

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA**

BRUNA ARICELI SCHIRMANN KOLLING

O ENSINO DE FRAÇÕES POR MEIO DO CUBO MÁGICO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**TOLEDO - PR
2019**

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

BRUNA ARICELI SCHIRMAN KOLLING

O ENSINO DE FRAÇÕES POR MEIO DO CUBO MÁGICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Renato Francisco Merli

TOLEDO - PR
2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado O ENSINO DE FRAÇÕES POR MEIO DO CUBO MÁGICO foi considerado APROVADO de acordo com a ata nº __ de __/__/____.

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Ms. Renato Francisco Merli (Orientador)

Ms. Ana Cláudia de Oliveira Guizeli Merli

Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes

TOLEDO - PR

2019

“Pra quem tem pensamento forte o impossível é só questão de opinião”.

Charlie Brown Jr.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me acompanhar em toda a trajetória acadêmica, por guiar todas as idas e vindas até a Universidade, por ser amparo nos momentos difíceis e por estar sempre presente.

Aos meus pais por estarem sempre por perto, me motivando e suportando meus momentos de estresse e impaciência. Obrigada por tudo, eu amo vocês.

Aos meus três gatos de estimação que me fizeram companhia durante o estudo e escrita do trabalho e que me fizeram muito carinho.

A minha colega Julia que não me deixou desistir em nenhuma das várias vezes que pensei sobre. Sua motivação e insistência para comigo foram essenciais nessa jornada. Você é incrível!

Minhas veteranas Miria, Geise e Leila por todos os conselhos, palavras de apoio e motivação. Desejo muito sucesso na caminhada de vocês, pois são merecedoras.

Minha dupla de Estágio, Simone Cíntia. Crescemos juntas, superamos dificuldades, choramos, rimos, amadurecemos. Sua força de vontade e determinação são contagiantes. Obrigada pelo companheirismo.

Às minhas amigas Sabrina, Leda e Márcia que não cansam de me lembrar do meu potencial, sempre me motivando a continuar e dar o meu melhor. Obrigada por compreenderem a minha ausência em alguns momentos. Amo vocês!

Ao meu melhor exemplo de Professor, meu Orientador Renato Francisco Merli. Agradeço primeiramente por ter feito parte da minha caminhada acadêmica. Seus ensinamentos serão sempre levados por mim. Gratidão por ter aceito me orientar. A alegria que senti foi enorme e é uma honra poder carregar seu nome nesse trabalho tão importante. Obrigada pelas orientações, compreensão e paciência. Você é extraordinário!

Obrigada a minha banca, professoras Ana Claudia, Bárbara e professor Renato, por terem aceito o convite e por contribuírem com meu trabalho.

Aos demais professores da Universidade que também são inspiradores. Aprendi com vocês não somente dentro, mas também fora da sala de aula, obrigada por cada ensinamento. Professores que de alguma forma contribuíram para minha formação: Adriano, Aline, Ana Claudia, Araceli, Bárbara, Cezar, Clovis, Emerson, Heloísa, Ivan, Jahina, Larissa, Márcia, Márcio, Rafael, Robson, Rodolfo, Rogério, Suellen, Tatiany, Vanessa e Willian.

Minha eterna gratidão a todos que de alguma ou de outra forma contribuíram.

RESUMO

KOLLING, Bruna Ariceli Schirmann. **O Ensino de frações por meio do Cubo Mágico.** Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2019.

Quando se deparam com o conteúdo de frações os alunos apresentam grande dificuldade de compreensão com relação ao conteúdo (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006). Nesse contexto, torna-se para os professores um desafio encontrar métodos e metodologias que facilitem a compreensão. Baseado nisso, o problema motivador dessa pesquisa foi verificar se “É possível elaborar uma proposta de ensino de frações de forma lúdica?”. Para tal, o estudo teve como objetivo encontrar elementos que subsidiem o uso do cubo mágico no ensino de frações utilizando Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS (MOREIRA, 2011b). A primeira parte contempla um estudo sobre a história do Cubo Mágico e também algumas experiências da sua utilização como ferramenta de ensino. Em seguida expõe alguns elementos e conceitos relacionados ao ensino de frações apresentando como o conteúdo vem sendo abordado em alguns livros didáticos e também por professores, detectando as possíveis falhas e lacunas existentes no processo de ensino e aprendizagem. Na sequência discorre-se sobre a metodologia das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS que visam uma Aprendizagem Significativa. Por fim, propõe-se Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS para o ensino de frações. Por ter seus procedimentos metodológicos fundamentados em uma pesquisa qualitativa foi realizada uma averiguação bibliográfica sobre a utilização do Cubo Mágico no processo de ensino e aprendizagem na Plataforma *Qualis*, Banco de Teses e Dissertações da CAPES e no buscador *Google*. Tal busca apresentou poucas publicações o que tornou a pesquisa justificável. O Cubo Mágico pode ser utilizado como ferramenta potencialmente significativa não somente para o ensino de frações, mas também para demais conteúdos matemáticos e, além disso, apresenta interessante usabilidade para aulas inclusivas. A pesquisa pode prosseguir futuramente realizando a aplicação da proposta apresentada seguida de análise dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Frações. Cubo Mágico. Unidades de Ensino Potencialmente Significativa - UEPS.

ABSTRACT

KOLLING, Bruna Ariceli Schirmann. **The Teaching of fractions through the Magic Cube.** Completion of course work – Licentiate degree in mathematics - Federal Technological University of Parana. Toledo, 2019.

When faced with the content of fractions the students present great difficulty of understanding with regard to the content (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006). In this context, it becomes a challenge for teachers to find methods and methodologies that facilitate understanding. Based on this, the motivating problem of this research was to verify if “Is it possible to elaborate a proposal of teaching fractions in a playful way?”. For this, the study had as objective to find elements that subsidize the use of the magic cube in the teaching of fractions using Potentially Meaningful Teaching Units – UEPS (MOREIRA, 2011b). The first part includes a study on the History of the Magic Cube and also some experiences of its use as a teaching tool. It then presents some elements and concepts related to the teaching of fractions, presenting how content has been approached in some textbooks and also by teachers, detecting possible flaws and gaps in the teaching and learning process. It follows on the methodology of the Potentially Meaningful Teaching Units – UEPS that aim at Meaningful Learning. Finally, it proposes Potentially Significant Teaching Units – UEPS for the teaching of fractions. Due to its methodological procedures based on a qualitative research, a bibliographic inquiry was carried out on the use of the Magic Cube in the teaching and learning process in the *Qualis* Platform, CAPES Thesis and Dissertation Bank and the Google search engine. This search presented few publications which made research justifiable. The Magic Cube can be used as a potentially meaningful tool not only for fractions teaching, but also for other mathematical contents and, in addition, presents interesting usability for inclusive classes. The research can be carried out in the future by applying the presented proposal followed by an analysis of the results obtained.

Keywords: Fractions. Magic cube. Potentially Meaningful Teaching Units - UEPS.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Erno Rubik.....	12
Figura 2 - Cubo Mágico no dia-a-dia	13
Figura 3 - Variações do Cubo Mágico.....	13
Figura 4 - Algumas Modalidades das disputas.....	14
Figura 5 – Conteúdos Matemáticos Trabalhados	16
Figura 6 - Resultado da Pesquisa.....	17
Figura 7 - Questionário sobre o Cubo Mágico	18
Figura 8 - Abordagem de Frações em Livros Didáticos.....	20
Figura 9 - Atividade utilizando Fração como Número.....	21
Figura 10 - Exercício tomando a fração como parte-todo.	21
Figura 11 - Fração como medida.....	22
Figura 12 - Fração como quociente	22
Figura 13 - Fração como Operador Multiplicativo.....	23
Figura 14 - Zona Cinza.....	26
Figura 15 – Diagrama V	28
Figura 16 - Diagrama de V para Construção de uma UEPS	29
Figura 17 - Construção de uma UEPS por Mapa Conceitual.....	30
Figura 18 - Possíveis faces escolhidas pelos alunos.....	34
Figura 19 - Passos do Método das Camadas	37
Figura 20 - Padrões do Cubo Mágico.....	38
Figura 21 – Variações do Cubo Mágico em Escala.....	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CUBO MÁGICO.....	12
2.1	História do Cubo Mágico	12
2.2	Experiências em Sala de Aula	14
3	ENSINO DE FRAÇÕES.....	20
4	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....	26
5	PROPOSTA.....	33
5.1	UEPS para frações como número.....	33
5.2	UEPS para frações como parte-todo.....	36
5.3	UEPS para frações como medida	39
5.4	UEPS para frações como quociente	41
5.5	UEPS para frações como operador multiplicativo	42
6	CONCLUSÃO	45
7	REFERÊNCIAS.....	47

1 INTRODUÇÃO

O conteúdo de frações é sempre um assunto muito delicado no processo de ensino e aprendizagem, considerando a dificuldade de compreensão das crianças para entenderem o que é um número não inteiro. Conseqüentemente torna-se, para o professor, um desafio encontrar métodos para que os alunos tenham uma Aprendizagem Significativa¹.

Percebe-se que essa dificuldade para lidar com frações não é vivida somente por crianças, visto que, sempre que é necessário o uso de frações, grande parte das pessoas opta por trabalhar com números decimais. Diante disto, nosso objeto de pesquisa é o ensino de frações. Lopes (2008) destaca que em decorrência das representações digitais estarem ocupando o lugar das analógicas, o uso das frações se tornará cada vez mais raro, porém, não deve ser abolido, em virtude de sua importância em contextos não utilitários.

Com base nisso, nossa pergunta norteadora foi “*É possível elaborar uma proposta de ensino de frações de forma lúdica?*”. Assim, buscando responder à pergunta, objetivamos propor uma metodologia de ensino deste conteúdo visando atrair os alunos para que percebam que se pode aprender brincando e mais que isso, que existe uma maneira divertida de ensinar e aprender frações. Para tal, optamos por utilizar o Cubo Mágico, também conhecido como cubo de Rubik. A escolha desse brinquedo, deu-se pelo fato do mesmo ser um jogo que atrai as pessoas que o veem. De acordo com o Site Cubo Velocidade² o Cubo Mágico foi um dos brinquedos mais vendidos do mundo, tendo como estimativa, cerca de 350 milhões de cubos vendidos desde seu lançamento internacional em 1980.

Considerando a busca por uma aprendizagem significativa, outra escolha foi a utilização das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS³.

Como citado anteriormente, o conteúdo de frações é “temido” não somente por crianças, mas também por adultos, como salientam Campos e Rodrigues (2007, p. 70), ao afirmarem que,

[...] a prática de sala de aula, entretanto, revela que mesmo alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional,

¹ Entendemos aprendizagem significativa na perspectiva de Moreira (2012). Discutiremos melhor sobre o assunto no Capítulo 4.

² Disponível em: <<http://www.cubovelocidade.com.br/>>. Acesso em: 20 mar. 2019.

³ Entendemos também as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS na perspectiva de Moreira (2011).

o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos.

Sou exemplo de uma criança que cresceu sem compreender frações e que somente enquanto acadêmica consegui ter entendimento sobre.

Além disso, outro fator que nos motivou a pesquisar sobre o assunto é a carência de trabalhos que apresentem a utilização do Cubo Mágico para o ensino de frações. Ressalto que em pesquisa realizada na plataforma *Qualis* dos periódicos do quadriênio 2013-2016 na Área de ensino com classificação A1, não encontramos nenhum resultado sobre o ensino de frações por meio do Cubo Mágico. O banco de Teses e Dissertações da Capes disponibiliza alguns trabalhos que apresentam o aproveitamento do Cubo Mágico para o ensino de Matemática, porém, os conteúdos abordados são em maioria relacionados a Álgebra, Teoria dos Grupos e Análise Combinatória.

A escolha pelo Cubo Mágico deu-se pelo fato de ser um objeto mundialmente conhecido, apreciado e manipulado por pessoas de várias gerações e idades. “O lúdico em sala de aula possibilita ao aluno superar suas dificuldades, experimentar, descobrir, inventar, aprender e conferir suas habilidades, além de estimular sua curiosidade, autoconfiança e autonomia” (OLIVEIRA, 2011, p. 12-13).

Buscamos então, realizar uma Sequência Didática utilizando as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS por meio do Cubo Mágico para o ensino de frações. O intuito é realizar uma atividade que motive os alunos, que mostre a presença das frações em uma brincadeira divertida e estimuladora.

No capítulo 2, apresentaremos dados sobre o Cubo Mágico e os seus usos na educação matemática, analisando alguns casos onde o mesmo foi utilizado para o ensino-aprendizagem da matemática. Faremos também, uma pesquisa qualitativa exploratória bibliográfica, onde buscamos encontrar dados e relatos sobre a utilização do Cubo Mágico como ferramenta de ensino. A pesquisa bibliográfica se dá através do levantamento de publicações, teses, livros, entre outros. Para Fonseca (2002),

Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002, p. 31 -32).

No capítulo 3 iremos compreender os elementos e conceitos de frações, bem como os diferentes tipos de metodologias utilizadas no seu ensino. No Capítulo 4 serão discutidos os conceitos de Aprendizagem Significativa, mais especificamente, as

Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS, compreendendo seus princípios e aspectos.

Além de abordarmos de forma mais detalhada a presença dos elementos supracitados no desenvolvimento do presente trabalho, no capítulo 5, verificaremos de que modo o ensino de frações pode ser realizado por meio de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UESP utilizando o Cubo Mágico. Por fim, no sexto capítulo, apresentamos nossas conclusões.

