

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANDRESSA RUSTICK

**FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO - PR  
2015

ANDRESSA RUSTICK

# **FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI**

Trabalho de conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso Superior de Licenciatura em Matemática (COMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Câmpus Toledo, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior

TOLEDO

2015

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado Funções Elípticas de Jacobi foi considerado **APROVADA** de acordo com a ata da banca examinadora N° 123 de 2015.

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

**Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior**

**Prof. Ms. Leandro Antunes**

**Prof. Ms. Adriano Gomes de Santana**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, que esteve me ajudando em todos os momentos, me abençoando com saúde, paz, sabedoria e principalmente me dando força para prosseguir nesta jornada, não apenas como universitária, mas em todas as etapas que passei na minha vida até o presente momento.

Aos meus pais, familiares e amigos que sempre estiveram me apoiando e me incentivando durante todos os anos de minha graduação.

Agradeço à intuição, administração, direção e aos mestres, que oportunizaram o conhecimento adquirido durante a minha formação. Ao Programa de Iniciação Científica -PIBID, que me oportunizou o conhecimento muito além da sala de aula com a participação em projetos e elaboração de artigos.

Quero agradecer em especial ao meu amigo e namorado Rodrigo Alves de Oliveira, pelo auxílio, apoio e incentivo durante a minha formação. Também quero prestar meus agradecimentos ao meu orientador Eleomar Cardoso Júnior, que sempre esteve me ajudando em todos os momentos, dedicando o seu tempo, sabedoria e comprometimento para a conclusão deste trabalho, sendo paciente, compreensivo e me dando forças para não desistir, muito obrigada!

Muito obrigada a todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação e para a conclusão deste trabalho, nada disso seria possível se vocês não estivessem presentes me apoiando e incentivando em todas as etapas.

## RESUMO

O presente trabalho relata as funções elípticas de Jacobi. Tais funções têm aplicabilidade na física e em estudos avançados de matemática. Neste trabalho, as funções elípticas são apresentadas na perspectiva do cálculo, evidenciando propriedades algébricas, de derivação e comportamento gráfico. Além disto, os conhecimentos estudados serão aplicados na obtenção de soluções periódicas para uma equação diferencial parcial - a equação de Schrödinger.

**Palavras-chave:** Funções Elípticas de Jacobi, Equação de Schrödinger.

## **ABSTRACT**

This paper reports the Jacobi elliptical functions. Such functions have applicability in physics and in advanced studies of math. In this paper, the elliptical functions are presented in a calculation perspective, pointing algebraic properties of derivation and graphical behavior. In addition, the matter studied will be used to obtain periodic solutions to a partial differential equation - the Schrödinger equation.

**Keywords:** Jacobi Elliptical Functions, Schrödinger Equation.

## LISTA DE FIGURAS

|            |  |    |
|------------|--|----|
| Figura 1:  | Comportamento da função $u(x)$ . . . . .   | 11 |
| Figura 2:  | Comportamento da função $\text{sen}(u)$ . . . . .                                | 13 |
| Figura 3:  | Comportamento da função $\text{cos}(u)$ . . . . .                                | 13 |
| Figura 4:  | Comportamento da função $\text{sen}(u)$ , com $u$ variando sobre a reta. . . .   | 19 |
| Figura 5:  | Comportamento da função $\text{cos}(u)$ , com $u$ variando sobre a reta. . . .   | 19 |
| Figura 6:  | Comportamento da função $K(k)$ com $k$ variando do intervalo de $(0, 1)$         | 22 |
| Figura 7:  | Comportamento da função $\text{sn}(u, 0.25)$ . . . . .                           | 23 |
| Figura 8:  | Comportamento da função $\text{cn}(u, 0.25)$ . . . . .                           | 23 |
| Figura 9:  | Comportamento da função $\text{dn}(u, 0.25)$ . . . . .                           | 24 |
| Figura 10: | Comportamento da função $\text{sn}(u, 0.5)$ . . . . .                            | 24 |
| Figura 11: | Comportamento da função $\text{cn}(u, 0.5)$ . . . . .                            | 24 |
| Figura 12: | Comportamento da função $\text{dn}(u, 0.5)$ . . . . .                            | 24 |
| Figura 13: | Comportamento da função $\text{sn}(u, 0.9)$ . . . . .                            | 25 |
| Figura 14: | Comportamento da função $\text{cn}(u, 0.9)$ . . . . .                            | 25 |
| Figura 15: | Comportamento da função $\text{dn}(u, 0.9)$ . . . . .                            | 25 |
| Figura 16: | Comportamento da função $\text{sn}(u)$ quando $u = 0$ . . . . .                  | 25 |
| Figura 17: | Comportamento da função $\text{sn}(u)$ quando $u = 1$ . . . . .                  | 25 |
| Figura 18: | Comportamento da função $\text{cn}(u)$ quando $u = 0$ . . . . .                  | 26 |
| Figura 19: | Comportamento da função $\text{cn}(u)$ quando $u = 1$ . . . . .                  | 26 |
| Figura 20: | Comportamento da função $\text{dn}(u)$ quando $u = 0$ . . . . .                  | 26 |
| Figura 21: | Comportamento da função $\text{dn}(u)$ quando $u = 1$ . . . . .                  | 26 |
| Figura 22: | Comportamento da função $\text{sn}(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . . | 37 |
| Figura 23: | Comportamento da função $\text{cn}(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . . | 37 |
| Figura 24: | Comportamento da função $\text{dn}(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. .   | 38 |

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Figura 25: | Comportamento da função $ns(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 38 |
| Figura 26: | Comportamento da função $nc(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 38 |
| Figura 27: | Comportamento da função $nd(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 38 |
| Figura 28: | Comportamento da função $sd(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 39 |
| Figura 29: | Comportamento da função $cs(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 39 |
| Figura 30: | Comportamento da função $sc(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 39 |
| Figura 31: | Comportamento da função $cd(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 39 |
| Figura 32: | Comportamento da função $dc(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 39 |
| Figura 33: | Comportamento da função $ds(u, 0.5)$ , com $u$ variando sobre a reta. . .               | 39 |
| Figura 34: | Campo vetorial determinado por (65). . . . .  | 52 |
| Figura 35: | Campo vetorial determinado por (65), onde $\varphi(0) = 1, 2$ e $\varphi'(0) = 0$ . . . | 53 |
| Figura 36: | Gráfico da função (65) no caso em que $\varphi(0) = 1, 2$ e $\varphi'(0) = 0$ . . .     | 53 |



## LISTA DE TABELAS

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Valores particulares para as funções elípticas de Jacobi. . . . . | 24 |
|---|---|----|

## SUMÁRIO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>9</b>  |
| <b>2</b> | <b>Funções Circulares</b>                                     | <b>11</b> |
| 2.1      | Derivadas das funções circulares . . . . .                    | 14        |
| 2.2      | Identities Associadas às Funções Circulares . . . . .         | 15        |
| 2.3      | Extensão da função seno . . . . .                             | 17        |
| <b>3</b> | <b>Funções Elípticas de Jacobi</b>                            | <b>21</b> |
| 3.1      | Relações envolvendo Funções Elípticas . . . . .               | 24        |
| 3.2      | Derivadas das Funções Elípticas de Jacobi . . . . .           | 28        |
| 3.3      | Expansão em Séries de Potências . . . . .                     | 29        |
| 3.4      | Fórmulas de Adição . . . . .                                  | 30        |
| 3.5      | Extensão Periódica de Funções Elípticas de Jacobi . . . . .   | 35        |
| 3.6      | Outras Funções Elípticas de Jacobi . . . . .                  | 38        |
| <b>4</b> | <b>Existência de ondas periódicas: Equação de Schrödinger</b> | <b>40</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .  | 40        |
| 4.2      | Equação de ondas periódicas . . . . .                         | 40        |
| <b>5</b> | <b>Considerações Finais</b>                                   | <b>50</b> |
|          | <b>Referências bibliográficas</b>                             | <b>51</b> |
|          | <b>Anexo A</b>  | <b>52</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho mostra brevemente as Funções Elípticas de Jacobi. Além da introdução, ele apresenta mais três capítulos. No segundo capítulo, são tratadas as funções circulares. O terceiro capítulo relata as Funções Elípticas de Jacobi e algumas de suas propriedades elementares. E, finalmente, no quarto capítulo, é vista uma aplicação destas funções associada à obtenção de uma solução para a Equação de Schrödinger.

É importante salientar que um dos objetivos deste trabalho é compreender as funções elípticas de Jacobi e suas propriedades, comparando-as com as funções circulares.

As Funções Elípticas foram definidas por Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851). Entretanto, outros pesquisadores apresentaram contribuições que culminaram no trabalho de Jacobi. Segundo (SILVA, 2013), em 1665, apareceram os primeiros relatos sobre integrais elípticas. Giulio Carlo Fagnano (1682 – 1766) provou as propriedades da retificação da curva lemniscata (símbolo do infinito) que pode ser dividida (utilizando-se de uma régua e de um compasso) em  $n$  partes iguais. A teoria desenvolvida por Fagnano foi de muita importância para o estudo das integrais elípticas. Este estudo motivou Leonard Euler (1707 – 1783) que obteve relações de adição e multiplicação para as funções elípticas.

Outro matemático a se interessar no estudo das funções elípticas foi Adrien Legendre (1752 – 1833). Segundo (PIEIDADE, 1875), Legendre foi o primeiro matemático a reduzir um função elíptica na forma

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{P(x)}} dx,$$

onde  $F(x)$  é uma função racional e  $P(x)$  caracteriza um polinômio de grau três ou quatro. Legendre também definiu as integrais elípticas de primeira, segunda e terceira ordem dadas, respectivamente, por

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (1)$$

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt \quad (2)$$

e

$$\Pi(x, \lambda, k) = \int_0^x \frac{dt}{(1-\lambda t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (3)$$

Em todas as situações acima, o parâmetro real  $k$  encontra-se fixado no intervalo aberto  $(0,1)$ .

Segundo (FILHO; VASCONCELOS, 1994), Neils Henrik Abel (1802 – 1829) foi o primeiro matemático a observar que as integrais elípticas podem ser invertidas em funções elípticas. Ele também reconheceu que, no caso complexo, tais funções são duplamente periódicas. Com a morte prematura de Abel, Jacobi deu continuidade a seus estudos, detalhando as integrais elípticas invertidas de primeira ordem e definindo a função  $K(k)$ , dada por

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi)}} = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Este estudo possibilitou a definição das funções senoidal, cnoidal e dnoidal que são conhecidas como funções elípticas de Jacobi.

As funções elípticas de Jacobi têm sido muito aplicadas em estudos avançados de física e de matemática. Apesar do grau de importância, estas funções não são estudadas nas disciplinas regulares dos cursos de licenciatura em matemática. Pelo aspecto de novidade, este trabalho enfatizará este tema.

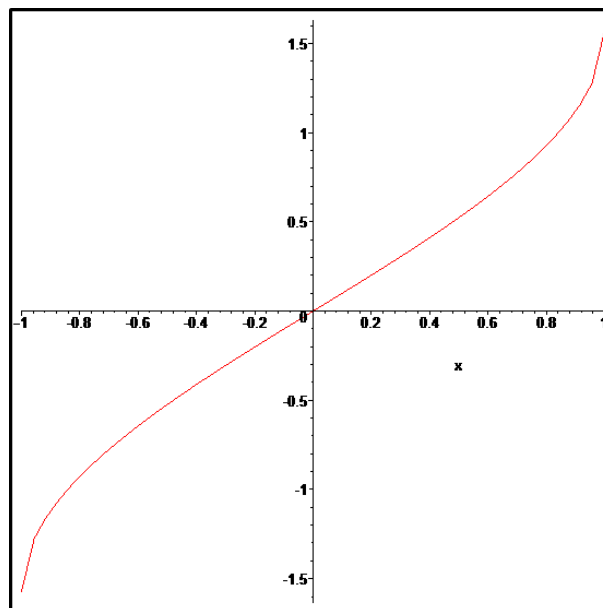
## 2 FUNÇÕES CIRCULARES

Com a finalidade de compreender as Funções Elípticas de Jacobi, estudamos inicialmente o comportamento das funções circulares. As funções circulares, conforme veremos à frente, caracterizam um tipo particular de Funções Elípticas de Jacobi.

