da temperatura que substitui β_H na equação (40);

β_H : é o coeficiente de acordo com a equação (41);

T_0 : Assume-se igual a 1°C.

O efeito da temperatura no coeficiente de fluência é levado em consideração usando as equações (46) e (47)

$$\varphi_{RH,T} = \varphi_T + (\varphi_{RH} - 1) \times \varphi_T^{1,2} \quad (46)$$

Com:

$$\varphi_T = e^{0,015 \times \left(\frac{T}{T_0} - 20\right)} \quad (47)$$

Onde:

$\varphi_{RH,T}$: é o coeficiente dependente da temperatura que substitui φ_{RH} na equação (33);

φ_{RH} : é um coeficiente, de acordo com a equação (34);

T_0 : Assume-se igual a 1°C.

Retomando à Equação (27) e utilizando os conceitos expostos na Equação (29) e na definição de deformação inicial, o CEB-FIP reescreve-a assumindo a seguinte forma:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \sigma_c(t_0) \times \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{ci}} \right] \quad (48)$$

Sendo:

$E_c(t_0)$: O módulo de elasticidade no momento t_0 do carregamento.

Essa equação pode ainda ser expressa por:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \sigma_c(t_0) \times J(t, t_0) \quad (49)$$

Em que:

$J(t, t_0)$: é a função que compreende a fluência, representando a tensão total dependente da deformação por unidade de tensão. De acordo com a Equação (49), pode ser expressa como:

$$J(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{c\sigma}(t)}{\sigma_c(t_0)} \quad (50)$$

Ou ainda, substituindo a Equação (48) na definição acima, tem-se:

$$J(t, t_0) = \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{ci}} \right] \quad (51)$$

Segundo Lima (2007), a definição do CEB-FIP da equação de deformação por fluência no concreto devido a tensões ou deformações variáveis segue a hipótese da linearidade, implicando o princípio da superposição, e possui a formulação da equação (52):

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}} \times \varphi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\varphi(t, \tau)}{E_{ci}} \times \partial \sigma_c(\tau) \partial \tau \quad (52)$$

3.3.4.1 Deformações Devido à Flexão – Método Simplificado

As deformações são calculadas a partir das curvaturas, aplicando-se métodos como o princípio dos trabalhos virtuais ou dupla integração. O CEB-FIP sugere o método de cálculo simplificado para verificar os deslocamentos a longo prazo.

O método de cálculo sugerido é baseado em uma relação bilinear entre o carregamento e o deslocamento, de acordo com a equação (53), para o momento de cálculo solicitante (M_{Sd}) menor que o momento de fissuração (M_r) e a equação (54) para a seção fissurada de concreto armado:

$$a(t) = (1 + \varphi) \times a_c \quad \text{Para } M_{Sd} < M_r \quad (53)$$

$$a(t) = \left(\frac{h}{d} \right)^3 \times \eta \times (1 - 20 \times \rho_{cm}) \times a_c \quad \text{Para } M_{Sd} \geq M_r \quad (54)$$

Onde M_r é calculado conforme a equação (55):

$$M_r = W_c \times f_{ct} \quad (55)$$

Sendo:

W_c : o módulo resistente da seção de concreto, sem considerar o aço;

f_{ct} : a resistência do concreto à tração;

a_c : é o deslocamento elástico calculado com a rigidez $E_c I_c$ da seção transversal (negligenciando a presença da armadura);

M_{Sd} : é o momento solicitante no meio do vão da viga;

ρ_{cm} : é a média geométrica da porcentagem de armadura de compressão;

φ : é o coeficiente de fluência; e

η : é o fator de correção (conforme a Tabela 1), o qual inclui os efeitos de fissuração e de fluência;

Tabela 1 – Fator de Correção η para Estimativa de Deflexões

$\rho_m(\%)$	0,15	0,2	0,3	0,5	0,75	1,0	1,5
η	10	8	6	4	3	2,5	2

Para as verificações do Estado Limite de Serviço, o CEB-FIP recomenda que se utilizem coeficientes de segurança parciais iguais a 1.

A porcentagem média ρ_m de armadura de tração é determinada de acordo com o diagrama de momentos, conforme a equação:

$$\rho_m = \rho_a \times \frac{l_a}{l} + \rho \times \frac{l_0}{l} + \rho_b \times \frac{l_b}{l} \quad (56)$$

Onde:

l_0 : é o comprimento da região de referência;

ρ_a e ρ_b : São as porcentagens de armadura de tração/compressão nos suportes;

ρ : é a porcentagem de armadura na região de momento máximo;

Os índices “a” e “b” significam as extremidades após os suportes laterais esquerdo e direito, respectivamente. A Figura 19 ilustra o diagrama de momento fletor que define estes índices:

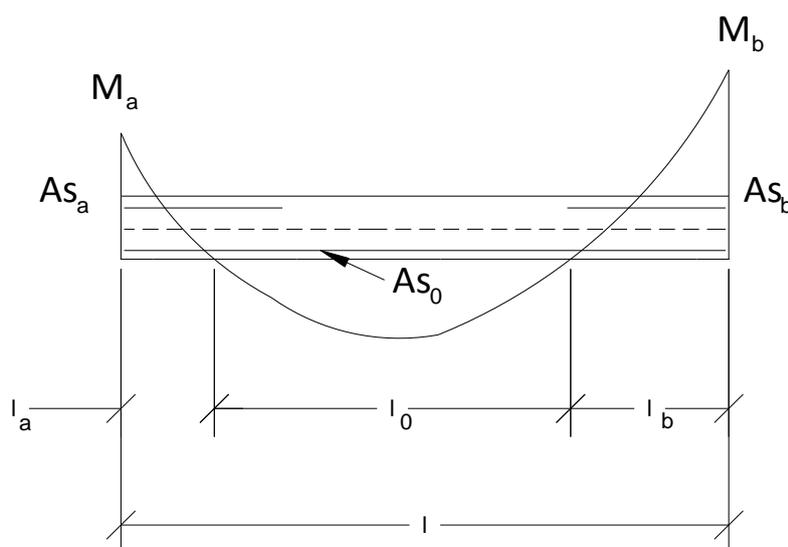


Figura 19 – Diagrama de momento fletor que define l_a , l_b e l_0

Fonte: Adaptado de CEB-FIP (1990).

3.3.5 Modelo de Fluência da NBR 6118 (2014)

A seguir serão apresentadas as recomendações da norma brasileira NBR 6118 (2014) para o cálculo das deformações causadas em estruturas de concreto armado devido à fluência.

3.3.5.1 Equações de Fluência da NBR 6118 (2014)

A norma brasileira NBR 6118 (2014) prescreve em suas recomendações que os valores do coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$ e da deformação específica de retração do concreto $\varepsilon_{cs}(t_\infty, t_0)$ sejam baseados na Tabela 2 e, caso os dados de entrada não sejam exatos, deve-se interpolar entre os valores fornecidos. A norma ressalta que essa tabela deve ser usada em casos nos quais a precisão de resultados não seja importante e o concreto deve estar submetido a tensões menores que metade do f_{ck} .

Para os casos em que as tensões de compressão forem menores que 50% do f_c , a norma admite uma relação linear entre tensões e deformações, adotando para o módulo de elasticidade o valor secante dado na expressão da equação (57):

$$E_{cs} = \alpha_i \times E_{ci} \quad (57)$$

Onde:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (58)$$

E_{ci} : módulo de elasticidade, considerado na norma o módulo de deformação tangente inicial aos 28 dias de idade. Na ausência de ensaios, calcula-se por:

$$E_{ci} = \alpha_E \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}} \text{ para } f_{ck} \text{ de } 20\text{MPa a } 50\text{MPa e} \quad (59)$$

$$E_{ci} = 21,5 \times 10^3 \times \alpha_E \times \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{1/3} \text{ para } f_{ck} \text{ de } 55\text{MPa a } 90\text{MPa.} \quad (60)$$

Sendo:

$\alpha_E=1,2$ para basalto e diabásio;

$\alpha_E=1,0$ para granito e gnaisse;

$\alpha_E=0,9$ para calcário; e

$\alpha_E=0,7$ para arenito.

Para idades menores que 28 dias e superiores a 7 dias, a norma recomenda o cálculo do módulo de elasticidade, conforme as fórmulas das equações (61) e (62):

$$E_{ci}(t) = \left[\frac{f_c(t)}{f_c} \right]^{0,5} \times E_{ci} \text{ para concretos 20MPa a 50Mpa e;} \quad (61)$$

$$E_{ci}(t) = \left[\frac{f_c(t)}{f_c} \right]^{0,3} \times E_{ci} \text{ para concretos 55MPa a 90Mpa} \quad (62)$$

Sendo $f_c(t)$ a resistência à compressão do material na idade considerada no cálculo, em MPa.

A Tabela 2 fornece os valores de coeficiente de fluência e retração em função da umidade média do ambiente e da espessura fictícia, calculada de acordo com a fórmula da equação (63):

$$h_{fic} = \frac{2 \times A_c}{u} \quad (63)$$

Sendo:

A_c : a área da seção transversal da peça; e

u : o perímetro da seção em contato com a atmosfera.

A norma recomenda que os valores da tabela sejam adotados para temperaturas entre 0°C e 40°C, entretanto, explica que os valores são relativos a temperaturas do concreto entre 10°C e 20°C. A validade dos valores também é restrita ao tipo de concreto, são admissíveis concretos plásticos e de cimento Portland comum.

Tabela 2 – Valores Característicos Superiores da Deformação Específica da Retração $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ e do Coeficiente de Fluência $\varphi(t_{\infty}, t_0)$

Umidade média ambiente %		40		55		75		90		
Espessura fictícia $2A_c/u$ cm		20	60	20	60	20	60	20	60	
$\varphi(t_{\infty}, t_0)$ Concreto das classes C20 a C45	t_0 dias	5	4,6	3,8	3,9	3,3	2,8	2,4	2,0	1,9
		30	3,4	3,0	2,9	2,6	2,2	2,0	1,6	1,5
		60	2,9	2,7	2,5	2,3	1,9	1,8	1,4	1,4
$\varphi(t_{\infty}, t_0)$ Concreto das classes C50 a C90	t_0 dias	5	2,7	2,4	2,4	2,1	1,9	1,8	1,6	1,5
		30	2,0	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,1	1,1
		60	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,2	1,0	1,0
$\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0) 10^0$	t_0 dias	5	- 0,53	- 0,47	- 0,48	- 0,43	- 0,36	- 0,32	- 0,18	- 0,15
		30	- 0,44	- 0,45	- 0,41	- 0,41	- 0,33	- 0,31	- 0,17	- 0,15
		60	- 0,39	- 0,43	- 0,36	- 0,40	- 0,30	- 0,31	- 0,17	- 0,15

Fonte: ABNT - NBR 6118 (2014).

Onde:

– $\varepsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$ é a deformação específica devido à retração total do concreto entre os instantes t_0 e t_{∞} ;

– $\sigma_c(t_0)$ é a tensão do concreto devido ao carregamento aplicado em t_0 ;

- $\varphi(t_{\infty}, t_0)$ é o limite para o qual tende o coeficiente de fluência provocado por carregamento aplicado em t_0 ;

A Tabela 2 fornece o valor característico superior de $\varphi(t_{\infty}, t_0)$ em algumas situações usuais e valor característico inferior de $\varphi(t_{\infty}, t_0)$ é considerado nulo.

Em casos nos quais a tensão $\sigma_c(t_0)$ não varia de maneira significativa, permite-se que a deformação seja calculada simplificada pela equação (64):

$$\varepsilon_c(t_{\infty}, t_0) = \sigma_c(t_0) \times \left[\frac{1}{E_{ci}(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{ci}(28)} \right]. \quad (64)$$

As deformações específicas devido à fluência também podem ser obtidas, de maneira mais precisa, por meio da fórmula da equação (65):

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (65)$$

Onde:

$\varepsilon_c(t_0)$ é a deformação imediata, na idade do carregamento, de acordo com a Equação (67) com $E_{ci}(t_0)$ calculado para $j = t_0$, pela expressão da Equação (59), substituindo f_{ck} por f_{ckj} , a norma reescreve a equação omitindo o α_E , ficando então:

$$E_{ci}(t_0) = 5600 \times \sqrt{f_{ckj}} \quad (66)$$

$\varepsilon_{cc}(t_0)$ é a deformação por fluência, conforme a Equação (68) no intervalo de tempo (t, t_0) , com E_{ci28} calculado pela mesma Equação (66), para $j = 28$ dias;

$\varepsilon_{cs}(t)$ é a deformação por retração, no intervalo de tempo (t, t_0) .

$$\varepsilon_c(t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci}} \quad (67)$$

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \left[\frac{\sigma_c(t_0)}{E_{ci28}} \right] \times \varphi(t, t_0) \quad (68)$$

3.3.5.2 Anexo A da NBR 6118 (2014) – Efeito do Tempo no Concreto Estrutural

A deformação total no tempo t para o concreto, quando não há impedimento à livre deformação e a ele é aplicado, no tempo t_0 , uma tensão constante durante intervalo $t-t_0$ é calculada seguindo a formulação descrita na Equação (65).

Segundo o anexo A da norma, a deformação do concreto por fluência (ε_{cc}) é formada por duas parcelas, uma rápida e outra lenta. A deformação rápida (ε_{cca}) é irreversível e ocorre durante as primeiras 24 horas após a aplicação da carga que a originou e a deformação lenta é composta por duas parcelas: a deformação lenta irreversível (ε_{ccf}) e a deformação lenta reversível (ε_{ccd}).

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccf} + \varepsilon_{ccd} \quad (69)$$

$$\varepsilon_{cc,tot} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} = \varepsilon_c \times (1 + \varphi) \quad (70)$$

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_f + \varphi_d \quad (71)$$

Onde:

φ_a é o coeficiente de deformação rápida;

φ_f é o coeficiente de deformação lenta irreversível;

φ_d é o coeficiente de deformação lenta reversível;

3.3.5.2.1 Hipóteses Admitidas para Cálculo

A norma adota para o cálculo do efeito da fluência, quando as tensões no concreto são as de serviço, as seguintes hipóteses.

a) A deformação por fluência ε_{cc} varia linearmente com a tensão aplicada.

- b) Para acréscimos de tensões aplicados em instantes distintos, os efeitos de fluência se superpõem.
- c) Os valores do coeficiente de fluência φ_a são função da relação entre a resistência do concreto no momento da aplicação da carga e sua resistência final. Esses valores são importantes, pois a deformação rápida produz deformações constantes ao longo do tempo.
- d) O coeficiente de deformação lenta reversível φ_d depende somente da duração do carregamento; seu valor final e seu desenvolvimento ao longo do tempo são independentes da idade do concreto no momento de aplicação da carga.
- e) O coeficiente de deformação lenta irreversível φ_f depende dos seguintes fatores:
- umidade relativa do ambiente (U);
 - consistência do concreto no lançamento;
 - espessura fictícia da peça h_{fic} , calculada pela Equação (87);
 - idade fictícia do concreto no instante t_0 da aplicação da carga;
 - idade fictícia do concreto no instante (t) considerado.
- f) Para o mesmo concreto, as curvas de deformação lenta irreversível em função do tempo, correspondentes a diferentes idades do concreto no instante do carregamento, são obtidas, umas em relação às outras, por deslocamento paralelo ao eixo das deformações conforme a Figura 20.

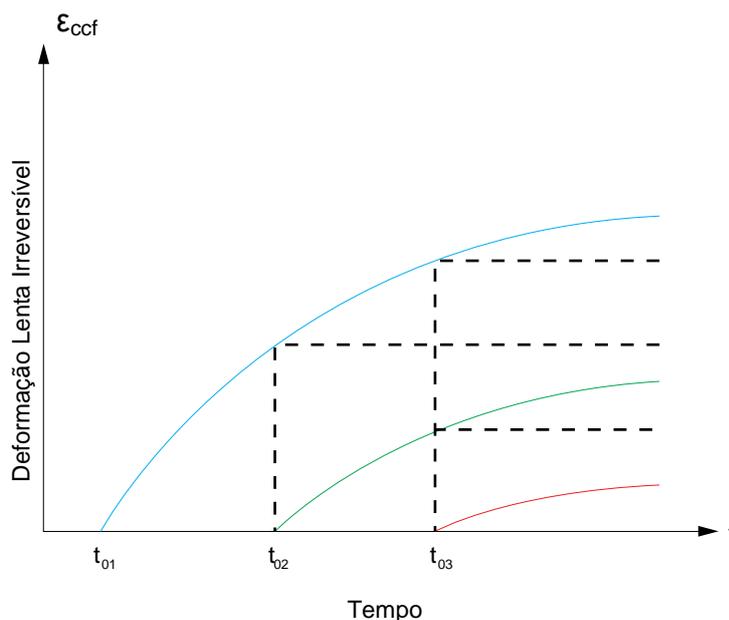


Figura 20 – Variação ϵ_{ccf} (t)

Fonte: Adaptado da NBR 6118 (2014).

Sampaio (2004) observou que para a obtenção da deformação lenta irreversível, as curvas propostas pela norma não se comportam de maneira condizente com o comportamento do concreto. Uma vez que o concreto ganha resistência ao longo do tempo, essas curvas não poderiam ser paralelas.

3.3.5.2.2 Valor da Deformação Devido à Fluência

A deformação devido à fluência, no momento t , como já apresentada anteriormente na Equação (68) e na Equação (70), é representada pela seguinte fórmula:

$$\epsilon_{cc}(t, t_0) = \epsilon_{cca} + \epsilon_{ccf} + \epsilon_{ccd} = \frac{\sigma_c}{E_{c28}} \times \varphi(t, t_0) \quad (72)$$

Com:

E_{c28} : módulo de deformação tangente inicial aos 28 dias calculado pela Equação (66); e

$\varphi(t, t_0)$: coeficiente de fluência, calculado por:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} \times [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \times \beta_d \quad (73)$$

Sendo:

$$\varphi_a = 0,8 \times \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \text{ para concretos de 20 a 45Mpa de resistência;} \quad (74)$$

$$\varphi_a = 1,4 \times \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \text{ para concretos de 50 a 90MPa de resistência.} \quad (75)$$

Onde:

- t é a idade fictícia, em dias, do concreto no instante considerado;
- t₀ é a idade fictícia do concreto ao ser introduzido o carregamento único, em dias;
- t_{0i} é a idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento, em dias;
- f_c(t₀)/f_c(t_∞) é a função de crescimento da resistência do concreto com a idade, definida no item 12.3 da respectiva norma, conforme a Equação (76). Essa equação descreve a relação f_{ckj}/f_{ck}, denominada β₁, para idades inferiores a 28 dias. Nessa equação s vale: 0,38 para concretos de cimento CPIII e IV; 0,25 para CPI e II e 0,20 para CPV-ARI. A idade efetiva do concreto em dias é expressa por t;
- φ_{d∞}: é o valor final do coeficiente de deformação lenta reversível, considerado igual a 0,4;
- φ_{f∞}: é o valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível. O cálculo é realizado de acordo com a Equação (77) ou a Equação (78). Onde φ_{1c} é o coeficiente dependente da umidade relativa (U), escrito em porcentagem (%), e da consistência do concreto dada na Tabela 2 e φ_{2c} é o coeficiente dependente da espessura fictícia h_{fic} do elemento, calculado conforme a Equação (79);
- β_d(t): é o coeficiente relativo à deformação lenta reversível em função do tempo decorrido após o carregamento (t-t₀), calculado de acordo com a Equação (80).
- β_f(t) ou β_f(t₀): é o coeficiente relativo à deformação lenta irreversível, função da idade do concreto, de acordo com a Figura 21 e a Equação (81);

$$\beta_1 = \exp \left\{ s \times \left[1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{1/2} \right] \right\} = \frac{f_{ckj}}{f_{ck}} \quad (76)$$

$$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \times \varphi_{2c} \text{ para concretos de resistência de 20 a 45Mpa;} \quad (77)$$

$$\varphi_{f\infty} = 0,45 \times \varphi_{1c} \times \varphi_{2c} \text{ para concretos de resistência de 50 a 90MPa.} \quad (78)$$

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad (79)$$

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (80)$$

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 - A \times t + B}{t^2 - C \times t + D} \quad (81)$$

Na equação (81), tem-se:

$$A = 42 \times h^3 - 350 \times h^2 + 588 \times h + 113 \quad (82)$$

$$B = 768 \times h^3 - 3060 \times h^2 + 3234 \times h - 23 \quad (83)$$

$$C = -200 \times h^3 + 13 \times h^2 + 1090 \times h + 183 \quad (84)$$

$$D = 7579 \times h^3 - 31916 \times h^2 + 35343 \times h + 1931 \quad (85)$$

Onde:

- h_{fic} : é a espessura fictícia, em metros, calculada pela Equação (87). Para valores fora do intervalo $(0,05 \leq h_{fic} \leq 1,6)$, deve-se adotar os extremos correspondentes;

- t : é o tempo, em dias, para $(t \geq 3)$;

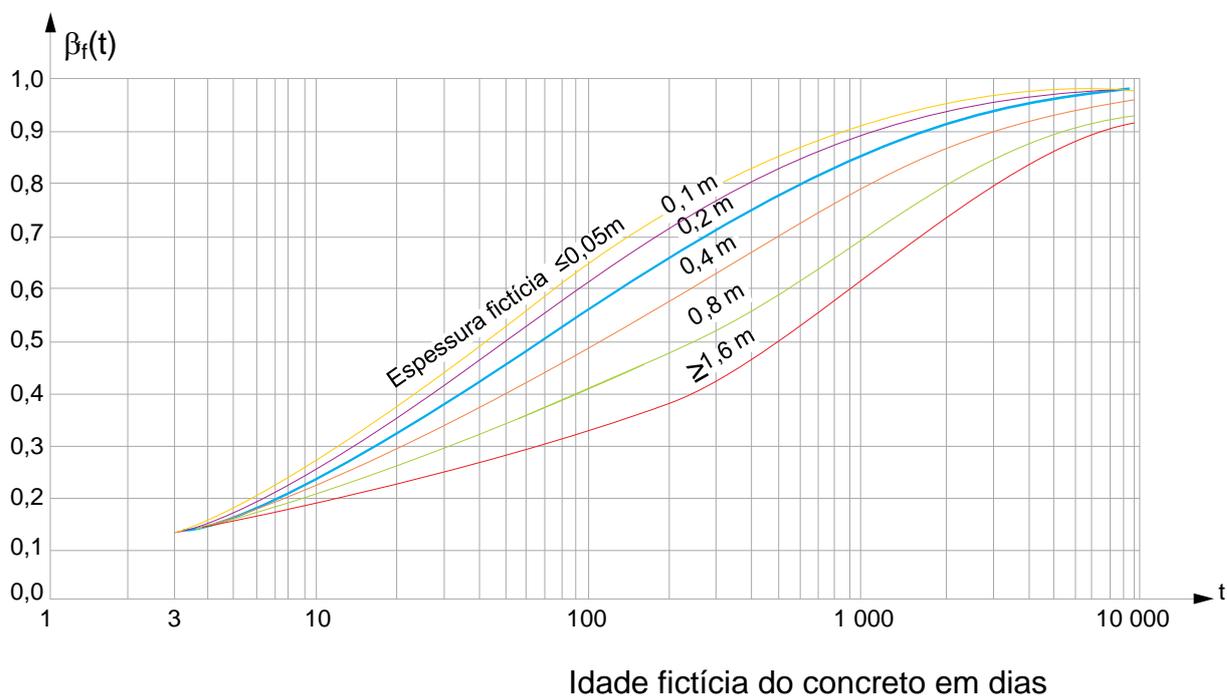


Figura 21 – Variação $\beta_f(t)$

Fonte: Adaptado da NBR 6118 (2014).

3.3.5.2.3 Idade Fictícia do Concreto

Quando o concreto tem seu endurecimento à temperatura ambiente de 20°C, a idade a considerar nos cálculos é a idade fictícia (t_{ef}), em dias, e nos demais casos, quando não houver cura a vapor, a idade fictícia dada por:

$$t = \alpha \times \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \times \Delta t_{ef,i} \quad (86)$$

Onde:

- t : é a idade fictícia, em dias;
- α : é o coeficiente que depende da velocidade de endurecimento do cimento; na falta de dados experimentais pode-se utilizar os valores da Tabela 3;
- T_i é a temperatura média diária do ambiente, em °C;
- $\Delta t_{ef,i}$ é o período, em dias, no qual a temperatura média diária do ambiente, T_i , pode ser admitida constante.

Tabela 3 – Valores da Fluência e da Retração em Função da Velocidade de Endurecimento do Cimento

Cimento Portland (CP)	α	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento (CP III e CP IV, todas as classes de resistência)	1	1
De endurecimento normal (CP I e CP II, todas as classes de resistência)	2	
De endurecimento rápido (CP V-ARI)	3	
Onde: CP I e CP I-S – Cimento Portland comum CP II-E, CP II-F e CP II-Z – Cimento Portland composto CP III - Cimento Portland de alto-forno CP IV - Cimento Portland pozolânico CP V-ARI – Cimento Portland de alta resistência inicial RS – Cimento Portland resistente a sulfatos (propriedade de alguns dos tipos de cimento citados)		

Fonte: ABNT - NBR 6118 (2014).

3.3.5.2.4 Espessura Fictícia da Peça de Concreto

O cálculo da espessura fictícia pode ser efetuado pela seguinte fórmula:

$$h_{fic} = \gamma \times \frac{2 \times A_c}{u_{ar}} \quad (87)$$

Onde:

- γ : é o mesmo coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente (U%) da Tabela 2, esse coeficiente pode ser calculado por:

$$\gamma = 1 + \exp(-7,8 + 0,1 \times U) \quad (88)$$

A_c : é a área da seção transversal da peça;

u_{ar} : é a parte do perímetro externo da seção transversal da peça de concreto que entra em contato com o ar.

3.3.5.2.5 Deformação Total

Quando há variação de tensão ao longo do intervalo, induzida por ações externas ou componentes de diferentes propriedades reológicas (incluindo-se armadura, concretos de diferentes idades, etc.), segundo a NBR 6118 (2014), a deformação total no concreto pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) &= \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c28}} \times \varphi(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \\ &+ \int_{\tau=t_0}^t \frac{\partial \sigma_c}{\partial \tau} \left(\frac{1}{E_{c\tau}} + \frac{\alpha \times \varphi(\tau, t_0)}{E_{c28}} \right) d\tau \end{aligned} \quad (89)$$

Onde os três primeiros termos representam a deformação não impedida e a integral representa os efeitos da variação de tensões ocorridas no intervalo.

Essa expressão pode ser substituída por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) &= \sigma_c(t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \Delta\sigma_c(t, t_0) \\ &\times \left(\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right) \end{aligned} \quad (90)$$

Onde:

- $\Delta\sigma_c(t, t_0)$: é a variação total de tensão no concreto, no intervalo (t, t_0) ;

- α : é o coeficiente característico que tem valor variável, conforme o caso.

Nos casos usuais (que não envolvem perdas de protensão) pode-se considerar $\alpha=0,8$, mantendo $E_c(t_0) \neq E_{c28}$ sempre que a diferença for significativa.

Essa aproximação tem a vantagem de tratar φ_a , φ_d e φ_f conjuntamente, como a função φ . É possível separar estes coeficientes, mas para isso é necessário aplicar a expressão integral ao caso em estudo, pois a expressão simplificada não pode ser aplicada ao problema.

3.3.5.2.6 Deformações na Armadura

A norma também tem recomendações quanto à deformação da armadura, quando essa não estiver submetida a nenhum impedimento à livre deformação e a ela é aplicada, no tempo t , uma tensão constante no intervalo $t-t_0$. A deformação pode ser calculada por:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} + \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \times \chi(t, t_0) \quad (91)$$

Onde:

$\sigma_s(t_0)/E_s$: é a deformação imediata, na ocasião do carregamento;

$[\sigma_s(t_0)/E_s] \times \chi(t, t_0)$: é a deformação por fluência, ocorrida no intervalo de tempo (t, t_0) . Deve ser considerada sempre que:

$$\sigma_s(t_0) > \frac{f_{ptk}}{2} \quad (92)$$

Quando a livre deformação por fluência é impedida, analogamente à situação do concreto descrita em 3.3.5.2.5, a deformação pode ser calculada por:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} + \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \times \chi(t, t_0) + \frac{\Delta\sigma_s(t, t_0)}{E_s} \times [1 + \chi(t, t_0)] \quad (93)$$

Onde:

$\Delta\sigma_s(t, t_0)$: é a variação total de tensão na armadura, no intervalo (t, t_0) .

Os cálculos provenientes das deformações e deslocamentos baseados na NBR 6118 (2014) foram feitos neste trabalho em uma sequência de cálculo no programa *Mathcad*, baseado na sequência de cálculos do trabalho de Sampaio (2004) disponíveis no Apêndice A deste trabalho.

Algumas observações podem ser feitas com relação aos cálculos da deformação e do deslocamento em estruturas de concreto armado tendo como base a NBR 6118 (2014).

3.3.5.3 Fissuração no Concreto Devido à Perda de Rigidez

De acordo com Sampaio (2004) devem ser tomados cuidados especiais em relação à fissuração e verificação das flechas no Estado-Limite de Serviço (ELS), principalmente quando se adota a relação entre momentos muito diferente da que resulta de uma análise elástica.

3.3.5.3.1 Elementos Lineares Sujeitos a Solicitações Normais – Estados-Limite de Serviço

O momento de fissuração define a separação entre os estádios I e II. Nos estados limites de serviço as estruturas trabalham em parte no estágio I e em parte no estágio II. Esse momento pode ser calculado pela seguinte equação aproximada:

$$M_r = \frac{\alpha \times f_{ct} \times I_c}{y_t} \quad (94)$$

Onde:

- α : é o fator que correlaciona, de maneira aproximada, a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta (sendo: $\alpha = 1,2$ para seções T ou duplo T, $\alpha = 1,3$ para seções I ou T invertido, ou $\alpha = 1,5$ para seções retangulares);
- y_t : é a distância entre o centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada da peça;
- I_c : é o momento de inércia da seção bruta de concreto;
- f_{ct} é a resistência à tração direta do concreto com o quantil apropriado a cada verificação particular. Para determinar o momento de fissuração, deve-se usar o $f_{ct,inf}$ no estado limite de formação de fissura e o $f_{ct,m}$ no estado limite de deformação excessiva.

3.3.5.3.2 Estado Limite de Deformação Excessiva

A verificação dos valores limites estabelecidos para a deformação da estrutura (tabela 13.3 da NBR 6118 (2014)), especificamente rotações e deslocamentos em elementos estruturais lineares analisados isoladamente e submetidos à combinação de ações, deve ser calculada por meio de modelos que considerem a rigidez efetiva das seções do elemento estrutural, ou seja, levem em consideração a presença da armadura, a existência de fissuras no concreto ao longo dessa armadura e as deformações diferidas no tempo.

O processo construtivo, assim como as propriedades dos materiais (principalmente do módulo de elasticidade e da resistência à tração) no momento da efetiva solicitação, tem influência na deformação real da estrutura. Devido à grande variabilidade dos parâmetros citados, as deformações reais variam bastante. Portanto, não se pode esperar muita precisão nas previsões de deslocamentos recomendadas pelos processos analíticos prescritos pela NBR 6118 (2014) e relacionados a seguir.

3.3.5.3.3 Avaliação Aproximada da Flecha em Vigas

O concreto e o aço podem ser admitidos como materiais de comportamento elástico e linear pelo modelo de comportamento da estrutura. Dessa maneira, as deformações específicas nas seções ao longo do elemento estrutural podem ser determinadas no estágio I, desde que os esforços não superem aqueles que dão início à fissuração, e no estágio II, no caso contrário.

O valor do módulo de elasticidade secante E_{cs} da Equação (57) deve ser utilizado no cálculo, sendo obrigatória a consideração do efeito da fluência.

3.3.5.3.4 Flecha Imediata em Vigas de Concreto Armado

Para calcular aproximadamente o valor da flecha imediata em vigas, pode-se utilizar a expressão de rigidez equivalente.

Branson²¹ (1966 apud OLIVEIRA, 2007) afirma que, no caso de vigas de concreto armado, as diferentes quantidades de armadura e a distribuição variável de fissuração ao longo do vão levam a rigidez à flexão (EI) a um valor não constante. Com base nesse argumento, o autor apresentou uma expressão que permite determinar a rigidez efetiva em qualquer seção transversal particular de uma viga.

A expressão empírica desenvolvida por Branson é função do momento fletor e das propriedades físicas e geométricas da seção. A NBR 6118 (2014) escreve a expressão da seguinte maneira:

$$EI_{eq} = E_{cs} \times \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \times I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \times I_{II} \right\} \leq E_{cs} \times I_c \quad (95)$$

Onde:

- I_c : é o momento de inércia da seção bruta de concreto;
- I_{II} : é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;
- M_a : é o momento fletor na seção crítica do vão considerado, momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, para a combinação de ações consideradas nessa avaliação;
- M_r : é o momento de fissuração do elemento estrutural, cujo valor deve ser reduzido à metade no caso de utilização de barras lisas, calculado conforme a Equação (94);

²¹ BRANSON, D. E. Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 6331, p. 637-667, 1966.

- E_{cs} : é o módulo de elasticidade secante do concreto, conforme a Equação (57).

Para a determinação do momento de inércia (I_{II}) após a fissuração da estrutura (Estádio II), admite-se o comportamento elástico e linear para o concreto submetido à compressão e para o aço, a tração no concreto é desprezada. A seção esquemática da Figura 22 ilustra essa situação.

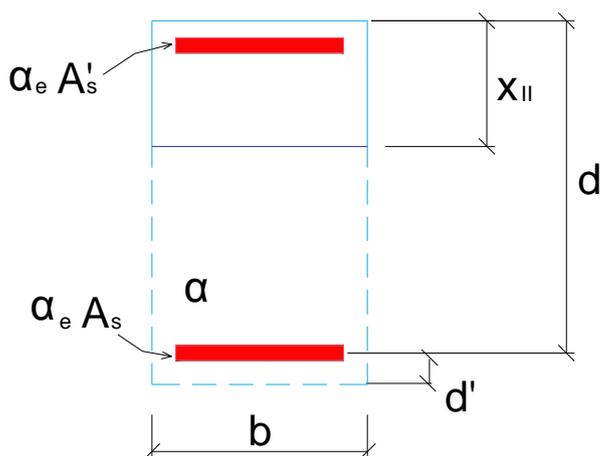


Figura 22 – Seção Fissurada (estádio II)

Na Figura 22 tem-se:

- b : é a base da viga;
- α_e : é a relação entre o módulo de elasticidade da armadura e do concreto, ver a Equação (96);
- A_s : é a armadura de flexão positiva;
- d : é a distância entre a borda superior da viga e o eixo da armadura positiva;
- x_{II} , ou x_{LN} : é o posicionamento da linha neutra após a fissuração do concreto; e
- d' : é a distância entre o eixo da armadura positiva e a borda inferior da viga.

Para o cálculo da inércia fissurada, primeiramente deve-se homogeneizar a seção, usando a relação entre os módulos de elasticidade da armadura e do concreto, conforme a fórmula da equação (96):

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} \quad (96)$$

Após isso, encontra-se a posição da linha neutra no estágio II, x_{II} , igualando-se o momento estático da área acima da linha neutra (S_{sup}) com o da área de baixo (S_{inf}). Assim tem-se:

$$S_{sup} = S_{inf} \quad (97)$$

$$\frac{(b \times x_{II}) \times x_{II}}{2} + \alpha_e \times A'_s \times (x_{II} - d') - A'_s \times (x_{II} - d') = \alpha_e \times A_s \times (d - x_{II}) \quad (98)$$

$$\frac{(b \times x_{II}) \times x_{II}}{2} + (\alpha_e - 1) \times A'_s \times (x_{II} - d') = \alpha_e \times A_s \times (d - x_{II}) \quad (99)$$

Substituindo a equação (100) na Equação (99), obtém-se uma equação de segundo grau em x_{II} , de acordo com a Equação (101):

$$\alpha_e - 1 = \alpha'_e \quad (100)$$

$$\frac{(b \times x_{II}^2)}{2} + (\alpha_e \times A_s + \alpha'_e \times A'_s) \times x_{II} (\alpha_e \times A_s \times d + \alpha'_e \times A'_s \times d') = 0 \quad (101)$$

A simplificação da equação, evidenciando x_{II} fornece:

$$x_{II} = -A + (A^2 + B)^{1/2} \quad (102)$$

Onde:

$$A = \frac{(\alpha_e \times A_s + \alpha'_e \times A'_s)}{b} \quad (103)$$

$$B = \frac{2 \times (\alpha_e \times A_s \times d + \alpha'_e \times A'_s \times d')}{b} \quad (104)$$

Segundo Tepedino²² (1980 apud OLIVEIRA, 2007), o momento de inércia da seção fissurada resulta:

$$I_{II} = \left(\frac{b}{3}\right) \times x_{II}^3 + \alpha'_e \times A'_e \times (x_{II} - d')^2 + \alpha_e \times A_s \times (d - x_{II})^2 \quad (105)$$

O valor de EI depende do valor do momento de fissuração da estrutura. Se o valor do momento de fissuração da viga for maior que o valor do momento de solicitação, ou seja, $M_r > M_a$, EI receberá o valor de EI_{eq} . Isso significa que a estrutura está trabalhando no Estádio II.

²² TEPEDINO, J. M. **Deformações por Flexão**. Edições COTEC - Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 1980.

Caso contrário, quando $M_r \leq M_a$, o valor de EI é o produto do módulo de elasticidade secante do concreto pelo momento de inércia da peça em Estádio I.

3.3.5.3.5 Cálculo da Flecha Adicional Diferida no Tempo para Vigas de Concreto Armado

A flecha adicional diferida, que decorre em função das cargas de longa duração em função da fluência, é calculada de modo aproximado pela multiplicação da flecha imediata pelo fator α_f dado pela expressão:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \times \rho'} \quad (106)$$

Onde:

$$\rho' = \frac{A'_s}{b \times d} \quad (107)$$

– $\Delta\xi$: é um coeficiente função do tempo, que pode ser calculado pelas expressões (108) a (110):

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (108)$$

$$\xi(t) = 0,68 \times (0,996^t) \times t^{0,32}; \text{ (para } t \leq 70 \text{ meses)} \quad (109)$$

$$\xi(t) = 2; \text{ (para } t > 70 \text{ meses)} \quad (110)$$

A norma também disponibiliza uma tabela com os valores preestabelecidos para consulta rápida, conforme a Tabela 4:

Tabela 4 – Valores do coeficiente ξ em função do tempo

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	≥ 70
Coeficiente $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: ABNT - NBR 6118 (2014).

Onde:

- t: é o tempo, em meses, do período em que se deseja obter o valor da flecha diferida;

- t_0 : é a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração. Caso as parcelas da carga de longa duração sejam aplicadas em idades diferentes, pode-se tomar para t_0 o valor ponderado da equação (111):

$$t_0 = \frac{\sum P_i \times t_{0i}}{\sum P_i} \quad (111)$$

Onde:

P_i : representa as parcelas de carga;

t_{0i} : é a idade em que foi aplicada a parcela P_i , em meses.

O valor da flecha total incluindo a fluência deve ser obtido multiplicando a flecha imediata por $(1 + \alpha_f)$.

3.3.6 Função de Fluência e Coeficiente de Fluência

3.3.6.1 Métodos para a Análise da Fluência

De acordo com Cavalcante e Ramos (2010), o estudo de fluência para finalidades práticas inclui modelos reológicos, físicos e empíricos, geralmente descrevendo apenas um estágio de comportamento. Inicialmente estes modelos fundamentaram-se no comportamento dos metais que posteriormente foram adaptados para a mecânica do concreto. Os métodos físicos foram abordados no início deste capítulo, em 3.3.1. Os modelos reológicos são modelos que representam de forma macroscópica o comportamento mecânico dos corpos sólidos em termos de tensão, deformação e tempo. Um exemplo desse modelo é o viscoelástico²³ de Maxwell, representado por uma mola e um amortecedor, ambos conectados em série. O modelo prevê um aumento da deformação sem limites. Isso é uma característica de muitos fluidos e, por essa razão, o material descrito na equação é conhecido como fluido de Maxwell (SAMPAIO, 2004). Os modelos empíricos nada mais são que equações matemáticas deduzidas de observação e ajuste entre o comportamento de uma curva típica de fluência e o seu resultado experimental. De acordo com a função matemática dominante, a equação empírica pode ser subdividida em: potencial, logarítmica e exponencial. A lei empírica potencial é o modelo que melhor representa o comportamento nos primeiros estágios de fluência. A equação (112), desenvolvida por Lomenick²⁴ (1969 apud

²³ Viscoelasticidade é muito similar à fluência, mas parte da deformação é recuperada quando o carregamento é retirado. Um material viscoelástico muito comum é o vidro e alguns plásticos (ANSYS INC., 2013)

²⁴ LOMENICK, T. F.; BRADASHAW, R. L. Deformation of Rock Salt in Openings Mined for the Disposal of Radioactive Wastes. **Rock Mechanics** 1, 1969. 5-30.

GRAVINA, 1997), utiliza três constantes empíricas para o seu melhor ajuste e relaciona a deformação com a tensão, temperatura e tempo.

$$\varepsilon = K\sigma^c t^b T^a \quad (112)$$

Onde: ε é a deformação transiente de fluência; σ é a tensão diferencial; t é o tempo; T é a temperatura; K , a , b e c são constantes empíricas.

A lei potencial vem sendo aplicada bastante na fase transiente da curva de deformação por fluência. O Abaqus® (programa comercial para modelagem em elementos) propõe o “*power-law model*”, um modelo de fluência que leva em consideração a tensão diferencial (σ') e o tempo (t). O modelo “*power law model*” do Abaqus® pode ser utilizado em duas versões: “*time-hardening*” e “*strain-hardening*”. A versão “*time-hardening*” é mais apropriada quando o estado de tensão permanece essencialmente constante, enquanto que a versão “*strain-hardening*” é mais recomendada quando o estado de tensões varia durante as análises. Nas simulações realizadas levou-se em consideração a taxa de deformação de fluência na versão “*time-hardening*”, visto que nas análises considera-se uma variação muito pequena no estado de tensão.