2 CUBO MÁGICO

Neste capítulo serão discutidos aspectos sobre o Cubo Mágico detalhando um pouco da sua história, sua disseminação na sociedade, que passou a adquirir seu espaço não somente como um brinquedo, mas como um ícone daqueles que sabem matemática e têm um bom raciocínio lógico. Consoante a isso, apresentamos alguns casos da utilização do Cubo Mágico como objeto de ensino da matemática.

2.1 HISTÓRIA DO CUBO MÁGICO

Segundo em Barbosa (2018, p. 11-12), o Cubo Mágico, também conhecido como Cubo de Rubik, foi criado pelo professor Erno Rubik (Figura 1) em 1974 com o intuito de utilizá-lo para ensinar o conteúdo de Geometria Espacial. No ano seguinte o professor requereu o registro de patente do brinquedo, mas a mesma só foi deferida em 1977 e, em 1980, o cubo passou a ser comercializado. Segundo Barbosa (2018, p. 12) “já nos primeiros anos o Cubo Mágico conquistou o prêmio ‘Toy of year’ (“brinquedo do ano”) promovido pela Associação Internacional da Indústria de Brinquedos”.

Figura 1 - Erno Rubik



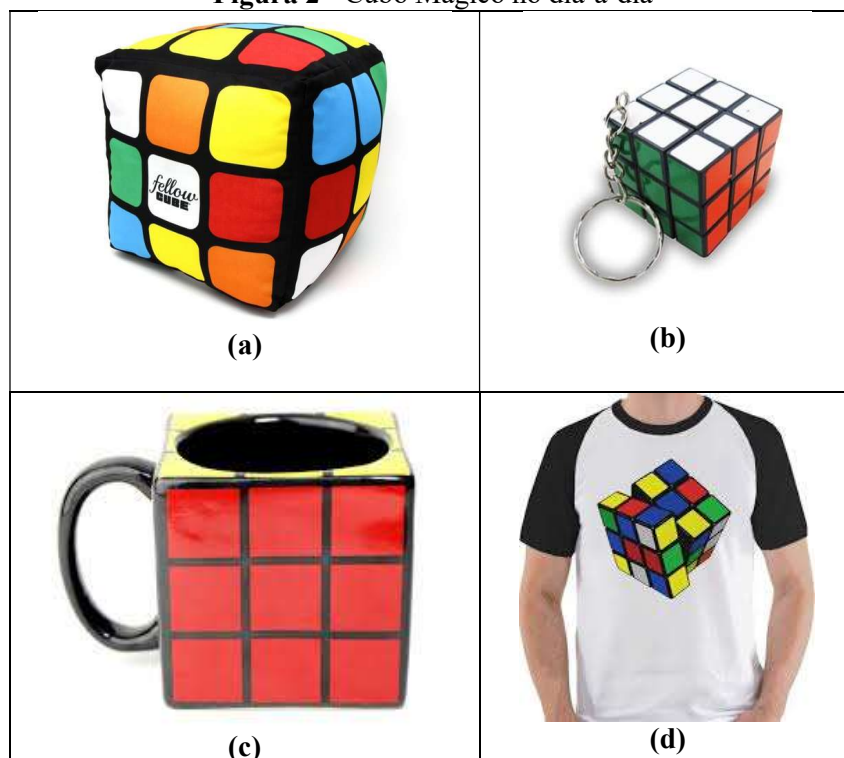
Fonte: Site Cubo Velocidade⁴

Não apenas como um brinquedo ou objeto de descontração, mas também é bem fácil de se deparar com o objeto sendo utilizado como decoração, capa de discos,

⁴ Disponível em: <<http://www.cubovelocidade.com.br/>>. Acesso em: 20 mar. 2019.

camisetas, na mídia, entre outros, como mostram as Figuras 2a, 2b, 2c e 2d.

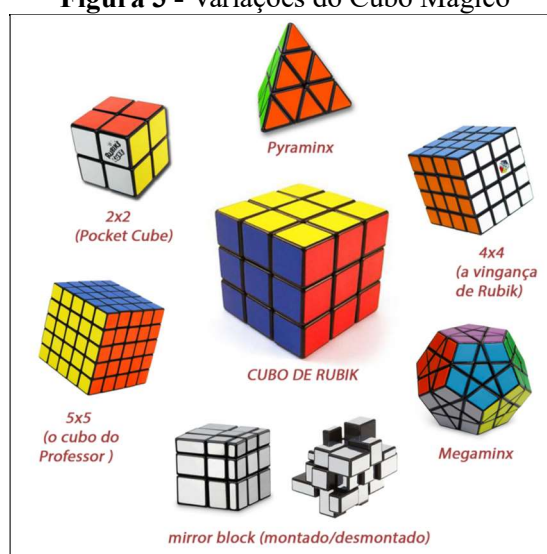
Figura 2 - Cubo Mágico no dia-a-dia



Fonte: Google Imagens

Existem algumas variações do Cubo Mágico tradicional (3x3), dentre elas podemos citar o Cubo (2x2), (4x4) e (5x5) que são os mais comuns, porém, possuem o mesmo objetivo do Cubo tradicional que é organizá-lo de modo que cada uma de suas faces fique com uma única cor. Além destes, existem vários outros derivados do Cubo como, Pyraminx, Megaminx e Mirror Block (Figura 3).

Figura 3 - Variações do Cubo Mágico



Fonte: Jornalismo Junior⁵

⁵ Disponível em: <<http://jornalismojunior.com.br/muito-alem-de-um-simples-brinquedo/>>. Acesso em: 20

Além das variações do Cubo Mágico, outro fato curioso acerca do Cubo são as mais diversas competições e campeonatos. Existem Campeonatos Mundiais⁶ onde o vencedor é aquele que resolve o cubo (realizado para todos os tipos de variação) em menor tempo, manuseando-o com as mãos, com os pés, ou até mesmo com os olhos vendados, como mostram as Figuras 4a e 4b. Temos assim, uma possibilidade de utilizar o cubo como ferramenta também com alunos inclusos. Para deficientes visuais, por exemplo, já existem cubos adaptados, porém, o próprio professor consegue adaptar um Cubo, criando diferentes texturas para cada cor do Cubo Mágico.

Figura 4 - Algumas Modalidades das disputas



Fonte: G1⁷

2.2 EXPERIÊNCIAS EM SALA DE AULA

Conforme seção anterior, o Cubo Mágico tem se tornado cada vez mais presente no dia-a-dia das pessoas, sua imagem é vista nos mais diversos lugares e objetos, inclusive, na sala de aula.

A utilização do Cubo Mágico em sala de aula já foi realizada para trabalhar com alguns conteúdos, conforme apresenta o Quadro 1. Em decorrência da ausência de trabalhos sobre Cubo Mágico e Frações na plataforma *Qualis* (mencionado anteriormente) realizamos uma pesquisa⁸ mais ampla para termos alguns dados de propostas já realizadas e também de relatos de experiência acerca da utilização do Cubo

mar. 2019.

⁶ Vídeo sobre o Campeonato Mundial. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=DRmgGw7tyGY>>. Acesso em: 27 mai. 2019.

⁷ CUBO MÁGICO. Disponível em: <<http://g1.globo.com/sao-paulo/noticia/2015/07/mundial-de-cubo-magico-reune-competidores-em-sao-paulo.html>>. Acesso em: 01 mai. 2019.

⁸ Dados parciais dessa pesquisa bibliográfica foram apresentados na VII SEMAT – Semana da Matemática da UTFPR – Toledo.

Mágico para o ensino de matemática. Para isso, realizamos um busca no próprio *Google* e encontramos os textos a seguir.

Quadro 1 - Conteúdos Abordados

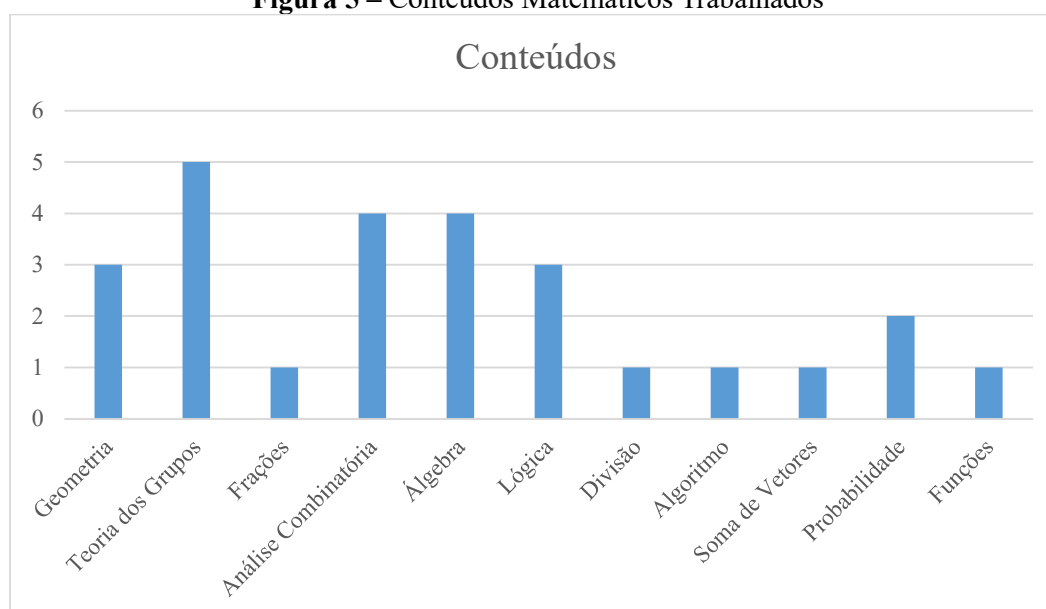
Título	Conteúdo	Modalidade	Autores
Ensino de análise combinatória usando o Cubo Mágico	Análise Combinatória	Artigo em evento	Rafael Werneck Cinoto David Pires Dias
O Cubo Mágico: Aplicações do algoritmo euclidiano da divisão	Divisão	Trabalho	Alecio Soares Silva Thalita Alves da Silva Wesley Balbino Barros Valdson Davi Moura Silva
O Cubo Mágico como estratégia mediadora do processamento de ensino e aprendizagem da matemática	Raciocínio lógico	Artigo	Alexandre de Almeida Vasques Ingrid Muniz de Lima Viviane Simões dos Santos
Aprendendo com o Cubo Mágico	Algoritmo	Artigo em evento	João Paulo Gonzaga Vieira Ana Paula de Souza Angela Leite Moreno
Construção tridimensional do Cubo Rubik a partir das propriedades da soma de vetores na Geogebra	Soma de Vetores	Oficina	Charles Gomes Bezerra De Brito Daniela Mauricio Silva Da Costa
Cubo Mágico: Propriedade e resolução envolvendo Álgebra e Teoria dos Grupos	Álgebra e Teoria de Grupos	Dissertação	Luis Gustavo Hauff Martins Grimm
Cubo Mágico: Uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática	Geometria espacial, em probabilidade, frações e álgebra	Monografia	Gislaine Aparecida Roncolli
Os Benefícios do Cubo Mágico nas aulas de Matemática do Ensino Médio.	Raciocínio lógico e dos conceitos geométricos, análise combinatória, probabilidade e matrizes.	Monografia	Eudes Nascimento Silva Junior
O uso do Cubo Mágico para o Ensino de Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio	Geometria Plana e Espacial	Dissertação	Huerllen Vicente Lemos Silva
O uso do Cubo Mágico como estratégia de Ensino de Permutação e funções	Permutação e funções	Monografia	Marlene Gorete de Araújo
Uso do Cubo Mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático	Lógica	Relato de Experiência	Juliana Moreno Oliveira Gizele Geralda Parreira Luciano Duarte da Silva
Que matemática está por trás do Cubo Mágico	Análise Combinatória	Projeto de Pesquisa	Milca Pires Machado
Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico	Álgebra	Oficina	Waldeck Schutzer

Título	Conteúdo	Modalidade	Autores
Uma proposta de aprendizagem usando o Cubo Mágico em Malta – PB	Álgebra e Geometria	Monografia	José Vinicius do Nascimento Silva
Uma visão Matemática do Cubo Mágico	Teoria de Grupos	Dissertação	Claudia Salomão Moya
Teoria de Grupo e o Cubo Mágico	Teoria de Grupos	Dissertação	Jocemar Esteves da Silva Junior
O cubo mágico de Rubik: teoria, prática e arte.	Teoria de Grupos	Dissertação	Fernando Vieira Barbosa
Tópicos em Teoria de Grupos: O Desafio do Cubo de Rubik	Teoria de Grupos	Dissertação	Jeferson Saraiva Bezerra
Álgebra e o Cubo de Rubik	Álgebra	Dissertação	Robson Guimarães

Fonte: Da autora

A Figura 5 apresenta um resumo dos conteúdos trabalhados com o Cubo Mágico. Percebemos que o conteúdo mais trabalhado pelos autores é Teoria dos Grupos, seguido de Álgebra e Análise Combinatória. O conteúdo para o qual nossa pesquisa é voltada, aparece apenas uma vez em uma monografia que traz o Cubo Mágico como uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática, porém, o mesmo estende-se a mais outros três conteúdos, trazendo cada um deles de forma bem sucinta. Ou seja, há praticamente uma escassez no que tange a utilização do Cubo Mágico como ferramenta para o ensino de frações.