Seja a função  $u(x)$  dada pela seguinte lei de formação:

$$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \forall x \in (-1, 1). \quad (4)$$

A função  $u(x)$  está bem definida no intervalo  $(-1, 1)$ . Com efeito, se  $t \in (-1, 1)$ , temos que  $1 - t^2 > 0$ . Ou seja,  $t^2 < 1$ , e  $\sqrt{1 - t^2} > 0$  é verificada. Logo, se  $t \in (-1, 1)$ , a expressão  $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$  é válida no conjunto dos números reais. Se  $x \in (-1, 1)$ , então, a integral (4) está bem definida. Com o auxílio do programa "Maple", construímos o gráfico da função  $u(x)$ .



**Figura 1:** Comportamento da função  $u(x)$

Observamos que a imagem da função está entre os pontos  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$ .

Além disso, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{\pi}{2} \quad (6)$$

A seguir, passamos a estender a função  $u$  no intervalo de  $(-1, 1)$  para o intervalo de  $[-1, 1]$ . Assim, interpretamos que  $u(-1) = -\frac{\pi}{2}$  e  $u(1) = \frac{\pi}{2}$ .

Verificamos que  $u(x)$  é estritamente crescente.

De fato,

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0; \forall x \in (-1, 1).$$

Segundo (LEITHOLD, 1994), como a função  $u(x)$  é estritamente crescente, temos que  $u(x)$  é invertível. Assim, existe  $x(u)$  a inversa de  $u(x)$ , onde

$$\begin{aligned} x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1, 1] \\ u &\mapsto x(u) \end{aligned}$$

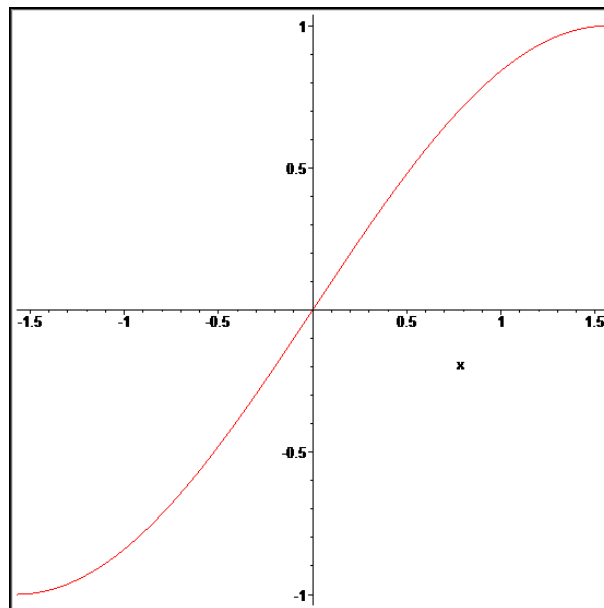
A função inversa de  $u(x)$  é denominada seno. Denotamos que  $x(u) = \text{sen}(u)$ .

Definimos a função cosseno em termos da função seno. Se  $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , entendemos que:

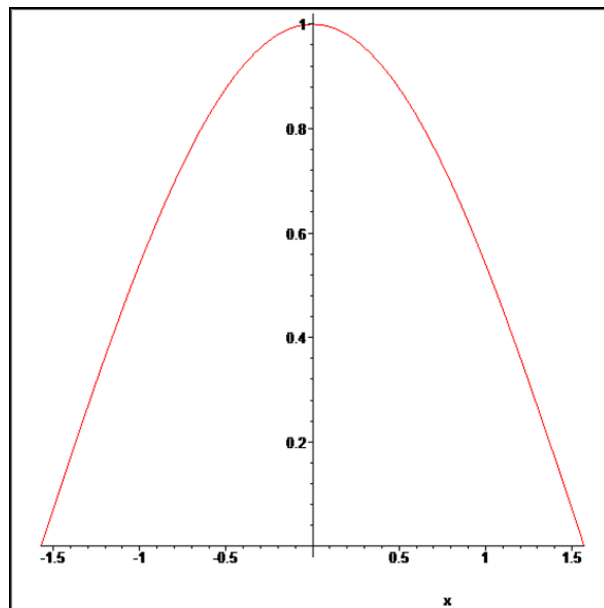
$$\cos(u) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(u)}. \quad (7)$$

Notemos que elevando ao quadrado em ambos os lados da igualdade (7), podemos determinar a validade da seguinte identidade trigonométrica

$$\text{sen}^2(u) + \cos^2(u) = 1 \quad (8)$$



**Figura 2:** Comportamento da função  $\text{sen}(u)$ .



**Figura 3:** Comportamento da função  $\cos(u)$ .

Vemos que a função  $\cos(u)$  é par e que a função  $\text{sen}(u)$  é ímpar.

Em seguida, estudaremos as funções seno e cosseno em alguns pontos especiais. Vejamos que se  $u = 0$ , então,  $x = 0$ . Temos que:

$$\text{sen}(0) = 0, \quad \cos(0) = 1,$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

## 2.1 DERIVADAS DAS FUNÇÕES CIRCULARES

Na sequência, estudaremos as derivadas das funções circulares. Seja  $x \in (-1, 1)$ . Como  $u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ , segundo (GUIDORIZZI, 2001), o teorema fundamental do cálculo garante que  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Mas,  $u(x)$  é invertível e sua inversa é denotada por:  $x(u) = \text{sen}(u)$ . Assim, pelo teorema da função inversa, obtemos que:

$$\frac{dx}{du} = \frac{d(\text{sen}(u))}{du}$$

Ou seja,

$$\frac{dx}{du} = \frac{d(\text{sen}(u))}{du} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\text{sen}^2(u)} = \text{cos}(u). \quad (9)$$

Logo, a derivada da função seno resulta a função cosseno.

Por outro lado, pela regra da cadeia,

$$\frac{d(\text{cos}(u))}{du} = \frac{d(\sqrt{1-\text{sen}^2(u)})}{du} = \frac{d}{du} \left[ (1-\text{sen}^2(u))^{\frac{1}{2}} \right] =$$

$$\frac{1}{2}(1-\text{sen}^2(u))^{-\frac{1}{2}} (-2) \text{sen}(u) \text{cos}(u) = -\frac{\text{sen}(u) \text{cos}(u)}{\sqrt{1-\text{sen}^2(u)}} = -\frac{\text{sen}(u) \text{cos}(u)}{\text{cos}(u)} = -\text{sen}(u). \quad (10)$$

Utilizando as propriedades acima, passamos a definir a expansão de seno e cosseno na forma de uma série de Taylor.

Seja  $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Notemos que se  $f(u) = \text{sen}(u)$ , então, expandindo  $\text{sen}(u)$  em uma série de Maclaurin,

$$\text{sen}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \frac{f^{(n)}(u)}{(n)!}.$$

Mas,

$$f(0) = \text{sen}(0), f'(0) = \text{cos}(0), f''(0) = -\text{sen}(0), f'''(0) = -\text{cos}(0), f^{(4)}(0) = \text{sen}(0). \quad (11)$$



A partir da quarta derivada o ciclo acima se repete indefinidamente, onde uma Série de Potência descreve a função em seu intervalo de convergência. Daí, (STEWART *et al.*, 2006):

$$\text{sen}(u) = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (12)$$

De forma análoga se deduz que:

$$\text{cos}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}, \forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (13)$$

Onde que as Séries são convergentes para todo  $u \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 IDENTIDADES ASSOCIADAS ÀS FUNÇÕES CIRCULARES

As funções seno e cosseno satisfazem determinadas fórmulas associadas à adição. Sejam  $u, v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , tais que  $u + v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Afirmamos a validade das seguintes fórmulas:

$$\text{sen}(u + v) = \text{sen}(u) \text{cos}(v) + \text{sen}(v) \text{cos}(u) \quad (14)$$

$$\text{cos}(u + v) = \text{cos}(u) \text{cos}(v) - \text{sen}(u) \text{sen}(v). \quad (15)$$

Vamos mostrar a validade da identidade (14). Para isso, introduziremos a variável  $z$  como sendo

$$z = \text{sen}(u) \text{cos}(v) + \text{sen}(v) \text{cos}(u).$$

Primeiramente, derivemos  $z$  com relação à variável  $u$ .

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial(\text{sen}(u) \text{cos}(v) + \text{sen}(v) \text{cos}(u))}{\partial u} = \text{cos}(u) \text{cos}(v) - \text{sen}(u) \text{sen}(v).$$

Em seguida, derivemos  $z$  com respeito à variável  $v$ .

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial(\text{sen}(u) \cos(v) + \text{sen}(v) \cos(u))}{\partial v} = -\text{sen}(u) \text{sen}(v) + \cos(u) \cos(v).$$

Analisando as derivadas de  $z$  em relação a  $u$  e  $v$ , podemos notar que são iguais.

Como  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}$ , a teoria das equações diferenciais parciais permite deduzir a existência de uma função  $F$ , tal que  $z = F(u + v)$ . Isto é,

$$F(u + v) = \text{sen}(u) \cos(v) + \text{sen}(v) \cos(u).$$

Façamos  $v = 0$ . Segue que

$$F(u) = F(u + 0) = \text{sen}(u) \cos(0) + \text{sen}(0) \cos(u) = \text{sen}(u)$$

e, por consequência, se trocarmos  $u$  por  $u + v$ , resulta que,

$$F(u + v) = \text{sen}(u + v).$$

Isso, finalmente, conclui a validade da identidade (14).

Agora, vamos mostrar a validade da relação de soma dada em (15). Consideremos a variável  $t$ , introduzida pela relação

$$t = \cos(u) \cos(v) - \text{sen}(u) \text{sen}(v).$$

Calculando a derivada de  $t$  com relação à variável  $u$ , deduzimos que

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial(\cos(u) \cos(v) - \text{sen}(u) \text{sen}(v))}{\partial u} = -\text{sen}(u) \cos(v) - \cos(u) \text{sen}(v).$$

Em seguida, derivando  $t$  com relação a  $v$ , estabelecemos que:

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial(\cos(u) \cos(v) - \text{sen}(u) \text{sen}(v))}{\partial v} = -\cos(u) \text{sen}(v) - \text{sen}(u) \cos(v).$$

Analisando as derivadas de  $t$  em relação a  $u$  e  $v$ , é possível perceber a

igualdade existente entre elas. Assim como na situação anterior, existe uma função  $G$  tal que  $t = G(u + v)$ .

Logo,

$$G(u + v) = \cos(u) \cos(v) - \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v).$$

Se  $v = 0$ , segue que

$$G(u) = G(u + 0) = \cos(u) \cos(0) - \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(0) = \cos(u).$$

Substituindo  $u$  por  $u + v$ , temos que  $G(u + v) = \cos(u + v)$ . Logo, a identidade (15) é verificada.

### 2.3 EXTENSÃO DA FUNÇÃO SENO

Conforme a construção apresentada, a função seno foi definida no intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Sua noção, entretanto, pode ser definida sobre toda a reta. Para isto, usaremos as propriedades de adição mostradas na seção anterior em (14) e (15) e assumiremos sua validade sobre toda a reta.

Considere a fórmula dada em (14). Se considerarmos que  $u = l \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $v = \frac{\pi}{2}$ , entendemos que

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen}\left(l + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(l) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(l), \quad (16)$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\left(l + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(l). \quad (17)$$

Aqui, a função seno tem seu comportamento compreendido no intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . Pois, se  $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , a definição de seno já foi explorada e se  $u \in \left[+\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , entendemos que

$$\operatorname{sen}(u) = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right), \quad (18)$$

é válida.

Assumindo a validade da identidade (17) sobre a reta determinamos, por exemplo, que

$$\cos(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1.$$

Agora, consideremos  $u = l \in [0, \pi]$  e  $v = \pi$ . Supondo a validade de (16) sobre a reta, determinamos que

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen}(l + \pi) = \operatorname{sen}(l)\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)\cos(l) = -\operatorname{sen}(l) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(l),$$

isso é,

$$\operatorname{sen}(l + \pi) = -\operatorname{sen}(l). \quad (19)$$

A função (19) pode ser reescrita como  $\operatorname{sen}(l) = -\operatorname{sen}(l + \pi)$ . Assim, determinamos como seno se comporta sobre o intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ .

