

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA  
CURSO ENGENHARIA ELETRÔNICA

RENAN AUGUSTO TABORDA

# **ANÁLISE DE DESEMPENHO DE CONTROLADORES APLICADOS AO SISTEMA PÊNULO INVERTIDO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO  
FEVEREIRO - 2014

RENAN AUGUSTO TABORDA

# **ANÁLISE DE DESEMPENHO DE CONTROLADORES APLICADOS AO SISTEMA PÊNULO INVERTIDO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Eletrônica, da Coordenação do Curso de Engenharia Eletrônica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. MSc. Rodrigo da Ponte Caun

TOLEDO  
FEVEREIRO - 2014



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Câmpus Toledo  
Coordenação do Curso de Engenharia Eletrônica



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

Título do Trabalho de Conclusão de Curso Nº 004

### **Análise de desempenho de controladores aplicados ao sistema pêndulo invertido**

por

**Renan Augusto Taborda**

Esse Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 16:40h do dia **24 de fevereiro de 2014** como requisito parcial para a obtenção do título **Bacharel em Engenharia Eletrônica**. Após deliberação da Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados, o trabalho foi considerado **APROVADO**.

---

Profª . M. Jaqueline Vargas  
(UTFPR-TD)

---

Prof. M. José Dolores Vergara Dietrich  
(UTFPR-TD)

---

Prof. M. Rodrigo da Ponte Caun  
(UTFPR-TD)  
Orientador

**Visto da Coordenação**

---

Prof. M. Rodrigo da Ponte Caun  
Coordenador da COELE

Às pessoas mais importantes  
da minha vida: pai, mãe e irmão.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por me abençoar todos os dias com o dom da vida e por nunca me deixar desistir. Agradeço a Ele, também, por ter me dado a chance de conhecer as pessoas que citarei abaixo, que, sem elas nada disso seria possível.

Ao meu pai Ananias Taborda, que sempre foi um exemplo de persistência com os seus incansáveis: “*Continua, vai dar certo*”. À minha mãe Devandira Araújo Tavares Taborda pelo seu amor e carinho nas horas em que mais necessitava. Ao meu irmão Roberto Cesar Taborda, pelo seu companheirismo e amizade nesta jornada.

Ao meu orientador e amigo Rodrigo da Ponte Caun, que me faltam palavras para agradecer aos inúmeros conselhos, palavras de sabedoria que sempre me ajudaram, agradeço, também, ao exemplo de dedicação e comprometimento.

Aos amigos de curso, que durante esses 5 anos passamos por todas as dificuldades sempre juntos, nos ajudando, pois sabíamos que tudo iria valer a pena.

Aos amigos externos à faculdade, que sempre estavam presentes nos momentos mais importantes da minha caminhada até aqui.

Aos professores de Engenharia Eletrônica, que não mediram esforços para que possamos ter uma formação completa e de qualidade.

A Todos vocês, meu muito obrigado. E tenho certeza que levarei todos em meu coração.

*“My Precious”*  
(SMÉAGOL, Terceira Era do Sol)

## RESUMO

TABORDA, Renan Augusto. **Análise de desempenho de controladores aplicados ao sistema pêndulo invertido**. 2014. 57 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso Bacharelado em Engenharia Eletrônica - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Toledo, 2014.

Este trabalho tem o objetivo de projetar diferentes topologias de controladores a fim de analisar o desempenho comparativo aplicado ao sistema pêndulo invertido. Inicialmente, é apresentada a modelagem matemática do sistema em estudo considerando duas situações: a primeira considera um modelo linearizado em torno de um ponto de operação, o qual será alvo de estudo na aplicação de duas estratégias de controle linear moderno, sendo as técnicas de controle via LMI e LQR; a segunda utiliza o modelo não-linear do sistema proposto, sendo aplicada a técnica de controle não-linear SMC. Ao final, é realizada uma análise de *performance* com relação à complexidade computacional envolvida no processo de determinação do ganho de realimentação de estados e a eficiência que cada controlador apresenta em relação às expectativas de projeto. Por fim, para a execução dos algoritmos exigidos pelos controladores propostos utilizou-se ferramentas computacionais existentes no MATLAB e, também, a linguagem de programação usual do software.

**Palavras-chave:** Pêndulo invertido. LMI. LQR. SMC.

## ABSTRACT

TABORDA, Renan Augusto. **Performance analysis of controllers applied on inverted pendulum systems**. 2014. 57 pages. Graduation assignment (Bachelor of Electronic Engineering) – Federal Technology University - Parana, Toledo, 2014.

The main goal of this paper is to design different topologies of controllers for the inverted pendulum system in order to analyze and compare “their performance”. At first a mathematical modeling of the proposed system is presented taking two situations into account the first one regards a linear model around of one point of operation, which will be studied to be used in two strategies linear modern control, that are control techniques via LMI and LQR; the second situation uses a non-linear model of the proposed system, which will be applied a non-linear technique of control called SMC. Moreover, it will be done a performance analysis concerning the computational complexity that was used in the process to determine the state feedback gain and the efficiency of each controller regarding the proposed requirements for this project. In the end, with the reason to execute the algorithms required by the proposed controllers were used computational tools that are available in MATLAB and, also, its programming language.

**Keywords:** Inverted pendulum. LMI. LQR. SMC.



**LISTA DE ILUSTRAÇÕES**

Figura 1 – Modelo de estudo do pêndulo invertido.....	3
Figura 2 - Diagrama de corpo livre do Sistema .....	4
Figura 3 - Ilustração bidimensional do domínio do modo deslizante .....	10
Figura 4 - diagrama de blocos do sistema não linear .....	16
Figura 5 - Forma da lei de controle resultante do Sistema .....	17
Figura 6 - Regiões para a $\mathcal{D}$ -estabilidade.....	21
Figura 7 - Região de $\mathcal{D}$ -estabilidade sob requisito de projeto .....	23
Figura 8 - Alocação dos pólos do sistema controle via LMI .....	24
Figura 9 - Diagrama de blocos do controle por realimentação de estados .....	27
Figura 10 - Pólos para o controle via LQR com otimização LMI.....	31
Figura 11 - Localização dos pólos para a região determinada .....	34
Figura 12 - Resposta à condição inicial para o estado $x_1$ .....	35
Figura 13 - Resposta à condição inicial para o estado $x_2$ .....	36
Figura 14 - Resposta à condição inicial para o estado $x_3$ .....	37
Figura 15 - Resposta à condição inicial para o estado $x_4$ .....	38

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Valor das constantes do pêndulo invertido.....	8
---	---

**LISTA DE SIGLAS**

LMI	Linear Matrix Inequalities
LQR	Linear Quadratic Regulator
SMC	Sliding Model Control

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	2
<b>2</b>	<b>SISTEMA EM ANÁLISE: PÊNDULO INVERTIDO</b> .....	<b>3</b>
2.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA.....	3
2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA .....	4
2.2.1	Formulação não-linear do sistema .....	4
2.2.2	Linearização do sistema.....	5
2.2.3	Representação por variáveis de estados .....	6
<b>3</b>	<b>CONTROLADORES VIA SMC</b> .....	<b>9</b>
3.1	INTRODUÇÃO .....	9
3.1.1	Superfície deslizante .....	9
3.1.2	Modos deslizantes.....	10
3.1.3	Condições para a existência de um modo deslizante.....	11
3.2	PROJETO DE CONTROLADORES SMC EM TEMPO CONTÍNUO .....	11
3.3	PROJETO DA SUPERFÍCIE DESLIZANTE .....	13
3.4	SIMULAÇÕES .....	15
3.5	RESULTADOS PARCIAIS.....	16
<b>4</b>	<b>CONTROLADOR VIA LMI</b> .....	<b>18</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	18
4.2	DEFINIÇÃO .....	18
4.3	CONCEITOS PRELIMINARES.....	19
4.3.1	Estabilidade de Lyapunov .....	19
4.3.2	Complemento de Schur.....	20
4.3.3	$\mathcal{D}$ -Estabilidade .....	20
4.4	RESULTADOS OBTIDOS .....	22
4.4.1	Exemplo numérico.....	23
4.5	CONCLUSÕES PARCIAIS.....	25
<b>5</b>	<b>CONTROLADOR VIA LQR</b> .....	<b>26</b>
5.1	INTRODUÇÃO .....	26
5.2	DEFINIÇÃO .....	26
5.2.1	Resolução da equação de Riccati via otimização LMI.....	29
5.3	RESULTADOS OBTIDOS .....	30

5.4 CONCLUSÕES PARCIAIS .....	31
<b>6 ANÁLISE DE DESEMPENHO .....</b>	<b>33</b>
6.1 TESTE DE FACTIBILIDADE ENTRE AS TÉCNICAS DE CONTROLE LMI E LQR .....	33
6.2 ANÁLISE DAS RESPOSTAS TEMPORAIS DOS ESTADOS À CONDIÇÃO INICIAL .....	35
6.2.1 Estado $x_1$ .....	35
6.2.2 Estado $x_2$ .....	36
6.2.3 Estado $x_3$ .....	37
6.2.4 Estado $x_3$ .....	38
6.3 COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL .....	39
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>40</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>41</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>44</b>
<b>APÊNDICE B .....</b>	<b>45</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a crescente complexidade dos processos de produção e a demanda por alta eficiência em plantas industriais impuseram restrições cada vez maiores aos sistemas de controle associados. Neste contexto, foi estabelecida firmemente uma moderna teoria de controle para sistemas contínuos no tempo, o que foi capaz de provocar uma verdadeira revolução nos processos industriais, possibilitando a humanidade a explorar o universo (ASSUNÇÃO, 2008).

Contudo, o ponto de partida para o presente estudo foram os programas espaciais, no qual o controle do foguete na fase de lançamento é semelhante ao controle do sistema pêndulo invertido, que, por natureza, é um sistema não linear e instável, sendo necessária a ação de uma lei de controle adequada para que a haste se mantenha na posição de  $90^\circ$ , mesmo sofrendo qualquer tipo de perturbação externa (OGATA, 2010). Para fins de estudo do sistema pêndulo invertido, serão realizadas duas modelagens matemáticas a fim de se obter um sistema linear e outro não linear contínuo e invariante no tempo.

A associação existente entre os modelos matemáticos propostos, ou seja, linear e não-linear, está fortemente ligada ao processo de linearização das características físicas não-lineares do sistema pêndulo invertido. De um lado, a vantagem de se considerar um sistema linearizado está diretamente relacionada com a utilização de técnicas de controle em menor nível de complexidade quando comparado a projetos de controladores não-lineares. Por outro lado, muitos processos são melhor modelados por equações algébricas diferenciais não-lineares e o uso da descrição linear ocasiona perda de informações sobre os processos, o que justifica a análise de desempenho comparativa entre os controladores propostos.

Tendo em vista o objetivo geral de análise de desempenho de controladores, é possível verificar, ao longo dos anos, um crescente esforço de forma a aprimorar a *performance* de sistemas de controle, através da proposição de várias estratégias de controle avançado, das quais recentemente destacam-se aquelas que utilizam modelos matemáticos a serem controlados.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é a análise de desempenho de diferentes técnicas de controle linear, quais sejam: Desigualdades Matriciais

Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI), que envolve a convexidade e flexibilidade para tratar problemas mistos de performance e robustez (TROFINO, 2000) e o Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR), cuja principal característica consiste em um método de controle simplificado, com uma planta de fácil interpretação e uma matriz de ganho de controle por realimentação de estado (OGATA, 2010).

Analisa-se, também, técnicas de controle não-linear, tal como o Controle em Modos Deslizantes (do inglês, *Sliding Model Control* - SMC), cuja principal característica envolve um controlador não-linear, sendo possível considerar todas as não-linearidades do sistema, não limitando a operação a uma região específica de projeto.

## 1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é dividido em sete seções, sendo que a primeira seção corresponde à introdução com as considerações acerca do ponto de partida para o projeto e o objetivo geral.

Na segunda seção são apresentadas as características do sistema em estudo, juntamente com a modelagem matemática e a linearização do pêndulo invertido.

A terceira, quarta e quinta seções é definida a teoria dos controladores em estudo, sendo o controlador não-linear via Modos Deslizantes e os controladores lineares via Desigualdades Matriciais Lineares e Regulador Linear Quadrado, respectivamente, bem como as simulações do sistema controlado e conclusões parciais, mostrando os resultados das simulações para cada topologia de controlador analisada.

Na sexta seção é realizada uma análise de desempenho dos controladores, tendo como base os resultados parciais encontrados nas seções anteriores, obtendo uma análise comparativa dos resultados.

