

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**JÉSSICA CAROLINA BARBOSA VIEIRA
RAÍZA MARINA VEDOVATTO LOUREIRO**

**ESTUDO DE TÉCNICAS PARA LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DE
SENSORES PARA ENSAIOS DE VIBRAÇÕES**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2015

JÉSSICA CAROLINA BARBOSA VIEIRA
RAÍZA MARINA VEDOVATTO LOUREIRO

ESTUDO DE TÉCNICAS PARA LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DE SENSORES PARA ENSAIOS DE VIBRAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de conclusão de curso 2, do curso superior de bacharelado de engenharia mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, campus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak

PATO BRANCO

2015

AGRADECIMENTOS – Jéssica Carolina Barbosa Vieira

Agradeço primeiramente a Deus por sempre me iluminar e me guiar nos caminhos da vida, por sua imensa proteção e pela força para enfrentar as dificuldades.

Agradeço e dedico principalmente aos meus pais, Rudinei Roberto Vieira e Andreia Soraya Barbosa e a minha irmã Gabriela Vieira, por acreditarem fielmente que eu era capaz de concluir essa etapa na minha vida, pelo amor, carinho, paciência, pelas oportunidades proporcionadas, pela incondicional confiança e principalmente por todo apoio a mim dedicado. Obrigado por não medirem esforços para que essa etapa fosse concluída.

A meu namorado Alison, que sempre me deu força e me estendeu a mão nos momentos que mais precisei, agradeço por estar sempre do meu lado me apoiando, pela compreensão pelo amor e pela paciência.

A todos os professores pelos ensinamentos ao longo desses cinco anos e em especial ao professor Dr. Paulo Rogerio Novak, não só pela orientação durante o TCC, mas por ter dado a nós a oportunidade de aprender, pelo conhecimento repassado, pelas sugestões e pelo apoio.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

AGRADECIMENTOS – Raíza Marina Vedovatto Loureiro

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e força para enfrentar as dificuldades.

Aos meus queridos pais que sempre priorizam a educação e me conduziram a uma formação baseada em respeito, humildade e honestidade. Obrigado por serem esses seres incríveis que me ensinaram tudo o que sei. A vocês gostaria de dedicar e reconhecer, minha imensa gratidão e amor.

A minha linda filha Marina, que mesmo sem ter conhecimento da vida, me proporciona a cada dia um aprendizado novo e me faz querer ser melhor.

À todos os professores pelo conhecimento repassado, principalmente ao Professor Paulo Rogerio Novak pela orientação e atenção.

Enfim, meu muito obrigado a todos que auxiliariam para que esse trabalho fosse concluído e que contribuíram para a superação dos momentos difíceis.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”

Charles Chaplin

RESUMO

VIEIRA, Jéssica; LOUREIRO, Raíza. Estudo de técnicas para localização ótima de sensores para ensaios de vibrações. 2015. Trabalho de conclusão de curso – Curso Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

O estudo do posicionamento ideal de sensores em ensaios de estruturas é fundamental para a análise de sistemas de vibração. O mau posicionamento desses sensores pode causar a perda da controlabilidade do sistema, ou seja, pode comprometer a análise do sistema e interferir no seu desempenho. Vários critérios devem ser analisados para a escolha correta da localização desses sensores, e seguindo esse raciocínio foi desenvolvida uma metodologia onde foram estudados e aplicados diferentes métodos, que através da análise modal buscaram encontrar posições ideais onde os modos de vibração e os valores modais foram os melhores obtidos. Os métodos estudados foram implementados no *software* MATLAB, dentre os quais estão Fator de Participação, Resíduo, Índice da Matriz Grammiana e Carta de Pareto. As características de cada método foram apresentadas, assim como as formulas e os passos para se obter as matrizes de resultados. Obtendo os resultados pode-se então determinar qual posição foi a mais adequada para cada método e quais métodos foram mais eficientes. Após a aplicação dos métodos concluiu-se que alguns resultados obtidos foram divergentes pelo fato de que os métodos utilizam técnicas diferentes para avaliar o melhor posicionamento dos sensores, podendo assim não ser comparados entre si. Contudo para a análise realizada, admitiu-se então o melhor método entre os estudados foi o 'Resíduo' pelo fato de gerar informações mais concretas quando comparado com os outros métodos. Porém para uma análise mais informativa e para possíveis trabalhos futuros seria interessante aliar dois métodos para obtenção de respostas mais efetivas.

Palavras-Chave: Posicionamento ideal de sensores. Controlabilidade. Mau posicionamento. Métodos de otimização. Análise modal.

ABSTRACT

VIEIRA, Jéssica; LOUREIRO, Raíza. Techniques of optimal sensor location study for vibration test, 2015. Trabalho de conclusão de curso – Curso Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

The study of the sensors optimal positioning for structures assays is crucial for the vibration systems analysis. The poor positioning of these sensors can cause loss of controllability of the system, then can compromise the system analysis and interfere your performance. Several criteria must be reviewed for the correct choice of the location of sensors, and following this reasoning was made a methodology which were studied and applied different methods, that through modal analysis pursue to find optimal locations where vibration modes and the modal values were best obtained. The methods studied were implemented in MATLAB software, among which are Factor Participation, Residue, Matrix Index Grammiana and Pareto Chart. The characteristics of each method are presented, as well as the formulas and the steps to obtain the matrices results. Getting the results than is possible to determine which position was the most appropriate for each method and choose which methods were more efficient. After the application of the methods, it was concluded that some results obtained were different by the fact that the methods use different techniques to assess the best positioning of the sensors, and thus cannot be compared. Yet for the analysis, it was assumed that the best method studied was the 'Residue' that it generates more concrete information when compared to other methods. But for a more informative analysis and possible future work, would be interesting to combine two methods for obtaining more effective responses.

Keywords: Sensors optimal positioning. Controllability, Poor positioning. Optimization methods. Modal analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Primeiro, segundo e terceiro modo de vibração de uma viga engastada..	21
Figura 2 - Esquema do Sistema discreto com quatro graus de liberdade	42
Figura 3 - Elementos e nós da viga de aço 1020	44
Figura 4 - Resposta ao impulso no domínio do tempo e no domínio da frequência para força aplicada no corpo 1.	47
Figura 5 - Resposta ao impulso no domínio do tempo e no domínio da frequência para força aplicada no corpo 2.	48
Figura 6 - Resposta ao impulso no domínio do tempo e no domínio da frequência para força aplicada no corpo 3.	48
Figura 7 - Resposta ao impulso no domínio do tempo e no domínio da frequência para força aplicada no corpo 4.	49
Figura 8 - Representação da estimativa para força aplicada no corpo 1	55
Figura 9 - Representação da estimativa para força aplicada no corpo 2	55
Figura 10 - Representação da estimativa para força aplicada no corpo 3	56
Figura 11 - Representação da estimativa para força aplicada no corpo 4	57
Figura 12 - Modos de vibração da viga engastada.....	58
Figura 13 - Resposta ao impulso sem amortecimento da força aplicada no nó 12 e a resposta medida no nó 3.	59
Figura 14 - Resposta ao impulso com amortecimento da força aplicada no nó 12 e a resposta medida no nó 3.	59
Figura 15 - Representação da estimativa para força aplicada no nó 21	83

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 OBJETIVOS	15
1.1.1 Objetivo geral	15
1.1.2 Objetivo específico	15
1.2 JUSTIFICATIVA	16
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	16
2 REVISÃO DE LITERATURA	18
2.1 INTRODUÇÃO BÁSICA À VIBRAÇÕES MECÂNICAS.....	18
2.1.1 Vibração e sua aplicação	18
2.1.2 Características dos sistemas vibratórios	18
2.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF) NA ANÁLISE ESTRUTURAL.....	19
2.3 CONCEITOS E FUNDAMENTOS DE ANÁLISE MODAL	20
2.4 COMPORTAMENTO DE MODELOS ESTRUTURAIS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE	22
2.4.1 Modelos estruturais de segunda ordem	23
2.4.2 Análise sem Amortecimento.....	24
2.4.3 Resposta ao impulso	27
2.4.3.1 Vibração amortecida.....	27
2.4.4 Representação no espaço de estados	28
2.4.5 Controlabilidade e observabilidade	32
2.5 MÉTODOS PARA O POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES.....	34
2.5.1 Matrizes gramianas	34
2.5.1.1 Matrizes gramianas aplicadas no posicionamento ótimo	35
2.5.2 Fatores de participação	36
2.5.3 Resíduo.....	38
2.5.4 Método da Carta de Pareto	39
2.5.4.1 Descrição do método.....	40
3 METODOLOGIA	42
3.1 CASO 1: SISTEMA DISCRETO COM QUATRO GRAUS DE LIBERDADE.....	42
3.1.1 Descrição do sistema	42
3.1.2 Dados do sistema.....	42

3.1.3 Determinação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento	43
3.2 CASO 2: SISTEMA DE VIGA ENGASTADA	44
3.2.1 Descrição do sistema	44
3.2.2 Dados do sistema.....	44
3.2.3 Determinação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento	45
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	47
4.1 CASO 1: SISTEMA COM QUATRO GRAUS DE LIBERDADE	47
4.1.1 Resposta ao impulso	47
4.1.2 Fator de Participação	49
4.1.3 Índice da matriz grammiana (ICG)	50
4.1.4 Resíduo	50
4.1.5 Carta de Pareto	54
4.2 CASO 2: SISTEMA DE VIGA ENGASTADA	57
4.2.1 Resposta ao impulso	57
4.2.2 Fator de participação.....	60
4.2.3 Índice da matriz grammiana	61
4.2.4 Resíduo	62
4.2.5 Carta de Pareto	82
4.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	83
4.3.1 CASO 1: SISTEMA DISCRETO	83
4.3.2 CASO 2: SISTEMA DE VIGA ENGASTADA	84
5 CONCLUSÃO	85
REFERÊNCIAS	87

LISTA DE SÍMBOLOS

M	Matriz de massa estrutural
D_a	Matriz de amortecimento estrutural
K	Matriz de rigidez estrutural
$\ddot{x}(t)$	Vetor deslocamento
$\dot{x}(t)$	Vetor velocidade
$x(t)$	Vetor aceleração
$f(t)$	Vetor de forças externas
Ω	Matriz de frequências naturais
Φ	Matriz modal
Φ^T	Transposto da matriz modal
M_m	Matriz de massa modal
K_m	Matriz de rigidez modal
D_{ap}	Matriz amortecimento proporcional
α e β	Constantes
ζ	Fator de amortecimento
w_n	Frequência natural
w_d	Frequência amortecida
c	Constante de amortecimento
m	Massa
k	Rigidez
t	Tempo
x_i	Variáveis de estado
$x_1(t)$	Vetor de deslocamento modal
$x_2(t)$	Vetor de velocidade modal
$u(t)$	Vetor de entrada do sistema
$y(t)$	Vetor de saída do sistema
M^{-1}	Inverso da matriz de massa estrutural
F	Matriz de influência de entradas
G	Matriz localização dos pontos de medida
A	Matriz dinâmica

A^T	Transposto da matriz dinâmica
B	Matriz de entrada
B^T	Transposto da matriz de entrada
C	Matriz de saída
C^T	Transposto da matriz de saída
A_m	Matriz dinâmica modal
B_m	Matriz modal de entrada
C_m	Matriz modal de saída
V	Matriz dos autovetores a direita
V^{-1}	Matriz dos autovetores a esquerda
λ_n	Autovalores
c	Matriz de controlabilidade
O	Matriz de observabilidade
W_c	Grammianos de controlabilidade
W_o	Grammianos de observabilidade
R	Matriz de transformação de coordenadas.
R^{-1}	Inverso da matriz de transformação de coordenadas
R^T	Transposto da matriz de transformação de coordenadas
IG_s	Índice grammiano
$tr()$	Traço da matriz
\sum_s	Matriz grammiana de posicionamento de sensores
\sum_a	Matriz grammiana de posicionamento de atuadores
P_i	Matriz de Participação
R_e	Matriz Resíduo
cC	Posição do sensor
b	Força que será aplicada em uma dada posição

1 INTRODUÇÃO

O estudo de técnicas para localização ótima de sensores em sistemas para testes de vibrações tem recebido cada vez mais notoriedade entre os estudiosos da área de engenharia. A questão do posicionamento ideal constitui um ponto essencial na análise dinâmica de sistemas e estruturas, pois o mau posicionamento dos sensores pode comprometer a análise do sistema e interferir no seu desempenho. Deve-se fazer uma análise complexa para encontrar essas posições ideais, pois são diversas as variáveis que devem ser levadas em conta. Como por exemplo, a quantidade de sensores usados no ensaio, sendo que se forem utilizados vários sensores, o peso destes pode interferir nas medições do ensaio, e se forem utilizados poucos sensores a leitura pode ser incompleta e não abranger todos os modos de vibração.

Nas últimas décadas se observa uma crescente exigência no desempenho dos sistemas mecânicos e estruturais, destacando-se a necessidade de estruturas leves e resistentes e buscando a diminuição dos custos. Para tanto sabe-se que para uma boa análise da estrutura, as suas características físicas e modais devem ser conhecidas.

Para o controle de vibrações mecânicas, deve-se primeiramente fazer uma análise do comportamento dinâmico da estrutura, recorrendo à utilização integrada da modelação numérica e da identificação experimental de parâmetros modais (frequências naturais, modos de vibração e amortecimentos).

O comportamento estrutural do modelo pode ser estudado utilizando diferentes modelagens, por exemplo, o método dos elementos finitos (BATHE; WILSON, 1976; ZIENKIEWICZ, 1985). A modelagem por elementos finitos atualmente é usual na maioria das análises e projetos de sistemas mecânicos estruturais, entretanto nem sempre é possível incluir todos os parâmetros e variáveis no modelo matemático e sua resposta é geralmente aproximada, por esse motivo a análise modal experimental vem ao encontro dessas técnicas numérico-analíticas na tentativa de solucionar esse problema, de forma que os parâmetros e a resposta do modelo são obtidos diretamente da própria estrutura de interesse a partir da relação excitação-resposta em testes experimentais.

Para a medição da resposta do sistema geralmente são utilizados sensores, pois proporcionam medidas com alta precisão, porém muitas vezes a localização

incorreta dos mesmos pode comprometer a análise do sistema, afetando as características da estrutura medida, e interferir no desempenho do sistema, minimizando valores modais.

A localização ótima de sensores é uma importante etapa no estudo do comportamento da estrutura. A determinação da localização e do número de sensores a serem utilizados, com a finalidade de analisar a estrutura, é essencial, pois se não for bem realizada pode afetar a obtenção dos dados modais, como já citado. A configuração do problema se dá quando há um grande número de posições candidatas para a disposição dos sensores, pois em função de onde são colocados, podem comprometer a controlabilidade do sistema, devido ao peso quando há um grande número de sensores, ou devido a não detecção do movimento de todos os modos quando há um número pequeno de sensores. Por outro lado, se posicionados em localizações ótimas, o número de sensores necessários pode ser reduzido, diminuindo assim o custo de instrumentação, do processamento de sinais, além de uma análise mais precisa que auxilia na verificação dos modos mais interessantes para o estudo.

Dada à importância da otimização do posicionamento de sensores, grande número de pesquisadores tem dedicado esforços nessa área. Por exemplo, Gawronski (1997) estuda o posicionamento de sensores usando os modos de vibrar, a observabilidade e controlabilidade modal. No trabalho de Moheimai (1999) a medida de controlabilidade modal foi usada para encontrar o posicionamento ótimo de sensores. Bueno (2007 apud Demetriou, 2004) cita que, o distúrbio externo deve ser considerado na formulação sempre que conhecido a priori e, se for desconhecido, sua distribuição pode ser suposta e, subsequentemente, o pior caso deve ser considerado.

O método da "Carta de Pareto" identifica o ponto com a maior resposta (movimento) a uma excitação de entrada. Esses pontos correspondem às localizações que possuem maior valor de dados modais estatisticamente, de modo que auxiliam na escolha dos pontos mais eficientes para os acelerômetros (SEMKE, 2012). Técnicas envolvendo matrizes gramianas de observabilidade também são amplamente utilizadas para o posicionamento dos sensores, onde se calcula a matriz gramiana para cada posição candidata do sensor e se utiliza um índice de desempenho para que possa ser comparado. Alguns autores utilizam índices que relacionam o produto dos autovalores da matriz; o determinante ou qualquer outra

norma como, por exemplo, a norma de Frobenius (GAWRONSKI, 1998). Neste trabalho foi utilizado o traço da matriz como índice de desempenho, devido ao fato de que as matrizes gramianas são diagonais quando se utiliza a representação em coordenadas modais.