Notemos também que

$$\cos(2\pi) = \cos(\pi)\cos(\pi) - \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(\pi) = (-1)(-1) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Finalmente, consideremos que  $u = l \in [0, 2\pi]$  e  $v = 2\pi$ . Determinamos que

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen}(l + 2\pi) = \operatorname{sen}(l)\cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi)\cos(l) = \operatorname{sen}(l) - \operatorname{sen}(\pi)\cos(l) = \operatorname{sen}(l).$$

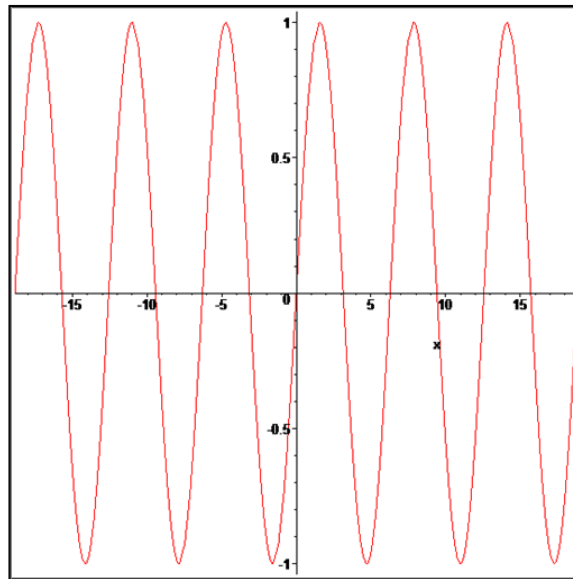
Logo,

$$\operatorname{sen}(l + 2\pi) = \operatorname{sen}(l) \quad (20)$$

é válida.

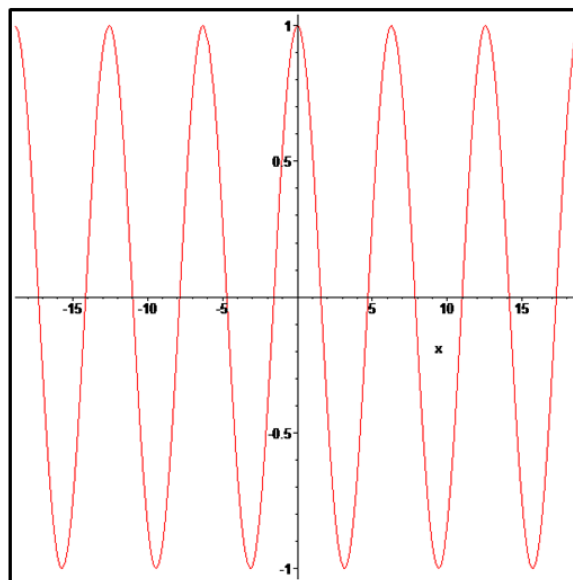
Para definir a função  $\operatorname{sen}(u)$  sobre a reta, basta repetir periodicamente o comportamento que esta função admite no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Na figura 4 é possível observar o comportamento da função  $\operatorname{sen}(u)$  no intervalo de  $[-6\pi, 6\pi]$ .

Para determinar a extensão da função  $\cos(u)$  sobre a reta, o procedimento



**Figura 4:** Comportamento da função  $\text{sen}(u)$ , com  $u$  variando sobre a reta.

é similar ao utilizado anteriormente para a caracterização da função  $\text{sen}(u)$ . Na figura 5 é possível observar o comportamento da função  $\text{cos}(u)$  variando de  $[-6\pi, 6\pi]$ ,



**Figura 5:** Comportamento da função  $\text{cos}(u)$ , com  $u$  variando sobre a reta.

As funções seno e cosseno, sobre a reta, são periódicas de período  $2\pi$ . As propriedades de derivação continuam verificadas sobre a reta. Ou seja,

$$(\text{sen})'(u) = \text{cos}(u)$$

e

$$(\cos)'(u) = -\text{sen}(u),$$

para todo  $u \in \mathbb{R}$ .

### 3 FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI

As Funções Elípticas de Jacobi foram introduzidas por Adrien Marie Legendre e aprimoradas por Jacobi. Sua construção é similar à construção apresentada para as funções circulares.

Seja  $k \in [0, 1)$  fixo.

Consideremos a Integral Elíptica de primeira ordem,

$$u(x) = u(x, k) = F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (21)$$

A função  $u(x)$  está vinculada ao parâmetro  $k$ .

Notemos que se  $t \in (-1, 1)$ , a expressão  $\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}$  é um número real positivo. Logo,  $u(x)$  está bem definido para  $x$ , variando sobre o intervalo  $[-1, 1]$ .

No caso em que  $x = 1$ , entendemos que:

$$u(1) = F(1, k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}} = K(k) \quad (22)$$

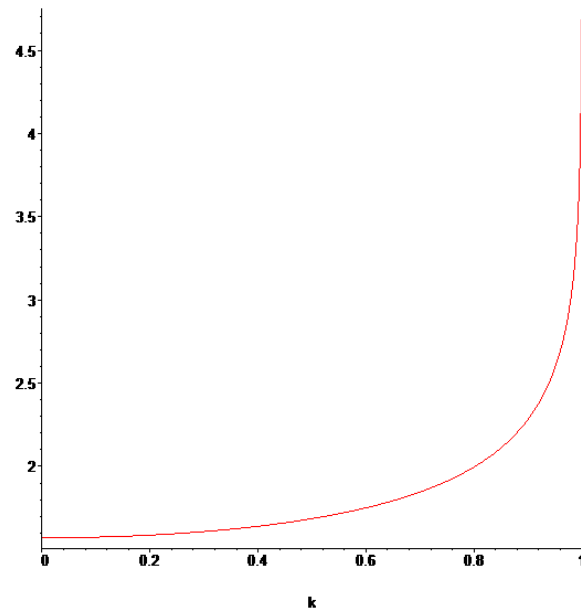
e  $K(k)$  define a integral elíptica de primeiro tipo completa. Vejamos na figura 6 abaixo, o comportamento gráfico da função  $K(k)$ , com  $k$  variando sobre o intervalo de  $(0, 1)$ .

Notemos que:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} K(k) = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} K(k) = \infty.$$



**Figura 6:** Comportamento da função  $K(k)$  com  $k$  variando do intervalo de  $(0, 1)$

Adicionalmente,

$$u(-1) = \int_0^{-1} \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}} = -K(k).$$

Como no capítulo anterior, notemos que se  $k \in [0, 1)$  é fixado, então,

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}} > 0, \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (23)$$

$u(x)$  é, portanto, uma função estritamente crescente e invertível sobre o intervalo  $[-1, 1]$ .

Vemos que o fato de  $u$  ser definido como:

$$\begin{aligned} u = u(., k) : [-1, 1] &\longrightarrow [-K(k), K(k)] \\ x &\mapsto u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}} \end{aligned}$$

implica que sua inversa é definida como

$$\begin{aligned} x = x(., k) : [-K(k), K(k)] &\longrightarrow [-1, 1] \\ u &\mapsto x(u) = x(u, k). \end{aligned}$$



Definimos, para cada  $k \in [0, 1)$ ,  $\text{sn}(u, k) = x(u, k)$ , onde  $\text{sn}$  é o símbolo que denota a função elíptica senoidal. No caso em que  $k = 0$ ,

$$\text{sn}(u, k) = \text{sn}(u, 0) = \text{sen}(u).$$

Seja  $k \in [0, 1)$ . Como  $\text{sn}(u, k) \in [-1, 1]$ ,  $\forall u \in [-K(k), K(k)]$ , podemos definir as funções cnoidal ( $\text{cn}$ ) e dnoidal ( $\text{dn}$ ) em termos de  $\text{sn}$ . Façamos:

$$\text{cn}(u, k) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u, k)} \quad (24)$$

e

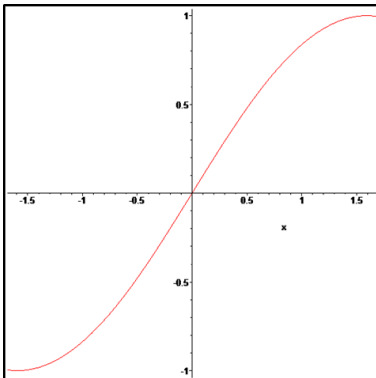
$$\text{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)}, \quad \forall u \in [-K(k), K(k)]. \quad (25)$$

Aqui, entendemos que se  $u \in [-K(k), K(k)]$ ,  $1 \geq \sqrt{1 - \text{sn}^2(u, k)^2} \geq 0$ . Ou seja, neste domínio,  $0 \leq \text{cn}(u, k) \leq 1$ . Além disso,  $1 \geq \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)^2} \geq \sqrt{1 - k^2}$ , assim, neste domínio,  $\sqrt{1 - k^2} \leq \text{dn}(u, k) \leq 1$ .

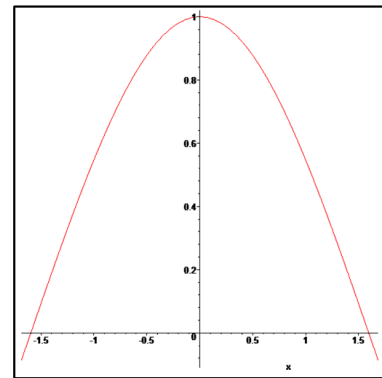
É importante salientar que, no caso em que  $k = 0$ , temos:

$$\text{cn}(u, 0) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u, 0)} = \sqrt{1 - \text{sen}^2(u)} = \cos(u).$$

A seguir, observamos as figuras 7-15, onde são apresentadas o comportamento de algumas funções elípticas para valores de  $k$  ( $k = 0.25$ ,  $k = 0.5$ ,  $k = 0.9$ ). Notemos um comportamento similar entre as mesmas funções, a distinguir os domínios.

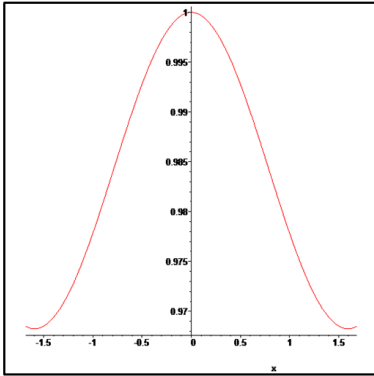


**Figura 7:** Comportamento da função  $\text{sn}(u, 0.25)$ .

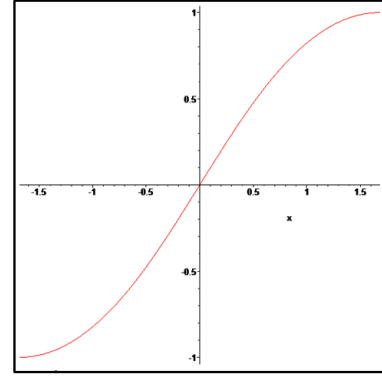


**Figura 8:** Comportamento da função  $\text{cn}(u, 0.25)$ .

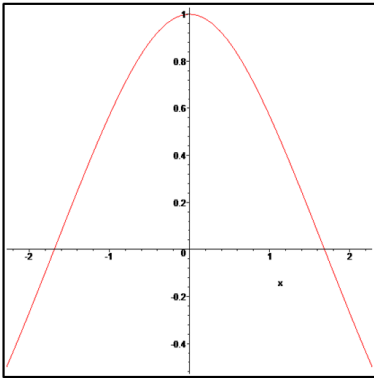
Finalmente, é importante salientar que a função senoidal é ímpar. Já as



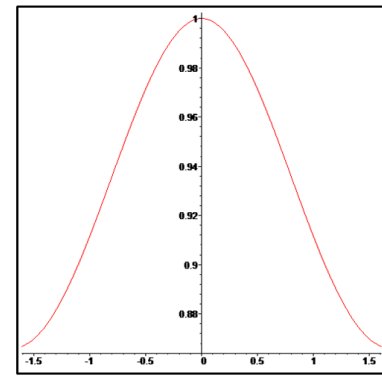
**Figura 9:** Comportamento da função  $\text{dn}(u, 0.25)$ .



**Figura 10:** Comportamento da função  $\text{sn}(u, 0.5)$ .



**Figura 11:** Comportamento da função  $\text{cn}(u, 0.5)$ .



**Figura 12:** Comportamento da função  $\text{dn}(u, 0.5)$ .

funções cnoidal e denoidal são pares. Quando não for preciso identificar o parâmetro  $k$ , as funções são representadas da forma  $\text{sn}(u)$ ,  $\text{cn}(u)$  e  $\text{dn}(u)$ , em vez de  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{cn}(u, k)$  e  $\text{dn}(u, k)$ .