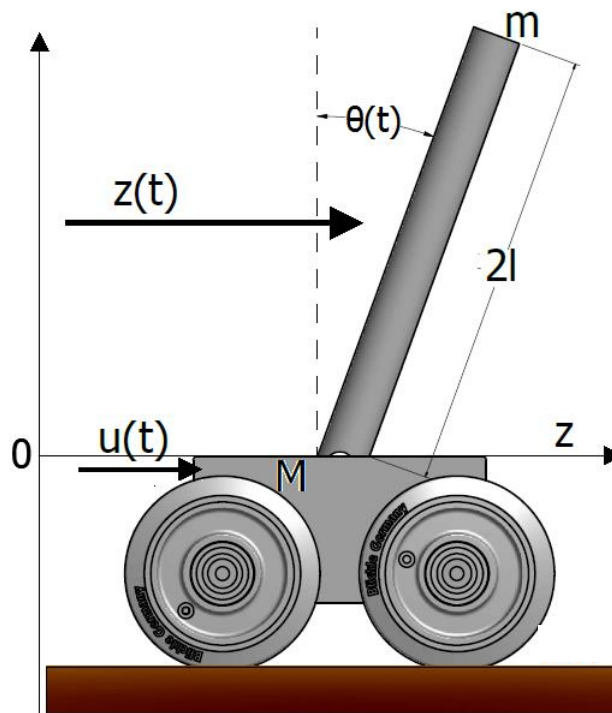
Por fim, a sétima seção é destinada a apresentar as considerações finais, concluindo o estudo.

## 2 SISTEMA EM ANÁLISE: PÊNDULO INVERTIDO

Esta seção é destinada a apresentar uma descrição matemática bidimensional em representação por espaço de estados do sistema pêndulo invertido e suas aplicações.

### 2.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Considere o diagrama esquemático apresentado na Figura 1.



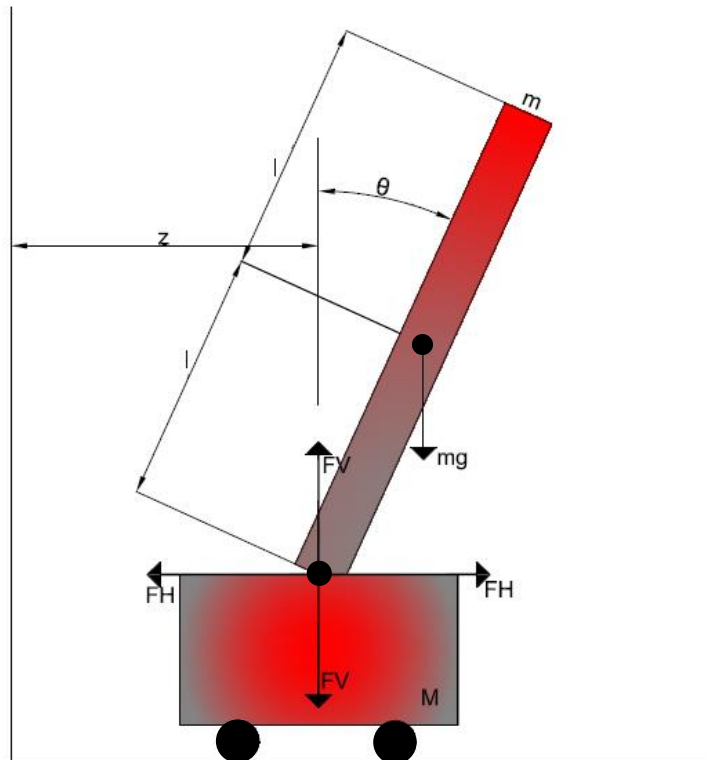
**Figura 1 – Modelo de estudo do pêndulo invertido**  
**Fonte: Autoria própria**

O sistema consiste em uma haste cilíndrica de alumínio, livre em torno de um ponto fixo, montada sobre um carrinho que se move horizontalmente por meio de um motor, que tem a função de manter a haste do pêndulo em um ângulo de  $90^\circ$  com o eixo  $z$ . A haste possui massa constante  $m$ , comprimento  $2l$  e seu movimento é dado pela função do ângulo  $\theta(t)$ . O carrinho apresenta massa constante  $M$ , e se move livremente na direção do eixo  $z$ , sendo este deslocamento representado pela função  $z(t)$ .



## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

A partir do diagrama de corpo livre mostrado na Figura 2, podem-se descrever as equações de movimento do pêndulo invertido.



**Figura 2 - Diagrama de corpo livre do Sistema**  
Fonte: Autoria própria

Define-se, a priori, que  $x(t) \in \mathfrak{R}^4$  é o vetor de estados, cujas variáveis são o deslocamento do carrinho  $z$ , a velocidade do carrinho  $\dot{z}$ , o deslocamento angular da haste  $\theta$  e a velocidade angular da haste  $\dot{\theta}$ ;  $y(t) \in \mathfrak{R}^2$  é o vetor de saídas de interesse, definido pelos parâmetros  $z$  e  $\theta$ ; e  $u(t) \in \mathfrak{R}$  é o sinal de controle.

### 2.2.1 Formulação não-linear do sistema

Para obter a descrição matemática, inicialmente, é necessário determinar o centro de gravidade da haste do sistema. Admitindo-se que a haste possui tamanho e peso uniforme, determina-se o centro de gravidade como o centro geométrico da haste, no comprimento  $l$ . Após, determinam-se as coordenadas  $z$  e  $y$  do centro de

gravidade, que serão representadas por  $(z_G, y_G)$ . Assim, pode-se passar a análise do digrama de corpo livre do sistema e definir as equações necessárias.

De acordo com (OGATA, 2010), o movimento de rotação da haste do pêndulo em torno de seu centro de gravidade é dado por:

$$I \frac{d^2}{dt^2} \theta = F_V l \sin \theta - F_H l \cos \theta \quad (2.1)$$

sendo  $F_V$  e  $F_H$  as forças verticais e horizontais, respectivamente, e  $I$  o momento de inércia da haste em relação ao seu centro de gravidade.

Já o movimento horizontal e vertical da haste, em relação ao seu centro de gravidade é, respectivamente,

$$F_H = m \frac{d^2}{dt^2} (z + l \sin \theta) \quad (2.2)$$

$$F_V = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) + mg \quad (2.3)$$

Com relação ao carrinho responsável por garantir o equilíbrio da haste, seu movimento horizontal pode ser descrito por,

$$F_H = u - M \frac{d^2}{dt^2} z \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Linearização do sistema

Ao se analisar as equações (2.1) a (2.3), percebe-se que há termos não lineares, que são  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , dessa forma a etapa de linearização é fundamental, pois dois dos controladores que serão analisados não admitem equações não-lineares, por se tratarem de técnicas de controle lineares.

Assim, para efetuar a linearização do sistema, é necessário determinar o ponto de equilíbrio em que se deseja operar, assim, escolhe-se o ponto em que o ângulo  $\theta$  seja uma grandeza muito pequena, aproximadamente zero, pois nesse ponto a haste permanece na posição totalmente vertical.

Para tanto, admite-se que,  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\theta \dot{\theta}^2 \approx 0$ .

Da equação (2.1), obtém-se:

$$I \frac{d^2}{dt^2} \theta = F_V l \theta - F_H l \quad (2.5)$$

E, as equações (2.2) e (2.3),

$$F_H = m \frac{d^2}{dt^2} (z + l\theta) \quad (2.6)$$

$$F_V = mg \quad (2.7)$$

### 2.2.3 Representação por variáveis de estados

Com as equações (2.4) a (2.7), pode-se determinar as equações no espaço de estados, e por fim, reconhecer as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** do sistema.

De forma a simplificar a notação, substitui-se  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  por  $\ddot{\theta}$  e  $\frac{d^2z}{dt^2}$  por  $\ddot{z}$ . Dessa forma, reescrevendo as equações, obtém-se:

$$I\ddot{\theta} = F_V l \theta - F_H l \quad (2.8)$$

$$F_H = u - M\ddot{z} \quad (2.9)$$

$$F_H = m(\ddot{z} + l\ddot{\theta}) \quad (2.10)$$

$$F_V = mg \quad (2.11)$$

Igualando as equações (2.9) e (2.10), define-se a primeira equação de estados:

$$(M + m)\ddot{z} + ml\ddot{\theta} = u \quad (2.12)$$

que, substituindo as equações (2.10) e (2.11) na equação (2.8), obtém-se a segunda equação de estados:

$$mgl\theta - ml(l\ddot{\theta} + \ddot{z}) = I\ddot{\theta} \quad (2.13)$$

Definir, portanto, as variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  por:  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = z$  e  $x_4 = \dot{z}$ .

Salienta-se, que  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  corresponde à posição e à velocidade angular da haste, respectivamente, assim como  $z$  e  $\dot{z}$  corresponde à posição e à velocidade do carrinho, respectivamente.

Definem-se, ainda, as saídas do sistema, sendo a posição angular da haste e a posição do carrinho, portanto,  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$ .

O objetivo, agora, é separar as variáveis a partir das equações (2.12) e (2.13), determinando as equações de estados, para ao fim modelar o sistema em termos de equações vetoriais-matriciais, que são representadas a partir do seguinte modelo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \mathbf{B}_{4 \times 1} u \quad (2.14)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{2 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

dessa forma, deve-se obter  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{x}_3$  e  $\dot{x}_4$ , e portanto,

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.16)$$

Agora, isolando  $\ddot{\theta}$  da equação (2.12) e igualando a  $\dot{x}_2$ , tem-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{u - (m + M)\ddot{z}}{ml} = \dot{x}_2 \quad (2.17)$$

Realizando o mesmo procedimento para  $\dot{x}_3$  e  $\dot{x}_4$ , obtém-se:

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.18)$$

E, isolando  $\ddot{z}$  na equação (2.13) e igualando  $\dot{x}_4$ ,

$$\ddot{z} = \frac{mgl\theta - (I + ml^2)\ddot{\theta}}{ml} = \dot{x}_4 \quad (2.19)$$

Agora, substituindo (2.18) em (2.16), é possível obter:

$$\dot{x}_2 = \frac{(m + M)mgl}{(m + M)I + Mml^2} \theta - \frac{ml}{(m + M)I + Mml^2} u \quad (2.20)$$

Finalmente, substituindo a equação (2.19) em (2.18),

$$\dot{x}_4 = \frac{-m^2 l^2 g}{(m + M)I + Mml^2} \theta + \frac{(I + ml^2)}{(m + M)I + Mml^2} u \quad (2.21)$$

Conclui-se, portanto, que a forma matricial das equações (2.15), (2.17), (2.19) e (2.20), corresponde a seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m+M)mgl}{(m+M)I + Mml^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m^2l^2g}{(m+M)I + Mml^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-ml}{(m+M)I + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{(I + ml^2)}{(m+M)I + Mml^2} \end{bmatrix} * u \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Portanto, para o projeto dos controladores serão utilizadas as matrizes de estados **A**, **B**, **C** e **D**:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m+M)mgl}{(m+M)I + Mml^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m^2l^2g}{(m+M)I + Mml^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-ml}{(m+M)I + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{(I + ml^2)}{(m+M)I + Mml^2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0 \quad (2.25)$$

Por fim, a Tabela 1 corresponde aos valores numéricos para as variáveis contidas nas equações (2.24) e (2.25).

**Tabela 1 - Valor das constantes do pêndulo invertido.**  
Fonte: (COSTA, 2012)

Constante	Descrição	Valor	Unidade
M	Massa do carrinho	1	kg
m	Massa da haste	0,6	kg
l	Comprimento da haste	0,5	m
I	Momento de inércia do carrinho	0,010	kgm <sup>2</sup>
g	Aceleração da gravidade	9,81	m/s <sup>2</sup>

De acordo com a Tabela 1, as matrizes lineares do sistema são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 28,26 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5,318 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,807 \\ 0 \\ 4,604 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

### 3 CONTROLADORES VIA SMC

#### 3.1 INTRODUÇÃO

O controle por modos deslizantes foi estudado pela primeira vez na década de 50 na União Soviética, em especial, por Utkin. É um método de controle muito usado em sistemas dinâmicos incertos, tendo suas raízes na teoria de controle de relé e bang-bang (CAUN, 2007). Tal utilização se dá devido a sua principal característica: robustez. Afinal, o controlador objetiva manter os estados dentro de uma região estável, sendo menos propícia a perturbações externas. (DAMAZO, 2008)

Em linhas gerais, o controlador por modos deslizantes é baseado na necessidade de manter a trajetória dos estados da planta a ser regulada em uma superfície estável, denominada superfície de deslizamento ou superfície de chaveamento, especificada pelo projetista. É importante salientar que é necessário um controle de realimentação com chaveamento de alta velocidade, sendo capaz de guiar as trajetórias dos estados da planta não-linear para esta superfície, dessa forma, quando os estados permanecem nessa superfície, as influências externas que o sistema está inserido serão atenuadas, seguindo o objetivo de possuir maior robustez. (RIBEIRO, 2006)

Por fim, o projeto pode ser dividido em duas etapas principais:

1. Projeto da superfície de deslizamento, em que a dinâmica da planta indicada siga a trajetória em que foi projetado o caminho;
2. Desenvolvimento de uma lei de controle que garanta a existência de um modo deslizante.

##### 3.1.1 Superfície deslizante

A superfície de deslizamento  $S(x)$  é designada de uma forma em que a resposta do sistema seja restrita a  $S(x) = 0$ , ou seja, corresponde a um tubo de dimensão  $(n - m)$  no  $\mathfrak{R}^n$  determinado pela intersecção das superfícies deslizantes

$S_i(x) = 0$  de dimensão  $m(n - 1)$  e possua o comportamento desejado, seja para estabilidade ou rastreamento dos estados.