Sendo assim, a estratégia proposta neste trabalho baseia-se no estudo e aplicação de diferentes métodos que através da análise modal buscam encontrar essas posições ideais onde os modos de vibração e os valores modais são melhores obtidos, tais métodos são implementados no *software* MATLAB*.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo estudar técnicas para determinar o posicionamento ótimo de sensores em sistemas estruturais.

1.1.2 Objetivo específico

A fim de cumprir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são desenvolvidos:

- I. Estudar a respeito do comportamento dinâmico estrutural focando na importância da localização ótima dos sensores;
- II. Explicitar algumas definições como conceitos de vibrações, de análise modal e do comportamento dinâmico de estruturas;
- III. Identificar as principais técnicas para localização ótima de sensores;
- IV. Analisar as vantagens, desvantagens e limitações de cada técnica para localização de sensores conforme sua área de aplicação;
- V. Implementar os métodos em Matlab;
- VI. Aplicar dos métodos em um sistema discreto e em um sistema contínuo estruturais;
- VII. Analisar e comparar os resultados obtidos.

* Software MATLAB - consiste em um software iterativo de alta performance voltado para o cálculo numérico.

1.2 JUSTIFICATIVA

A localização da posição de sensores é uma etapa extremamente importante na análise modal experimental e constitui um ponto crucial no projeto de controle ativo para o monitoramento de estruturas. Geralmente, a escolha da posição dos sensores é baseada na experiência do pesquisador e no conhecimento prévio da estrutura a ser monitorada. Contudo, aquelas estruturas que foram poucas estudadas no passado, muitas vezes, a fim de evitar a perda de informação, a quantidade de sensores é superestimada o que resulta um aumento na quantidade de instrumentos, carregamento excessivo (influência das massas dos acelerômetros no sistema) e no aumento de trabalho na análise dos dados. Assim, é desejável que se utilize poucos sensores, mas sem perder a precisão. Para isso o trabalho propõe o estudo de métodos para a determinação da quantidade e localização ótima de sensores em estruturas. O assunto é extremamente importante e atual conforme citado por Semke et. al (2012), Li et. al (2004) e Leme (2014).

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, neste primeiro capítulo, tem-se uma introdução ao assunto do trabalho, os objetivos gerais e específicos, e a justificativa para o presente trabalho.

O segundo capítulo contempla a revisão da literatura, onde foram descritas algumas definições básicas necessárias para o desenvolvimento do trabalho como: conceitos de vibração, análise modal e modos de vibração para que se tornasse mais fácil o entendimento do referido trabalho. Tal capítulo ainda expõe o comportamento dinâmico de estruturas, a modelagem matemática necessária para aplicação dos métodos em estudo, e a definição de cada método aplicado no trabalho.

No terceiro capítulo descreve-se a metodologia, onde foram expostos os passos e procedimentos para efetuar a análise e aplicação dos métodos nos sistemas estudados.

No quarto capítulo foram expostos os resultados obtidos em todos os testes realizados.

Ao término deste trabalho, ou seja, no quinto capítulo foram apresentadas as conclusões tiradas deste estudo, comparando resultados obtidos pelos diferentes métodos aplicados.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 INTRODUÇÃO BÁSICA À VIBRAÇÕES MECÂNICAS

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos envolvidos no estudo de vibrações mecânicas, destacando algumas definições básicas necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

2.1.1 Vibração e sua aplicação

Vibração ou oscilação é qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo. A teoria da vibração trata do estudo de movimentos oscilatórios de corpos e das forças associadas a eles (RAO, 2008 p. 6).

Uma das deformações que ocorrem em estruturas flexíveis é a vibração. A vibração é um fenômeno natural que ocorre em um sistema englobando diversas áreas da engenharia. Ela pode vir a ser contra ou a favor do processo, por exemplo, em equipamentos vibratórios (como esteiras transportadoras, máquinas de lavar, entre outros) ela vem a favor do processo. Porém a vibração geralmente é um problema, e afeta de forma considerável o desempenho do sistema, seja deformando estruturas, prejudicando o foco de equipamentos óticos, ou outros efeitos indesejáveis.

O termo vibração será utilizado para descrever sistemas mecânicos, no qual as componentes de energia do sistema são a energia potencial e a energia cinética.

2.1.2 Características dos sistemas vibratórios

Para que o movimento vibratório de um sistema seja perfeitamente descrito (posição, velocidade e aceleração) Soeiro (2008) aponta que torna-se necessário a escolha de um sistema de coordenadas. Então, em relação a este sistema de referência, escolhido de forma arbitrária, o número mínimo de coordenadas independentes necessárias para descrever completamente o movimento de todas as partes que compõem o sistema vibratório, é denominado de Graus de Liberdade.

Segundo Rao (2008), um sistema vibratório é constituído por, um meio de armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor). Isso porque a vibração é, em essência, um processo de troca de energia mecânica, nas formas de energia cinética (associada à velocidade) e energia potencial (associada à deformação e à gravidade) (SOEIRO, 2008).

A inércia está relacionada à capacidade de armazenamento de energia cinética, e também, energia potencial gravitacional (SOEIRO, 2008). A energia potencial gravitacional está associada à posição da massa no sistema, a energia cinética está associada à velocidade desta massa, assim sendo a energia cinética pode também ser descrita pela rotação, ou translação do corpo. Com isso, as inércias dos sistemas vibratórios são descritas pelas massas que os mesmos possuem.

De acordo com Balachandran e Magrab (2009) os elementos de rigidez armazenam e liberam a energia potencial de um sistema. À medida que é deformado, o elemento de rigidez armazena energia, e esta é liberada à medida que a forma do elemento de rigidez é restaurada. Os elementos de rigidez comumente utilizados em sistemas vibratórios são as molas, pois as mesmas possuem a capacidade de armazenar e posteriormente liberar energia através da deformação elástica.

Por fim, a perda gradual de energia ou amortecimento, provoca perdas de energia em função das resistências passivas provocadas pelo atrito. Balachandran e Magrab (2009) dizem que, para os estudos de vibrações, supõe-se que os elementos de amortecimento não possuem inércia nem meios para armazenar ou liberar a energia potencial. O movimento mecânico aplicado a esses elementos é convertido em calor ou som e, dessa forma, eles são chamados de não conservativos ou dissipativos, porque essa energia não é recuperável pelo sistema mecânico.

2.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF) NA ANÁLISE ESTRUTURAL

O método de elementos finitos (MEF) é bastante difundido na engenharia para resolver diversos tipos de problemas, com uma precisão aceitável. É um processo amplamente utilizado para discretização de meios contínuos, além de que

o MEF estabelece seu emprego entre o sistema físico real e o modelo simulado computacionalmente.

A solução numérica de qualquer problema matemático é, por natureza, um resultado aproximado. Em dinâmica das estruturas a utilização de métodos numéricos, como os elementos finitos, no caso de sistemas contínuos requer uma discretização espacial, sendo que o meio contínuo é substituído por um modelo discreto que procura ser uma imagem fiel do sistema real (CASTRO 1996). O método dos elementos finitos tem surgido nos últimos anos como uma ferramenta essencial na discretização de meios contínuos e na determinação das suas características estruturais.

O conceito básico do método dos elementos finitos traduz-se na divisão de um meio contínuo em sub-regiões com uma geometria mais simples que o problema original. Cada sub-região, ou elemento finito tem um tamanho finito e um número de pontos a partir dos quais se estabelece o campo de deslocamentos, chamados nós. Segundo Meireles (2007) na formulação de elementos finitos, são usadas funções de forma próprias para exprimir os deslocamentos para cada ponto material interno ao elemento em função dos valores dos deslocamentos nos nós. Para tal é necessário escrever um número finito de equações diferenciais de movimento para cada nó. As funções de forma descrevem deslocamentos genéricos em qualquer ponto do elemento que são dependentes dos deslocamentos nodais. Da mesma forma as velocidades e acelerações no interior de um elemento são também dependentes dos valores nodais, das velocidades e das acelerações.

2.3 CONCEITOS E FUNDAMENTOS DE ANÁLISE MODAL

No projeto e análise de sistemas mecânicos, a análise modal é uma ferramenta de grande interesse utilizada no estudo e avaliação do comportamento estrutural de sistemas mecânicos e estruturas.

A análise modal teórica foi o início para o grande avanço ocorrido nas últimas décadas. Essa análise consiste em um processo que utiliza técnicas teóricas que possibilitam a formulação de um modelo matemático representativo do comportamento dinâmico do sistema em estudo, a fim de determinar os seus parâmetros modais como as frequências naturais, os modos de vibração, etc. Atualmente existem vários métodos numéricos eficientes para análise de estruturas

e isso só se tornou possível devido ao desenvolvimento e aperfeiçoamento do método de elementos finitos e do desenvolvimento de programas computacionais que simulam o comportamento estrutural dos componentes, como por exemplo, o ANSYS.

A análise modal é capaz de determinar as propriedades dinâmicas de uma estrutura pela identificação de seus modos de vibração. Os modos de vibração são a forma que a estrutura vibra, eles são designados pelas propriedades do material (massa, rigidez e amortecimento) e também através das condições de contorno da estrutura em questão. Por consequência, se as propriedades do material ou as condições de contorno da estrutura alteram-se, conseqüentemente os modos de vibração sofrerão modificações. Cada modo é definido por uma frequência natural, amortecimento modal e um modo de vibração. Caso uma estrutura ou máquina estiver operando muito próxima à frequência natural de um modo de vibração, esta estrutura ou máquina, tende a entrar no modo de vibração ressonante.

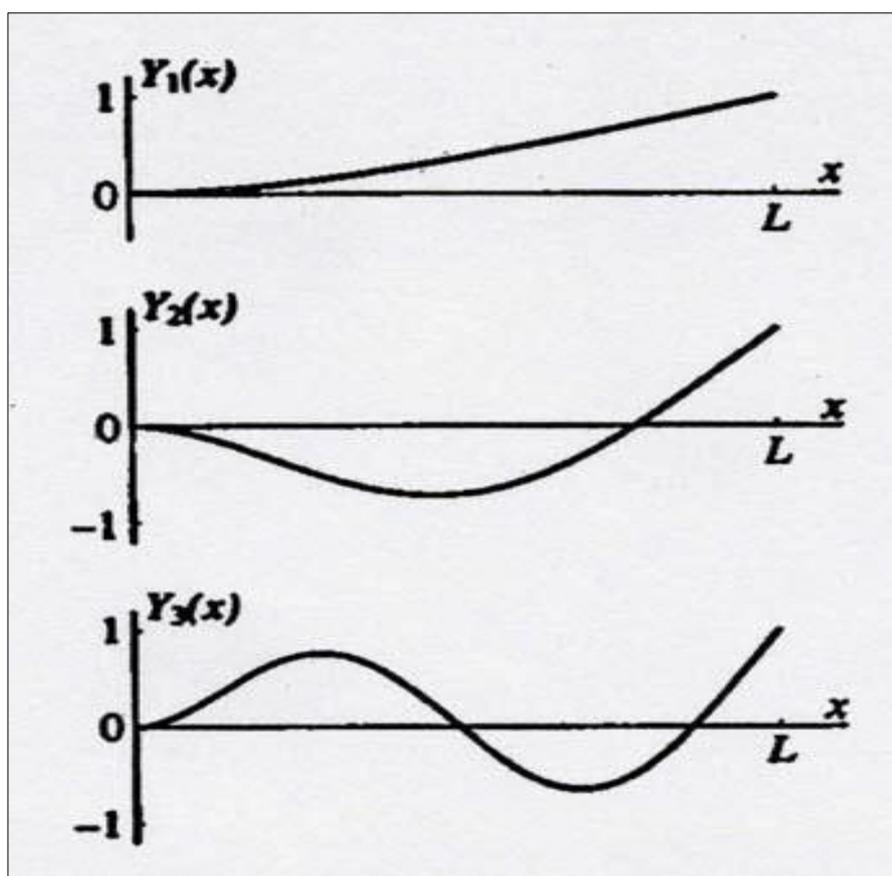


Figura 1 - Primeiro, segundo e terceiro modo de vibração de uma viga engastada
Fonte: THOMSON; DAHLEH, (1998)

O estudo da resposta dinâmica de uma estrutura complexa devido a alguns carregamentos é frequentemente um problema de difícil solução pelas vias puramente analíticas ou numéricas, pois muitas vezes nem todos os parâmetros e variáveis estão inclusos no modelo que gera uma resposta aproximada, em que muitas vezes não reproduz com acurácia o comportamento dinâmico da estrutura.

A análise modal experimental vem ao encontro das técnicas numérico-analíticas na tentativa de solucionar tais problemas, pois os parâmetros e a resposta do modelo são obtidos diretamente da própria estrutura em interesse a partir de experimentos. As medições realizadas na estrutura são processadas e analisadas e os resultados são utilizados para formular um modelo que reproduzirá o comportamento em condições reais. Esse é o processo de identificação, ou seja, onde as propriedades dinâmicas serão avaliadas.

Na análise modal experimental, os parâmetros do modelo são obtidos a partir da relação entrada/saída. Essa relação *input-output* é calculada a partir da excitação e das respostas capturadas respectivamente nos pontos de excitação e de medição previamente selecionados. A extração de parâmetros modais a partir de funções de resposta em frequência (FRF) requer tanto o conhecimento do valor da entrada do sinal do sistema como o valor de sua saída. Porém, em condições reais de operação pode não ser possível medir o valor dessa entrada do sistema e então uma excitação artificial pode ser necessária.

Para medir a resposta do sistema geralmente são utilizados acelerômetros como sensores. Mas é necessário que esses sensores não afetem ou alterem as características da estrutura medida, além de proporcionarem medidas com alta precisão. Neste contexto, vale ressaltar que cada vez mais os pesquisadores tem mostrado interesse no uso de materiais com características piezoelétricas (sensores), porém a localização incorreta dos sensores pode comprometer a análise do sistema e interferir no desempenho do mesmo, minimizando valores modais.

2.4 COMPORTAMENTO DE MODELOS ESTRUTURAIS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

O estudo do comportamento dinâmico de modelos estruturais com um ou vários graus de liberdade, é essencial para a introdução de alguns dos fundamentos

da dinâmica de estruturas, essenciais para estudos mais avançados. A análise e caracterização do comportamento dinâmico de estruturas baseiam-se num conjunto de fundamentos, que usualmente são descritos em aplicações a modelos estruturais com um ou vários graus de liberdade.

Em geral, independente do tipo de excitação, o processo relativo à caracterização do comportamento dinâmico de estruturas consiste no estabelecimento de um modelo matemático e de relações excitação-resposta, bem como a adoção de um modelo espacial discreto ou contínuo que represente aproximadamente as propriedades geométricas e físicas das estruturas, usualmente expressas através de matrizes de massa, rigidez e amortecimento, bem como a aplicação das leis da Mecânica, resultando em um sistema de equações diferenciais como característica do movimento estrutural, a partir do qual é possível obter relações excitação-resposta, quer numa óptica determinística (excitações conhecidas), quer numa óptica estocástica (excitações desconhecidas).

Na utilização de modelos analíticos, este processo consiste na determinação da resposta dinâmica das estruturas, a partir de excitações conhecidas, adaptando um modelo matemático que contemple as propriedades físicas e geométricas utilizando um sistema de equações diferenciais que caracterizem o movimento da estrutura.

Esse processo também pode ser utilizado para caracterizar a resposta de estruturas a partir de dados experimentais. Neste tipo de caracterização são usados modelos experimentais baseados nas relações excitação-resposta, e a partir daí é possível avaliar as características dinâmicas da estrutura em questão.

2.4.1 Modelos estruturais de segunda ordem

Quando forças externas agem sobre um sistema, o mesmo está sujeito a algum tipo de vibração forçada. Para um sistema com n graus de liberdade, as equações de movimento que governam o comportamento do mesmo são fornecidas por um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem ordinárias acopladas. A representação do modelo depende da escolha das coordenadas, podendo ela ser física ou modal. A solução dessas equações torna-se mais difícil quando o número de graus de liberdade do sistema é grande e/ou quando as forças de excitação são não determinísticas

Os modelos físicos, que geralmente são obtidos via FEM, são formulados em termos de deslocamento, velocidade e aceleração, sendo assim caracterizados pelas matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento. As equações de equilíbrio dinâmico que governam a resposta linear dinâmica de uma estrutura são definidas em forma matricial por:

$$M\ddot{x} + D_a\dot{x} + Kx = f(t), \quad (1)$$

em que M, D e K são matrizes simétricas $n \times n$, e correspondem às matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. Os vetores $\ddot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$ e $x(t)$, dependentes do tempo, de dimensão $n \times 1$, representam as grandezas deslocamento, velocidade e aceleração descritas pelas coordenadas generalizadas. Já $f(t)$ corresponde ao vetor de forças externas de dimensão $n \times 1$ que atua no sistema.