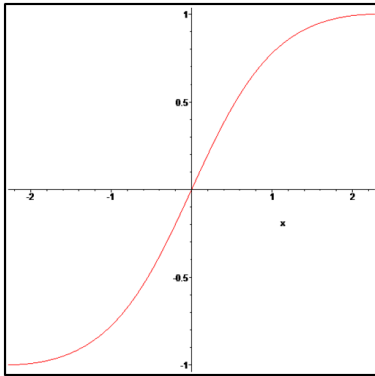
### 3.1 RELAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES ELÍPTICAS

As funções elípticas de Jacobi podem apresentar alguns valores padrões no intervalo de  $k \in [0, 1)$ , considerando que tais funções sejam definidas em determinados valores de  $u$ . Considerando  $u = 0$ ,  $u = K(k)$ , e  $u = -K(k)$ , estabelecemos a seguinte tabela:

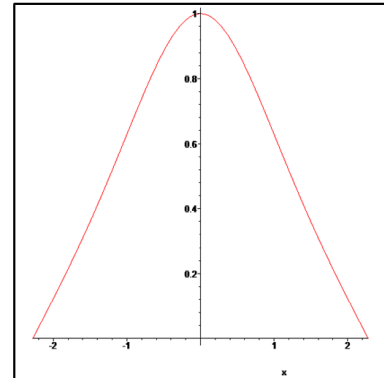
| $u$     | $\text{sn}(u, k)$ | $\text{cn}(u, k)$ | $\text{dn}(u, k)$     |
|---------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| 0       | 0                 | 1                 | 1                     |
| $K(k)$  | 1                 | 0                 | $k' = \sqrt{1 - k^2}$ |
| $-K(k)$ | -1                | 0                 | $k' = \sqrt{1 - k^2}$ |

**Tabela 1:** Valores particulares para as funções elípticas de Jacobi.

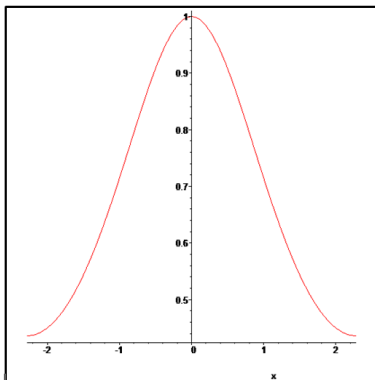
As figura 16-21 mostram o comportamento de cada função elíptica de Ja-



**Figura 13:** Comportamento da função  $\text{sn}(u, 0.9)$ .

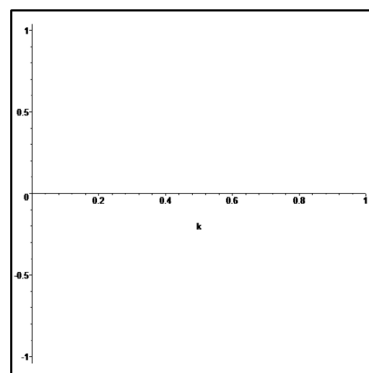


**Figura 14:** Comportamento da função  $\text{cn}(u, 0.9)$ .

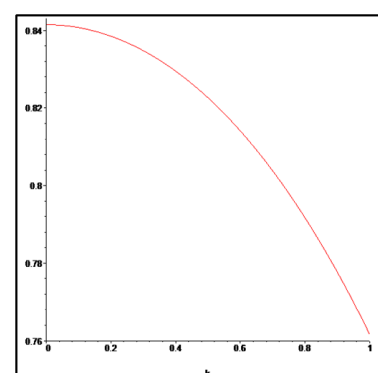


**Figura 15:** Comportamento da função  $\text{dn}(u, 0.9)$ .

cobi com  $k$  variando no intervalo  $(0, 1)$  e  $u$  fixo em pontos de  $u = 0$  e  $u = 1$ .



**Figura 16:** Comportamento da função  $\text{sn}(u)$  quando  $u = 0$ .

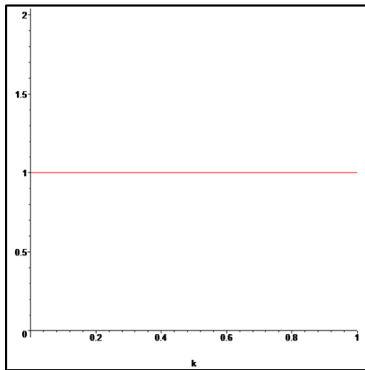


**Figura 17:** Comportamento da função  $\text{sn}(u)$  quando  $u = 1$ .

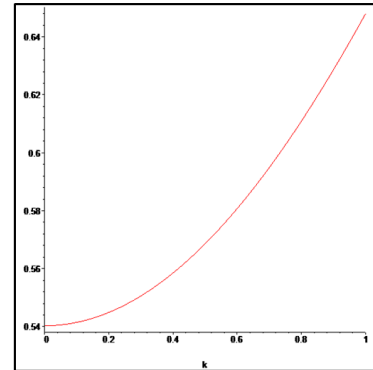
Se  $k \in [0, 1)$ ,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  denota o módulo complementar de  $k$ . Vemos que

$$k^2 + (k')^2 = k^2 + 1 - k^2 = 1.$$

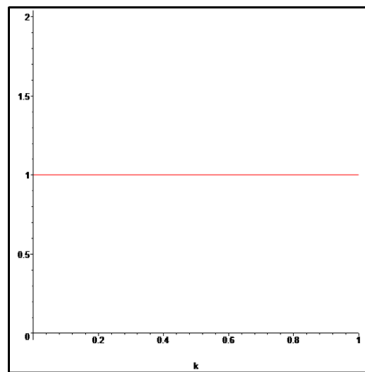
Estudando as Funções Elípticas de Jacobi, podemos determinar identida-



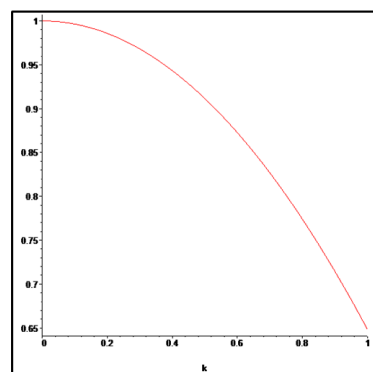
**Figura 18:** Comportamento da função  $\text{cn}(u)$  quando  $u = 0$ .



**Figura 19:** Comportamento da função  $\text{cn}(u)$  quando  $u = 1$ .



**Figura 20:** Comportamento da função  $\text{dn}(u)$  quando  $u = 0$ .



**Figura 21:** Comportamento da função  $\text{dn}(u)$  quando  $u = 1$ .

des, que se assemelham com as Identidades Trigonômicas. Vejamos as seguintes proposições:

**Proposição 1.**  $\text{sn}^2(u) + \text{cn}^2(u) = 1$ .

*Demonstração.* Pela definição (24), temos:

$$\text{cn}(u) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u)}$$

Elevando ambos os lados,

$$(\text{cn}(u))^2 = \left(\sqrt{1 - \text{sn}^2(u)}\right)^2$$

$$\text{cn}^2(u) = 1 - \text{sn}^2(u).$$

Somando ambos os lados por  $\text{sn}^2(u)$ , temos:

$$\text{sn}^2(u) + \text{cn}^2(u) = 1.$$



**Proposição 2.**  $\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2(u) = 1$ .

*Demonstração.* Pela relação (25), temos:

$$\operatorname{dn}(u) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u)}.$$

Elevando ambos os lados,

$$(\operatorname{dn}(u))^2 = \left( \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u)} \right)^2$$

$$\operatorname{dn}^2(u) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u).$$

Somando ambos os lados por  $k^2 \operatorname{sn}^2(u)$ , temos:

$$\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2(u) = 1.$$

■

**Proposição 3.**  $\operatorname{dn}^2(u) = k^2 \operatorname{cn}^2(u) + k'^2$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 2, temos:

$$\operatorname{dn}^2(u) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u),$$

$$k'^2 = 1 - k^2$$

e

$$\operatorname{cn}^2(u) = 1 - \operatorname{sn}^2(u).$$

Realizando substituições adequadas deduzimos que:

$$k^2 \operatorname{cn}^2(u) + k'^2 = k^2 \operatorname{cn}^2(u) + 1 - k^2 = k^2(1 - \operatorname{sn}^2(u)) + 1 - k^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) = \operatorname{dn}^2(u).$$

■

**Proposição 4.**  $\operatorname{cn}^2(u) + k'^2 \operatorname{sn}^2(u) = \operatorname{dn}^2(u)$ .

*Demonstração.* Pelas Proposições 1 e 2, temos:

$$\operatorname{cn}^2(u) + k'^2 \operatorname{sn}^2(u) = 1 - \operatorname{sn}^2(u) + (1 - k^2) \operatorname{sn}^2(u) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) = \operatorname{dn}^2(u)$$

.

■

## 3.2 DERIVADAS DAS FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI

As derivadas das funções elípticas de Jacobi são definidas a partir da função (21), com  $k \in [0, 1)$  fixado. É possível estabelecer a derivação das funções  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$  e  $\text{dn}$  com respeito a variável  $u$ .

**Proposição 5.**  $\frac{d}{du} \text{sn}(u) = \text{cn}(u) \text{dn}(u)$

*Demonstração.* Considerando a função (21), temos que:  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}\sqrt{1-x^2}}$ . Por outro lado, devido a invertibilidade envolvida, temos:  $\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}(\text{sn}(u))$ .

Agora, usando a inversa da função,  $\left(\frac{dx}{du}\right)^{-1} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2\text{sn}^2(u)}$ . Pelas relações (24) e (25), podemos concluir:

$$\frac{d}{du}(\text{sn}(u)) = \frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-\text{sn}^2(u)}\sqrt{1-k^2\text{sn}^2(u)} = \text{cn}(u) \text{dn}(u).$$

■

**Proposição 6.**  $\frac{d}{du} \text{cn}(u) = -\text{sn}(u) \text{dn}(u)$ .

*Demonstração.* Considerando a relação (24), temos:

$$\frac{d}{du}(\text{cn}(u)) = \frac{d}{du}(\sqrt{1-\text{sn}^2(u)}) = \frac{d}{du}[(1-\text{sn}^2(u))^{\frac{1}{2}}].$$

Utilizando a regra da cadeia apresentada em (LEITHOLD, 1994), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(\text{cn}(u)) &= \frac{1}{2}(1-\text{sn}^2(u))^{-\frac{1}{2}}(-2\text{cn}(u)\text{dn}(u)\text{sn}(u)) = -(1-\text{sn}^2(u))^{-\frac{1}{2}}(\text{cn}(u)\text{dn}(u)\text{sn}(u)) \\ &= -\frac{\text{cn}(u)\text{dn}(u)\text{sn}(u)}{\sqrt{1-\text{sn}^2(u)}} = -\frac{\text{cn}(u)\text{dn}(u)\text{sn}(u)}{\text{cn}(u)} = -\text{sn}(u)\text{dn}(u). \end{aligned}$$

■

**Proposição 7.**  $\frac{d}{du} \text{dn}(u) = -k^2 \text{sn}(u) \text{cn}(u)$ .

*Demonstração.* Consideremos a função (25), temos:

$$\frac{d}{du}(\text{dn}(u)) = \frac{d}{du}\sqrt{1-k^2\text{sn}^2(u)} = \frac{d}{du}[(1-k^2\text{sn}^2(u))^{\frac{1}{2}}].$$

Utilizando a regra da cadeia dada em (LEITHOLD, 1994), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}(\operatorname{dn}(u)) &= \frac{1}{2}(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u))^{-\frac{1}{2}}(-2k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(u)) \\
&= -\frac{k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u))^{\frac{1}{2}}} \\
&= -\frac{k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(u)}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u)}} \\
&= -\frac{k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(u)}{\operatorname{dn}(u)} = -k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u).
\end{aligned}$$

■

### 3.3 EXPANSÃO EM SÉRIES DE POTÊNCIAS

A seguir, será realizado um estudo sobre a expansão em série da função  $\operatorname{sn}(u)$ . Lembremos que:

$$\frac{d}{du}(\operatorname{sn}(u)) = \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u),$$

$$\frac{d^2}{du^2}(\operatorname{sn}(u)) = -\operatorname{dn}(u)^2 \operatorname{sn}(u) - k^2 \operatorname{cn}(u)^2 \operatorname{sn}(u),$$

$$\frac{d^3}{du^3}(\operatorname{sn}(u)) = 4k^2 \operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}(u)^2 \operatorname{cn}(u) - \operatorname{dn}(u)^3 \operatorname{cn}(u) - k^2 \operatorname{cn}(u)^3 \operatorname{dn}(u)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^4}{du^4}(\operatorname{sn}(u)) &= -4k^4 \operatorname{cn}(u)^2 \operatorname{sn}(u)^3 + 14k^2 \operatorname{dn}(u)^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u)^2 \\
&\quad - 4k^2 \operatorname{dn}(u)^2 \operatorname{sn}(u)^3 + \operatorname{dn}(u)^4 \operatorname{sn}(u) + k^4 \operatorname{cn}(u)^4 \operatorname{sn}(u).
\end{aligned}$$