Existem diversas formas de projetar superfícies deslizantes não-lineares, porém é comumente usado, por conveniência e simplicidade, regiões lineares, como a utilizada neste trabalho.

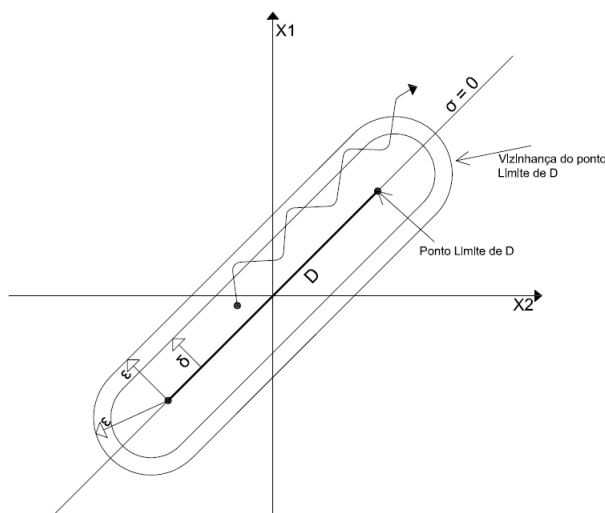
### 3.1.2 Modos deslizantes

Após designar a superfície deslizante, o próximo passo é garantir a existência de um modo deslizante. Em linhas gerais,

*Um modo deslizante existe se na vizinhança da superfície de deslizamento,  $S(x(t)) = 0$ , a tangente ou vetor velocidade da trajetória de estado sempre está direcionado para superfície de deslizamento. Consequentemente, se a trajetória do estado intercepta a superfície de deslizamento, o valor da trajetória de estado ou “ponto representativo” se mantém dentro de uma vizinhança (GARCIA, 2006).*

Ou seja, um modo deslizante somente existirá a partir do momento em que a trajetória dos estados da planta a ser controlada satisfazer a condição:  $S(x) = 0, \forall t \geq t_0$ , sendo factível apenas se o chaveamento for essencialmente rápido.

A Figura 3 exemplifica uma superfície bidimensional com a trajetória dos estados, juntamente com o chaveamento.



**Figura 3 - Ilustração bidimensional do domínio do modo deslizante**  
**Fonte: Garcia, 2006**

### 3.1.3 Condições para a existência de um modo deslizante

Dentre condições para que um modo deslizante exista, é necessário que haja estabilidade da trajetória dentro da superfície, ou no mínimo na vizinhança  $\mathcal{E}$  de  $S(x) = 0$ . Para investigar tal estabilidade, escolhe-se uma função de Lyapunov generalizada,  $V(t, x)$ , positiva definida e com derivada no tempo  $\dot{V}(t, x)$  negativa na região de atração.

A escolha da função adequada de Lyapunov é utilizada para designar os ganhos de realimentação, pois a função  $V(t, x, S)$  determina o conforto nos cálculos de tais ganhos.

Assim, para sistemas com entrada simples, escolhe-se a seguinte estrutura para a função de Lyapunov (EDWARDS, 1998).

$$V(t, x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (3.1)$$

onde,

$$\frac{1}{2} \dot{S}^2 = S\dot{S} > 0 \quad (3.2)$$

## 3.2 PROJETO DE CONTROLADORES SMC EM TEMPO CONTÍNUO

Segundo (Garcia et al, 2005), para o projeto da superfície de deslizamento, utiliza-se o sistema representado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $u(t)$  é o controle do sistema,  $x(t)$  o vetor de estados,  $y(t)$  é o vetor de saída e as matrizes  $A, B$  e  $C$  transcrevem as características físicas do processo, ou seja, matrizes ou vetores de parâmetros do sistema em equações matemáticas por representação de espaço de estados. Assim, a superfície de deslizamento pode ser obtida a partir de,

$$S(t) = \{x(t) | Gx(t) = 0\} \quad (3.4)$$

onde  $G \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$  é uma matriz constante concebida a partir do momento em que os estados permanecem no interior da superfície de deslizamento.



Assim, deve-se encontrar a matriz  $G$  utilizando o sistema na seguinte forma regular:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + Bu(t) \quad (3.6)$$

sendo  $x_1 \in \mathfrak{R}^{n-1}$ ,  $x_2 \in \mathfrak{R}^1$ ,  $B \in \mathfrak{R}^1$  e as correspondentes matrizes descritas por:  $A_{11} \in \mathfrak{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ ,  $A_{12} \in \mathfrak{R}^{(n-1) \times 1}$ ,  $A_{21} \in \mathfrak{R}^{1 \times (n-1)}$  e  $A_{22} \in \mathfrak{R}^{1 \times 1}$ .

Assim a superfície de deslizamento será,

$$S(t) = [G_1 \quad G_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

onde as matrizes  $G_1$  e  $G_2$  são não nulas com dimensões  $\mathfrak{R}^{1 \times (n-1)}$  e  $\mathfrak{R}^1$ , respectivamente.

Isolando  $x_2$  na equação (3.7), e aplicando em (3.5), tem-se:

$$\dot{x}_1(t) = [A_{11} - A_{12}G_2^{-1}G_1]x_1(t) \quad (3.8)$$

A equação (3.8) pode ser representada por meio de uma mudança de variável, no qual se adota  $F = -G_2^{-1}G_1$ , portanto:

$$\dot{x}_1(t) = [A_{11} + A_{12}F]x_1(t) \quad (3.9)$$

sendo  $A_{11} + A_{12}F$  a estrutura de realimentação do sistema.

Após modelar a superfície de deslizamento, deve-se garantir que o sistema permaneça em tal região, para isso, encontra-se um modo deslizante para que a equação (3.4) seja válida.

O propósito, portanto, é encontrar uma lei de controle adequada para que o sistema encontre e permaneça na região de deslizamento, com o auxílio de uma função de Lyapunov candidata. De forma geral, a lei de controle deve seguir a seguinte regra,

$$u(t) = \begin{cases} u^-(t, x) \neq 0 & \text{para } S(t) < 0 \\ u(t, x) = 0 & \text{para } S(t) = 0 \\ u^+(t, x) \neq 0 & \text{para } S(t) > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Podendo ser escrita como,

$$u(t) = u_{eq}(t) + u^\pm(t) \quad (3.11)$$

sendo a primeira componente denominada de controle equivalente e a segunda denominada de controle de chaveamento.

Na determinação da lei de controle equivalente, é imprescindível atender a condição expressa por,

$$\dot{S}(t) = G\dot{x}(t) = GAx(t) + GBu_{eq}(t) = 0 \quad (3.12)$$

Considerando que,  $u_{eq} = F_{eq}x(t)$ , e isolando  $u_{eq}$  da equação (3.12), obtém-se por associação que,

$$F_{eq} = -(GB)^{-1}GA \quad (3.13)$$

desde que o termo  $GB$  seja não nulo.

O próximo passo é determinar a lei de controle chaveada, para tanto considera-se,

$$S(t) = Gx(t), \quad S \in \mathfrak{R} \text{ e } G \in \mathfrak{R}^{1 \times n} \quad (3.14)$$

Da equação (3.3) associada a lei de controle da equação (3.11), obtém-se

$$\dot{S}(t) = G[Ax(t) + B(u_{eq}(t) + u_n^\pm(t))] \quad (3.15)$$

Substituindo, enfim, a equação do controle equivalente, obtida em (3.13), é possível determinar, que:

$$\dot{S}(t) = GBu_n^\pm(t) \quad (3.16)$$

Assumindo  $GB = 1$ , obtém-se  $\dot{S}(t) = u_n^\pm(t)$ , e assim,

$$u_n^\pm(t) = \rho \frac{S(t)}{|S(t)|} \quad \rho > 0 \quad (3.17)$$

Contudo, pode-se concluir que a lei de controle total em modos deslizantes contínuo no tempo é dada por:

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n^\pm(t) = - \left[ (GB)^{-1}GAx(t) + \rho \frac{S(t)}{|S(t)|} \right] \quad (3.18)$$

### 3.3 PROJETO DA SUPERFÍCIE DESLIZANTE

Considere a equação (3.7), efetuando uma alteração de coordenadas, definida por uma matriz ortogonal  $T_r$ , tal que:

$$x(t) = T_r x(t) \quad (3.19)$$

Assim, o sistema apresentado pelas equações (3.5) e (3.6) podem ser escritos em termos do par (A, B) as seguintes matrizes regulares:

$$T_r A T_r^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad T_r B = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A superfície de deslizamento também é encontrada a partir da matriz ortogonal  $T_r$ , e tomando como base a equação (3.4), que é verdadeira a partir do momento em que os estados permaneçam na superfície, assim:

$$G T_r^T = [G_1 \quad G_2] \quad (3.21)$$

Agora, para encontrar as matrizes  $G_1$  e  $G_2$ , basta partir da mudança de variável realizada em (3.9),

$$F = G_1^{-1} G_2 \quad (3.22)$$

Portanto,

$$G_1 = G_2 F \quad (3.23)$$

E, por fim, considerando  $G_2 = I_m$ , tem-se:

$$G T_r^T = [F \quad I_m] \quad (3.24)$$

Sendo, assim, essa aproximação minimiza os cálculos para encontrar a superfície e reduz os erros. Como já mencionado anteriormente, o termo  $F$  está presente na realimentação de estados do sistema, dessa forma  $F$  nada mais é que o ganho de realimentação, sendo facilmente encontrado, apenas realizando uma alocação de polos que atenda as especificações desejadas.

Contudo, a superfície de deslizamento é encontrada a partir da equação (3.24) e da lei de controle. Além disso, para que os estados permaneçam em tal superfície é necessário satisfazer a equação de controle (3.18).

Porém existe uma maneira de tornar a resposta do controlador mais suave, adicionando um coeficiente  $\delta$  junto com a lei de controle chaveada, tornando o chaveamento mais suave (EDWARDS, 1998). Assim, a lei de controle (3.18) pode ser escrita da seguinte forma,

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n^\pm(t) = - \left[ (GB)^{-1} G A x(t) + \rho \frac{S(t)}{|S(t)| + \delta} \right] \quad (3.25)$$

### 3.4 SIMULAÇÕES

Considerando o modelo não-linear do sistema mostrado nas equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4), deve-se trabalhar com essas equações a fim de isolar  $\ddot{\theta}$  e  $\ddot{z}$ , sendo, portanto:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl \sin(\theta)}{ml^2 + I} - \frac{ml \cos(\theta)}{ml^2 + I} \left[ \frac{(ml^2 + I)(ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + u) - m^2 l^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(M + m)(ml^2 + I) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \right] \quad (3.26)$$

$$\ddot{z} = \frac{(ml^2 + I)(ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + u) - m^2 gl^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(M + m)(ml^2 + I) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \quad (3.27)$$

Os estados são obtidos da seção 2, sendo:  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = z$  e  $x_4 = \dot{z}$ . Assim, tem-se:

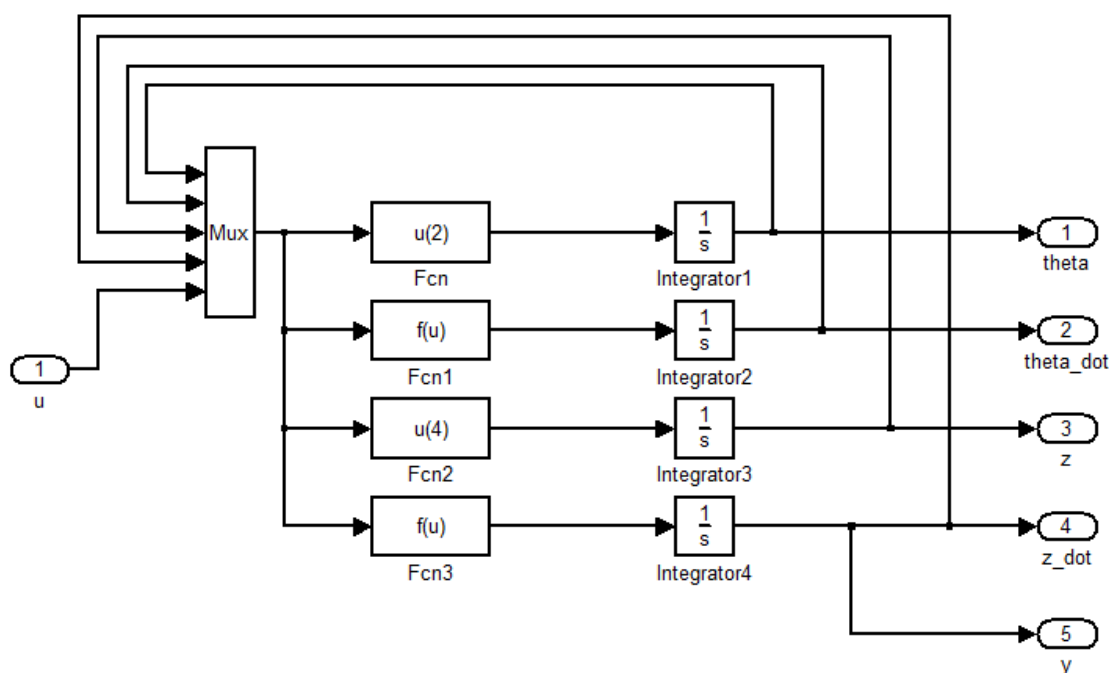
$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{\theta} \quad (3.28)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{mgl \sin(\theta)}{ml^2 + I} - \frac{ml \cos(\theta)}{ml^2 + I} \left[ \frac{(ml^2 + I)(ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + u) - m^2 l^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(M + m)(ml^2 + I) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \right] \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 = \dot{z} \quad (3.30)$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{z} = \frac{(ml^2 + I)(ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + u) - m^2 gl^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(M + m)(ml^2 + I) - m^2 l^2 \cos^2(\theta)} \quad (3.31)$$

Tais estados foram simulados a partir do Simulink, presente no MATLAB, composto pelo seguinte diagrama de blocos apresentado na Figura 4.