Matematicamente a equação (1) representa o equilíbrio dinâmico de um sistema de múltiplos graus de liberdade.

A resolução deste sistema de equações diferenciais de segunda ordem pode ser efetuada:

- no domínio do tempo, recorrendo a funções de resposta a impulsos, ou;
- no domínio da frequência, pela aplicação da transformada de Fourier a ambos os membros (para condições iniciais não nulas deverá aplicar-se a transformada de Laplace).

2.4.2 Análise sem Amortecimento

Os fundamentos da formulação modal desenvolvem-se a partir do caso teórico de estruturas sem amortecimento e sem forças externas aplicadas, com base no qual determinam-se os seus autovalores e autovetores, os quais correspondem respectivamente às suas frequências e modos de vibração.

Considerando a equação do movimento para a situação de vibração livre sem amortecimento, ou seja:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0. \quad (2)$$

A equação anterior também pode ser escrita como:

$$-Mw^2x(t) + Kx(t) = 0, \quad (3)$$

ou

$$[K - mw^2].x(t) = 0. \quad (4)$$

A solução não trivial desta equação existe se:

$$\det(k - w^2M) = 0, \quad (5)$$

desta forma, verifica-se que as soluções da equação anterior são da forma:

$$x(t) = \Phi x_m(t). \quad (6)$$

O problema representado pela equação (5) tem N raízes, que são os quadrados das frequências naturais do sistema.

Define-se a matriz de frequências naturais como:

$$\Omega = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n). \quad (7)$$

Os modos de vibração são organizados numa matriz modal, a qual é composta por vetores modais $\{\Phi\}_i$, que são os autovetores associados ao sistema dinâmico representado pelas equações de movimento. A matriz modal possui em cada coluna os modos de vibração da estrutura (ou seja, os autovetores correspondentes às soluções não triviais), desta forma a matriz modal pode ser escrita como:

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_1 \dots \quad \dots \Phi_n]. \quad (8)$$

Matematicamente os conceitos de massa modal e de rigidez modal surgem quando, na equação diferencial em análise (2), se introduz a forma $x(t) = \Phi x_m(t)$, ficando:

$$M. \Phi. \ddot{x}(t) + K. \Phi. x(t) = 0, \quad (9)$$

a qual pode ser facilmente resolvida se multiplicarmos ambos os membros por Φ^T já que, como resultado desta multiplicação, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais desacopladas (diagonalizadas):

$$\Phi^T. M. \Phi. \ddot{x}(t) + \Phi^T. K. \Phi. x(t) = 0. \quad (10)$$

Os vetores que representam os modos de vibração (Φ) apresentam um conjunto de propriedades designadas por condições de ortogonalidade.

A propriedade de ortogonalidade é de grande utilidade e convenientemente aplicada na solução de problemas de autovalor em elementos finitos, além de ser frequentemente utilizada para desacoplar as equações de movimento do sistema, transformando as matrizes de massa e rigidez da estrutura em matrizes de massa e rigidez modal:

$$M_m = \Phi^T. M. \Phi \quad (11)$$

$$K_m = \Phi^T. K. \Phi \quad (12)$$

sendo, $\Phi =$ matriz modal (cada coluna é um modo de vibração).

A matriz D_{ap} é a matriz de amortecimento proporcional dada por:

$$D_{ap} = \alpha M + \beta K \quad (13)$$

sendo α e β duas constantes de proporcionalidade relacionadas a massa e rigidez. Este modelo de amortecimento admite que a distribuição do amortecimento nas estruturas é proporcional à distribuição de massa e de rigidez. Essa hipótese simplificativa facilita o tratamento matemático do problema, sendo na prática muito

utilizada pelo fato de fornecer uma boa aproximação para um grande grupo de estruturas.

2.4.3 Resposta ao impulso

Em sistemas lineares invariantes no tempo (LIT) a resposta ao impulso é uma característica importantíssima. Do ponto de vista físico, a resposta ao impulso pode ser interpretada como a resposta a uma excitação externa, inicialmente em repouso, que atua durante curtos intervalos de tempo. Além disso, analisando-se a resposta ao impulso deste tipo de sistema, pode-se caracterizá-lo completamente.

2.4.3.1 Vibração amortecida

Consideramos a resposta de um sistema com um grau de liberdade a uma excitação por um impulso unitário em $t = 0$; Para um sistema amortecido, a solução da equação de movimento:

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (14)$$

segundo Rao (2008), é dada por:

$$x(t) = e^{-\zeta w_n t} \left\{ w_0 \cos w_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta w_n x_0}{w_d} \operatorname{sen} w_d t \right\} \quad (15)$$

Onde

$$\zeta = \frac{c}{2mw_n} \quad (15a)$$

$$w_d = w_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (15b)$$

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15c)$$

Assim, as condições iniciais são dadas por:

$$\begin{aligned}x(t = 0) &= x_0 = 0 \\ \dot{x}(t = 0) &= \dot{x}_0 = \frac{1}{m}\end{aligned}\tag{16}$$

Em que, ζ consiste no fator de amortecimento, w_n é a frequência natural, w_d é a frequência amortecida, c é a constante de amortecimento, m é a massa e k é a rigidez.

Aplicando as condições iniciais mostradas acima, a equação (15) reduz-se a:

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta w_n t}}{m w_d} \sin w_d t\tag{17}$$

2.4.4 Representação no espaço de estados

As variáveis de estado de um sistema dinâmico determinam o estado do sistema. Há três tipos de variáveis que aparecem na modelagem de sistemas dinâmicos por espaço de estados, são elas: as variáveis de entrada, as de saída e as de estado, as quais se relacionam por meio de equações diferenciais de primeira ordem.

Qualquer conjunto de N variáveis de um sistema linearmente independente pode ser utilizado para descrever o estado do sistema. Estes são referidos como as variáveis de estado; eles formam um conjunto mínimo de variáveis dinâmicas que, juntamente com as entradas para o sistema, proporcionam uma descrição completa do comportamento do mesmo. Quaisquer outras variáveis do sistema podem ser determinadas a partir de um conhecimento do estado.

As variáveis de estado podem ser em quantidades físicas tais como um sistema de ângulo, de velocidade, de tensão, de deslocamento, de aceleração ou eles podem ser variáveis matemáticas abstratas associadas com as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema.

A escolha das variáveis de estado não é única. Isso não significa que o estado do sistema a qualquer momento não é exclusivo; significa que apenas o meio

de representar as informações de estado não é único. Qualquer conjunto de variáveis estado escolhidas, irão fornecer as mesmas informações sobre o sistema.

A representação no espaço de estados possui as seguintes características:

- Usa o domínio do tempo;
- Com quaisquer condições iniciais;
- Possui uma ampla aplicabilidade, sendo elas: (sistemas lineares e não lineares sistemas variantes e invariantes no tempo, sistemas SISO (Single Input, Single Output) e sistemas MIMO (Multiple Input, Multiple Output)).

Como já citado anteriormente, as características dinâmicas de um sistema linear com n graus de liberdade e invariante no tempo, podem ser descritas pela seguinte equação diferencial matricial:

$$M\ddot{x} + D_a\dot{x} + Kx = f(t) \quad (18)$$

O sistema representado pela equação acima pode ser equivalentemente descrito pelo modelo em espaço de estados, pois a mudança de variável denominada vetor de estados, permite reduzir o tal sistema, para um sistema de primeira ordem.

Segundo Bueno (2007, p. 52), a representação no espaço de estados é determinada pelo trio de matrizes (A, B, C) e pelo vetor de estados $x(t)$.

Nesta representação, o comportamento de um sistema dinâmico, pode ser descrito por um conjunto de n equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem, da seguinte forma:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

onde n é a ordem do sistema e r é o número de entradas. Isso pode ser escrito da seguinte forma usando a notação vetor-matriz:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (20)$$

onde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (20a)$$

O vetor coluna x é conhecido como o vetor de estado, e as respectivas entradas x_i são denominadas variáveis de estado. O vetor coluna u é o vetor de entradas para o sistema, que são representadas por sinais externos e que por fim influenciam o desempenho do mesmo. O tempo está indicado por t , e a derivada de uma variável de estado de x em relação ao tempo é representada por \dot{x} .

Portanto, o vetor de estados modal de dimensão $2nx1$ é definido como:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Onde x_1 é o vetor de deslocamento modal e x_2 é o vetor de velocidade modal. Com isso a equação (21) pode ser reescrita como um conjunto de equações de primeira ordem, na forma da equação (21a):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (21a)$$

sendo $y(t)$ o vetor que representa a saída do sistema, com dimensão $mx1$, com $m \leq n$. Neste trabalho, a saída do sistema corresponde às medidas em diferentes pontos da estrutura no instante t .

As matrizes A , B e C são respectivamente, matriz dinâmica, matriz de entrada e a matriz de saída, representadas a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D_d \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [0 \quad 1] \quad (22)$$

A equação (18a) pode ser escrita na forma modal como:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_m z(t) + B_m u(t) \\ y(t) &= C_m z(t)\end{aligned}\quad (23)$$

sendo $A_m, B_m,$ e C_m são as matrizes modais definidas como:

$$A_m = V^{-1}AV \text{ (Matriz dinâmica modal)} \quad (23a)$$

$$B_m = V^{-1}B \text{ (Matriz modal de entrada)} \quad (23b)$$

$$C_m = CV \text{ (Matriz modal de saída)} \quad (23c)$$

sendo V^{-1} a matriz dos autovetores a esquerda e V a matriz dos autovetores a direita, segundo Cabral (1985):

$$V = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_V \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \leftarrow & W_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & W_2 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & W_n & \rightarrow \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\text{Matriz dos autovalores de A} \rightarrow A_m = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

onde a variável λ_n corresponde aos autovalores, os quais estão diretamente relacionados com as propriedades do sistema.

Portanto as respectivas matrizes $B_m,$ e C_m ficam da seguinte forma:

$$\text{Matriz de entrada} \rightarrow B_m = V^{-1}B = \begin{bmatrix} \leftarrow & W_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & W_2 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & W_n & \rightarrow \end{bmatrix} B \quad (27)$$

$$\text{Matriz de saída} \rightarrow C_m = CV = C \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_V \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} \quad (28)$$

2.4.5 Controlabilidade e observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade fornecem informações úteis sobre sistemas dinâmicos e, por isso, são fundamentos básicos para o estudo de testes modais. Um sistema flexível possui como uma característica intrínseca, o fato de ser controlável e observável. Uma estrutura é controlável se os atuadores acoplados são capazes de excitar todos os modos. Por outro lado o sistema é observável se os sensores distribuídos na estrutura conseguem detectar os movimentos de todos os modos, segundo Bueno (2007).

Para a determinação de observabilidade e controlabilidade de um sistema, existem diferentes critérios como, por exemplo, os testes do posto de Popov, Belevitch e Hautus (testes PBH). O critério clássico de controlabilidade é definido a seguir.

Um sistema linear e invariante no tempo com s entradas é completamente controlável se e somente se a matriz $N \times N$ s:

$$c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{N-1}B] \quad (29)$$

tem posto N .

Já um sistema linear com r saídas é completamente observável se e somente se a matriz $r.N \times N$:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

tem posto N .

O posto de uma matriz está diretamente relacionado com a dependência linear das suas linhas e colunas. Ou seja, se uma matriz de ordem $N \times N$ possui linhas linearmente independentes, seu posto será igual a N . Se uma linha não é linearmente independente, ou seja, se uma linha é combinação das outras, seu posto será igual a $N-1$.

Algumas desvantagens dos critérios de observabilidade e controlabilidade são que esses critérios respondem as questões do seu interesse, em termos de 'sim' ou 'não' e não fornecem resposta quantitativa sobre o grau de observabilidade e controlabilidade do sistema (BUENO, 2007). Além de que só funcionam para sistemas com dimensões pequenas. Para isso, uma alternativa para contornar esses problemas é a formulação em termos de grammianos.

Os grammianos de controlabilidade e observabilidade são definidos como a seguir:

$$W_c = \int_0^t \exp(At) B B^T \exp(A^T t) dt \quad (31)$$

$$W_o = \int_0^t \exp(A^T t) C^T C \exp(At) dt \quad (32)$$

Alternativamente, podem ser escritos como:

$$\dot{W}_c = A W_c + W_c A^T + B B^T \quad (33)$$

$$\dot{W}_o = A^T W_o + W_o A + C^T C \quad (34)$$

A solução estacionária das equações acima é obtida assumindo que estas são homogêneas, pois são sistemas estáveis, além disto, W_c e W_o são positivas definidas. Neste caso, os grammianos são determinados das seguintes equações de Lyapunov:

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \quad (35)$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (36)$$

Os grammianos dependem das coordenadas do sistema e para uma transformação linear de estados, eles são transformados da seguinte maneira:

$$\bar{W}_c = R^{-1} W_c R^{-T} \quad (37)$$

$$\bar{W}_o = R^T W_o R \quad (38)$$

onde R é a matriz de transformação de coordenadas.

Uma propriedade importante é que os autovalores do produto dos grammatianos são invariantes da transformação linear, ou seja:

$$\lambda_i(\bar{W}_c \bar{W}_o) = \lambda_i(R^{-1} W_c R^{-T} R^T W_o R) = \lambda_i(R^{-1} W_c W_o R) = \lambda_i(W_c W_o) \quad (39)$$

2.5 MÉTODOS PARA O POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES

2.5.1 Matrizes grammatianas

Uma solução para o problema do posicionamento ótimo de sensores é utilizar técnicas envolvendo matrizes grammatianas de observabilidade e controlabilidade, as quais são muito utilizadas por diversos autores, por exemplo, encontrando a matriz grammatiana de controlabilidade para cada posição candidata maximizando um índice que envolve a matriz.

Porém, segundo Demetriou (2004) ao se encontrar a posição ótima para um sensor, dada uma excitação, através de análise dos autovalores da matriz grammatiana de controlabilidade, não necessariamente se obtém posições ótimas que são fixas, ou seja, se a posição da excitação mudar, o ponto ótimo pode deixar de ser nas posições determinadas anteriormente.

As matrizes grammatianas refletem a habilidade de um estado de entrada $x(t)$, afetar a saída $y(t)$ do sistema. Por exemplo, Bueno (2007) explica que é possível determinar as posições ótimas de sensores com a matriz grammatiana utilizando uma técnica de controle que realimenta as saídas. Similarmente à proposta de Mirza e Niekerk (1999), é possível se utilizar a matriz grammatiana de sensibilidade de distúrbio também para posicionamento ótimo de sensores. Utilizando uma técnica de controle via realimentação de saídas, onde o vetor de entrada de controle é obtido com a multiplicação do ganho de controlador pelo vetor de saída. Substituindo o vetor de saída pela matriz de saída multiplicada pelo vetor de estados e, substituindo o vetor de entrada de controle na equação completa do espaço de estados (entenda por completa a forma em que aparece a matriz de posição e o vetor de distúrbio), se obtém uma equação análoga à utilizada por Mirza e Niekerk (1999), no entanto,

envolvendo a matriz de saída, que se refere à posição do sensor. Assim, avaliando a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio para cada localização candidata à posição do sensor, é possível obter o posicionamento ótimo.

As matrizes gramianas podem também ser utilizadas para obtenção da localização ótima de sensores quando se considera distúrbios externos. Neste caso, se utiliza a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio, que envolve os autovalores e o traço da referida matriz para conhecer o desempenho do sensor. O traço de uma matriz é a função matricial que associa a matriz à soma dos elementos da sua diagonal principal. Ela é importante nesse estudo porque a otimização pode ser feita posicionando os sensores de modo a maximizar o determinante da matriz ou minimizando o traço de uma matriz de estimativa de erro e neste caso também pode ser feita maximizando a medida associada à observabilidade *Gramian*.

As matrizes gramianas também podem ser utilizadas para a detecção e localização de falhas em estruturas.

Para o posicionamento de sensores calcula-se a matriz gramiana de observabilidade para cada posição candidata do sensor e se utiliza um índice de desempenho que possa ser comparado. Alguns autores utilizam índices que relacionam o produto dos autovalores da matriz; o determinante ou qualquer outra norma, como o traço da matriz, que se torna uma boa escolha devido ao fato de que as matrizes gramianas são diagonais quando se utiliza a representação em coordenadas modais (GAWRONSKI, 1998).