Figura 5 – Conteúdos Matemáticos Trabalhados

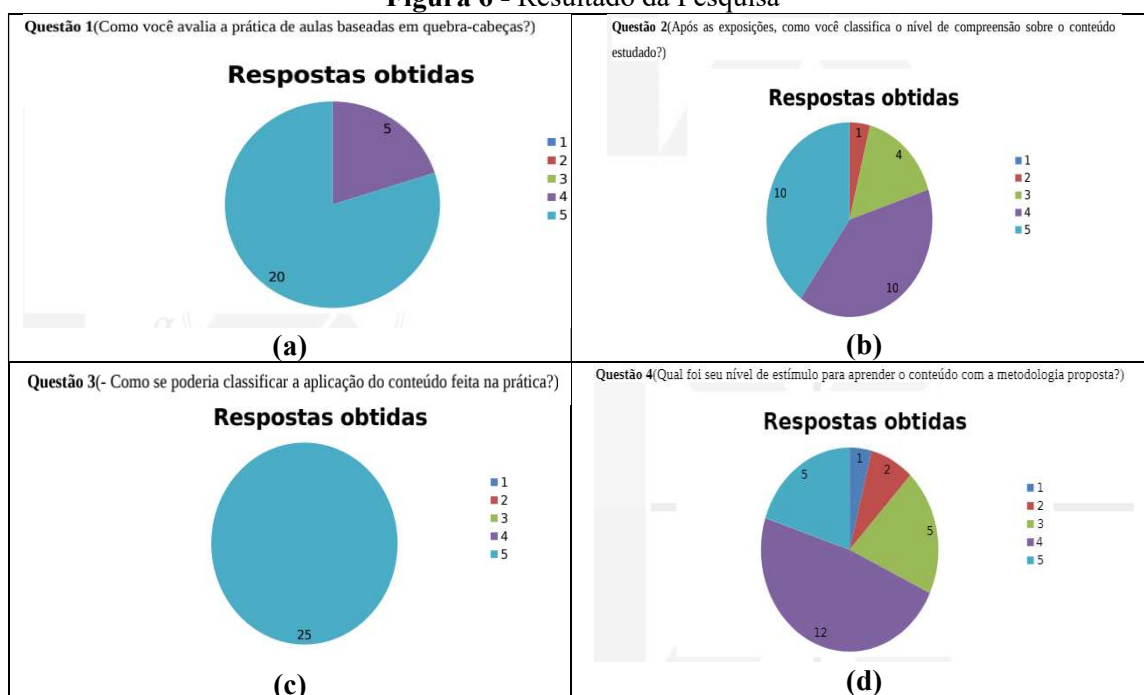


Fonte: Da Autora

Silva *et al.* (2016), por exemplo, utilizaram o Cubo Mágico como ferramenta

motivacional para o ensino do Algoritmo Euclidiano da Divisão, com 27 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de um Escola localizada em Campina Grande – PB. Após o término da proposta de Ensino, os autores aplicaram um questionário aos alunos para saber o nível de satisfação dos mesmos em relação ao método de ensino utilizado. As perguntas deveriam ser respondidas por um número correspondente a sua satisfação, sendo: 1 – Insatisfatório; 2 – Irregular; 3 – Satisfatório; 4 – Regular; 5 – Ótimo. As Figuras 6a, 6b, 6c e 6d apresenta os respostas obtidas pelos autores.

Figura 6 - Resultado da Pesquisa



Fonte: SILVA *et al.* (2016, p. 7-8)

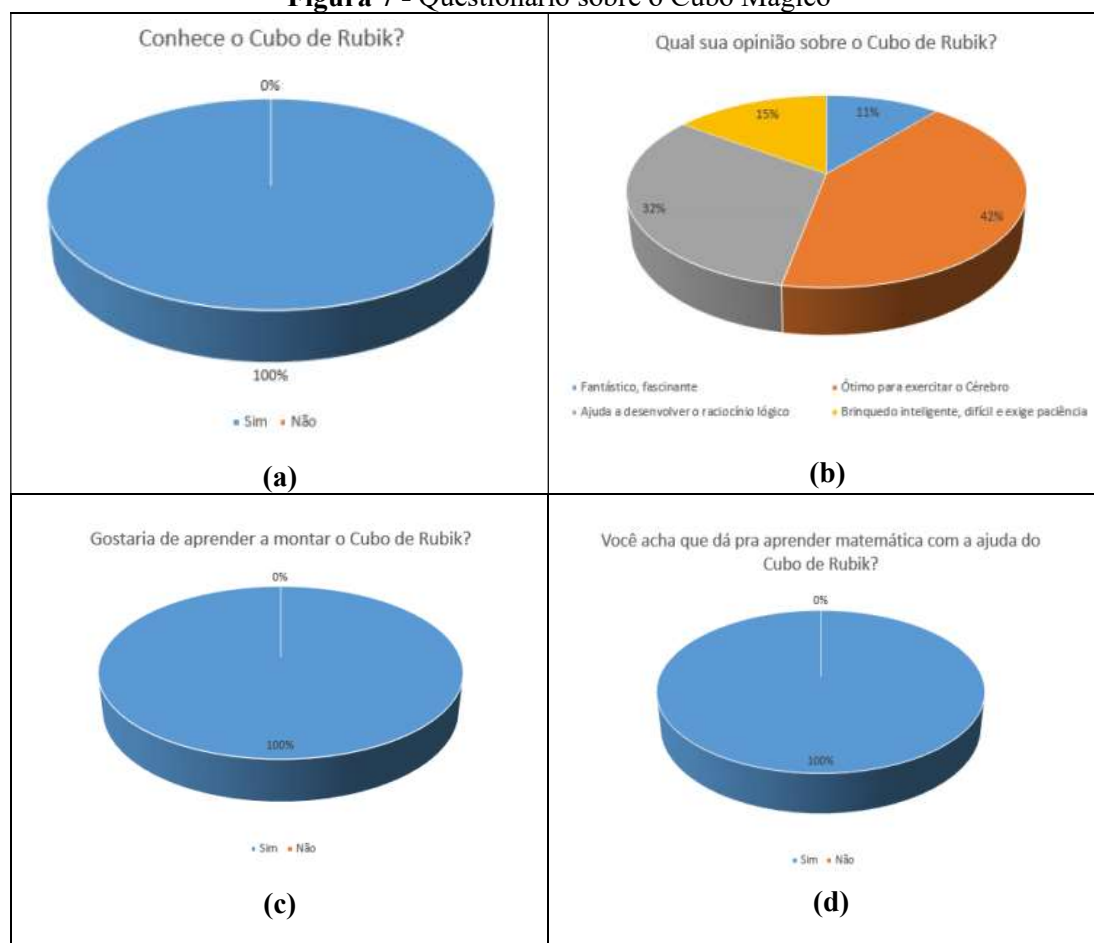
Perante as respostas dadas pelos alunos, notamos que a utilização do Cubo Mágico atingiu o objetivo dos autores e motivou os alunos na aprendizagem do conteúdo trabalhado.

Mais uma situação que podemos analisar é o do estudo de caso de Silva (2015) que realizou sua atividade com 20 alunos do Ensino Médio de uma Escola de Malta – PB. Sua proposta baseou-se na utilização e manuseio do Cubo Mágico para lidar com os conteúdos de Álgebra, Geometria, Análise Combinatória e Probabilidade.

Para iniciar as atividades, foi aplicado um questionário com questões discursivas aos alunos. A primeira pergunta era se os mesmos conheciam o Cubo Mágico. A resposta foi unânime como mostra a Figura 7a. Outra pergunta muito relevante feita pelo autor foi quanto ao interesse dos alunos com relação ao Cubo Mágico (Figura 7b), o que de fato, é

de extrema importância, considerando que buscamos motivar os alunos. Silva (2015) apresenta um resumo das respostas discursivas dadas pelos alunos em forma de gráfico, nota-se que todas as opiniões relacionadas ao Cubo Mágico são positivas. Também foi questionado o interesse dos alunos em montar o Cubo Mágico (Figura 7c), ou seja, ordenar suas peças de modo que cada face ficasse com uma única cor. Novamente, a resposta foi unânime. Por fim, o autor perguntou aos alunos se eles achavam que era possível aprender matemática com a ajuda do Cubo Mágico. A Figura 7d apresenta a resposta dos alunos, os quais afirmaram a possibilidade.

Figura 7 - Questionário sobre o Cubo Mágico



Fonte: SILVA (2015, p. 34-37)

Após finalizar o questionário e trabalhar os conteúdos da maneira proposta, o autor conclui que, a utilização do Cubo Mágico,

[...] como ferramenta contribui e influencia na formação do estudante, possibilitando um enriquecimento permanente, aumentando sua autoestima, paciência e concentração a curto e a longo prazo. Pode desenvolver um raciocínio lógico aliado a algum conteúdo matemático, como potenciação, radiciação, geometria espacial, etc., o que consequentemente trará mais benefícios para o seu rendimento não só em Matemática, mas também nas demais disciplinas (SILVA, 2015, p. 68).

Araújo (2016) também utilizou o Cubo Mágico como ferramenta de ensino, porém, para o ensino de permutações e funções e após a experiência concluiu que,

[...] por se tratar de um jogo, o uso do Cubo Mágico em aulas de Matemática poderá render grandes frutos no processo de ensino aprendizagem. Além disso, ao utilizar o Cubo Mágico em aulas de Matemática, poderemos mostrar aos alunos que a Matemática pode estar presente onde menos imaginamos, de modo os alunos percebam que os conhecimentos adquiridos nas aulas desta disciplina poderão ser aplicados para além das provas bimestrais (ARAÚJO, 2016 p. 62).

Outra conclusão relevante para o nosso estudo é a apresentada por Cinoto e Dias (2014) após usarem o Cubo Mágico como objeto lúdico para o ensino de Análise Combinatória. Os autores relatam que a aula com o cubo mágico pode

[...] promover profunda reflexão sobre vários temas matemáticos, você poderá ver alunos lendo e decifrando as instruções, pensando e trabalhando com os algoritmos, comunicando-se e ajudando uns aos outros, às vezes frustrando-se durante o aprendizado, às vezes triunfando. Tudo isso faz parte do desenvolvimento do pensamento crítico e da resolução de problemas em sua forma mais pura. (CINOTO; DIAS, 2014, p 2-3).

Esta informação é de grande valia para nós, pois sabemos da fundamental importância do desenvolvimento da atividade e que o manuseio do Cubo Mágico exige paciência, o que pode gerar nos alunos certa frustração, porém, devemos motivá-los a não desistir e se superar.

Tendo como base as pesquisas apresentadas, infere-se que o Cubo Mágico pode ser de grande valia quando utilizado como ferramenta de ensino e que agrega valores não somente para o ensino de matemática, pois de acordo com Silva (2015, p. 69) “o Cubo Mágico estimula a participação, desinibindo os mais tímidos e promovendo uma maior interação social”.

Vasques, Lima e Santos (2016, p. 2) reiteram que apoderar-se do Cubo Mágico como ferramenta lúdica de ensino é uma “estratégia inovadora de sucesso na sala de aula no processo de ensino e aprendizagem da matemática”. Isso nos motiva a trazê-lo para a sala de aula visando o ensino e a aprendizagem do conteúdo de frações.

3 ENSINO DE FRAÇÕES

A utilização das frações na vida cotidiana tem se tornado cada vez mais rara em função do uso das tecnologias que facilitam os cálculos com números racionais. Segundo Lopes (2008, p. 05) “a notação decimal ganhou a guerra da comunicação e da usabilidade para representar números ‘quebrados’, não inteiros”.

Sobre o conteúdo de frações, constante nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN's), eles afirmam que

[...] o contato com as representações fracionárias é bem menos frequente quando comparado com as representações decimais. A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo; é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais (BRASIL, 1997, p. 64).

A Figura 8 mostra uma situação presente em um Livro Didático que exemplifica de forma clara o que relatam os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) quando se trata do assunto frações. Veja que, mesmo a barra de chocolates sendo algo presente no dia-a-dia das crianças, a forma de diálogo entre as personagens da tirinha é dada informalmente, ou seja, na realidade não usamos essa forma de diálogo, o que acaba passando para os alunos uma ideia de inutilidade das frações.

Figura 8 - Abordagem de Frações em Livros Didáticos



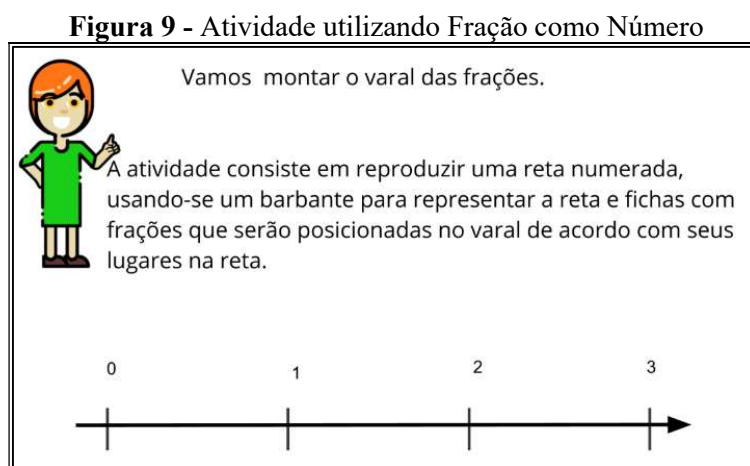
Fonte: Imenes e Lellis (2009, p. 113)

Lopes (2008, p. 06) afirma que “a aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates”. Isso porque, quando se utiliza essa contextualização, pensamos nas frações apenas como parte-todo, porém, as frações assumem também, outros conceitos, sendo eles: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

Campos, Magina e Nunes (2006, p. 127-128) diferenciam esses cinco tipos de interpretações sobre frações. A seguir, resumimos os cinco significados discutidos pelos

autores.