**Figura 4 - diagrama de blocos do sistema não-linear**  
**Fonte: Autoria própria**

Sendo as funções de Fnc à Fcn3 as equações de cada derivada dos estados descritos anteriormente. Os pólos escolhidos para a alocação são:  $s = -5,16 \pm j6,32$  e  $s = -4,73$ , sendo as condições iniciais para os estados, escolhidas arbitrariamente, dadas por:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \theta = 1; \\
 x_2 &= \dot{\theta} = 0,001; \\
 x_3 &= z = 0,01; \\
 x_4 &= \dot{z} = 0,01
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

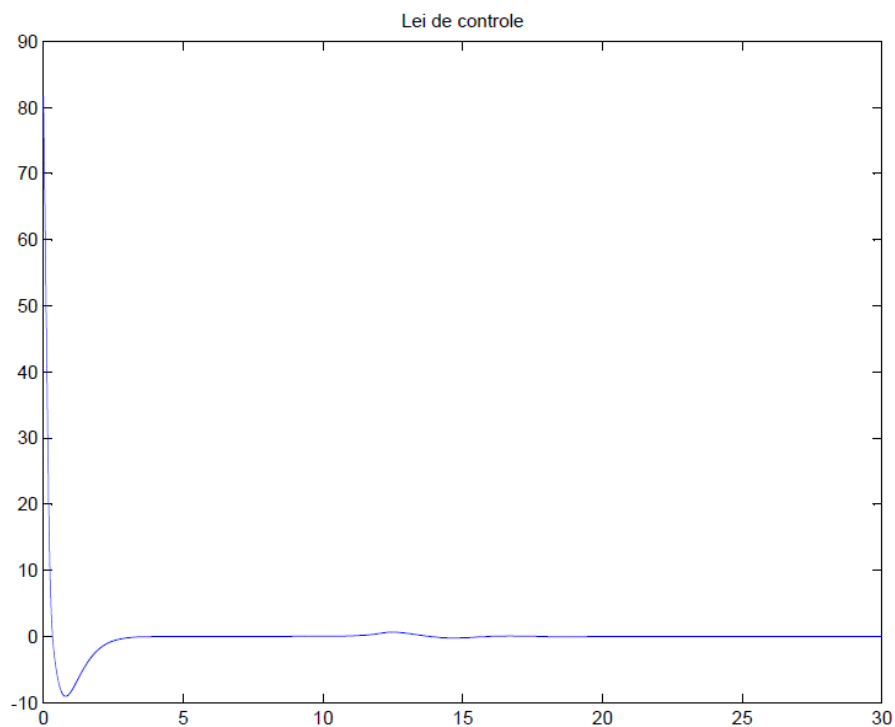
Tais condições iniciais serão utilizadas para todas as topologias de controladores analisadas.

### 3.5 RESULTADOS PARCIAIS

O tempo de simulação para o sistema encontrar a região S e, efetuar os modos deslizantes foi de  $t = 1,257$  s, o que era de se esperar, pois o modelo

envolve todas as não-linearidades, e portanto, a complexidade computacional é maior.

Desta forma, como um resultado parcial a ser apresentado, segue a lei de controle do SMC mostrada na Figura 5.



**Figura 5 - Forma da lei de controle resultante do Sistema**  
**Fonte: Autoria própria**

A partir da Figura 5, pode-se comprovar a veracidade da equação (3.10), cuja lei de controle é diferente de zero quando os estados não estão na região de deslizamento e após atingir tal região, a lei de controle é nula, ou seja,  $u(t) = 0$ .

## 4 CONTROLADOR VIA LMI

### 4.1 INTRODUÇÃO

A história sobre o estudo e surgimento da LMI se divide em seis eventos, partindo a mais de 100 anos atrás com Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, a partir da sua estrutura clássica conhecida como desigualdade de Lyapunov (STEPHEN, 1994). Após os estudos de Lyapunov, por volta de 1940, houve a primeira aplicação do método para resolução de problemas em engenharia, através das pesquisas de Lur'e e Postnikov, porém para sistemas menos complexos. No entanto, no início da década de 60, os pesquisadores Yakubovich, Popov e Kalman propuseram um novo lema, chamado de lema PR (do inglês, *positive-real* - PR), a partir do qual foi possível resolver problemas de ordens superiores. No fim da mesma década, encontrou-se uma nova forma de se calcular uma LMI, a partir da equação de Riccati. Contudo, até esse momento as soluções eram encontradas sem nenhum pacote computacional, sendo possível apenas no fim da década de 80 após sua proposição e aperfeiçoamento ao longo dos anos.

Dentre as principais vantagens do controle via LMI tem-se a linearidade e a convexidade (associadas à condição de funções afins), pois se uma determinada função é afim implica que também será convexa.

**Observação 1:** *Vale a pena salientar que tais características são importantes, pois facilita o estudo de sistemas incertos.*

### 4.2 DEFINIÇÃO

Em linhas gerais, a teoria de LMI pode ser definida, conforme (TROFINO, 2000), por:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (4.1)$$

sendo  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$  o vetor de variáveis de decisão e  $F_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  para  $i = 0, \dots, m$  as matrizes simétricas definidas positivas dadas.

De forma mais específica, uma LMI considera a forma matricial da desigualdade apresentada em (4.1), por exemplo, a desigualdade de Lyapunov para verificação da estabilidade de sistemas lineares, é obtida por,

$$F(P) = A^T P + PA < 0 \quad (4.2)$$

onde verifica-se que  $x_i = \{P_{kj}, \dots, P_{nm}\}$ . Assim o objetivo fundamental das equações apresentadas é a determinação dos valores  $F_i$ .

Pode-se, portanto, entender o conceito a múltiplas restrições, sendo obtidas a partir de uma única LMI, na forma,

$$\text{diag}(F_1(x), \dots, F_n(x)) > 0 \quad (4.3)$$

Sendo  $F_1(x) > 0, \dots, F_n(x) > 0$ .

É importante salientar que a equação (4.1) apresenta a forma linear de uma LMI, sendo que para os casos não-lineares utiliza-se ferramentas matemáticas como o complemento de Schur, necessário para a obtenção de desigualdades lineares (SCHERER, 2004).

## 4.3 CONCEITOS PRELIMINARES

### 4.3.1 Estabilidade de Lyapunov

Com o teorema de Lyapunov é possível investigar a estabilidade de um sistema, ou seja, verificar se é estável ou instável, a partir do modelo linear ou linearizado em espaço de estados.

Segundo o teorema de Lyapunov, se todos os autovalores da matriz  $A$  do sistema (3.3) possuir parte real negativa, implica na existência de uma matriz definida positiva  $Q$  tal que,

$$A^T P + PA < -Q \quad (4.4)$$

onde  $P = P^T > 0$  é a solução para a equação (4.4) (OGATA, 2010).

**Prova:** Vide Apêndice B.



### 4.3.2 Complemento de Schur

Desigualdades quadráticas e convexas são convertidas em LMIs usando a ferramenta matemática denominada complemento de Schur. Para exemplificar a aplicação de tal ferramenta, considere a seguinte estrutura dependente de forma afim em  $g$ , sendo  $Q(g)$  e  $R(g)$  simétricas, assim,

$$R(g) - S^T(g)Q^{-1}(g)S(g) > 0 \quad Q(g) > 0 \quad (4.5)$$

O complemento de Schur será:

$$\begin{bmatrix} Q(g) & S(g) \\ S^T(g) & R(g) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.6)$$

Dessa forma, observa-se que as variáveis são matrizes e que a inequação (4.5) é, portanto, não-linear e não pode ser designado como uma LMI. Entretanto, a inequação (4.6) corresponde à versão linear, a qual pode ser controlada através de técnicas de síntese de controladores via LMI (TROFINO *et al*, 2003).

### 4.3.3 $\mathcal{D}$ -Estabilidade

Considerando o domínio da frequência, pode-se dizer que um sistema é considerado estável se todos os autovalores estiverem do lado esquerdo do plano- $s$ . Assim, uma forma de garantir que o sistema tenha todos os seus autovalores negativos, e, ainda, permaneça em uma determinada região do plano- $s$  aplica-se a  $\mathcal{D}$ -estabilidade sob a forma de LMI.

Um fator relevante da  $\mathcal{D}$ -estabilidade é a possibilidade de se obter um comportamento transitório desejado ao sistema, pois tal comportamento está diretamente ligado a posição dos autovalores da matriz  $A$  da representação em espaços de estados (TROFINO *et al*, 2003). Assim, será descrito as principais definições e teoremas necessários para a formulação da  $\mathcal{D}$ -estabilidade em termos de LMIs, cujas provas podem ser consultadas em (CHILALI *et al*, 1996).

**Definição 4.1:** Um subconjunto  $\mathcal{D}$  do plano complex é denominado de uma região LMI se existem matrizes  $L = L^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + s^{-1}M^T < 0\} \quad (4.7)$$

onde  $s = \sigma + j\omega$ .

**Teorema 4.1:** O sistema  $\dot{x} = Ax$  é  $\mathcal{D}$ -estável se e somente se existe uma matriz simétrica definida positiva  $P$  tal que:

$$L \otimes P + M \otimes (PA) + M^T \otimes (A^T P) < 0 \quad (4.8)$$

onde o operador  $\otimes$  é chamado de produto de Kronecker de duas matrizes.

Assim, segundo os estudos de (Chilali e Gahinet, 1996) pode-se determinar a  $\mathcal{D}$ -estabilidade para algumas regiões do semi-plano esquerdo do plano- $s$ . Portanto, para atender uma região a esquerda de  $-a$ , tem-se,

$$PA + A^T P + 2aP < 0 \quad (4.9)$$

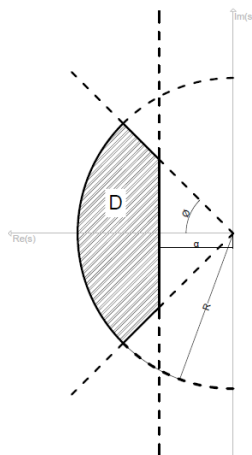
Se  $\mathcal{D}$  for um círculo com raio  $r$ , tem-se

$$\begin{pmatrix} -rX & PA \\ A^T P & -rX \end{pmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

Agora, se  $\mathcal{D}$  corresponde a um cone definido por um ângulo  $\phi$ , a LMI será,

$$\begin{pmatrix} \text{sen}(\phi)(PA + A^T P) & \text{cos}(\phi)(PA - A^T P) \\ \text{cos}(\phi)(A^T P - PA) & \text{sen}(\phi)(PA + A^T P) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

As regiões mostradas pelas equações (4.9), (4.10) e (4.11) estão exemplificadas na Figura 6.



**Figura 6 - Regiões para a  $\mathcal{D}$ -estabilidade**  
Fonte: Autoria própria

Verifica-se que os índices de desempenho podem ser facilmente incorporados sob a forma de restrições LMIs de forma a obter um ganho de controle que seja capaz de posicionar os pólos do sistema realimentado na região desejada de operação.