3.3.6.2 Princípio da Superposição e Representação Integral

Devido à pouca fidelidade com que os ensaios retratam as condições reais de uma estrutura de concreto, como, por exemplo, a carga de uma estrutura real não se manterá constante como em um ensaio de fluência, nem a deformação se manterá constante como em um ensaio de relaxação, Mchenry²⁵ (1943 apud MEHTA; MONTEIRO, 2008) postulou o Princípio da Superposição. Este método de cálculo possibilita encontrar o valor da deformação em um dado tempo a partir de um histórico de tensão conhecido.

Pelo princípio, as deformações geradas no concreto em um tempo t qualquer, por um incremento na tensão em um tempo t_0 qualquer, não dependem de qualquer tensão aplicada antes de ou depois de t_0 . As tensões que se aproximam da resistência limite são excluídas.

²⁵ MCHENRY, D. A. New Aspect of Creep in Concrete and Its Application to Design. **ASTM Proc.**, v. 43, p. 1069-1084, 1943.

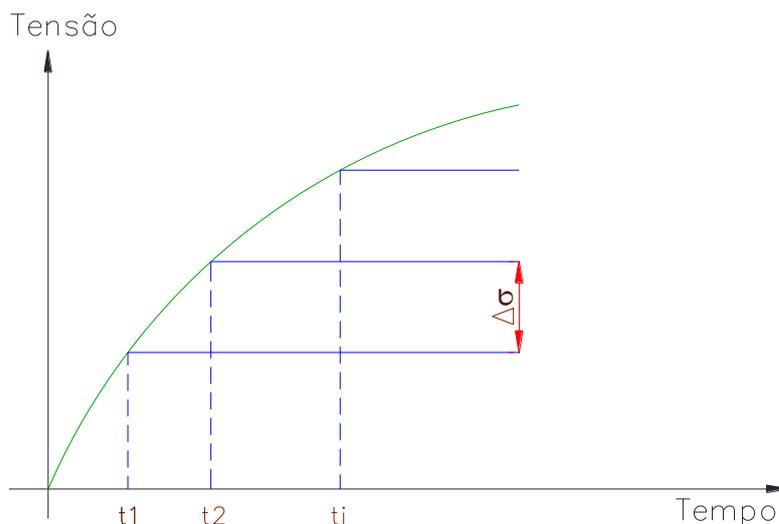


Figura 23 – Aplicação Incremental de Carga ao Longo do Tempo

Fonte: Adaptada de Mehta e Monteiro (2008).

Resultados experimentais mostraram que o princípio da superposição funcionou bem para corpos de prova de concreto selado, que servem para testar a fluência básica. Se a fluência estiver associada à retração por secagem, devem-se aplicar outros métodos.

De acordo com Sharma²⁶ (1964 apud MEHTA e MONTEIRO, 2008), a seguinte formulação também é aplicável ao princípio da superposição: “O efeito da soma das causas é igual à soma dos efeitos de cada uma destas causas”.

Pode-se entender que independe a ordem em que os cálculos de diferentes modelagens de estruturas são realizados. Se o princípio da superposição for aplicável, as análises podem ser realizadas separadamente e depois somadas.

Considere-se $\varepsilon_1(\tau)$ e $\varepsilon_2(\tau)$ as deformações que resultam dos históricos de tensão $\sigma_1(\tau)$ e $\sigma_2(\tau)$, respectivamente. Se o material for viscoelástico linear, pode-se simplesmente somar os dois históricos de tensão, como na equação (113):

$$\sigma(\tau) = \sigma_1(\tau) + \sigma_2(\tau) \quad (113)$$

Utilizando-se o princípio da superposição, o seguinte histórico de deformações é obtido:

²⁶ SHARMA, M. G. **Viscoelasticity and Mechanical Properties of Polymers**. Pennsylvania, PA: University Park, 1964.

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_1(\tau) + \varepsilon_2(\tau) \quad (114)$$

Após isso, usando o princípio da superposição e uma função de fluência conhecida, pode-se determinar, em qualquer tempo, a deformação para um histórico de tensão. Para um ensaio de fluência, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\varepsilon(t) = \varphi(\sigma_0, t, \tau) \quad (115)$$

Onde:

$\varepsilon(t)$: é a deformação em função dos seguintes valores:

σ_0 : tensão no tempo inicial;

t: tempo de carregamento; e

τ : idade de carregamento.

No intervalo linear, a equação (115) pode ser escrita de acordo com a equação (116):

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \times \varphi(t, \tau) \quad (116)$$

Onde:

$\varphi(t, \tau)$: é a função de fluência específica.

A Figura 23 ilustra uma tensão qualquer variando ao longo do tempo. Desmembrando o histórico de tensões em pequenos intervalos, tem-se:

$$\sigma(t) \cong \sum_{i=0}^n \Delta\sigma(\tau_i) \quad (117)$$

Sendo:

$$\tau_n = t .$$

Utilizando a expressão da equação (117), o histórico de deformações é formulado conforme a equação seguinte:

$$\varepsilon(t) \cong \sum_{i=0}^n \Delta\sigma(\tau_i) \times \varphi(t, \tau) \quad (118)$$

Para obter as variações de deformação para qualquer variação de tensão, escreve-se:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t \varphi(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (119)$$

A integral da equação (119) costuma ser chamada de integral hereditária ou de Volterra. Ela expressa que, no tempo t, a deformação $\varepsilon(t)$ não depende só da

tensão $\sigma(t)$, mas de todo o histórico de tensões. Integrando a equação (119) por partes, tem-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \times \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (120)$$

Onde:

$$E(t) = \frac{1}{\varphi(t, t)} \quad (121)$$

3.4 MODELO DE CONCRETO E FLUÊNCIA

3.4.1 Modelo Computacional da Fluência

Simultaneamente ao desenvolvimento e aperfeiçoamento de programas de engenharia e de computadores com memórias expandidas e com tempos de execução mais rápidos, ocorreu o desenvolvimento de métodos numéricos para solucionar problemas não lineares em duas ou três dimensões. Na área de estruturas em geral, a análise de estruturas de concreto armado tem sido tratada com o uso de leis constitutivas (tais como: elástico, perfeitamente plástico ou com comportamento viscoelástico). (BAŽANT, 1988).

A análise numérica computacional deste trabalho será baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), um método numérico bastante útil na solução de problemas de engenharia, particularmente na análise do comportamento estrutural.

O Método dos Elementos Finitos consiste fundamentalmente num processo de discretização de um meio contínuo, com infinitos graus de liberdade, num conjunto de elementos discretos, designados por elementos finitos, unidos entre si por pontos discretos conhecidos como nós (BATHE, 1996). Neste trabalho foi utilizado um programa comercial para a modelagem das vigas em concreto armado, o ANSYS.

3.4.1.1 Consideração da Fluência Aplicada ao MEF

O concreto armado apresenta um comportamento não homogêneo causado pela presença do aço, das fissuras no concreto, da umidade, da temperatura, dos efeitos de tensões triaxiais e da heterogeneidade do material. Bazant (1988) diz que diversas dificuldades surgem devido a essa heterogeneidade

para a aplicação de procedimentos analíticos, que são exatos, para estimar estados de tensão e de deformação. A preponderância da pesquisa nesse sentido tem sido com a modelagem do comportamento inelástico em estruturas de concreto armado pelo uso dos elementos finitos, embora também existam tentativas recentes para a modelagem do comportamento de estruturas de concreto armado baseadas em uma análise elástica por elementos finitos.

3.4.1.1.1 Não Linearidade Associada a Grandes Deformações e a Alterações de Propriedades Físicas

Para casos de análise elástica linear, tem-se que a tensão no caso axial se relaciona com a deformação pelo módulo de elasticidade. Há casos em que as variações dimensionais são pequenas, como na deformação elástica. Porém, há situações em que essas variações são grandes, como é o caso da deformação por fluência, e a peça pode apresentar variações sensíveis na área da seção transversal. Isso significa que a seção transversal da peça, que é uma característica de propriedade física associada ao elemento, deve ser atualizada durante a análise.

As deformações podem ser muito grandes, resultando inclusive em variações consideráveis no comprimento do corpo e em deformações plásticas (ALVES FILHO, 2012).

3.4.1.1.2 Algoritmo Numérico do MEF para Análise da Fluência em Estruturas

Em geral, para a estimativa da deformação ao longo do tempo em estruturas de concreto armado, calculam-se as pequenas deformações ou pequenos deslocamentos teóricos para, então, realizar a comparação do equilíbrio estrutural nas configurações deformada e indeformada (BAŽANT, 1988).

Os símbolos das componentes das equações do MEF variam de um autor para outro. Neste capítulo foram utilizadas quatro referências para melhor compreensão do assunto: as nomenclaturas principais utilizadas têm como referência Zienkiewicz e Taylor (2005) e Zienkiewicz e Corneau (1974), porém também foram consultadas as definições utilizadas por Bažant (1988) e Penny e Marriot (1995).

Como é comum em todas as análises de elementos finitos, deve-se começar pela demonstração do equilíbrio dos trabalhos virtuais. Desse modo, se o vetor \mathbf{u} denota o campo de deslocamentos, que satisfaz os deslocamentos

prescritos na região onde as ações estão aplicadas Γ_u , $\boldsymbol{\varepsilon}$ vetor de deformações e $\boldsymbol{\sigma}$ vetor de tensões, tem-se a condição de que a soma realizada dos trabalhos virtuais deve ser zero (ZIENKIEWICZ e CORMEAU, 1974).

O trabalho virtual realizado pelos esforços internos (\mathbf{U}) é da forma:

$$\mathbf{U} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \times \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \quad (122)$$

Onde:

\mathbf{U} : é o trabalho virtual realizado pelos esforços internos;

$\boldsymbol{\sigma}$: é o vetor das tensões;

Ω ou \mathbf{V}_e : é o campo dos volumes externos;

$d\Omega$: é um volume virtual onde está instalado o estado de tensões; e

$\boldsymbol{\varepsilon}$: são as deformações em função das componentes dos deslocamentos, conforme o vetor da equação (7), reproduzido novamente na equação (123) para conveniência.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}] \quad (123)$$

$$S = \int_{\Omega} (\mathbf{u}^T \times \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\mathbf{u}^T \times \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma \quad (124)$$

Onde:

S : é o trabalho virtual realizado pelos esforços externos;

\mathbf{b} : denota as forças volumétricas prescritas no elemento;

Γ : é a região onde as ações estão aplicadas;

Γ_{σ} : é a região limite das tensões;

$\bar{\mathbf{t}}$: são as ações externas prescritas no limite de Γ_{σ} , suas componentes estão dirigidas para as incógnitas nodais.

A energia potencial total do elemento é igual a $\mathbf{U}-S$. Então, minimizando a energia potencial, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \times \boldsymbol{\sigma}) d\Omega - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^T \times \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\delta \mathbf{u}^T \times \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma = 0 \quad (125)$$

Onde:

$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ou $\{\dot{\varepsilon}(x, y, z)\}$: é o vetor das taxas de deformação, definido na equação (128);

$\delta \mathbf{u}$ ou $\{\delta\}$: é o vetor da variação de deslocamentos do elemento. Implicitamente, assume-se igual a 0 em Γ_u .

Para serem compatíveis, deslocamentos e deformações são relacionados por um operador diferencial linear:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \times \mathbf{u} \quad (126)$$

Sendo:

\mathbf{L} ou $[\mathbf{L}(x,y,z)]$: é a matriz dos gradientes das funções de interpolação N_j ; e

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (127)$$

A taxa de deformação (ou velocidade de deformação) pode ser definida dentro do elemento pela equação (128) a seguir:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \times \delta \mathbf{u} \quad (128)$$

Pode-se reescrever a Equação (125) como:

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{L} \times \delta \mathbf{u})^T \times \boldsymbol{\sigma}] d\Omega - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^T \times \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\delta \mathbf{u}^T \times \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma = 0 \quad (129)$$

O MEF, baseado em deslocamentos, pode-se resumir na ideia de representar os deslocamentos triaxiais (u , v , w) dentro do elemento por meio de deslocamentos nodais e funções de interpolação (ou funções de forma). A equação (130) representa esses deslocamentos com as necessárias funções de interpolação:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{Ln} N_j(x, y, z) \times \mathbf{a}_j \quad (130)$$

Onde:

N_j : são as funções de interpolação associadas com os nós do modelo;

Ln : são os nós do modelo; e

\mathbf{a} : são os valores nodais do deslocamento $\mathbf{u}(x, y, z)$.

Para os demais sentidos (v e w), são aplicadas expressões similares.

Substituindo a Equação (130) na Equação (129) tem-se:

$$\delta \mathbf{a}^T \times \left\{ \int_{\Omega} [(\mathbf{L} \times \mathbf{N})^T \times \boldsymbol{\sigma}] d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{N}^T \times \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\mathbf{N}^T \times \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma \right\} = 0 \quad (131)$$

Igualando-se a expressão dentro dos colchetes a zero na Equação (131), tem-se a formulação do equilíbrio padrão da Equação (132):

$$\int_{\Omega} [\mathbf{L}^T \times \boldsymbol{\sigma}] d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{N}^T \times \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\mathbf{N}^T \times \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma = 0 \quad (132)$$

ou

$$\int_{\Omega} [\mathbf{B}^T \times \boldsymbol{\sigma}] d\Omega - \mathbf{F} = 0 \quad (133)$$

Com:

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{L} \times \mathbf{N} \quad (134)$$

E:

$$\mathbf{F} \equiv \int_{\Omega} (\mathbf{N}^T \times \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\mathbf{N}^T \times \bar{\mathbf{t}}) d\Gamma \quad (135)$$

Após a matriz gradiente dos deslocamentos \mathbf{L} ser obtida, o equilíbrio é estabelecido pelo princípio dos deslocamentos virtuais.

Para completar a formulação, as relações constitutivas para o material precisam ser introduzidas. Das equações (6) e (8) escreve-se a Equação (136).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \times (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \equiv \mathbf{D} \times \mathbf{B} \times \mathbf{a} - \mathbf{D} \times (\boldsymbol{\varepsilon}^{vp} + \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (136)$$

Onde:

$\boldsymbol{\sigma}_0$: é a tensão inicial presente no início do problema.

Substituindo a Equação (136) na Equação (133) tem-se a Equação (137).

$$\mathbf{K} \times \mathbf{a} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \times \mathbf{D} \times \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} d\Omega - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{K} \times \mathbf{a} - \mathbf{V} = 0 \quad (137)$$

Na qual:

\mathbf{K} : é a matriz de rigidez obtida pela Equação (138); e

$\bar{\mathbf{F}}$: são os valores de forças internas, conforme a Equação (139);

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \times \mathbf{D} \times \mathbf{B} d\Omega = 0 \quad (138)$$

$$\bar{F} = F + \int_{\Omega} B^T \times D \times \varepsilon^0 d\Omega - \int_{\Omega} B^T \times \sigma_0 d\Omega = 0 \quad (139)$$

A deformação viscoplástica é obtida da Equação (23) ($\dot{\varepsilon}^{vp} = \Gamma \times \sigma$).

As Equações (136), (139) e (23) apresentam um sistema discretizado de equações diferenciais ordinárias, do qual a solução pode ser obtida de maneira sequenciada por tempo.

O processo utilizado é incremental. De acordo com Alves Filho (2012) e Altenbach (2007), basicamente, nos problemas não lineares de análise estrutural, a questão central é que a rigidez da estrutura varia com os deslocamentos. É necessário conhecer a rigidez da estrutura para, posteriormente, calcular os deslocamentos dela, mas a rigidez varia desde o início até o fim do processo de cálculo. Dessa forma, a rigidez deve ser tratada separadamente em cada trecho ou incremento do processo, pois é diferente em cada um deles.

O procedimento é idêntico ao chamado método da “deformação inicial”, descrito no Volume II, capítulo 3, do livro de Zienkiewicz (2005). Esse procedimento pode ser escrito da forma mais simples possível, conforme a seguir:

- a) Começando dos valores conhecidos σ^n , \mathbf{a}^n , $(\varepsilon^{vp})^n$ e \bar{F}^n em um determinado instante t^n , pode-se calcular a taxa de deformação viscoplástica $(\dot{\varepsilon}^{vp})^n$ da Equação (23).
- b) Determinar aproximadamente a mudança de ε^{vp} , da seguinte maneira:

$$(\Delta \varepsilon^{vp})^n \cong (\dot{\varepsilon}^{vp})^n \times \Delta t \quad (140)$$

Se ocorrer qualquer mudança nas “forças”, determinar F^{n+1} e V^{n+1} pela equação (141):

$$V^{n+1} = \bar{F}^{n+1} + \int_{\Omega} B^T \times D \times (\varepsilon^{vp})^{n+1} \times d\Omega \quad (141)$$

Onde:

$$(\varepsilon^{vp})^{n+1} = (\varepsilon^{vp})^n + (\Delta \varepsilon^{vp})^n \quad (142)$$

- c) Efetuar o valor de \mathbf{a}^{n+1} utilizando a equação (143):

$$\mathbf{a}^{n+1} = K^{-1} \times V^{n+1} \quad (143)$$

- d) Determinar σ^{n+1} utilizando a equação (136), chegando aos valores iniciais da próxima etapa, na qual o mesmo processo se repetirá para o próximo intervalo de tempo.

A precisão desse algoritmo de etapas depende somente da integração aproximada na equação (140), que é equivalente ao método de extrapolação de Euler, e para aperfeiçoar esse método pode-se impor um “loop” interno iterativo na sequência (a) – (d). Nesse processo, substitui-se a etapa (b), calculando:

$$(\Delta \epsilon^{vp})^n \cong (\dot{\epsilon}^n + \dot{\epsilon}^{n+1}) \times \frac{\Delta t}{2} \quad (144)$$

Assumindo inicialmente a equação (140) e repetindo o processo até (d) para certo número de ciclos, pode-se obter uma estimativa mais precisa de deformação viscoplástica:

$$(\dot{\epsilon}^{vp})^{n+1} = (\dot{\epsilon}^{vp})^n \quad (145)$$

Na prática, estes passos envolvendo “loops” iterativos demandam um aumento na capacidade de armazenamento, pois um vetor adicional $\dot{\epsilon}^{vp}$ precisa ser armazenado. Como a magnitude da etapa de tempo que pode ser usada é muito limitada pela estabilidade e pelos requisitos da convergência da iteração, que não são minimizados pelo processo descrito acima, na prática utiliza-se simplesmente o esquema das equações (140) a (143).

Na lei constitutiva da equação (136) foi introduzida a tensão inicial σ_0 , da qual os cálculos se iniciam. Como muitos problemas práticos apresentam tensões residuais na etapa inicial, e nesta etapa os deslocamentos são medidos, não se deve dar importância excessiva a esse valor. Porém, essa tensão inicial permite lidar com problemas nos quais uma mudança nas condições de contorno ou até de configuração são introduzidas durante a sequência de tempo. Em tal mudança as tensões são anotadas e simplesmente utilizadas no início da próxima sequência.

Existem diversos modelos de superfície de escoamento que podem ser utilizados. As análises do presente trabalho utilizam o modelo de Von-Mises, no qual a tensão de escoamento para o material viscoplástico é considerada igual a 0, portanto, os resultados são de fluência pura (ZIENKIEWICZ e CORMEAU, 1974)

3.4.1.1.3 Variáveis de Tempo

As equações principais incluem derivadas de primeira ordem de tempo, além das demais condições iniciais descritas. Os deslocamentos e as tensões desconhecidos são funções de coordenadas e do tempo. A integração exata destas equações com respeito à variável tempo é viável apenas para problemas unidimensionais, como, por exemplo: barras. Nos casos mais gerais de análises

estruturais, os métodos de integração numérica devem ser utilizados para resolver casos não lineares de problemas de valores de contorno iniciais. A técnica de solução comum utilizada na mecânica e na termodinâmica é o método incremental ou das diferenças finitas. As derivadas de tempo são substituídas por diferenças finitas. Começando pelas condições iniciais (nesse caso, os deslocamentos elásticos ou campos de tensão), o método das diferenças finitas conduz a uma solução por fases (ALTENBACH, 2007).

De acordo com Bazant (1982), ensaios experimentais indicam que a deformação devido a um aumento na carga é independente de todos os incrementos realizados anteriormente da carga e, com isso, pode-se aplicar o princípio da superposição de Mcherry²⁵ (1943).

A precisão dos resultados pode piorar muito com o aumento do tamanho dos passos de tempo. Além disso, para o tamanho dos intervalos de tempo que superam certa magnitude obtêm-se resultados que oscilam. Esse fato indica instabilidade do processo. Para a avaliação da precisão do vetor de deformação viscoplástica, algumas regras empíricas foram testadas. Nelas o tamanho da divisão das etapas por tempo foi relacionado à antecipação das mudanças da deformação viscoplástica. Uma medida escalar conveniente da deformação viscoplástica é obtida pelo segundo invariante da deformação, definida pela equação (146) (ZIENKIEWICZ e CORMEAU, 1974).

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^{vp} &\equiv \sqrt{\frac{2}{3} \times \varepsilon_{ij}^{vp} \times \varepsilon_{ij}^{vp}} \\ &\equiv \sqrt{\frac{2}{3} \times (\varepsilon_x^{vp2} + \varepsilon_y^{vp2} + \varepsilon_z^{vp2}) + \frac{1}{3} \times (\gamma_{yz}^{vp2} + \gamma_{zx}^{vp2} + \gamma_{xy}^{vp2})} \end{aligned} \quad (146)$$

Limita-se o incremento máximo dessa deformação viscoplástica escalar em uma fração do acumulado total de deformações em todos os pontos de integração do sistema, isso se faz de acordo com a equação (147).

$$\sqrt{\frac{2}{3} \times \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \times \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}} \times \Delta t = \dot{\varepsilon}^{vp} \times \Delta t \leq \tau \times \varepsilon \quad (147)$$

A faixa de 0,1 a 0,15 é comprovadamente efetiva para τ em problemas “contidos”, porém, próximo ao colapso é necessário utilizar valores menores, na faixa de 0,01 a 0,05.

Em geral, também se limita a mudança do tamanho dos intervalos de tempo entre etapas sucessivas, conforme a equação (148).

$$\Delta t^{n+1} \leq 1,5 \times t^n \quad (148)$$

Dentre esses critérios empíricos, nenhum é inteiramente satisfatório e nenhum previne que ocorra alguma forma de instabilidade. Considerando a instabilidade, vale a pena reescrever as equações governantes (23), (136) e (137) de uma forma alternativa. Diferenciando (136) e (137) com relação ao tempo, surgem as equações (149) e (150) (ZIENKIEWICZ e CORMEAU, 1974):

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{K}^{-1} \times \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \times \mathbf{D} \times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} d\Omega + \dot{\mathbf{F}} \right) \quad (149)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \times \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{D} \times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \mathbf{D} \times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \quad (150)$$

Eliminando $\dot{\mathbf{a}}$ e usando a equação (23), tem-se a equação (151), em função do conjunto de parâmetros de ponderação \mathbf{C} .

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \times \mathbf{K}^{-1} \times \left(\sum (\mathbf{C} \times \mathbf{B}^T \times \mathbf{D} \times \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\sigma}) + \dot{\mathbf{F}} \right) - \mathbf{D} \times \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D} \times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \quad (151)$$

Também é possível escrever na forma tradicional de equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas, conforme a equação (152).

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, t) \quad (152)$$

A estabilidade para a fluência de Von-Mises é obtida pela equação

$$\Delta t \leq \frac{4 \times (1 + \nu)}{3 \times \gamma \times E} + \frac{F_0}{\varphi'} \quad (153)$$

Onde:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\left(\frac{F}{F_0}\right)} \quad (154)$$

Apesar da densidade da malha ser uma característica de importância computacional muito grande, o limite de estabilidade estabelecido pela equação (154) para os intervalos de tempo adotados nas análises é independente dessa densidade (ZIENKIEWICZ e CORMEAU, 1974).

3.4.1.2 Cálculo da Fluência no ANSYS e Equações de Fluência Utilizadas no MEF

Segundo o ANSYS INC. (1999), assume-se que o material é isotrópico e a técnica de solução básica utilizada para a resolução das equações não lineares é o método de rigidez inicial de Newton-Raphson.

As equações de fluência são integradas com um algoritmo progressivo de Euler.

Três tipos de equações estão disponíveis: fluência primária, fluência secundária e fluência induzida por radiação.

Pode-se combinar os efeitos para mais de um tipo de fluência, utilizando-se as equações implícitas já programadas ou definindo uma equação de fluência por métodos de programação.

O método implícito e o explícito podem ser utilizados para o cálculo da fluência. Ambos são aplicáveis para análises estáticas ou de curta duração.

O método explícito utiliza um processo de integração direta, no qual o incremento de deformações $\Delta\varepsilon_n^k$ para a obtenção das tensões $\Delta\sigma_n^k$ deve ser dividido em “m” partes. Esse processo é conhecido como subincrementação e a sua precisão depende do número de subincrementos, “m”, utilizados. Em geral, é difícil dizer, a priori, qual número deve ser usado para “m” e a precisão do número escolhido é difícil de determinar. Também existe o processo explícito de Runge-Kutta, que é mais preciso que o primeiro (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2005).

A função constitutiva para o algoritmo explícito, resumidamente, é a equação (156).

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = f(\sigma^t, \varepsilon^t, T^{t+\Delta t}, \dots) \quad (155)$$

O algoritmo implícito resume-se em resolver um sistema não linear de equações para cada ponto de Gauss da malha de elementos finitos. As incógnitas do sistema não linear são as componentes do tensor de tensões atualizado (SILVA, 2010).

A fluência implícita refere-se ao uso da integral de Euler para deformações por fluência. Esse método é incondicionalmente estável. Isso significa que não necessita de intervalos de tempo tão curtos quanto o método de fluência explícito, portanto, é muito mais rápido.

A função constitutiva para o algoritmo implícito encontra-se na equação (156).

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = f(\sigma^{t+\Delta t}, \varepsilon^{t+\Delta t}, T^{t+\Delta t}, \dots) \quad (156)$$

Para fluência implícita somada à plasticidade independente da taxa de deformação, a correção da plasticidade e a correção da fluência são feitas ao mesmo tempo, não independentemente (ou seja, sem superposição). Por esse motivo, a fluência implícita é geralmente mais precisa que a fluência explícita, mas a fluência implícita ainda é dependente do período de tempo de cada passo.

O método implícito é mais robusto, rápido, preciso e recomendado para uso geral, principalmente para problemas que envolvem grandes valores de fluência e deformação. Ele pode simular constantes de fluência relacionadas à temperatura, assim como acoplamento simultâneo com modelos de endurecimento plástico isotrópicos.

Para os elementos escolhidos neste trabalho para simular o concreto armado emprega-se o método implícito para o cálculo da fluência.

O método explícito é útil para casos que envolvem espaços de tempo muito curtos, como em análises transientes. Não há possibilidade de utilizar constantes de fluência relacionadas à temperatura, nem modelagem simultânea de fluência com qualquer outro modelo de material, como plasticidade. No entanto, há como utilizar constantes de temperatura utilizando a função de Arrhenius, pois é possível combinar a fluência explícita com qualquer outra opção de plasticidade usando a modelagem simultânea (superposição). Nestes casos, o programa calcula primeiro a análise plástica, depois realiza a análise de fluência.

A dependência da deformação por fluência relacionada à tensão, deformação, tempo e temperatura é geralmente modelada de forma similar à seguinte (MCDONALD, 2012):

$$\dot{\varepsilon} = f_1(\sigma)f_2(\varepsilon)f_3(t)f_4(T) \quad (157)$$

As funções f_{1-4} dependem da lei de fluência selecionada. As constantes de fluência associadas são geralmente obtidas por meio de diversos testes de tensão com diferentes taxas e temperaturas.

Assumindo comportamento isotrópico, a equação de von Mises é usada para computar a tensão efetiva, e a deformação equivalente é usada na equação de

velocidade de deformação por fluência (similar à plasticidade independente da velocidade de deformação²⁷).

O software ANSYS (WB Mechanical) utiliza a decomposição de somatórios de deformação quando calcula as deformações plástica, elástica e de fluência.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{pl} + \dot{\epsilon}_{el} + \dot{\epsilon}_{cr} \quad (158)$$

As deformações elástica, plástica e de fluência são todas avaliadas no estado (atual) de tensão, mas são todas calculadas independentemente com modelos matemáticos separados.

As deformações por carregamento supostamente se desenvolvem em todos os valores não nulos de tensão.

A seguir, encontra-se um sumário dos modelos disponíveis no ANSYS Mechanical APDL. Serão feitos alguns comentários breves sobre cada um. Será visto que há leis que simulam o estágio primário da fluência, leis que simulam o estágio secundário e leis que simulam ambos. Não há leis disponíveis para o estágio terciário no ANSYS Mechanical.

Tabela 5 – Relação das Equações de Fluência

Descrição da equação de fluência	Tipo
Endurecimento por tensão	Primário
Endurecimento por tempo	Primário
Exponencial generalizada	Primário
Graham generalizada	Primário
Blackburn generalizada	Primário
Endurecimento por tempo modificada	Primário
Endurecimento por tensão modificada	Primário
Garofalo generalizada - seno hiperbólico	Secundário
Forma exponencial	Secundário
Norton	Secundário
Endurecimento por tempo combinada	Ambos
Polinomial racional	Ambos
Endurecimento por tempo generalizada	Primário
Fluência do usuário	

Fonte: Adaptado de MCDONALD, 2012.

²⁷ A principal diferença entre o modelo plástico dependente da velocidade de deformação e modelos de materiais viscoplásticos é que o último não só exibe deformações permanentes após a aplicação de cargas, mas continua sofrendo deslocamentos internos em função do tempo com a carga aplicada (PERZYNA, 1966).

- Endurecimento por tensão

Fluência primária

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} \epsilon^{C_3} e^{-C_4/T} \quad (159)$$

$$C_1 > 0$$

Onde:

ϵ : é a deformação por fluência equivalente;

$\dot{\epsilon}_{cr}$: é a variação na deformação por fluência equivalente, relacionada ao tempo;

σ : é a tensão equivalente;

T: é a temperatura (absoluta). O equilíbrio da temperatura é, por conveniência, realizado internamente para todas as temperaturas;

C_1 a C_{12} : presentes na Equação (165) à Equação (179), são constantes de fluência; e

e: é a base do logaritmo natural.

- Endurecimento por tensão modificada

Fluência primária

$$\dot{\epsilon}_{cr} = \{C_1 \sigma^{C_2} [(C_3 + 1) \epsilon]^{C_3}\} \frac{1}{(C_3 + 1) e^{-C_4/T}} \quad (160)$$

$$C_1 > 0$$

Estas duas leis abrangem a lei de Norton, assim como o termo de endurecimento de deformação. Como a constante C_3 é geralmente negativa, estas leis são capazes de modelar a fluência primária em que a taxa de deformação por fluência decresce enquanto ϵ aumenta. Elas podem também capturar alguns efeitos de fluência secundária desde que, enquanto ϵ aumenta, a taxa de deformação por fluência possa chegar próxima da constância. Nota-se que estas leis também contêm a equação de Arrhenius²⁸.

²⁸ Essa é uma referência ao último termo, que contém a temperatura (T) na exponencial. A equação de Arrhenius nos permite modelar taxas de deformação rápidas como uma função da temperatura diretamente na equação (MCDONALD, 2012).

- Endurecimento por tempo
Fluência primária

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} t^{C_3} e^{-C_4/T} \quad (161)$$

$$C_1 > 0$$

Onde:

t: é o tempo no fim da subetapa.

- Endurecimento por tempo generalizada
Fluência primária

$$\dot{\epsilon}_{cr} = f t^r e^{-C_6/T} \quad (162)$$

$$f = C_1 \sigma + C_2 \sigma^2 + C_3 \sigma^3 \quad (163)$$

$$r = C_4 + C_5 \sigma \quad (164)$$

- Endurecimento por tempo modificada
Fluência primária

$$\epsilon_{cr} = \frac{C_1 \sigma^{C_2} t^{C_3+1} e^{-C_4/T}}{C_3 + 1} \quad (165)$$

$$C_1 > 0$$

As equações (161) a (165) incluem a equação de Arrhenius e a lei de Norton, assim como um termo de endurecimento por tempo. O termo exponencial para o tempo t está usualmente entre -0,5 e -1,0 para modelar a taxa de deformação por fluência decrescente para fluência primária. Portanto, esse modelo pode também aproximar uma parte significativa da fluência secundária, onde a taxa de deformação por fluência é constante.

- Blackburn generalizada
Fluência primária

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 e^{C_2 \sigma} (1 - e^{-rt}) + C_6 e^{C_7 \sigma} t \quad (166)$$

$$r = C_3 \left(\frac{\sigma}{C_4} \right)^{C_5} \quad (167)$$

$$C_1 > 0, C_3 > 0, C_6 > 0$$

- Graham generalizada
Fluência primária

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} (t^{C_3} + C_4 t^{C_5} + C_6 t^{C_7}) e^{-C_8/T} \quad (168)$$

$$C_1 > 0$$

- Exponencial generalizada
Fluência primária

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} r e^{-rt} \quad (169)$$

$$r = C_5 \sigma^{C_3} e^{-C_4/T} \quad (170)$$

$$C_1 > 0, C_5 > 0$$

Estas são algumas variações das leis de fluência de endurecimento por tempo. Nota-se que a Blackburn generalizada usa a lei exponencial ao invés da lei de Norton. Como na Exponencial generalizada, ela inclui a forma exponencial para o termo de endurecimento por tempo.

- Endurecimento por tempo combinada
Fluências primária + secundária

$$\varepsilon_{cr} = \frac{C_1 \sigma^{C_2} t^{C_3+1} e^{-C_4/T}}{(C_3 + 1)} + C_5 \sigma^{C_6} t e^{-C_7/T} \quad (171)$$

$$C_1 > 0$$

- Racional polinomial
Fluências primária + secundária

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = C_1 \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} \quad (172)$$

$$\varepsilon_{cr} = \frac{cpt}{1 + pt} + \dot{\varepsilon}_m t \quad (173)$$

$$\dot{\varepsilon}_m = C_2 10^{C_3} \sigma^{C_4} \quad (174)$$

$$c = C_7 \dot{\varepsilon}_m^{C_8} \sigma^{C_9} \quad (175)$$

$$p = C_{10} \dot{\varepsilon}_m^{C_{11}} \sigma^{C_{12}} \quad (176)$$

$$C_2 > 0$$

Ambas as equações de tempo-endurecimento podem ser usadas para modelar diretamente os efeitos de fluência primário e secundário. Ao derivar a equação de endurecimento por tempo, nota-se que são ambas endurecimento por tempo e Lei de Norton. A forma Racional polinomial é muito usada para aços na indústria nuclear.

- Garofalo generalizada

Fluência secundária

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 [\sinh(C_2 \sigma)]^{C_3} e^{-C_4/T} \quad (177)$$

$$C_1 > 0$$

- Forma exponencial

Fluência secundária

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 e^{\sigma/C_2} e^{-C_3/T} \quad (178)$$

$$C_1 > 0$$

- Norton

Fluência secundária

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} e^{-C_3/T} \quad (179)$$

$$C_1 > 0$$

Estas três últimas leis de fluência foram discutidas previamente. Devido ao fato de não incluírem nenhuma dependência de tempo ou de deformação na relação de deformação por fluência, as mesmas são apropriadas para modelagem da faixa secundária de fluência.

Os coeficientes são interpolados linearmente para valores de temperaturas que se encontram entre as temperaturas definidas manualmente. Para alguns modelos de fluência, onde as mudanças nos intervalos entre os coeficientes ficam muito grandes, a interpolação linear pode resultar em alguns valores imprecisos. É recomendável utilizar uma quantidade suficiente de curvas para poder representar a dependência da temperatura de maneira correta. Também se pode

utilizar uma sub-rotina do software ANSYS para calcular o coeficiente dependente da temperatura que inclui o termo de Arrhenius (ANSYS INC., 2013).

Quando a temperatura se encontra fora da série de valores definidos para a temperatura, o programa utiliza os coeficientes definidos para a temperatura constante.

3.4.2 Elemento SOLID 186

De acordo com o manual do programa ANSYS INC. (1999), o elemento hexaédrico SOLID 186 é capaz de simular a fluência. Esse elemento foi usado para a modelagem do concreto.

O SOLID 186 é um elemento quadrático tridimensional de 20 nós e três graus de liberdade por nó (apenas translações). Com esse elemento é possível obter bons resultados sem a necessidade de uma discretização muito refinada, o que reduz bastante o tempo de análise estrutural (LAZZARI, FILHO e GASTAL, 2014).

Para a simulação do critério de ruptura à tração, há um elemento disponível no Software, compatível com o material que simula o comportamento do concreto (concrete), chamado SOLID 65 (KOTINDA, 2006).

O SOLID 65 é um sólido tridimensional, usado para modelagem de concreto com ou sem armadura. Esse sólido é capaz de simular a fissuração, na tração e o esmagamento, na compressão. O elemento é definido por oito nós e possui três graus de liberdade para cada nó: translações nos nós nas direções x, y e z. O aspecto mais importante desse elemento é a forma de tratar das propriedades não lineares do material, pois o concreto é capaz de apresentar fissurações (em três direções ortogonais), esmagamentos, deformações plásticas e fluência. Sua teoria baseia-se em WILLAM e WARNKE (1974). As armaduras compatíveis são capazes de apresentar tração e compressão, mas não esforços cortantes. Elas também apresentam deformações plásticas e fluência. Porém a simulação da fluência para esse elemento não é incondicionalmente estável (fluência explícita).

O SOLID 186 não é compatível com o critério de ruptura do material concreto (concrete), porém, é possível o usuário desenvolver duas rotinas próprias para realizar análises desse tipo.

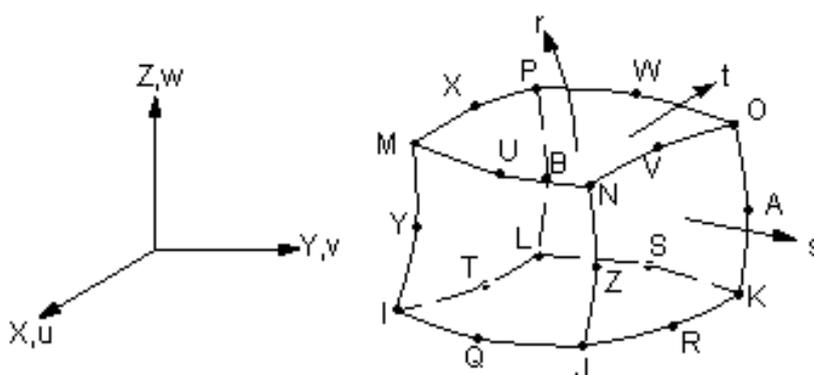


Figura 24 – Geometria do Modelo Homogêneo do SOLID 186

Fonte: Adaptado de ANSYS INC. (2013)

O SOLID 186 é compatível com a fluência e com as grandes deformações, necessárias para este trabalho, além de simular também comportamentos plásticos, hiperelásticos, encruamento; também é compatível com grandes deflexões.

Sua matriz de rigidez possui 14 pontos de integração e a matriz de massa possui o formato $3 \times 3 \times 3$ para os pontos de integração. As funções de forma do elemento são as seguintes:

$$\begin{aligned}
u = \frac{1}{8} \times & [u_L \times (1-s) \times (1-t) \times (1-r) \times (-s-t-r-2) + u_J \times (1+s) \\
& \times (1-t) \times (1-r) \times (s-t-r-2) + u_K \times (1+s) \times (1+t) \\
& \times (1-r) \times (s+t-r-2) + u_L \times (1-s) \times (1+t) \times (1-r) \\
& \times (-s+t-r-2) + u_M \times (1-s) \times (1-t) \times (1+r) \\
& \times (-s-t+r-2) + u_N \times (1+s) \times (1-t) \times (1+r) \\
& \times (s-t+r-2) + u_O \times (1+s) \times (1+t) \times (1+r) \\
& \times (s+t+r-2) + u_P \times (1-s) \times (1+t) \times (1+r) \\
& \times (-s+t+r-2)] + \frac{1}{4} \\
& \times [u_Q \times (1-s^2) \times (1-t) \times (1-r) + u_R \times (1+s) \\
& \times (1-t^2) \times (1-r) + u_S \times (1-s^2) \times (1+t) \times (1-r) + u_T \quad (180) \\
& \times (1-s) \times (1-t^2) \times (1-r) + u_U \times (1-s^2) \times (1-t) \\
& \times (1+r) + u_V \times (1+s) \times (1-t^2) \times (1+r) + u_W \\
& \times (1-s^2) \times (1+t) \times (1+r) + u_X \times (1-s) \times (1-t^2) \\
& \times (1+r) + u_Y \times (1-s) \times (1-t) \times (1-r^2) + u_Z \times (1+s) \\
& \times (1-t) \times (1-r^2) + u_A \times (1+s) \times (1+t) \times (1-r^2) + u_B \\
& \times (1-s) \times (1+t) \times (1-r^2)]
\end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{8} \times [v_L \times (1-s) \dots] \dots \quad (181)$$

$$w = \frac{1}{8} \times [w_L \times (1-s) \dots] \dots \quad (182)$$

As equações (181) e (182) são análogas à (180), onde os índices A, B e L a Z indicam os deslocamentos nos nós, conforme a Figura 24.

Os pontos de integração do elemento para a matriz de rigidez ficam próximos a cada um dos 8 vértices e aos centros de cada uma das 6 faces, totalizando 14 pontos.

3.4.2.1 Modelos Físicos dos Materiais

Para a simulação é necessário definir o comportamento dos materiais estruturais, relativos à tensão-deformação ao longo do tempo, também chamados de modelos constitutivos dos materiais.