2.5.1.1 Matrizes gramianas aplicadas no posicionamento ótimo

Como nosso objetivo é encontrar o posicionamento ótimo de sensores, calcula-se a matriz gramiana de observabilidade para cada posição candidata do sensor e utiliza-se o traço da matriz como índice de desempenho, pelo fato de que as matrizes gramianas são diagonais quando utiliza-se a representação em coordenadas modais, como já foi demonstrado anteriormente.

$$IGS_{i,k} = tr(W_{oi}), \quad i = 1, \dots, n \text{ e } k = 1, \dots, R \quad (40)$$

onde $IGS_{i,k}$ denota o índice gramiano do sensor para o i -ésimo modo e o k -ésimo sensor e $tr()$ é o traço da matriz; W_{oi} é a matriz gramiana de observabilidade

para o *i*-ésimo modo. Sendo assim, a matriz gramiana de posicionamento de sensores é dada por:

$$\sum^s = \begin{bmatrix} IGs_{11} & IGs_{12} & \cdots & IGs_{1k} & \cdots & IGs_{1R} \\ IGs_{21} & IGs_{22} & \cdots & IGs_{2k} & \cdots & IGs_{2R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ IGs_{i1} & IGs_{i2} & \cdots & IGs_{ik} & \cdots & IGs_{iR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ IGs_{n1} & IGs_{n2} & \cdots & IGs_{nk} & \cdots & IGs_{nR} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Similarmente, para o posicionamento dos atuadores se utiliza o índice gramiano do atuador obtido através do traço da matriz gramiana de controlabilidade para cada modo e posição candidata:

$$IGa_{i,k} = tr(W_{ci}), \quad i = 1, \dots, n \text{ e } k = 1, \dots, S \quad (42)$$

Assim define-se a matriz gramiana de posicionamento de atuadores por:

$$\sum^a = \begin{bmatrix} IGa & IGa_{12} & \cdots & IGa_{1k} & \cdots & IGa_{1S} \\ IGa & IGa_{22} & \cdots & IGa_{2k} & \cdots & IGa_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ IGa_{i1} & IGa_{i2} & \cdots & IGa_{ik} & \cdots & IGa_{iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ IGa_{n1} & IGa_{n2} & \cdots & IGa_{nk} & \cdots & IGa_{nS} \end{bmatrix} \quad (43)$$

2.5.2 Fatores de participação

Os fatores de participação são definidos como um vetor de condições iniciais pertencente a base canônica do espaço de estados, tem-se que estes fatores de participação são capazes de identificar corretamente a participação dos estados nos modos de oscilação mecânica. Entretanto, essa mesma característica da definição dos fatores de participação impede que os mesmos caracterizem de forma satisfatória a resposta física do sistema.

Um problema encontrado neste método é a necessidade de que o sistema tenha um conjunto de condições iniciais específico para sua caracterização, ou seja, é necessário que as condições iniciais do sistema componham um vetor da base canônica. Por razões físicas, dificilmente se encontra o caso em que somente uma

variável de estado é tirada de sua condição de equilíbrio por uma perturbação e, sendo assim, esta se torna uma das maiores deficiências do conceito de fatores de participação.

Segundo Pérez, Verghese e Schweppe (1982), os fatores de participação são escalares que possibilitam medir a contribuição relativa dos modos do sistema nas variáveis de estado dos mesmos e, além disso, a contribuição relativa das variáveis de estados na resposta dos modos.

Um problema no uso de autovetores de direita e esquerda individualmente para identificar a relação entre os estados e os modos é que os elementos dos autovetores são dependentes de unidades e dimensionamento associado com as variáveis de estado. Como uma solução para este problema, é determinada uma matriz denominada matriz de participação, que combina os autovetores à direita e à esquerda como medida de a associação entre as variáveis de estado e os modos.

Considerando o sistema:

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x, \quad \Delta x(0) = \Delta x_0 \quad (44)$$

Tem-se, como já definido anteriormente, que a matriz A é uma matriz de estados com n autovalores distintos $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, cada um deles associado ao seus respectivos autovetores à esquerda e a direita.

Para isso existem associações entre as variáveis de estado e os modos da matriz A do sistema, que podem ser definidas por meio da matriz de participação:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ \vdots \\ P_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{i1}^{-1} V_{1i} \\ V_{i2}^{-1} V_{2i} \\ \vdots \\ V_{ik}^{-1} V_{ki} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Onde:

$V_{ki} = k^{th}$ entrada do autovetor à direita;

$V_{ik}^{-1} = k^{th}$ entrada do autovetor à esquerda.

O elemento $P_{ki} = V^{-1}_{ik}V_{ki}$ é denominado como o fator de participação e é uma medida da participação relativa da k-ésima variável de estado no i-ésimo modo, e vice e versa.

Uma vez que V_{ki} mede a atividade de X_k no i-ésimo modo e V^{-1}_{ik} pesa a contribuição desta atividade para o modo, o produto P_{ki} mede a participação líquida. Outro motivo de multiplicar os elementos dos autovetores à esquerda e direita é também para tornar p_{ki} adimensional.

Tendo em vista a normalização de um autovetor, a soma dos fatores de participação associadas com qualquer um dos modos ($\sum_{i=1}^n P_{ki}$) ou com qualquer variável de estado ($\sum_{k=1}^n P_{ki}$), é igual a 1.

A partir da equação abaixo vemos que o fator de participação p_{ki} é efetivamente igual à sensibilidade do autovalor λ_i para o elemento a_{kk} , diagonal da matriz de estado A.

$$P_{ki} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kk}} \quad (46)$$

Os fatores de participação são geralmente indicativos das participações relativas dos respectivos estados nos modos correspondentes.

2.5.3 Resíduo

É possível relacionar os fatores de participações aos resíduos do sistema. O método Resíduo pode ser dito como um fator de participação melhorado, pois faz uma análise combinatória entre as posições do sensor e a força aplicada. Para realçar esta relação, a definição $P_{ki} = V_{ki}V^{-1}_{ik}$ pode ser reescrita como:

$$R_e = cC V^{-1}_{ik} V_{ki} b \quad (47)$$

sendo:

R_e = resíduo do sistema;

cC = posição do sensor;

b = força que será aplicada em uma dada posição.

A partir dessa equação fica claro que fatores de participação são elementos da diagonal das matrizes de resíduos. Em outras palavras, a coluna de ordem i da matriz Fator de participação é a diagonal da matriz resíduo R .

2.5.4 Método da Carta de Pareto

Vários métodos foram desenvolvidos para se determinar a localização ótima de sensores. Um método bastante usado é utilizar métodos de elementos finitos nos sensores que maximizam os valores modais. No entanto, a maioria dos métodos encontrados requer uma extensiva modelagem de elementos finitos, desenvolvimento de algoritmos, modelagem matemática, etc.

O método da “Carta de Pareto” identifica o ponto com a maior resposta à uma excitação de entrada. Esses pontos correspondem às localizações que possuem maior valor de dados modais estatisticamente falando, de modo que auxiliam na escolha dos pontos mais eficientes para os acelerômetros (LEMLER; SEMKE, 2012). Esse método identifica as localizações ótimas dos sensores através de um teste experimental, que também elimina um extensivo modelo estrutural. Um sensor mede a velocidade em vários pontos da superfície da estrutura que está sobre excitação. Esses valores são usados para identificar os pontos de maiores interações. Esses pontos são identificados utilizando-se a Carta de Pareto.

O princípio de Pareto diz que 80% dos efeitos são causados por 20% das causas, observado por Vilfredo Pareto^{**}. A Carta de Pareto é usada para determinar as mais significativas informações de um experimento, identificando rapidamente quais pontos realizam os maiores efeitos. O princípio de Pareto tem sido mostrado para identificar as localizações ótimas de sensores para medidas de análise modal (PAPADIMITRIOU, 2004).

Segundo Papadimitriou (2004), para uma única classe de modelo, a entropia de informação é utilizada como critério de otimização para selecionar a melhor configuração dos sensores. Para várias classes de modelo, o problema é formulado como uma otimização multi-objetivo para encontrar as configurações de sensor

^{**} Vilfredo Pareto (Paris, 15 de julho de 1848 — Céligny, 19 de agosto de 1923) foi um cientista político, sociólogo e economista italiano formado em engenharia. Pareto introduziu o conceito de ótimo de Pareto e ajudou o desenvolvimento da microeconomia com a ideia de curva de indiferença. Mais informações: < <http://iscsp.utl.pt/~lbatalha/ICS/Pareto>>

ótimo de Pareto que minimizam adequadamente índices de entropia de informação definidos. Um algoritmo heurístico é proposto para a construção do sensor ideal eficaz de Pareto cujas configurações são superiores, em termos de eficiência e precisão computacional, do que as configurações de sensor de Pareto obtidas por algoritmos evolutivos.

2.5.4.1 Descrição do método

Basicamente esse método consiste em recolher todos os dados de vibração excitando a estrutura em diferentes pontos para então a análise ser realizada. Primeiro, um algoritmo gera automaticamente uma função de resposta de frequência (FRF) para cada canal a partir da resposta que foi medida. Depois uma curva pode ser ajustada à FRF para encontrar os modos, selecionando uma gama de frequências para analisar o número de modos dentro desse intervalo. O ajuste da curva pode ser verificado e, se o ajuste for bom, os modos então serão adicionados à lista de modos de determinado intervalo. Isto é repetido até que a lista de modos e as frequências naturais sejam obtidas para cada intervalo. Um algoritmo foi então utilizado para construir um modelo da estrutura. Para encontrar uma medida eficaz da magnitude de vibração em cada local, a equação (48) foi usada para calcular o sinal (RMS) - valor quadrático médio - para cada conjunto de dados.

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (48)$$

Um valor representativo do sinal RMS para cada local de medição foi obtido através do cálculo da média dos três valores RMS de três conjuntos de dados em cada local.

Uma vez que os valores médios de RMS foram calculados, é desejável estabelecer um método estatístico para selecionar os modos importantes e as posições em que os sensores precisam ser colocados. Os diagramas de Pareto são utilizados para determinar os aspectos mais significativos de um conjunto de informações (PAPADIMITRIOU, 2004). Na aplicação do método os valores médios de RMS foram ordenados do maior para o menor e as percentagens individuais do

total foram calculadas. Estes resultados são então representados graficamente, onde as barras são percentagens individuais do total, e a linha representa a percentagem acumulativa. Assim foi feito uma análise, pois os pontos devem ser escolhidos dada a percentagem desejada, ou seja, a soma das percentagens dos pontos escolhidos deve chegar a um mínimo de 80%.

3 METODOLOGIA

Os métodos para o posicionamento ótimo de sensores apresentados no item 2.5 foram aplicados em dois estudos de casos distintos de sistemas mecânicos: um sistema com 4 graus de liberdade e um sistema de uma viga engastada. Os estudos de casos, os modelos matemáticos e os procedimentos utilizados na análise serão detalhados a seguir.

3.1 CASO 1: SISTEMA DISCRETO COM QUATRO GRAUS DE LIBERDADE

3.1.1 Descrição do sistema

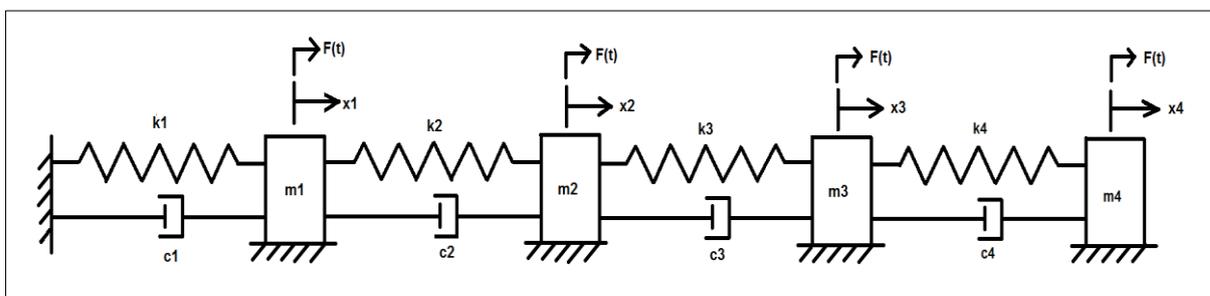


Figura 2 - Esquema do Sistema discreto com quatro graus de liberdade
Fonte: Autoria própria

A figura 4 mostra esquematicamente um sistema discreto com quatro graus de liberdade. O sistema é o mesmo utilizado por Palma (2007), e é composto por quatro massas m_1 , m_2 , m_3 e m_4 , as quais são acopladas por meio de molas e amortecedores. Os sensores de vibração e a excitação do sistema foram posicionados nas respectivas massas do mesmo. A excitação pode ser feita diretamente através de um martelo de impacto.

3.1.2 Dados do sistema

As massas m_1 , m_2 , m_3 e m_4 do sistema são 1 kg, 2 kg, 3 kg e 4 kg, respectivamente. As molas utilizadas tem rigidez de 3000 N/m e os amortecedores amortecimento de 0,3 N.s/m.

3.1.3 Determinação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento

O equacionamento do modelo matemático (Figura 4) resulta nas matrizes de massa, amortecimento e rigidez, representadas por:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$D_a = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (51)$$

1ª Etapa: Medição da Resposta ao Impulso

Uma força de impacto unitária é aplicada ao corpo m_1 e a resposta no domínio do tempo é medida nos corpos m_1 , m_2 , m_3 e m_4 . Aplicando a transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* – FFT) obtemos a Função Resposta em Frequência (FRF) do sistema. Repete-se este procedimento para a força de impacto unitária aplicada aos corpos m_2 , m_3 e m_4 . Esta etapa servirá como padrão para análise das técnicas de posicionamento.

2ª Etapa: Aplicação das Técnicas de posicionamento.

O sistema é representado na forma de matriz de estado e os quatro métodos para o posicionamento ótimo dos sensores apresentados no capítulo 2 são aplicados ao sistema e comparados.

3.2 CASO 2: SISTEMA DE VIGA ENGASTADA.

3.2.1 Descrição do sistema

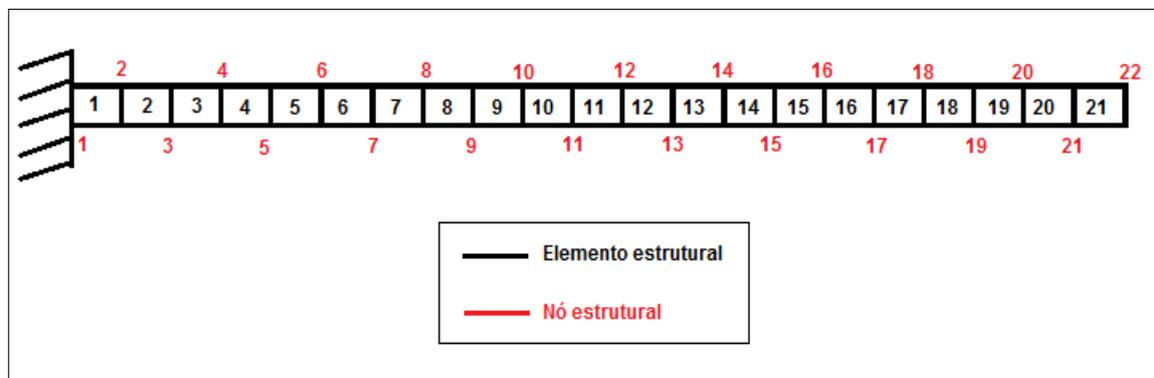


Figura 3 - Elementos e nós da viga de aço 1020
Fonte: Autoria Própria

A figura 5 mostra o segundo modelo numérico-computacional desenvolvido, o qual se baseia nas características físicas e geométricas de uma viga com uma das extremidades engastadas.

A modelagem numérico-computacional da viga empregou técnicas usuais de discretização via elementos finitos por meio da utilização do programa MATLAB®. A viga engastada em uma das extremidades foi discretizada em 21 elementos estruturais e 22 nós, conforme representado esquematicamente. Foi utilizado o elemento de Euler-Bernoulli, que considera 2 graus de liberdade por nó.

3.2.2 Dados do sistema

A Tabela 1 mostra as propriedades físicas e geométricas da estrutura.

Tabela 1 - Propriedades físicas e geométricas da viga utilizada

Módulo de elasticidade [GPa]	210
Módulo de cisalhamento [GPa]	80
Comprimento [mm]	420
Largura [mm]	37
Espessura [mm]	5
Densidade [kg/m^3]	7800

Com a discretização da viga, obtêm-se 2 graus de liberdade por nó gerando um total de 44 modos de vibração. Porém nem todos os modos serão necessários para caracterização das propriedades do sistema, sendo assim apenas 7 modos foram suficiente para se obter a análise do sistema.

Por isso os valores mostrados nos métodos a seguir só levarão em conta esses 7 modos de vibração.

3.2.3 Determinação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento

As matrizes massa e rigidez para o sistema de viga engastada foram obtidas via elementos finitos com o auxílio do software MATLAB. E para a matriz de amortecimento foi utilizada uma matriz de amortecimento proporcional, a qual está detalhada na Equação (13).