A fração como Número: Quando a situação matemática não trata-se de uma quantidade. Por exemplo, representar $\frac{1}{2}$ em forma decimal ou na reta numérica. Um outro exemplo prático e interessante para trabalhar com frações como número é o apresentado na Figura 9.



Fonte: Site Nova escola⁹

A fração como parte-todo: Trata-se de um todo (m) dividido em (n) partes iguais, utilizando assim um procedimento de dupla contagem. Este, é o significado mais utilizado, cabe aqui, os exemplos com a divisão da barra de chocolates. Temos também o exemplo da Figura 10, que pode ser realizado de maneira prática com os alunos da sala de aula, buscando pela fração que representa o número de meninos e de meninas da turma.

Figura 10 - Exercício tomando a fração como parte-todo.

6. Em um grupo com 7 meninos e 3 meninas, as meninas correspondem a que parte do grupo?

a) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{9}{6}$

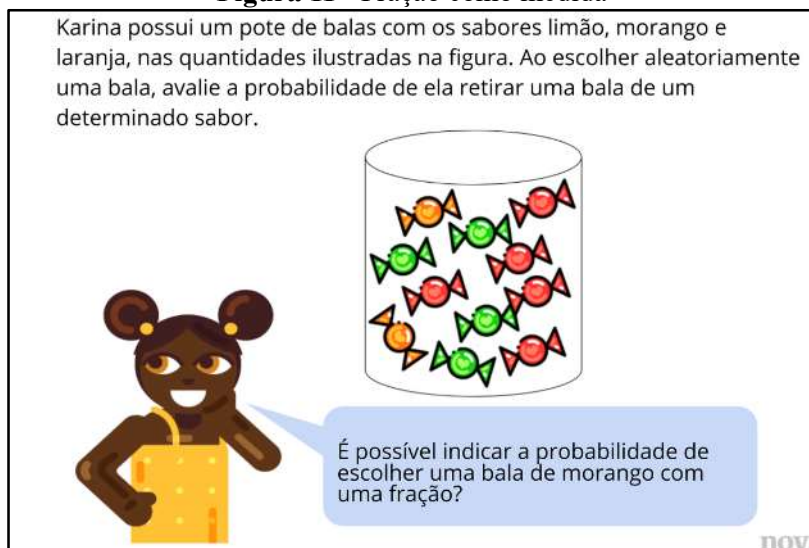
e) $\frac{1}{3}$

Fonte: Dellinghausen, Lemos e Kaiber (2017, p. 10)

⁹ Disponível em: <<https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1492/fracoes-e-a-reta-numerada#>>. Acesso em: 17 mai. 2019.

A fração como medida: Esta, está relacionada à probabilidade. Referem-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis. O exercício da Figura 11 traz a fração como medida, a ideia pode ser aplicada em sala de aula de várias maneiras, podendo realizar a probabilidade de ser sorteado um menino ou menina entre os alunos da turma, por exemplo.

Figura 11 - Fração como medida



Fonte: Site Nova Escola¹⁰

A fração como quociente: Aqui, aparece a ideia de divisão. Podemos citar como exemplo uma pizza dividida em cinco pedaços, conforme a Figura 12.

Figura 12 - Fração como quociente



Fonte: Site Nova Escola¹¹

¹⁰ Disponível em: <<https://novaescola.org.br/plano-de-aula/494/representando-probabilidade-com-fracoes>>. Acesso em 17 mai. 2019.

¹¹ Disponível em: <<https://novaescola.org.br/plano-de-aula/376/numeros-decimais-no-quadro-de-ordens-ii>>. Acesso em: 17 mai. 2019.

A fração como operador multiplicativo: Trata-se de um valor escalar aplicado à uma quantidade. Uma transformação. Temos aqui como exemplo, as porcentagens. Neste caso, uma atividade interessante seria o recorte de revistas/jornais com anúncios de promoções como mostra a Figura 13.

Figura 13 - Fração como Operador Multiplicativo

Uma imobiliária anunciou a venda de um apartamento por R\$ 180 000,00 com as condições indicadas.

Desconto de 35% na compra à vista.

Entrada de 45% mais 96 parcelas fixas.

Entrada de 15% mais 96 parcelas com 10% de acréscimo em cada uma.

Qual o valor final da compra em cada caso?

Fonte: Site Nova Escola¹²

Tendo agora o entendimento sobre os cinco diferentes significados de frações, pesquisamos sobre a presença das frações em alguns Livros Didáticos, com o intuito de verificar se constam todos os diferentes conceitos sobre as frações.

Em análise à abordagem do conceito de frações em Livros didáticos, Souza (2013, p. 57-58) concluiu que,

[...] os três livros¹³ contemplam a relação parte/todo, porém, apenas um destaca os demais conceitos fracionários, percebemos assim, que muitas vezes a construção das situações em que os diferentes conceitos de fração são abordados deixa de ser trabalhadas em sala de aula. Percebemos ainda que as regras e cálculos são predominantes na resolução de algumas atividades propostas pelos livros, ressaltando a ideia de que as frações são pouco contextualizadas.

Para Vianna (2008, p. 12), “O método de ensino, alega, simplesmente encoraja os

¹² Disponível em: <<https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1293/calculando-porcentagem>>. Acesso em: 17 mai. 2019.

¹³ Os livros citados pelo autor são “Tudo é Matemática” (DANTE, 2009) – 6º ano; “Matemática” (IMENES; LELLIS, 2009) – 6º ano; “Matemática e realidade” (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009) – 6º ano.

alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla [...] sem entender o significado deste novo tipo de número”.

Ainda de acordo com Souza (2013, p. 23) “[...] o livro didático se configura como um material indispensável a professores e alunos, se tornando, portanto, um dos mais importantes instrumentos na construção do saber”.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, p. 22) consta que “Os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória”. Considerando o Livro Didático como ferramenta de tamanha importância para o ensino e a aprendizagem, podemos perceber que, a não presença dos diferentes tipos de significados das frações pode acarretar em possíveis dificuldades para os alunos no decorrer de sua formação, sendo que, as frações estarão sempre presentes na trajetória escolar. Lamon (2012 *apud* Garcia, Rocha e Oliveira, 2014, p. 2) reiteram que “As perdas que ocorrem por causa das lacunas no entendimento conceitual sobre frações, razões e tópicos relacionados são incalculáveis”.

Refletindo sobre a brecha conceitual de frações em alguns Livros Didáticos, acaba não sendo espantoso a constante dificuldade no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Segundo Santos (2005, p. 112), “[...] parece haver uma lacuna entre o conhecimento do professor, conteúdo a ser ensinado e a forma como ele pode ser aprendido”. Pensando nisso, buscamos compreender quais as principais dificuldades e problemas enfrentados tanto por docentes como por discentes quando se trata de frações.

O trabalho em sala de aula com o ensino de frações tem complicadores porque nem sempre quem ensina tem clareza dos conceitos fundamentais e não dispõe de conhecimentos didático-metodológicos suficientes para abordá-lo adequadamente e, por sua vez, quem aprende não consegue compreender significativamente o conceito envolvendo o conteúdo de fração (ALVES; MARTENS, 2011, p. 9369).

Infelizmente, o despreparo e desinteresse de alguns professores em buscar compreender de forma correta o conteúdo e de buscar novas ferramentas que motivem e facilitem o ensino e aprendizagem (não só do conteúdo de frações, mas também de outros), acaba sendo um agravante na dificuldade em lidar com determinados conteúdos.

Outro fator que precisa ser tratado com atenção é quanto às Representações Mentais¹⁴ dos alunos. É extremamente importante a linguagem utilizada pelo professor para introduzir o conteúdo aos alunos. Alves e Martens (2011) citam como exemplo os

¹⁴ As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado (DUVAL, 2012 p. 269).

termos *quarto* e *terço*; segundo eles, de nada adianta apresentar aos alunos sem que de fato eles entendam do que se trata, afinal, para eles a palavra *quarto* remete ao lugar onde dormem, e *terço* é o nome dado à um objeto religioso. São detalhes iniciais que podem prejudicar todo o entendimento sobre o assunto.

Magina e Campos (2006) realizaram uma pesquisa em 7 escolas de rede pública de São Paulo observando as estratégias de ensino para o conteúdo de frações com 70 professores polivalentes. As autoras concluíram que os professores apresentam,

[...] uma confusão entre representar numericamente situações de fração e de razão. Além disso, constatamos que a principal estratégia de ensino desses professores é o uso de desenho ou de material concreto com vistas a facilitar comparações perceptuais dos alunos em detrimento do trabalho com os n variantes lógicos da fração. Parece não haver uma clareza desses professores sobre os diferentes significados da fração, o que os leva a propor situações de ensino limitadas, restringindo-se à percepção e ao significado parte-todo. (MAGINA; CAMPOS, 2006, p. 8-9)

Não é possível estender as conclusões das autoras para todos os professores, mas temos aqui, uma base das principais estratégias utilizadas e o quão importante é saber e utilizar os diferentes significados de frações.

Após esta análise de como o conteúdo de frações está sendo abordado tanto por alguns livros didáticos como também por alguns professores, nos faz refletir sobre as possibilidades existentes de se trabalhar com todos os significados de frações, buscando assim, enriquecer o conhecimento relacionado ao conteúdo de frações.

4 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Após acompanhar algumas aulas no Estágio Supervisionado na Educação Básica e pela minha experiência como aluna, percebo que, infelizmente, a presença da Aprendizagem dita Mecânica ainda é bem frequente no ensino. Moreira (2012c) afirma que esta é a aprendizagem que mais ocorre na escola, é

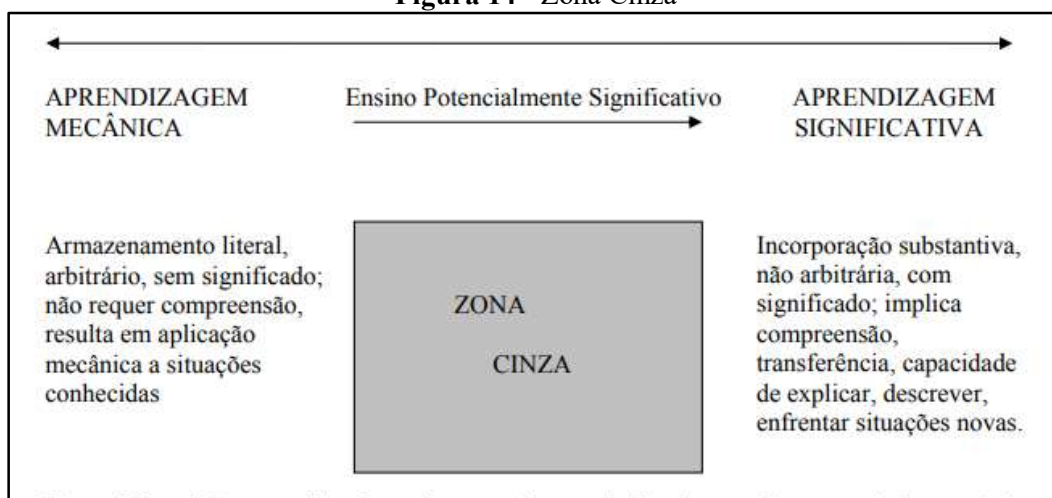
[...] aquela praticamente sem significado, puramente memorística, que serve para as provas e é esquecida, apagada, logo após. Em linguagem coloquial, a aprendizagem mecânica é a conhecida decoreba, tão utilizada pelos alunos e tão incentivada na escola (MOREIRA, 2012c, p. 12).

Quanto à Aprendizagem Mecânica, Moreira (2011b, p. 1, tradução nossa) ainda garante que “na prática, é uma grande perda de tempo”. Nesse sentido, um dos objetivos do nosso trabalho é que os alunos aprendam de maneira significativa o conteúdo de frações, que realmente saibam o que estão fazendo, não apenas decorem. De acordo com Moreira (2012c, p. 2) a Aprendizagem Significativa¹⁵ é aquela em que

[...] ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.

Moreira (2011a, p. 5) ainda ressalta que “a aprendizagem não é, necessariamente, ou significativa, ou mecânica”. Existe um processo de passagem de uma para a outra que não é natural. Para apresentar melhor essa ideia, o autor apresenta a Figura 14.

Figura 14 - Zona Cinza



Fonte: Moreira (2012c, p. 12)

¹⁵ Moreira se baseia na visão de David Ausubel quando fala sobre a Aprendizagem Significativa.

Para melhor compreensão da Figura 14, Moreira (2012c, p. 12) explica que “na prática grande parte da aprendizagem ocorre na zona intermediária desse contínuo e que um ensino potencialmente significativo pode facilitar ‘a caminhada do aluno nessa zona cinza’”.

Considerando isso, é exatamente nessa área que iremos buscar subsídios para trabalhar com o ensino de frações por meio do Cubo Mágico. Moreira (2011b, p. 1, tradução nossa) define as Unidade de Ensino Potencialmente Sigificativas (UEPS) como “sendo sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensin, aquela voltada diretamente à sala de aula”.