#### 4.4 RESULTADOS OBTIDOS

Para o projeto do controlador via LMI por realimentação de estados, considere a lei de controle na forma:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (4.12)$$

Assim, associando a lei de controle ao sistema descrito em (3.3), tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (4.13)$$

Dessa forma, substituindo a relação obtida em (4.13) na inequação (4.4), resulta na seguinte LMI:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) < 0 \quad (4.14)$$

Multiplicando  $\mathbf{P}^{-1}$  a direita e a esquerda da equação (4.14) e efetuando a operação distributiva, tem-se:

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1} < 0 \quad (4.15)$$

Por fim, efetuando as mudanças de variáveis, dada por,  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1}$ , obtém-se:

$$\mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Q} - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{Y} < 0 \quad (4.16)$$

O mesmo se aplica para a condição da matriz de Lyapunov, sendo:

$$\mathbf{Q} > 0 \quad (4.17)$$

Da mesma forma, obtém-se a versão Dual do problema de otimização para as regiões de estabilidade, e desse modo, as LMIs (4.9), (4.10) e (4.11) serão reescritas, respectivamente, como:

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{Y} + 2\alpha \mathbf{Q} < 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{Q} & \mathbf{A} \mathbf{Q} - \mathbf{B} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Q} \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T & -r\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{Y}) \sin(\theta) & (\mathbf{A} \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{Y}) \cos(\theta) \\ (\mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \mathbf{Y}) \cos(\theta) & (\mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{Y}) \sin(\theta) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

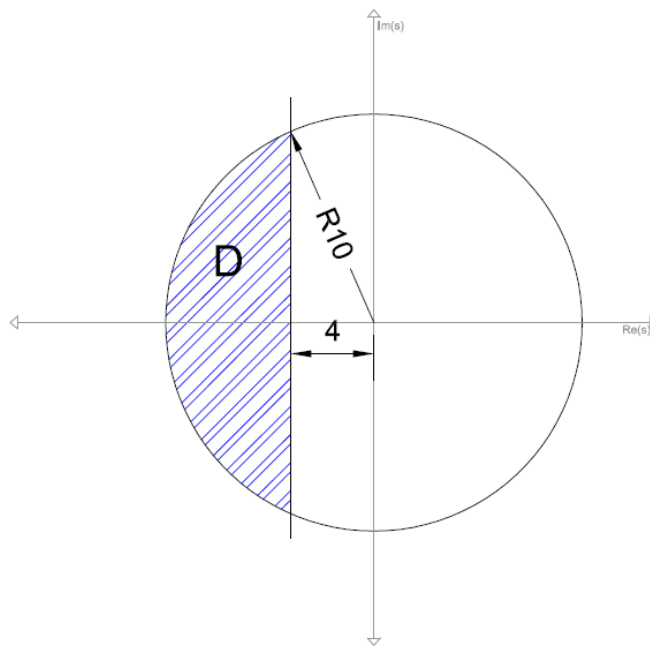
#### 4.4.1 Exemplo numérico

Para a avaliação do controlador via LMI, considere a representação por espaço de estados do pêndulo invertido, descrita pelas equações matemáticas,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 28,26 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5,318 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,807 \\ 0 \\ 4,604 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Admita que a região especificada de projeto para a atuação do controlador seja um círculo de raio igual a 10 centrada na origem do plano- $s$  associada a ao semi-plano à esquerda de  $-4$ , conforme apresentado na Figura 7.



**Figura 7 - Região de  $\mathcal{D}$ -estabilidade sob requisito de projeto**  
**Fonte: Autoria própria**

Assim, o algoritmo computacional necessário para obter o ganho de realimentação de estados que atenda os requisitos de projeto, será:

1. *Meça ou estime o estado inicial  $x(0)$ ;*
2. *Determine a matriz  $Q$  e  $Y$  que satisfaça as restrições de LMIs (4.18)-(4.19);*

3. Determine os elementos da matriz  $K$  através  $YQ^{-1}$  e aplique  $u(t) = Kx(t)$ .

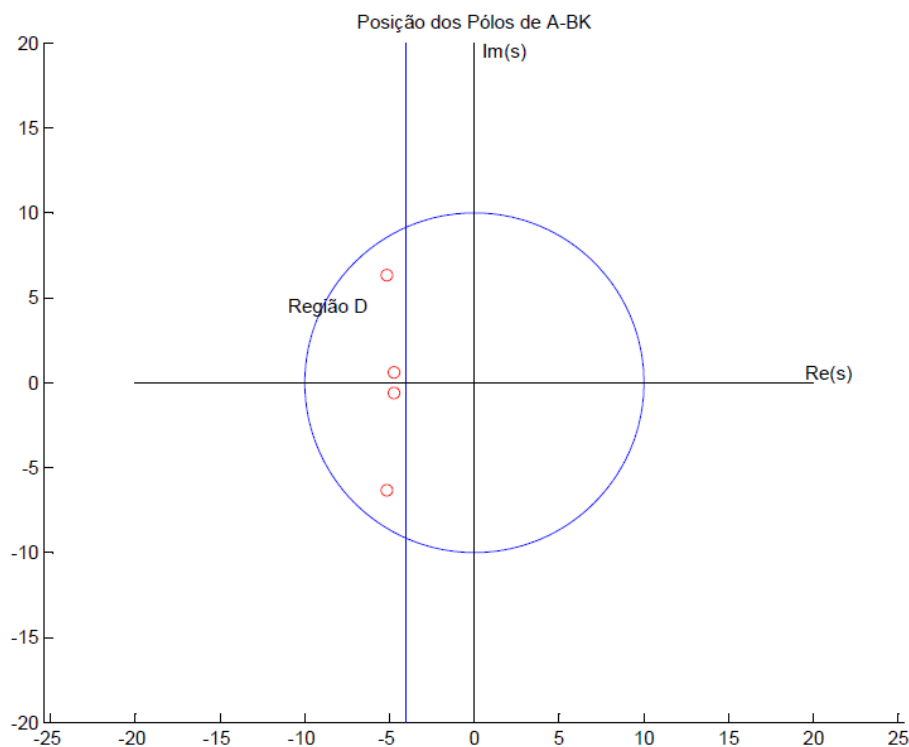
Sendo assim, o resultado obtido através do programa é dado a seguir, no qual se verifica a existência de uma solução factível  $P$ , dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 341.32 & 66.98 & 47.36 & 20.99 \\ 66.98 & 13.16 & 9.29 & 4.12 \\ 47.36 & 9.29 & 7.41 & 3.02 \\ 20.99 & 4.12 & 3.02 & 1.31 \end{bmatrix}$$

e, a matriz de ganho  $K$ ,

$$K = [-151.41 \quad -29.22 \quad -12.57 \quad -7.17]$$

Através dos resultados obtidos, pode-se traçar os autovalores do sistema em malha fechada conforme Figura 8, o qual observa-se que os pólos do sistema estão alocados na região pré-definida de projeto.



**Figura 8 - Alocação dos pólos do sistema controle via LMI**  
**Fonte: Autoria própria**

Outros dados também podem ser analisados, envolvendo a complexidade computacional envolvido no processo de determinação da matriz de ganho de realimentação, como por exemplo, o tempo em que o programa foi executado e o

número de iterações necessárias para encontrar a matriz  $P$  factível, sendo respectivamente,  $T_{execução} = 0,95 s$  e  $N_{iterações}^o = 9$ .

#### 4.5 CONCLUSÕES PARCIAIS

Dada à condição da não existência da matriz constante, real e simétrica  $P$ , que não satisfaz as condições da equação (4.4), pode-se afirmar que o sistema dinâmico não é quadraticamente estável. Assim, as LMIs descritas na referida equação propõem condições suficientes para a análise de estabilidade de sistemas considerando as funções na forma quadrática. Além disso, nota-se que os pólos em malha aberta do sistema não controlado, confirmam a afirmativa:

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.32 \\ -5.32 \end{bmatrix}$$

Ou seja, existe um pólo a direita do plano- $s$ , que torna o sistema instável. No entanto, ao aplicar a lei de controle  $u = -Kx$ , com o ganho obtido via LMI, os pólos de malha aberta serão alocados em:

$$eig(A - BK) = \begin{bmatrix} -5.16 + j6.32 \\ -5.16 - j6.32 \\ -4.73 + j0.602 \\ -4.73 - j0.602 \end{bmatrix}$$

tornando o sistema estável.

Na determinação da matriz de ganho encontrada para o sistema não-forçado, utilizou-se uma linearização da desigualdade matricial na forma *Dual* que considera a existência de uma matriz  $Y$ , cuja solução leva a uma estabilização menos restritiva que na forma *Primal*. O resultado do programa apresenta uma solução factível, o que pode ser comprovado através dos autovalores do sistema em malha fechada.

Além disso, a matriz de ganho encontrada é satisfatória, pois não apresenta um ganho impraticável em sistemas reais, sendo assim de fácil aplicação. Outro fator a ser analisado é a complexidade computacional, em que o controle via LMI mostrou-se eficiente, encontrando o resultado com poucas iterações e com tempo baixo.

## 5 CONTROLADOR VIA LQR

### 5.1 INTRODUÇÃO

O controle ótimo é uma das técnicas de controle moderno que consiste em elaborar uma lei de controle capaz de estabilizar o sistema tendo a preocupação de encontrar a melhor solução para que essa estabilidade ocorra por isso à nomenclatura de Controle Ótimo.

Métodos baseados na teoria de controle ótimo possibilitam estabilizar o sistema com o menor esforço de controle possível, obtendo boas margens de ganho e de fase.

Neste contexto, em plena década de 60, surge a técnica de controle ótimo denominada de Regulador Linear-Quadrático (LQR), o qual será alvo dos estudos desta seção.

### 5.2 DEFINIÇÃO

Considere o sistema descrito na equação (3.3). Uma lei de controle apropriada para estabilizar o sistema é dada por:

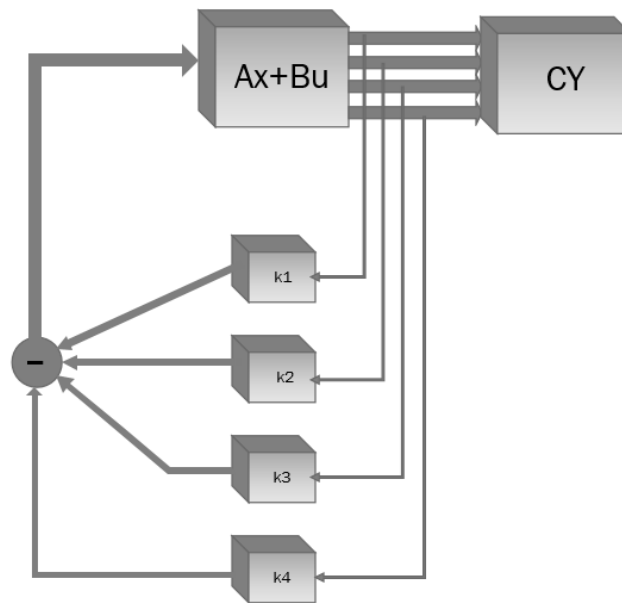
$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (5.1)$$

que, associando a equação (3.3), produz,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (5.2)$$

A partir do ganho  $\mathbf{K}$  é esperado que os autovalores de  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  devam estar alocados no semi-plano esquerdo do plano- $s$  e, portanto, tornar o sistema estável para qualquer condição inicial  $\mathbf{x}(0)$ , ou seja, a resposta dos estados do sistema, quando  $t \rightarrow \infty$ , tenderá a zero (CHEN, 1993). É importante lembrar que para a aplicação da lei de controle definida em (5.1) deve-se verificar se o sistema é controlável, baseado nas matrizes das equações de estado do sistema.

Para o sistema em análise deste trabalho, o diagrama de blocos que sintetiza o controle por realimentação de estados é apresentado na Figura 9.



**Figura 9 - Diagrama de blocos do controle por realimentação de estados**  
 Fonte: Autoria própria

Define-se, assim, o objetivo do controle via LQR, a determinação da matriz de ganho  $K$ , chamada de matriz ótima, expressa na forma vetorial, por:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \quad (5.3)$$

O método mais comum para encontrar  $K$  é a partir da minimização do índice de desempenho (OGATA, 2010), dado por:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (5.4)$$

onde  $Q$  e  $R$  são matrizes hermitianas positivas definidas. De acordo com (CHEN, 1993), uma boa aproximação para  $Q$  é  $C^T C$  e para  $R$  é  $1/q$ , sendo  $q$  uma constante qualquer.

Um fato que se pode observar da equação (5.4) é que o índice de desempenho mede ao mesmo tempo a performance do transitório, representado pelo termo  $x^T Q x$ , e o custo de controle, representado pelo termo  $u^T R u$ . Portanto, caso o objetivo seja modificar o transitório (como, por exemplo, o tempo de assentamento, tempo de subida, máximo sobressinal, etc.) deve-se manipular a matriz  $Q$ , e se o problema estiver relacionado a ganhos muito elevados, deve-se modificar a matriz  $R$  (LOPES *et al*, 2010).

Voltando a equação (5.2) e substituindo-a em (5.4) (OGATA, 2010), tem-se:



$$J = \int_0^{\infty} x^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) x dt \quad (5.5)$$

sendo,

$$x^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) x = -\frac{d}{dt} (x^T \mathbf{P} x) \quad (5.6)$$

com  $\mathbf{P}$  sendo uma matriz hermitiana definida positiva. Assim, desenvolvendo a equação (5.6), tem-se:

$$x^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) x = -\dot{x}^T \mathbf{P} x - x^T \dot{\mathbf{P}} x = -x^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] x \quad (5.7)$$

Comparando os dois lados da equação (5.7), obtém-se,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) = (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (5.8)$$

Por fim, para encontrar a resolução da equação (5.8), considera-se que,

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} \quad (5.9)$$

com  $\mathbf{T}$  sendo uma matriz não singular. Dessa forma a equação (5.8) pode ser reescrita, como:

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

que, rearranjando, determina-se:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

A partir da equação (5.11) deve-se minimizar o seguinte termo, em relação à  $\mathbf{K}$ ,

$$x^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] x \quad (5.12)$$

Após, analisando a equação (5.12), verifica-se que o mínimo ocorre quando,  $\mathbf{T} \mathbf{K} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ . Portanto, tem-se,

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (5.13)$$

Contudo, o sistema (3.3) pode ser controlado a partir da matriz de ganho ótima definida em (5.13), onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz simétrica definida positiva.