Pode-se realizar simplificações nas simulações em elementos finitos que levem a resultados eficazes.

O modelo utilizado possui uma simplificação com relação ao comportamento do concreto armado, considerando-o viscoelástico perfeito, sendo a viscosidade representada pela fluência.

A representação matemática do comportamento dessa simulação diante da aplicação de um carregamento é uma combinação entre modelos de comportamento diferentes. Estes modelos são divididos nas seguintes categorias:

- Isotrópico elástico linear: As tensões são linearmente proporcionais às deformações e o material recupera totalmente a forma anterior ao carregamento quando descarregado. Para materiais isotrópicos, a relação é dada pela lei de Hooke. Para a configuração desse comportamento é necessário definir o módulo de elasticidade longitudinal (E_X) do material e a razão de Poisson (ν_{XY}). O módulo de elasticidade transversal (G_X) é definido pela equação ($E_X/2(1+\nu_{XY})$).
- Dependência do tempo: Esse é o comportamento no qual a resposta do material é dependente da taxa de deformação, e conseqüentemente do tempo. Nessa categoria encontra-se a fluência.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo serão explicados os métodos utilizados para o desenvolvimento do trabalho.

4.1 MÉTODOS DE AJUSTE DOS COEFICIENTES DE FLUÊNCIA

Para a determinação das deformações ou deslocamentos provocados pelo fenômeno da fluência no ANSYS, faz-se necessária a escolha de uma equação de fluência. Assim, a deformação por fluência pode ser definida por meio de treze equações, relacionadas na Tabela 5. Neste trabalho são utilizadas apenas as funções de fluência primária e secundária disponíveis no programa.

Para a análise do comportamento da deformação por fluência em estruturas de concreto utilizando o ANSYS será realizada uma simulação das leis de fluência citadas baseadas no comportamento da curva Deformação-Tempo. Os cálculos primeiramente serão efetuados segundo a NBR 6118 (2014). Posteriormente, as curvas determinadas em função das equações do ANSYS serão calibradas com as determinadas pela NBR 6118 (2014), utilizando um método de regressão numérica para ajuste de curvas no software Mathcad (SAMPAIO, 2004).

4.1.1 Calibração pela NBR 6118 (2014)

É necessário, primeiramente, analisar o comportamento da curva deformação vs. tempo utilizando a ABNT NBR 6118 (2014) e compará-lo ao comportamento obtido por meio de algumas equações de fluência do ANSYS. Para isso, são realizados os cálculos de acordo com a norma brasileira, e posteriormente as curvas dos valores de deformações por fluência dessa norma são comparadas às curvas obtidas a partir das equações de fluência pré-programadas do software ANSYS.

A obtenção dos valores dos coeficientes de fluência [C1, C2, ... e Cn] é realizada pelo método de regressão não linear de ajuste geral (genfit), que emprega uma versão otimizada do método para minimização de Levenberg-Marquardt. Este método é empregado por ser mais rápido que o método dos mínimos quadrados, por exemplo, e menos sensível a valores mal adotados da matriz de valores iniciais (PARAMETRIC TECHNOLOGY CORPORATION PTC, 2010).

A utilização da regressão não linear para calibração das constantes de fluência das equações pré-programadas pelo software ANSYS foi utilizada no

trabalho de dissertação realizado por Teixeira (2006). Porém, o mesmo utilizou o método dos mínimos quadrados.

O método dos mínimos quadrados se mostrou menos eficaz para a calibração de resultados e a formulação que melhor se adequou ao formato da curva de fluência foi a de endurecimento por tempo, que combina fluências primária e secundária.

O Gráfico 1 mostra a comparação entre os resultados gráficos das leis de fluência testadas com relação à velocidade de deformação de fluência calculada pela NBR 6118 (2014). Estes resultados são para a viga C4. As leis testadas foram: *time-hardening*, *generalized time-hardening*, *modified time-hardening* e *combined time-hardening*. O comportamento de referência é a curva $\dot{\epsilon}_{cc}$ NBR 6118 (2014). Pode-se notar no gráfico que, das quatro leis de fluência que tiveram os coeficientes calibrados, apenas duas apresentaram comportamento adequado ao da curva $\dot{\epsilon}_{cc}$ NBR 6118 (2014).

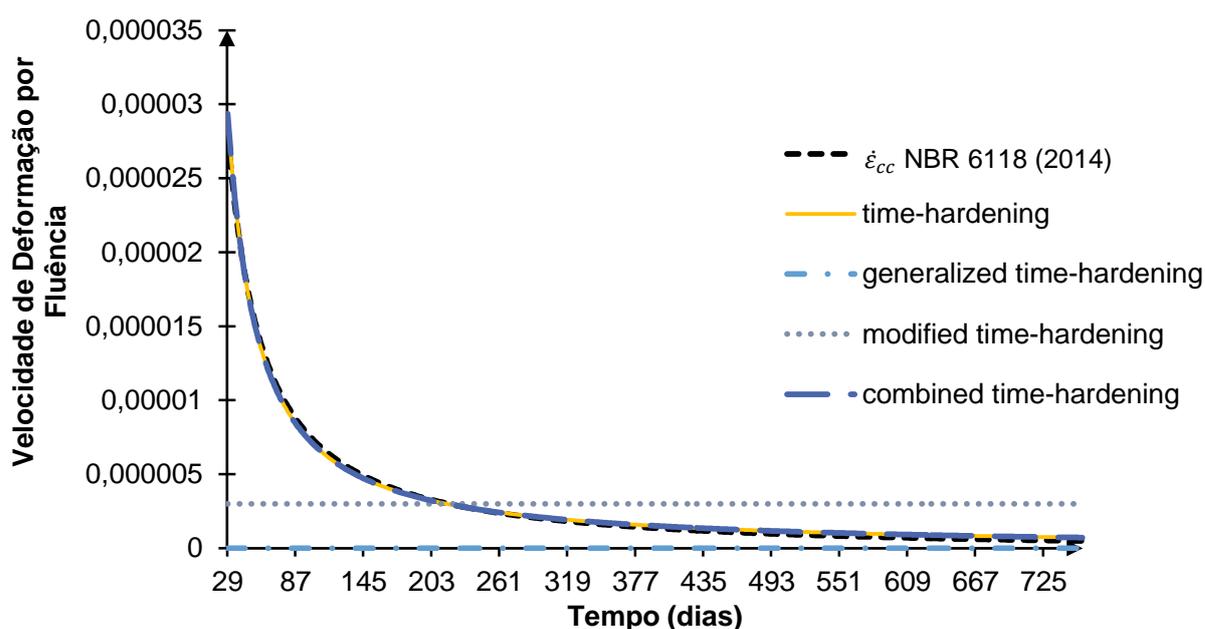


Gráfico 1 – Resultado Gráfico da Calibração de Algumas Leis de Fluência

A rotina de cálculos para a calibração das curvas de uma viga calculada encontra-se detalhada no Apêndice A.

4.2 ENSAIOS DE REFERÊNCIA

Para avaliar os cálculos realizados foram necessários alguns ensaios em longo prazo de vigas de concreto armado, submetidas a carregamento constante. Os dados utilizados para o desenvolvimento desta pesquisa estão relacionados a seguir.

Referência 1

Sobre o Autor: Realizado no Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Construção Civil (CPqDCC) do Departamento de Engenharia de Construção Civil (PCC) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP). Uma Descrição completa pode ser encontrada em Figueiredo²⁹ (2003 apud SAMPAIO, 2004).

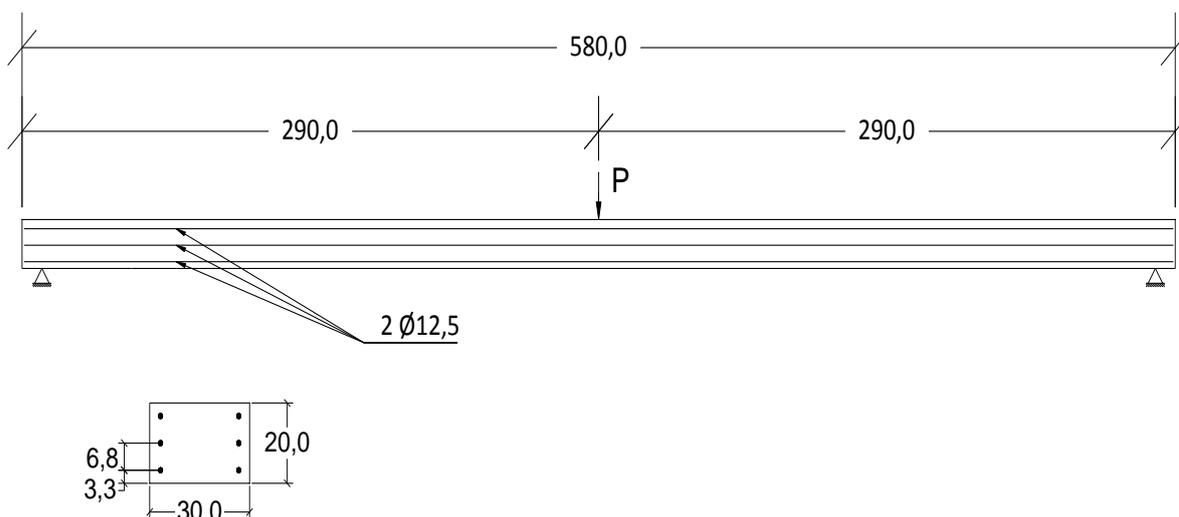


Figura 25 – Dimensões (em cm) das Vigas Ensiadas na Universidade de São Paulo

Fonte: Adaptado de Sampaio (2004).

A Figura 25 mostra esquematicamente as dimensões da viga estudada. O carregamento concentrado no meio do vão, P, equivale a uma força de 1,96kN (0,2tf). Esse carregamento foi mantido ao longo de todo o ensaio.

As propriedades da seção, os carregamentos e os resultados dos ensaios físicos dessa referência encontram-se resumidos da Tabela 6 à Tabela 8, onde:

Tipo: é a geometria da viga e R significa viga retangular;

b: base da viga;

²⁹ FIGUEIREDO, A. D. **Estudo de Deformação por Carga Mantida em Vigas de Concreto Armado**. Relatório - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

h: altura da viga;

As: área de armadura;

d: distância entre a superfície mais comprimida e o centróide da armadura de tração;

U.R.: umidade relativa;

t': idade de referência para a resistência característica do concreto;

f'c: resistência característica do concreto;

l: comprimento da viga;

t0: idade do carregamento;

Md: esforço devido ao carregamento;

a(i): deslocamento inicial;

t: tempo de carregamento;

a(t): deslocamento a longo prazo.

Tabela 6 – Referência 1 de Ensaio Físico: Seção Bruta e Armaduras

Viga	1. Seção Bruta			2. Armaduras		
	Tipo	b (mm)	h (mm)	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)
A	R	300	200	736,31	167,5	1,47
B	R	300	200	736,31	167,5	1,47
C	R	300	200	736,31	167,5	1,47
D	R	300	200	736,31	167,5	1,47

Tabela 7 – Referência 1 de Ensaio Físico: Resistência Física e Carregamento

Viga	3. Resistência			4. Carregamento			
	U. R. (%)	t' (dias)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t0 (dias)	Md (N.m)
A	30	28	37,5	5800	29,00	29	9,2075
B	30	28	45,3	5800	29,00	29	9,2075
C	30	28	34,4	5800	29,00	29	9,2075
D	30	28	39,9	5800	29,00	29	9,2075

Tabela 8 – Referência 1 de Ensaio Físico: Deslocamento Total Medido

Viga	5. Deslocamento total		
	a (i) (mm)	t (dias)	a(t) (dias)
A	9,7	100 / 140	0,02719 / 0,02869
B	8,3	100 / 140	0,02078 / 0,02214
C	9,5	100 / 140	0,02297 / 0,02510
D	7,8	100 / 140	0,02350 / 0,02520

Referência 2

Sobre os autores: Corley & Sozen (CORLEY e SOZEN, 1966).

Espion (1988) realizou um levantamento de diversos ensaios de estruturas de concreto armado que levaram em conta o tempo. Segundo ele, os ensaios dos autores dessa referência são bem conhecidos e confiáveis.

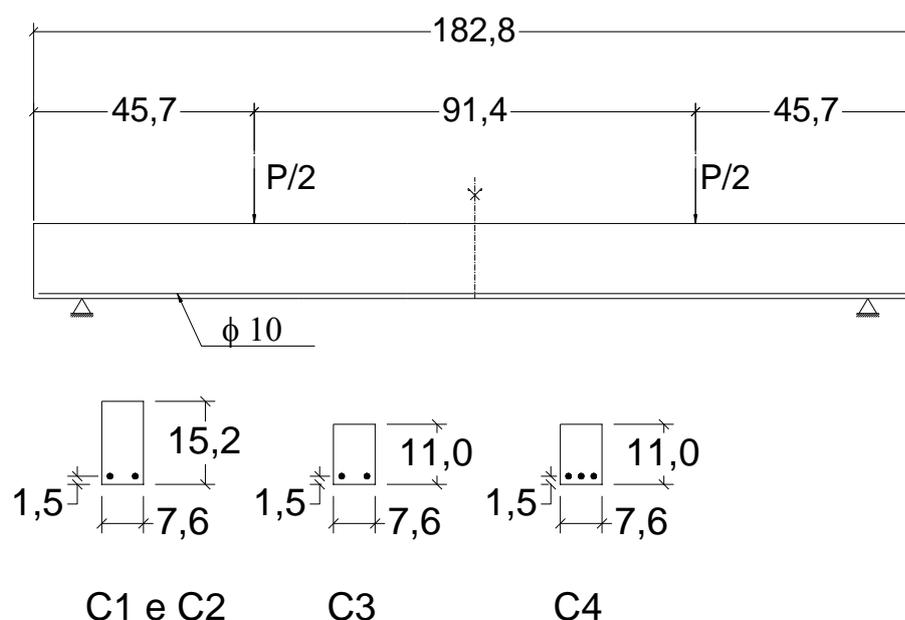


Figura 26 – Dimensões (em cm) das Vigas Ensiadas na Universidade de Illinois

Fonte: Adaptado de Corley e Sozen (1966).

Estes ensaios foram realizados em laboratório com controle de condições ambientais (umidade relativa = 50%) para quatro vigas retangulares simplesmente apoiadas (C1, C2, C3 e C4; base=7,6cm, alturas=15,2cm e 11cm, e comprimento=1,83m) carregadas nos terços do vão, com $P=9,96\text{kN}$, durante 700 dias (para viga C2, sem carga). A viga C2 foi carregada e o carregamento foi retirado imediatamente, sendo essa submetida somente ao seu peso próprio ao

longo do tempo de ensaio. Como esse carregamento não foi suficiente para fissurar a viga, os resultados dessa peça em particular não são considerados neste trabalho.

Tabela 9 – Referência 2 de Ensaio Físico: Seção Bruta e Armaduras

Viga	1. Seção Bruta			2. Armaduras		
	Tipo	b (mm)	h (mm)	As (mm ²)	d (mm)	As/bd (%)
C1	R	76,2	152,4	142	136,5	1,37
C2	R	76,2	152,4	142	136,5	1,37
C3	R	76,2	109,5	142	92,1	2,02
C4	R	76,2	109,5	213	92,1	3,04

Tabela 10 – Referência 2 de Ensaio Físico: Resistência Física e Carregamento

Viga	3. Resistência			4. Carregamento				
	U. R. (%)	t' (dias)	f'c (N/mm ²)	l (mm)	l/h	t0 (dias)	Md (N.m)	Mq (N.m)
C1	50	28	24,1	1829	12,00	28	115	2276
C2	50	28	24,1	1829	12,00	28		
C3	50	28	24,1	1829	16,70	28	82	2276
C4	50	28	24,1	1829	16,70	28	82	2276

Tabela 11 – Referência 2 de Ensaio Físico: Deslocamento Total Medido

Viga	5. Deslocamento total		
	a (i) (mm)	t (dias)	a(t) (dias)
C1	3,05	728	7,37
C2			
C3	7,87	728	17,27
C4	6,1	728	15,49

4.3 MODELAGEM ESTRUTURAL NO ANSYS

Inicialmente, foi utilizada a versão do ANSYS Clássico, o ANSYS APDL, para realizar as simulações em MEF. Porém, a versão *Workbench Mechanical* se mostrou mais prática para a modelagem, além de possuir uma interface gráfica de melhor apresentação na obtenção dos resultados.

Para a viga C4 (CORLEY e SOZEN, 1966), a modelagem estrutural foi desenvolvida no *Workbench*, conforme detalhado a seguir. Os demais ensaios seguiram procedimentos similares aos explanados neste capítulo.

No *Workbench* podem-se definir unidades para a modelagem e depois modificá-las facilmente, diferentemente do APDL. Foram utilizadas unidades métricas (m, kg, N, s).

O tempo é utilizado como parâmetro de controle em todas as análises estáticas e transientes, independentemente da análise ser ou não realmente dependente do tempo. Em uma análise transiente, o tempo representa realmente o período cronológico, em segundos, minutos ou horas. Entretanto, no caso das simulações, optou-se por uma análise estática. Nela o tempo torna-se simplesmente um contador que identifica fases e subfases. A unidade do tempo, no *Workbench*, é sempre definida em segundos e a mesma não pode ser modificada.

O objetivo deste trabalho não é comparar os métodos de análise estática e transiente para as simulações de fluência. Porém, são realizados alguns testes comparando-se os resultados das simulações estáticas e das transientes. Os valores obtidos apresentam-se muito próximos, mas as análises estáticas demandam menor processamento computacional, portanto, são mais rápidas.

A geometria é desenhada utilizando o *Design Modeler*, com uma superfície para a aplicação da carga, no caso dos ensaios da referência 2. A imagem da Figura 27 ilustra a definição da geometria.

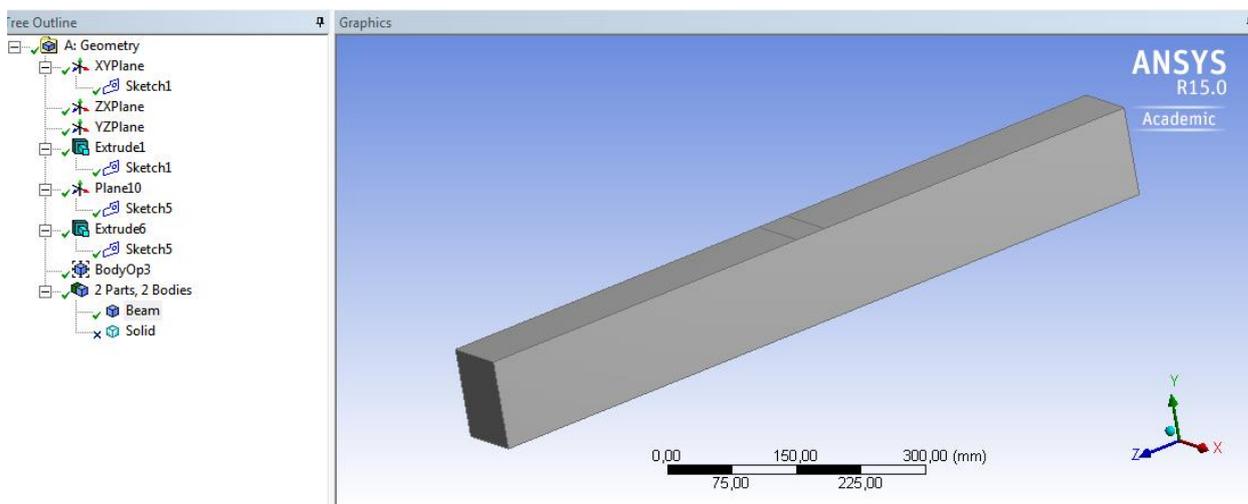


Figura 27 – Definição da Geometria no Design Modeler

Para tornar a simulação mais rápida, por utilizar menor número de elementos, foi utilizada simetria na região central da viga, normal ao eixo Z. A

simetria cria condições de contorno que simulam o restante da peça. Nesse caso são inseridas restrições à translação (U) em Z e rotação (R) em X e Y.

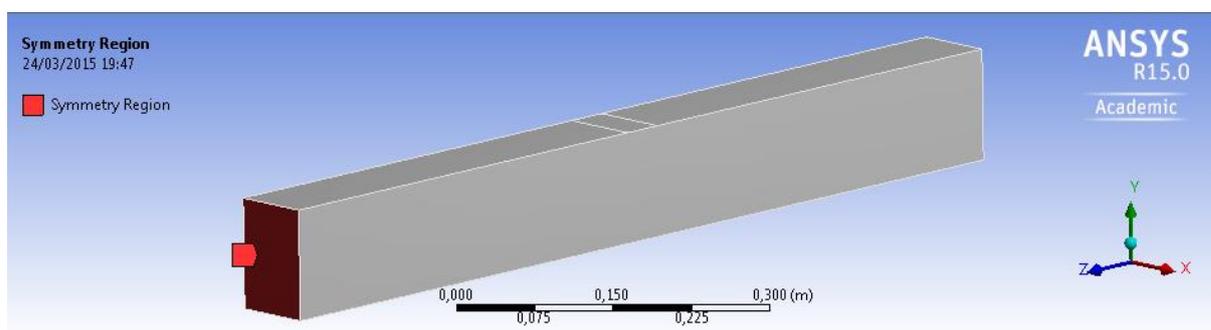


Figura 28 – Modelagem da Simetria

A densidade da malha foi dividida em até 30.000 nós e os resultados anotados. O número de elementos é muito importante para a qualidade do comportamento dos resultados obtidos. Em alguns casos foi necessário refinar mais a malha para obter resultados mais próximos da realidade.

Para a obtenção dos resultados foram utilizados os elementos tridimensionais do tipo SOLID 186, descritos no capítulo 3.4.1.

Neste trabalho houve a tentativa de ilustrar a teoria de Zienkiewicz e Corneau (1974), de que a precisão do cálculo do deslocamento por fluência nos elementos finitos não melhora devido ao grau de refino da malha. Para isso foi necessário refinar o modelo tridimensional em muitos elementos, o que não resultou em um modelo viável de utilizar, pois demandou um esforço computacional muito grande e o tempo de processamento se tornou inconveniente para a realização das diversas análises.

Optou-se, então, para esse caso, pela análise bidimensional, que demanda menor esforço computacional e é totalmente viável para o caso em estudo. Foram testadas 3 vigas, a viga A da referência 1 e as vigas C3 e C4 da referência 2. O elemento utilizado é o PLANE 183, que é um elemento quadrático de 8 ou 6 nós, possui dois graus de liberdade em cada nó e é capaz de computar fluência. A geometria do modelo encontra-se ilustrada na Figura 29. Para o modelo bidimensional não foi necessário utilizar simetria, pois a geometria da viga inteira não demanda grande esforço computacional.

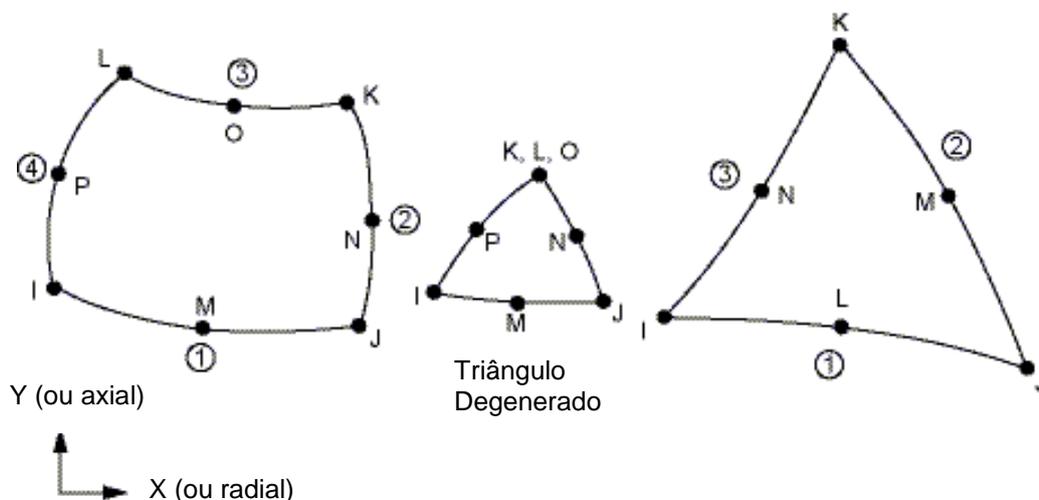


Figura 29 – Geometria do Plane 183

As malhas dos modelos bidimensionais foram refinadas por cinco vezes e os resultados foram analisados. O refinamento foi realizado até atingir respostas muito próximas para os deslocamentos por fluência. Na Figura 30 é possível visualizar o formato da divisão dos elementos na malha do modelo bidimensional.

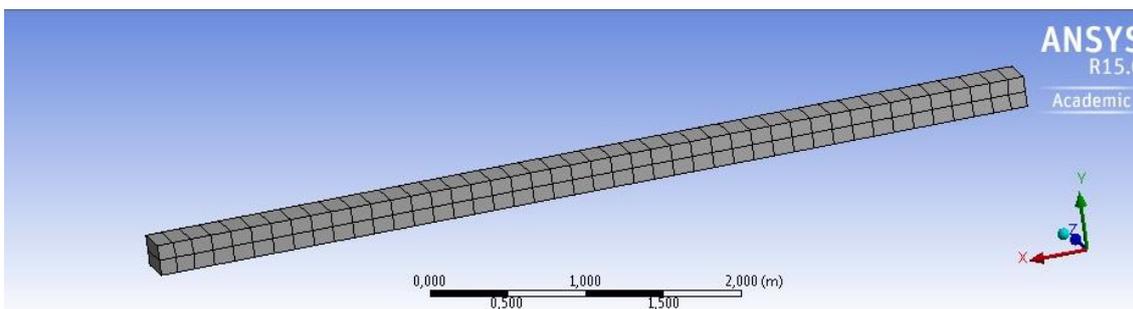


Figura 30.(a)

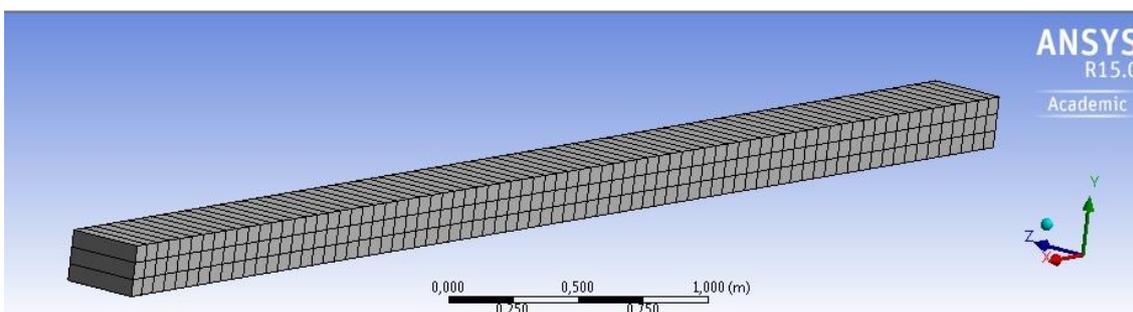


Figura 30.(b)

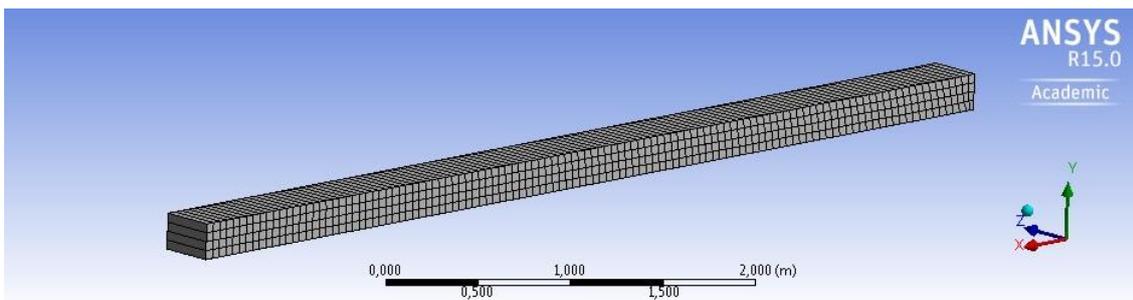


Figura 30.(c)

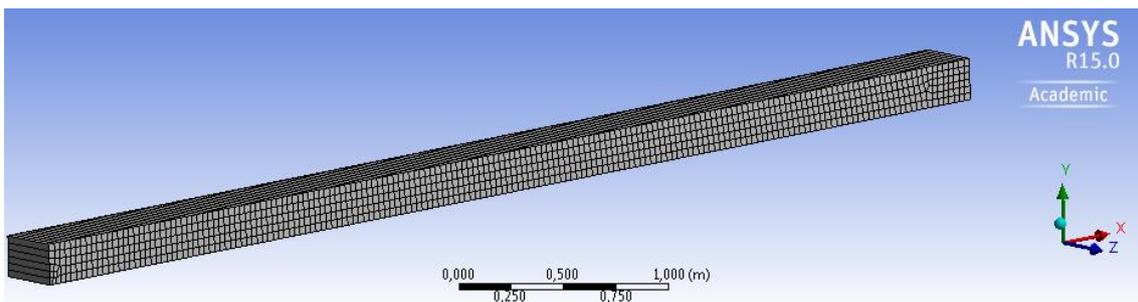


Figura 30.(d)

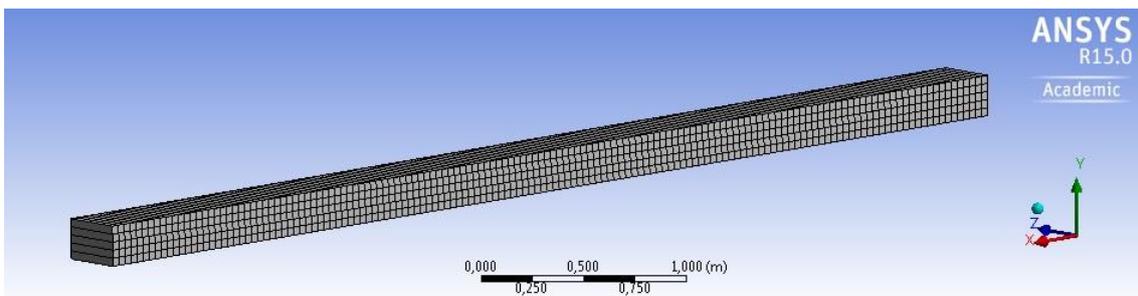


Figura 30.(e)

Figura 30 – Malhas para Análises de Convergência Utilizando o Elemento PLANE 183 do ANSYS para a Viga A. (a): Malha 2x44. (b): Malha 3x88. (c): Malha 4x116. (d): Malha 5x145. (e): Malha 6x174

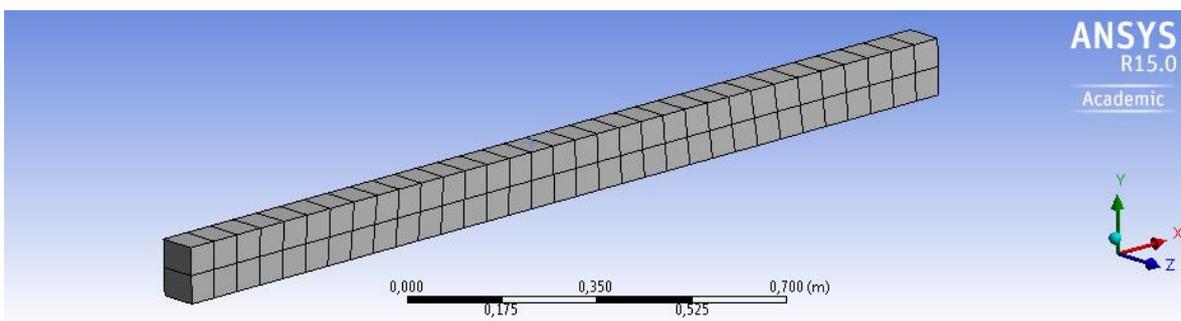


Figura 31.(a)

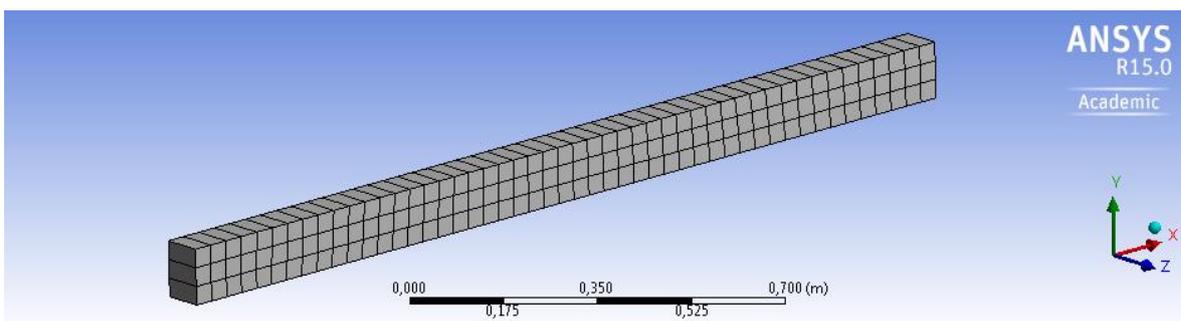


Figura 31.(b)

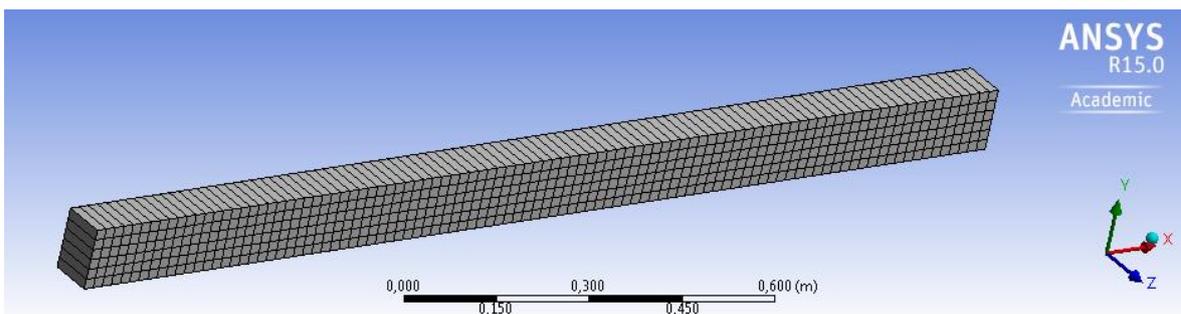


Figura 31.(c)

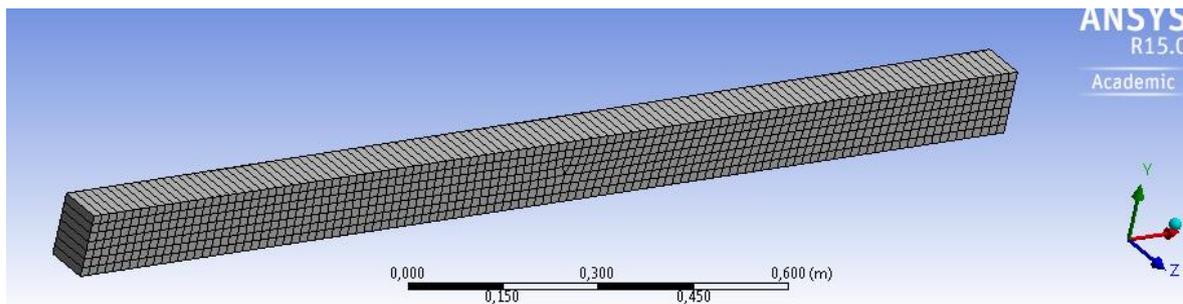


Figura 31.(d)

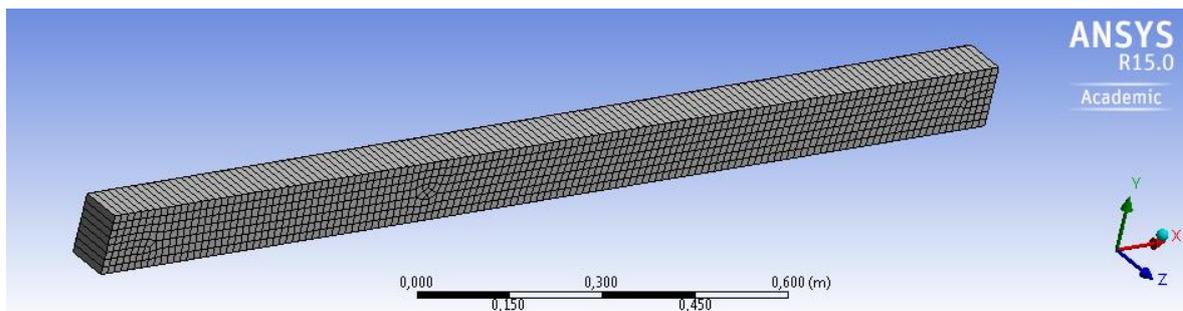


Figura 31.(e)

Figura 31 – Malhas para Análises de Convergência Utilizando o Elemento PLANE 183 do ANSYS para a Viga C3. (a): Malha 2x33. (b): Malha 3x49. (c): Malha 6x100. (d): Malha 7x115. (e): Malha 8x119

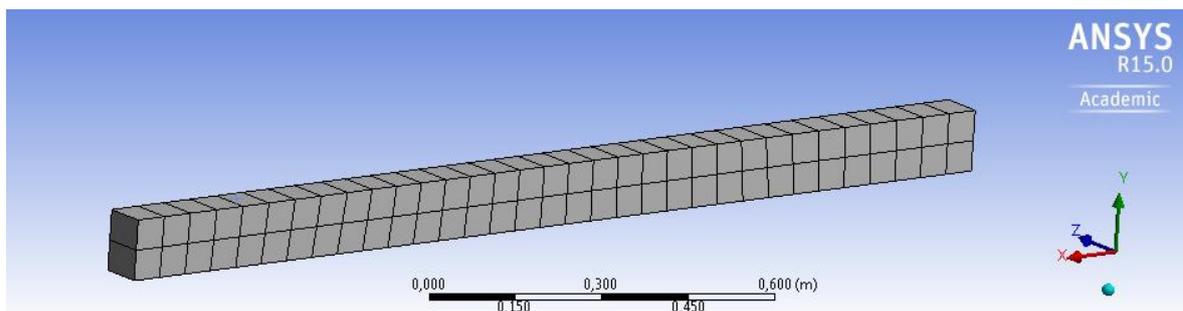


Figura 32.(a)

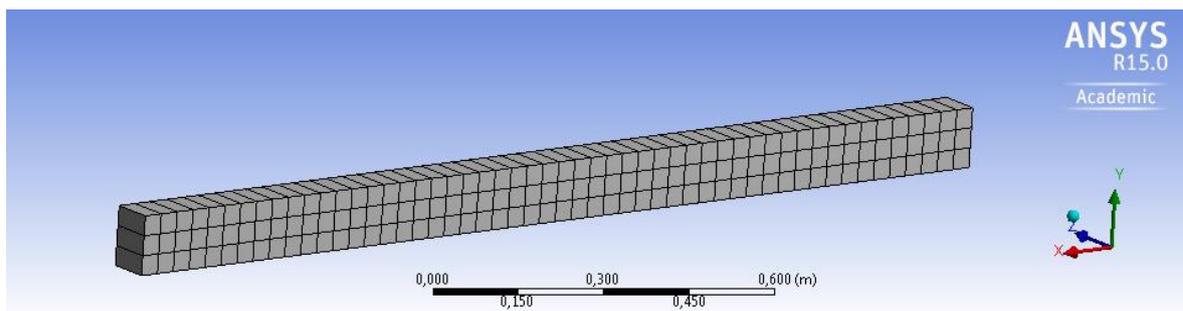


Figura 32.(b)

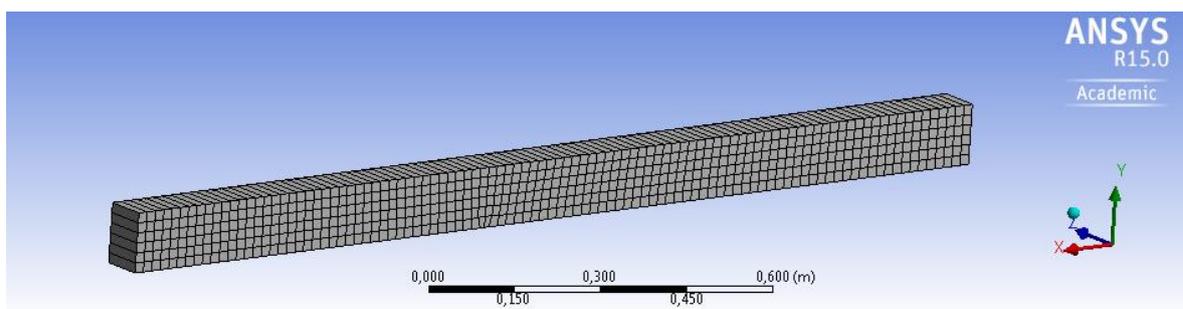


Figura 32.(c)

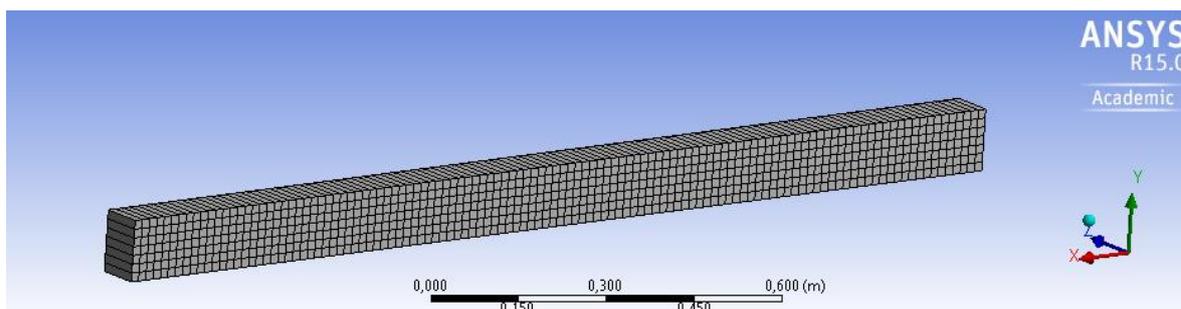


Figura 32.(d)

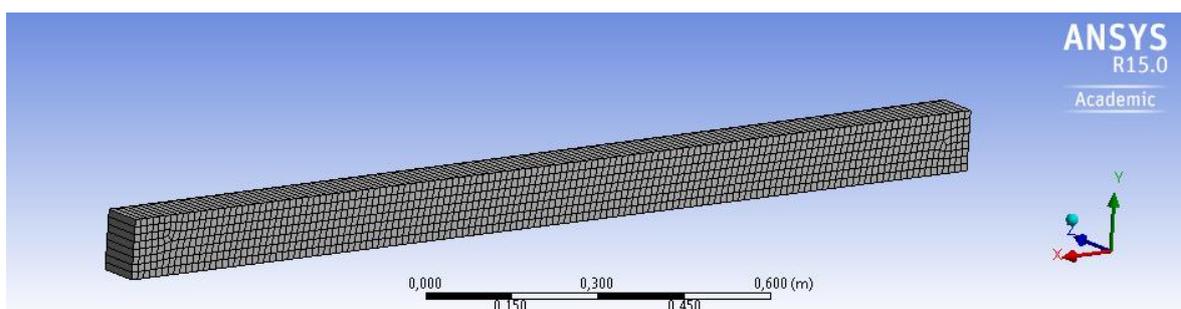


Figura 32.(e)

Figura 32 – Malhas para Análises de Convergência Utilizando o Elemento PLANE 183 do ANSYS para a Viga C4. (a): Malha 2x33. (b): Malha 3x52. (c): Malha 6x100. (d): Malha 7x116. (e): Malha 8x123

O material das simulações possui propriedades elástico-lineares isotrópicas. Onde: E_X = Módulo Elástico (Pa) e PR_{XY} = Coeficiente de Poisson Principal = 0,2. As propriedades elásticas do material são combinadas com a fluência. Foi utilizada a lei de fluência implícita “Time-Hardening” e as unidades de referência para comprimento, força, tempo e temperatura são, respectivamente, em metros, Newtons, segundos e Kelvin.