Moreira (2011) defendendo a utilização de Mapas Conceituais¹⁶ e também de Diagramas¹⁷, apresentou a construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), buscando uma forma sintetizada de apresentação dos principais aspectos das UEPS. Ele utiliza o chamado Diagrama V (Figura 15) como “instrumento heurístico potencialmente facilitador de uma aprendizagem significativa” pois ao utilizá-lo,

[...] o aprendiz deverá identificar os conceitos, as teorias, os registros, as metodologias, utilizados na produção de um determinado conhecimento. Com isso, provavelmente perceberá que tal conhecimento foi produzido como resposta a uma determinada pergunta. Poderá também perceber que nas perguntas está a fonte do conhecimento humano e que se as perguntas forem diferentes o conhecimento também o será. Poderá igualmente se dar conta de que se os conceitos, as teorias, os registros, as metodologias forem distintos serão outras as respostas (ou seja, o conhecimento) às perguntas-foco (MOREIRA, 2012a, p. 7).

Para exemplificar, a Figura 15 apresenta a construção de um Diagrama em V. No lado esquerdo do V encontramos a parte teórico-conceitual, que corresponde ao “pensar”, já o lado direito do V está relacionado ao domínio metodológico, que corresponde ao “fazer”. Os objetos a serem estudados encontram-se na base do V e a questão-foco está localizada no centro do V.

¹⁶ Moreira (2012b, p. 1) afirma que Mapa Conceitual é “uma estratégia potencialmente facilitadora de uma aprendizagem significativa”.

¹⁷ Moreira (2012a, p. 1) considera o Diagrama V como um “instrumento heurístico potencialmente facilitador de uma aprendizagem significativa, desde uma perspectiva epistemológica, ou seja, de conhecimento como produção humana”.

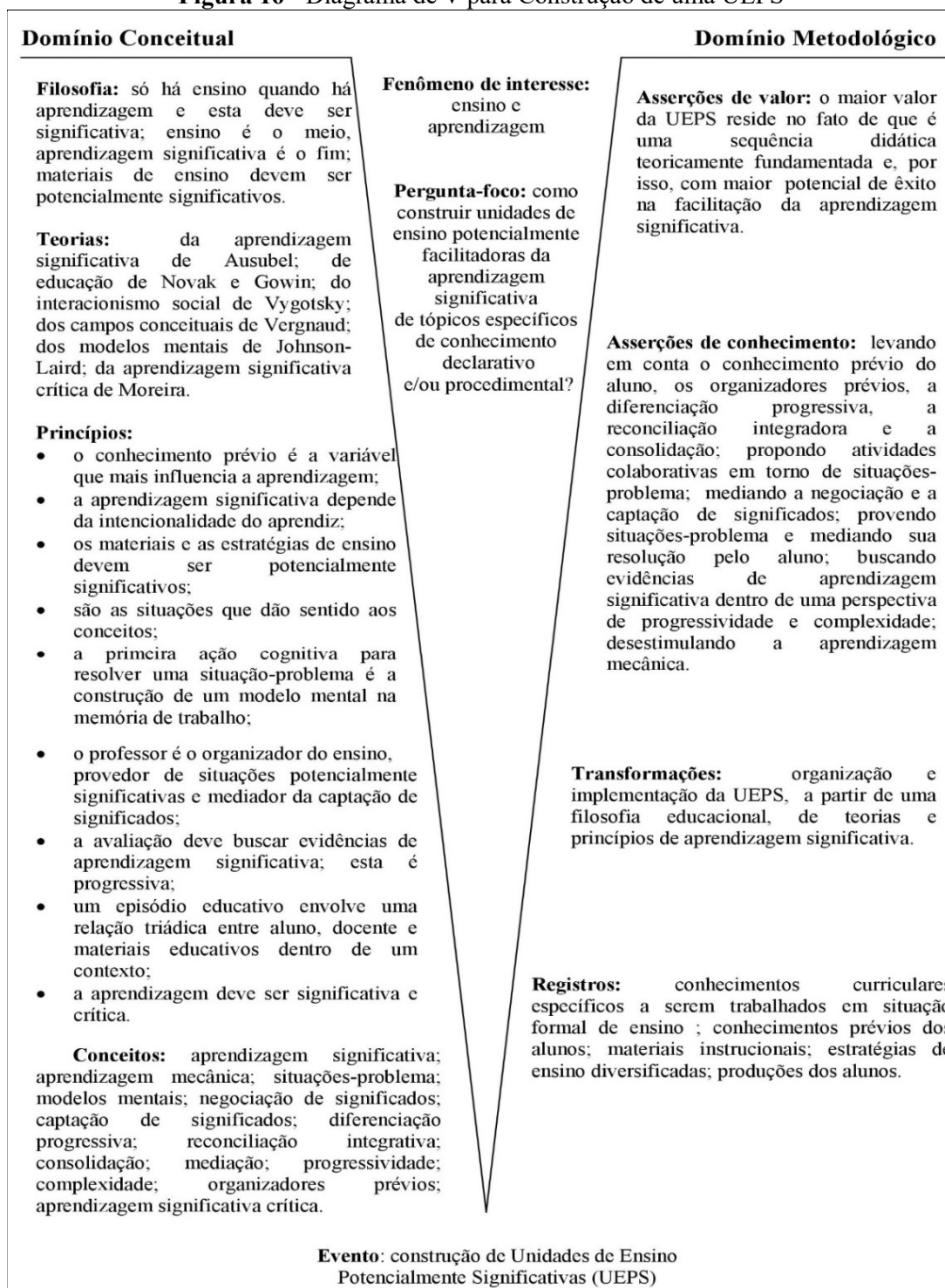
Figura 15 – Diagrama V



Fonte: Moreira (2012a, p. 3)

Para melhor relacionar o Diagrama V com o nosso estudo, temos a Figura 16 que detalha a construção de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS.

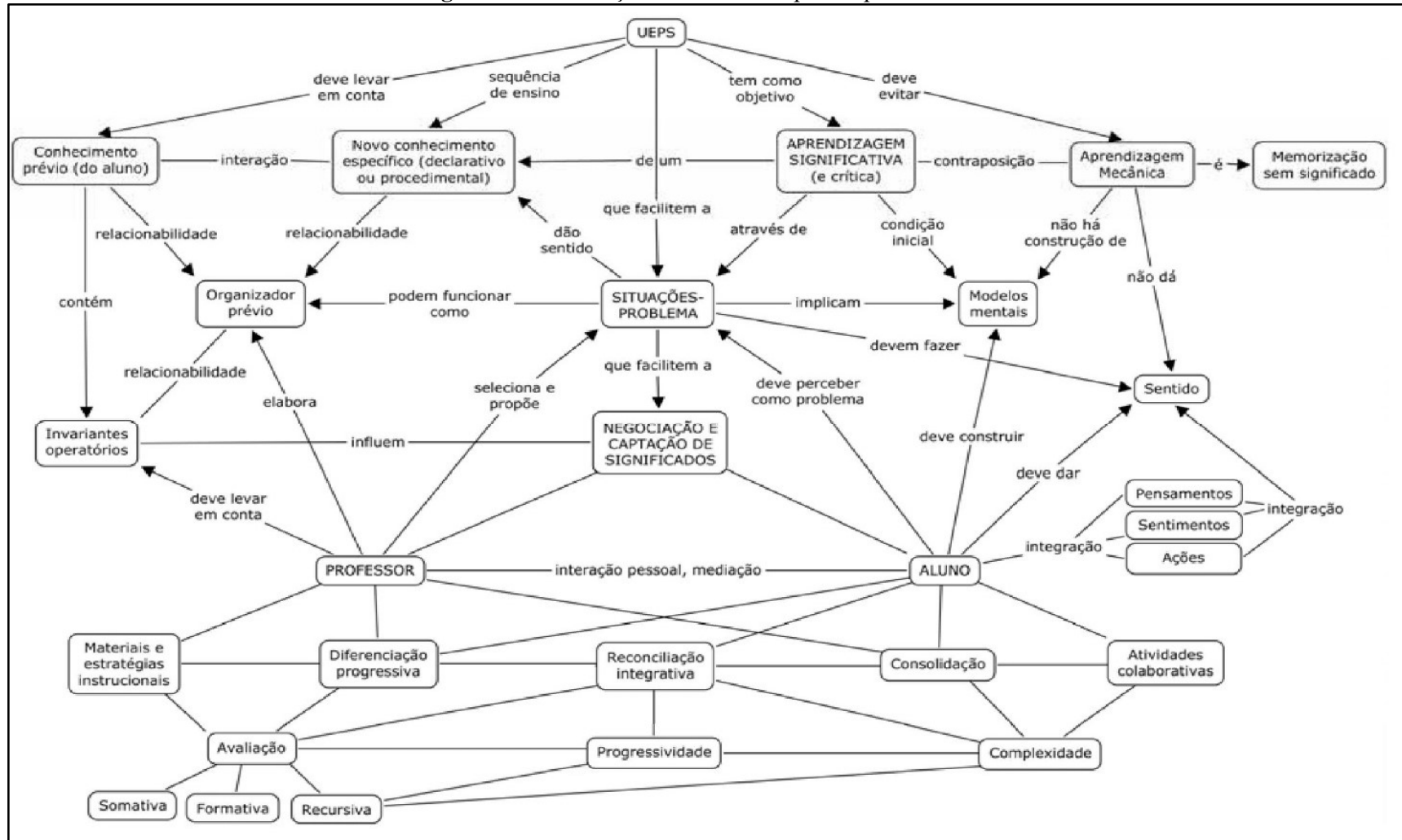
Figura 16 - Diagrama de V para Construção de uma UEPS



Fonte: Moreira (2011b, p. 5, tradução nossa)

Outro tipo de representação para a construção de uma UEPS é apresentada em forma de Mapa Conceitual, conforme a Figura 17.

Figura 17 - Construção de uma UEPS por Mapa Conceitual



Fonte: Moreira (2011b, p. 6, tradução nossa)

O Mapa Conceitual¹⁸ apresentado na Figura 17 mostra alguns conceitos extremamente importantes para a Aprendizagem Significativa. Segundo Moreira (2011b) os *Invariantes Operacionais* que podem ser do tipo teoremas-em-ação¹⁹, ou seja, operações que os estudantes entendem como verdadeiro; os conceitos-em-ação que são os pensamentos considerados relevantes. Outro conceito importante é a *Diferenciação Progressiva* que trata do processo que acontece quando se tem uma ideia mais geral de algum assunto e que, progressivamente, vai se diferenciando de ideias mais específicas.

A *Reconciliação Integrativa* é a reorganização e integração de alguns conceitos já aprendidos com novos conceitos. Os *organizadores prévios* podem ser considerados uma espécie de ponte entre os conhecimentos que o aluno já tem com aqueles que deve atingir.

Para a construção de uma UEPS, além da atenção que deve ser dada aos princípios apresentados no Diagrama da Figura 16, existem também alguns passos que devem ser seguidos. Moreira (2011b, tradução nossa) os apresenta de maneira detalhada.

1. Definir o tópico específico a ser abordado;
2. Criar/propor situação(ões) que levem o aluno a externalizar os conhecimentos prévios;
3. Propor situações-problemas em nível bem introdutório;
4. Apresentar o conhecimento a ser ensinado;
5. Retomar aspectos mais gerais em nível mais alto de complexidade;
6. Retomar as características mais relevantes do conteúdo em questão;
7. A avaliação acontece de maneira somativa individual a partir do sexto passo;
8. A UEPS somente será considerada exitosa se os alunos conseguirem compreender, explicar e resolver situações – problemas.

Esses serão os passos que seguiremos para montar nossa proposta de ensino e aprendizagem. Em uma experiência, Nunes (2015) utilizou uma UEPS para trabalhar estatística com alunos do Ensino Médio e, em suas conclusões sobre as atividades realizadas, afirmou que

[...] a participação de forma mais ativa dos estudantes favoreceu o processo de ensino e aprendizagem e, por consequência, proporcionou a construção de um conhecimento mais rico em significados. A partir da análise dos dados

¹⁸ Técnica desenvolvida por Joseph Novak.

¹⁹ Moreira trás os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação baseando-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

produzidos, observou-se que o material construído, fundamentado nos conhecimentos prévios dos alunos, constitui-se uma alternativa muito rica, eficiente e viável no processo de construção do conhecimento (NUNES, 2015, p. 71).

Diferente de Nunes (2015), Santos e Rosa (2018) utilizaram uma UEPS para trabalhar o mesmo conteúdo, porém, com o Ensino Fundamental. As autoras também tiveram um aproveitamento positivo após a aplicação das atividades, afirmando que a UEPS em termos didáticos,

[...] se mostrou uma importante ferramenta favorecendo a motivação, o envolvimento, a participação e a busca por conhecimentos. Em relação aos objetivos educacionais, a UEPS demonstrou sua potencialidade em termos de ativação dos conhecimentos prévios e de confronto entre os novos conhecimentos (SANTOS; ROSA, 2018, p. 70).

A partir desses resultados positivos, no próximo capítulo, apresentamos as UEPS elaboradas para o ensino de frações utilizando o Cubo Mágico.

5 PROPOSTA

Neste Capítulo apresentamos cinco propostas de Unidades de Ensino Potencialmente Significativa – UEPS. Todas abordarão o conteúdo de frações, porém, cada uma delas trará uma interpretação diferente de frações conforme apresentado no Capítulo 3 deste trabalho. Considerando o fato de que em grande parte dos casos as turmas são numerosas e não há materiais manipuláveis nos colégios, todas as nossas propostas serão trabalhadas com a quantidade de Cubos disponíveis, visando assim, um menor custo e de certa forma, uma maior interação entre os alunos, visto que as atividades colaborativas ajudam no desenvolvimento dos alunos. Ressaltamos que as atividades podem ser adaptadas para se trabalhar individualmente ou em um número maior de grupos.