Assim, substituindo a equação (5.13) em (5.1), a lei de controle ótima será:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} x \quad (5.14)$$

Por fim, é importante definir a seguinte equação,

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + C^T C = 0 \quad (5.15)$$

sendo  $Q = C^T C$ . A equação (5.15) é denominada de equação de Riccati e, portanto, para se projetar o controlador via LQR, deve-se resolver a equação de Riccati a fim de encontrar uma solução factível para a matriz  $P$ , e após, aplicar o resultado encontrado em (5.13), gerando, assim, o vetor de ganho ótimo do controlador.

### 5.2.1 Resolução da equação de Riccati via otimização LMI

Uma forma comum para se resolver um sistema de controle via LQR é aplicar a otimização LMI, ou seja, partir da equação de Riccati que possui uma não linearidade em  $P$ , transformando-a em uma LMI. Para isso, deve-se utilizar o complemento de Schur.

Para tanto, considere a equação (5.15). Multiplicando à esquerda e à direita por  $P^{-1}$ , obtém-se,

$$P^{-1}(A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + C^T C)P^{-1} < 0 \quad (5.16)$$

Deve-se observar que o termo quadrático em  $P$  está negativo e para efetuar o complemento de Schur tal termo deve ser positivo. Dessa forma, rearranjando o sinal da equação (5.16), tem-se:

$$-P^{-1}A^T - AP^{-1} + BR^{-1}B^T - P^{-1}C^T CP^{-1} > 0 \quad (5.17)$$

Aplicando o complemento de Schur, define-se,

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}A^T - AP^{-1} + BR^{-1}B^T & P^{-1}C^T \\ CP^{-1} & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.18)$$

Assim, para a resolução do problema, basta resolver a LMI acima através de um pacote computacional (como, por exemplo, o *Imilab* ou *Imitool* do Matlab ou *Imitool* do Scilab) e aplicar a solução encontrada para a matriz  $P$  na equação (5.13), resultando na matriz ótima de realimentação de estados que estabiliza o sistema.

Assim, o algoritmo computacional necessário para obter o ganho de realimentação de estados que atenda os requisitos de projeto, será:

1. Meça ou estime o estado inicial  $x(0)$ ;
2. Resolva  $\min_{Y,Q} \zeta$ , sujeito as restrições (5.19), (5.21), (4.18) e (4.19);

3. Substituir a matriz  $P = Q^{-1}$  encontrada na equação (5.14). A matriz resultante é a ótima.

### 5.3 RESULTADOS OBTIDOS

Conforme apresentado na seção anterior, a solução para o problema LQR é obtida resolvendo a Equação Algébrica de Riccati, e, uma alternativa para este problema é utilizar a técnica de LMI. Portanto, o problema LQR via LMI pode ser reformulado como um problema de otimização em termos de  $Q$  e  $Y$  (BOYD et al, 1994), sendo:

$$\min_{Q,Y} x^T(0)Q^{-1}x(0)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - BY - Y^T B^T & Q & Y^T \\ Q & -Q_{opt}^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, Q > 0, \quad (5.19)$$

onde  $Y = KQ$ ,  $Q = P^{-1}$  e  $Q_{opt} = I$ . Em muitas situações o objetivo da minimização é que:

$$x^T(0)Q^{-1}x(0) \leq \zeta \quad (5.20)$$

onde  $\zeta$  é um limitante superior escolhido pelo projetista. Dessa forma, pode-se expressar a minimização por:

$$\begin{bmatrix} \zeta & x^T(0) \\ x(0) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.21)$$

Sendo assim, as LMIs programadas serão: (5.20) e (5.21).

Deseja-se, ainda, determinar a região de especificação para alocação dos pólos de malha fechada, portanto, adiciona-se as restrições em forma de LMIs (4.18), com  $a = 4$  e (4.19) com  $r = 10$ .

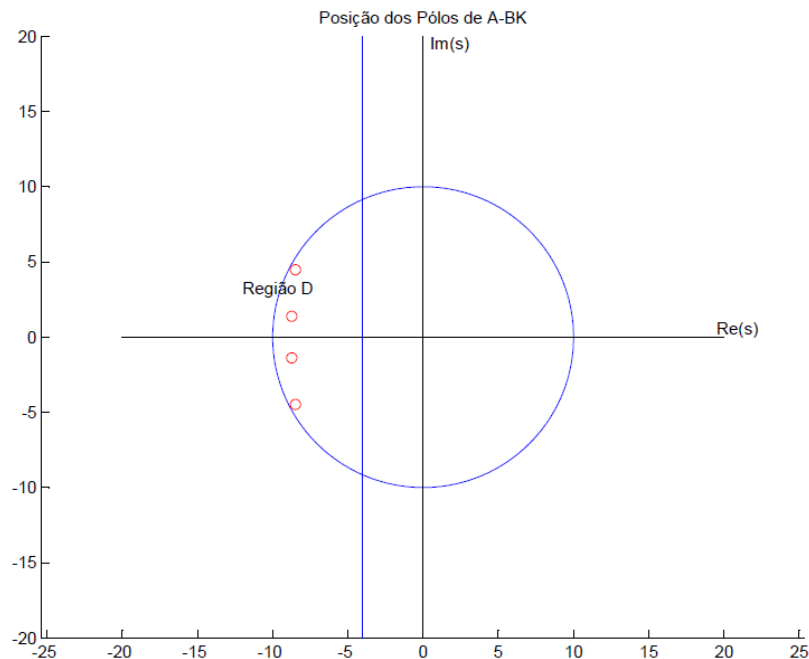
Contudo, o problema é factível e a matriz  $P$  encontrada é:

$$P = 1 \times 10^7 * \begin{bmatrix} 6.66 & 1.21 & 1.398 & 0.43 \\ 1.21 & 0.221 & 0.253 & 0.078 \\ 1.39 & 0.253 & 0.297 & 0.09 \\ 0.43 & 0.078 & 0.09 & 0.027 \end{bmatrix}$$

E a matriz de ganho ótima,

$$K = [-425.44 \quad -80.85 \quad -59.48 \quad -24.25]$$

A partir dos resultados obtidos para o ganho de realimentação de estados, obtém-se os pólos:



**Figura 10 - Pólos para o controle via LQR com otimização LMI**  
**Fonte: Autoria própria**

Outros fatores importantes a serem analisados, é o tempo busca da solução factível e, também o número de iterações necessárias para tal condição, sendo respectivamente,  $T_{execução} = 1,149 s$  e  $N_{iterações}^o = 30$ .

#### 5.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

A partir dos resultados obtidos na seção (5.3) pode-se notar que a lei de controle utilizada,  $u = -Kx$ , leva o sistema a estabilidade, aloca os pólos na região especificada no lado direito do plano-s.

$$eig(A - BK) = \begin{bmatrix} -8.47 + j4.47 \\ -8.47 - j4.47 \\ -8.73 + j1.38 \\ -8.73 - j1.38 \end{bmatrix}$$

Por fim, pode-se concluir que à medida que se aumenta a estabilidade relativa (pólos mais distantes do eixo imaginário do plano complexo-s) ocorrem significativas melhoras nas respostas transitórias (conforme será apresentado na seção de análise comparativa de desempenho entre os controladores) com a redução dos de alguns dos índices de desempenho, tais como: tempo de estabelecimento, nível de

oscilação ou amplitude do sinal de saída, o que permite definir o grau de oscilação desejado para atender determinadas especificações de projeto ao sistema em estudo.

Além disso, verifica-se que a matriz de ganho encontrada possui uma ordem maior, o que, muitas vezes, pode ser considerado uma característica ruim, dada a condição de altos ganhos serem impraticáveis a circuitos eletrônicos atuadores em sistemas reais.

Outro fator importante é a rapidez em que o controle encontra a solução factível, sendo que o controlador via LQR levou um tempo maior, e para sistemas com matrizes de estados mais complexas, tal controle pode ser inviável, devido ao seu tempo de processamento.

## 6 ANÁLISE DE DESEMPENHO

No exemplo discutido ao longo deste trabalho, o pacote computacional LMI Solver em ambiente Matlab foi usado para computar a solução do problema min-max, em um computador com processador AMD Turion(tm) X2 Dual-Core Mobile RM-72 2.10 GHz e 4 GByte de RAM.

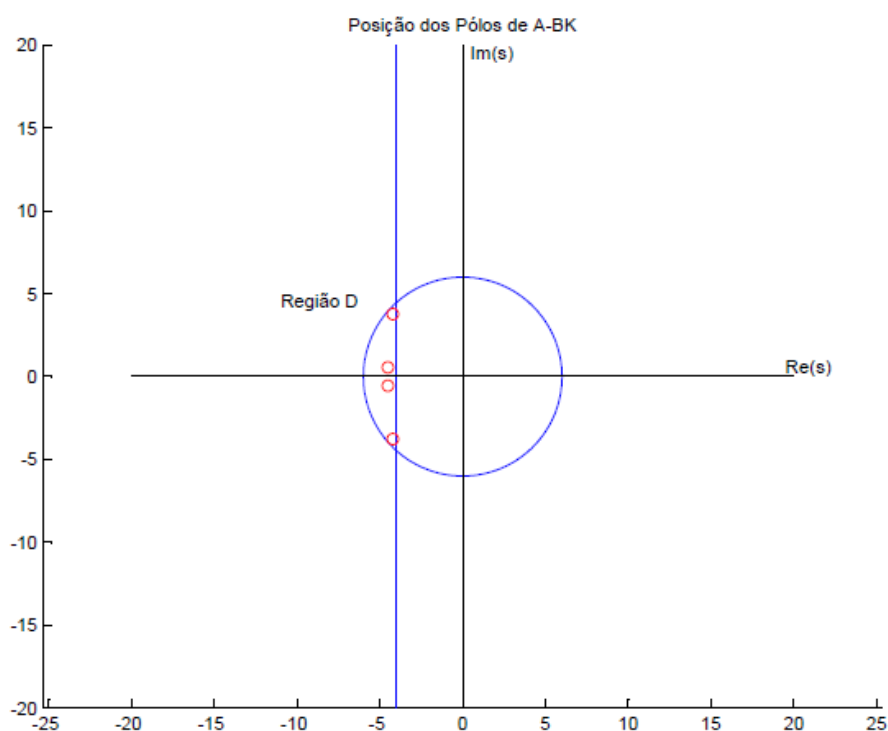
### 6.1 TESTE DE FACTIBILIDADE ENTRE AS TÉCNICAS DE CONTROLE LMI E LQR

Esta seção tem por finalidade verificar, dentre as técnicas de controle linear, qual a metodologia apresenta a condição mais relaxada na busca de uma solução factível. Assim, considere os procedimentos apresentados na seção 4.4.1 para LMI e na seção 5.3 para LQR, considerando como especificação de projeto da intersecção das regiões de estabilidade de um círculo com raio 6 à esquerda de  $-4$  no plano- $s$ .

Após a simulação, verificou-se que o controle via LMI encontra uma resposta factível em 0,65s por 11 iterações, cujos pólos em malha fechada são alocados em,

$$eig(A - BK) = \begin{bmatrix} -4.22 + j3.77 \\ -4.22 - j3.77 \\ -4.51 + j0.54 \\ -4.51 - j0.54 \end{bmatrix}$$

A Figura 11 mostra os autovalores do sistema em malha fechada dentro da região especificada.