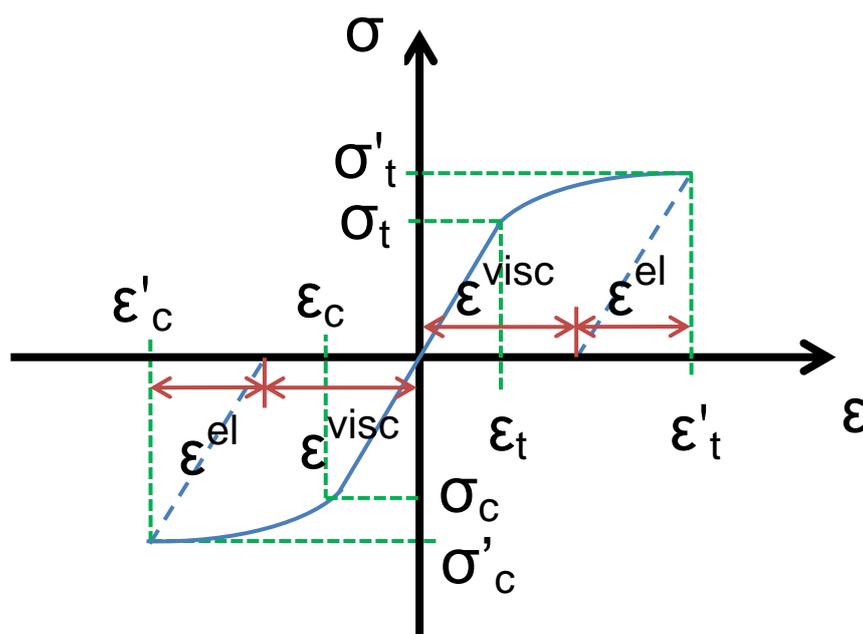


Figura 33 – Curva Tensão-Deformação para um Material Viscoelástico

Fonte: Adaptado de ANSYS (2013).

As análises foram configuradas utilizando dois passos de carregamento. O primeiro passo é para a aplicação da carga, com um intervalo de tempo irrelevante para as análises e sem efeito de fluência. No segundo passo, o carregamento é mantido constante e o efeito de fluência é aplicado; o intervalo de tempo foi dividido em etapas que possibilitaram a visualização gráfica da qualidade do comportamento viscoso do material. Para as análises de fluência também é necessário configurar o processamento de grandes deformações.

Step Controls		Step Controls	
Number Of Steps	2,	Number Of Steps	2,
Current Step Number	1,	Current Step Number	2,
Step End Time	1,e-006 s	Step End Time	728, s
Auto Time Stepping	On	Auto Time Stepping	On
Define By	Substeps	Define By	Time
Initial Substeps	1,	Carry Over Time Step	Off
Minimum Substeps	1,	Initial Time Step	35, s
Maximum Substeps	1,	Minimum Time Step	35, s
Solver Controls		Maximum Time Step	73, s
Solver Type	Program Controlled	Solver Controls	
Weak Springs	Program Controlled	Solver Type	Program Controlled
Large Deflection	On	Weak Springs	Program Controlled
Inertia Relief	Off	Large Deflection	On
Restart Controls		Inertia Relief	Off
Creep Controls		Restart Controls	
Creep Effects	Off	Creep Controls	
		Creep Effects	On
		Creep Limit Ratio	1,

Figura 34 – Configurações das Análises do ANSYS – Etapas de Carregamento 1 e 2

5 ANÁLISES E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados encontrados nas simulações de fluência em vigas de concreto armado modeladas no software ANSYS e os resultados obtidos nos cálculos embasados na NBR 6118 (2014) e no CEB-FIP (1990). Os resultados são comparados numericamente e qualitativamente para verificar se os modelos numéricos apresentam boa representatividade quanto aos resultados dos cálculos da norma brasileira. Também são feitas comparações entre os resultados obtidos nas demais análises deste trabalho. Além disso, são apresentadas as análises de convergência das simulações por MEF para diferentes densidades de malha, utilizando elementos bidimensionais.

5.1 ANÁLISES DE CONVERGÊNCIA

Conforme explicado no capítulo 4.3, foram realizadas análises de convergência dos resultados do MEF para diferentes densidades de malhas utilizando o elemento bidimensional PLANE 183 para as vigas A, C3 e C4. Os resultados destas análises para as relações deformação vs. tempo e deslocamento vs. tempo encontram-se ilustrados do Gráfico 2 ao Gráfico 7. Nas legendas pode-se verificar a densidade da malha utilizada para cada análise.

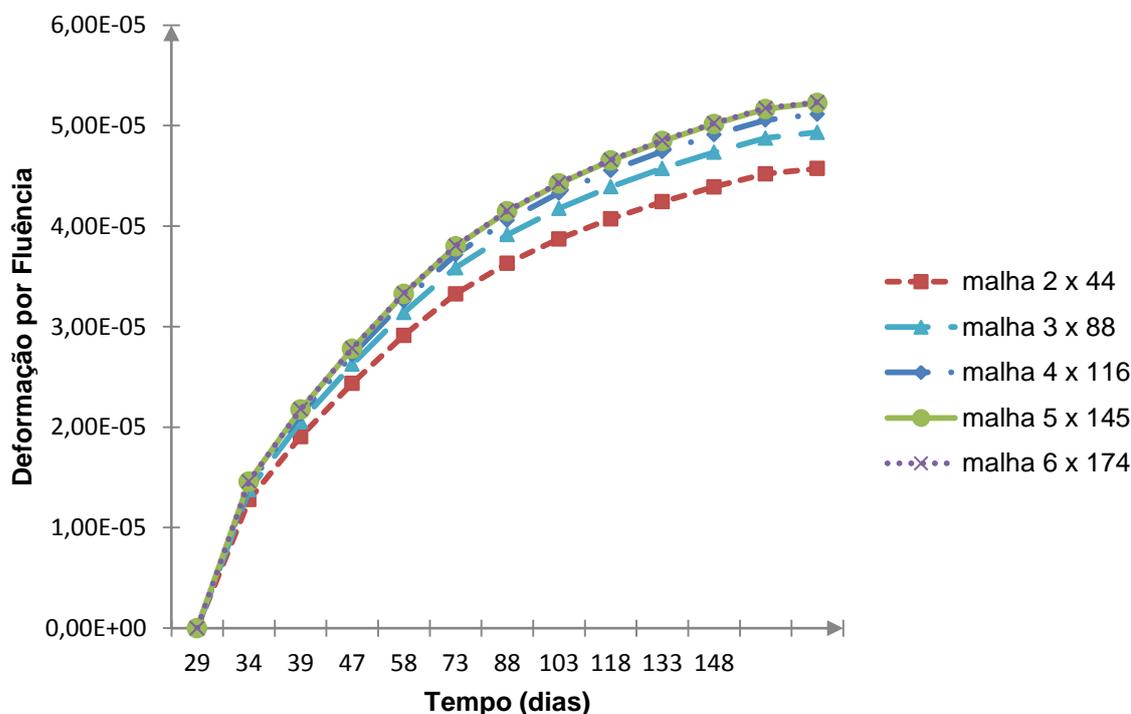


Gráfico 2 – Máxima Deformação vs. Tempo Usando o MEF com Elemento PLANE 183 do ANSYS para a Viga A

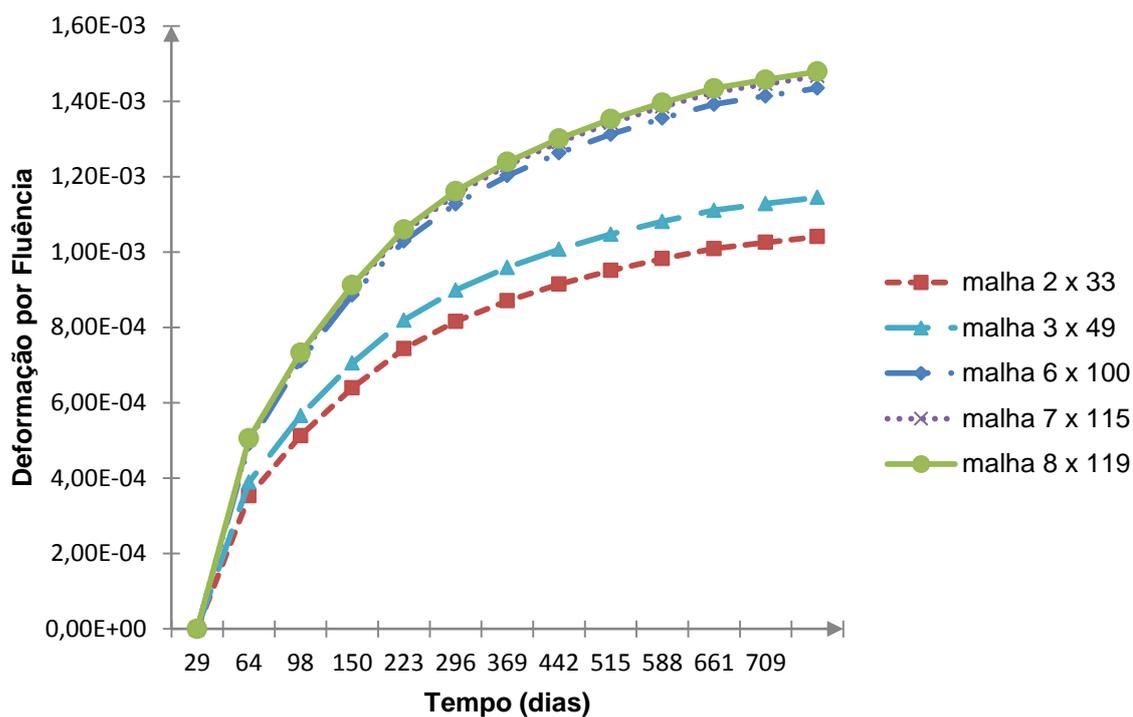


Gráfico 3 – Máxima Deformação vs. Tempo Usando o MEF com Elemento PLANE 183 do ANSYS para a Viga C3

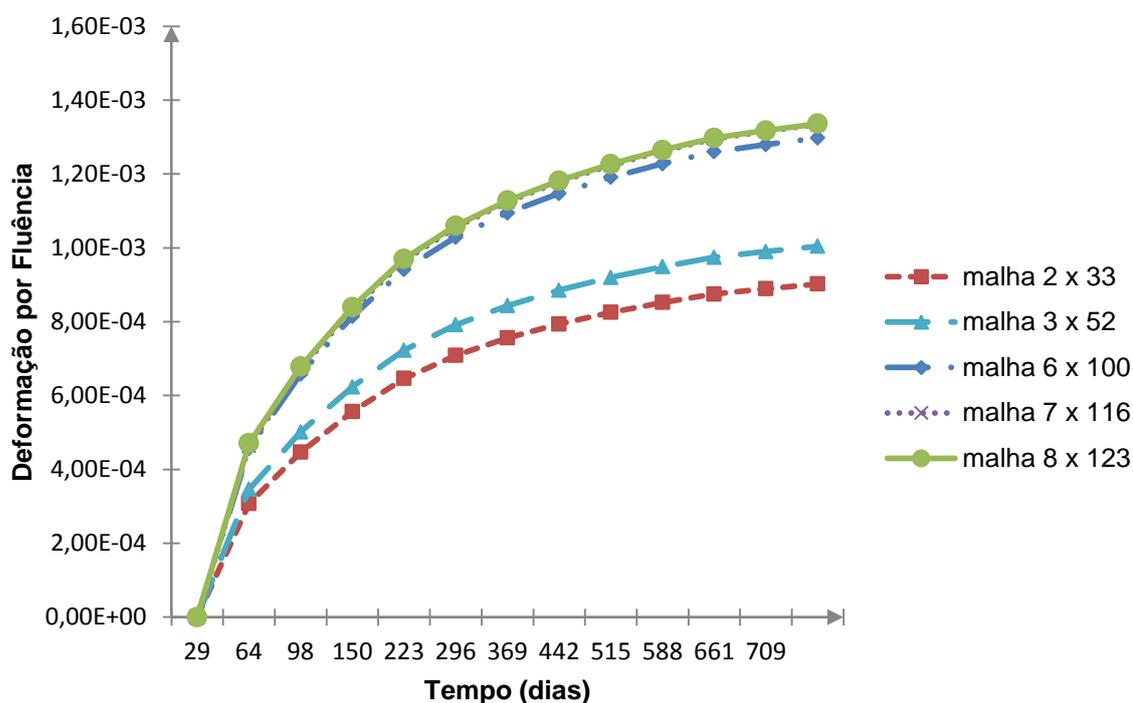


Gráfico 4 – Máxima Deformação vs. Tempo Usando o MEF com Elemento PLANE 183 do ANSYS para a Viga C4

Analisando o comportamento dos resultados apresentados no Gráfico 2 ao Gráfico 4, pode-se verificar a dependência da deformação relativa à densidade

da malha. O comportamento dos resultados da deformação converge de maneira monotônica decrescente, variando em alguns pontos.

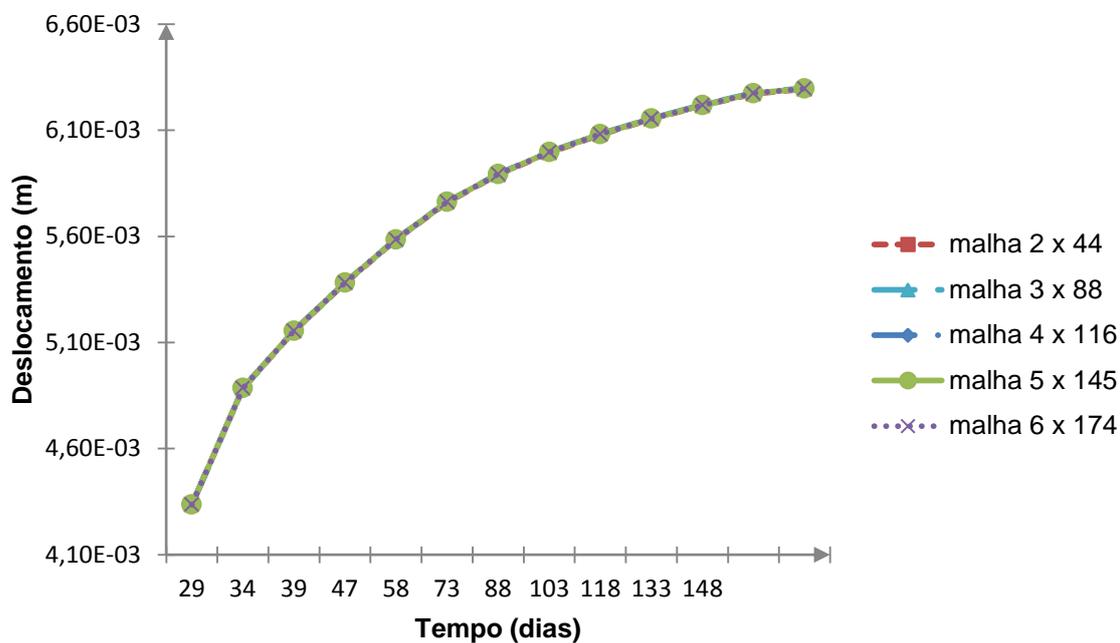


Gráfico 5 – Comparativo entre Modelos do MEF 3d e 2d com Refino de Malha para Deslocamentos por Fluência da Viga A

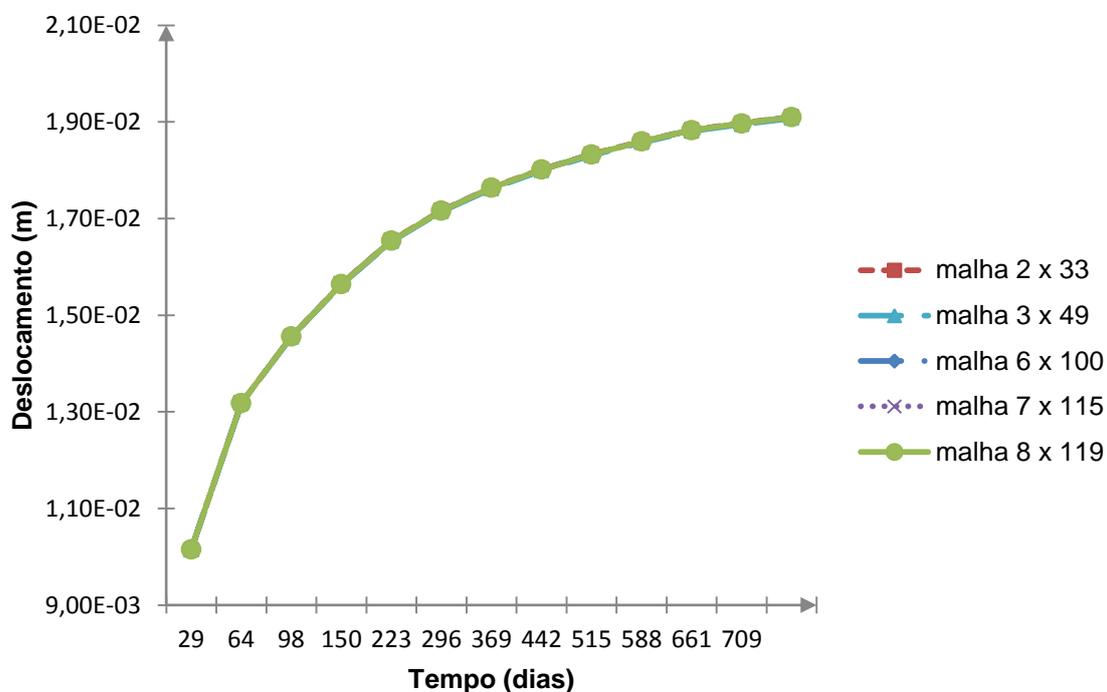


Gráfico 6 – Comparativo entre Modelos do MEF 3d e 2d com Refino de Malha para Deslocamentos por Fluência da Viga C3

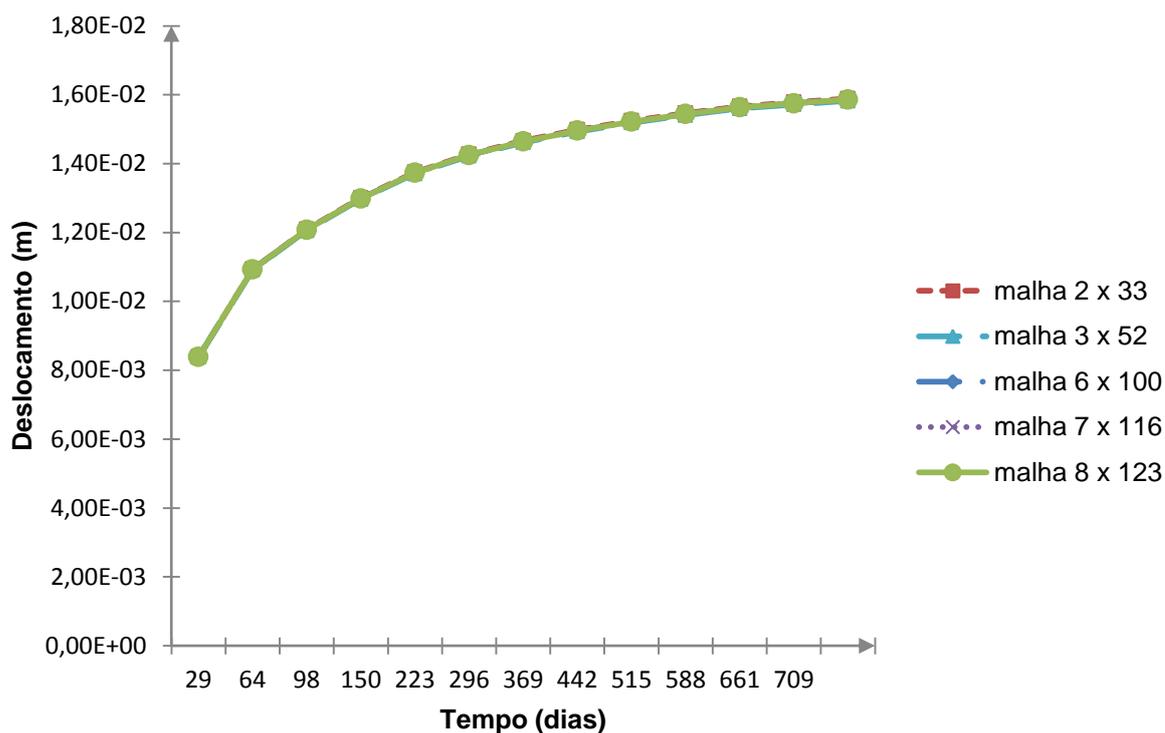


Gráfico 7 – Comparativo entre Modelos do MEF 3d e 2d com Refino de Malha para Deslocamentos por Fluência da Viga C4

Observando o comportamento dos resultados no Gráfico 5 ao Gráfico 7, pode-se observar que todas as malhas utilizadas resultam no mesmo valor de deslocamento para o estado elástico de referência e que os deslocamentos dependentes do tempo variam muito pouco com os refinamentos.

Porém, como visto do Gráfico 2 ao Gráfico 4, a variação com o tempo das deformações máximas é sensível à densidade da malha. Uma malha ajustada ao problema linear elástico (2x44) não é refinada o suficiente para a análise de deformações por fluência. O melhor resultado para a viga A foi obtido com 1044 elementos, para as vigas C3 com 952 elementos e as vigas C4 com 984 elementos.

5.2 COMPARAÇÃO QUANTITATIVA

As comparações quantitativas foram feitas considerando os resultados de deslocamento instantâneo e de deslocamento final (ou deslocamento a longo prazo), obtidos nas quatro vigas ensaiadas da referência 1 e nas três vigas da referência 2 (capítulo 4.2).

A Tabela 12 resume, para cada ensaio utilizado neste estudo, os valores obtidos de acordo com a NBR 6118 (2014), o método de cálculo simplificado do código-modelo CEB-FIP (1990) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando

o elemento tridimensional SOLID 186 do programa ANSYS. Os resultados dos cálculos de acordo com o código-modelo CEB-FIP (1985) foram retirados do boletim de pesquisa de Espion (1988); a teoria da metodologia utilizada para o cálculo está descrita no artigo de Espion e Halleux (1990). Para maior conveniência, os deslocamentos medidos nos ensaios físicos também foram incluídos.

Tabela 12 – Apresentação dos Resultados de Deslocamentos

Ref.	Viga	Deslocamento instantâneo (mm)					t (dias)	Deslocamento final a longo prazo (mm)				
		Ensaio Físico	Calc. NBR	Calc. CEB-FIP Simplif.	Calc. CEB-FIP (1985)	MEF		Ensaio Físico	Calc. NBR	Calc. CEB-FIP Simplif.	Calc. CEB-FIP (1985)	MEF
1	A	9,7	4,36	5,48		4,33	140	28,69	5,86	24,51		6,2
1	B	8,3	3,26	4,48		3,14	140	22,14	4,36	31,32		4,3
1	C	9,5	4,91	6		4,80	140	25,1	6,57	26,88		6,9
1	D	7,8	3,49	4,7		3,38	140	25	4,68	34,34		5
2	C1	3,05	3,58	3,57	2,44	3,7	728	7,37	7,31	11,08	5,95	7,7
2	C3	7,87	9,9	9,88	6,68	10,1	728	17,27	20,2	27,55	15,22	19,1
2	C4	6,1	8,21	8,19	5,22	8,31	728	15,49	16,74	11,95	13,14	15,8

Como apenas a referência 2 possui os cálculos de acordo com o código-modelo CEB-FIP (1985), a coluna de resultados está vazia para a referência 1.

Na Tabela 12 nota-se que a modelagem numérica feita no programa ANSYS e os cálculos embasados na NBR 6118 (2014) e no CEB-FIP (1990) para a caracterização do fenômeno da fluência em vigas de concreto armado não conseguiram representar, de forma quantitativa, o comportamento da fluência quando comparadas com os ensaios experimentais realizados em laboratório, principalmente para as vigas da referência 1.

A comparação dos resultados obtidos por meio dos cálculos das diferentes normas com relação aos ensaios físicos encontra-se resumida na Tabela 13.

Tabela 13 – Comparação dos Resultados Calculados Analiticamente com os Ensaios Físicos

Ref.	Viga	Deslocamento instantâneo (mm)			Deslocamento final a longo prazo (mm)		
		Calc. NBR	Calc. CEB-FIP Simplif.	Calc. CEB-FIP (1985)	Calc. NBR	Calc. CEB-FIP Simplif.	Calc. CEB-FIP (1985)
1	A	-55%	-44%	-	-80%	-15%	-
1	B	-61%	-46%	-	-80%	41%	-
1	C	-48%	-37%	-	-74%	7%	-
1	D	-55%	-40%	-	-81%	37%	-

Ref.	Viga	Deslocamento instantâneo (mm)			Deslocamento final a longo prazo (mm)		
		Calc. NBR	Calc. CEB-FIP Simplif.	Calc. CEB-FIP (1985)	Calc. NBR	Calc. CEB-FIP Simplif.	Calc. CEB-FIP (1985)
2	C1	17%	17%	-20%	-1%	50%	-19%
2	C3	26%	26%	-15%	17%	60%	-12%
2	C4	35%	34%	-14%	8%	-23%	-15%

Para os cálculos simplificados, recomendados pelo código-modelo CEB-FIP (1990), o deslocamento a longo prazo inicia-se em um valor superestimado e mantém-se constante. Por esse motivo os valores são muito maiores que os obtidos por meio dos ensaios físicos para o tempo de carregamento das peças. Essa constância é justificada pelo fato de os cálculos sugeridos pelo modelo simplificado não levarem em consideração a colaboração do aço na resistência à fissuração das vigas. Portanto, o modelo mantém os valores de deslocamentos em um patamar conservador.

Apesar deste estágio antes da fissuração não ser de grande relevância, pois o carregamento a longo prazo geralmente é maior que o carregamento de fissuração, os cálculos da NBR 6118 (2003 e 2014) consideram a área de aço no cálculo do momento de fissuração (ARAÚJO, 2005).

Para as vigas da referência 2 os resultados da NBR 6118 (2014) e do código-modelo CEB-FIP (1985) são relativamente satisfatórios, apesar de serem maiores, principalmente no início do carregamento, pois se deve lembrar que recomendações de normas geralmente majoram os carregamentos e minoram as propriedades resistentes dos materiais.

As vigas da referência 1 possuem valores pouco confiáveis de deslocamento obtidos por meio do ensaio físico. A diferença foi atribuída, por Sampaio (2004), a três fatores: possíveis erros ocorridos durante a realização do ensaio experimental, direta ou indiretamente; possíveis erros na medição inicial dos deslocamentos no ensaio experimental e a desatualização dos modelos que calculam a fluência (NBR 6118/2003 e CEB-FIB 1990). Entre os motivos apresentados levantou-se a possibilidade de o ensaio ter sido realizado sem controle permanente da umidade ambiente, pois essa variável tem importância essencial na estimativa das deformações por fluência.

A Tabela 14 apresenta a comparação entre resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos e os cálculos da NBR 6118 (2014). Para

conveniência, os valores de deslocamento a longo prazo, calculados analiticamente pela NBR 6118 (2014), e o resultado das simulações foram repetidos.

Tabela 14 – Comparação dos Resultados das Simulações em MEF com os Cálculos Analíticos

Ref.	Viga	Deslocamento instantâneo (mm)			Deslocamento final a longo prazo (mm)		
		Calc. NBR	MEF	Comparação: MEF e NBR	Calc. NBR	MEF	Comparação: MEF e NBR
1	A	4,36	4,33	-1%	5,86	6,20	6%
1	B	3,26	3,14	-4%	4,36	4,30	-1%
1	C	4,91	4,80	-2%	6,57	6,90	5%
1	D	3,49	3,38	-3%	4,68	5,00	7%
2	C1	3,58	3,70	3%	7,31	7,70	5%
2	C3	9,90	10,10	2%	20,20	19,10	-5%
2	C4	8,21	8,31	1%	16,74	15,82	-5%

Pode-se observar que, apesar de os resultados não serem exatamente idênticos aos valores das referências, existe uma boa conformidade dos valores de deslocamento instantâneo e a longo prazo entre os cálculos analíticos da NBR 6118 (2014) e as simulações pelo MEF.

5.3 COMPORTAMENTO TENSÃO VS. DEFORMAÇÃO

Os comportamentos tensão vs. deformação são analisados ao longo da viga e plotados em forma de gráfico na seção transversal de máximo momento solicitante.

A Figura 35 ilustra a deformação por fluência ao longo do tempo para a seção simétrica das vigas “A” a “D” e “C1” a “C4”. As deformações foram medidas no instante final de carregamento e a unidade da tensão aplicada é em kPa. Nota-se nas figuras que o comportamento da deformação por fluência se comporta de forma bastante similar, tanto sob tensões normais de tração quanto sob compressão.

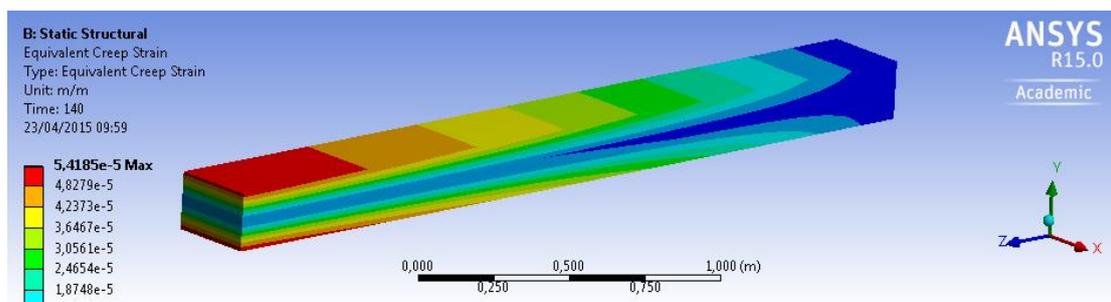


Figura 35.(a)

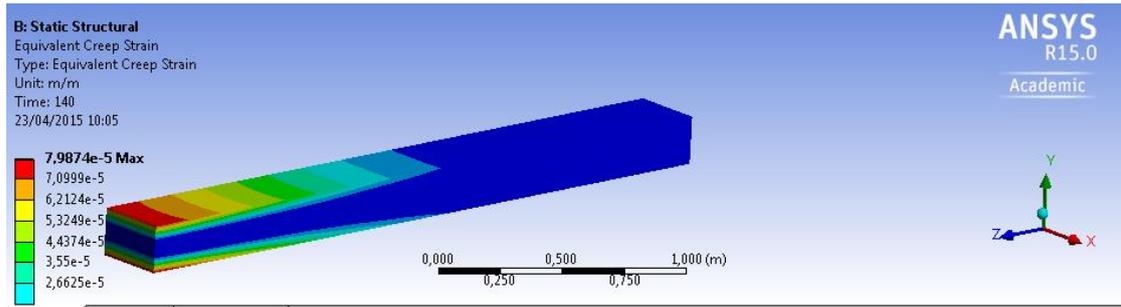


Figura 35.(b)

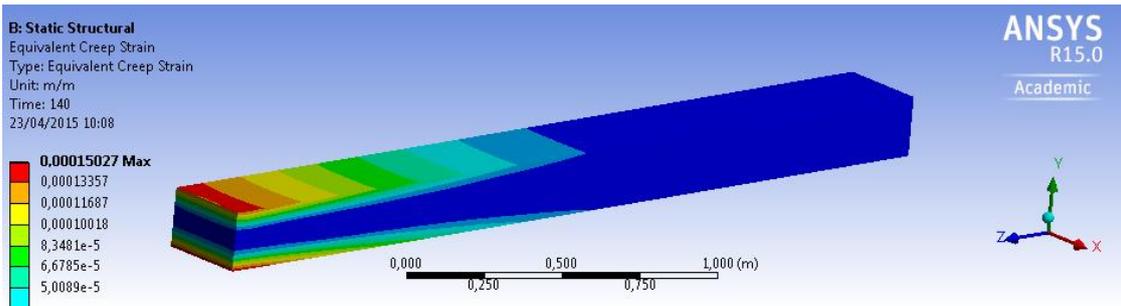


Figura 35.(c)

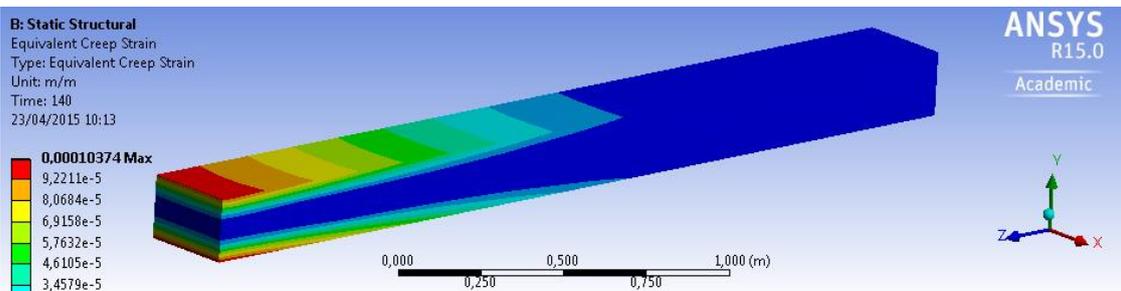


Figura 35.(d)

Figura 35 – Comportamento das Deformações por Fluência pelo MEF das Vigas da Referência 1. (a) Viga A (b) Viga B, (c) Viga C, (d) Viga D

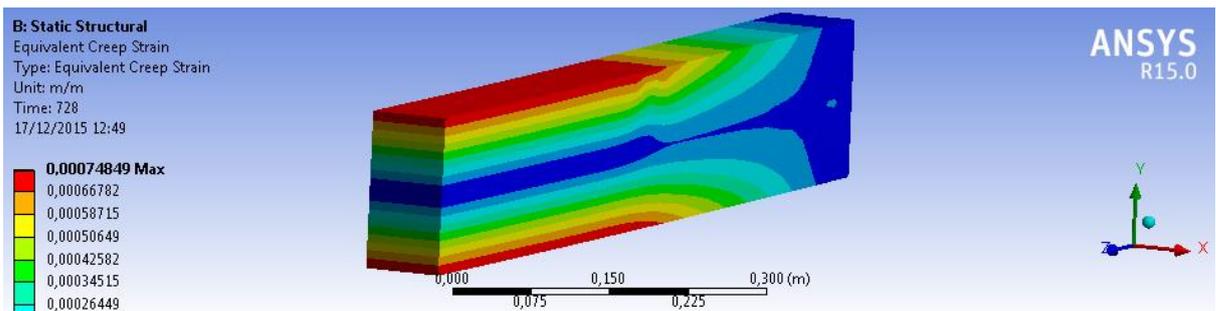


Figura 36.(a)

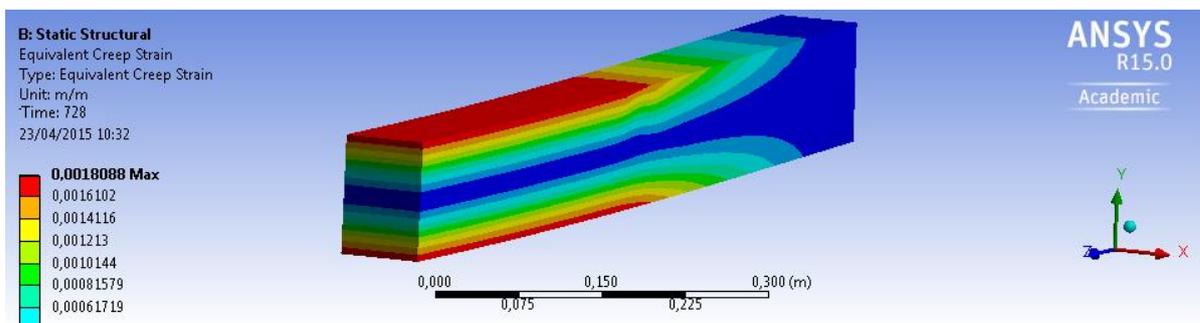


Figura 36.(b)

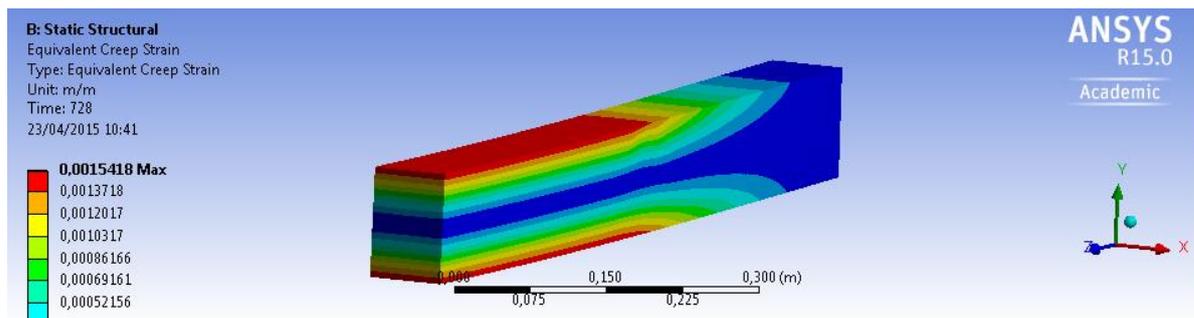


Figura 36.(c)

Figura 36 – Comportamento das Deformações por Fluência pelo MEF das Vigas da Referência 2. (a) Viga C1. (b) Viga C3. (c) Viga C4

A seguir, no Gráfico 8 e no Gráfico 9 são traçadas as relações tensão-deformação para o concreto armado obtidas no centro das vigas A a D e C1, C3 e C4 nas simulações por MEF.