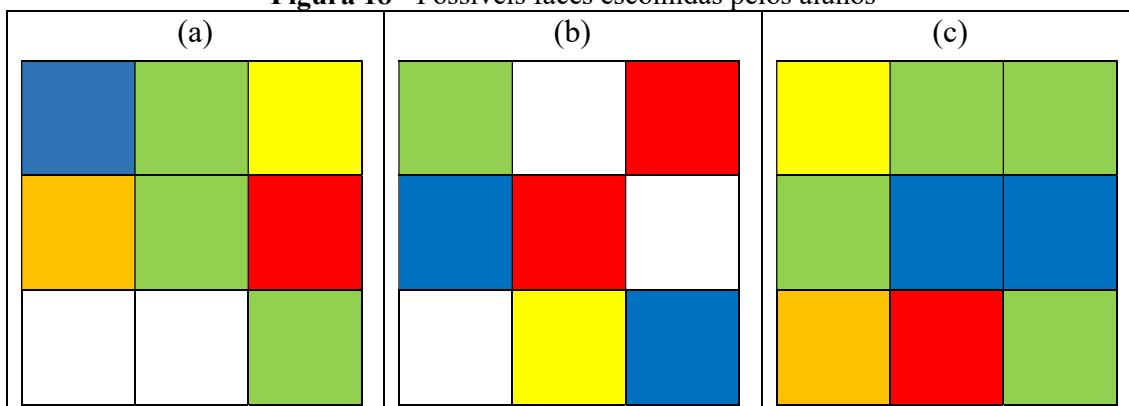
5.1 UEPS PARA FRAÇÕES COMO NÚMERO

Objetivo: ensinar aos alunos a interpretação de frações como número utilizando o Cubo Mágico.

Sequência:

1. *Tópico Abordado:* Considerando que os alunos já tenham conhecimento do que é uma fração, a proposta da sequência é utilizar o Cubo Mágico como instrumento para que os alunos consigam interpretar como número. O trabalho é proposto em três grupos, ou seja, temos três Cubos Mágicos em sala de aula (conforme citado anteriormente, a atividade pode se estender a mais grupos ou até mesmo de forma individual).
2. *Situação Inicial:* Entrega-se a cada um dos grupos um Cubo Mágico de modo que esteja embaralhado. Inicialmente, cada grupo deve escolher aleatoriamente uma face do cubo. Após cada grupo ter escolhido uma face, pede-se para que um aluno de cada grupo apresente a face para o restante da sala e deixe o Cubo Mágico em cima de uma mesa disposta em frente ao quadro. Tendo as três faces escolhidas e apresentadas a turma, escolhe-se então uma cor. Para melhor exemplificar, apresentamos nas Figuras 18a, 18b e 18c três faces montadas arbitrariamente e consideramos a cor verde, como a escolhida.

Figura 18 - Possíveis faces escolhidas pelos alunos



Fonte: Da autora

Pede-se para que aos alunos representem essas faces em seus cadernos e escrevam ao lado de cada uma delas a fração que representa os quadradinhos verdes com relação a cada uma das três faces. Supondo que eles encontrem as frações corretas, ou seja, para as faces a, b e c temos respectivamente $\frac{3}{9}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{4}{9}$.

3. *Situação – Problema introdutório:* Cada grupo deve organizar essas três faces de maneira crescente e explicar aos outros grupos como chegaram a essa ordem. Essa atividade deve se repetir alterando as cores. No decorrer da atividade alguns questionamentos também devem aparecer, como por exemplo:

- De que maneira a face do Cubo Mágico deve estar organizado para que represente a menor fração de quadradinhos verdes (por exemplo) com relação a face?
- De que maneira a face do Cubo Mágico deve estar organizado para que represente a maior fração de quadradinhos verdes (por exemplo) com relação a face?

4. *As frações como número:* Nesse momento, cabe ao professor realizar uma breve exposição oral sobre o tratamento das frações como número.

5. *Situação – Problema em nível mais alto de complexidade:* Os alunos devem realizar a mesma atividade proposta anteriormente, porém, considerando agora não apenas uma das faces, mas sim o Cubo Todo. Nesse momento é interessante que o cubo esteja marcado para que possa ser possível analisar e coletar os dados de todas as faces. Para melhor exemplificar, vamos utilizar as mesmas faces da atividade anterior (Figuras 18a, 18b e 18c). Encontramos respectivamente $\frac{3}{54}$, $\frac{1}{54}$ e $\frac{4}{54}$ de quadradinhos verdes na face com relação ao Cubo. Os alunos devem

registrar todas as frações que representam os quadradinhos de todas as cores, uma a uma, em relação ao Cubo Mágico conforme o Quadro 2, que foi preenchido de forma arbitrária.

Quadro 2 - Possíveis frações encontradas

	Face 1	Face 2	Face 3	Face 4	Face 5	Face 6
Azul	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
Amarelo	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	0
Branco	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
Laranjada	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{3}{9}$	0
Verde	$\frac{3}{9}$	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
Vermelho	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{5}{9}$

Fonte: Da autora

Com base no preenchimento do Quadro os alunos devem novamente colocar as frações em ordem crescente. Posteriormente os Cubos serão comparados entre si utilizando as frações encontradas. Eles devem buscar, por exemplo, dentre os 3 Cubos, qual a face que tem a maior representação de quadradinhos vermelhos com relação ao cubo.

6. *Revisão*: Cabe ao professor nesse momento retomar os aspectos mais importantes sobre as *frações como números*, podendo por exemplo, comparar as frações encontradas na primeira atividade com as encontradas na segunda, visto que, até o momento, os alunos só compararam frações com o mesmo denominador.
7. *Avaliação*²⁰: A avaliação dos alunos é realizada de maneira formativa, ou seja, serão considerados os registros feitos pelos alunos, bem como realizados pelo professor e também, através de uma avaliação somativa individual com questões/situações.
8. *Avaliação da UEPS*: Esta se dará de acordo com evidências identificadas sobre aspectos que apresentem uma aprendizagem significativa por parte dos alunos.

²⁰ De acordo com Moreira (2012) a avaliação da aprendizagem através da UEPS deve ser feita ao longo de sua implementação, registrando tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado; além disso, deve haver uma avaliação somativa individual após o sexto passo, na qual deverão ser propostas questões/situações que impliquem compreensão, que evidenciem captação de significados e, idealmente, alguma capacidade de transferência; tais questões/situações deverão ser previamente validadas por cinco professores experientes na matéria de ensino; a avaliação do desempenho do aluno na UEPS deverá estar baseada, em pé de igualdade, tanto na avaliação formativa (situações, tarefas resolvidas colaborativamente, registros do professor) como na avaliação somativa.

5.2 UEPS PARA FRAÇÕES COMO PARTE-TODO

Objetivo: Utilizar o método das camadas²¹ para a montagem do Cubo Mágico com o intuito de introduzir o conteúdo de frações.

Sequência:

1. *Tópico Abordado:* Pretende-se introduzir o conteúdo de frações através da resolução do Cubo Mágico pelo Método das Camadas. Para tal, sugerimos a utilização de jogos online do Cubo Mágico, como por exemplo 3D Rubik's Cube²² e o Cubo Mágico (Cubo de Rubik)²³
2. *Situação Inicial:* Considerando que os alunos ainda não conhecem as frações, em posse de um Cubo Mágico, o professor deve introduzir o conteúdo considerando uma face do mesmo e, a partir dela, encontrar as frações presentes de acordo com a cores. Nesse momento deve-se também mostrar o que é um denominador e o que é numerador.
3. *Situação – Problema introdutório:* Para se familiararem com o *software* o professor deve pedir aos alunos que organizem o Cubo Mágico de modo a encontrar, por exemplo:
 - $\frac{2}{9}$ de quadradinhos amarelos com relação a face;
 - $\frac{1}{9}$ de quadradinhos brancos com relação a face;
 - $\frac{4}{9}$ de quadradinhos vermelhos com relação a face;

Os alunos serão orientados a salvar (podendo ser em forma de print) cada representação dessas frações para posteriormente encaminhar para o professor, pois as mesmas serão somadas à avaliação.
4. *A fração como parte-todo:* Aproveitando que os alunos estão utilizando o computador para realizar as atividades propostas, nesse momento, o professor

²¹ O método das camadas é um algoritmo de montagem do Cubo Mágico. Ainda nesta sessão explanaremos sobre o mesmo.

²² Disponível em: <https://www.jogos360.com.br/3d_rubiks_cube.html> Acesso em: 29 mai. 2019.

²³ Disponível em: <<http://passatempo.ig.com.br/jogos/cubo-magico/>>. Acesso em: 29 mai. 2019.

poderá pedir para que os mesmos assistam o vídeo – Curtas Matemático – Conceito de Frações²⁴ que fala sobre frações. O curta indicado mostra a presença das frações em outras situações diferentes do Cubo Mágico, apresenta também, que as frações podem ser representadas de forma decimal e que podem ser operadas entre si.

5. *Situação – Problema em nível mais alto de complexidade:* A partir de agora, vamos utilizar o Método das Camadas para resolver o Cubo Mágico. Nesse momento, os alunos receberão a sequência de passos²⁵ a serem seguidos e deverão responder às perguntas feitas para que sirvam como forma de avaliação. A Figura 19 apresenta os resultados de cada passo após realizados alguns movimentos e é com base nesses resultados que os alunos deverão responder as questões.

Figura 19 - Passos do Método das Camadas



Fonte: Site Cubo Velocidade²⁶

- Qual a fração que representa a quantidade de quadradinhos brancos com relação a face do 1º passo? E com relação ao Cubo inteiro?
- Considerando a face da Cruz Branca no 2º passo, qual a fração de quadradinhos Brancos que faltam para completar a face inteira?
- No 3º passo temos uma face inteira de quadradinhos brancos. Existe alguma

²⁴ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=LP8GZ1E9I5o>>. Acesso em: 29 mai. 2019

²⁵ A sequência mais detalhada está disponível em: <<http://www.cinoto.com.br/camadas/camadas.pdf>>. Acesso em: 29 mai. 2019.

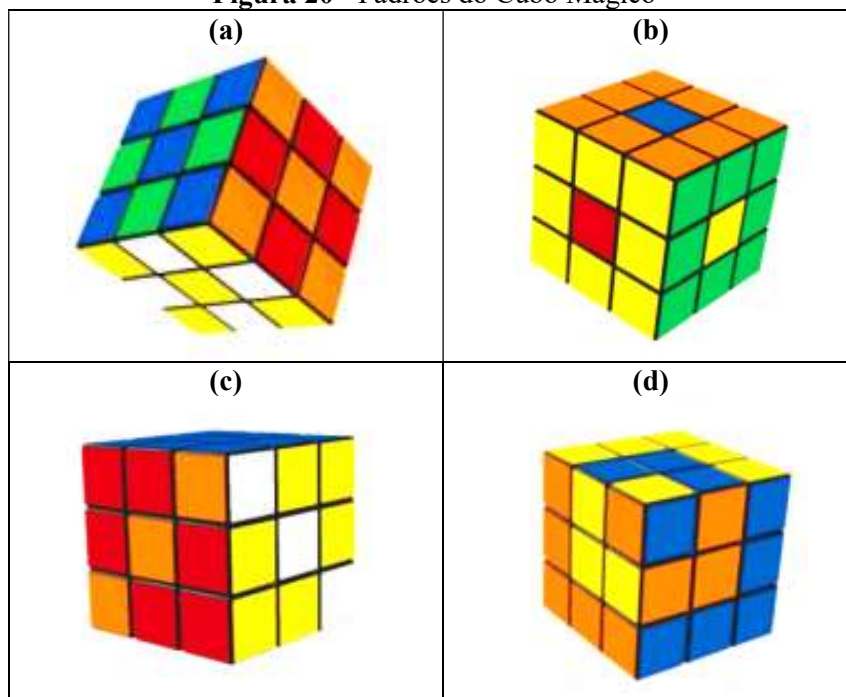
²⁶ Disponível em: <<http://www.cubovelocidade.com.br/tutoriais/cubo-magico-basico-metodo-camadas-1-passo-cruz-branca.html>>. Acesso em: 29 mai. 2019

fração que represente essa face com relação a ela mesma? E com relação ao Cubo Mágico inteiro?

- No 4º passo quantos quadradinhos já estão em seus devidos lugares considerando o Cubo Mágico inteiro?
- No 5º passo encontramos uma Cruz Amarela, qual a fração que a representa em relação a face? O que você pode dizer sobre a relação dessa fração com a fração encontrada no 2º passo?
- No 6º passo, considere apenas as duas camadas já montadas de cada face lateral. Qual fração essa duas camadas representam em relação a face? Você consegue representar essa fração de alguma outra forma?
- No 7º passo, o Cubo está quase montado. Qual a fração que representa as peças que estão em seu lugar e as que não estão? Você consegue somar essas duas frações? O que conclui?
- No 8º passo temos o Cubo Mágico montado, existe uma fração que possa representá-lo?

Agora que os alunos conseguiram montar o Cubo Mágico, os mesmos podem ser desafiados a tentarem montar alguns padrões diferentes do Cubo Mágico, como apresentam as Figuras 20a, 20b, 20c e 20d.