**Figura 11 - Localização dos pólos para a região determinada**  
**Fonte: Autoria própria**

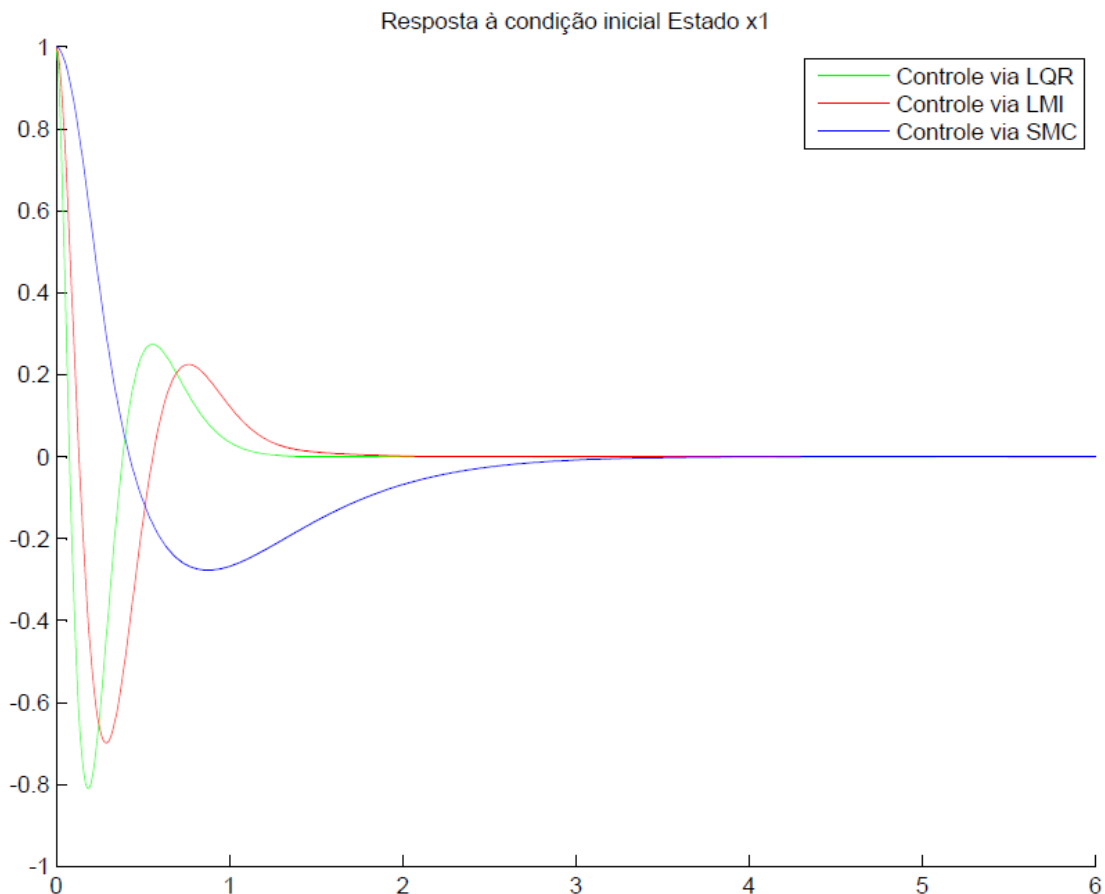
Dessa forma, nota-se que para uma região mais limitada o controlador é capaz de estabilizar o sistema em estudo neste trabalho. Porém, aplicando a região descrita anteriormente ao controlador via LQR, o programa efetua 74 iterações em 4,06 s e não encontra uma solução factível, ou seja, o controle via LMI possui uma forma de encontrar a solução factível mais relaxada, com um custo computacional menor e mais eficiente.

## 6.2 ANÁLISE DAS RESPOSTAS TEMPORAIS DOS ESTADOS À CONDIÇÃO INICIAL

Nesta seção serão apresentadas análises comparativas quanto às respostas dos estados dado as condições iniciais apresentadas em (3.32).

### 6.2.1 Estado $x_1$

A Figura 12 mostra a resposta do sistema para o estado  $x_1$ , que seria o ângulo da haste com a horizontal, representado por  $\theta$ .



**Figura 12 - Resposta à condição inicial para o estado x1**  
**Fonte: Autoria própria**

Analisando a Figura 12, pode-se observar que o controlador que possui menor sobressinal e menor oscilação é o controlador via SMC, pois todos os

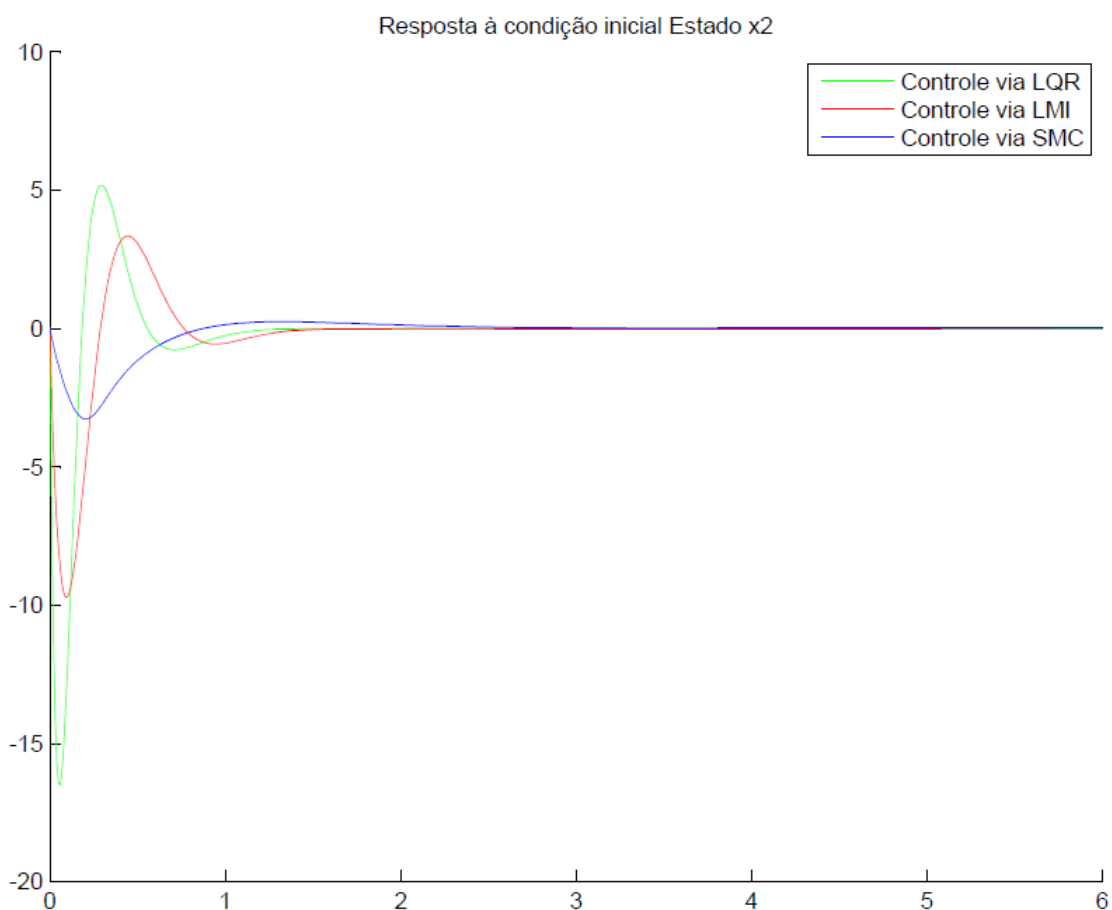


estados partem da mesma condição inicial, expressa em (3.32), porém, o controle via SMC atenua o estado  $x_1$  de uma forma mais suave.

No entanto, o tempo de assentamento dos controladores lineares são inferiores ao tempo do controlador não-linear. E, dentre os controladores lineares, o controle via LMI possui maiores vantagens, pois ele possui uma característica mais rápida, porém com maior sobressinal em relação ao controle LMI.

### 6.2.2 Estado $x_2$

A Figura 13 mostra a resposta à condição inicial do estado  $x_2$ , que seria a velocidade angular da haste do pêndulo invertido, representada pela variável  $\dot{\theta}$ .

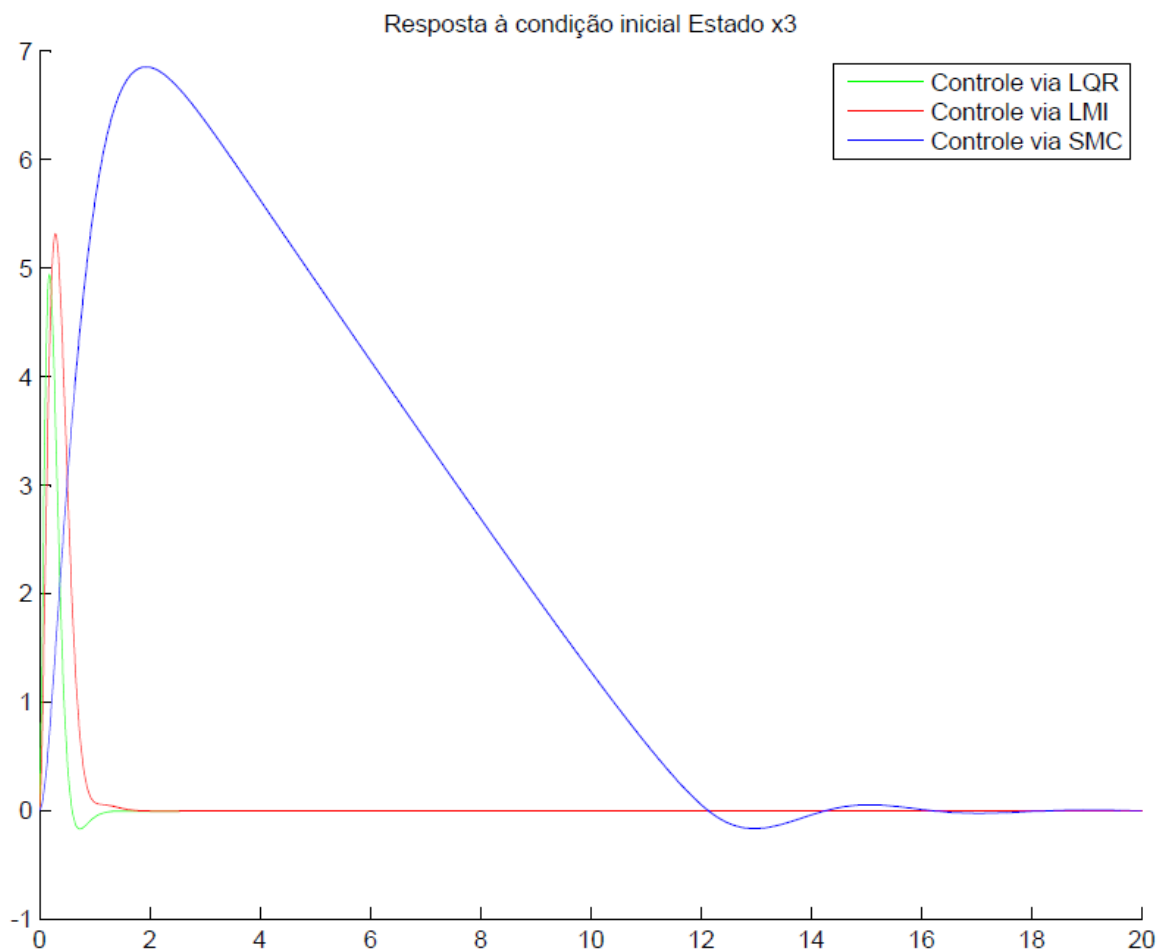


**Figura 13 - Resposta à condição inicial para o estado  $x_2$**   
**Fonte: Autoria própria**

Com a Figura 13, percebe-se que o fato se repete, pois o controle via SMC se mostrou mais eficiente, com menos oscilações, porém atenuando o estado mais rapidamente. E, em relação aos controladores lineares, o controle LQR teve maior rapidez e suavidade.

### 6.2.3 Estado $x_3$

A Figura 14 mostra a resposta temporal do estado  $x_3$ , caracterizado pela posição do carrinho, sendo  $z$ .



**Figura 14 - Resposta à condição inicial para o estado  $x_3$**   
**Fonte: Autoria própria**

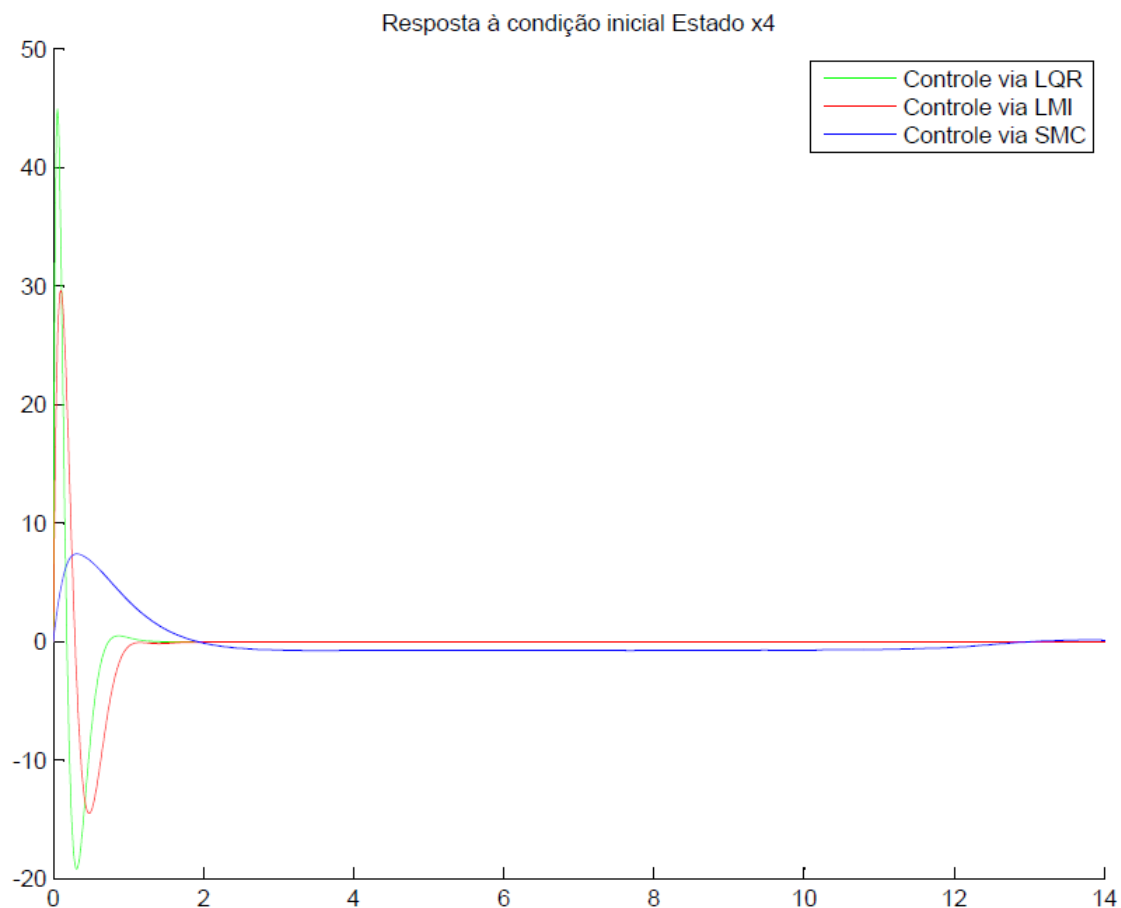
A partir da Figura 14, nota-se que o controlador via SMC é menos eficiente para atenuar o estado representado pela posição do carrinho, pois ele possui um sobressinal muito elevado e o tempo de assentamento é aproximadamente 8 vezes

maior, quando comparado aos demais controladores. Neste caso o controle via LMI possui um percentual de sobressinal maior do que LQR e com um tempo de assentamento é ligeiramente menor.