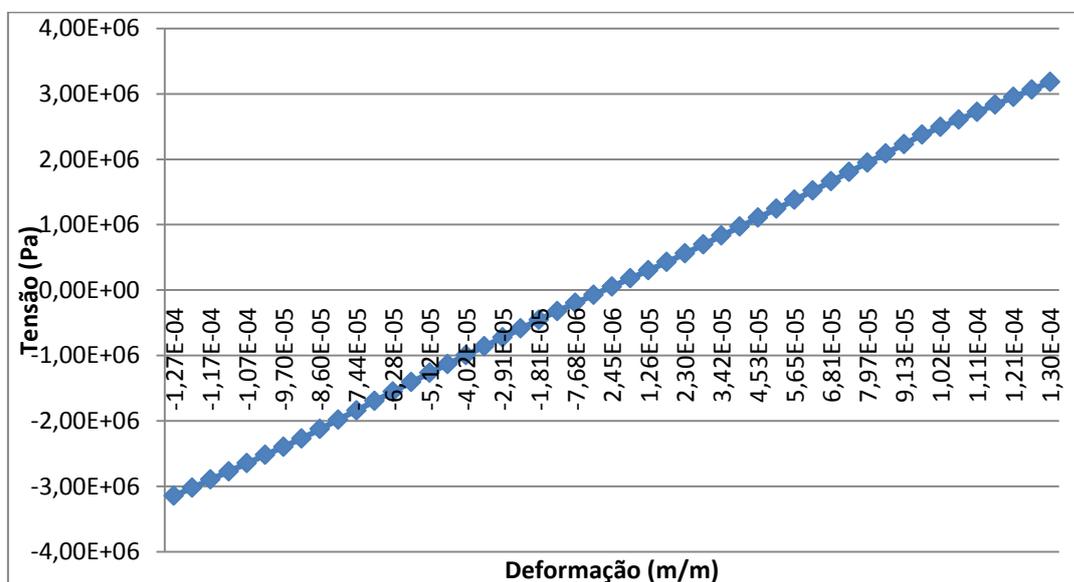


Gráfico 8 (a)

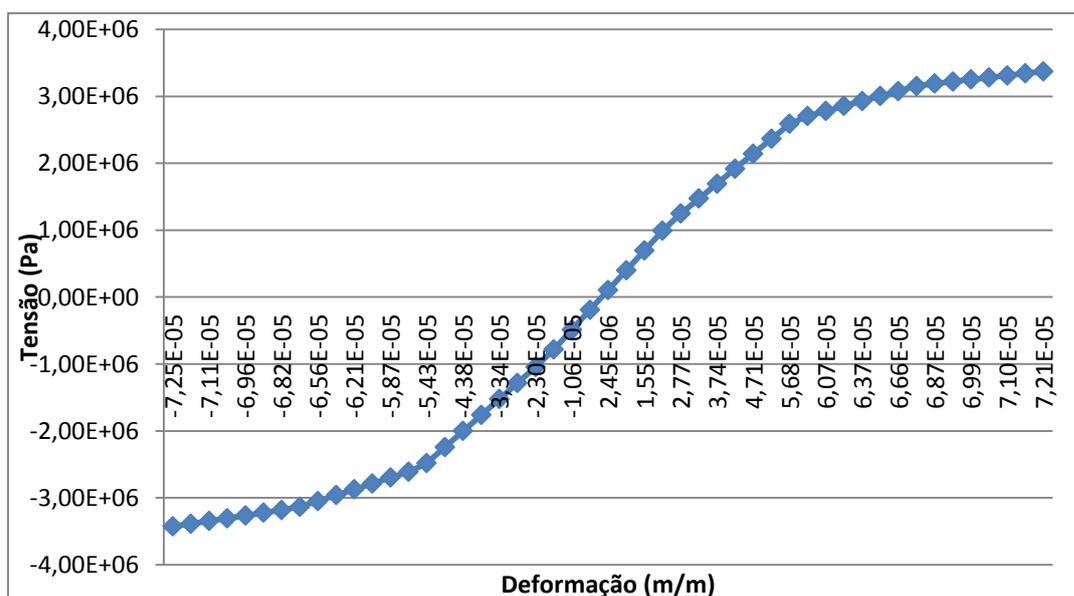


Gráfico 8 (b)

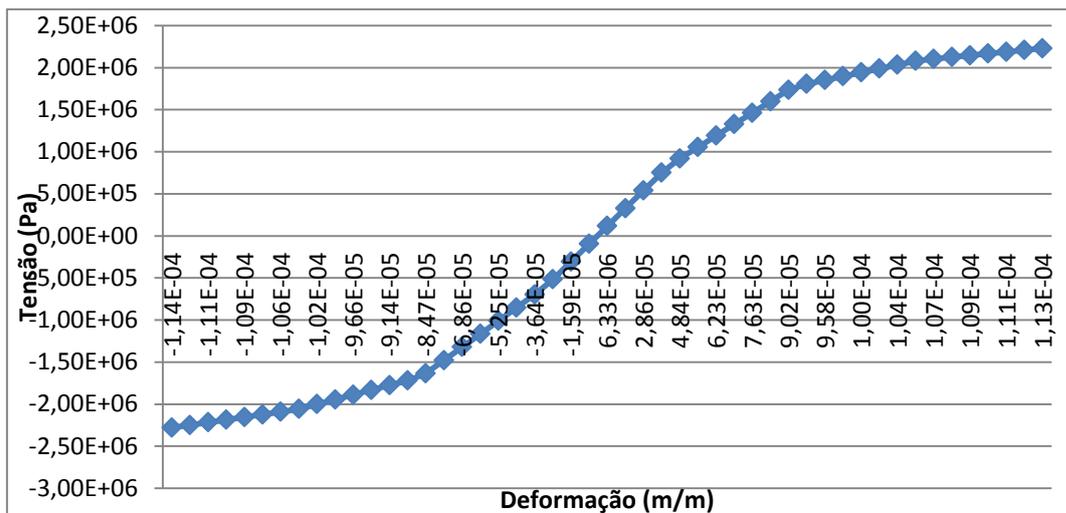


Gráfico 8 (c)

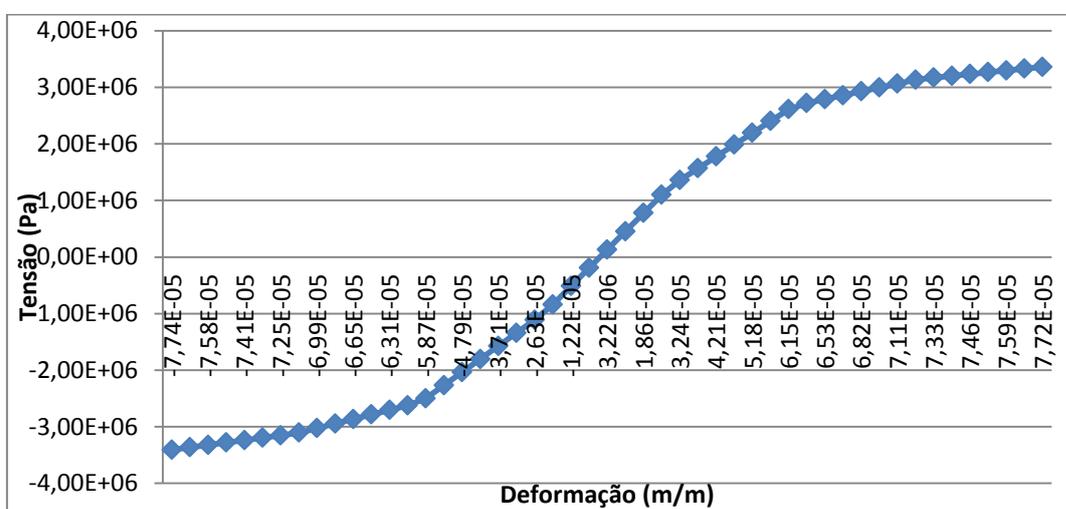


Gráfico 8 (d)

Gráfico 8 – Relação Tensão-Deformação total obtida nas vigas da Referência 1. (a) Viga A, (b) Viga B, (c) Viga C, (d) Viga D

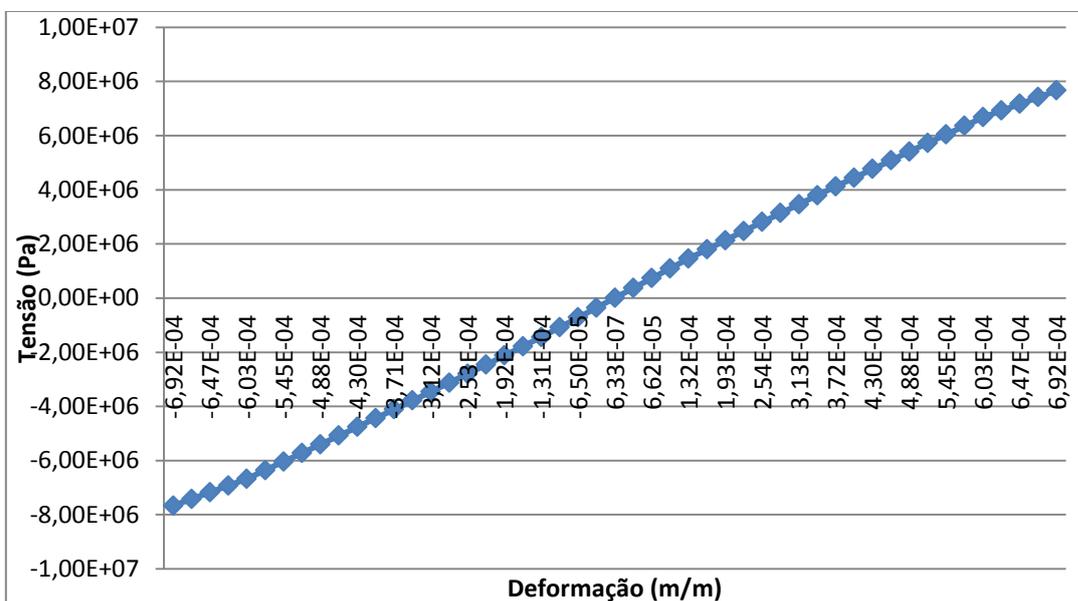


Gráfico 9 (a)

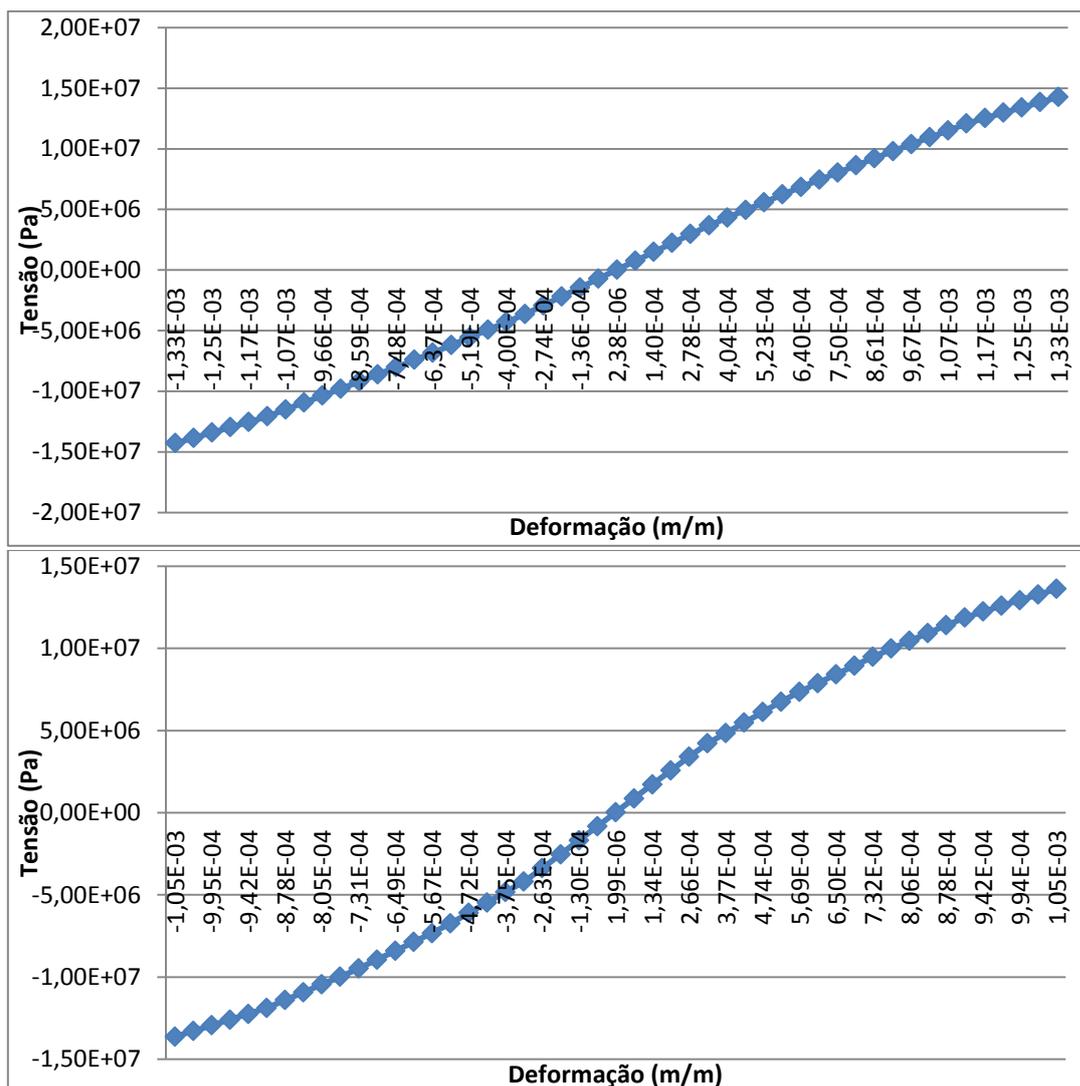


Gráfico 9 – Relação Tensão-Deformação total obtida nas vigas da Referência 2. (a) Viga C1, (b) Viga C3, (c) Viga C4.

Como os modelos utilizados consideram somente um material isotrópico, os comportamentos apresentados são essencialmente viscoelásticos. Caso o aço fosse incluído nos modelos, utilizando elementos diferentes e um material elastoplástico e com uma rotina de fissuração do concreto para as regiões onde há o aumento da tensão de tração, o comportamento dos diagramas tensão-deformação seria mais realístico.

5.4 COMPARAÇÃO QUALITATIVA

As comparações qualitativas dos resultados levam em conta o comportamento da deformação e do deslocamento na seção mais solicitada das vigas analisadas ao longo do tempo de duração dos ensaios.

Comparando-se o gráfico das deformações por fluência ao longo do tempo gerado pelos cálculos analíticos da NBR 6118 (2014) e do código-modelo CEB-FIP (1990) com as deformações por fluência obtidas pelo MEF, utilizando os elementos do software ANSYS SOLID 186, tridimensional, e PLANE 183, bidimensional, tem-se as relações plotadas do Gráfico 10 ao Gráfico 16. Na comparação entre os resultados das deformações, os dados do ensaio experimental não foram levados em conta, pois não houve a coleta dos mesmos para esse tipo de estudo.

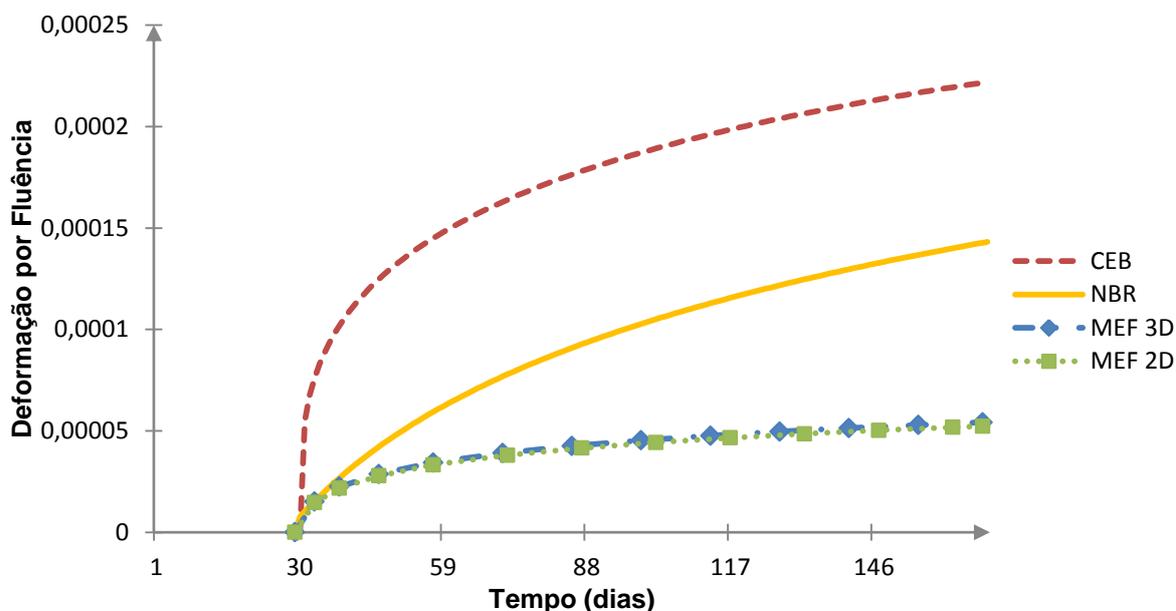


Gráfico 10 – Comparativo entre Cálculo Analítico pelo CEB-FIP e NBR e o MEF das Deformações por Fluência da Viga A

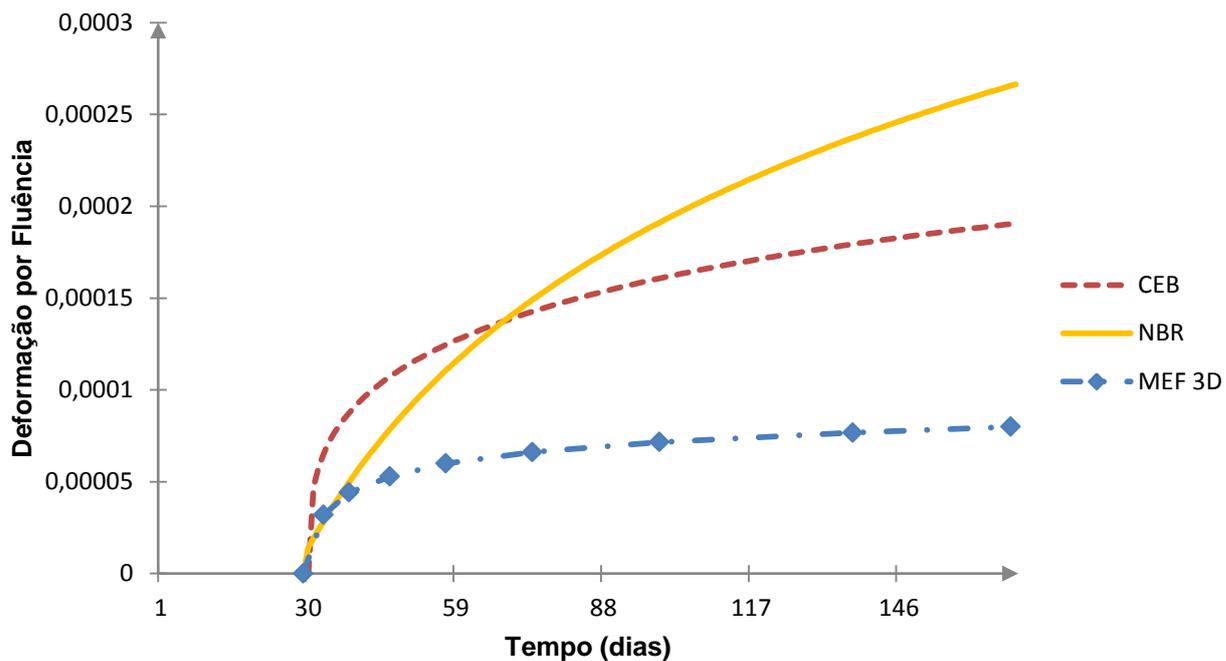


Gráfico 11 – Comparativo entre Cálculo Analítico pelo CEB-FIP e NBR e o MEF das Deformações por Fluência da Viga B

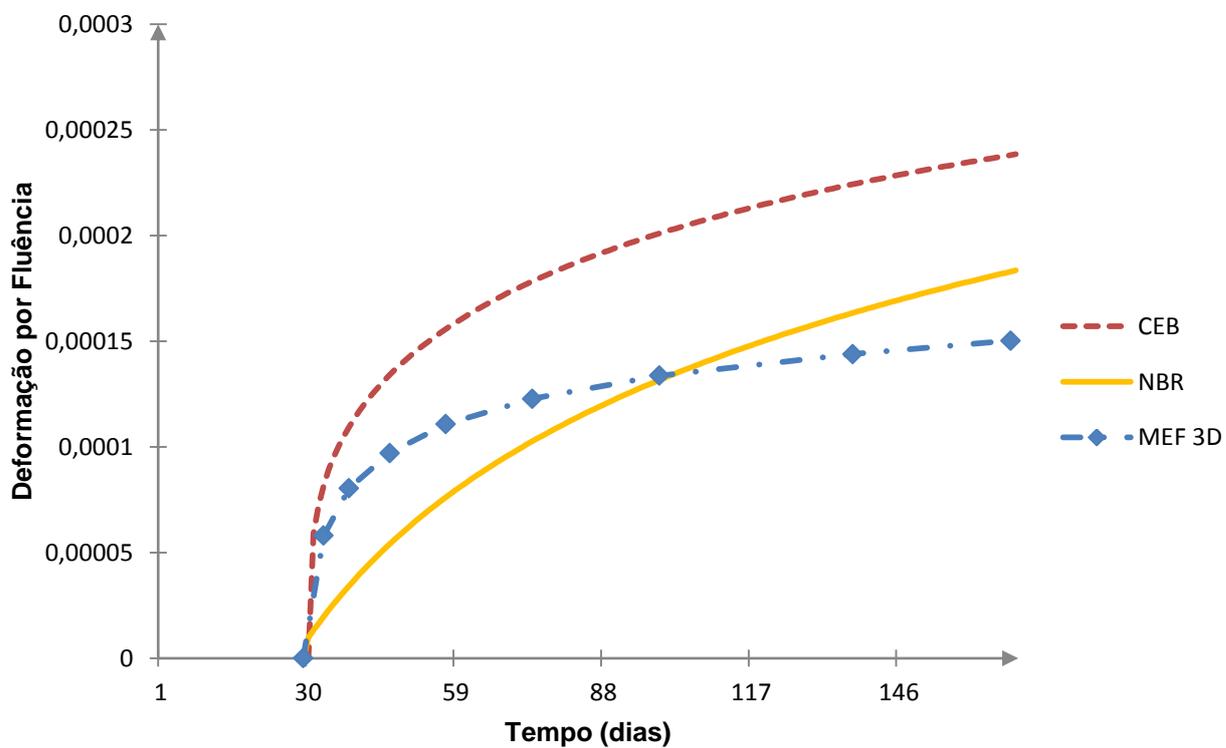


Gráfico 12 – Comparativo entre Cálculo Analítico pelo CEB-FIP e NBR e o MEF das Deformações por Fluência da Viga C

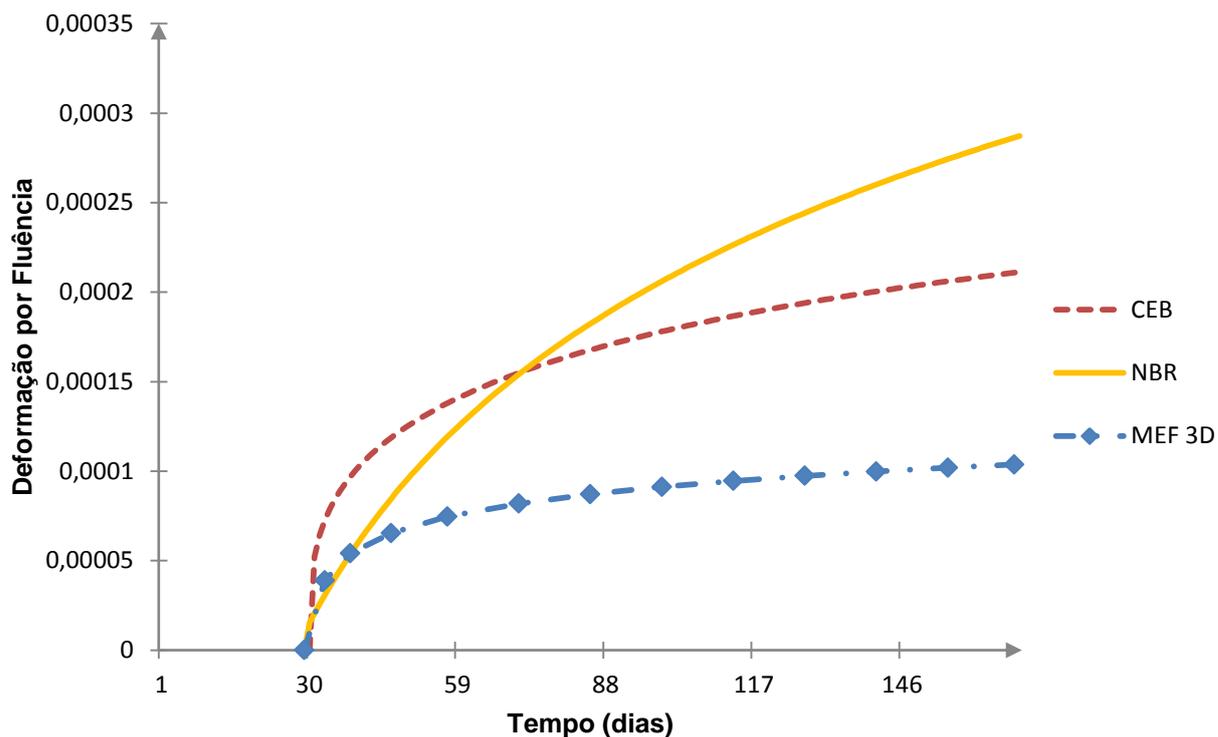


Gráfico 13 – Comparativo entre Cálculo Analítico pelo CEB-FIP e NBR e o MEF das Deformações por Fluência da Viga D

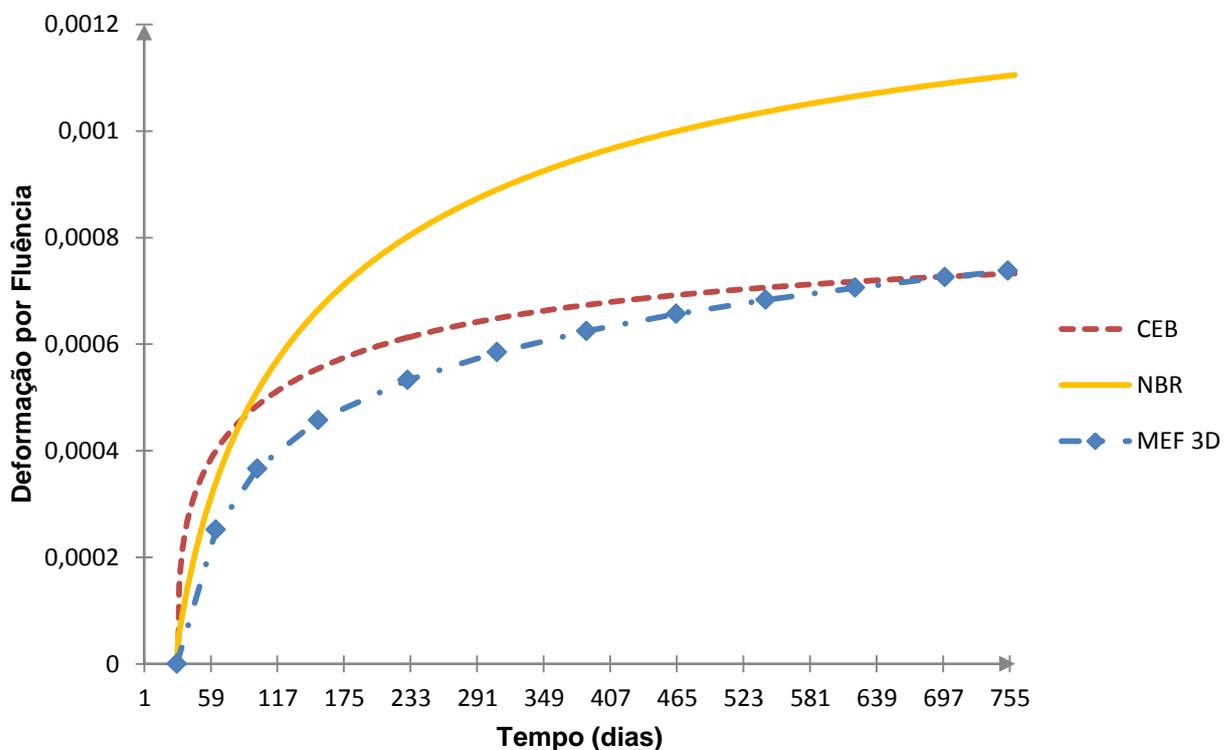


Gráfico 14 – Comparativo entre Cálculo Analítico pelo CEB-FIP e NBR e o MEF das Deformações por Fluência da Viga C1

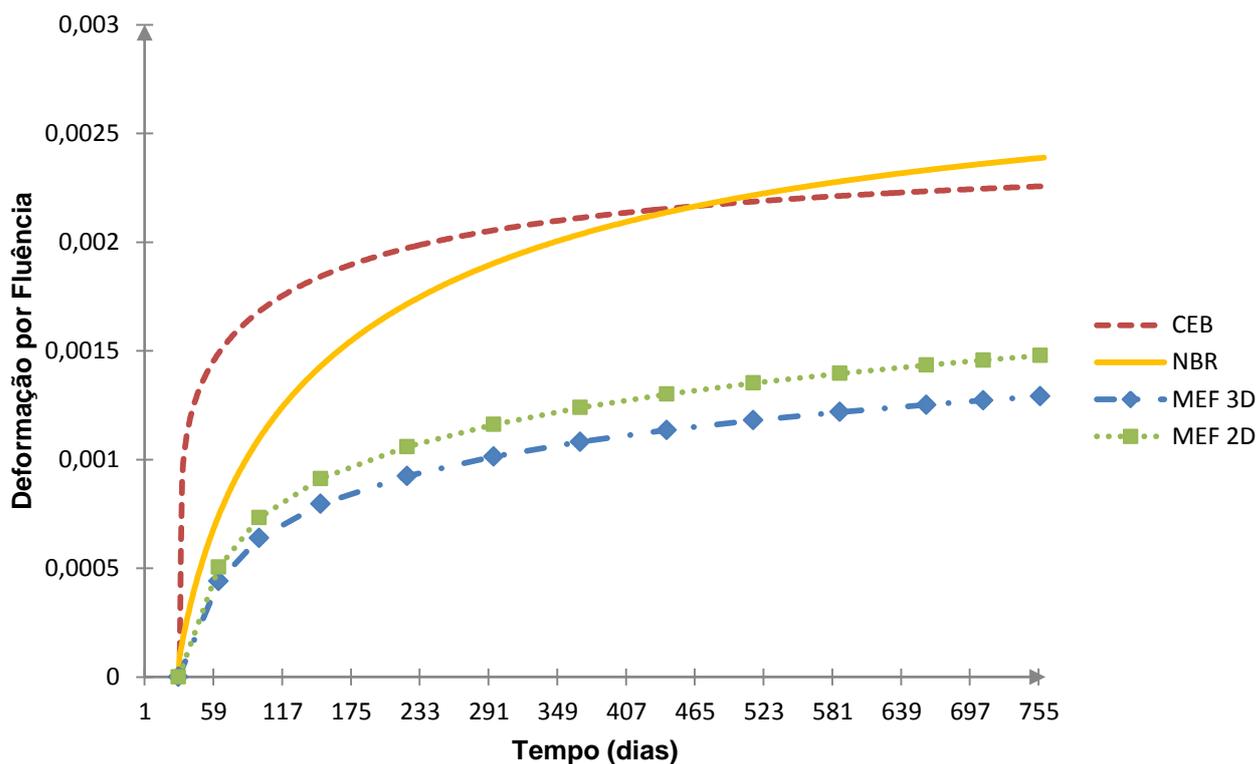


Gráfico 15 – Comparativo entre Cálculo Analítico pelo CEB-FIP e NBR e o MEF das Deformações por Fluência da Viga C3

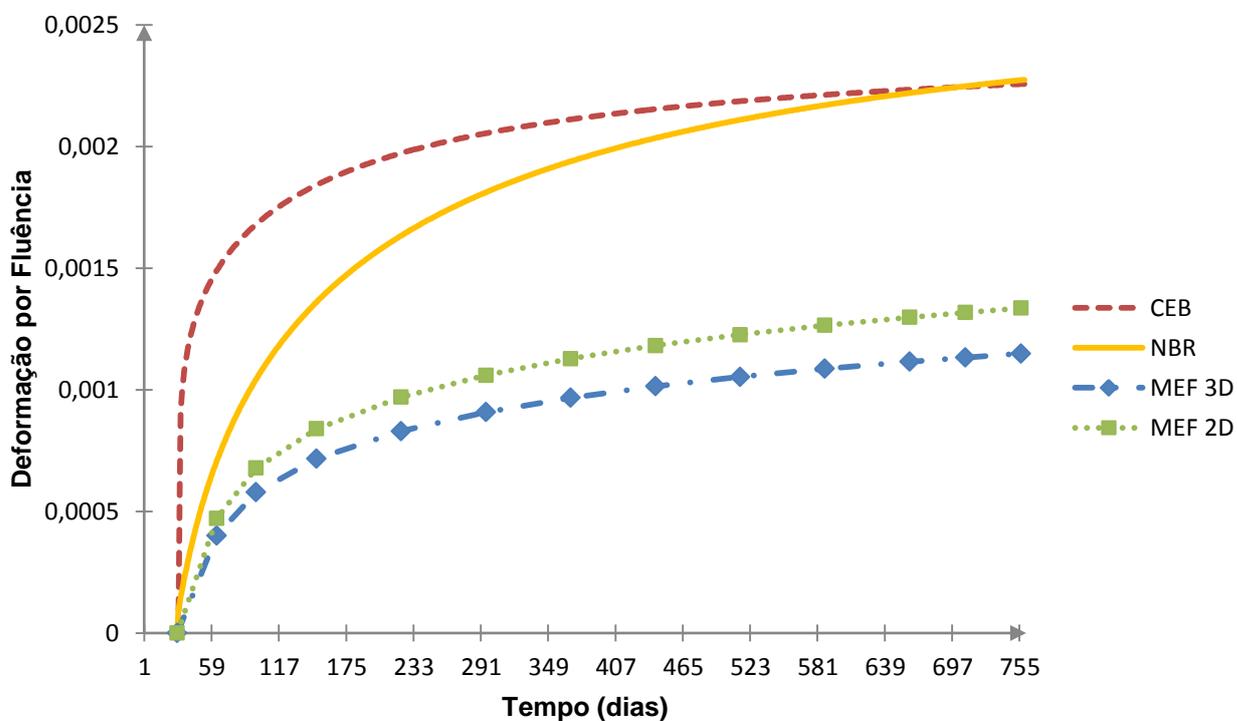


Gráfico 16 – Comparativo entre Cálculo Analítico pelo CEB-FIP e NBR e o MEF das Deformações por Fluência da Viga C4

Como se observa do Gráfico 10 ao Gráfico 16, qualitativamente, os comportamentos da deformação por fluência obtidos por meio do MEF são satisfatórios, pois apresentam características semelhantes em relação ao seu desenvolvimento ao longo do tempo. Inicialmente, o comportamento das curvas de deformação vs. tempo se desenvolve de forma bastante similar para todos os métodos comparados (MEF 2D e 3D, NBR 6118 (2014) e CEB-FIP (1990)) em todas as vigas testadas, porém as curvas do MEF e do CEB-FIP (1990), após certo tempo (aproximadamente 20 dias para as vigas da referência 1 e 200 dias para as vigas da referência 2), demonstram que a deformação por fluência aumenta em uma taxa muito menor que a inicial. Isso se deve ao formato exponencial das formulações de deformação por fluência do MEF, descrito no capítulo 3.4.1, ser mais semelhante ao formato do CEB-FIP (1990) do que ao da NBR 6118 (2014), apesar de ter os valores dos coeficientes de fluência calibrados a partir da formulação da NBR 6118 (2014).

Ainda, nos mesmos gráficos, é possível observar que os valores numéricos da deformação divergem quando comparados aos do cálculo da NBR 6118 (2014). Isso não era esperado, porque os valores dos coeficientes de fluência foram calibrados a partir dessa norma. Constata-se, assim, que a qualidade numérica das deformações obtidas pelo MEF não é satisfatória quando comparada às deformações calculadas pela NBR 6118 (2014) e pelo CEB-FIP (1990). Uma das hipóteses prováveis para isso é que a lei de fluência utilizada, endurecimento por tempo, atualiza o módulo de Young na fase de fluência, tornando a estrutura mais rígida, portanto, as deformações obtidas são menores, conforme a teoria abordada na equação (13).

No Gráfico 10, Gráfico 15 e Gráfico 16 nota-se que as curvas de deformação vs. tempo do MEF geradas pelas modelagens em 3D e 2D mantêm uma mesma equivalência, tanto em termos qualitativos como quantitativos, apesar das quantidades obtidas na modelagem 2D para as vigas C3 e C4, do Gráfico 15 e do Gráfico 16, serem um pouco menores do que as quantidades obtidas na modelagem 3D. Isso significa, conforme demonstrado anteriormente, nas análises de convergência, que se a malha das simulações em 3D tivesse sido um pouco mais refinada, os resultados numéricos seriam mais próximos.

Apesar de a deformação ser gradiente para o cálculo dos deslocamentos no MEF, ela não é utilizada para o cálculo dos deslocamentos sugerido pela NBR 6118 (2014) e pelo código-modelo CEB-FIP (1990) de maneira direta. Portanto,

espera-se que o comportamento das curvas de deslocamento possua uma equivalência maior com relação aos cálculos da norma do que as curvas de deformação.

O deslocamento calculado pela NBR 6118 (2014) foi comparado ao cálculo realizado pelo MEF ao longo do tempo. Os resultados encontram-se apresentados do Gráfico 17 ao Gráfico 23. O deslocamento ao longo do tempo calculado pelo método simplificado do CEB-FIP (1990) apresenta comportamento linear constante e, como demonstrado nos resultados numéricos da Tabela 12, os valores diferem bastante dos obtidos através dos demais métodos. Logo, a comparação qualitativa não é demonstrada nos gráficos.