1ª Etapa: Medição da Resposta ao Impulso

Uma força de impacto unitária é aplicada ao nó 1 e a resposta no domínio do tempo é medida nas 22 posições candidatas. Aplicando a transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* – FFT) obtemos a Função Resposta em Frequência (FRF) do sistema. Repete-se este procedimento para a força de impacto unitária aplicada do nó 2 ao 22. Esta etapa servirá como padrão para análise das técnicas de posicionamento.

2ª Etapa: Aplicação das Técnicas de posicionamento

Similarmente ao que foi feito para o sistema discreto, o sistema é representado na forma de matriz de estado e os quatro métodos para o posicionamento ótimo dos sensores apresentados no capítulo 2 foram aplicados no sistema de viga engastada e comparados. Os resultados obtidos serão apresentados no próximo capítulo.

Para um sistema com dimensão pequena como é o caso do sistema da Figura 4, fica fácil verificar até visualmente qual é a melhor posição na matriz de

participação. Porém muitas vezes é necessário verificar a posição de sensores para estruturas com muitos graus de liberdade, o que por consequência gera uma matriz maior como é o caso da viga em questão, dificultando a visualização da resposta. Por conta disso foi utilizado o algoritmo de mínimos quadrados, em que independente da grandeza da matriz selecionou facilmente a posição com valores modais mais representativos.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 CASO 1: SISTEMA COM QUATRO GRAUS DE LIBERDADE

4.1.1 Resposta ao impulso

As Figuras 6 a 9 correspondem as aplicadas no sistema discreto com quatro graus de liberdade. Cada figura mostra a resposta ao impulso das 4 posições candidatas para os sensores, com gráficos obtidos no domínio do tempo e no domínio da frequência, para cada corpo onde a força é aplicada.

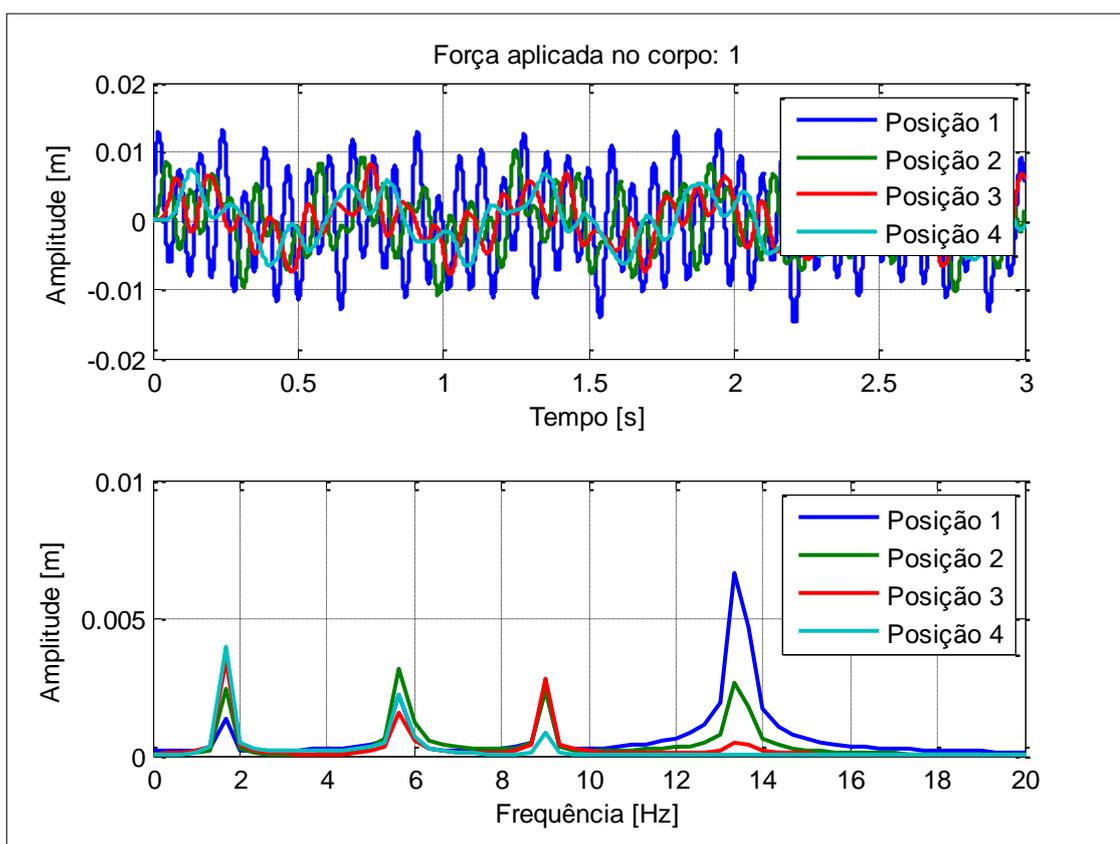


Figura 4 - Resposta ao impulso no domínio do tempo e no domínio da frequência para força aplicada no corpo 1.

Fonte: Autoria própria

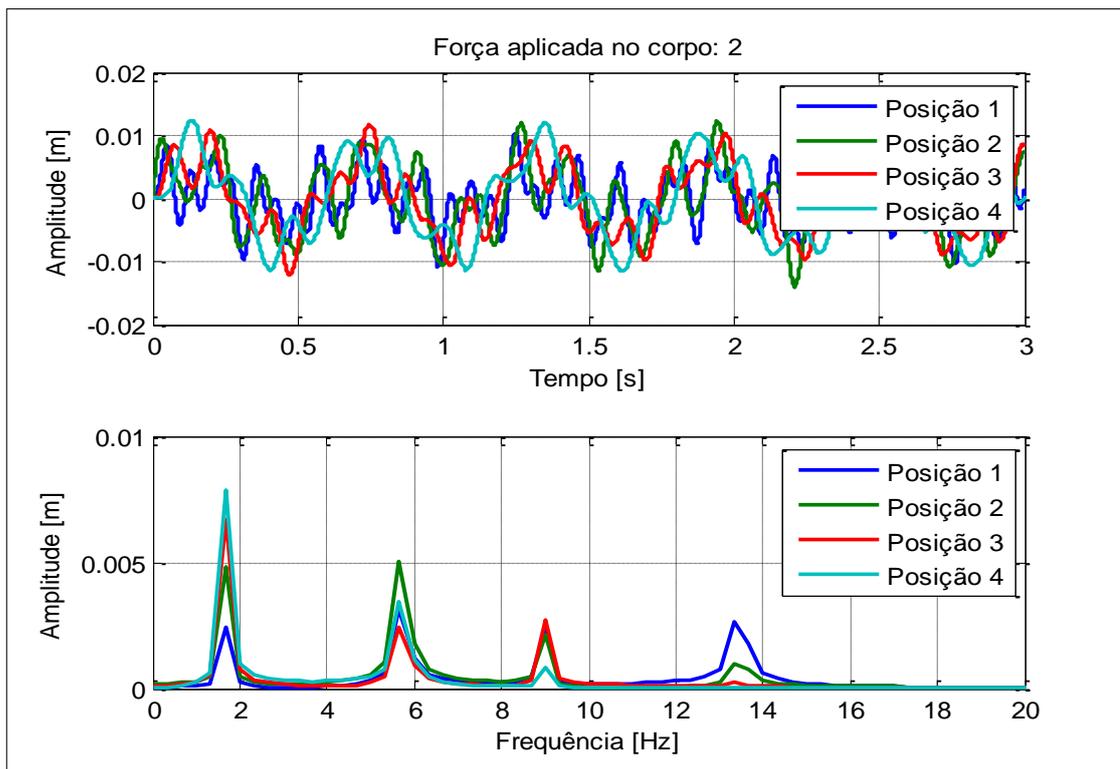


Figura 5 - Resposta ao impulso no domínio do tempo e no domínio da frequência para força aplicada no corpo 2.

Fonte: Autoria própria

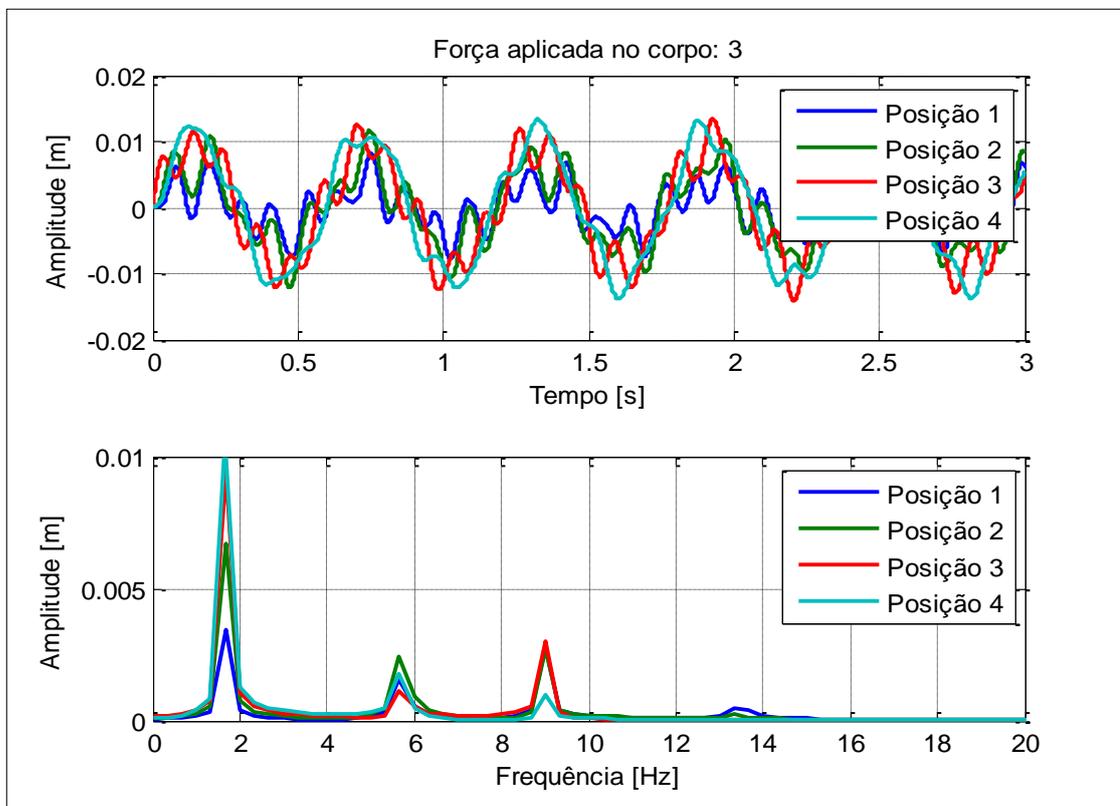


Figura 6 - Resposta ao impulso no domínio do tempo e no domínio da frequência para força aplicada no corpo 3.

Fonte: Autoria própria

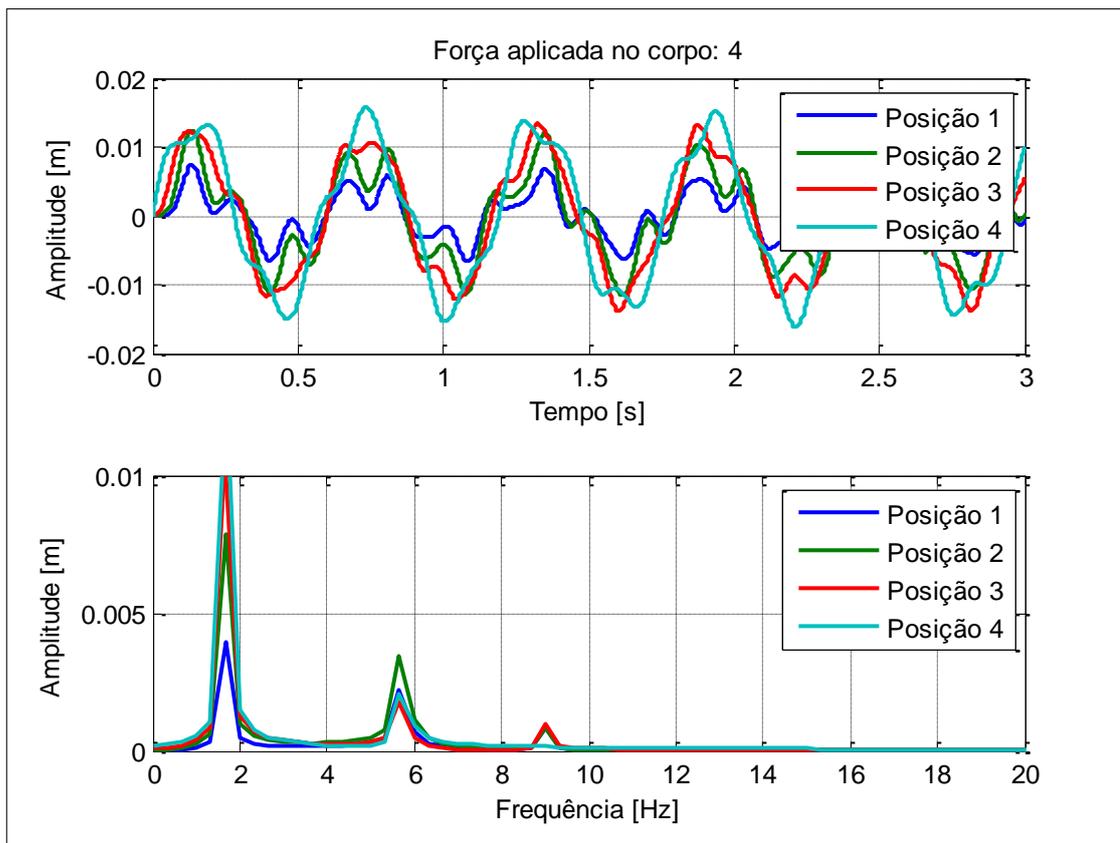


Figura 7 - Resposta ao impulso no domínio do tempo e no domínio da frequência para força aplicada no corpo 4.
Fonte: Autoria própria

4.1.2 Fator de Participação

Ao aplicar o método fator de participação para o sistema representado na figura 4, com as condições já determinadas, a matriz de participação ficou definida da seguinte forma:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,0134	0,0839	0,1446	0,7581
Posição 2	0,1032	0,4105	0,2581	0,2282
Posição 3	0,3096	0,1478	0,5292	0,0134
Posição 4	0,5738	0,3579	0,068	2,45E-04

Tendo a matriz de participação definida, foi utilizado o algoritmo Minimax para selecionar a melhor posição do sensor, tal algoritmo seleciona a melhor posição por exclusão dos menores valores obtidos para os respectivos modos em análise.

A resposta independe de onde a força foi aplicada.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 2	0,1032	0,4105	0,2581	0,2282

A posição 2 foi selecionada como a que obterá as melhores medições dos quatro modos de vibração do sistema.

4.1.3 Índice da matriz grammiana (ICG)

Ao aplicar o segundo método, a matriz grammiana para o posicionamento de sensores ficou definida como:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,0657	0,0023	6,176E-04	3,3693E-04
Posição 2	0,2529	0,0056	5,5124E-04	5,0707E-05
Posição 3	0,5060	0,0013	7,5339E-04	1,9908E-06
Posição 4	0,7034	0,0024	7,2612E-05	2,7221E-08

Tendo-se o índice grammiano determinado para cada posição candidata, o algoritmo minimax já citado, aponta que a melhor posição para o sensor para tal metodologia se encontra onde as respostas coincidem com os seguintes valores:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,0657	0,0023	6,176E-04	3,3693E-04

Sendo assim, ao analisar a matriz grammiana, tem-se que a melhor posição para a localização do sensor é a posição 1, pois refere-se a posição com valores mais interessantes para o sistema.

4.1.4 Resíduo

Para a escolha da melhor posição do sensor, foi realizada uma análise entre os valores obtidos para cada posição onde a força foi aplicada, e por exclusão dos mínimos valores, obteve-se a melhor posição.

Primeiramente para a aplicação da força no corpo 1 a matriz de resíduo ficou definida como:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,013400097210	0,083852383792	0,144620455526	0,758127063472
Posição 2	0,026291406704	0,131188562226	0,136626133634	0,294106102563
Posição 3	0,037186201612	0,064264220869	0,159725279904	0,058274857423
Posição 4	0,043845232640	0,086617858371	0,049587002996	0,006814377265

A melhor resposta para localização dos sensores para força aplicada no corpo 1 será a posição onde os resultados coincidam com:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 3	0,037186201612	0,064264220869	0,159725279904	0,058274857423

Ou seja, a melhor posição para obtenção dos modos de interesse será a posição 3 com a força aplicada no corpo 1.