Após realizar os cálculos das derivadas de  $\operatorname{sn}(u)$ , notamos que há uma diferença brutal com relação ao que se vê com a função *seno*. Não vemos o ciclo: a quinta derivada da função  $\operatorname{sn}$  não coincide necessariamente com a sua primeira derivada. Vemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^5}{du^5} \operatorname{sn}(u) = & 16k^4 \operatorname{cn}(u) \operatorname{sn}(u)^4 \operatorname{dn}(u) - 44k^4 \operatorname{cn}(u)^3 \operatorname{sn}(u)^2 \operatorname{dn}(u) + 14k^2 \operatorname{dn}(u)^3 \operatorname{cn}(u)^3 \\ & - 44k^2 \operatorname{dn}(u)^3 \operatorname{sn}(u)^2 \operatorname{cn}(u) + k^4 \operatorname{dn}(u)^5 \operatorname{cn}(u) + \operatorname{cn}(u)^5 \operatorname{dn}(u). \end{aligned}$$

Na tabela 1, temos que  $\operatorname{sn}(0) = 0$ ,  $\operatorname{cn}(0) = 1$  e  $\operatorname{dn}(0) = 1$ . Assim, como nas funções circulares, conseguimos escrever estas funções elípticas na forma de uma série de Maclaurin, que nos leva a interpretar que:

$$\operatorname{sn}(u) = u - \frac{(1+k^2)u^3}{3!} + \frac{(1+14k^2+k^4)u^5}{5!} + \dots \quad (26)$$

$$\operatorname{cn}(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{(1+4k^2)u^4}{4!} - \dots \quad (27)$$

$$\operatorname{dn}(u) = 1 - \frac{k^2 u^2}{2!} + \frac{(4+k^2)u^4}{4!} - \dots \quad (28)$$

### 3.4 FÓRMULAS DE ADIÇÃO

Sejam  $u, v \in [-K(k), K(k)]$ , tais que  $u + v \in [-K(k), K(k)]$ . Em seguida provaremos as fórmulas da adição para as funções elípticas de Jacobi.

**Proposição 8.** *i)*

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)}$$

*ii)*

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v) - \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)}$$

*iii)*

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) - k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(v)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)}.$$

*Demonstração.* Agora, vamos realizar a prova da proposição (i)



Para a demonstração da proposição (i), consideremos,  $\Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)$ , e também a função auxiliar:

$$z = \frac{\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{\Delta}. \quad (29)$$

Derivemos  $z$  com relação ao parâmetro  $u$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{1}{\Delta^2} [\Delta \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v) + (\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v))(2k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}^2(v)) \\ &\quad - \Delta(k^2 \operatorname{cn}^2(u) \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) + \operatorname{sn}(v) \operatorname{dn}^2(u) \operatorname{sn}(u)) \\ &\quad + (\operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}(v))(2k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}^2(v))]. \end{aligned}$$

Assim, multiplicando ambos os lados por  $\Delta^2$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} \Delta^2 &= \Delta \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v) + (\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v))(2k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}^2(v)) \\ &\quad - \Delta(k^2 \operatorname{cn}^2(u) \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) + \operatorname{sn}(v) \operatorname{dn}^2(u) \operatorname{sn}(u)) \\ &\quad + (\operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}(v))(2k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}^2(v)) \\ &= \Delta[\operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v) - (\operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v))(\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{cn}^2(u))] \\ &\quad + (2k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{sn}^2(v))(\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)) \\ &= \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v)(\Delta + 2k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)) \\ &\quad - \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v)[\Delta(\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{cn}^2(u)) - 2k^2 \operatorname{cn}^2(u) \operatorname{dn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)] \\ &= \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v)(\Delta + k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v) + k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)) \\ &\quad - \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v)[\Delta(\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{cn}^2(u)) - k^2 \operatorname{cn}^2(u) \operatorname{dn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v) \\ &\quad - k^2 \operatorname{cn}^2(u) \operatorname{dn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)]. \end{aligned}$$

Como,  $\Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)$ , então,  $1 = \Delta + k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)$ . Substituindo esta igualdade na fórmula imediatamente acima, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} \Delta^2 &= \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v)(1 + k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)) \\ &\quad - \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v)[\operatorname{dn}^2(u)(\Delta - k^2 \operatorname{cn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)) + k^2 \operatorname{cn}^2(u)(\Delta - \operatorname{sn}^2(v) \operatorname{dn}^2(u))]. \end{aligned}$$

Além disso, passamos a compreender que:

$$\begin{aligned}\Delta - k^2 \operatorname{sn}^2(v) \operatorname{cn}^2(u) &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v) - k^2 \operatorname{sn}^2(v) \operatorname{cn}^2(u) \\ &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(v)(\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u)).\end{aligned}\quad (30)$$

Pela proposição 1,  $\operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(u) = 1$ . Adicionalmente, segue da proposição 2, que  $1 - k^2 \operatorname{sn}^2(v) = \operatorname{dn}^2(v)$  e, portanto de (30),  $\Delta - k^2 \operatorname{sn}^2(v) \operatorname{cn}^2(u) = \operatorname{dn}^2(v)$ .

Assim, podemos compreender que,

$$\begin{aligned}\Delta - \operatorname{sn}^2(v) \operatorname{dn}^2(u) &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v) - \operatorname{sn}^2(v) \operatorname{dn}^2(u) \\ &= 1 - \operatorname{sn}^2(v)(k^2 \operatorname{sn}^2(u) + \operatorname{dn}^2(u)) = \operatorname{cn}^2(v),\end{aligned}\quad (31)$$

uma vez que aplicamos novamente as Proposições (1) e (2).

Após realizar os cálculos, usando as relações (30) e (31), determinamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} \Delta^2 &= \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v)(1 + k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(v)) - \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v)[\operatorname{dn}^2(u) \operatorname{dn}^2(v) \\ &\quad + k^2 \operatorname{cn}^2(u) \operatorname{cn}^2(v)].\end{aligned}$$

Ao estudar a função  $\frac{\partial z}{\partial u}$ , podemos perceber uma simetria existente entre os termos que dependem de  $u$  e  $v$ . Com cálculos análogos, determinamos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} \Delta^2 &= \operatorname{cn}(v) \operatorname{dn}(v) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)(1 + k^2 \operatorname{sn}^2(v) \operatorname{sn}^2(u)) - \operatorname{sn}(v) \operatorname{sn}(u)[\operatorname{dn}^2(v) \operatorname{dn}^2(u) \\ &\quad + k^2 \operatorname{cn}^2(v) \operatorname{cn}^2(u)].\end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}$ , a teoria das equações diferenciais garante que  $z = f(u+v)$  e, por consequência da fórmula (29). Fazemos  $v = 0$ , obtemos

$$f(u) = \frac{\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(0) \operatorname{dn}(0) + \operatorname{sn}(0) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(0)} = \frac{\operatorname{sn}(u)}{1} = \operatorname{sn}(u).$$

Logo,

$$f(u+v) = \operatorname{sn}(u+v).$$

Agora, vamos realizar a prova da proposição (ii).

Pela definição (1) e pelo item (i), passamos a compreender que

$$\begin{aligned}\operatorname{cn}^2(u+v) &= 1 - \operatorname{sn}^2(u+v) \\ &= 1 - \frac{(\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u))^2}{\Delta^2}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\operatorname{cn}^2(u+v) = \frac{\Delta^2 - (\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u))^2}{\Delta^2}.$$

No entanto, por (31), percebemos que pela simetria associada,

$$\Delta^2 = (\operatorname{sn}^2(v)\operatorname{dn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(v))(\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{dn}^2(v) + \operatorname{cn}^2(u)).$$

Isso implica que:

$$\begin{aligned}\operatorname{cn}^2(v+u) &= \frac{1}{\Delta^2}[(\operatorname{cn}^2(u) + \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{dn}^2(v))(\operatorname{cn}^2(v) + \operatorname{sn}^2(v)\operatorname{dn}^2(u)) \\ &\quad - (\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u))^2].\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\operatorname{cn}^2(u+v)\Delta^2 &= \operatorname{cn}^2(u)\operatorname{cn}^2(v) + \operatorname{cn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)\operatorname{dn}^2(u) + \operatorname{cn}^2(v)\operatorname{sn}^2(u)\operatorname{dn}^2(v) \\ &\quad + \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)\operatorname{dn}^2(u)\operatorname{dn}^2(v) - \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{cn}^2(v)\operatorname{dn}^2(v) \\ &\quad - 2\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v) - \operatorname{sn}^2(v)\operatorname{cn}^2(u)\operatorname{dn}^2(u) \\ &= \operatorname{cn}^2(u)\operatorname{cn}^2(v) + \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)\operatorname{dn}^2(u)\operatorname{dn}^2(v) \\ &\quad - 2\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v).\end{aligned}$$

Essa informação nos leva a determinar que

$$\operatorname{cn}^2(u+v) = \frac{(\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v) - \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v))^2}{\Delta^2}.$$

Em seguida, extraindo a raiz em ambos os lados da igualdade, estabelecemos que:

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v) - \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)}{\Delta}.$$

Isso conclui a demonstração do item (ii).

Agora, realizaremos a prova do item (iii) da proposição. Para realizar a prova, utilizaremos a fórmula (2) e o item (i). Notemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^2(u+v) &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u+v) \\ &= 1 - k^2 \frac{(\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u))^2}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Simplificamos a expressão como:

$$\operatorname{dn}^2(u+v) = \frac{\Delta^2 - k^2(\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v) + \operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u))^2}{\Delta^2}$$

Como no caso anterior, em vista de (30), façamos:

$$\Delta^2 = (\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{cn}^2(v))(\operatorname{dn}^2(v) + k^2 \operatorname{sn}^2(v) \operatorname{cn}^2(u)).$$

Isso nos leva a estabelecer que:

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}^2(u+v)\Delta^2 &= \operatorname{dn}^2(u)\operatorname{dn}^2(v) + k^2 \operatorname{sn}^2(v)\operatorname{cn}^2(u)\operatorname{dn}^2(u) + k^2 \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{cn}^2(v)\operatorname{dn}^2(v) \\ &\quad + k^4 \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{cn}^2(v)\operatorname{sn}^2(v)\operatorname{cn}^2(u) - k^2 \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{cn}^2(v)\operatorname{dn}^2(v) \\ &\quad - k^2 \operatorname{sn}^2(v)\operatorname{cn}^2(u)\operatorname{dn}^2(u) - 2k^2 \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v) \\ &= \operatorname{dn}^2(u)\operatorname{dn}^2(v) + k^4 \operatorname{sn}^2(u)\operatorname{sn}^2(v)\operatorname{cn}^2(u)\operatorname{cn}^2(v) \\ &\quad - 2k^2 \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v). \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\operatorname{dn}^2(u+v) = \frac{(\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v) - k^2 \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v))^2}{\Delta^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade acima, estabelecemos que:

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) - k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v)}{\Delta},$$

o que prova ao item (iii), desta proposição. ■

Agora se considerarmos as fórmulas da adição com  $k = 0$  em (29). Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u+v, 0) &= \frac{\operatorname{sn}(u, 0) \operatorname{cn}(v, 0) \operatorname{dn}(v, 0) + \operatorname{sn}(v, 0) \operatorname{cn}(u, 0) \operatorname{dn}(u, 0)}{1 - 0} \\ &= \operatorname{sn}(u, 0) \operatorname{cn}(v, 0) \operatorname{dn}(v, 0) + \operatorname{sn}(v, 0) \operatorname{cn}(u, 0) \operatorname{dn}(u, 0). \end{aligned}$$

Lembrando que  $\operatorname{sn}(u, 0) = \operatorname{sen}(u)$ ,  $\operatorname{sn}(v, 0) = \operatorname{sen}(v)$ ,  $\operatorname{cn}(u, 0) = \operatorname{cos}(u)$ ,  $\operatorname{cn}(v, 0) = \operatorname{cos}(v)$ ,  $\operatorname{dn}(u, 0) = \sqrt{1 - 0^2 \operatorname{sn}^2(u, 0)} = 1$  e  $\operatorname{dn}(v, 0) = 1$ , observamos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(u+v) &= \operatorname{sn}(u, 0) \operatorname{cn}(v, 0) \operatorname{dn}(v, 0) + \operatorname{sn}(v, 0) \operatorname{cn}(u, 0) \operatorname{dn}(u, 0) \\ &= \operatorname{sen}(u) \operatorname{cos}(v) + \operatorname{sen}(v) \operatorname{cos}(u), \end{aligned}$$

o que prova a fórmula de soma da função seno.