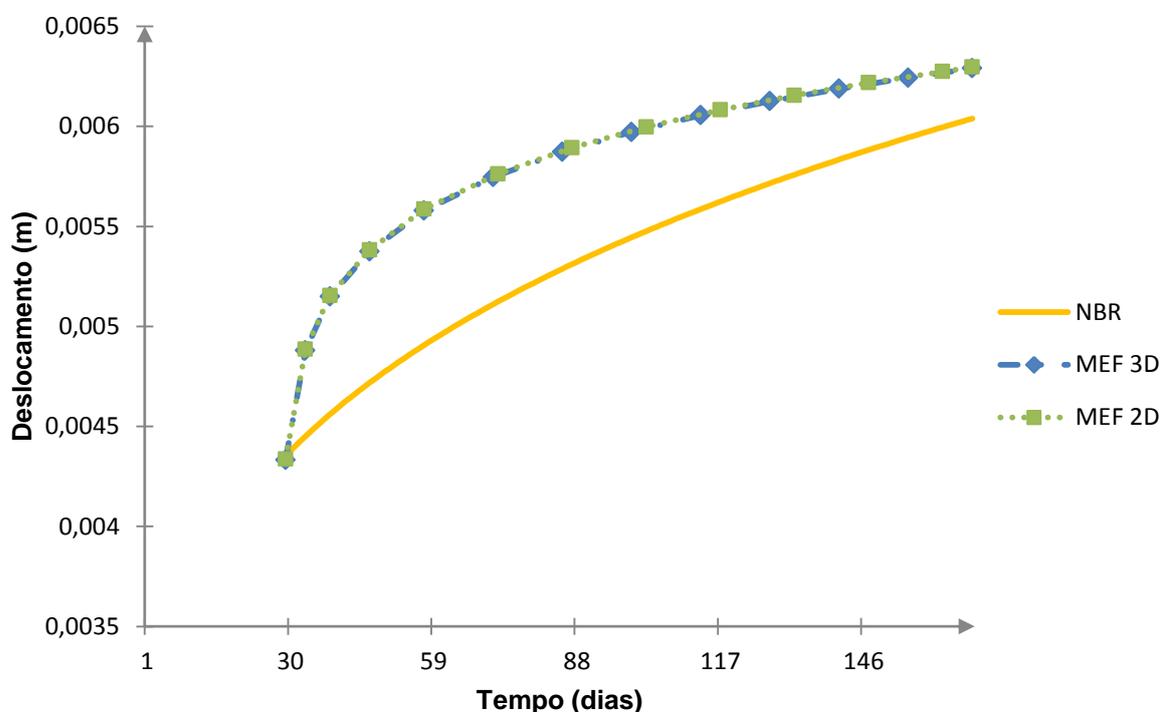


Gráfico 17 – Comparativo do Deslocamento ao Longo do Tempo para a Viga A

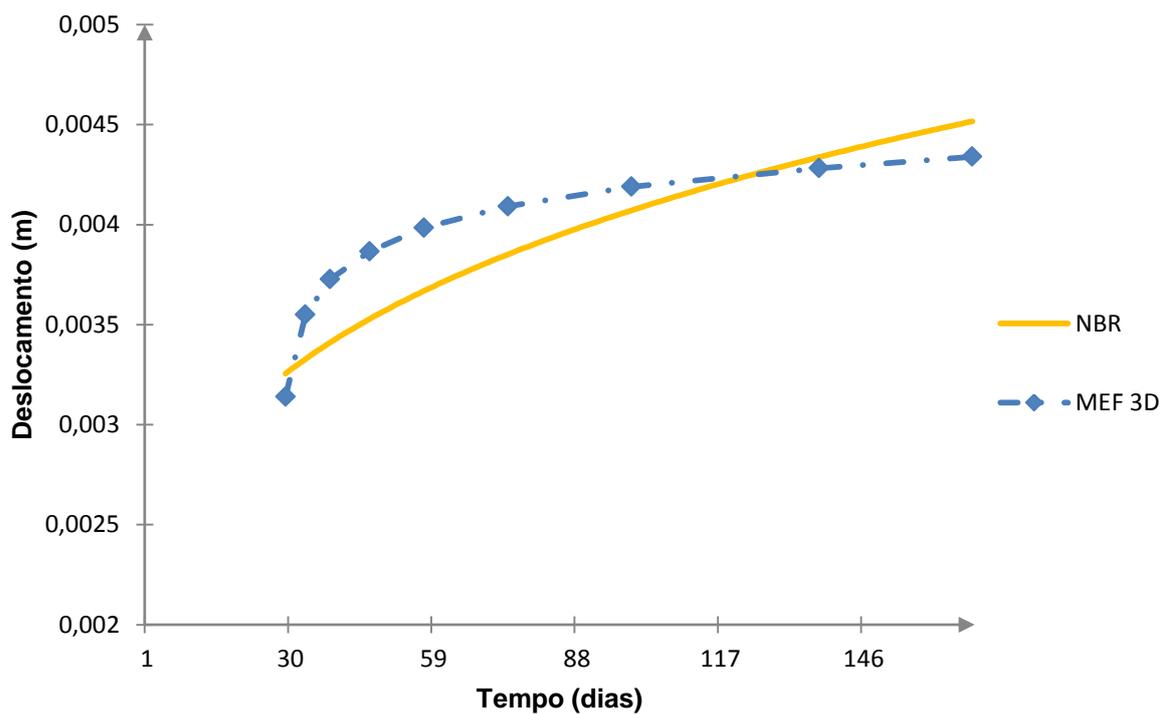


Gráfico 18 – Comparativo do Deslocamento ao Longo do Tempo para a Viga B

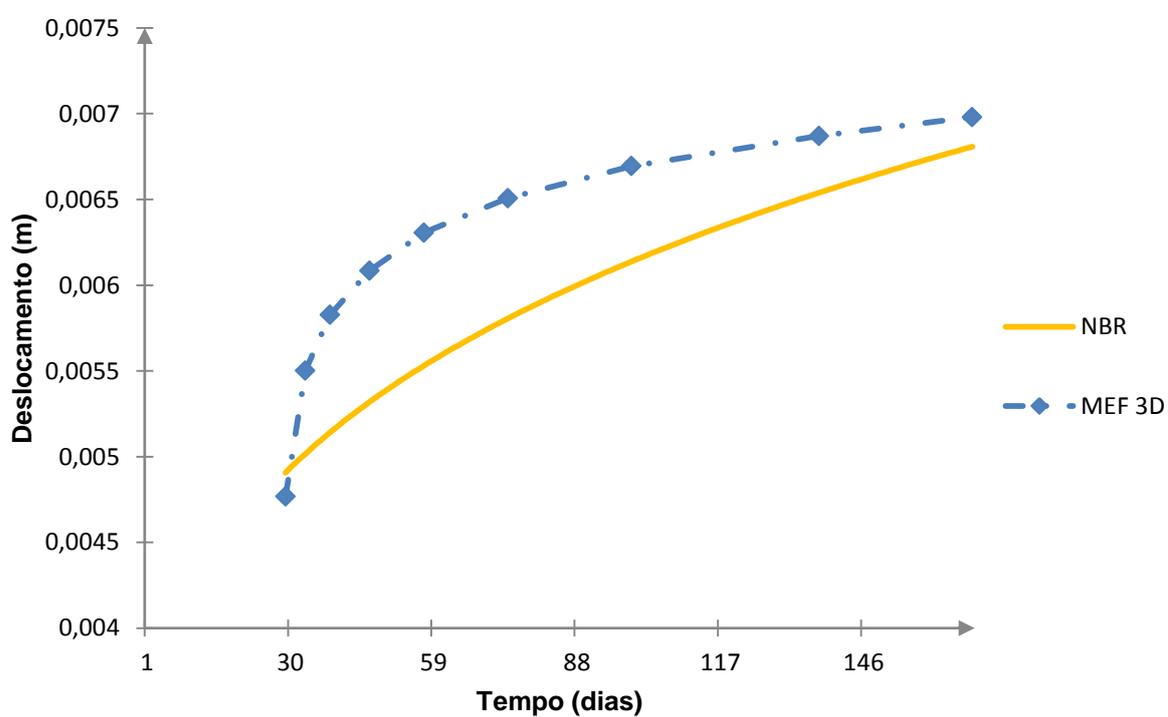


Gráfico 19 – Comparativo do deslocamento ao Longo do Tempo para a Viga C

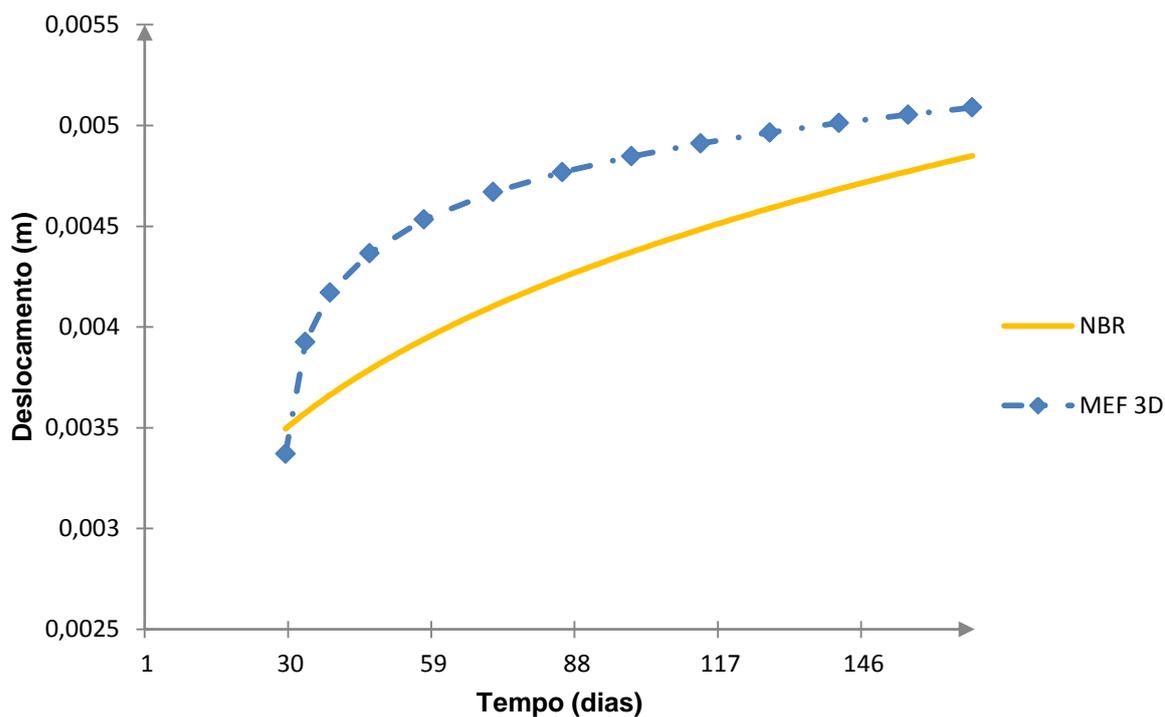


Gráfico 20 – Comparativo do deslocamento ao Longo do Tempo para a Viga D

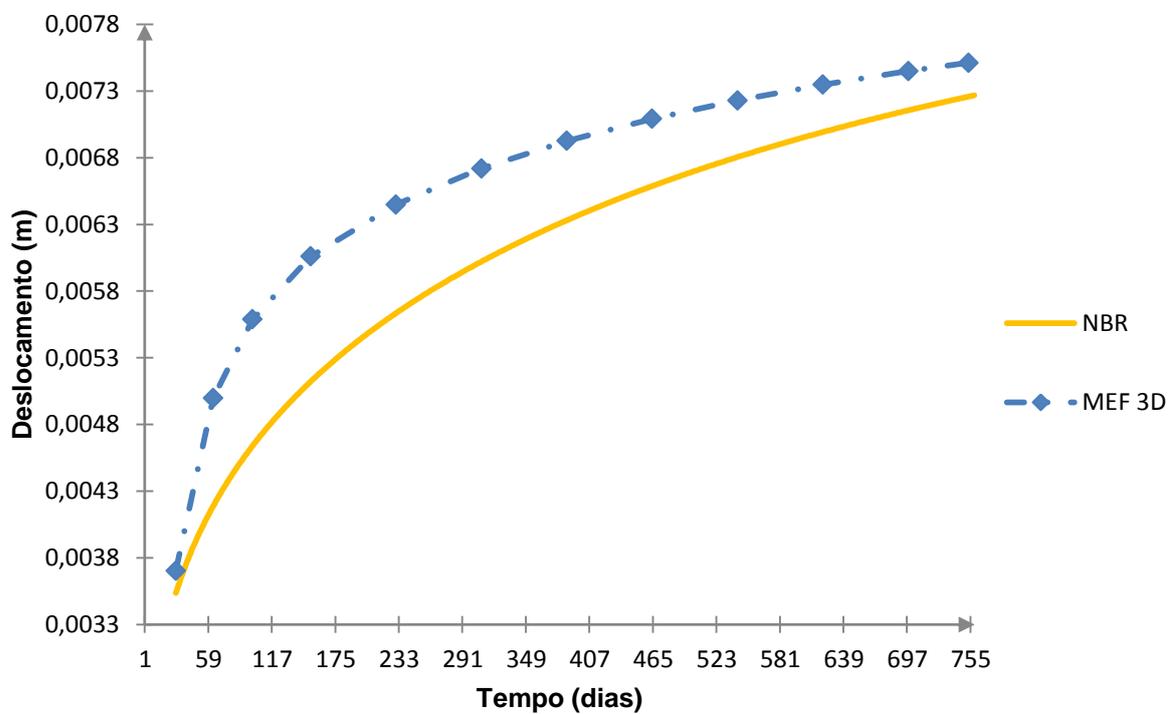


Gráfico 21 – Comparativo do deslocamento ao Longo do Tempo para a Viga C1

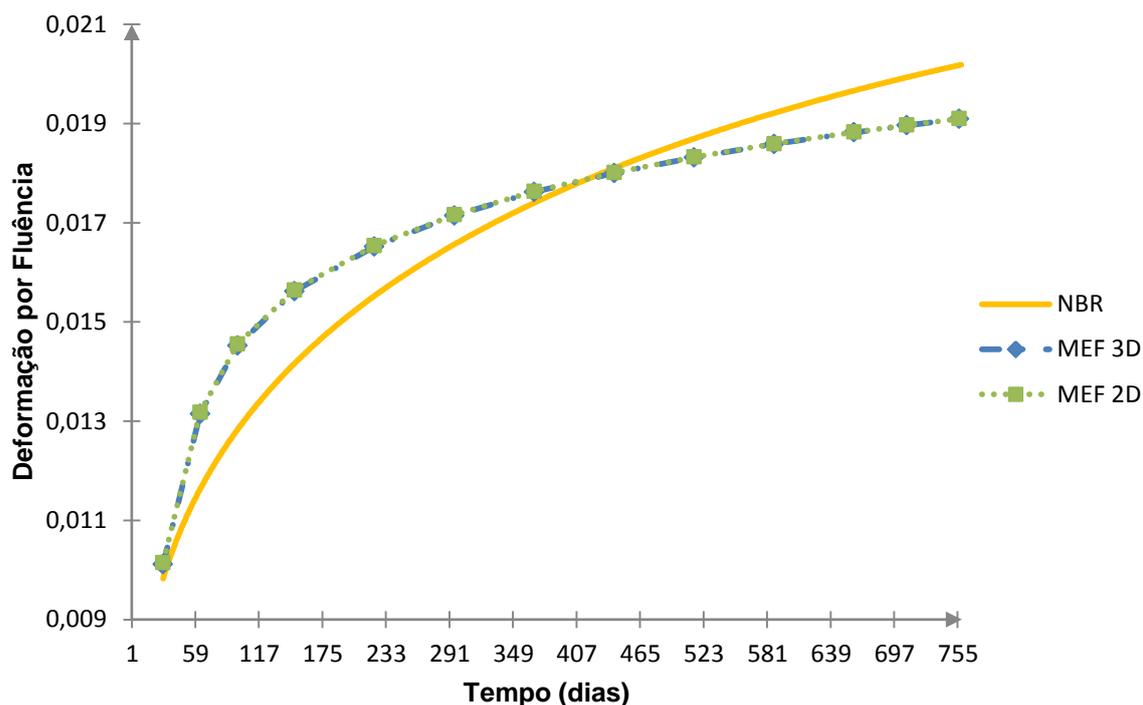


Gráfico 22 – Comparativo do deslocamento ao Longo do Tempo para a Viga C3

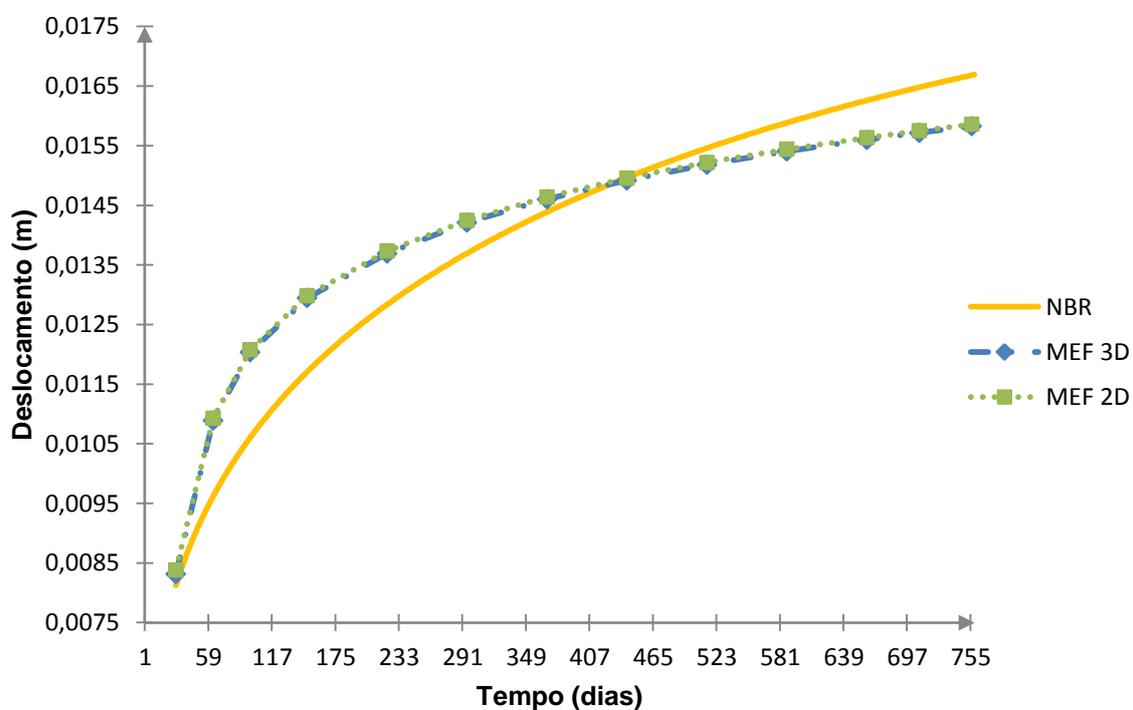


Gráfico 23 – Comparativo do deslocamento ao Longo do Tempo para a Viga C4

Pode-se notar no Gráfico 17 ao Gráfico 23 que, em geral, o comportamento das curvas obtidas pela NBR 6118 (2014) resulta em valores

menores de deslocamentos nos dias iniciais de carregamento em comparação com os resultados obtidos através das simulações. Apesar disso, as curvas apresentam certa equivalência quantitativa e até qualitativa, chegando a convergir em alguns pontos. Além disso, os resultados de deslocamentos apresentados no capítulo 5.1, do modelo bidimensional, aproximaram-se bastante dos valores de deslocamentos obtidos por meio do modelo tridimensional, conforme demonstrado no Gráfico 17, Gráfico 22 e Gráfico 23. Essa convergência de valores foi obtida já no primeiro refino do modelo bidimensional.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi considerada a deformação viscoelástica do concreto em simulações por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando o software ANSYS. Foram realizadas análises para alguns modelos de vigas simplesmente apoiadas de concreto armado, cujos resultados de ensaios físicos estão disponíveis na literatura, por esse método computacional, utilizando elementos bi e tridimensionais, além de cálculos analíticos utilizando as recomendações da NBR 6118 (2014) e do CEB-FIP (1990). Os resultados dos ensaios físicos foram comparados aos valores calculados pela NBR 6118 (2014) e pelo CEB-FIP (1990) e os resultados das simulações foram comparados aos calculados por essas recomendações.

Conclui-se que os cálculos embasados na NBR 6118 (2014) e no CEB-FIP (1990) para a caracterização do fenômeno da fluência em vigas de concreto armado não conseguiram representar, de forma quantitativa, o comportamento da fluência quando comparadas com os ensaios experimentais realizados em laboratório. Pode-se perceber que as previsões do CEB-FIP (1985) representam melhor os valores obtidos nos ensaios do que as previsões do código-modelo simplificado CEB-FIP (1990) para os deslocamentos instantâneos. Para os deslocamentos a longo prazo nenhum destes dois métodos resultou em números equivalentes aos valores dos ensaios físicos, porém, o CEB-FIP (1985) ainda conduz a resultados ligeiramente mais precisos do que o código-modelo CEB-FIP (1990) simplificado. Conclui-se, também, que a diferença quantitativa entre os deslocamentos apresentados nas curvas de ensaios experimentais e de cálculos numéricos foi atribuída, para as vigas da referência 2, aos fatores de majoração de carga e de minoração de propriedades resistentes dos cálculos das normas. Sendo assim, essa diferença ainda é satisfatória, pois é esperada. Para a referência 1, os valores de deslocamentos obtidos através do ensaio físico são pouco confiáveis. A diferença foi atribuída por Sampaio (2004) a três fatores, dentre eles a falta de controle das propriedades do ambiente (umidade e temperatura) durante os ensaios.

Pode-se concluir que todas as curvas obtidas por meio do MEF apresentaram um bom comportamento quantitativo, ou seja, existe uma boa conformidade dos valores de deslocamento instantâneo e a longo prazo entre os cálculos analíticos da NBR 6118 (2014) e as simulações pelo MEF, sendo a variação

máxima igual a 7%. Do ponto de vista qualitativo, todas as curvas caracterizaram de forma adequada o comportamento assintótico do fenômeno estudado.

As curvas de deformação obtidas pelo MEF também apresentaram um comportamento qualitativo satisfatório. Porém, após certo tempo (aproximadamente 20 dias para as vigas da referência 1 e 200 dias para as vigas da referência 2), a deformação por fluência aumenta em uma taxa menor que a inicial, fato que não é observado para as curvas de deformação da NBR 6118 (2014). Quando comparadas as curvas entre o MEF, o CEB-FIP (1990) e a NBR 6118 (2014), constatou-se que, em termos de comportamento qualitativo das deformações, as curvas obtidas por meio do CEB-FIP (1990) foram as que mais se aproximaram do MEF, o que é justificado pela semelhança entre as suas funções de fluência.

Apesar de os valores dos coeficientes de fluência do MEF terem sido calibrados a partir da NBR 6118 (2014), os valores das deformações obtidas pelo MEF divergiram bastante dos valores da norma. Portanto, a qualidade numérica das deformações obtidas pelo MEF não é satisfatória quando comparada às deformações calculadas pela NBR 6118 (2014). A razão provável para isso é que a lei de fluência utilizada, endurecimento por tempo, torna a estrutura mais rígida durante o escoamento viscoso. Assim, as deformações obtidas são menores.

Foi possível verificar que as deformações por fluência das simulações se comportaram de forma similar tanto para tensões devido à tração normal quanto para compressão. O diagrama tensão-deformação poderia ser mais realístico caso o aço fosse incluído nos modelos, utilizando elementos diferentes e um material elastoplástico e com uma rotina de fissuração do concreto para as regiões onde há o aumento da tensão de tração.

Por meio das análises de convergência, foi possível confirmar a dependência da deformação por fluência relativa à densidade da malha. Portanto, para as deformações diferidas, as variáveis: divisão por intervalos de tempo e taxa de fluência da análise são decisivas para um cálculo preciso. Pode-se observar também que o valor de deslocamento para o estado elástico de referência não é muito sensível à densidade da malha e que os deslocamentos dependentes do tempo variam muito pouco com os refinamentos.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Uma melhoria para futuros trabalhos seria representar de maneira mais realística o comportamento do concreto após o dano (fissura). Seria necessário programar o comportamento de dano do concreto para que esse comportamento funcione em conjunto com o recurso de grandes deformações (que é necessário para simulação da fluência). Uma forma de fazer isso seria multiplicando a rigidez do material por um coeficiente para a resistência à tração (na literatura, utiliza-se 0,6) e outro coeficiente para o esmagamento, se esse mesmo ocorrer na análise.

Há diversos outros modelos constitutivos que também podem ser usados para o concreto armado, inclusive no ANSYS. Existe a possibilidade de estudá-los.

Outro trabalho que pode ser realizado futuramente é o estudo das simulações do concreto armado envolvendo o estado terciário, ou de ruptura, por fluência.

Conforme apresentado no item 4.1, para obter as constantes de fluência foram adotados resultados das normas presentes na literatura. Sugere-se que sejam feitos ensaios físicos experimentais em amostras em câmara climatizada para medições das taxas de deformação devidas ao efeito da fluência, para que os resultados dos ensaios sejam usados para a calibração de coeficientes de fluência. Dessa forma, os resultados para comparação das deformações poderiam levar em conta os dados do ensaio experimental também, pois neste trabalho não houve a coleta dos mesmos para esse tipo de estudo.

A simulação da fluência por meio do programa ANSYS limitou-se a utilizar apenas uma equação dentre as treze leis de fluência implícita oferecidas. Sugere-se a comparação entre os resultados das demais equações presentes no banco de dados do programa (ou até mesmo a inclusão de uma nova formulação pelo método explícito), a fim de comparar a interferência das equações nos resultados obtidos.

Aplicar a metodologia descrita para as análises em outras estruturas (por exemplo, pilares, pórticos, vasos de pressão, dutos submarinos, linhas de tubulação aquecidas), com o objetivo de avaliar se o efeito da fluência também é notório em diferentes geometrias e condições de carregamento.

Utilizar as superfícies de escoamento de Drucker-Prager, de Mohr-Coulomb, ou de Tresca, a fim de verificar as diferenças de resultados obtidas.

Realizar análises de comparação de resultados para diferentes valores das variáveis de divisão por intervalos de tempo e de taxa de fluência da análise.

REFERÊNCIAS

ABNT - NBR 6118. **NBR 6118:2014 - Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento**. ABNT. Rio de Janeiro. 2014.

ABNT - NBR 8224. **NBR 8224:2012 - Concreto Endurecido - Determinação da Fluência - Método de Ensaio**. ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro, p. 9. 2012.

ABNT - NBR 8522. **NBR 8522:2008 - Concreto - Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão**. ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro. 2008.

ALMEIDA, L. C. **Identificação de Parâmetros Estruturais com Emprego de Análise Inversa**. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas. Campinas, p. 206. 2006. (Tese - Doutorado).

ALTENBACH, K. N. H. **Modeling of Creep for Structural Analysis**. Berlin: Springer, 2007.

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE - Análise não Linear**. 1ª. ed. São Paulo: Editora Érica Ltda., 2012.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-02) and Commentary (ACI 318R-02)**. ACI Committee 318. Farmington Hills, Michigan, p. 391. 2002.

ANHER, C. Results of deterministic investigations of reinforced concrete structures for the safety of non-linear calculations. **Leipzig Annual Civil Engineering Report**, n. Leipzig Annual Civil Engineering Report, 1999.

ANSYS INC. **Ansys Theory Reference**. 11. ed. Southpointe: ANSYS Inc., 1999.

ANSYS INC. **Introduction to Non-Linear Analysis, Module 8**. Southpointe. 2001.

ANSYS INC. **Mechanical APDL Theory Reference**. Versão 15. ed. Southpointe: Ansys Inc., 2013.

ARAÚJO, J. M. D. **Simplified Procedures for Calculation of Instantaneous and Long-term Deflections of Reinforced Concrete Beams**. Department of Materials and Construction, University of Rio Grande – FURG. Rio Grande, p. 55-66. 2005, Numero 24.

ARAÚJO, M. D. **Modelos de Previsão de Fluência e da Retração do Concreto, Estruturas de Concreto**. Rio Grande: Dunas, v. 4, 2002.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1996.

BATHE, K.-J. RES.2-002 Finite Element Procedures for Solids and Structures, Spring 2010. (Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare). **Creative Commons BY-NC-SA**, 2010. Disponível em: <<http://ocw.mit.edu>>. Acesso em: jul 2015.

BAŽANT, Z. P. **Creep and Shrinkage in Concrete Structures**. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltda., 1982a.

BAŽANT, Z. P. Input of Creep and Shrinkage Characteristics for a Structural Analysis Program. **Matériaux et Constructions**, v. 15, n. 88, 1982b.

BAŽANT, Z. P. **Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete**. Evanston, Illinois, USA: Northwestern University, 1988.

BINGHAM, E. C. **Fluidity and Plasticity**. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1922.

BOYLE, J. T.; SPENCE, J. **Stress Analysis for Creep**. London: Butterworth, 1983.

BUEHLER, M. J. **Introduction to Modeling and Simulation, Lecture 1**. MIT. [S.l.]. Spring, 2011.

CALLISTER, J. W. D. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002.

CAVALCANTE, A. D. S.; RAMOS, V. C. L. Ajuste de Parâmetros para Modelos Viscoelásticos de Fluência com Aplicações em Rochas Salinas. **Asociación Argentina de Mecánica Computacional**, Buenos Aires, XXIX, 15-18 Novembro 2010. 8579-8591.

CILONI, A. **Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 1993. (Tese - Doutorado).

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (CEB). **CEB-FIP Model Code 1990 - Design Code**. Lausanne: Thomas Telford, 1991.

COOK, R. D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

CORLEY, W. G.; SOZEN. **Time-Dependent Deflection of Reinforced Concrete Beams**. Proc. A.C.I., 63. [S.l.], p. 371-386. 1966.

DIÓGENES, H. J. F.; HANAI, J. B. Análise Tipológica de Elementos e Sistemas Construtivos pré-moldados de Concreto do Ponto de Vista de Sensibilidade a Vibrações em Serviço. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 12, n. 54, p. 31-46, 2010. ISSN 1809-5860.

ESPION, B. **Long-Term Sustained Loading Tests on Reinforced Concrete Beams: A selected Data Base**. Bulletin du Service Génie Civil No. 88-1. Université Libre de Bruxelles. Bruxelles. 1988.

ESPION, B.; HALLEUX, P. Long-Term Deflections of Reinforced Concrete Beams: Reconsideration of Their Variability. **ACI Structural Journal**, Março-Abril 1990. 232-236.

FANOURLAKIS, G.; BALLIM, Y. **Predicting Creep Deformation of Concrete: A Comparison of Results from Different Investigations**, Proceedings. 11th FIG Symposium on Deformation Measurements. Santorini, Greece: [s.n.]. 2003.

FARUQUE, M. O.; ZAMAN, M.; HOSSAIN, M. I. Creep Constitutive Modeling of an Aluminium Alloy Under Multiaxial and Cyclic Loading. **Int. J. of Plasticity**, Oklahoma, 6 March 1996. 761-780.

GELATTI, F. **Análise Não-Linear Física e Geométrica de Pórticos Planos de Concreto Armado: Modelagem por Elementos Finitos de Barra**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 241. 2012.

GILBERT, R. I. **Time Effects in Concrete Structures**. Sydney: Elsevier, v. 23, 1988.

GRAVINA, C. C. **Simulação Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo**. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. Campinas, p. 154. 1997. (Dissertação - Mestrado).

HENRIQUES, A. A. R.; CALHEIROS, F.; FIGUEIRAS, J. A. Safety format for the design of concrete frames. **Engineering Computations**, Porto, v. 19, n. 3, p. 346-363, 2002.

INPACT SAIC. Creep 2015, 2015. Disponível em: <<http://www.creep2015.fr/>>. Acesso em: 26 junho 2015.

IUTAM. **Creep in Structures - Annual Report**. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Nagoya: [s.n.]. 2000. p. 26-30.

IUTAM. International Union of Theoretical and Applied Mechanics, 2015. Disponível em: <<http://iutam.org/publications/proceedings-of-iutam-symposia/>>. Acesso em: 26 junho 2015.

KATAOKA, L. T. et al. Controle de aquisição e monitoração da fluência em corpos de prova de concreto. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 2, n. 3, p. 271-281, Setembro 2009.

KATAOKA, L. T.; BITTENCOURT, T. N. Análise numérica e experimental da transferência de carga do concreto para a armadura em pilares. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 7, n. 5, p. 747-774, Outubro 2014. ISSN 1983-4195.

KOTINDA, T. I. **Modelagem Numérica de Vigas Mistas Aço-Concreto Simplesmente Apoiadas: Ênfase ao Estudo da Interface Laje-Viga**. EESC-USP. São Carlos, p. 121. 2006. (Dissertação - Mestrado).

KREMPL, E. Creep-Plasticity Interaction. **Creep and Damage in Materials and Structures**, New York, v. CSIM Lecture Notes, n. 399, p. 285-348, 1999.

LAZZARI, M.; FILHO, A. C.; GASTAL, D. P. S. L. **Análise Estrutural Não Linear de Vigas em Concreto Armado Utilizando o ANSYS 14.5**. VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas. Rio de Janeiro : [s.n.]. 2014. p. 10.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de Concreto, Princípios Básicos do Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Interciência Ltda., v. 1, 1977 e 2a. Reimpressão 2008.

LIMA, C. R. D. N. **Análise da Deformação por Fluência em uma Viga de Concreto Armado e Protendido: Retroanálise e Algoritmo Genético**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 77. 2007. (Dissertação - Mestrado).

LIMA, P. R. L.; ET AL. Análise Não-Linear da Deflexão de Vigas de Concreto Armado. **Sitientibus**, Feira de Santana, n. 28, p. 91-108, Jan-Jun 2003.

MADUREIRA, E. L.; SIQUEIRA, T. M.; RODRIGUES, E. C. Deformações por fluência em pilares de concreto armado. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, Natal, v. 6, n. 4, p. 537-560, Agosto 2013. ISSN 1983-4195.

MARÍ, A. R.; BAIRÁN, J. M.; DUARTE, N. Long-term deflections in cracked reinforced concrete flexural members. **Engineering Structures**, Barcelona, v. 32, p. 829-842, Dezembro 2009.

MARQUES, A. C.; BITTENCOURT, T. N.; BARBOSA, M. P. Influência das condições do ambiente e idade de carregamento na fluência por secagem do CAA. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**. São Paulo, v. 6, n. 2, p. 227-245, Abril 2013. ISSN 1983-4195.

MARTINELLI, M. **Modelagem de Situações de Punção em Lajes de Concreto Armado Através do Método dos Elementos Finitos**. UFRGS. Porto Alegre, p. 168. 2003. (Dissertação- Mestrado).

MCDONALD, D. **Modeling Creep Behavior in ANSYS Mechanical and Mechanical APDL 14.0**. Webinar online: ANSYS Inc., 2012.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais**. 1. ed. São Paulo: IBRACON, 2008.

NETO, M.; PIMENTA, P. M. **Sobre a análise de pórticos planos de concreto armado sob não-linearidade física**. Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 4. São Paulo: Anais. 2000.

NEVILLE, A. M. **Propriedades do Concreto**. 1ª. ed. São Paulo: Pini, 1982.

OLIVEIRA, D. M. D. **Estudo dos Processos Aproximados Utilizados para a Consideração das Não-Linearidades Física e Geométrica na Análise Global das Estruturas**. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 327. 2007. (Tese - Doutorado).

OLIVEIRA, R. **Análise Teórica e Experimental de Estruturas Planas de Concreto Armado com a Consideração da Fluência**. Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 164. 2011. (Tese - Doutorado).

OLIVEIRA, R. S.; CORRÊA, M. R. S. Aspectos sobre o dimensionamento em betão estrutural considerando-se a não-linearidade física. **Revista Engenharia Civil da Universidade do Minho**, n. 14, p. 41-52, Maio 2002.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice**. Swansea: Pineridge Press Limited, 1980.

PAGE, E. H. J. **Simulation Modeling Methodology: Principles and Etiology of Decision Support**. [S.l.]: [s.n.], 1994.

PARAMETRIC TECHNOLOGY CORPORATION PTC. **Help Center Mathcad Prime**. 1. ed. Needham: [s.n.], 2010.

PENNY, R. K.; MARRIOT, D. L. **Design for Creep**. 2^a. ed. [S.l.]: Chapman & Hall, 1995.

PERZYNA, P. Fundamental Problems in Viscoplasticity. **Advanced Applied Mechanics**, v. 9, p. 243-377, 1966.

PIMENTEL, F. D. C. **Aplicação de Modelo Numérico de Fluência para Análise de Estruturas Metálicas de Flares Sob Carregamento Termomecânico**. UFRJ/COPPE. Rio de Janeiro. 2014. (Dissertação - mestrado).

PROENÇA, S. P. B. **Sobre Modelos Matemáticos do Comportamento Não-Linear do Concreto: Análise Crítica e Contribuições**. Universidade de São Paulo. São Carlos, p. 330. 1988.

RANZI, G.; BRADFORD, M. Analysis of Composite Beams with Partial Interaction Using the Direct Stiffness Approach Accounting for Time Effects. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 78, n. 5, p. 564-586, Abril 2009.

SAMPAIO, C. D. C. **Comparação Entre a Modelagem Numérica e Experimental da Deformação por Fluência em Vigas de Concreto Armado**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 162. 2004. (Dissertação - Mestrado).

SANTOS, H. C. D. **Análise de Estruturas de Concreto sob Efeito do Tempo: Uma abordagem consistente com consideração da viscoelasticidade, da plasticidade, da fissuração, da protensão e de etapas construtivas**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo. 2006. (Tese - Doutorado).

SHURAIM, A. B. Lateral stiffness of plane reinforced concrete frames. **Computers & Structures**, v. 64, n. 1-4, p. 771-782, 1988.

SILVA, A. R. C. D. **Sobre o Comportamento Viscoelástico das Estruturas: Relações Constitutivas e Técnicas Numéricas**. Universidade de São Paulo,

Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos, p. 108. 1997. (Dissertação - Mestrado).

SILVA, I. J. M. D. **Implementação Via Algoritmo Implícito de Modelos de Fluência de Rochas Salinas em Programa de Elementos Finitos**. Universidade Federal de Pernambuco - CTG - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Recife, p. 148. 2010. (Dissertação - Mestrado).

SOUZA, L. A. F. D. Modelagem Numérica Computacional de Viga de Concreto Armado com Acoplamento de Teorias. **Vetor**, Rio Grande, v. 22, n. 2, p. 43-58, 2012.

STOUFER, H.; DAME, L. T. **Inelastic Deformation of Metals**. New York: John Wiley & Sons, 1996.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelo de Elementos Finitos para Análise Não-Linear Física e Geométrica de Vigas e Pórticos Planos de Concreto Armado**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 238. 2007.

TEIXEIRA, R. R. **Modelagem por Elementos Finitos para Análise de Tensões e Deformações por Fluência no Concreto Compactado com Rolo**. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, p. 214. 2006.

VASCONCELOS, G. M. A.; CORRÊA, M. R. S. Consideração da Não-Linearidade Física na Verificação Simultânea dos ELU e ELS de Peças de Concreto Armado Submetidas a Flexão. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 8, n. 34, p. 135-163, 2006.

VISINTIN, P.; OEHLERS, D. J. Partial-Interaction Time Dependent Behaviour of Reinforced Concrete Beams. **Engineering Structures**, Adelaide, South Australia, 29 December 2012. 13.

WILLAM, K. J.; WARNKE, E. D. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete. Proceedings. **International Association for Bridge and Structural Engineering**, Bergamo, Itália, Vol. 19, 1974. 174.

WITTEK, U.; MEISWINKEL, R. **Ultimate load design concept of RC structures considering cross-sectional safeties**. ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, 8. [S.l.]: [s.n.]. 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CORMEAU, I. C. Visco-Plasticity - Plasticity and Creep in Elastic Solids - A Unified Numerical Solution Approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Swansea, v. 8, p. 821-845, 1974.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method Set - The Basis and Fundamental**. 6. ed. [S.l.]: Elsevier, v. 1 a 3, 2005.

APÊNDICE A – Cálculo do deslocamento das vigas segundo a NBR 6118 (2014)

Cálculos da deformação por fluência e do deslocamento na viga C4, realizados de acordo com a norma NBR 6118 (2014). As propriedades físicas e geométricas dessa viga são descritas no capítulo 4.2. Este apêndice inclui a calibração de resultados para a equação de fluência do MEF. Programação desenvolvida no software Mathcad.