Para a aplicação da força no corpo 2 a matriz resíduo é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,052582813408	0,262377124451	0,273252267267	0,588212205127
Posição 2	0,103169112231	0,410493729112	0,258147442889	0,228189715768
Posição 3	0,145920963862	0,201085058221	0,301791988658	0,045214033425
Posição 4	0,172051415045	0,271030393862	0,093691870534	0,005287108284

Sendo que o vetor de posição escolhido é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 2	0,103169112231	0,410493729112	0,258147442889	0,228189715768

Analogamente para a aplicação de força no corpo 3, a matriz resíduo é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,111558604837	0,192792662608	0,479175839712	0,174824572268
Posição 2	0,218881445793	0,301627587332	0,452687982987	0,067821050137

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 3	0,309582886301	0,147755730863	0,529223164477	0,013438218359
Posição 4	0,365020708828	0,199151017413	0,164298291781	0,001571399635

Sendo que o vetor escolhido para determinar os melhores modos é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,111558604837	0,192792662608	0,479175839712	0,174824572268

E finalmente para a aplicação da força no corpo 4, a matriz de resíduo define-se como:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,175380930559	0,346471433482	0,198348011984	0,027257509060
Posição 2	0,344102830090	0,542060787725	0,187383741067	0,010574216568
Posição 3	0,486694278438	0,265534689884	0,219064389041	0,002095199513
Posição 4	0,573847904258	0,357898156233	0,068008937109	0,000245002400

E o vetor que representa a escolha da melhor posição para o sensor é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,175380930559	0,346471433482	0,198348011984	0,027257509060

Para tanto, esse método ainda faz uma análise entre os quatro vetores que representam as melhores posições escolhidos anteriormente, ou seja, analisando os quatro vetores com força aplicada do corpo 1 ao corpo 4 e suas respectivas posições:

Posição do sensor	Força aplicada no corpo:	Mínimo valor das respostas obtidas
3	1	0.0582748574227902
2	2	0.103169112230818
1	3	0.111558604836547
1	4	0.027257509059899

Utilizando o algoritmo Minimax, exclui-se primeiramente a posição que apresenta o menor valor de resposta, que nesse caso é a posição 1 com força aplicada no corpo 4.

Posição do sensor	Força aplicada no corpo:	Mínimo valor das respostas obtidas
3	1	0.0582748574227902
2	2	0.103169112230818
1	3	0.111558604836547
1	4	0.027257509059899

Sendo assim, fazendo a mesma análise para as posições que restam, obtemos como valor máximo entre os vetores analisados a posição com força aplicada no corpo 3 com sensor no corpo 1.

Posição do sensor	Força aplicada no corpo:	Mínimo valor das respostas obtidas
3	1	0.0582748574227902
2	2	0.103169112230818
1	3	0.111558604836547
1	4	0.027257509059899

Portanto, a posição ótima para o sensor com os valores para cada modo para o método de resíduo será:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
Posição 1	0,111558604837	0,192792662608	0,479175839712	0,174824572268

Se levarmos em conta o mínimo valor das respostas obtidas tanto para a posição escolhida como ótima, quanto para a posição com força aplicada no corpo 2 com sensor posicionado no corpo 2 observamos que são valores próximos. Sendo assim, recorrendo a resposta ao impulso para os dois casos (Figuras 8 e 9), vemos que para a posição ótima determinada pelo método (Força aplicada no corpo 3 medida no corpo 1), o valor referente ao modo 4 é extremamente baixo, porém se analisarmos a força aplicada no corpo 2 com sensor no corpo 2 vemos que os modos obtidos se dão em uma maneira mais constante com a obtenção de todos os modos de interesse. Sendo assim podemos considerar que o sensor na posição 2

com força aplicada no corpo 2, também seria uma posição ótima para o caso mostrado.

4.1.5 Carta de Pareto

Conforme a metodologia, o sinal (rms) de cada posição através da resposta ao impulso obtido foi:

	Força aplicada no corpo 1	Força aplicada no corpo 2	Força aplicada no corpo 3	Força aplicada no corpo 4
Posição 1	0,0069	0,0043	0,0035	0,0034
Posição 2	0,0043	0,0056	0,0056	0,0063
Posição 3	0,0035	0,0056	0,0072	0,0081
Posição 4	0,0034	0,0063	0,0081	0,0096

A resposta do sistema seguindo o raciocínio da metodologia da Carta de Pareto deve ser realizada na forma de que a soma das percentagens dos pontos escolhidos cheguem a um mínimo de 80%, já que trata-se de um método estatístico, sendo assim os resultados obtidos foram:

Para a força aplicada no corpo 1:

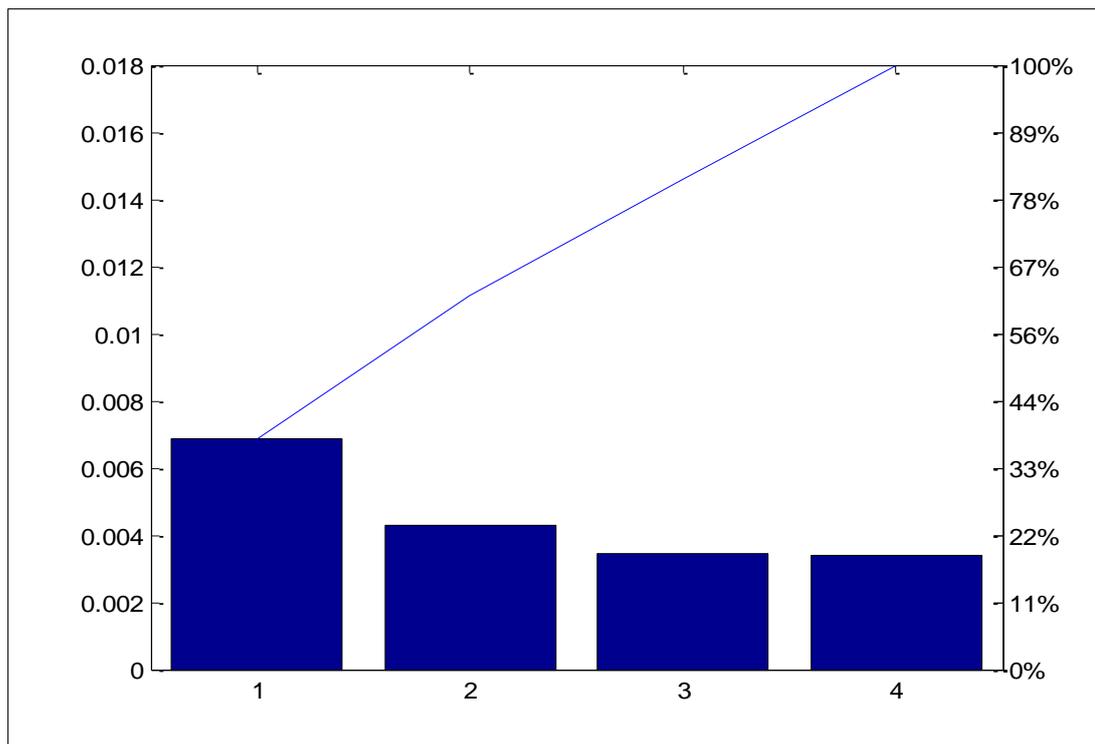


Figura 8 - Representação da estimativa para força aplicada no corpo 1
Fonte: Autoria própria

Tem-se que para a obtenção de 80% do sinal, deve-se utilizar o sensor nas posições 1, 2 e 3.

Analogamente, para a força aplicada no corpo 2:

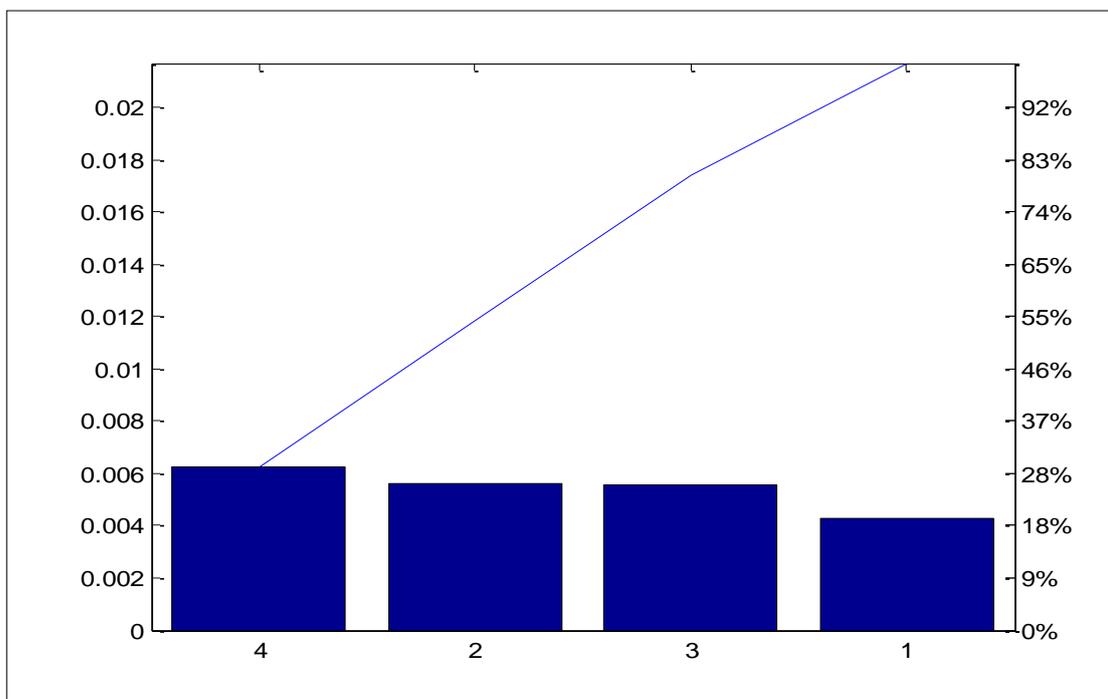


Figura 9 - Representação da estimativa para força aplicada no corpo 2
Fonte: Autoria própria

Tem-se que para obter 80% do sinal, deve-se utilizar os sensores na posição 2, 3 e 4.

Já para a força aplicada na posição 3:

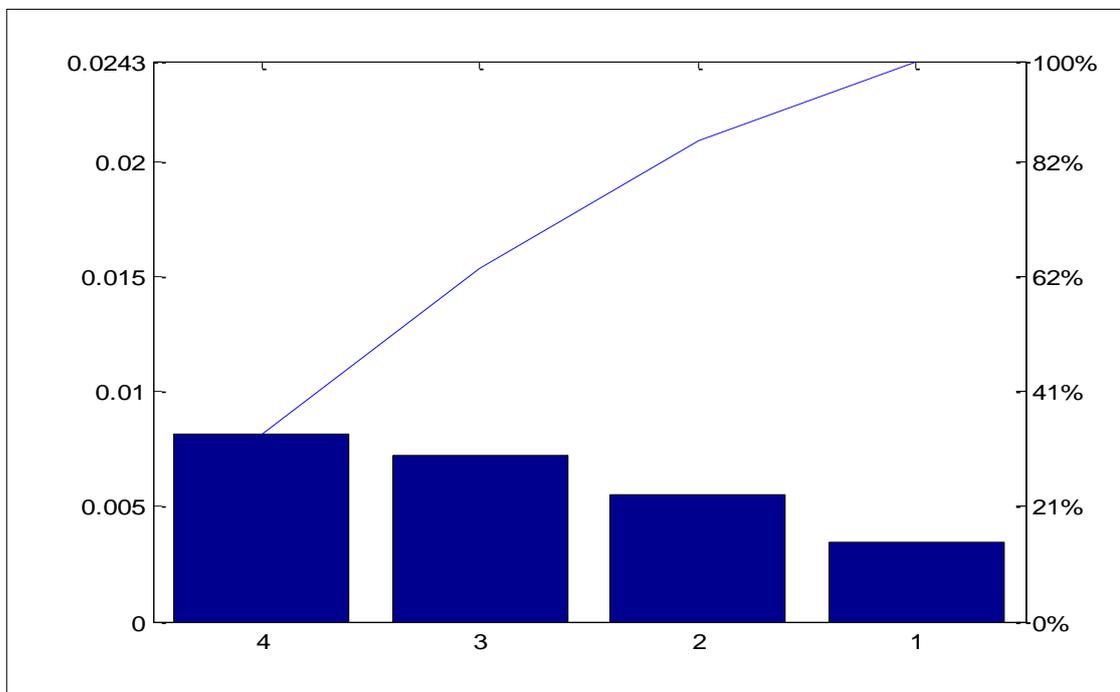


Figura 10 - Representação da estimativa para força aplicada no corpo 3
Fonte: Autoria própria

Os sensores devem ser utilizados nas posições 2, 3 e 4.

E por ultimo para a força aplicada na posição 4:

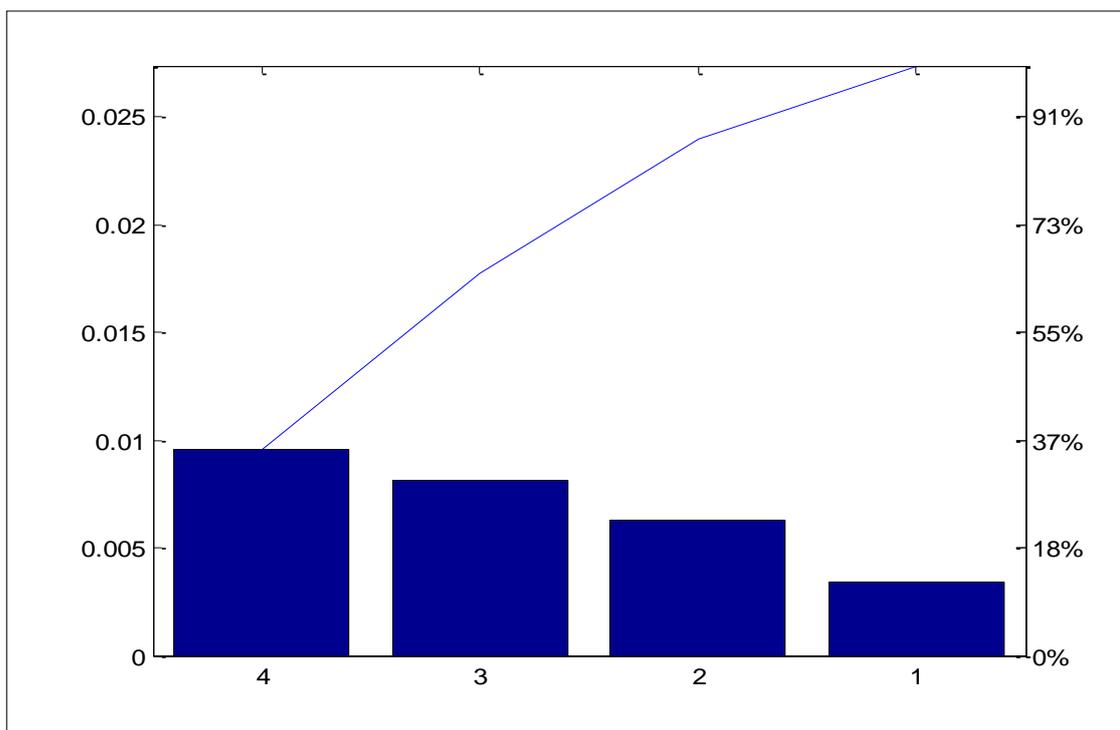


Figura 11 - Representação da estimativa para força aplicada no corpo 4
Fonte: Autoria própria

Assim como para as forças aplicadas no corpo 2 e 3, para a força aplicada no corpo 4, os sensores também devem ser utilizados nas posições 2, 3 e 4.

Porém o método da carta de Pareto não é muito confiável, pois leva em consideração apenas o sinal rms captado e, portanto muitas vezes pode não obter todos os modos de vibração nas suas medições. O método poderia ser complementado com outro método que foca na obtenção dos modos de vibração, assim seria mais eficiente.

4.2 CASO 2: SISTEMA DE VIGA ENGASTADA.

4.2.1 Resposta ao impulso

As Figuras 14 a 16 mostram os gráficos correspondentes a cada método aplicado na viga engastada em uma das extremidades, onde, a primeira figura representa os sete modos de vibração obtidos no sistema analisado, e na sequência

mostra a resposta ao impulso com e sem amortecimento para cada método com gráficos obtidos no domínio do tempo e no domínio da frequência.