Pode-se notar que o controle via SMC apresentou uma resposta lenta para a posição do carrinho, estado  $x_3$ , devido ao fato de que ele prioriza o controle do ângulo da haste, estado  $x_1$ , dessa forma o carrinho possui mais movimento, a fim de produzir uma menor oscilação na haste.

#### 6.2.4 Estado $x_4$

A Figura 15 mostra a resposta temporal do último estado, sendo a velocidade do carrinho, representada por  $\dot{z}$ .



**Figura 15 - Resposta à condição inicial para o estado x4**  
**Fonte: Autoria própria**

Neste caso, a resposta via SMC foi muito superior aos demais quando comparado ao nível de sobressinal, pois ficou bem abaixo dos demais controladores

em análise. Porém, o tempo de assentamento é maior, sendo um controlador mais lento.

Dentre os controladores lineares o LMI possui a vantagem de menor sobressinal e apresentando tempo de assentamento ligeiramente maior.

### 6.3 COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

Outro fator a ser destacado é a complexidade computacional envolvida no desenvolvimento dos controladores, cujas diferenças podem ser descritas por: o controlador mais complexo foi o SMC, pois o tempo de compilação foi de 1,257 s, já o controle via LQR obteve um tempo de 1,149 s e o controle via LMI um tempo de 0,95 s.

O motivo pelo qual o controle via SMC foi mais demorado, é devido às suas naturezas não-lineares, que são mais difíceis de serem interpretadas em relação às equações lineares.

Já a LMI pode ser considerada o controle menos complexo, pois o seu tempo foi menor, pois este é um método de controle simples e possui uma abrangência de convergência maior.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir de todos os resultados coletados e analisados, pode-se eleger o controle via SMC como o que mostrou melhor resposta ao sistema em relação ao sobressinal, pois atenuou a maioria dos estados com um menor percentual de oscilação.

Isso se deve a sua natureza não-linear, que, por sua vez, se adapta ao problema com maior exatidão, trabalhando com o sistema em qualquer região, não, somente em torno de uma região determinada.

Agora, em relação à efetividade da busca pela solução do controle do sistema, o controle via SMC não pode ser considerada a melhor opção, pois sua complexidade computacional é alta, tanto na determinação da lei de controle, quanto nas aplicações do controle ao sistema a ser controlado. É importante salientar, que a velocidade com que o controlador leva os estados ao ponto de equilíbrio está diretamente associada ao parâmetro  $\rho$  do controle chaveado, sendo uma alternativa de melhora para os índices nos quais o controlador não obteve bons resultados.

Sendo assim, se o intuito é utilizar um controle menos complexo e que possua respostas satisfatórias, a melhor opção seria LMI, que se mostrou o controlador que possui menor tempo de simulação e respostas consideradas adequadas.

Já o controle via LQR foi o que mostrou respostas mais rápidas com relação ao tempo de estabelecimento, tanto nas respostas dos estados. Entretanto, apresenta maior índice de sobressinal e tempo de compilação. Outro fator negativo é a existência de uma região em que o controle não converge, tornando a técnica de controle mais limitada quando se requer algum ajuste mais específicos nos índices de desempenho. É importante observar que é possível trabalhar com os parâmetros  $Q$  e  $R$  no controlador de forma a obter melhorias nas respostas transitórias e de controle.

Contudo, pode-se elencar que para uma aplicação prática real o controle via SMC apresenta vantagens significativas, principalmente no que tange a saturação nos sensores e nos ganhos do controlador.

## REFERÊNCIAS

AGOSTINHO, Adriana Cavalcante. **Controle por modos deslizantes aplicado a sistema de posicionamento dinâmico**, São Paulo, SP, 2009. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

ASSUNÇÃO, E; TEIXEIRA, M. C. M. **Apostila Controle Linear I – Parte A Sistemas Contínuos no Tempo**. Universidade Estadual Paulista, 2008. Disponível em <<http://falcao.feis.unesp.br/dee/projetos/lpc/Downloads/Apostila%20de%20Controle%20Linear%20I.pdf>>. Acesso em: 20 de agosto de 2013.

BOYD, Stephen, GHAOUI, Laurent El, *et al.* **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia, 1994.

CAUN, Alessandro da Ponte. **Modos deslizantes discretos incertos com atraso na computação do sinal de controle**. Ilha Solteira, SP, 2007. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.

CHEN, Chi-Tsong. **Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods**. New York, NY: Oxford University Press, 1993. 600p.

CHILALI, Mahmoud, GAHINET, Pascal.  **$H_{\infty}$  Design with pole placement constraints: Na LMI approach**. IEEE Transactions on automatic control, vol. 41, no. 3, 1996.

COSTA, André Pereira da. LIRA, Valnir Vasconcelos. SILVA, Samuel Alves da. **Simulação de Pêndulo simples e Invertido**. VII CONNEPI – Congresso Norte Nordeste de Pesquisa e Inovação, Palmas, TO, 2012.

COSTA, Marcus Vinicius Silvério. **Controladores robustos D-LQI e D-Alocação de polos otimizados via LMI aplicados a um conversor boost alto ganho com célula de comutação três estados**, Fortaleza, CE, 2012. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Elétrica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

COUTINHO, Marcelo dos Santos. **Projeto via LMI de sistemas de controle comutado para um motor de Indução**. Florianópolis, SC, 2006. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

DAMAZP, Graciliano Antonio. **Controle com modos deslizantes aplicado em sistemas com atraso e acesso somente à saída**, Ilha Solteira, SP, 2008.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.

EDWARDS, Christopher. Spurgeon, Sarah K. **Sliding Mode Control: Theory and Applications**. 1998

GARCIA, J. P. F; RIBEIRO, J. M. S; SILVA, J. J. F e MARTINS E. S (2005). **Continuous-time and discrete-time sliding mode control accomplished** using a computer. IEE Proc. of Control Theory Appl., 152, pp. 220-228.

GARCIA, J. P. F; **Controle Discreto com Modos Deslizantes em Sistemas Incertos com Atraso no Sinal de Controle**. 2006. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista. Ilha Solteira, 2006.

GE, M; CHIU, MS; WANG, QG. **Robust PID controller design via LMI approach** - Journal of process control, 2002.

KHALIL, Hassan K. **Nonlinear systems**. 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

KOTHARE, M. V; BALAKRISHNSN, V; MORARI, M. **Robust Constraint Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities**. Automatica, 1996.

LEITE, Kelson de Sousa. COSTA, Marcus Vinicius Silvério. CAMPOS, J. C. T. **Aplicação e análise de controle LQR com ação intergal robusta multivariável otimizado via desigualdades matriciais lineares**. Fortaleza, CE, 2011. DINCON 2011 – 10<sup>a</sup> Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações.

LOPES, Marcelo de Almeida, SANTISTEBAN, José Andrés, NERO, Afonso Celso Del. **Controle centralizado de mancais magnéticos com a técnica LQR e característica integral**. Serra Negra, SP. 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications, 2010.

MONSEES Govert. **Discrete-time Sliding Mode Control**. Technische Universiteit Delft, 2002.

OGATA, Katsuhiko. **Discrete-time control systems**. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ.: Prentice-Hall, c1995. 745 p

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno** – 5ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

PRIOSTE, Fernando Buzzulini. **Detecção e controle de oscilações eletromecânicas usando sistemas de medição fasorial sincronizada**.

Florianópolis, SC, 2011. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

SAGAZ, Guilherme Salgado Gomes. **Controle por busca extremal de amplificadores ópticos Raman via modos deslizantes e função de chaveamento periódica**, Rio de Janeiro, RJ, 2011. Dissertação (Mestrado) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fiseca.

SALGADO, Norberto Emanuel Godinho. **Ajuste de controladores por otimização não linear multiobjectivo**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Aveiro, Departamento de Eletrônica, Telecomunicações e Informática. 2008.

SCHERER, Carsten. WEILAND, Siep. **Linear Matrix Inequalities in Control**. Center for Systems and Control – Department of Electrical Engineering, Eindhoven – The Netherlands. 2005.

TROFINO, A. **Apostola Controle Robusto**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2000. Disponível em:< <http://www.das.ufsc.br/~trofino/disciplinas/das-6600/apostila-robusto.pdf> > Acesso em: 20 de Agosto de 2013.

UTKIN, Valdim I. **Sliding modes in control and optimization**. Berlim: Springer-Verlag, 1992. 2



## APÊNDICE A

### ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV

**Teorema A:** *Seja  $v(t, x): [0, \infty) \times \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável e sejam  $\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot), \phi_3(\cdot)$  funções de classe  $\mathcal{K}$  tais que as seguintes condições sejam satisfeitas para todo  $t \geq t_0$  e  $x \in \mathcal{B}_x$ .*

$$\begin{aligned}\phi_1(\|x\|) &\leq v(t, x) \leq \phi_2(\|x\|) \\ \dot{v}(x) &\leq -\phi_3(\|x\|)\end{aligned}\tag{A1}$$

*Logo, as seguintes sentenças são verdadeiras:*

- *A origem do sistema é Uniformemente Assintoticamente Estável;*
- *Se existirem constantes positivas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , tal que  $\beta\phi_1(\|x\|) \geq \alpha_1\|x\|^\beta$ ,  $\phi_2(\|x\|) \leq \alpha_2\|x\|^\beta$  e  $\phi_3(\|x\|) \geq \alpha_3\|x\|^\beta$ , então a origem do sistema é exponencialmente estável.*

Analisando o Teorema A, verifica-se que se todas as condições forem satisfeitas e  $\phi_1(\|x\|)$  for radialmente ilimitada a estabilidade será global.

Portanto, o maior desafio do Teorema A é encontrar uma função de Lyapunov adequada de modo a determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos, sendo importante ressaltar que as condições do Teorema são somente suficientes, dessa forma, se não existir uma função  $v(x)$  que atenda as condições do Teorema A não implica que o sistema seja instável.

Desta forma, escolhe-se uma função quadrática para função  $v(x)$ , como sendo:

$$v(x) = x^T P x \tag{A2}$$

onde  $P$  é uma matriz constante, real e simétrica positiva definida, ou seja,  $P = P^T > 0$ . Portanto, encontrando uma matriz  $P$  que satisfaça o Teorema A, o sistema será considerado quadraticamente estável e  $v(x)$  será a função quadrática de Lyapunov.

**APÊNDICE B**  
**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO**  
**TEMPO**

Considere o seguinte sistema LTI,

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{B1})$$

sendo  $x$  o vetor de estados e  $A$  uma matriz constante.

Dessa forma, considerando a função quadrática  $v(x) = x^T P x$ , a expressão para  $\dot{v}(x)$ , será:

$$\dot{v} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \quad (\text{B2})$$

Agora, substituindo o sistema da equação (B1) em (B2), tem-se:

$$\dot{v} = x^T (A^T P + P A) x \quad (\text{B3})$$

Assim,  $v(x) > 0 \Leftrightarrow \exists P = P^T > 0$  e  $\dot{v}(x) < 0 \Leftrightarrow (A^T P + P A) < 0$ . Contudo, a condição necessária e suficiente para que o sistema seja globalmente estável é:

$$\exists P = P^T > 0 : A^T P + P A < 0 \quad (\text{B4})$$

sendo conhecida como desigualdade de Lyapunov.