Previsão de Deslocamentos com Consideração de Fluência Segundo a ABNT NBR 6118:2014

Corley & Sozen, Viga C4

1. Dados de Entrada:

1.1 Características Geométricas:

$$L := 1829 \text{ mm}$$

$$b := 76.2 \text{ mm} \quad H := 109.5 \text{ mm} \quad A_c := b \cdot H = 83.439 \text{ cm}^2$$

$$b_f := b \quad h_f := H$$

$$\phi_{pos} := \frac{3}{8} \text{ in} = 9.525 \text{ mm} \quad \phi_{neg} := 0 \text{ cm} \quad \phi_{central} := 0 \text{ cm}$$

$$c_{sup} := 0 \quad c_{inf} := 1.5 \text{ cm} - \frac{\phi_{pos}}{2} = 1.024 \text{ cm}$$

$$d := \left(H - c_{inf} - \frac{\phi_{pos}}{2} \right) = 94.5 \text{ mm} \quad d_{tração} := c_{sup} + \frac{\phi_{neg}}{2} = 0 \text{ mm}$$

$$y_t := \frac{b \cdot H \cdot \frac{H}{2} + (b_f - b) \cdot h_f \cdot \frac{h_f}{2}}{b \cdot H + (b_f - b) \cdot h_f} = 54.75 \text{ mm}$$

$$I := \int_{-y_t}^{y_t} \frac{A_c}{H} \cdot y_t^2 \, dy_t = (8.337 \cdot 10^6) \text{ mm}^4 \quad \frac{b \cdot H^3}{12} = (8.337 \cdot 10^6) \text{ mm}^4$$

$$W := \frac{I}{y_t} = 152.276 \text{ cm}^3$$

$$As_{sup} := 2 \cdot \frac{\pi \cdot (\phi_{neg})^2}{4} = 0 \text{ cm}^2$$

$$As_{central} := 2 \cdot \frac{\pi \cdot (\phi_{central})^2}{4}$$

$$As_{inf} := \left(3 \cdot \frac{\pi \cdot (\phi_{pos})^2}{4} \right) = 213.767 \text{ mm}^2$$

$$As := As_{sup} + As_{inf} + As_{central} = 213.767 \text{ mm}^2$$

1.2 Características Mecânicas do Concreto e do Aço

$$f_{ck} := 24.1 \text{ MPa} = (2.41 \cdot 10^7) \text{ Pa}$$

$$f_{ctm} := 0.3 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{\text{MPa}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \text{MPa} = 2.503 \text{ MPa}$$

Estado limite de deformação excessiva

$$f_{ctsup} := 1.3 \cdot f_{ctm} = 3.254 \text{ MPa}$$

Estado limite de formação de fissuras superior

$$f_{ctinf} := 0.7 \cdot f_{ctm} = 1.752 \text{ MPa}$$

Estado limite de formação de fissuras inferior

$$f_{ct} := 0.9 \cdot f_{ctsup} = 2.929 \text{ MPa}$$

Tração direta

$$E_c := 20 \text{ GPa} = (2 \cdot 10^{10}) \text{ Pa} \quad \nu_c := 0.2$$

$$E_{ci28\text{calculado}} := 5600 \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{\text{MPa}}} \cdot \text{MPa} = (3.09 \cdot 10^6) \frac{\text{tonf}}{\text{m}^2}$$

$$E_{ci28} := E_{ci28\text{calculado}} \quad E_c := E_{ci28} = (2.749 \cdot 10^{10}) \text{ Pa}$$

$$E_{cs} := 0.85 \cdot E_{ci28} = (2.337 \cdot 10^{10}) \text{ Pa}$$

$$E_s := 210 \text{ GPa} \quad f_{yk} := 40000 \text{ psi} = (2.758 \cdot 10^8) \text{ Pa} \quad \nu_s := 0.3$$

$$f_{uk} := 1.1 \cdot f_{yk} = 303.369 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{yk} := \frac{f_{yk}}{E_s} = 0.001$$

$$\varepsilon_{uk} := \frac{10}{1000} = 0.01$$

$$E_T := \frac{f_{uk} - f_{yk}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yk}} = 3.175 \text{ GPa}$$

Modulo de Elasticidade Tangente do Aço

1.3 Propriedades do Ambiente

$$U := 50 \quad \gamma := 1 + e^{(-7.8 + 0.1 \cdot U)} = 1.061$$

1.4 Coeficientes de Norma

$$\gamma_c := 1.4 \quad \gamma_s := 1.15 \quad s_1 := 0.38$$

1.5 Resistência de Projeto do Concreto e do Aço

$$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 17.214 \text{ MPa} \quad f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 239.818 \text{ MPa}$$

1.6 Verificação do Estádio de Trabalho (Cálculo da LN e Rigidez equivalente)

Esforços solicitantes

Para uma viga biapoiada com carga P concentrada no meio do vão ou nos terços do vão:

$$M := 2.276 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad P := M \cdot \frac{4}{L} = 4.978 \text{ kN}$$

$$pp := A_c \cdot 25 \frac{\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{\text{m}} = 0.209 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$M_d := \frac{pp \cdot L^2}{8} = 0.087 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_q := \frac{P \cdot L}{4} = 2.276 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_R := M_d + M_q = 2.363 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Calculado no Ftool ou conforme fórmulas acima}$$

Momento de Fissuração

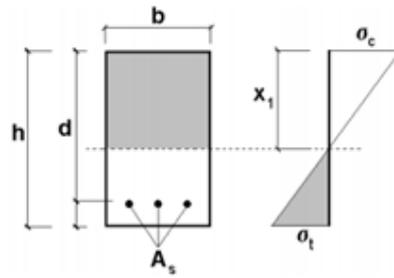
$$\alpha := 1.5 \quad M_r := \frac{\alpha \cdot f_{ctm} \cdot I}{y_t} = 0.572 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Estadio} := \begin{cases} \text{if } M_r \geq M_R \\ \quad \parallel \text{ "EstadioI" } \\ \quad \text{else} \\ \quad \parallel \text{ "EstadioII" } \end{cases} \Bigg| = \text{"EstadioII"}$$

$$\alpha_{eq} := \frac{E_s}{E_{cs}} = 8.987$$

Equações para encontrar a linha neutra

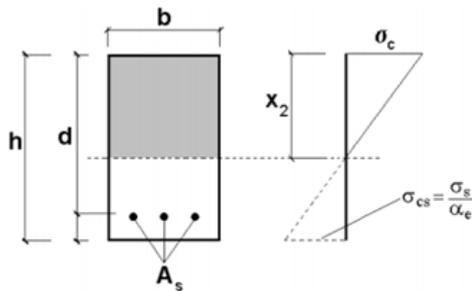
Estádio I



$$M_{1.4_5}(x_{LN}) := -(A_{s_{central}} \cdot (\alpha_{eq} - 1)) \cdot \left(\frac{H}{2} - x_{LN}\right) - b \cdot (H - x_{LN}) \cdot \frac{(H - x_{LN})}{2}$$

$$M_1(x_{LN}) := \frac{b \cdot x_{LN}^2}{2} + (A_{s_{sup}} \cdot (\alpha_{eq} - 1)) \cdot (x_{LN} - d_{tra\c{c}ao}) - (A_{s_{inf}} \cdot (\alpha_{eq} - 1)) \cdot (d - x_{LN}) + M_{1.4_5}(x_{LN})$$

Estádio II



$$M_{2.4}(x_{LN}) := (A_{s_{central}} \cdot \alpha_{eq}) \cdot \left(\frac{H}{2} - x_{LN}\right)$$

$$M_2(x_{LN}) := \frac{b \cdot x_{LN}^2}{2} + (A_{s_{sup}} \cdot \alpha_{eq}) \cdot (x_{LN} - d_{tra\c{c}ao}) - (A_{s_{inf}} \cdot (\alpha_{eq} - 1)) \cdot (d - x_{LN}) - M_{2.4}(x_{LN})$$

$$x_{LN} := 0 \text{ cm}$$

$$x_{ln_1} := \text{root}(M_1(x_{LN}), x_{LN}) = 6.15 \text{ cm}$$

$$x_{ln_2} := \text{root}(M_2(x_{LN}), x_{LN}) = 4.642 \text{ cm}$$

$$x_{ln} := \text{if } Estadio = \text{"Estadio I"} \text{ then } x_{ln_1} \text{ else } x_{ln_2}$$

|| x_{ln_1}
else
|| x_{ln_2}

$$I_{I.4} := A_{s_{central}} \cdot (\alpha_{eq} - 1) \cdot \left(\frac{H}{2} - x_{ln}\right)^2 + b \cdot H \cdot \left(d - \frac{H}{2}\right)^2$$

$$I_I := \frac{b \cdot x_{ln}^3}{12} + (\alpha_{eq} - 1) \cdot A_{s_{inf}} \cdot (d - x_{ln})^2 + (\alpha_{eq} - 1) \cdot A_{s_{sup}} \cdot (x_{ln} - d_{tra\c{c}ao})^2 + I_{I.4}$$

$$I_I = (1.777 \cdot 10^3) \text{ cm}^4$$

$$I_{II.4} := A_{s_{central}} \cdot (\alpha_{eq} - 1) \cdot \left(\frac{H}{2} - x_{ln}\right)^2$$

$$I_{II} := \frac{b \cdot xln^3}{12} + (\alpha_{eq} - 1) \cdot A_{s_{inf}} \cdot (d - xln)^2 + (\alpha_{eq} - 1) \cdot A_{s_{sup}} \cdot (xln - d_{tração})^2 + I_{II.A}$$

$$I_{II} = 458.219 \text{ cm}^4$$

$$I_{total} := \text{if } Estadio = "EstadioI" \left| \begin{array}{l} I_I \\ \text{else} \\ I_{II} \end{array} \right. = 458.219 \text{ cm}^4$$

Método de Branson

$$EI_e := E_{cs} \cdot \left(\left(\frac{M_r}{M_R} \right)^3 \cdot I + \left(1 - \left(\frac{M_r}{M_R} \right)^3 \right) \cdot I_{II} \right) = 0.108 \text{ MPa} \cdot \text{m}^4$$

$$EI_{equiv} := \text{if } Estadio = "EstadioI" \left| \begin{array}{l} E_{cs} \cdot I_I \\ \text{else} \\ EI_e \end{array} \right. = 0.108 \text{ MPa} \cdot \text{m}^4$$

$$E_{equiv} := \frac{EI_{equiv}}{I} = (1.299 \cdot 10^{10}) \text{ Pa}$$

$$I_{equiv} := \frac{EI_{equiv}}{E_{cs}} = 463.536 \text{ cm}^4$$

$$W_{equiv} := \text{if } Estadio = "EstadioI" \left| \begin{array}{l} W \\ \text{else} \\ \frac{I_{equiv}}{xln} \end{array} \right. = (9.986 \cdot 10^4) \text{ mm}^3$$

1.7 Características Geométricas Dependentes das Propriedades do Ambiente

$$u_{ar} := 2 \cdot (b + H) = 37.14 \text{ cm}$$

$$h_{fic} := \gamma \cdot \frac{2 \cdot A_c}{u_{ar}} = 0.048 \text{ m}$$

$$h := \left\| \begin{array}{l} \text{if } 0.05 \ m \geq h_{fic} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0.05 \\ \text{if } 1.6 \ m \leq h_{fic} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 1.6 \\ \text{else} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} h_{fic} \\ m \end{array} \right\| \end{array} \right\| \end{array} \right\| \end{array} \right\| = 0.048$$

1.8 Mudança de Características Mecânicas Devidas à Idade

$$f_c(t_{00}) := f_{ck} \quad t_0 := 29 \quad j := 728 \quad t := j \quad 0 \text{ day} < t_{var} < 10000 \text{ day}$$

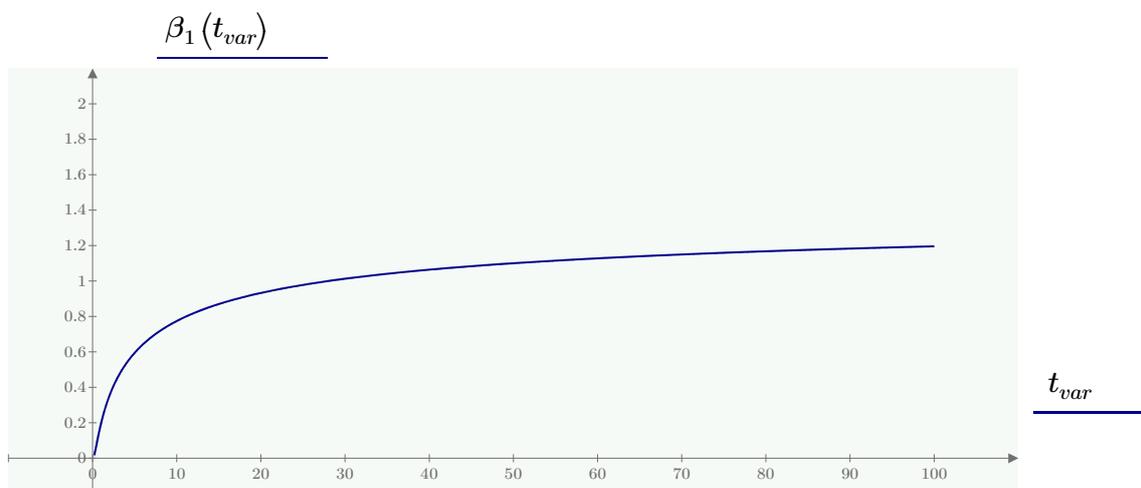
$c := \text{"CPIV"}$

$$s := \left\| \begin{array}{l} \text{if } c = \text{"CPIII"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0.38 \\ \text{also if } c = \text{"CPIV"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0.38 \\ \text{if } c = \text{"CPII"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0.25 \\ \text{also if } c = \text{"CPI"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0.25 \\ \text{if } c = \text{"CPV-ARI"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0.2 \end{array} \right\| \end{array} \right\| \end{array} \right\| \end{array} \right\| \end{array} \right\| = 0.38$$

$$728 \text{ day} = (6.29 \cdot 10^7) \text{ s}$$

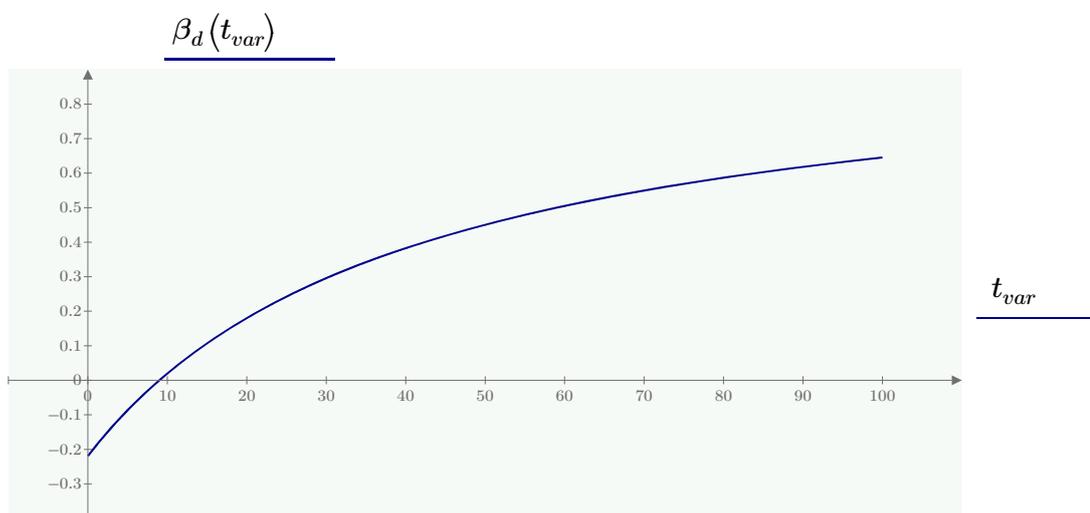
$$1 \text{ day} = (8.64 \cdot 10^4) \text{ s}$$

$$\beta_1(t) := e^{\left(s \cdot \left(1 - \left(\frac{28}{t} \right)^2 \right) \right)} \quad \beta_1(t) = 1.357$$



$$\beta_d(t) := \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70}$$

$$\beta_d(t) = 0.935$$



$$A(h) := 42 \cdot h^3 - 350 \cdot h^2 + 588 \cdot h + 113$$

$$A(h) = 140.236$$

$$B(h) := 768 \cdot h^3 - 3060 \cdot h^2 + 3234 \cdot h - 23$$

$$B(h) = 124.278$$

$$C(h) := -200 \cdot h^3 + 13 \cdot h^2 + 1090 \cdot h + 183$$

$$C(h) = 234.962$$

$$D(h) := 7579 \cdot h^3 - 31916 \cdot h^2 + 35343 \cdot h + 1931$$

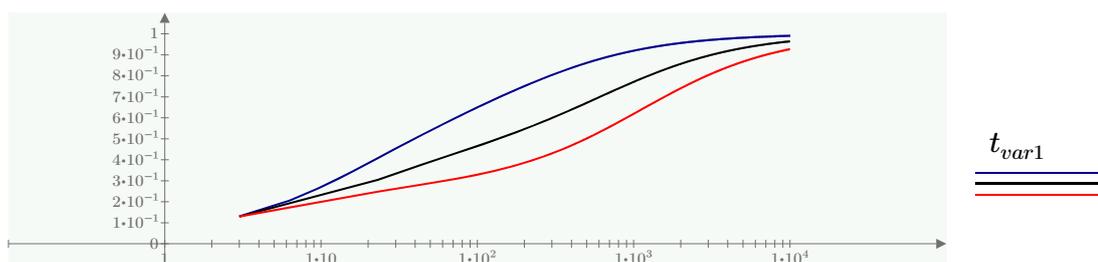
$$D(h) = 3.544 \cdot 10^3$$

$$\beta_f(t, h) := \frac{t^2 + A(h) \cdot t + B(h)}{t^2 + C(h) \cdot t + D(h)} \quad \beta_f(t, h) = 0.897 \quad \beta_f(t_0, h) = 0.449 \quad t_{var1} \geq 3$$

$\beta_f(t_{var1}, 0.05)$

$\beta_f(t_{var1}, 0.5)$

$\beta_f(t_{var1}, 1.6)$

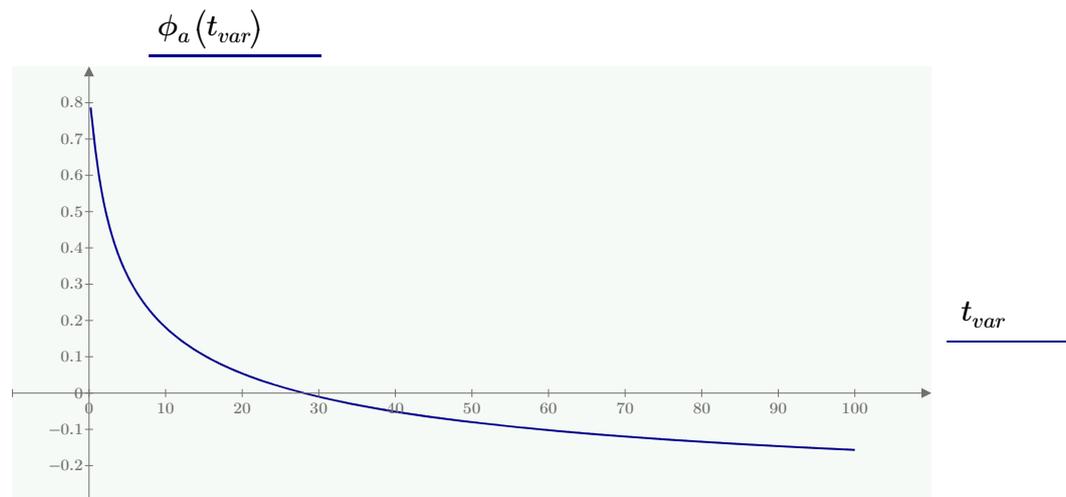


$$f_c(t_0) := \begin{cases} \text{if } t_0 \geq 28 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} f_{cd} \\ \text{else} \\ \beta_1(t) \cdot f_{cd} \end{array} \right\| \end{cases} \quad f_c(t_0) = 17.214 \text{ MPa}$$

2. Coeficientes de Fluência:

$$\phi_a(t) := \begin{cases} \text{if } f_{ck} \leq 45 \text{ MPa} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0.8 \cdot (1 - \beta_1(t)) \\ \text{else if } 80 \text{ MPa} \geq f_{ck} \geq 50 \text{ MPa} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 1.4 \cdot (1 - \beta_1(t)) \end{array} \right\| \end{array} \right\| \end{cases}$$

$$\phi_a(t) = -0.286$$



$$\phi_d := 0.4$$

$$\phi_{1c} := 4.45 - 0.035 \cdot U = 2.7 \quad \text{Para valores de abatimentos entre 5 e 9 cm}$$

$$\phi_{2c} := \frac{42 + h}{20 + h} = 2.097$$

$$\phi_{f00} := \left\| \begin{array}{l} \text{if } 20 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 45 \text{ MPa} \\ \left\| \phi_{1c} \cdot \phi_{2c} \right\| \\ \text{else if } f_{ck} < 20 \text{ MPa} \\ \left\| \phi_{1c} \cdot \phi_{2c} \right\| \\ \text{else if } 50 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \\ \left\| 0.45 \cdot \phi_{1c} \cdot \phi_{2c} \right\| \end{array} \right\| = 5.663$$

3. Deformações por Fluência:

Para uma viga biapoiada com carga P concentrada no meio do vão:

$$M := 2.276 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad P := M \cdot \frac{4}{L} = 4.978 \text{ kN}$$

$$pp := A_c \cdot 25 \frac{\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{\text{m}} = 0.209 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$M_d := \frac{pp \cdot L^2}{8} = 0.087 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_q := \frac{P \cdot L}{4} = 2.276 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_R := M_d + M_q = 2.363 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Calculado no Ftool ou conforme fórmulas acima}$$

$$M_{Rk} := M_R$$

$$\sigma_c(t_0) := \text{if } \text{Estadio} = \text{"EstadioI"} \quad f_{ck} = (2.41 \cdot 10^4) \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\left\| \frac{M_{Rk}}{W} \right\|$$

$$\text{else}$$

$$\left\| \frac{M_{Rk}}{W_{equiv}} \right\|$$

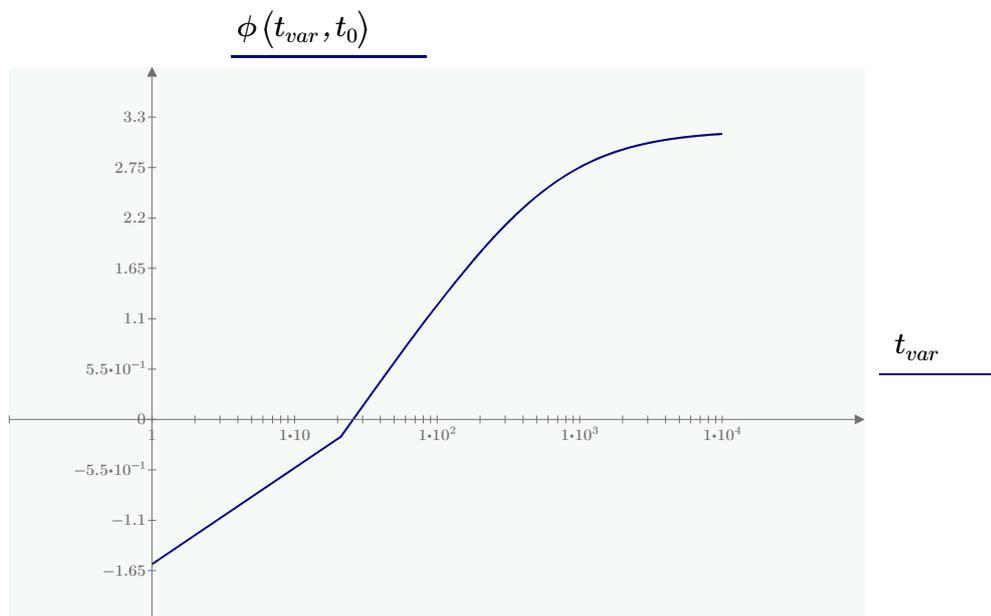
$$\sigma_c(t_0) = (2.367 \cdot 10^4) \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad \sigma_c(t_0) = 23.665 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_c(t_0) := \frac{(\sigma_c(t_0))}{E_{ci28}}$$

$$\varepsilon_c(t_0) = 8.608 \cdot 10^{-4}$$

$$\phi(t, t_0) := \phi_a(t) + \phi_{f00} \cdot (\beta_f(t, h) - \beta_f(t_0, h)) + \phi_d \cdot \beta_d(t)$$

$$\phi(t, t_0) = 2.625$$

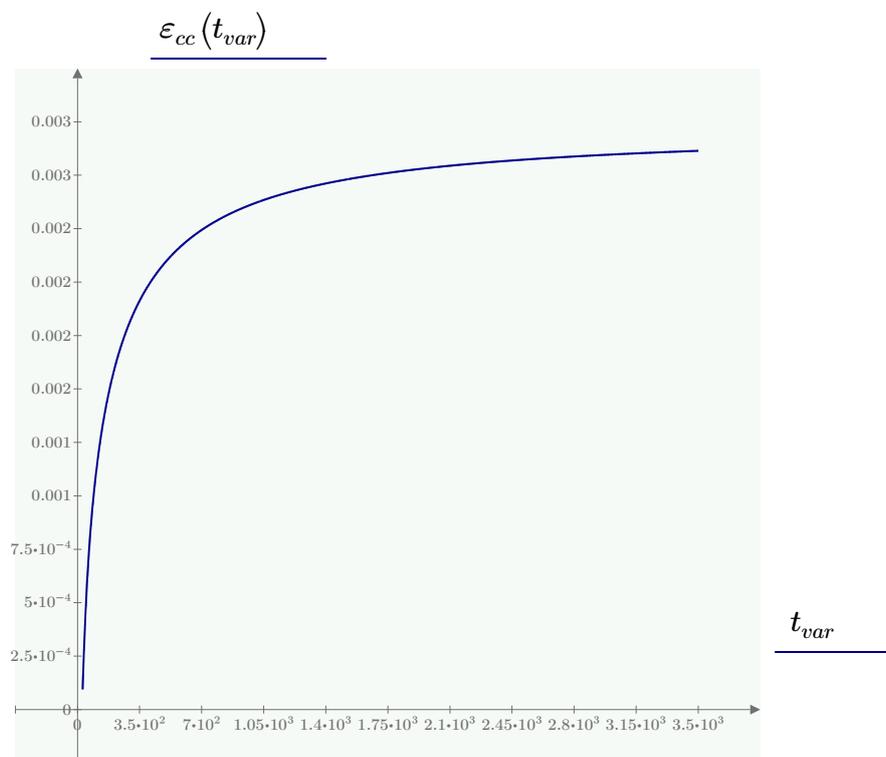


$$\varepsilon_{cc}(t) := \varepsilon_c(t_0) \cdot (\phi(t, t_0))$$

$$\varepsilon_{cc}(t) = 0.00226$$

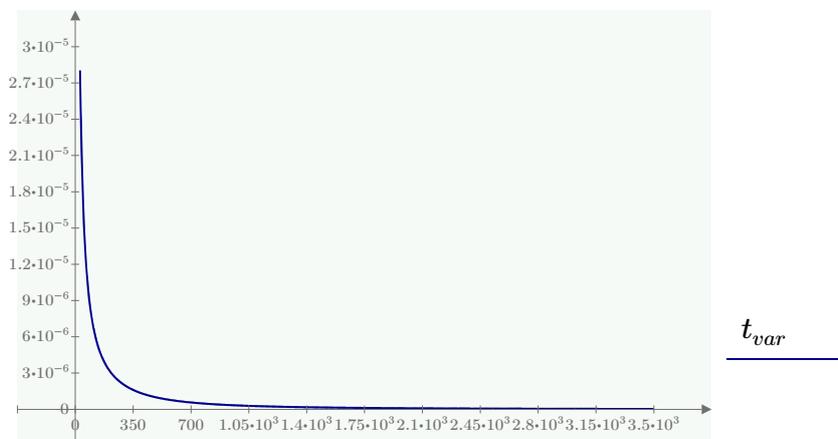
$$\varepsilon_{ccNBR}(t) := \varepsilon_{cc}(t)$$

$$t_{var} := t_0 .. 3500$$



4. Calibração de Coeficientes do ANSYS

4.1. Definição dos pontos procurados pelas leis de fluência não-linear:



$$\frac{d}{dt_{var}} \varepsilon_{cc}(t_{var})$$

4.2. Constantes de cálculo:

$$\sigma := \frac{\sigma_c(t_0)}{Pa} = 2.367 \cdot 10^7$$

$$70 \text{ } ^\circ F = 21.111 \text{ } ^\circ C$$

$$T := 20 \text{ } ^\circ C$$

$$T = 293.15 \text{ } K$$

4.3. Leis de fluência não-linear:

$$z := READEXCEL(\text{".\dias.xlsx"}, \text{"Plan1!B2:B731"}) = \begin{bmatrix} \vdots \\ 747 \\ 748 \\ 749 \\ 750 \\ 751 \\ 752 \\ 753 \\ 754 \\ 755 \\ 756 \\ 757 \\ 758 \end{bmatrix}$$

4.3.1 Fluência Primária:

$$\varepsilon_{cr1}(u, \Xi) := \Xi_0 \cdot \sigma^{\Xi_1} \cdot u^{\Xi_2} \cdot e^{\frac{-\Xi_3}{T}} \quad \text{Time-hardening (X grego = C)}$$

$$\varepsilon_{cr2}(z, X) := \left(X_0 \cdot \sigma + X_1 \cdot \sigma^2 + X_2 \cdot \sigma^3 \right) \cdot z^{X_3 + X_4 \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-X_5}{T}} \quad \text{Generalized Time-hardening (C grego = C)}$$

$$\varepsilon_{cr3}(z, \Upsilon) := \left(\frac{\Upsilon_0 \cdot \sigma^{\Upsilon_1} \cdot z^{\Upsilon_2 + 1} \cdot e^{\frac{-\Upsilon_3}{T}}}{\Upsilon_2 + 1} \right) \quad \text{Modified Time-hardening (U grego = C)}$$

4.3.2 Fluência Secundária:

$$\varepsilon_{cr4}(z, \Gamma) := \frac{\Gamma_0 \cdot \sigma^{\Gamma_1} \cdot z^{\Gamma_2 + 1} \cdot e^{\frac{-\Gamma_3}{T}}}{\Gamma_2 + 1} + \Gamma_4 \cdot \sigma^{\Gamma_5} \cdot z \cdot e^{\frac{-\Gamma_6}{T}} \quad \text{Combined Time-hardening (G grego = C)}$$

4.4. Definição dos valores residuais:

$$dvy := \frac{d}{dz} \varepsilon_{cc}(z) = \begin{bmatrix} \vdots \\ 5.016 \cdot 10^{-7} \\ 5.005 \cdot 10^{-7} \\ 4.994 \cdot 10^{-7} \\ 4.983 \cdot 10^{-7} \\ 4.972 \cdot 10^{-7} \\ 4.962 \cdot 10^{-7} \\ 4.951 \cdot 10^{-7} \\ 4.94 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{vy} := \varepsilon_{cc}(z) = \begin{bmatrix} 9.381 \cdot 10^{-5} \\ 1.214 \cdot 10^{-4} \\ 1.481 \cdot 10^{-4} \\ 1.74 \cdot 10^{-4} \\ 1.99 \cdot 10^{-4} \\ 2.233 \cdot 10^{-4} \\ 2.47 \cdot 10^{-4} \\ 2.699 \cdot 10^{-4} \\ 2.922 \cdot 10^{-4} \\ 3.139 \cdot 10^{-4} \\ 3.35 \cdot 10^{-4} \\ 3.556 \cdot 10^{-4} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

dummy := WRITEEXCEL("creepsampaio.xls", *vy*)

dummy1 := WRITEEXCEL("dcreepsampaio.xls", *dvy*)

4.5. Definição de valores arbitrários e minimização do erro:

$$\begin{aligned}
 guess_1 &:= \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-6} \\ 3 \\ -1 \\ 1370 \end{bmatrix} & guess_2 &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} & guess_3 &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & guess_4 &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$TOL := 10^{-100}$$

$$\varepsilon_3 := 0$$

$$CTOL := 10^{-100}$$

$$\Xi := \text{genfit}(z, dvy, guess_1, \varepsilon_{cr1}) = \begin{bmatrix} 4.554 \cdot 10^{-10} \\ 1.603 \\ -1.137 \\ 3.609 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

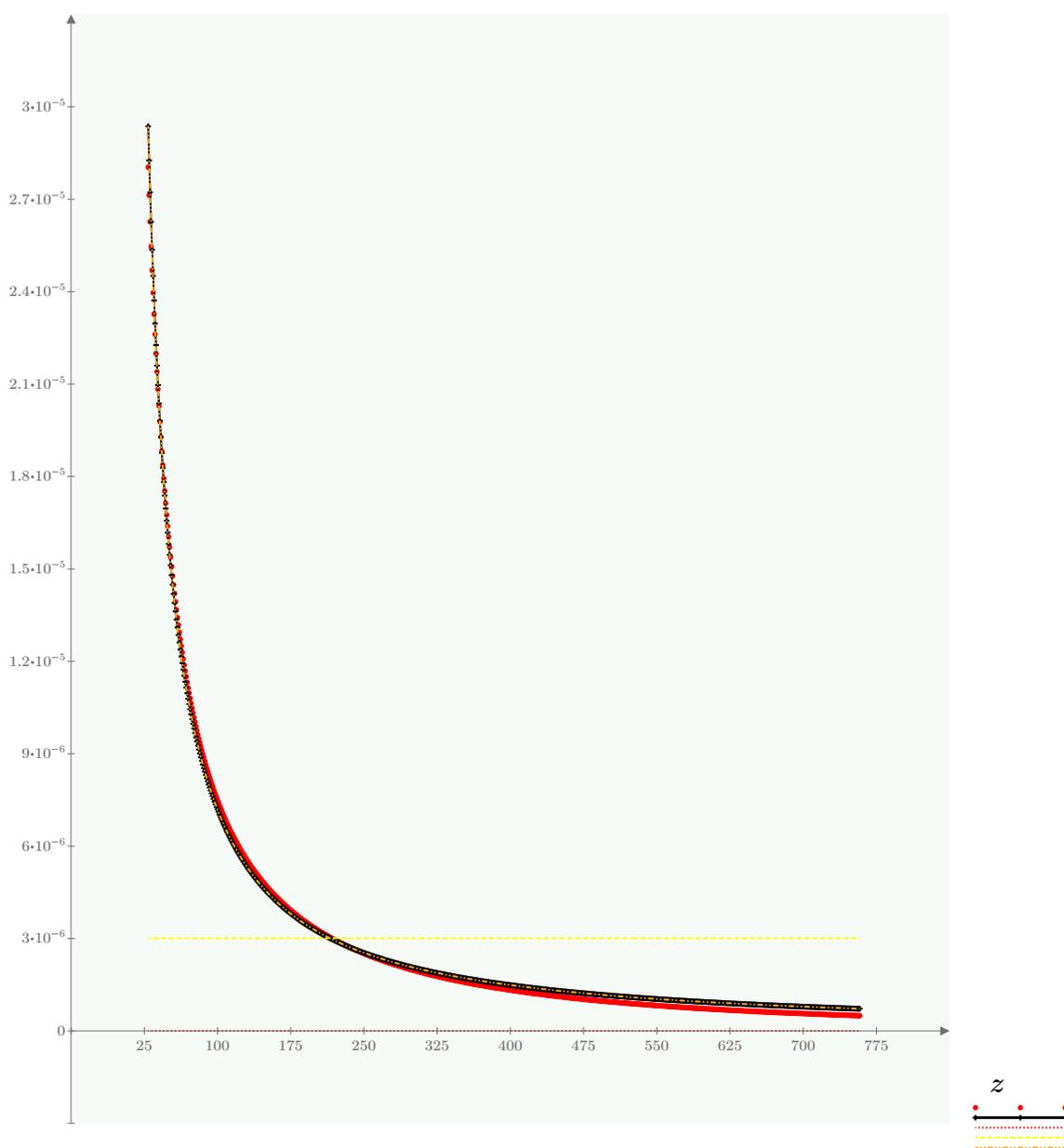
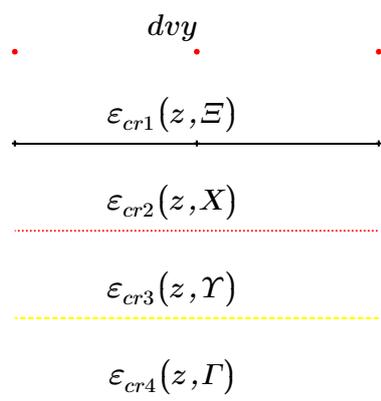
$$dummy2 := \text{WRITEEXCEL}("C4.xls", \Xi^T)$$

$$X := \text{genfit}(z, dvy, guess_2, \varepsilon_{cr2}) = \begin{bmatrix} 1.108 \cdot 10^{-5} \\ 5.913 \cdot 10^{-6} \\ -2.499 \cdot 10^{-13} \\ -194.021 \\ 9.747 \cdot 10^{-6} \\ -15.783 \end{bmatrix}$$

$$Y := \text{genfit}(z, dvy, guess_3, \varepsilon_{cr3}) = \begin{bmatrix} 7.779 \cdot 10^{-5} \\ -0.387 \\ -1 \\ 2.605 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma := \text{genfit}(z, dvy, guess_4, \varepsilon_{cr4}) = \begin{bmatrix} -3.542 \cdot 10^{-5} \\ 0.346 \\ -2.137 \\ 616.445 \\ 1 \cdot 10^{-5} \\ -200 \\ 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

4.6. Plotagem dos novos valores:



4.7. Cálculo do erro para os novos valores:

4.7.1 Definição dos valores residuais:

$$resid(\Xi) := dvy - \varepsilon_{cr1}(z, \Xi)$$

4.7.2 Cálculo da soma dos quadrados:

$$SSE(\Xi) := \sum resid(\Xi)^2$$

4.7.3 Cálculo do erro médio:

$$n := length(dvy - 1) = 730$$

$$conf1 := \frac{SSE(\Xi)}{n - 2} = 4.505 \cdot 10^{-14}$$

$$conf2 := \frac{SSE(X)}{n - 2} = 3.603 \cdot 10^{-10}$$

$$conf3 := \frac{SSE(\Upsilon)}{n - 2} = 2.719 \cdot 10^{-11}$$

$$conf4 := \frac{SSE(\Gamma)}{n - 2} = 2.843 \cdot 10^{-11}$$

5. Cálculo das Flechas

5.1. Flecha Imediata Devida ao Peso Próprio

$$Estadio_inicial := \begin{cases} \text{if } M_d \leq M_r \\ \quad \parallel \text{“Estadio_inicial_I”} \\ \text{else} \\ \quad \parallel \text{“Estadio_inicial_II”} \end{cases} = \text{“Estadio_inicial_I”}$$

$$I_{inicial} := \begin{cases} \text{if } Estadio_inicial = \text{“Estadio_inicial_I”} \\ \quad \parallel I_I \\ \text{else} \\ \quad \parallel I_{equiv} \end{cases} = (1.777 \cdot 10^{-5}) m^4$$

$$E_{cs} := 0.85 \cdot E_{ci28} = (2.337 \cdot 10^4) MPa$$

$$f_{ipp} := \frac{5 \cdot pp \cdot L^4}{384 \cdot E_{cs} \cdot I_{inicial}} = 0.073 \text{ mm}$$

5.2. Flecha Imediata Devida ao Carregamento

Carregamento Distribuído

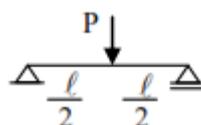
$$q := 0 \frac{kN}{m}$$

$$f_{iq} := \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EI_{equiv}} = 0 \text{ mm}$$

Carregamento Concentrado no Meio do Vão

$$M := 0 \text{ kN} \cdot m$$

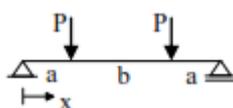
$$P_{concentrado} := M \cdot \frac{4}{L} = 0 \text{ kN}$$



$$f_{iPc} := \frac{1}{48} \cdot \frac{P_{concentrado} \cdot L^3}{EI_{equiv}} = 0 \text{ mm}$$

Cargas concentradas nos terços do vão

$$P_2 := \frac{2240}{2} \text{ lbf}$$



$$2240 \text{ lbf} = 9.964 \text{ kN}$$

$$1 \text{ ft} + 6 \text{ in} = 0.457 \text{ m}$$

$$a := 0.457 \text{ m}$$

$$3 \text{ ft} = 0.914 \text{ m}$$

$$b_l := .914 \text{ m}$$

Condições de Contorno

$$M_A := 0 \text{ kN} \cdot m$$

$$M_B := 0 \text{ kN} \cdot m$$

$$y_A := 0 \text{ m}$$

$$y_B := 0 \text{ m}$$

Equilíbrio de Forças

Reações

$$R_A := \frac{P_2 \cdot (L - a)}{L} + \frac{P_2 \cdot (L - (a + b_l))}{L} = (4.985 \cdot 10^3) \text{ N}$$

$$R_B := R_A = (4.985 \cdot 10^3) \text{ N}$$

Cortante

$$V(x) := R_A - (x > a) \cdot P_2 - (x > (a + b_l)) \cdot P_2$$

Momento

$$M(x) := R_A \cdot x + (x > a) \cdot P_2 \cdot (a - x) + (x > (a + b_l)) \cdot P_2 \cdot ((a + b_l) - x)$$

Deflexão

$$TOL := 10^{-10}$$

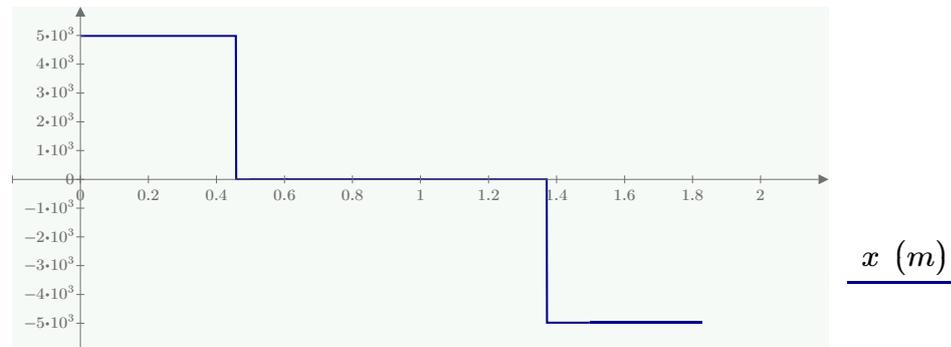
$$CTOL := 10^{-10}$$

$$y(x) := (x < a) \cdot \frac{P \cdot x}{6 \cdot EI_{equiv}} \cdot (3 \cdot L \cdot a - 3 \cdot a^2 - x^2) + (x > a) \cdot \frac{P \cdot a}{6 \cdot EI_{equiv}} \cdot (3 \cdot L \cdot x - 3 \cdot x^2 - a^2)$$

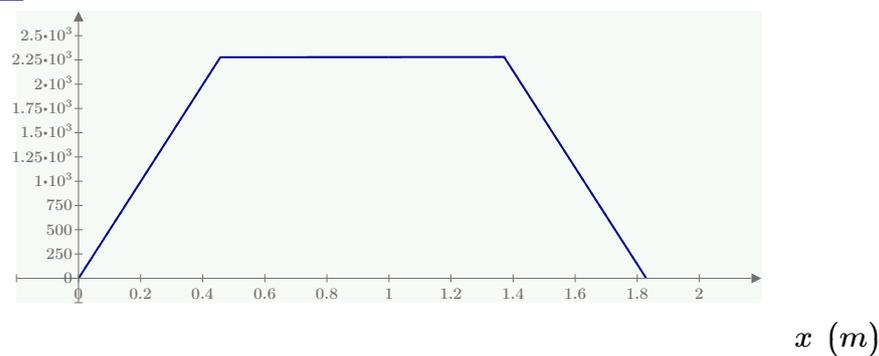
$$y\left(\frac{L}{2}\right) = 8.051 \text{ mm}$$

$$x := 0 \text{ m}, 0.001 \text{ m}..L - 0.001 \text{ m} \quad l := x$$

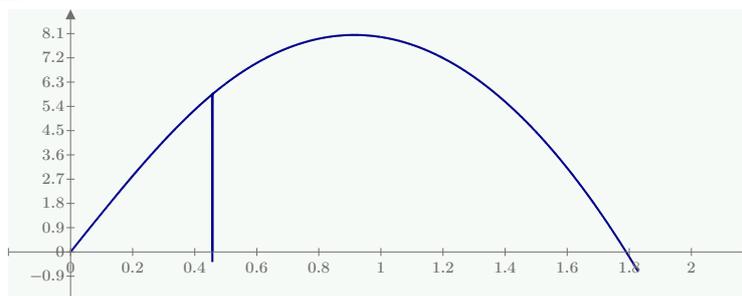
$V(x)$ (N)



$M(x)$ (N·m)



$y(x)$ (mm)



x (m)

$$f_{iP} := y\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$f_{iqP} := f_{iq} + f_{iPc} + f_{iP} = 8.051 \text{ mm}$$

5.3. Flecha Imediata Total

$$f_{iT} := f_{iqP} + f_{ipp} = 8.124 \text{ mm}$$

5.4. Flecha Diferida Total

$$A's := A s_{sup}$$

$$\rho' := \frac{A's}{b \cdot d}$$

$$\xi(t) := \begin{cases} \text{if } t \leq 70 \cdot 30.437 \\ \left\| 0.68 \cdot .996^{\frac{t}{30.437}} \cdot \left(\frac{t}{30.437}\right)^{0.32} \right\| \\ \text{else if } t > 70 \cdot 30.437 \\ \left\| 2 \right\| \end{cases}$$

$$\xi(t) = 1.706$$

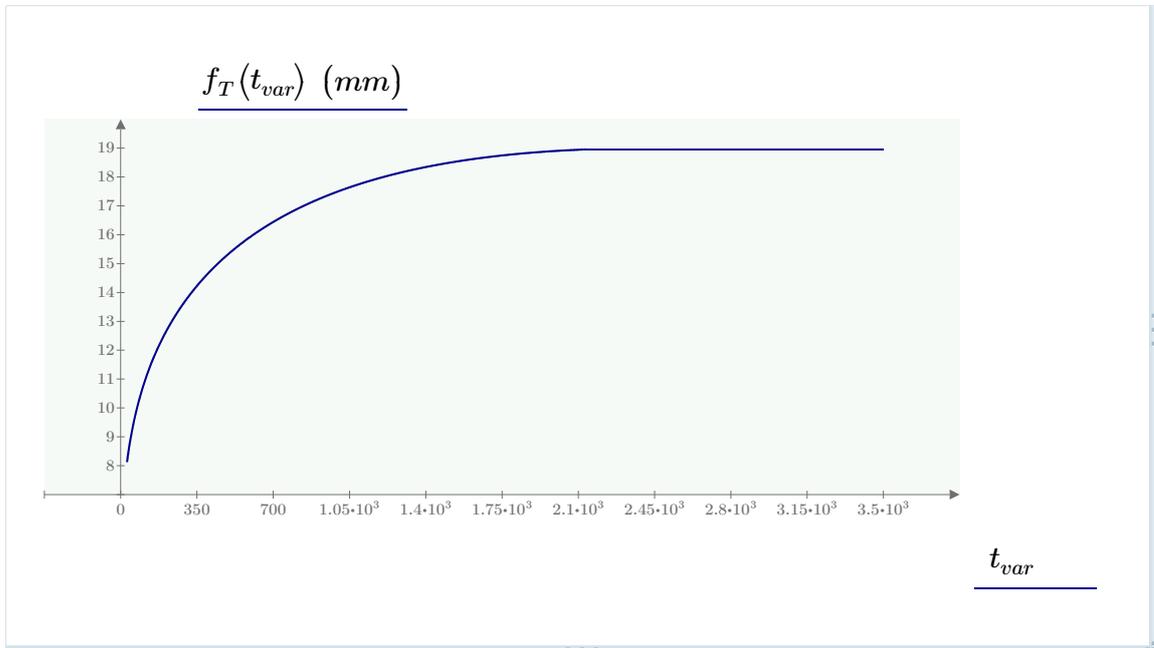
$$\Delta\xi(t) := \xi(t) - \xi(t_0)$$

$$\alpha_f(t) := \frac{\Delta\xi(t)}{1 + 50 \rho'}$$

$$f_d(t) := \alpha_f(t) \cdot f_{iT}$$

$$f_T(t) := f_{iT} \cdot (1 + \alpha_f(t))$$

$$f_T(t) = 16.567 \text{ mm}$$



APÊNDICE B – Cálculo do deslocamento das vigas segundo o CEB-FIP/90

Cálculos da deformação por fluência e do deslocamento na viga C4, realizados de acordo com o código modelo simplificado CEB-FIP (1990). As propriedades físicas e geométricas dessa viga são descritas no capítulo 4.2. Programação desenvolvida no software Mathcad.