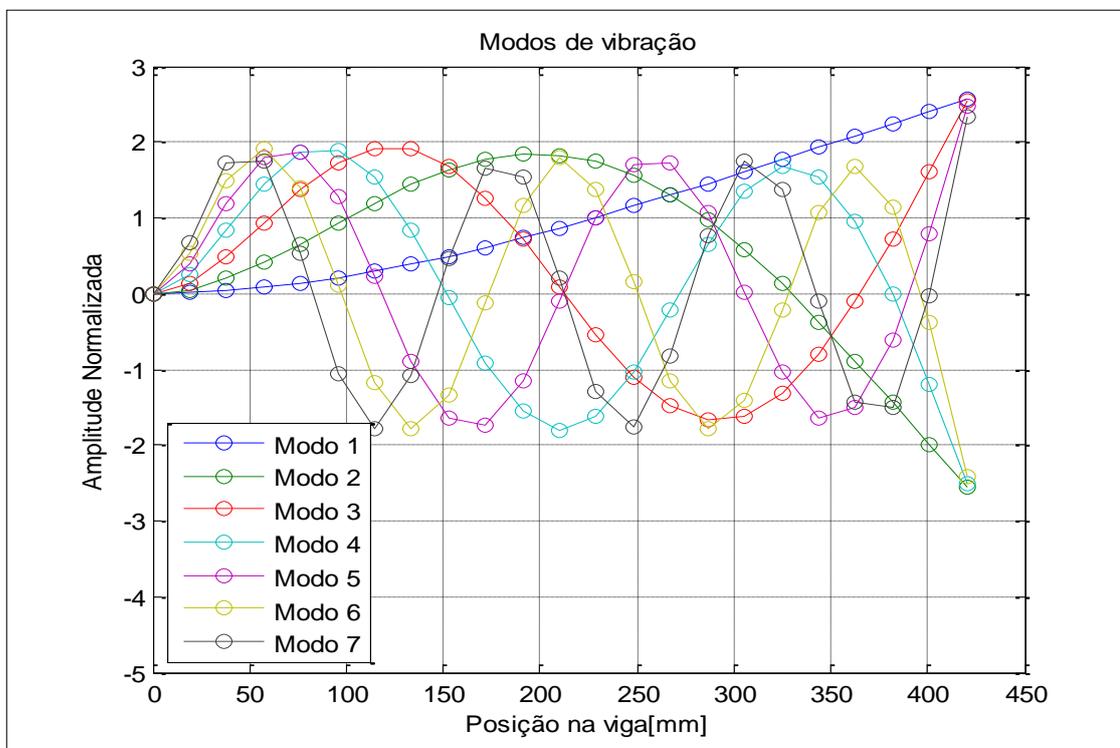


Figura 12 - Modos de vibração da viga engastada.
Fonte: Autoria própria

Para o sistema de viga engastada, a resposta ao impulso foi obtida da mesma maneira que para o sistema discreto, ou seja, a resposta ao impulso para a força aplicada em todos os nós com os sensores em todas posições candidatas. Porém levando em consideração a dimensão do sistema contínuo, seria inviável a demonstração de todas as respostas obtidas pois não é o objetivo do trabalho, sendo assim para fins representativos, a resposta ao impulso para o sistema de viga engastada esta representado esquematicamente nas Figuras 15 e 16 com força aplicada no nó 12 e o sensor posicionado no nó 3.

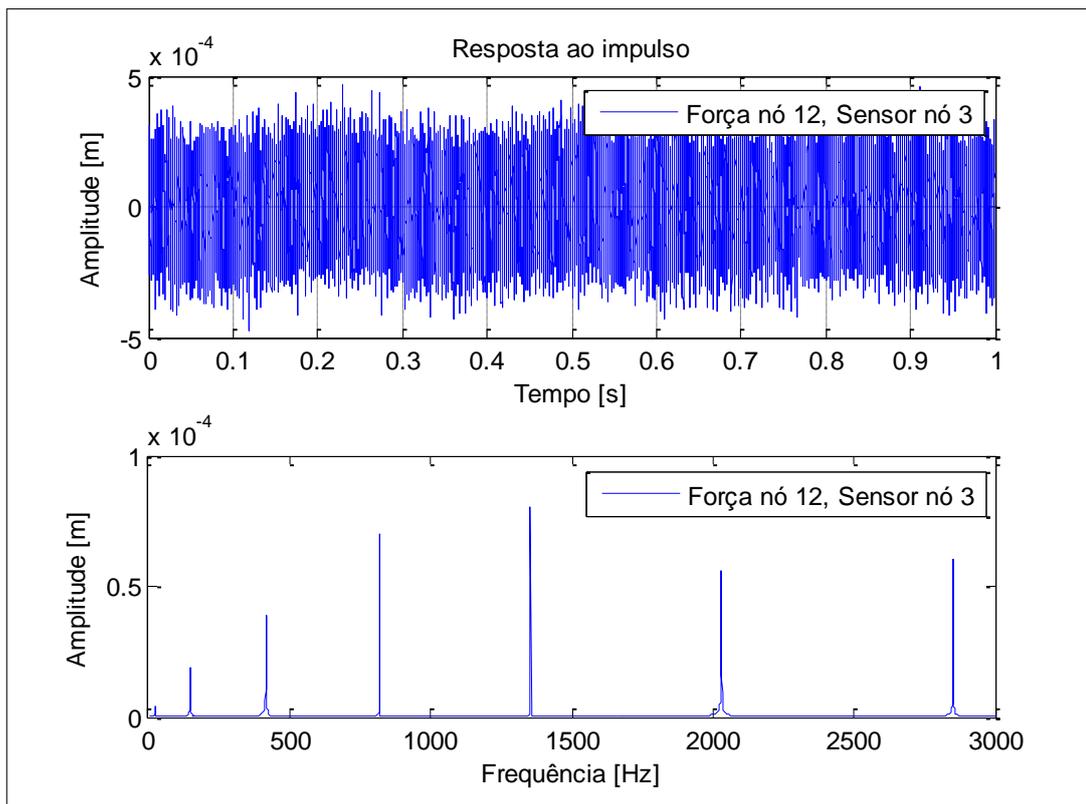


Figura 13 - Resposta ao impulso sem amortecimento da força aplicada no nó 12 e a resposta medida no nó 3.

Fonte: Autoria própria

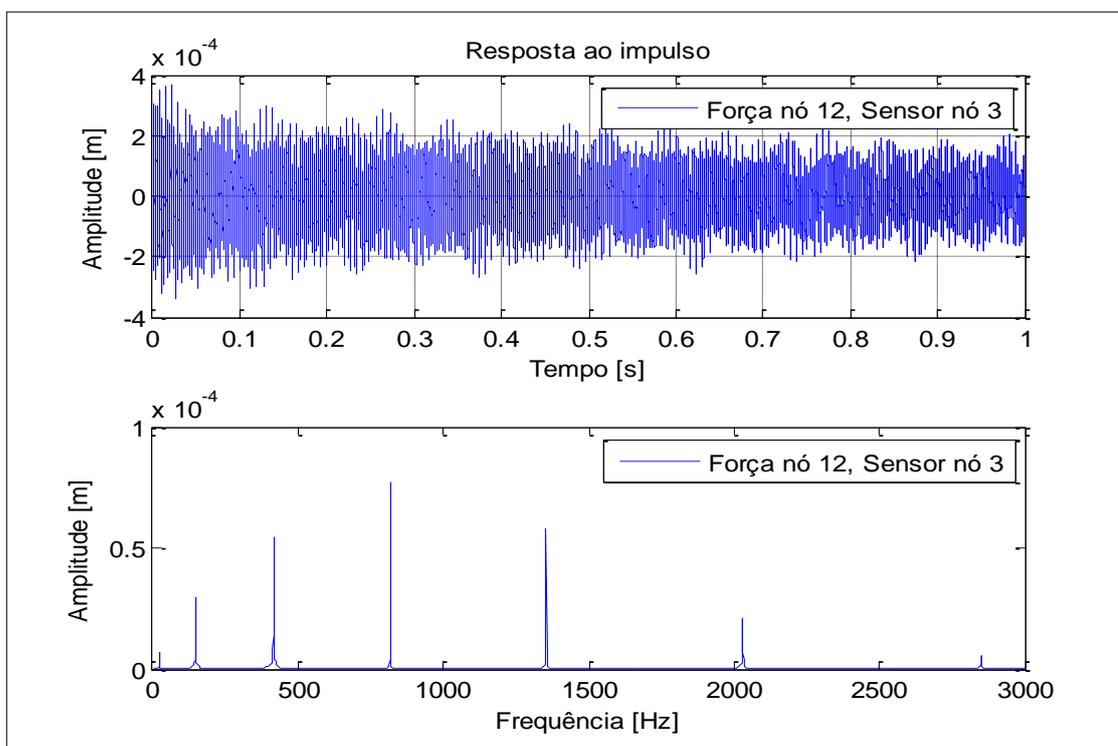


Figura 14 - Resposta ao impulso com amortecimento da força aplicada no nó 12 e a resposta medida no nó 3.

Fonte: Autoria própria

4.2.2 Fator de participação

Aplicando o método para a estrutura e condições já mencionadas acima, tem-se que a matriz de participação é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	2,26E-06	7,59E-05	0,000516	0,001704	0,003989	0,007594	0,012578
Posição 2	3,49E-05	0,001064	0,006512	0,018933	0,03812	0,060716	0,081487
Posição 3	0,000169	0,004565	0,024102	0,057541	0,089547	0,10122	0,084612
Posição 4	0,000513	0,011975	0,052444	0,094685	0,096458	0,053066	0,007823
Posição 5	0,001197	0,023798	0,082451	0,09934	0,045152	0,00041	0,030713
Posição 6	0,002369	0,03934	0,101424	0,064907	0,001397	0,038614	0,087958
Posição 7	0,004186	0,056761	0,100093	0,018958	0,022148	0,088157	0,032924
Posição 8	0,006802	0,073427	0,077995	9,43E-05	0,075171	0,050174	0,00609
Posição 9	0,010369	0,086443	0,044352	0,023378	0,08409	0,000426	0,076104
Posição 10	0,015025	0,093269	0,013968	0,06651	0,036274	0,037986	0,065069
Posição 11	0,020893	0,092282	0,000175	0,089845	0,000231	0,088462	0,001032
Posição 12	0,028078	0,083186	0,008334	0,072208	0,027676	0,051699	0,046779
Posição 13	0,036665	0,06719	0,033142	0,029864	0,079771	0,000641	0,085965
Posição 14	0,046717	0,046929	0,061132	0,00129	0,082544	0,036724	0,018934
Posição 15	0,058277	0,026143	0,077239	0,011636	0,03222	0,088717	0,016199
Posição 16	0,071366	0,009184	0,072349	0,049408	6,72E-06	0,053952	0,085127
Posição 17	0,08599	0,000435	0,048272	0,076948	0,029466	0,00117	0,051196
Posição 18	0,102141	0,003757	0,017852	0,065718	0,073411	0,031919	0,000233
Posição 19	0,119797	0,022077	0,00031	0,025146	0,062295	0,076551	0,055722
Posição 20	0,138935	0,057183	0,014228	2,46E-06	0,010785	0,035882	0,0613
Posição 21	0,159529	0,1098	0,07176	0,040264	0,017391	0,0039	3,55E-05
Posição 22	0,09078	0,089971	0,088601	0,086486	0,083543	0,079648	0,074704

O algoritmo para selecionar a melhor posição do sensor, foi o mesmo utilizado para o sistema anterior, ou seja, seleção do melhor sensor pelo algoritmo *Minimax*.

Seguindo esse método de álgebra básica temos que a melhor posição para o sensor será aquele em que os resultados sejam:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 22	0,09078	0,089971	0,088601	0,086486	0,083543	0,079648	0,074704

A posição 22 foi selecionada como a que obterá as melhores medições dos modos de vibração em análise para essa estrutura,

4.2.3 Índice da matriz grammiana

A matriz de resultados obtida através da aplicação do método da Matriz Grammiana para a viga engastada é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	1,85E-09	1,36E-09	5,83E-10	1,89E-10	6,52E-11	2,54E-11	1,10E-11
Posição 2	2,86E-08	1,90E-08	7,36E-09	2,10E-09	6,23E-10	2,03E-10	7,12E-11
Posição 3	1,39E-07	8,16E-08	2,72E-08	6,38E-09	1,46E-09	3,39E-10	7,39E-11
Posição 4	4,20E-07	2,14E-07	5,93E-08	1,05E-08	1,58E-09	1,78E-10	6,83E-12
Posição 5	9,81E-07	4,26E-07	9,32E-08	1,10E-08	7,37E-10	1,37E-12	2,68E-11
Posição 6	1,94E-06	7,04E-07	1,15E-07	7,19E-09	2,28E-11	1,29E-10	7,68E-11
Posição 7	3,43E-06	1,02E-06	1,13E-07	2,10E-09	3,62E-10	2,95E-10	2,88E-11
Posição 8	5,58E-06	1,31E-06	8,81E-08	1,05E-11	1,23E-09	1,68E-10	5,32E-12
Posição 9	8,50E-06	1,55E-06	5,01E-08	2,59E-09	1,37E-09	1,43E-12	6,65E-11
Posição 10	1,23E-05	1,67E-06	1,58E-08	7,37E-09	5,92E-10	1,27E-10	5,68E-11
Posição 11	1,71E-05	1,65E-06	1,97E-10	9,95E-09	3,77E-12	2,96E-10	9,01E-13
Posição 12	2,30E-05	1,49E-06	9,42E-09	8,00E-09	4,52E-10	1,73E-10	4,09E-11
Posição 13	3,01E-05	1,20E-06	3,75E-08	3,31E-09	1,30E-09	2,14E-12	7,51E-11
Posição 14	3,83E-05	8,39E-07	6,91E-08	1,43E-10	1,35E-09	1,23E-10	1,65E-11
Posição 15	4,78E-05	4,68E-07	8,73E-08	1,29E-09	5,26E-10	2,97E-10	1,41E-11
Posição 16	5,85E-05	1,64E-07	8,18E-08	5,47E-09	1,10E-13	1,81E-10	7,43E-11
Posição 17	7,05E-05	7,77E-09	5,45E-08	8,53E-09	4,81E-10	3,92E-12	4,47E-11
Posição 18	8,38E-05	6,72E-08	2,02E-08	7,28E-09	1,20E-09	1,07E-10	2,03E-13
Posição 19	9,83E-05	3,95E-07	3,51E-10	2,79E-09	1,02E-09	2,56E-10	4,87E-11
Posição 20	0,000114	1,02E-06	1,61E-08	2,73E-13	1,76E-10	1,20E-10	5,35E-11
Posição 21	0,000131	1,96E-06	8,11E-08	4,46E-09	2,84E-10	1,31E-11	3,10E-14
Posição 22	0,000149	3,22E-06	2,00E-07	1,92E-08	2,73E-09	5,33E-10	1,30E-10

Essa matriz apresenta 22 vetores que representam os valores para cada posição candidata, sendo que para cada posição são demonstrados 7 dos principais modos de vibração.

Tendo-se a matriz do índice grammiano, aplica-se então o método minimax para determinar a melhor posição do sensor, que será a que corresponde ao seguinte vetor:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 22	0,000149	3,22E-06	2,00E-07	1,92E-08	2,73E-09	5,33E-10	1,30E-10

Ou seja, a melhor posição para captar os principais valores modais dessa viga, é a posição 22, segundo o método do índice grammiano.