Figura 20 - Padrões do Cubo Mágico



Fonte: Barbosa (2018, p. 28-29)

A Figura 20a, representa o padrão conhecido como xadrez. Six Hole é o nome dado ao padrão apresentado na Figura 20b. O Cubo Mágico da Figura 20c, é denominado de padrão ziguezague e na Figura 20d conhecemos o padrão cubo no cubo. São esses alguns padrões em que os alunos podem também encontrar frações representantes.

6. *Revisão*: Através de uma exposição oral, o professor deve nesse momento retomar os aspectos mais relevantes da aula, questionando os alunos sobre o que aprenderam, reforçando a ideia de numerador e denominador. Deve também conversar com os alunos sobre as respostas que deram às perguntas realizadas, se conseguiram realizar a soma das frações mesmo sem terem estudado sobre as operações, em resumo, uma conversa com os alunos para captar os sinais de uma possível Aprendizagem Significativa.
7. *Avaliação*: A avaliação dos alunos é realizada de forma somativa analisando o envio das atividades e também de maneira formativa considerando as atividades respondidas de maneira colaborativa e também por possíveis registros do professor.
8. *Avaliação da UEPS*: Esta se dará de acordo com evidências sobre aspectos que apresentem uma Aprendizagem Significativa por parte dos alunos. Essas evidências poderão ser percebidas durante a conversa no momento da revisão, bem como nos registros entregues ao professor.

5.3 UEPS PARA FRAÇÕES COMO MEDIDA

Objetivo: Apoderar-se do Cubo Mágico, para trabalhar a interpretação do Cubo Mágico como medida.

Sequência:

1. *Tópico Abordado*: Vamos trabalhar com a interpretação de frações como medida usando o Cubo Mágico como material potencialmente significativo.
2. *Situação Inicial*: Partindo do pressuposto que os alunos já conheçam as frações como parte-todo, vamos agora auxiliá-los a interpretá-las como medida, mais especificamente, relacionando com probabilidade.

3. *Situação – Problema introdutório*: Para dar início às atividades a turma irá construir uma réplica de um Cubo Mágico gigante. Esse pode ser confeccionado com papelão, EVA ou qualquer outro material. Vale ressaltar, que o cubo deve ser colorido de modo a estar com cada face de uma cor. Esse Cubo será utilizado como ferramenta na atividade inicial. A partir dele serão levantados alguns questionamentos que devem ser registrados pelos alunos, como por exemplo:

- Arremessando o Cubo Mágico, qual a chance da cor vermelha ficar em cima?
- E a cor verde, tem mais chance de ficar em cima do que a vermelha? Por quê?
- E qual a chance da cor vermelha ficar embaixo após o Cubo ser lançado?
- E a chance da cor verde ficar em uma das laterais?

4. *A fração como medida*: Neste momento em forma oral o professor explica que essa chance de algo acontecer é também conhecida como probabilidade e em muitos casos é representada na forma de fração. Neste caso a fração $\frac{1}{6}$ por exemplo, também pode ser lida como “a probabilidade é de uma em seis”, ou seja, a chance da cor vermelha ficar para cima é de 1 entre 6.

5. *Situação – Problema em nível mais alto de complexidade*: Neste momento, deixa-se de lado o Cubo Mágico construído e trabalha-se inicialmente com dois Cubos Mágicos normais, organizados de modo a estarem com uma cor em cada face. Os mesmos devem ser colocados em uma sacola/caixa e mais uma vez os alunos precisam registrar as respostas dos questionamentos.

- Qual a probabilidade de tirar um dos Cubos Mágicos da sacola/caixa e a cor branca estar para cima? E para baixo?
- Qual a probabilidade da cor do Cubo Mágico retirado estar com a cor Azul ou Amarela para baixo.

Pode-se ir aumentando o número de Cubos e também com o passar das atividades os Cubos podem ser embaralhados para dificultar o nível das questões.

6. *Revisão*: Este é o momento de retomar o que foi visto, reforçar o fato de entender a fração não somente como uma parte de um todo. É possível nesse momento, que os alunos elaborem um mapa conceitual, para mostrarem o que sabem sobre as frações.

7. *Avaliação:* A avaliação é será baseada nas atividades e registros realizados pelos alunos no decorrer da atividade.
8. *Avaliação da UEPS:* Esta acontecerá em função dos rendimentos de aprendizagem obtidos .

5.4 UEPS PARA FRAÇÕES COMO QUOCIENTE

Objetivo: Ensinar divisão de frações utilizando o Cubo Mágico como ferramenta de ensino

Sequência:

1. *Tópico Abordado:* Iremos realizar uma atividade de divisão de frações utilizando o Cubo Mágico em busca de uma Aprendizagem Significativa.
2. *Situação Inicial:* Partindo do pressuposto que os alunos já tenham trabalhado as operações de soma, subtração e multiplicação de frações, vamos agora propor a divisão.
3. *Situação – Problema introdutório:* Os alunos já trabalharam com soma, subtração e multiplicação de frações, porém, sem o auxílio do Cubo Mágico. Portanto, vamos iniciar a aula com uma atividade que tenha três grupos identificados como A, B e C. Estipula-se uma cor, os grupos A e B escolhem uma face do Cubo Mágico e apresentam a fração que representa o número de quadradinhos da determinada cor em relação a face e o Grupo C precisa manusear o seu Cubo Mágico para encontrar as frações que representam a soma, subtração e multiplicação das frações dadas pelos grupos A e B. A atividade deve ser registrada por todos os alunos e todos os grupos devem ter a sua vez de encontrar as respostas das operações das frações. Caso haja a possibilidade de se ter mais cubos mágicos, a atividade pode ser realizada com mais grupos.
4. *A fração como quociente:* Neste momento o professor explica aos alunos que da mesma forma que ocorre com os números inteiros, nas

frações também é possível realizar as 4 operações, soma, subtração, multiplicação e também a divisão. Esta divisão pode ser com números inteiros, como por exemplo considerar que uma face do cubo é dividida em 9 partes iguais e também pode acontecer entre frações, que é o que será estudado na aula.

5. *Situação – Problema em nível mais alto de complexidade:* Repete-se a atividade anterior, porém agora utilizando a operação de divisão. No decorrer da atividade, deve-se pedir aos alunos que um dos grupos considere a fração em relação a face e o outro em relação ao Cubo Mágico.
6. *Revisão:* Para revisar o conteúdo o professor poderá apresentar o vídeo – Curtas Matemáticos – Operação de divisão de frações²⁷ que retoma o conteúdo de divisão de frações de maneira dinâmica.
7. *Avaliação:* A avaliação dos alunos acontecerá de maneira formativa analisando o desempenho dos grupos nas atividades colaborativas propostas e também através dos registros individuais de cada aluno.
8. *Avaliação da UEPS:* Esta acontece através da percepção de indícios e sinais de uma Aprendizagem Significativa.

5.5 UEPS PARA FRAÇÕES COMO OPERADOR MULTIPLICATIVO

Objetivo: Interpretar frações como operador multiplicativo.

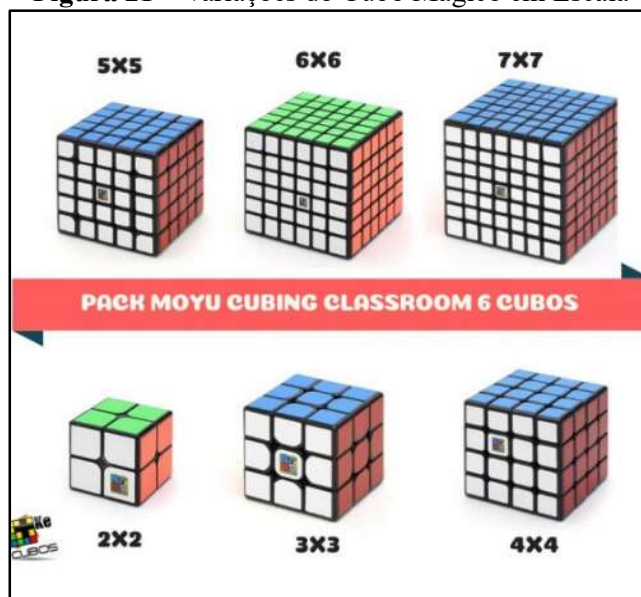
Sequência:

1. *Tópico Abordado:* Entender as frações como operador multiplicativo. Esta interpretação está relacionada às transformações.
2. *Situação Inicial:* Considerando que os alunos já conhecem as frações e trabalharam com as operações, vamos agora realizar uma atividade relacionada a escalas.
3. *Situação – Problema introdutório:* Para que o alunos tenham ideia do que irá acontecer na sequência da aula, o professor apresenta aos

²⁷ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Pa1MThytviU>> Acesso em: 31 mai. 2019.

mesmos algumas variações do Cubo Mágico como mostra a Figura 21.

Figura 21 – Variações do Cubo Mágico em Escala



Fonte: Site MaskeCubos²⁸

O professor pede para que os alunos encontrem o denominador de uma possível fração considerando uma das faces e também o Cubo todo para cada uma das variações do Cubo. Na sequência, o professor pede para que os alunos desenhem uma face de Cubo 2x2 e pintem $\frac{1}{2}$ desta face da cor que preferirem e depois desenhem uma face de um Cubo 4x4 e pintem $\frac{1}{2}$ da face da mesma cor e digam qual outra fração também representa a pintura encontrada (Neste caso seria $\frac{8}{16}$).

4. *A fração como operador multiplicativo:* Neste momento o professor indaga os alunos, perguntando quantos quadrinhos pintaram no Cubo 4x4 e como chegaram a isso. Espera-se que os alunos digam que foi pintando a metade dos quadrinhos. O professor questiona então se eles conseguiriam encontrar essa fração sem que pudessem desenhar e então, passa a explicar que seria preciso encontrar $\frac{1}{2}$ de 16, onde 16 é o número máximo de quadrinhos da face do Cubo 4x4 e que para calcular seria preciso pensar da seguinte maneira:

Como o Cubo 4x4 é maior que o Cubo 2x2, é preciso aumentar essa fração dada de modo que o denominador dessa nova fração seja 16. Pode-se então pensar em qual

²⁸ Disponível em: <<https://www.maskecubos.com/pt/casa/1376-pack-moyu-cubing-classroom-6-6970647065103.html>>. Acesso em: 31 mai. 2019.

número multiplicado por 2 que encontra-se 16.

$$\frac{8}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Mas que isso pode ser feito também de outra maneira, realizando uma multiplicação cruzada considerando o seguinte:

- 4 (que é o denominador do Cubo 2x2) está pra 16 (que é denominador do Cubo 4x4), assim como 2 (que é o numerador do Cubo 2x2) está para x (que é o numerador do Cubo 4x4 que queremos encontrar).

$$\begin{aligned} \frac{4}{16} &= \frac{2}{x} \\ 4x &= 16 \cdot 2 \\ x &= \frac{32}{4} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Realizando essas operações, eles encontrarão o número de quadrinhos que devem ser pintados no Cubo 4x4 e, conseqüentemente, a fração que representa $\frac{8}{16}$.

5. *Situação – Problema em nível mais alto de complexidade:* Nesse momento os alunos devem praticar o que foi explicado. O professor deve dar algumas frações e pedir para que os alunos encontrem uma fração que represente essa fração em um Cubo maior, considerando a face e também o Cubo todo.
6. *Revisão:* Como forma de revisão o professor poderá resolver de maneira colaborativa alguns exercícios propostos, aproveitando para sanar todas as possíveis dúvidas que podem vir a surgir.
7. *Avaliação:* A avaliação acontecerá por meio das atividades entregues pelos alunos e também pelo entrosamento no momento da revisão.
8. *Avaliação da UEPS:* A avaliação acontece através da percepção de indicativos de uma Aprendizagem Significativa.

Assim, essas Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS buscam criar um ambiente lúdico de ensino de frações utilizando o Cubo Mágico. E mais do que isso, procura ensinar os cinco tipos de fração apresentados por Campos, Magina e Nunes (2006), ou seja, número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

6 CONCLUSÃO

Nosso ponto de partida para a presente pesquisa era verificar a possibilidade de elaborar uma sequência lúdica para o ensino de frações. O lúdico escolhido para elaborar tal sequência foi o Cubo Mágico, considerado um objeto que prende a atenção e que é mundialmente conhecido. Após realizar um levantamento bibliográfico sobre a utilização do mesmo como ferramenta de ensino, percebemos a existência de algumas propostas e também de algumas experiências que trouxeram resultados positivos e satisfatórios. Esses resultados nos motivaram ainda mais na decisão de continuar utilizando o Cubo Mágico enquanto material para o ensino de frações.

O Cubo Mágico possui uma usabilidade muito vasta para o ensino. Percebemos por meio da pesquisa bibliográfica realizada que o Cubo pode ser utilizado não somente para o ensino de frações, mas também para demais conteúdos matemáticos. Além disso, é uma alternativa para ser utilizada não somente na Educação Básica, mas também no Ensino Superior. Sua possibilidade como ferramenta de ensino para alunos inclusos também pode ser viabilizada.

A partir do referencial teórico, evidenciamos, com base em outros autores, que uma das grandes falhas no processo de ensino do conteúdo de frações está relacionada à parte conceitual, que normamente está voltada apenas para o conceito de fração como parte-todo, deixando de lado o entendimento de frações como: número, medida, quociente e operador multiplicativo.