Previsão de Deslocamentos com Consideração de Fluência Segundo o CEB/FIP 1990

1. Dados de Entrada:

! Include << C:\Users\Fernanda\Dropbox\Mestrado UTFPR 2013\2014\Calculos NBR6118,2014 - matriz - c4 - R4 - segundos.mcdx

1.1 Características Geométricas:

$$L = 1.829 \text{ m}$$

$$b = 0.076 \text{ m} \quad H = 0.11 \text{ m} \quad A_c = 83.439 \text{ cm}^2$$

$$c_{sup} = 0 \quad c_{inf} = 0.01 \text{ m} \quad y_t = 0.055 \text{ m} \quad I = (8.337 \cdot 10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$d = 94.5 \text{ mm}$$

$$A_{s_{sup}} = 0 \text{ m}^2 \quad A_{s_{central}} = 0 \text{ m}^2$$

$$A_{s_{inf}} = (2.138 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^2 \quad A_s = (2.138 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^2 \quad W = 152.276 \text{ cm}^3$$

$$\rho_{tm} := \begin{cases} \text{if } xln > \frac{y_t}{2} \\ \left\| \frac{A_{s_{inf}}}{A_c} \right\| \\ \text{else} \\ \left\| \frac{A_{s_{inf}} + A_{s_{central}}}{A_c} \right\| \end{cases} \cdot 100 = 2.562 \quad \rho_{cm} := \begin{cases} \text{if } xln \leq \frac{y_t}{2} \\ \left\| \frac{A_{s_{sup}}}{A_c} \right\| \\ \text{else} \\ \left\| \frac{A_{s_{sup}} + A_{s_{central}}}{A_c} \right\| \end{cases} \cdot 100 = 0$$

1.2 Características Mecânicas do Concreto e do Aço

$$f_{ck} = 24.1 \text{ MPa} \quad f_{cm0} := 10 \text{ MPa} \quad E_{c0} := 2.15 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\Delta f := 8 \text{ MPa}$$

$$f_{cmCEB} := f_{ck} + \Delta f = 32.1 \text{ MPa}$$

$$f_{ctCEB} := 0.3 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{\text{MPa}} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ MPa} = 2.503 \text{ MPa}$$

$$E_{ci28CEB} := E_{c0} \cdot \left(\frac{f_{ck} + \Delta f}{f_{cm0}} \right)^{\frac{1}{3}} = (3.172 \cdot 10^4) \text{ MPa}$$

$$\nu_c = 0.2$$

$$E_s = 210 \text{ GPa} \quad f_{yk} = 275.79 \text{ MPa} \quad \nu_s = 0.3$$

1.3 Propriedades do Ambiente

$$RH := 55\% \quad RH_0 := 100\% \quad T_0 := 1 \text{ } ^\circ\text{C} \quad T = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

1.4 Propriedades Mecânicas sob Efeito da Temperatura

$$E_{ciCEB} := E_{ci28}$$

$$E_{ciCEB}(T) := E_{ciCEB} \cdot \left(1.06 - .003 \cdot \frac{T}{T_0}\right) \quad E_{ciCEB}(T) = (2.905 \cdot 10^4) \text{ MPa}$$

$$f'_{cm}(T) := f_{cmCEB} \cdot \left(1.06 - 0.003 \cdot \frac{T}{T_0}\right) \quad f'_{cm}(T) = 33.923 \text{ MPa}$$

1.5 Coeficientes de Norma

$$\gamma_{cCEB} := 1 \quad \gamma_{sCEB} := 1 \quad s_1 = 0.38$$

1.6 Resistência de Projeto do Concreto e do Aço

$$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_{cCEB}} = (2.41 \cdot 10^7) \text{ Pa} \quad f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_{sCEB}} = (2.758 \cdot 10^8) \text{ Pa}$$

1.7 Características Geométricas Dependentes das Propriedades do Ambiente

$$u_{ar} = 371.4 \text{ mm}$$

$$h_{CEB} := \frac{2 \cdot A_c}{u_{ar}} = 44.932 \text{ mm}$$

$$h_{0CEB} := 100 \text{ mm}$$

1.8 Mudança de Características Mecânicas Devidas à Idade

$$f_{cCEB}(t_0) := f_{ck} \quad t_0 = 29 \quad j_{CEB} := t_0 \quad t = 728 \quad 0 < t_{var} < 10000$$

$$c_{CEB} := \text{"N"} \quad t_{1CEB} := 1 \quad t_{1TCEB} := t_{1CEB}$$

$$\alpha_{CEB} := \left\| \begin{array}{l} \text{if } c_{CEB} = \text{"SL"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} -1 \\ \text{if } c_{CEB} = \text{"R"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0 \\ \text{also if } c_{CEB} = \text{"N"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 0 \\ \text{if } c_{CEB} = \text{"RS"} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 1 \end{array} \right\| \end{array} \right\| \end{array} \right\| \end{array} \right\| = 0$$

$$\Delta t_i := t_0 \quad T \Delta t_i := T \quad n_{CEB} := t$$

$$t_{0T}(T) := \Delta t_i \cdot e^{\left(\frac{13.65 - \frac{4000}{T \Delta t_i}}{273 + \frac{T \Delta t_i}{T_0}} \right)} \quad t_{0T}(T) = 11.273$$

$$t_{0CEB} := \left\| \begin{array}{l} \text{if } t_{0T}(T) \cdot \left(\frac{9}{2 + \left(\frac{t_{0T}(T)}{t_{1TCEB}} \right)^{1.2}} + 1 \right)^{\alpha} \geq 0.5 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} t_{0T}(T) \cdot \left(\frac{9}{2 + \left(\frac{t_{0T}(T)}{t_{1TCEB}} \right)^{1.2}} + 1 \right)^{\alpha} \\ \text{else} \\ \quad \left\| 0.5 \end{array} \right\| \end{array} \right\| = 19.548$$

$$\beta_H(RH, h_{CEB}) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } 150 \cdot \left(1 + \left(1.2 \cdot \frac{RH}{RH_0} \right)^{18} \right) \cdot \frac{h_{CEB}}{h_{0CEB}} + 250 \leq 1500 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} 150 \cdot \left(1 + \left(1.2 \cdot \frac{RH}{RH_0} \right)^{18} \right) \cdot \frac{h_{CEB}}{h_{0CEB}} + 250 \\ \text{else} \\ \quad \left\| 1500 \end{array} \right\| \end{array} \right\|$$

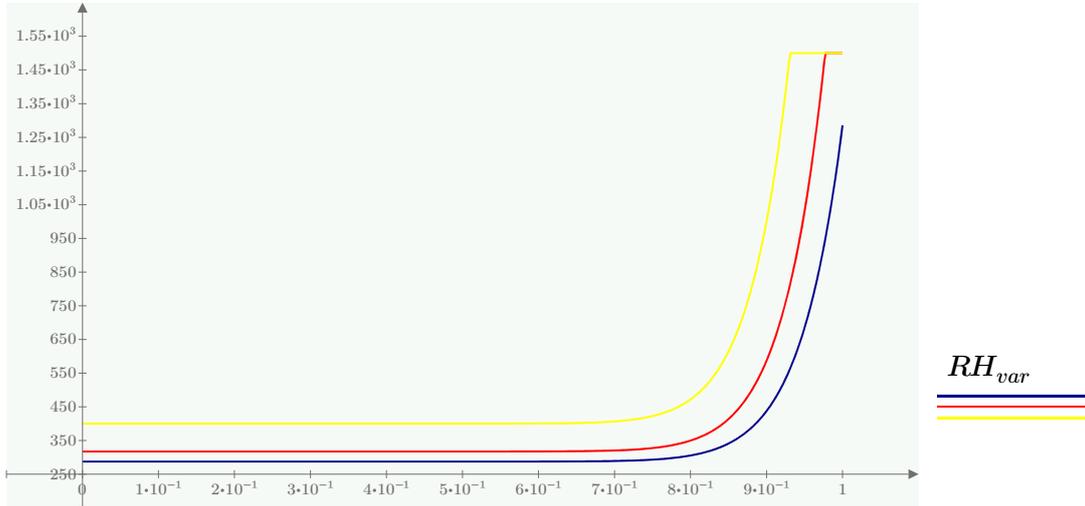
$$\beta_H(RH, h_{CEB}) = 317.436$$

$$10 < RH_{var} < 80$$

$$\underline{\beta_H(RH_{var}, 25 \text{ mm})}$$

$$\underline{\beta_H(RH_{var}, h_{CEB})}$$

$$\underline{\beta_H(RH_{var}, 100 \text{ mm})}$$



$$\beta_T := e^{\left(\frac{1500}{\left(273 + \frac{T}{T_0} \right) - 5.12} \right)} = 264.346$$

$$\beta_{HT} := \beta_H(RH, h_{CEB}) \cdot \beta_T = 8.391 \cdot 10^4$$

$$\beta_{HT} = 8.391 \cdot 10^4$$

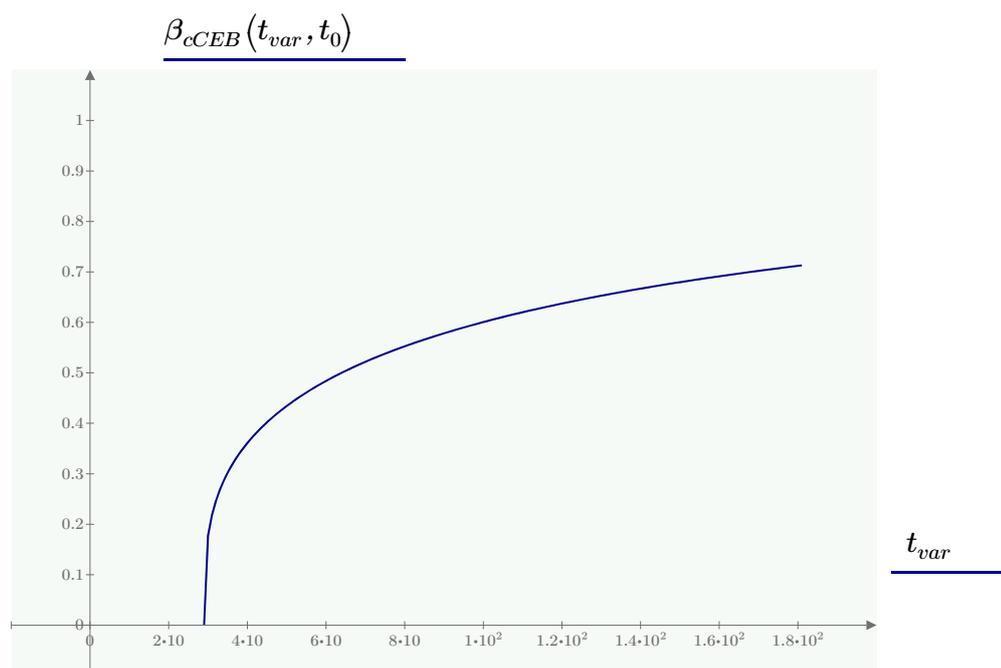
$$\beta_{cCEB}(t, t_0) := \text{if } T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\left| \left(\frac{\frac{(t-t_0)}{t_{1CEB}}}{\beta_H(RH, h_{CEB}) + \frac{(t-t_0)}{t_{1CEB}}} \right)^{0.3} \right|$$

else

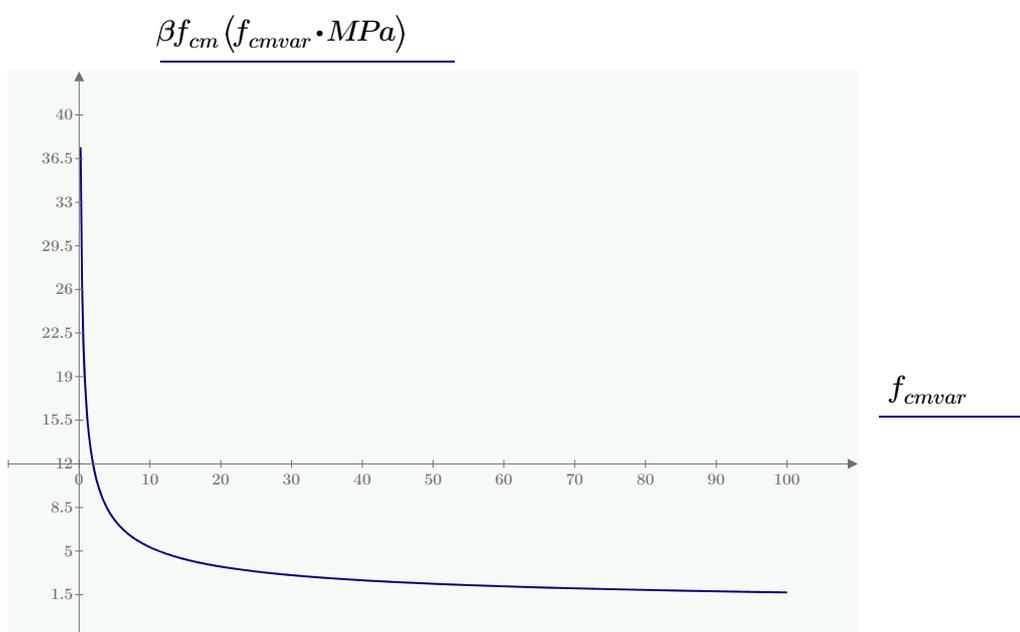
$$\left| \left(\frac{\frac{(t-t_0)}{t_{1CEB}}}{\beta_{HT} + \frac{(t-t_0)}{t_{1CEB}}} \right)^{0.3} \right|$$

$$\beta_{cCEB}(t, t_0) = 0.894$$



$$\beta f_{cm}(f_{cmCEB}) := \frac{5.3}{\left(\frac{f_{cmCEB}}{f_{cm0}}\right)^{0.5}}$$

$$\beta f_{cm}(f_{cmCEB}) = 2.958$$



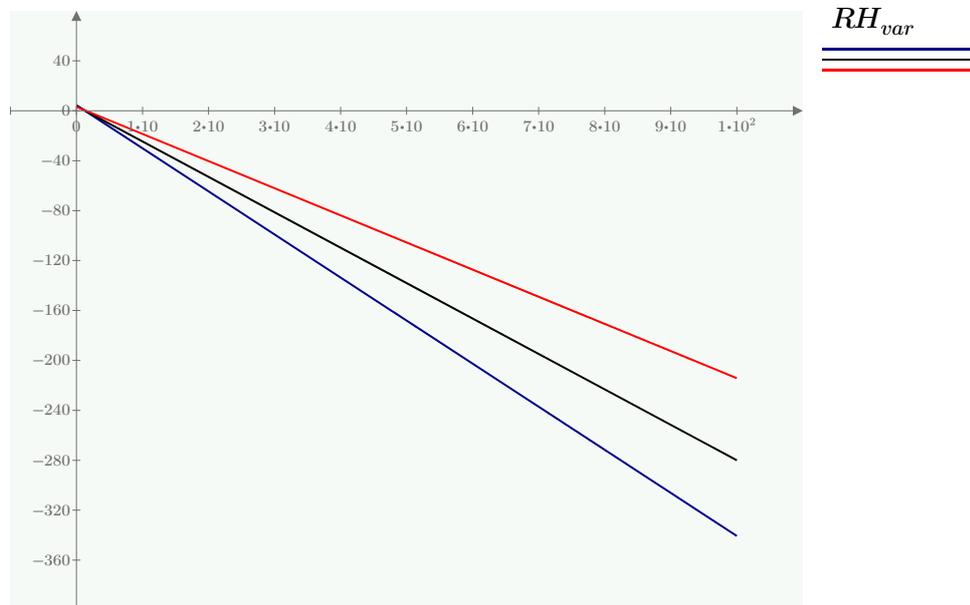
$$\phi_{RH}(RH, h_{CEB}) := 1 + \frac{1 - \left(\frac{RH}{RH_0}\right)}{\frac{1}{3}}$$

$$\phi_{RH}(RH, h_{CEB}) = 2.277 \cdot \left(\frac{h_{CEB}}{h_{0CEB}}\right)^{0.46}$$

$$\underline{\phi_{RH}(RH_{var}, 25 \text{ mm})}$$

$$\underline{\phi_{RH}(RH_{var}, h_{CEB})}$$

$$\underline{\phi_{RH}(RH_{var}, 100 \text{ mm})}$$

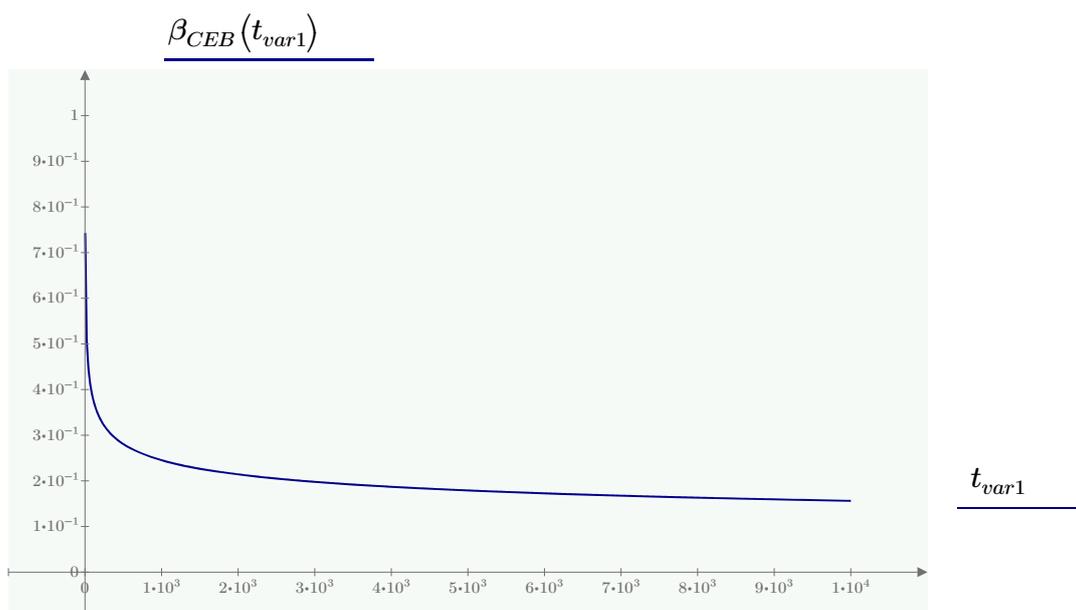


$$\phi_T(T) := e^{\left(0.015 \left(\frac{T}{T_0} - 20\right)\right)} \quad \phi_T(T) = 0.753$$

$$\phi_{RHT} := \phi_T(T) + (\phi_{RH}(RH, h_{CEB}) - 1) \cdot \phi_T(T)^{1.2} = 1.661$$

$$\beta_{CEB}(t_0) := \frac{1}{0.1 + \left(\frac{t_0}{t_{1CEB}}\right)^{.2}}$$

$$\beta_{CEB}(t_0) = 0.485$$

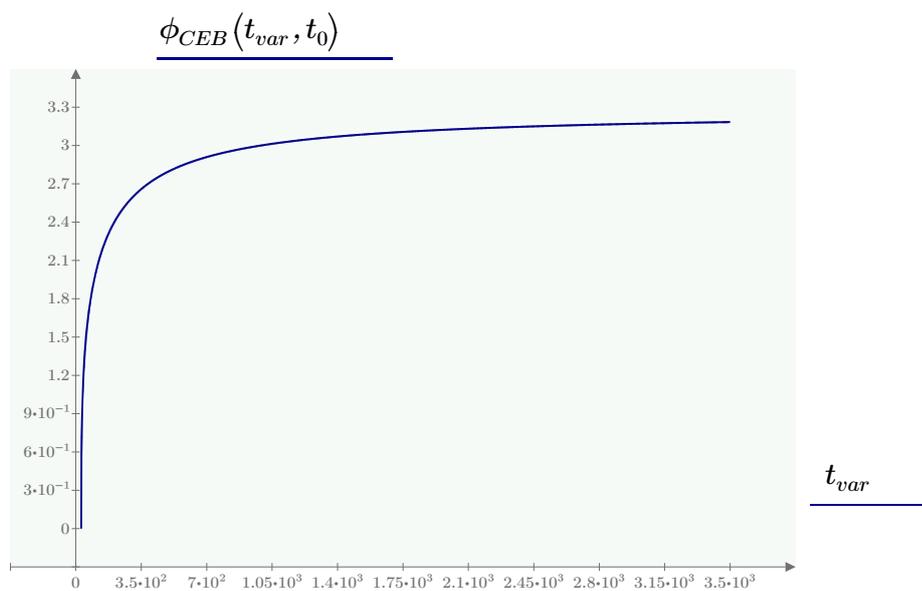


2. Coeficientes de Fluência:

$$\phi_{0CEB} := \begin{cases} \text{if } T = 20 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \left\| \phi_{RH}(RH, h_{CEB}) \cdot \beta_{CEB}(t_0) \cdot \beta_{f_{cm}}(f_{cmCEB}) \right\| \\ \text{else} \\ \left\| \phi_{RHT} \cdot \beta_{CEB}(t_0) \cdot \beta_{f_{cm}}(f_{cmCEB}) \right\| \end{cases} = 3.269$$

$$\phi_{CEB}(t, t_0) := \phi_{0CEB} \cdot \beta_{cCEB}(t, t_0)$$

$$\phi_{CEB}(t, t_0) = 2.921$$



3. Deformações por Fluência: $\gamma_f := 1.3$ $\gamma_{futilizado} := 1$

$$M_S := M_d + M_q = 2.363 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{Sd} := M_S \cdot \gamma_{futilizado} = 2.363 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \sigma_{cCEB}(t_0) := \frac{M_{Sd}}{W}$$

$$\sigma_{cCEB}(t_0) = (1.552 \cdot 10^4) \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\varepsilon_{ccCEB} := \begin{cases} \text{if } \sigma_{cCEB}(t_0) \leq 0.4 \cdot f_{cmCEB} & = \text{"Non Linear"} \\ \parallel & \text{"Linear"} \\ \text{else} & \\ \parallel & \text{"Non Linear"} \end{cases}$$

3.1 Cálculo dos coeficientes que dependem do tempo

$$s_{CEB} := \begin{cases} \text{if } c_{CEB} = \text{"SL"} & \\ \parallel & 0.38 \\ \text{if } c_{CEB} = \text{"R"} & \\ \parallel & 0.25 \\ \text{also if } c_{CEB} = \text{"N"} & \\ \parallel & 0.25 \\ \text{if } c_{CEB} = \text{"RS"} & \\ \parallel & 0.25 \end{cases} = 0.25$$

$$\beta_{ccCEB}(t_{0T}) := e^{\left(s_{CEB} \cdot \left(1 - \left(\frac{28}{\frac{t_{0T}(T)}{t_{1CEB}}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right)}$$

$$\beta_{ccCEB}(t_{0T}) = 0.866$$

$$\beta_E(t_{0T}) := (\beta_{ccCEB}(t_{0T}))^{0.5}$$

$$\beta_E(t_{0T}) = 0.931$$

$$E_{ciCEB}(n_{CEB}, T) := \beta_E(t_{0T}) \cdot E_{ciCEB}(T)$$

$$E_{ciCEB}(n_{CEB}, T) = (2.703 \cdot 10^4) \text{ MPa}$$

$$E_{cCEB}(t_0) := E_{ciCEB}(t_0, T)$$

$$E_{cCEB}(t_0) = (2.703 \cdot 10^4) \text{ MPa}$$

$$J(t, t_0) := \left(\frac{1}{E_{cCEB}(t_0)} + \frac{\phi_{CEB}(t, t_0)}{E_{ciCEB}(n_{CEB}, T)} \right)$$

$$J(t, t_0) = (1.45 \cdot 10^{-10}) \frac{1}{\text{Pa}}$$

$$\varepsilon_{c\sigma}(n_{CEB}, t_0) := \sigma_{cCEB}(t_0) \cdot J(n_{CEB}, t_0)$$

$$\varepsilon_{c\sigma}(n_{CEB}, t_0) = 0.002$$

$$\varepsilon_{ccCEB}(t, t_0) := \begin{cases} \text{if } \varepsilon_{ccCEB} = \text{"Linear"} \\ \left\| \left(\frac{\sigma_{cCEB}(t_0)}{E_{ci28CEB}} \cdot \phi_{CEB}(t, t_0) \right) \right\| \\ \text{else if } \varepsilon_{ccCEB} = \text{"Non Linear"} \\ \left\| \varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) \right\| \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ccCEB}(t, t_0) = 0.00225$$

$$\varepsilon_{ccNBR}(t) = 0.00226$$

$$\varepsilon_{ccMEF} := \text{READEXCEL}(\text{".\Tens-Def C4.xlsx"}, \text{"Def-T!C3:D15"})$$

$$\varepsilon_{ccMEFbd1} := \text{READEXCEL}(\text{".\Tens-Def C4.xlsx"}, \text{"Def-Tbd1!C3:D15"})$$

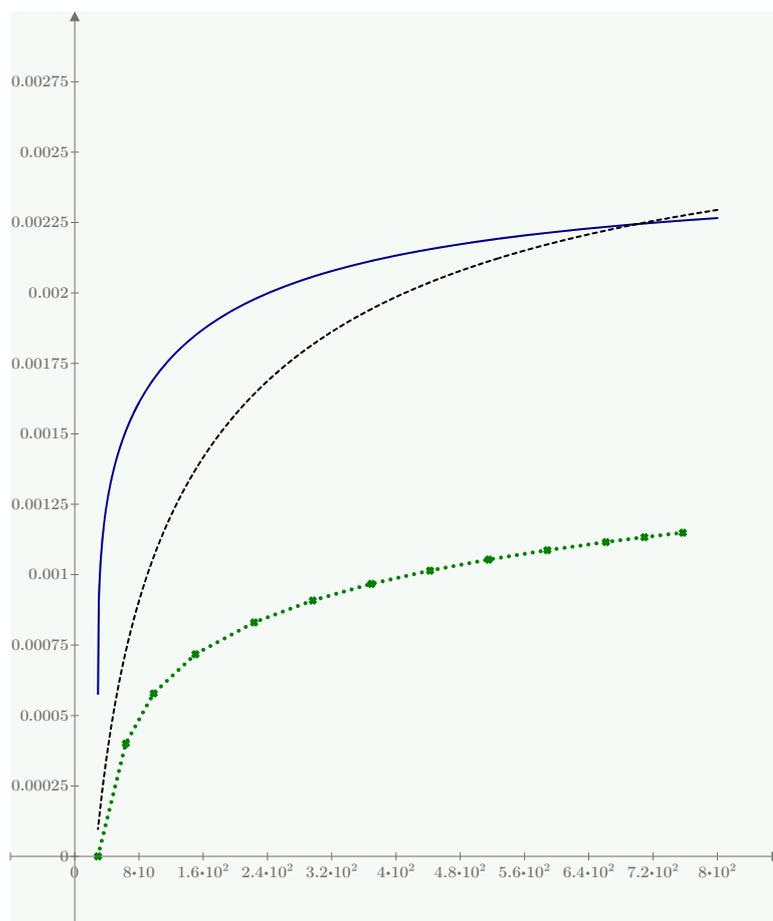
$$\varepsilon_{ccMEFbd2} := \text{READEXCEL}(\text{".\Tens-Def C4.xlsx"}, \text{"Def-Tbd2!C3:D15"})$$

$$\varepsilon_{ccMEFbd3} := \text{READEXCEL}(\text{".\Tens-Def C4.xlsx"}, \text{"Def-Tbd3!C3:D15"})$$

$$\varepsilon_{ccMEF} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 413.33 & 0.00101 \\ 486.33 & 0.00105 \\ 559.33 & 0.00109 \\ 632.33 & 0.00112 \\ 680.17 & 0.00113 \\ 728 & 0.00115 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\varepsilon_{ccCEB}(t_{var}, t_0)}{\varepsilon_{ccNBR}(t_{var})}$$

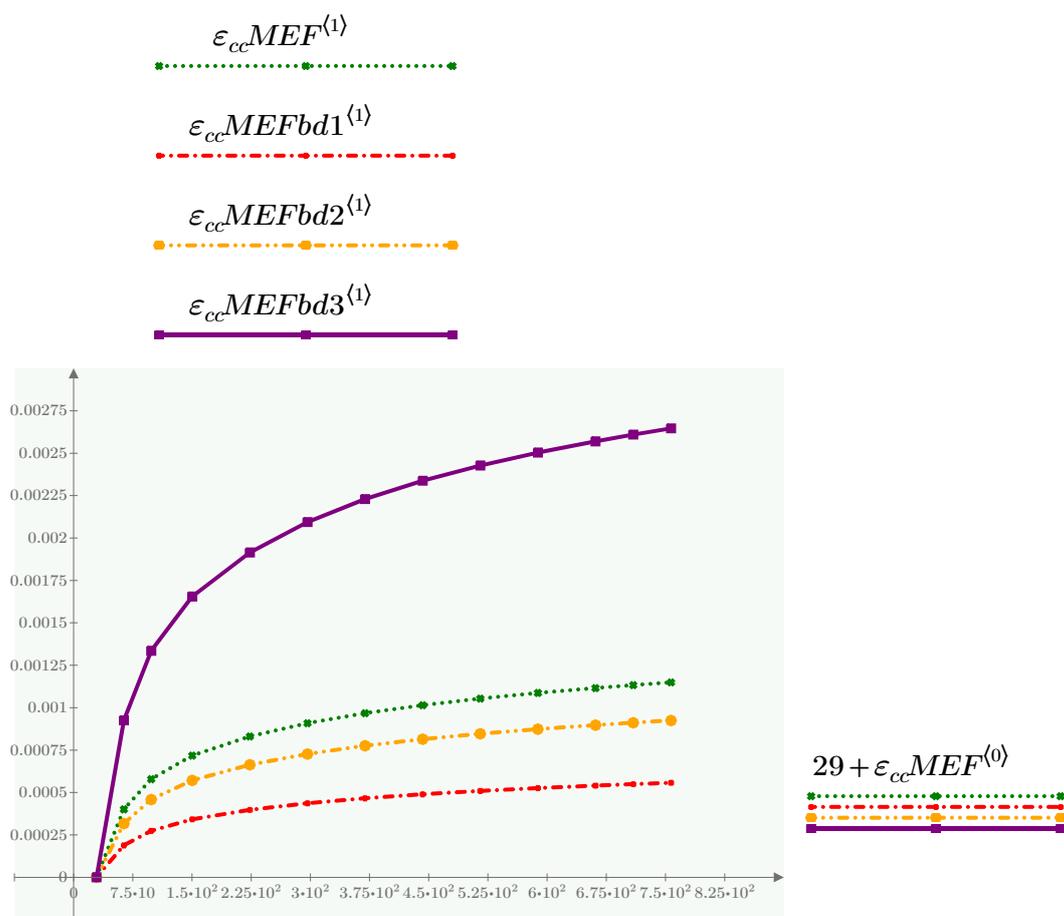
$$\varepsilon_{ccMEF}^{(1)}$$



$$t_{var}$$

$$t_{var}$$

$$29 + \varepsilon_{ccMEF}^{(0)}$$



4) Cálculo das Flechas

4.1) Flecha Imediata Devida ao Peso Próprio

$$E_{csCEB} := 0.85 \cdot E_{ci28CEB} = (2.696 \cdot 10^4) \text{ MPa}$$

$$f_{ippCEB} := \frac{5 \cdot pp \cdot L^4}{384 \cdot E_{csCEB} \cdot I} = 0.135 \text{ mm}$$

4.2) Momento de Fissuração

$$W_{cCEB} := \frac{I}{y_t} = (1.523 \cdot 10^5) \text{ mm}^3$$

$$M_{rCEB} := W_{cCEB} \cdot f_{ctCEB} = 0.381 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

4.3) Flecha Imediata Devida ao Carregamento

$$P_{concentrado} = 0 \text{ kN}$$

$$f_{iPcCEB} := \frac{1}{48} \cdot \frac{P_{concentrado} \cdot L^3}{EI_{equiv}} = 0 \text{ mm}$$

$$f_{ippCEB} = 0.135 \text{ mm}$$

Cargas concentradas nos terços do vão

$$P_{2CEB} := \begin{cases} P_{concentrado} > 0 \\ \quad \parallel \\ \quad 0 \text{ N} \\ \text{else} \\ \quad \parallel \\ \quad P \end{cases}$$

$$a = 0.457 \text{ m} \quad b_l = 0.914 \text{ m}$$

$$f_{iPCEB} := \frac{P_{2CEB} \cdot a}{24 \cdot EI_{equiv}} \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2) = 8.051 \text{ mm}$$

$$f_{iqPCEB} := f_{iq} + f_{iPcCEB} + f_{iPCEB} = 8.051 \text{ mm}$$

$$f_{iTCEB} := f_{iqPCEB} + f_{ippCEB} = 8.186 \text{ mm}$$

4.4) Flecha Diferida Total

ρ_m η

.15 10

.2 8

.3 6

.5 4

.75 3

1 2.5

1.5 2

$$\eta_{int} := \text{linterp}(\rho_m\%, \eta, \rho_{tm}\%) = 0.938$$

$$a_{CEB}(n_{CEB}) := \begin{cases} \text{if } M_{Sd} < M_{rCEB} \\ \quad \left\| (1 + \phi_{CEB}(n_{CEB}, t_0)) \cdot f_{iTCEB} \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| \left(\frac{H}{d} \right)^3 \cdot \eta_{int} \cdot (1 - 20 \cdot \rho_{cm}\%) \cdot f_{iTCEB} \right. \end{cases}$$

$$a_{CEB}(t_0) = 11.946 \text{ mm} \qquad a_{CEB}(t) = 11.946 \text{ mm}$$

$$f_T(t_0) = 8.124 \text{ mm} \qquad f_T(t) = 16.567 \text{ mm}$$

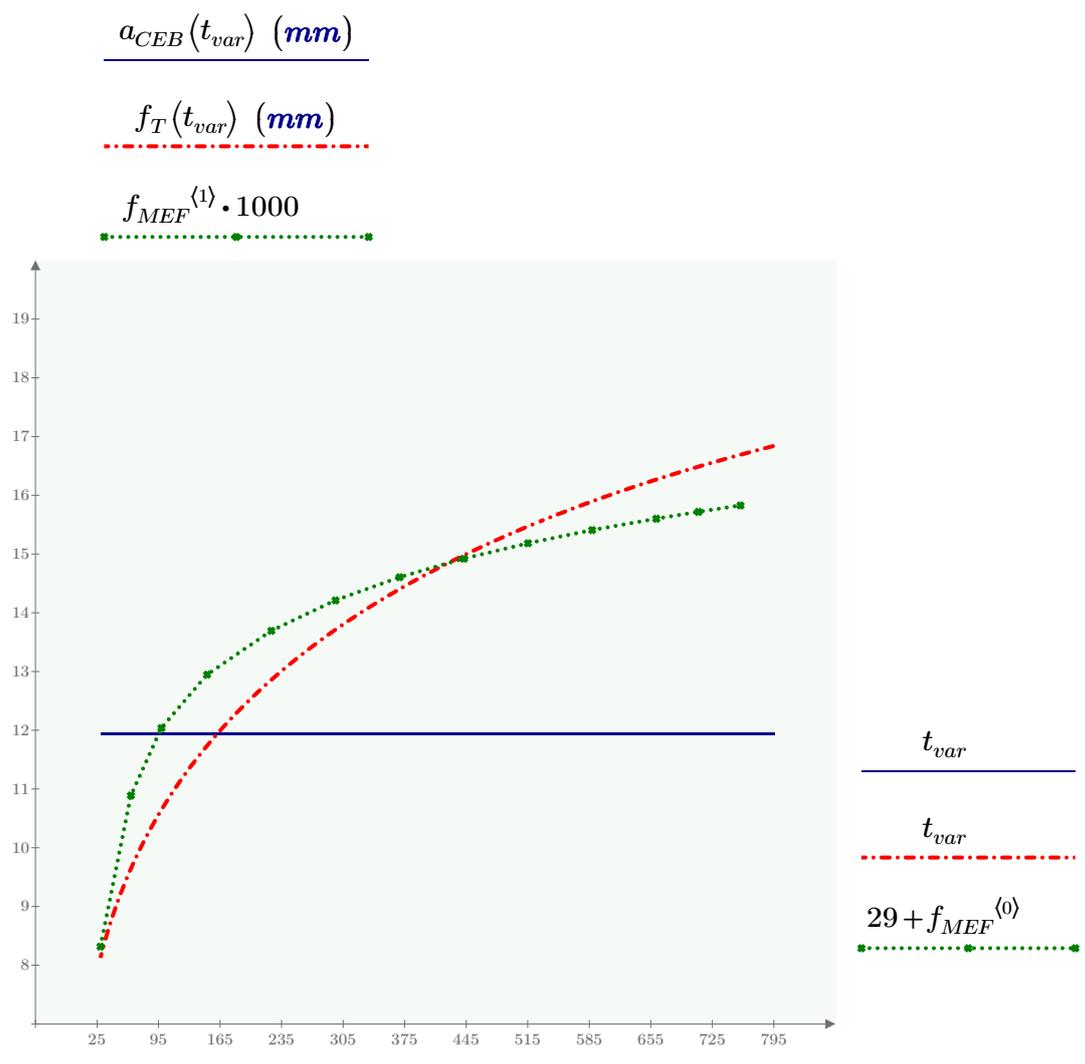
$$f_{MEF} := \text{READEXCEL}(\text{".\Tens-Def C4.xlsx"}, \text{"Defl-T!B2:C14"})$$

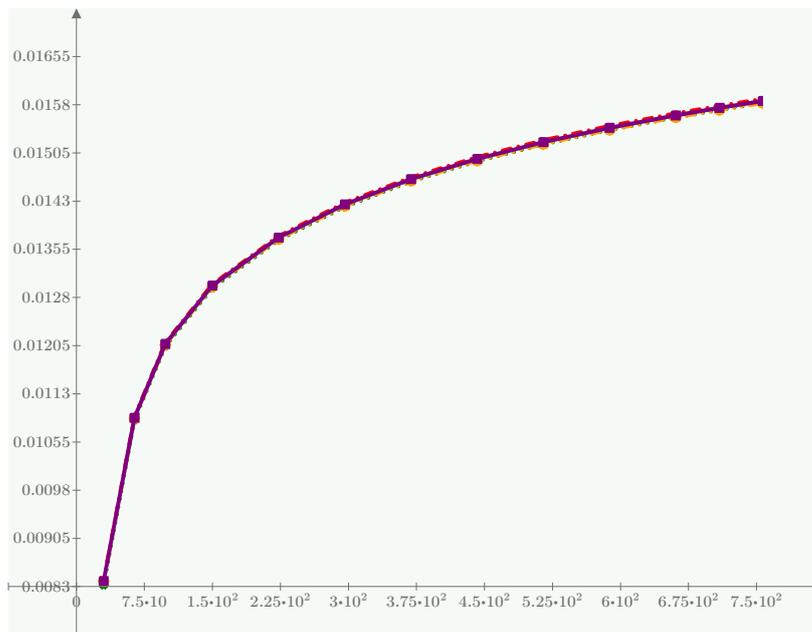
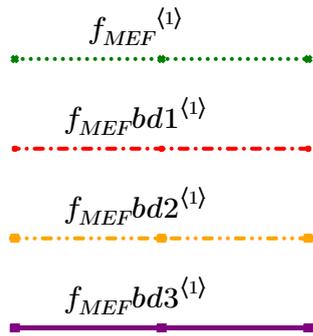
$$f_{MEF}bd1 := \text{READEXCEL}(\text{".\Tens-Def C4.xlsx"}, \text{"Defl-Tbd1!B2:C14"})$$

$$f_{MEF}bd2 := \text{READEXCEL}(\text{".\Tens-Def C4.xlsx"}, \text{"Defl-Tbd2!B2:C14"})$$

$$f_{MEF}bd3 := \text{READEXCEL}(\text{".\Tens-Def C4.xlsx"}, \text{"Defl-Tbd3!B2:C14"})$$

$$f_{MEF} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 486.33 & 0.015 \\ 559.33 & 0.015 \\ 632.33 & 0.016 \\ 680.17 & 0.016 \\ 728 & 0.016 \end{bmatrix}$$





$$dummy3 := \varepsilon_{ccCEB}(z, t_0)$$

$$dummy4 := \varepsilon_{ccNBR}(z)$$

$$dummy7 := \frac{\overline{a_{CEB}(z)}}{m}$$

$$dummy6 := \text{WRITEEXCEL}("EccNBR.C4.xls", dummy4)$$

$$dummy5 := \text{WRITEEXCEL}("EccCEB.C4.xls", dummy3)$$

$$dummy8 := \frac{\overline{f_T(z)}}{m}$$

$$dummy9 := \text{WRITEEXCEL}("fCEB.C4.xls", dummy7)$$

$$dummy10 := \text{WRITEEXCEL}("fNBR.C4.xls", dummy8)$$