Agora, de forma similar, notemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn}(u, 0) \operatorname{cn}(v, 0) - \operatorname{sn}(u, 0) \operatorname{sn}(v, 0) \operatorname{dn}(u, 0) \operatorname{dn}(v, 0)}{1 - 0} \\ &= \operatorname{cos}(u) \operatorname{cos}(v) - \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v) \cdot 1 \\ &= \operatorname{cos}(u) \operatorname{cos}(v) - \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v). \end{aligned}$$

Para finalizar,  $\operatorname{dn}(u+v, 0) = 1$ , o que é evidente.

### 3.5 EXTENSÃO PERIÓDICA DE FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI

Na seção anterior, apresentamos fórmulas associadas às Funções Elípticas de Jacobi. Agora, associaremos a validade destas fórmulas sobre a reta, de modo a conseguirmos estender periodicamente as funções elípticas de Jacobi. Seja  $k \in [0, 1)$  um parâmetro fixado.

Seja  $u \in [-K(k), K(k)]$  e  $v = K(k)$ . De modo a facilitar os cálculos, escrevemos  $K$  em vez de  $K(k)$ .

Usando o fato de que  $\operatorname{sn}(K) = 1$ ,  $\operatorname{cn}(K) = 0$  e  $\operatorname{dn}(K) = k' = \sqrt{1-k^2}$ , estabelecemos que

$$\operatorname{sn}(u + K) = \frac{\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(K) \operatorname{dn}(K) + \operatorname{sn}(K) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(K)} = \frac{\operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{\operatorname{dn}^2(u)} = \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, \quad (32)$$

$$\operatorname{cn}(u + K) = \frac{\operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(K) - \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(K) \operatorname{sn}(K) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(K)} = -\frac{k' \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u)}{\operatorname{dn}^2(u)} = -\frac{k' \operatorname{sn}(u)}{\operatorname{dn}(u)} \quad (33)$$

e

$$\operatorname{dn}(u + K) = \frac{\operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(K) - k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{sn}(K) \operatorname{cn}(K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(K)} = \frac{k' \operatorname{dn}(u)}{\operatorname{dn}^2(u)} = \frac{k'}{\operatorname{dn}(u)}. \quad (34)$$

Entendemos que as fórmulas acima nos levam a definir as funções  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$  sobre o intervalo  $[K, 2K]$ .

Além disto,

$$\operatorname{sn}(K + K) = \frac{\operatorname{sn}(K) \operatorname{cn}(K) \operatorname{dn}(K) + \operatorname{sn}(K) \operatorname{cn}(K) \operatorname{dn}(K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K) \operatorname{sn}^2(K)} = \frac{0}{1 - k^2} = 0,$$

$$\operatorname{cn}(K + K) = \frac{\operatorname{cn}(K) \operatorname{cn}(K) - \operatorname{sn}(K) \operatorname{dn}(K) \operatorname{sn}(K) \operatorname{dn}(K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K) \operatorname{sn}^2(K)} = -\frac{k'k'}{1 - k^2} = -\frac{1 - k^2}{1 - k^2} = -1$$

e

$$\operatorname{dn}(K + K) = \frac{\operatorname{dn}(K) \operatorname{dn}(K) - k^2 \operatorname{sn}(K) \operatorname{cn}(K) \operatorname{sn}(K) \operatorname{cn}(K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K) \operatorname{sn}^2(K)} = \frac{k'k'}{1 - k^2} = \frac{1 - k^2}{1 - k^2} = 1.$$

Portanto,

$$\operatorname{sn}(2K) = 0, \quad \operatorname{cn}(2K) = -1, \quad \operatorname{dn}(2K) = 1. \quad (35)$$

Façamos um procedimento análogo ao visto em (32)-(35), com  $v = 2K$ . Notemos que:

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = \frac{\operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(2K) \operatorname{dn}(2K) + \operatorname{sn}(2K) \operatorname{cn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(2K)} = -\frac{\operatorname{sn}(u)}{1} = -\operatorname{sn}(u), \quad (36)$$

$$\operatorname{cn}(u + 2K) = \frac{\operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(2K) - \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(2K) \operatorname{sn}(2K) \operatorname{dn}(u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(2K)} = -\frac{\operatorname{cn}(u)}{1} = -\operatorname{cn}(u) \quad (37)$$

e

$$\operatorname{dn}(u + 2K) = \frac{\operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(2K) - k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{cn}(u) \operatorname{sn}(2K) \operatorname{cn}(2K)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u) \operatorname{sn}^2(2K)} = \frac{\operatorname{dn}(u)}{1} = \operatorname{dn}(u). \quad (38)$$

Estas informações são suficientes para definir  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$  sobre o intervalo  $[2K(k), 4K(k)]$ . Mais do que isto, notemos que

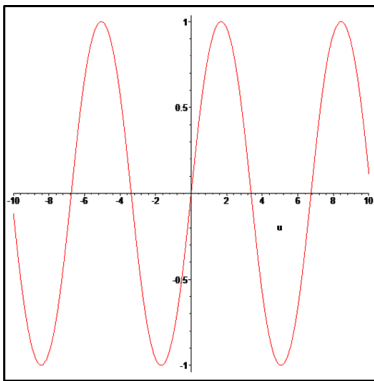
$$\operatorname{sn}(4K) = \operatorname{sn}(2K + 2K) = -\operatorname{sn}(2K) = 0 = \operatorname{sn}(0) \quad (39)$$

e

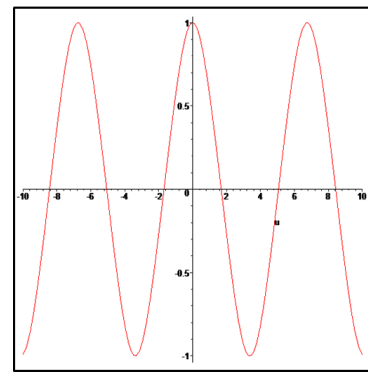
$$\operatorname{cn}(4K) = \operatorname{cn}(2K + 2K) = -\operatorname{cn}(2K) = -(-1) = 1 = \operatorname{cn}(0). \quad (40)$$

Estendemos  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{sn}$  periodicamente sobre a reta, de forma que estas funções tenham período  $4K$ . Já a função  $\operatorname{dn}$ , pelo mesmo procedimento, terá período  $2K$ , quando for estendida sobre a reta.

As propriedades referentes às derivadas das funções elípticas permanecem válidas no caso em que consideramos a extensão periódica das mesmas.



**Figura 22:** Comportamento da função  $\operatorname{sn}(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.



**Figura 23:** Comportamento da função  $\operatorname{cn}(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.

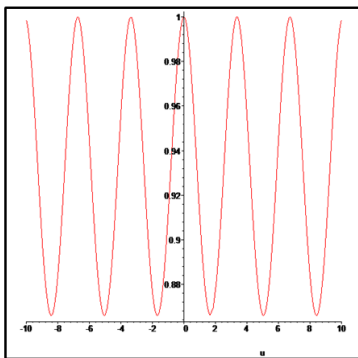
É importante salientar que as funções elípticas de Jacobi também são definidas no contexto de funções complexas, o que não é o foco deste trabalho e não apresentamos esta outra situação. Para detalhes, ver (BYRD; FRIEDMAN, 1971) e (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972).

## 3.6 OUTRAS FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI

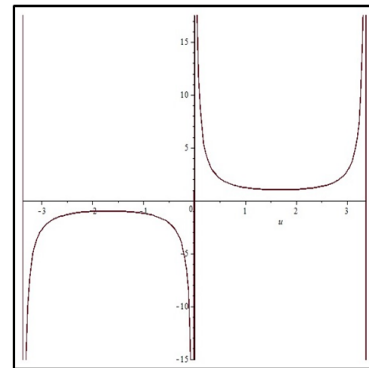
Além das funções elípticas  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$  e  $\text{dn}$ , são definidas outras funções elípticas em termos destas três. Segue abaixo, a definição de nove outras funções elípticas de Jacobi:

$$\begin{aligned} \text{ns}(u) &= \frac{1}{\text{sn}(u)} & \text{sd}(u) &= \frac{\text{sn}(u)}{\text{dn}(u)} & \text{sc}(u) &= \frac{\text{sn}(u)}{\text{cn}(u)} \\ \text{nc}(u) &= \frac{1}{\text{cn}(u)} & \text{cs}(u) &= \frac{\text{cn}(u)}{\text{sn}(u)} & \text{cd}(u) &= \frac{\text{cn}(u)}{\text{dn}(u)} \\ \text{nd}(u) &= \frac{1}{\text{dn}(u)} & \text{ds}(u) &= \frac{\text{dn}(u)}{\text{sn}(u)} & \text{dc}(u) &= \frac{\text{dn}(u)}{\text{cn}(u)} \end{aligned} \quad (41)$$

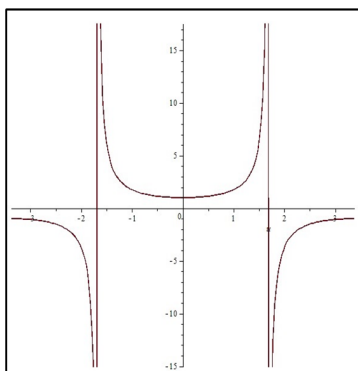
A seguir, apresentaremos as representação gráfica de cada função elíptica. Considerando um intervalo de  $u$  variando de  $[-10, 10]$  com  $K$  fixado em 0.5.



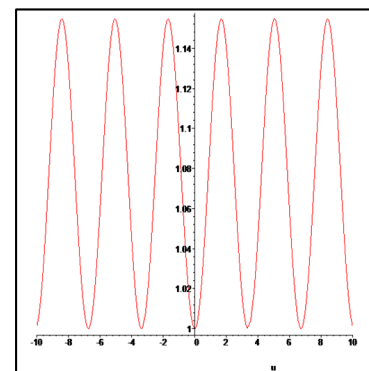
**Figura 24:** Comportamento da função  $\text{dn}(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.



**Figura 25:** Comportamento da função  $\text{ns}(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.

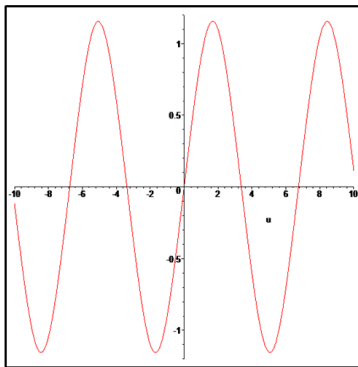


**Figura 26:** Comportamento da função  $\text{nc}(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.

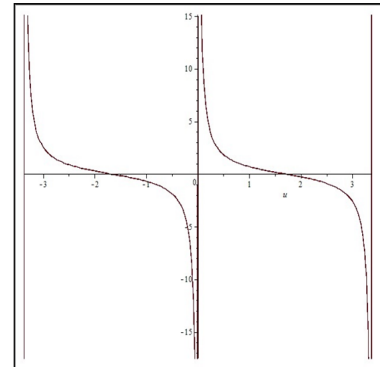


**Figura 27:** Comportamento da função  $\text{nd}(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.

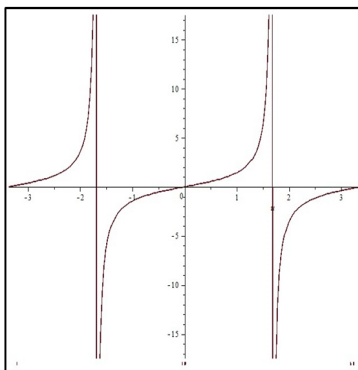




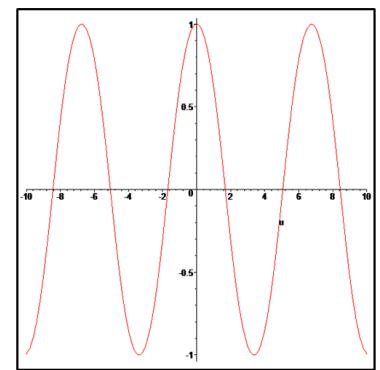
**Figura 28:** Comportamento da função  $sd(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.



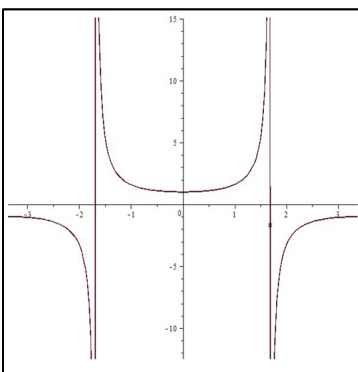
**Figura 29:** Comportamento da função  $cs(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.