A respeito da aprendizagem, buscamos na Aprendizagem Significativa, meios de compreender como passar da aprendizagem mecânica para uma aprendizagem que seja potencialmente significativa. Nesse contexto, a utilização das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas puderam nos direcionar na elaboração de propostas de ensino que atendessem aos critérios de apresentar as diferentes compreensões de fração.

Assim, elaboramos cinco propostas para o ensino de frações tendo o Cubo Mágico como ferramenta de ensino e as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS foram nosso guia.

A utilização das UEPS permitiram, utilizando o Cubo Mágico, a oportunidade de trabalhar com frações englobando as diferentes perspectivas do conceito de fração, cobrindo assim, uma das possíveis lacunas existentes no processo de ensino deste conteúdo. Vale ressaltar que cada uma das propostas elaboradas apresenta as frações com

uma de suas nuances, visando assim apresentar essa diferença aos alunos. As sequências podem ser utilizadas em qualquer ordem, já que não existe uma prioridade de ensino em relação às diferentes formas de compreender as frações.

Destacamos que as sequências foram elaboradas com o intuito de auxiliar professores que buscam novas metodologias de ensino e estão dispostos a trabalhar com aulas diferenciadas. Além disso, acreditamos que o uso dessas sequências em consonância com o Cubo Mágico podem ser motivadores para os alunos, tornando a aprendizagem menos complicada e mais prazerosa. Esperamos que os alunos demonstrem interesse e consigam compreender de forma significativa os conteúdos relacionados a frações que estão presentes nas sequências didáticas elaboradas.

Uma das implicações com a qual nos deparamos no decorrer da pesquisa foi o custo para trabalhar com Cubo Mágico, visto que, normalmente as turmas são numerosas. Justamente para resolver esse problema, nossas UEPS foram elaboradas pensando na utilização de três Cubos Mágicos por turma. Além disso, pensamos na utilização de tecnologias digitais (como smartphones), o que reduz consideravelmente o gasto para trabalhar com tal. Caso exista a possibilidade de cada aluno ter seu próprio Cubo Mágico para manusear, as propostas podem ser adaptadas.

Por fim, acreditamos que o Cubo Mágico pode ser um material potencialmente significativo com inúmeras possibilidades. Em nosso trabalho, apresentamos apenas algumas, não aplicando a proposta. Assim, como sugestão de uma pesquisa futura, pensamos que seja importante aplicar a sequência e realizar uma análise a partir dos dados coletados, afim de sugerir melhorias.

7 REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS UTILIZADAS

ALVES, Denis Rogério Sanches. MARTENS, Adam Santos. Desafios para a construção do conhecimento de frações nas séries intermediárias do Ensino Fundamental. 2011. In: Educere – Congresso Nacional de Educação, X, **Anais...**, Curitiba: Paraná. Disponível em: <http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/6413_3640.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2019.

ARAÚJO, Marlene Gorete de. **Uso do Cubo Mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático**. 2016. 66 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 2016. Disponível em: <https://memoria.ifrn.edu.br/bitstream/handle/1044/837/TCC_MARLENE-GORETE-DE-ARAUJO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 15 mai. 2019.

BARBOSA, Fernando Vieira. **O Cubo Mágico de Rubik: teoria, prática e arte**. 2018. 64 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade de Brasília, Brasília – DF, 2018. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5663228>. Acesso em: 15 jun. 2019.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 15 jun. 2019.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental** – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em 15 mai. 2019.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 125-136, 2006. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/545/433>>. Acesso em: 23 mar. 2019.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; RODRIGUES, Wilson Roberto. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, SC, v. 2, n. 4, p. 68-93, 2007. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12992>>. Acesso em: 07 nov. 2018.

CINOTO, Rafael Werneck; DIAS, David Pires. Ensino de análise combinatória usando o cubo mágico. 2014. In: Jornada das Licenciaturas da USP/IX Semana da Licenciatura em Ciências Exatas – SeLic. V, **Anais...** São Carlos: São Paulo. 2014. Disponível em: <<http://vjornadalicenciaturas.icmc.usp.br/CD/EIXO%202/210.pdf>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática, 2009

DELLINGHAUSEN, Fernanda; LEMOS, Andrielly Viana; KAIBER, Carmen Teresa. Experiências vivenciadas no subprojeto matemática do Pibid/Ulbra. 2017. In: Congresso Nacional de Ensino da Matemática, VII, **Anais...**, Canoas: Rio Grande do Sul, 2017. Disponível em:

<<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/8125/3849>>.

Acesso em: 17 maio 2019.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.** Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>>. Acesso em: 01 mai. 2019.

FONSECA, João José Saraiva. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UECE, 2002. Apostila. Disponível em: <<http://www.ia.ufrj.br/ppgea/conteudo/conteudo-2012-1/1SF/Sandra/apostilaMetodologia.pdf>> Acesso em: 23 jun. 2019

GARCIA, Tânia Marli Rocha; ROCHA, Márcio Roberto da; OLIVEIRA, Laís Maria Costa Pires de. **Educação Matemática de Professores que ensinam matemática: (re)pensando o ensino de frações**. 2014. In: EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, **Anais...**, Campo Mourão: Paraná, 2014. Disponível em: <<http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/MINICURSOS/titulo/MC006.pdf>>. Acesso em: 01 mai. 2019.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**. 6ª edição. 7º ano. São Paulo: Editora Atual, 2009.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática**. 1ª edição. 8º ano. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

LOPES, Antônio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 1-12, 2008. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883002.pdf>>. Acesso em: 15 jun. 2019.

MAGINA, Sandra. CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. A fração na perspectiva do professor e do aluno das séries iniciais da escolarização brasileira. 2006. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática, XI, **Anais...** Curitiba, PR. 2006. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/artigo_magina_e_campos_fracao.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2019.

MOREIRA, Marcos Antonio. O abandono da narrativa, ensino centrado no aluno e aprender a aprender criativamente. **REMPEC - Ensino, Saúde e Ambiente**, v.4, n. 1, p. 2-17, 2011a. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/~moreira/Abandonoport.pdf>> Acesso em: 27 jun. 2019.

MOREIRA, Marcos Antonio. Unidades de enseñanza potencialmente significativas. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 2, p. 43-63, 2011b. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf>. Acesso em: 20 abr. 2019.

MOREIRA, Marcos Antonio. Diagrama V e Aprendizagem Significativa. **Revista Chilena de Educação Científica**, vol. 6, n. 2, p. 3-12, 2012a. Disponível em: <

<http://moreira.if.ufrgs.br/DIAGRAMASpor.pdf> > Acesso em: 27 jun. 2019.

MOREIRA, Marcos Antonio. Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa. **Revista Chilena de Educação Científica**, vol. 4, n. 2, p 38-44, 2012b. Disponível em: < <http://moreira.if.ufrgs.br/mapasport.pdf> > Acesso em: 27 jun. 2019.

MOREIRA, Marcos Antonio. O que é afinal aprendizagem significativa? **Quriculum**, La Laguna – Espanha, 2012c. Disponível em: <<http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>>. Acesso em: 7 abr. 2019.

NUNES, Camila da Silva. **Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) para o ensino de estatística na Educação Básica**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Luterana do Brasil, Canoas – Rio Grande do Sul, 2015. Disponível em: <<http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/218/210>>. Acesso em: 15 jun. 2019

OLIVEIRA, Juliana Ribeiro de. **O prazer de aprender brincando**. 2011. 39 f. Monografia (Especialização em Psicopedagogia) – Programa de Pós-Graduação Lato “Sensu” em Psicopedagogia, Universidade Candido Mendes – Niterói, 2011. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/N203980.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2019.

SANTOS, Aparecido dos. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental**. 2005. Dissertação (Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática) - Pontificia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11116>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

SANTOS, Scheila Montelli dos; ROSA, Cleci Terezinha Werner. **UEPS para o ensino de estatística na educação básica**. 2018. 75f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Passo Fundo. Passo Fundo – RS, 2018. Disponível em: <<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/206565/2/Produto%20Educativo%20Estatística%20Ensino%20Fundamental%20PPGECM%20%28UPF%29.pdf>>. Acesso em: 15 jun. 2019.

SILVA, Alecio Soares; SILVA, Thalita Alves da; BARROS, Wesley Balbino; SILVA, Valdson Davi Moura. 2016. O Cubo Mágico: aplicações do algoritmo euclidiano da divisão. In: Encontro Paraibano de Educação Matemática, IX, **Anais...**, Campina Grande: PB, 2016. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD1_SA4_ID787_30102016201059.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2019.

SILVA, José Vinícios do Nascimento. **Uma proposta de aprendizagem usando o cubo mágico em Malta – PB**. 2015. 72f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015. Disponível em: <<http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2390/2/PDF%20-%20Jos%C3%A9%20Vin%C3%ADcius%20do%20Nascimento%20Silva.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2019.

SOUZA, Angela Tereza da Silva. **Abordagem do Conceito de Fração: uma análise de livros didáticos**. 2013. 61f. Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba. Rio Tinto – PB, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/1139/1/ATSS160916.pdf>>. Acesso em: 02. mai. 2019.

VASQUES, Alexandre de Almeida; LIMA, Ingrid Muniz de Lima; SANTOS, Viviane Simões dos. O Cubo Mágico como estratégia mediadora do processo de ensino e aprendizagem da matemática. **Madre Ciência – Educação**. v. 1, n. 1, p. 1-11. SANTANA: SP, 2016. Disponível em: <<https://grupomadretereza.com.br/revista/index.php/educacao/article/view/8>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

VIANNA, Carlos Roberto. A hora da fração: pequena sociologia dos vampiros na educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 21, n° 31, p.161-181, 2008. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221883009>>. Acesso em: 01 mai. 2019.

REFERÊNCIAS CONSULTADAS

BEZERRA, Jeferson Saraiva. **Tópicos em Teoria de Grupos: O Desafio do Cubo de Rubik**. 2016. 85 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande – MS, 2016. Disponível em: <<http://repositorio.cbc.ufms.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2799/1/Jeferson%20Saraiva%20Bezerra.pdf>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

BRITO, Charles Gomes Bezerra; COSTA, Daniela Maurício Silva. Construção tridimensional do Cubo Rubik a partir das propriedades da soma de vetores na Geogebra. 2016. In: Forint – Fórum de Integração da IFPR, V, **Anais...**, Boa Vista: Roraima. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ifrr.edu.br/index.php/anais_forint/article/view/638/464>. Acesso em: 15 mai. 2019.

GUIMARÃES, Robson. **Álgebra e o Cubo de Rubik**. 2016. 66 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba – MG, 2016. Disponível em: <https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95508>. Acesso em: 15 mai. 2019.

GRIMM, Luis Gustavo Hauff Martins. **Cubo Mágico: Propriedade e resolução envolvendo Álgebra e Teoria dos Grupos**. 2016. 83 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro – SP, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/144192/grimm_lghm_me_rcla_int.pdf?sequence=4&isAllowed=y>. Acesso em: 15 mai. 2019.

JUNIOR, Eudes Nascimento Filho. **Os benefícios do Cubo Mágico nas aulas de**

matemática no ensino médio. 2016. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática do Ensino Médio) - Universidade Estadual do Piauí, 2016. Disponível em: <<https://monografias.brasilecola.uol.com.br/matematica/os-beneficios-cubo-magico-nas-aulas-matematica-no-ensino-medio.htm>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

JUNIOR, Jocemar Esteves da Silva. **Teoria de Grupo e o Cubo Mágico.** 2016. 99 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5031658>. Acesso em: 15 mai. 2019.

MACHADO, Milca Pires. Que matemática está por trás do Cubo Mágico. 2017. In: Mostra Interativa da Produção Estudantil em Educação Científica e Tecnológica, III, **Anais...** Ijuí: RS, 2017. Disponível em: <<https://publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/moeducitec/article/view/8524>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

MOYA, Claudia Salomão. **Uma visão matemática do cubo mágico.** 2015. 65 f. Dissertação (Centro de Matemática, Computação e Cognição) - Universidade Federal do ABC, Santo André – SP, 2015. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=74949>. Disponível em: 15 mai. 2019.

OLIVEIRA, Juliana Moreno; PARREIRA, Gizele Geralda; SILVA, Luciano Duarte da. Uso do Cubo Mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático. 2017. In: Encontro Goiano de Educação Matemática (EnGEM), VI, **Anais...** Uruaí: GO, 2017. Disponível em: <<http://anais.sbem-go.com.br/index.php/EnGEM/article/download/59/57>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

RONCOLLI, Gislane Aparecida. **Cubo Mágico: Uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática.** 2016. 46 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São João Del-Rei. São João Del Rei: MG, 2016. Disponível em: <http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/74/GISLAINE%20APARECIDA%20RONCOLLI_12217_assignsubmission_file_UFSJ%20-%20TCC.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 15 mai. 2019.

SILVA, Huerllen Vicente Lemos. **O Uso do Cubo Mágico Para o Ensino da Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio.** 2017. 51 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2017. Disponível em: <<http://repositorio.ufpi.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/638/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Hu%C3%A9rllen%20Final.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

SCHULTZER, Waldeck. Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico. 2005. In: Semana da Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, V, **Anais...**, Uberlândia: MG, 2005. Disponível em: <<https://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/rubik/rubik1.pdf>>. Acesso em: 15 mai. 2019.

VIEIRA, João Paulo Gonzafa; SOUZA, Ana Paula de; MORENO, Angela Leite. Aprendendo com o Cubo Mágico. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics.** v. 5, n. 1. Gramado: RS, 2017. Disponível

em: <<https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/download/1553/1564>>. Acesso em:
15 mai. 2019.