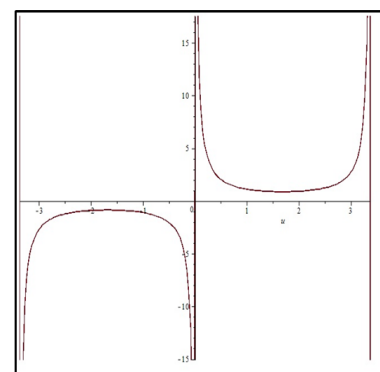
**Figura 30:** Comportamento da função  $sc(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.



**Figura 31:** Comportamento da função  $cd(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.



**Figura 32:** Comportamento da função  $dc(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.



**Figura 33:** Comportamento da função  $ds(u, 0.5)$ , com  $u$  variando sobre a reta.

## 4 EXISTÊNCIA DE ONDAS PERIÓDICAS: EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

### 4.1 INTRODUÇÃO

No século XVIII, segundo (BOYCE; DIPRIMA, 2012), a equação da onda era um dos principais problemas a serem pesquisados no âmbito da física e da matemática. O matemático D'Alembert foi o primeiro a estudar a equação em 1746, o que por sua vez, despertou o interesse de outros cientistas como Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) e Lagrange (1759) em aperfeiçoar a matemática conhecida.

O matemático Erwin Schrödinger (1887 – 1961), publicou em 1926 a dedução de sua equação: a equação de Schrödinger,

$$iu_t + u_{xx} + G(u) = 0. \quad (42)$$

onde  $G$  é uma função conveniente.

A equação de Schrödinger tem a aplicabilidade na física e na química, uma vez que é usada para descrever situações da mecânica quântica. Vale salientar que o foco deste trabalho não é aprofundar o estudo da equação de Schrödinger. Vamos determinar uma solução para a versão cúbica desta equação, usando as informações tratadas nos capítulos anteriores.

### 4.2 EQUAÇÃO DE ONDAS PERIÓDICAS

Uma solução da equação de Schrödinger é uma função equivalente a deduzir uma função  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , de tal modo que  $u$  satisfaça identicamente à expressão (42).

Consideremos que  $V = V(x, t)$  seja uma função. A equação

$$iu_t(x, t) + u_{xx}(x, t) + V(x, t)u(x, t) = 0, \quad (43)$$

é uma equação que atende a proposta (42)

No caso particular em que  $V(x, t) = |u(x, t)|^2$ , a equação (43) é interpretada como a Equação de Schrödinger Polinomial Cúbica.

$$iu_t(x, t) + u_{xx}(x, t) + |u(x, t)|^2 u(x, t) = 0. \quad (44)$$

A equação (44) descreve um modelo relacionado a pulsos eletromagnéticos presentes em um cabo de fibra óptica. Uma possível solução para a equação é encontrada na forma de *onda estacionária*, ou seja, apresentada como  $u(x, t) = e^{iwt}\varphi(x)$ , onde  $w$  caracteriza-se como uma frequência da onda e o termo  $\varphi$  é uma função real.

Vamos determinar um método de resolução. Suponhamos que

$$u(x, t) = e^{iwt}\varphi(x)$$

solucione a equação de (44). Agora, derivando a função  $u(x, t)$  em relação a  $t$ , temos:  $u_t(x, t) = iwe^{iwt}\varphi(x)$ . Derivando duas vezes  $u(x, t)$  em relação a  $x$ , apresentamos:  $u_{xx}(x, t) = e^{iwt}\varphi''(x)$ . Utilizando da fórmula de Euler para os números complexos, temos:

$$e^{iwt} = \cos(wt) + i\text{sen}(wt).$$

Vale lembrar que o módulo de um número complexo  $z$  é definido como

$$|z| = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}.$$

Desta maneira,

$$|e^{iwt}| = |\cos(wt) + i \text{sen}(wt)| = \sqrt{\cos^2(wt) + \text{sen}^2(wt)} = 1.$$

Na equação (44), substituamos  $u(x, t)$  por  $e^{iwt}\varphi(x)$ . Resulta em

$$i[iwe^{iwt}\varphi(x)] + e^{iwt}\varphi''(x) + |e^{iwt}\varphi(x)|^2 u(x, t) = 0,$$

ou seja,

$$-we^{iwt}\varphi(x) + e^{iwt}\varphi''(x) + [\sqrt{(\cos^2(wt) + \text{sen}^2(wt))}]^2\varphi(x)^2e^{iwt}\varphi(x) = 0.$$

Determinamos que

$$-we^{iwt}\varphi(x) + e^{iwt}\varphi''(x) + \varphi^2(x)e^{iwt}\varphi(x) = 0.$$

Manipulando as expressões, podemos colocar o fator  $e^{iwt}$  em evidência. Resulta na seguinte expressão

$$e^{iwt}(-w\varphi(x) + \varphi''(x) + \varphi^3(x)) = 0,$$

o que estabelece a seguinte equação diferencial ordinária:

$$-w\varphi(x) + \varphi''(x) + \varphi^3(x) = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por  $(-1)$ , chegamos em

$$-\varphi''(x) + w\varphi(x) - \varphi^3(x) = 0. \quad (45)$$

Na equação (45), nos deparamos como uma equação diferencial de segunda ordem, apresentada na forma,

$$\frac{d^2[\varphi(x)]}{dx^2} = f\left(x, \varphi, \frac{d\varphi(x)}{dx}\right). \quad (46)$$

O estudo do campo vetorial determinado por (45) sugere a existência de soluções periódicas (ver anexo A). No que sugere, buscaremos explicitamente soluções dnoidais para a referida equação.

Observando a equação (45), multipliquemos ambos os lados da mesma por  $\varphi'$ , e obtemos que:

$$-\varphi''(x)\varphi'(x) + w\varphi(x)\varphi'(x) - \varphi^3(x)\varphi'(x) = 0 \cdot \varphi'(x) = 0. \quad (47)$$

Vale destacar que a equação diferencial acima é homogênea.

Para encontrar uma solução particular da equação (47), calcularemos a

integral desta identidade, sobre o intervalo de  $[a, x]$ . Segue que

$$-\int_a^x \varphi'' \varphi' ds + \int_a^x w \varphi \varphi'' ds - \int_a^x \varphi^3 \varphi' ds = 0, \quad (48)$$

onde

$$\varphi'' = \frac{d^2 \varphi}{ds^2}$$

e

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Vemos que:  $\frac{1}{2} \frac{d}{ds} [(\varphi')^2] = \varphi' \varphi''$ ,  $\frac{1}{2} \frac{d}{ds} [\varphi^2] = \varphi \varphi'$  e  $\frac{1}{4} \frac{d}{ds} [\varphi^4] = \varphi^3 \varphi'$ .

Estas informações em (48), nos levam a determinar que:

$$-\frac{1}{2} \left[ \int_a^x \frac{d\varphi'^2}{ds} \right] + \frac{w}{2} \left[ \int_a^x \frac{d\varphi^2}{ds} \right] - \frac{1}{4} \left[ \int_a^x \frac{d\varphi^4}{ds} \right] = 0,$$

ou seja,

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d\varphi'^2}{ds} + \frac{w}{2} \frac{d\varphi^2}{ds} - \frac{1}{4} \frac{d\varphi^4}{ds} \right] \Big|_a^x = 0.$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, (LEITHOLD, 1994), obtemos:

$$\left[ -\frac{1}{2} \varphi'^2(x) + \frac{1}{2} \varphi'^2(a) + \frac{w}{2} \varphi^2(x) - \frac{w}{2} \varphi^2(a) - \frac{1}{4} \varphi^4(x) + \frac{1}{4} \varphi^4(a) \right] = 0,$$

Portanto, podemos reinterpretar nossa equação original como:

$$\left[ -\frac{1}{2} [\varphi(x)]^2 + \frac{w}{2} \varphi^2(x) - \frac{1}{4} \varphi^4(x) + B \right] = 0, \quad (49)$$

onde

$$B = \frac{1}{2} \varphi'^2(a) - \frac{w}{2} \varphi^2(a) + \frac{1}{4} \varphi^4(a)$$

é caracterizado como a soma de constantes.

Passamos a resolver a equação (49) como

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = -\frac{w}{2} \varphi^2 + \frac{1}{4} \varphi^4 - B,$$

isto é,

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = w\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^4 + 2B. \quad (50)$$

Vamos tentar deduzir uma função  $\varphi$  que satisfaça a equação (50). Para isto, assumiremos algumas informações como verdadeiras. Uma delas é que

$$w\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^4 + 2B \geq 0.$$

Aplicando a raiz quadrada em ambos os lados em (50), obtemos:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{w\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^4 + 2B} = \sqrt{\frac{2w\varphi^2 - \varphi^4 + 4B}{2}}. \quad (51)$$

Constatamos que

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sqrt{2w\varphi^2 - \varphi^4 + 4B}}{\sqrt{2}},$$

é uma equação separável. Assim, manipulando esta identidade, obtemos que

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2w\varphi^2 - \varphi^4 + 4B}} = \frac{dx}{\sqrt{2}}. \quad (52)$$

Aplicamos a primitiva em ambos os lados, na expressão (52). Resulta que

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2w\varphi^2 - \varphi^4 + 4B}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int 1dx.$$

Vamos, inicialmente, trabalhar com a integral

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2w\varphi^2 - \varphi^4 + 4B}}.$$

Em seguida, iremos determinar esta integral por meio de funções elípticas. Para isto, continuaremos a assumir que  $2w\varphi^2 - \varphi^4 + 4B$  tenha um comportamento adequado.

Estamos interpretando que existem constantes reais  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , em (49) de tal forma que:

$$(\varphi')^2 = \frac{1}{2}[-\varphi^4 + 2w\varphi^2 + 4B] = \frac{1}{2}(\eta_1^2 - \varphi^2)(\varphi^2 - \eta_2^2). \quad (53)$$

Aqui,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $-\eta_1$  e  $-\eta_2$  são zeros da função polinomial

$$F_\varphi(t) = -t^4 + 2wt^2 + 4B.$$

Sem perda de generalidade, façamos  $0 < \eta_2 < \eta_1$ . Vemos que

$$\begin{aligned} (\eta_1^2 - \varphi^2)(\varphi^2 - \eta_2^2) &= \eta_1^2\varphi^2 - \eta_1^2\eta_2^2 - \varphi^4 + \varphi^2\eta_2^2, \\ &= -\varphi^4 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)\varphi^2 - \eta_1^2\eta_2^2, \end{aligned} \quad (54)$$

e, conseqüentemente, em vista (53) e (54),

$$\begin{cases} 2w = \eta_1^2 + \eta_2^2 \\ 4B = -\eta_1^2\eta_2^2 \end{cases}$$

Em seguida, passamos a definir algumas variáveis que serão úteis nesta abordagem. Façamos  $\alpha = \frac{\varphi}{\eta_1}$  e  $k^2 = \frac{(\eta_1^2 - \eta_2^2)}{\eta_1^2}$ . Substituindo os valores introduzidos na equação (53), resulta em

$$(\alpha')^2\eta_1^2 = \frac{1}{2}(\eta_1^2 - \alpha^2\eta_1^2)(\alpha^2\eta_1^2 - \eta_2^2).$$

Agora,

$$\begin{aligned} (\alpha')^2 &= \frac{1}{2\eta_1^2} [(\eta_1^2 - \alpha^2\eta_1^2)(\alpha^2\eta_1^2 - \eta_2^2)] \\ &= \frac{1}{2\eta_1^2} \left[ \eta_1^2(1 - \alpha^2)\eta_1^2 \left( \alpha^2 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} \right) \right] \\ &= \frac{\eta_1^2}{2} \left[ (1 - \alpha^2) \left( \alpha^2 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Em outros termos, temos

$$\begin{aligned} (\alpha')^2 &= \frac{\eta_1^2}{2} \left[ (1 - \alpha^2) \left( \alpha^2 - \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2} + \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2} - \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} \right) \right] \\ &= \frac{\eta_1^2}{2} \left[ (1 - \alpha^2) \left( \alpha^2 - 1 + \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2} \right) \right] \\ &= \frac{\eta_1^2}{2} [(1 - \alpha^2)(\alpha^2 - 1 + k^2)]. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$(\alpha')^2 = \frac{\eta_1^2}{2} [(1 - \alpha^2)(\alpha^2 - 1 + k^2)]. \quad (55)$$

Em seguida definimos uma variável  $\psi$  de tal forma que  $\varphi(0) = 0$ . E, exigimos que  $\varphi$  satisfaça a seguinte relação

$$\alpha^2 = 1 - k^2 \text{sen}^2(\psi). \quad (56)$$

A função (56) é derivável, de modo que, implicitamente,

$$2\alpha\alpha' = -2k^2 \text{sen}(\psi) \cos(\psi)\psi'.$$

Isolando  $\alpha'$ , obtemos a seguinte igualdade

$$\alpha' = \frac{-2k^2 \text{sen}(\psi) \cos(\psi)}{2\alpha} \psi'.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados na expressão imediatamente acima, deduzimos que

$$(\alpha')^2 = \frac{4k^4 \text{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi)}{4\alpha^2} (\psi')^2.$$

Substituindo  $\alpha^2$  pela expressão dada em (56), nos leva a deduzirmos, que

$$(\alpha')^2 = \frac{k^4 \text{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi)}{1 - k^2 \text{sen}^2(\psi)} (\psi')^2.$$

Agora, passamos a manipular a expressão (55), de modo a chegar em uma outra expressão conveniente. Substituindo o resultado imediatamente acima na expressão (55), obtemos que:

$$\frac{k^4 \text{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi)}{1 - k^2 \text{sen}^2(\psi)} (\psi')^2 = \frac{\eta_1^2}{2} [(1 - 1 + k^2 \text{sen}^2(\psi))(1 - k^2 \text{sen}^2(\psi) - 1 + k^2)],$$

o que resulta em



$$\begin{aligned} \frac{k^4 \operatorname{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi)}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\psi)} (\psi')^2 &= \frac{\eta_1^2}{2} [k^2 \operatorname{sen}^2(\psi)(k^2 - k^2 \operatorname{sen}^2(\psi))] \\ &= \frac{\eta_1^2}{2} [k^4 \operatorname{sen}^2(\psi)(1 - \operatorname{sen}^2(\psi))]. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de identidades trigonométricas, temos que

$$\frac{k^4 \operatorname{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi)}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\psi)} (\psi')^2 = \frac{\eta_1^2}{2} (k^4 \operatorname{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi)).$$

Isolando  $(\psi')^2$ , obtemos que

$$(\psi')^2 = \frac{\eta_1^2 (k^4 \operatorname{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi)) (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi)}{2 k^4 \operatorname{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi)},$$

o que resulta, após simplificações, em

$$(\psi')^2 = \frac{\eta_1^2 (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi)}{2}.$$

Aplicando a raiz quadrada em ambos os lados, segue que

$$\begin{aligned} \psi' &= \sqrt{\frac{\eta_1^2 (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi)}{2}} \\ &= \eta_1 \sqrt{\frac{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} = \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}. \quad (57)$$

Consideremos  $l = \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}$ . Aplicando a integral sobre o intervalo  $[0, \epsilon]$  em ambos os lados da expressão (57), estabelecemos que

$$\int_0^\epsilon \frac{\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} dx = \int_0^\epsilon l dx.$$

Ou seja,

$$\int_0^\epsilon \frac{\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} dx = l\epsilon. \quad (58)$$

Introduzindo  $t = \varphi(x)$  deduzimos que  $dt = \varphi'(x)dx$ . Isto é suficiente para garantir, em vista de (58), que

$$\int_{\psi(0)}^{\psi(\epsilon)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = l\epsilon.$$

Afirmamos que

$$\int_0^{\operatorname{sen}(\psi(t))} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_{\psi(0)}^{\psi(\epsilon)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}. \quad (59)$$

Com efeito, fazendo uma troca de variável, temos que se,  $t = \operatorname{arcsen}(y)$  então  $y = \operatorname{sen}(t)$  e  $dt = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ . Isto indica que

$$\begin{aligned} \int_{\psi(0)}^{\psi(\epsilon)} \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t)}} &= \int_{\psi(0)}^{\psi(\epsilon)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 y^2}} \\ &= \int_{\operatorname{sen}(\psi(0))}^{\operatorname{sen}(\psi(\epsilon))} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 y^2}} \\ &= \int_0^{\operatorname{sen}(\psi(\epsilon))} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}}. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\int_0^{\operatorname{sen}(\psi(\epsilon))} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = l\epsilon \quad (60)$$

Pela definição de integral elíptica, estabelecemos que  $\operatorname{sen}(\psi) = \operatorname{sn}(l\epsilon; k)$ .

Ou seja,

$$\alpha(\epsilon) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}(\psi)} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(l\epsilon, k)} = \operatorname{dn}(l\epsilon, k).$$

Agora, voltamos a variável inicial  $\varphi = \eta_1 \alpha$ . Entendemos que

$$\varphi(\epsilon) \equiv \varphi(\epsilon; \eta_1, \eta_2) = \eta_1 \alpha = \eta_1 \operatorname{dn} \left( \frac{\eta_1}{\sqrt{2}} \epsilon, k \right), \quad (61)$$

onde identificamos, como já comentado,

$$k^2 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2}, \quad 2w = \eta_1^2 + \eta_2^2, \quad \eta_1 > \eta_2 > 0. \quad (62)$$

Como já foi estudado no capítulo 3 as Funções Elípticas de Jacobi, sabemos que a função  $\operatorname{dn}$  possui período de  $2K$ , pois  $\operatorname{dn}(u + 2K; k) = \operatorname{dn}(u, k)$  onde  $K(k)$  é a representação da integral elíptica de primeiro tipo. O período da onda dnoidal, dada em (61), é representado por  $T_\varphi$ , onde

$$T_\varphi \equiv \frac{2\sqrt{2}}{\eta_1} K(k),$$

depende do parâmetro  $k \in (0, 1)$  a ser fixado.

Pela construção detalhada, obtemos que a função

$$u(x, t) = e^{iwt} \varphi(x) = e^{iwt} \eta_1 \operatorname{dn} \left( \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}, k \right) \quad (63)$$

caracteriza uma solução para a equação diferencial parcial (44)

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0,$$

que é a equação de Schrödinger de potência polinomial cúbica. Em verdade, a função (63) é solução válida se  $\eta_1, \eta_2, w$  e  $k$  satisfizerem as relações propostas em (62). Sem estas exigências, (63) pode não solucionar a equação (44).

Possivelmente, estas não são as únicas soluções da equação (44). Este método determinou apenas soluções de ondas estacionárias dnoidais. Outros métodos, a serem aplicados, poderão determinar outras classes de soluções para (44). Em outros métodos, as soluções obtidas podem nem ser dadas em termos de Funções Elípticas de Jacobi.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram abordados alguns assuntos relativos às funções elípticas, bem como suas principais propriedades. Vimos também que uma das aplicações deste tipo de função está associada à resolução de equações diferenciais parciais.

Cumprimos todos os objetivos que nós tínhamos proposto neste trabalho, passando a compreender as funções elípticas de Jacobi, definindo suas propriedades e comparando-as com as funções circulares, onde é possível perceber algumas semelhanças.

Este trabalho foi muito significativo para o meu desenvolvimento, apreendendo uma nova noção matemática. Além disto, com este trabalho, aprendi a utilizar o Maple, um programa que facilita a visualização de gráficos. Este trabalho expandiu meus conhecimentos. Antes do Trabalho de Conclusão de Curso, nunca havia tratado com estas classes de funções, o que mostra que há muitos conceitos matemáticos a serem explorados.

## REFERÊNCIAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables**. New York: Dover Publications, 1972.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas com valores de contorno**. São Paulo: LTDC, 2012.

BYRD, P.; FRIEDMAN, M. **Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists**. 2<sup>a</sup>. ed. New York: Springer, 1971.

FILHO, A. R.; VASCONCELOS, D. S. **Introdução ao cálculo das funções elípticas jacobianas**. Salvador: UFBA, 1994.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, Ltda, 1994.

PIEIDADE, A. Z. C. da. **Integraes e funções ellipticas**: Dissertação inaugural para o acto de conclusões magnas na faculdade de mathematica. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1875.

SILVA, P. G. N. D. Funções elípticas de jacobi: história e propriedades. 46f.. Trabalho de Conclusão de Curso(Mestrado em Matemática)-PROFMAT, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. Disponível em: <<http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/331>>.

STEWART, J.; LOCK, P.; GLEASON, A.; FLAATH, D. E. **Cálculo**. 5<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pioneira, 2006.

## ANEXO A

Seja a equação

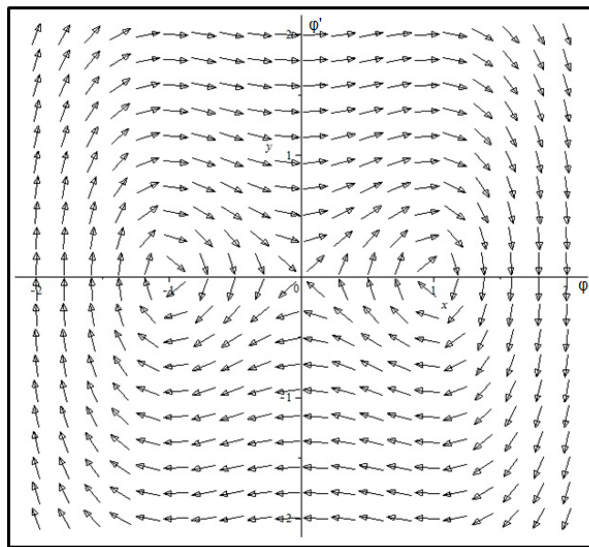
$$-\varphi'' + w\varphi - \varphi^3 = 0 \quad (65)$$

no caso em que  $w = 1$

Faça  $x = \varphi(t)$  e  $y = \varphi'(t)$ . Daí,  $\frac{dx}{dt} = \varphi' = y$ ,

$$\frac{dy}{dt} = \varphi'' = w\varphi - \varphi^3 = 1x - x^3 = x - x^3$$

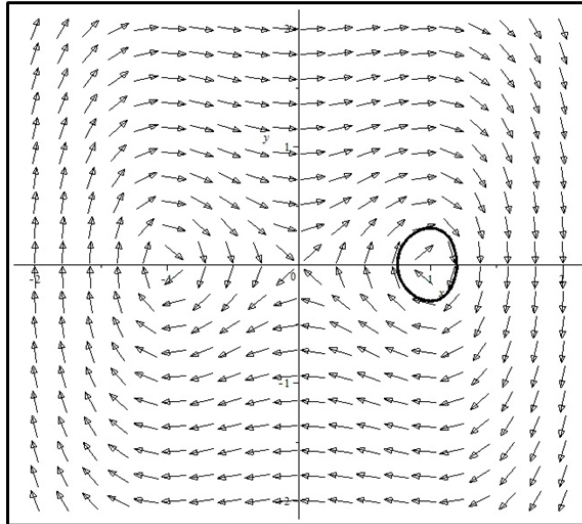
A equação (65) admite uma infinidade de soluções e estabelece o seguinte campo vetorial, apresentado na figura 34.



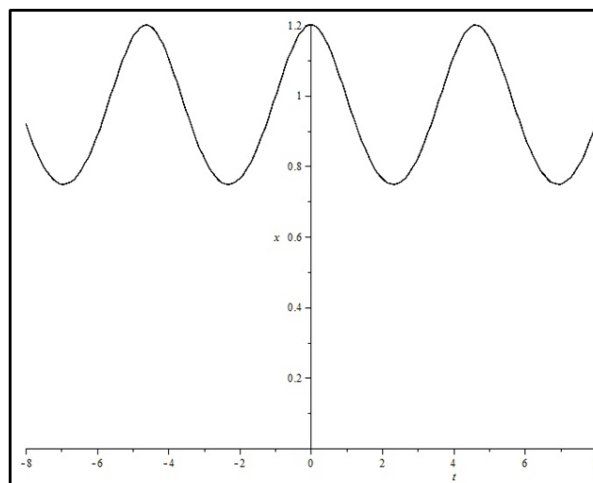
**Figura 34:** Campo vetorial determinado por (65).

No caso em que  $\varphi(0) = 1, 2$  e  $\varphi'(0) = 0$ , a solução se comporta da como na figura35

Notemos na figura 36 que, neste caso, a solução é periódica e, lembra o comportamento da função dnoidal



**Figura 35:** Campo vetorial determinado por (65), onde  $\varphi(0) = 1,2$  e  $\varphi'(0) = 0$ .



**Figura 36:** Gráfico da função (65) no caso em que  $\varphi(0) = 1,2$  e  $\varphi'(0) = 0$ .