4.2.4 Resíduo

Matriz de residuo com força aplicada no nó 1:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	7,71E-08	2,57E-06	1,72E-05	5,62E-05	0,00013	0,000242	0,000393
Posição 2	7,71E-08	2,57E-06	1,72E-05	5,62E-05	0,00013	0,000242	0,000393
Posição 3	2,95E-07	9,87E-06	6,67E-05	0,000219	0,000508	0,000959	0,001572
Posição 4	1,49E-07	4,51E-06	2,71E-05	7,65E-05	0,000146	0,000209	0,000229
Posição 5	1,49E-07	4,51E-06	2,71E-05	7,65E-05	0,000146	0,000209	0,000229
Posição 6	1,16E-06	3,69E-05	0,000237	0,000729	0,001572	0,002712	0,004
Posição 7	2,16E-07	5,84E-06	3,00E-05	6,47E-05	7,14E-05	5,90E-06	0,000211
Posição 8	2,16E-07	5,84E-06	3,00E-05	6,47E-05	7,14E-05	5,90E-06	0,000211
Posição 9	2,56E-06	7,65E-05	0,000456	0,001272	0,002409	0,003501	0,004076
Posição 10	2,78E-07	6,56E-06	2,66E-05	2,90E-05	4,81E-05	0,000245	0,000522
Posição 11	2,78E-07	6,56E-06	2,66E-05	2,90E-05	4,81E-05	0,000245	0,000522
Posição 12	4,44E-06	0,000124	0,000672	0,001631	0,0025	0,002535	0,001239
Posição 13	3,36E-07	6,72E-06	1,80E-05	1,87E-05	0,000158	0,000355	0,000433
Posição 14	3,36E-07	6,72E-06	1,80E-05	1,87E-05	0,000158	0,000355	0,000433
Posição 15	6,79E-06	0,000175	0,000843	0,001671	0,00171	0,000223	0,002456
Posição 16	3,88E-07	6,34E-06	6,00E-06	6,49E-05	0,000209	0,000264	6,36E-06
Posição 17	3,88E-07	6,34E-06	6,00E-06	6,49E-05	0,000209	0,000264	6,36E-06
Posição 18	9,55E-06	0,000225	0,000935	0,001351	0,000301	0,002163	0,004156
Posição 19	4,36E-07	5,48E-06	7,63E-06	9,71E-05	0,000181	2,26E-05	0,000423
Posição 20	4,36E-07	5,48E-06	7,63E-06	9,71E-05	0,000181	2,26E-05	0,000423
Posição 21	1,27E-05	0,00027	0,000929	0,00073	0,001198	0,003268	0,002543
Posição 22	4,78E-07	4,21E-06	2,09E-05	0,000107	8,19E-05	0,000231	0,000516

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	1,27E-05	0,00027	0,000929	0,00073	0,001198	0,003268	0,002543

Matriz de residuo com força aplicada no nó 2:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	7,71E-08	2,57E-06	1,72E-05	5,62E-05	0,00013	0,000242	0,000393
Posição 2	7,71E-08	2,57E-06	1,72E-05	5,62E-05	0,00013	0,000242	0,000393
Posição 3	2,95E-07	9,87E-06	6,67E-05	0,000219	0,000508	0,000959	0,001572
Posição 4	1,49E-07	4,51E-06	2,71E-05	7,65E-05	0,000146	0,000209	0,000229
Posição 5	1,49E-07	4,51E-06	2,71E-05	7,65E-05	0,000146	0,000209	0,000229
Posição 6	1,16E-06	3,69E-05	0,000237	0,000729	0,001572	0,002712	0,004
Posição 7	2,16E-07	5,84E-06	3,00E-05	6,47E-05	7,14E-05	5,90E-06	0,000211
Posição 8	2,16E-07	5,84E-06	3,00E-05	6,47E-05	7,14E-05	5,90E-06	0,000211
Posição 9	2,56E-06	7,65E-05	0,000456	0,001272	0,002409	0,003501	0,004076
Posição 10	2,78E-07	6,56E-06	2,66E-05	2,90E-05	4,81E-05	0,000245	0,000522
Posição 11	2,78E-07	6,56E-06	2,66E-05	2,90E-05	4,81E-05	0,000245	0,000522
Posição 12	4,44E-06	0,000124	0,000672	0,001631	0,0025	0,002535	0,001239
Posição 13	3,36E-07	6,72E-06	1,80E-05	1,87E-05	0,000158	0,000355	0,000433
Posição 14	3,36E-07	6,72E-06	1,80E-05	1,87E-05	0,000158	0,000355	0,000433
Posição 15	6,79E-06	0,000175	0,000843	0,001671	0,00171	0,000223	0,002456
Posição 16	3,88E-07	6,34E-06	6,00E-06	6,49E-05	0,000209	0,000264	6,36E-06
Posição 17	3,88E-07	6,34E-06	6,00E-06	6,49E-05	0,000209	0,000264	6,36E-06
Posição 18	9,55E-06	0,000225	0,000935	0,001351	0,000301	0,002163	0,004156
Posição 19	4,36E-07	5,48E-06	7,63E-06	9,71E-05	0,000181	2,26E-05	0,000423
Posição 20	4,36E-07	5,48E-06	7,63E-06	9,71E-05	0,000181	2,26E-05	0,000423
Posição 21	1,27E-05	0,00027	0,000929	0,00073	0,001198	0,003268	0,002543
Posição 22	4,78E-07	4,21E-06	2,09E-05	0,000107	8,19E-05	0,000231	0,000516

O vetor posição que tem os maiores valores segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	1,27E-05	0,00027	0,000929	0,00073	0,001198	0,003268	0,002543

Matriz de residuo com força aplicada no nó 3:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	5,90E-07	1,97E-05	1,33E-04	4,38E-04	0,001017	0,001918	0,003143
Posição 2	5,90E-07	1,97E-05	1,33E-04	4,38E-04	0,001017	0,001918	0,003143
Posição 3	2,26E-06	7,59E-05	5,16E-04	0,001704	0,003989	0,007594	0,012578
Posição 4	1,14E-06	3,47E-05	2,10E-04	5,95E-04	0,001143	0,001657	0,001834
Posição 5	1,14E-06	3,47E-05	2,10E-04	5,95E-04	0,001143	0,001657	0,001834
Posição 6	8,87E-06	2,84E-04	0,001833	0,005679	0,012332	0,021473	0,032015
Posição 7	1,65E-06	4,49E-05	2,32E-04	5,03E-04	5,61E-04	4,67E-05	0,001693
Posição 8	1,65E-06	4,49E-05	2,32E-04	5,03E-04	5,61E-04	4,67E-05	0,001693
Posição 9	1,95E-05	5,89E-04	0,003526	0,009901	0,018901	0,027725	0,032623
Posição 10	2,13E-06	5,05E-05	2,05E-04	2,25E-04	3,77E-04	0,001942	0,004174
Posição 11	2,13E-06	5,05E-05	2,05E-04	2,25E-04	3,77E-04	0,001942	0,004174
Posição 12	3,40E-05	0,000953	0,005201	0,012701	0,019617	0,020075	0,00992
Posição 13	2,57E-06	5,17E-05	1,39E-04	1,46E-04	0,001236	0,002808	0,003463
Posição 14	2,57E-06	5,17E-05	1,39E-04	1,46E-04	0,001236	0,002808	0,003463
Posição 15	5,20E-05	0,001344	0,006521	0,01301	0,013421	0,001764	0,019655
Posição 16	2,97E-06	4,88E-05	4,64E-05	5,05E-04	0,001643	0,00209	5,09E-05
Posição 17	2,97E-06	4,88E-05	4,64E-05	5,05E-04	0,001643	0,00209	5,09E-05
Posição 18	7,31E-05	0,001728	0,007233	0,010516	0,002361	0,017124	0,033262
Posição 19	3,33E-06	4,22E-05	5,90E-05	7,56E-04	0,001418	1,79E-04	0,003384
Posição 20	3,33E-06	4,22E-05	5,90E-05	7,56E-04	0,001418	1,79E-04	0,003384
Posição 21	9,72E-05	0,002076	0,007185	0,005683	0,0094	0,025874	0,02035
Posição 22	3,66E-06	3,24E-05	1,61E-04	0,000832	6,42E-04	0,001827	0,004129

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	9,72E-05	0,002076	0,007185	0,005683	0,0094	0,025874	0,02035

Matriz de residuo com força aplicada no nó 4

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	1,49E-07	4,51E-06	2,71E-05	7,65E-05	0,000146	0,000209	0,000229
Posição 2	1,49E-07	4,51E-06	2,71E-05	7,65E-05	0,000146	0,000209	0,000229
Posição 3	5,71E-07	1,73E-05	1,05E-04	0,000298	0,000571	0,000829	0,000917
Posição 4	2,89E-07	7,92E-06	4,27E-05	1,04E-04	0,000164	0,000181	0,000134

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 5	2,89E-07	7,92E-06	4,27E-05	1,04E-04	0,000164	0,000181	0,000134
Posição 6	2,24E-06	6,49E-05	0,000373	0,000992	0,001766	0,002343	0,002334
Posição 7	4,19E-07	1,03E-05	4,72E-05	8,80E-05	8,03E-05	5,10E-06	0,000123
Posição 8	4,19E-07	1,03E-05	4,72E-05	8,80E-05	8,03E-05	5,10E-06	0,000123
Posição 9	4,95E-06	1,34E-04	0,000717	0,00173	0,002707	0,003026	0,002378
Posição 10	5,39E-07	1,15E-05	4,18E-05	3,94E-05	5,41E-05	0,000212	0,000304
Posição 11	5,39E-07	1,15E-05	4,18E-05	3,94E-05	5,41E-05	0,000212	0,000304
Posição 12	8,60E-06	0,000218	0,001058	0,00222	0,00281	0,002191	0,000723
Posição 13	6,50E-07	1,18E-05	2,84E-05	2,55E-05	0,000177	0,000306	0,000252
Posição 14	6,50E-07	1,18E-05	2,84E-05	2,55E-05	0,000177	0,000306	0,000252
Posição 15	1,31E-05	0,000307	0,001327	0,002273	0,001922	0,000192	0,001433
Posição 16	7,51E-07	1,11E-05	9,43E-06	8,83E-05	0,000235	0,000228	3,71E-06
Posição 17	7,51E-07	1,11E-05	9,43E-06	8,83E-05	0,000235	0,000228	3,71E-06
Posição 18	1,85E-05	0,000395	0,001471	0,001838	0,000338	0,001869	0,002425
Posição 19	8,43E-07	9,64E-06	1,20E-05	1,32E-04	0,000203	1,96E-05	0,000247
Posição 20	8,43E-07	9,64E-06	1,20E-05	1,32E-04	0,000203	1,96E-05	0,000247
Posição 21	2,46E-05	0,000474	0,001462	0,000993	0,001346	0,002824	0,001483
Posição 22	9,26E-07	7,41E-06	3,28E-05	0,000145	9,20E-05	0,000199	0,000301

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	2,46E-05	0,000474	0,001462	0,000993	0,001346	0,002824	0,001483

Matriz de residuo com força aplicada no nó 5:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	1,49E-07	4,51E-06	2,71E-05	7,65E-05	0,000146	0,000209	0,000229
Posição 2	1,49E-07	4,51E-06	2,71E-05	7,65E-05	0,000146	0,000209	0,000229
Posição 3	5,71E-07	1,73E-05	1,05E-04	0,000298	0,000571	0,000829	0,000917
Posição 4	2,89E-07	7,92E-06	4,27E-05	1,04E-04	0,000164	0,000181	0,000134
Posição 5	2,89E-07	7,92E-06	4,27E-05	1,04E-04	0,000164	0,000181	0,000134
Posição 6	2,24E-06	6,49E-05	0,000373	0,000992	0,001766	0,002343	0,002334
Posição 7	4,19E-07	1,03E-05	4,72E-05	8,80E-05	8,03E-05	5,10E-06	0,000123
Posição 8	4,19E-07	1,03E-05	4,72E-05	8,80E-05	8,03E-05	5,10E-06	0,000123
Posição 9	4,95E-06	1,34E-04	0,000717	0,00173	0,002707	0,003026	0,002378
Posição 10	5,39E-07	1,15E-05	4,18E-05	3,94E-05	5,41E-05	0,000212	0,000304

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 11	5,39E-07	1,15E-05	4,18E-05	3,94E-05	5,41E-05	0,000212	0,000304
Posição 12	8,60E-06	0,000218	0,001058	0,00222	0,00281	0,002191	0,000723
Posição 13	6,50E-07	1,18E-05	2,84E-05	2,55E-05	0,000177	0,000306	0,000252
Posição 14	6,50E-07	1,18E-05	2,84E-05	2,55E-05	0,000177	0,000306	0,000252
Posição 15	1,31E-05	0,000307	0,001327	0,002273	0,001922	0,000192	0,001433
Posição 16	7,51E-07	1,11E-05	9,43E-06	8,83E-05	0,000235	0,000228	3,71E-06
Posição 17	7,51E-07	1,11E-05	9,43E-06	8,83E-05	0,000235	0,000228	3,71E-06
Posição 18	1,85E-05	0,000395	0,001471	0,001838	0,000338	0,001869	0,002425
Posição 19	8,43E-07	9,64E-06	1,20E-05	1,32E-04	0,000203	1,96E-05	0,000247
Posição 20	8,43E-07	9,64E-06	1,20E-05	1,32E-04	0,000203	1,96E-05	0,000247
Posição 21	2,46E-05	0,000474	0,001462	0,000993	0,001346	0,002824	0,001483
Posição 22	9,26E-07	7,41E-06	3,28E-05	0,000145	9,20E-05	0,000199	0,000301

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	2,46E-05	0,000474	0,001462	0,000993	0,001346	0,002824	0,001483

Matriz de residuo com força aplicada no nó 6:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	2,32E-06	7,39E-05	4,74E-04	1,46E-03	0,003143	0,005424	0,008
Posição 2	2,32E-06	7,39E-05	4,74E-04	1,46E-03	0,003143	0,005424	0,008
Posição 3	8,87E-06	2,84E-04	1,83E-03	0,005679	0,012332	0,021473	0,032015
Posição 4	4,49E-06	1,30E-04	7,46E-04	1,98E-03	0,003533	0,004687	0,004667
Posição 5	4,49E-06	1,30E-04	7,46E-04	1,98E-03	0,003533	0,004687	0,004667
Posição 6	3,49E-05	1,06E-03	0,006512	0,018933	0,03812	0,060716	0,081487
Posição 7	6,51E-06	1,68E-04	8,24E-04	1,68E-03	1,73E-03	1,32E-04	0,004308
Posição 8	6,51E-06	1,68E-04	8,24E-04	1,68E-03	1,73E-03	1,32E-04	0,004308
Posição 9	7,69E-05	2,20E-03	0,012528	0,033006	0,058425	0,078394	0,083035
Posição 10	8,38E-06	1,89E-04	7,30E-04	7,52E-04	1,17E-03	0,00549	0,010625
Posição 11	8,38E-06	1,89E-04	7,30E-04	7,52E-04	1,17E-03	0,00549	0,010625
Posição 12	1,34E-04	0,00357	0,01848	0,04234	0,060638	0,056762	0,025248
Posição 13	1,01E-05	1,94E-04	4,95E-04	4,86E-04	0,003821	0,007941	0,008813
Posição 14	1,01E-05	1,94E-04	4,95E-04	4,86E-04	0,003821	0,007941	0,008813
Posição 15	2,04E-04	0,005033	0,023172	0,043368	0,041487	0,004987	0,050027
Posição 16	1,17E-05	1,83E-04	1,65E-04	1,68E-03	0,005077	0,00591	1,30E-04

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 17	1,17E-05	1,83E-04	1,65E-04	1,68E-03	0,005077	0,00591	1,30E-04
Posição 18	2,87E-04	0,006471	0,0257	0,035055	0,007298	0,04842	0,08466
Posição 19	1,31E-05	1,58E-04	2,10E-04	2,52E-03	0,004383	5,07E-04	0,008612
Posição 20	1,31E-05	1,58E-04	2,10E-04	2,52E-03	0,004383	5,07E-04	0,008612
Posição 21	3,82E-04	0,007772	0,025531	0,018945	0,029056	0,073161	0,051797
Posição 22	1,44E-05	1,21E-04	5,73E-04	0,002772	1,99E-03	0,005165	0,010509

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	3,82E-04	0,007772	0,025531	0,018945	0,029056	0,073161	0,051797

Matriz de residuo com força aplicada no nó 7:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	2,16E-07	5,84E-06	3,00E-05	6,47E-05	7,14E-05	5,90E-06	0,000211
Posição 2	2,16E-07	5,84E-06	3,00E-05	6,47E-05	7,14E-05	5,90E-06	0,000211
Posição 3	8,27E-07	2,24E-05	1,16E-04	0,000252	0,00028	2,34E-05	0,000846
Posição 4	4,19E-07	1,03E-05	4,72E-05	8,80E-05	8,03E-05	5,10E-06	0,000123
Posição 5	4,19E-07	1,03E-05	4,72E-05	8,80E-05	8,03E-05	5,10E-06	0,000123
Posição 6	3,25E-06	8,41E-05	0,000412	0,000839	0,000866	6,61E-05	0,002154
Posição 7	6,07E-07	1,33E-05	5,22E-05	7,44E-05	3,94E-05	1,44E-07	0,000114
Posição 8	6,07E-07	1,33E-05	5,22E-05	7,44E-05	3,94E-05	1,44E-07	0,000114
Posição 9	7,17E-06	1,74E-04	0,000793	0,001463	0,001328	8,53E-05	0,002195
Posição 10	7,82E-07	1,49E-05	4,62E-05	3,33E-05	2,65E-05	5,98E-06	0,000281
Posição 11	7,82E-07	1,49E-05	4,62E-05	3,33E-05	2,65E-05	5,98E-06	0,000281
Posição 12	1,25E-05	0,000282	0,00117	0,001877	0,001378	6,18E-05	0,000667
Posição 13	9,42E-07	1,53E-05	3,13E-05	2,16E-05	8,69E-05	8,64E-06	0,000233
Posição 14	9,42E-07	1,53E-05	3,13E-05	2,16E-05	8,69E-05	8,64E-06	0,000233
Posição 15	1,91E-05	0,000398	0,001467	0,001922	0,000943	5,43E-06	0,001322
Posição 16	1,09E-06	1,44E-05	1,04E-05	7,47E-05	0,000115	6,43E-06	3,42E-06
Posição 17	1,09E-06	1,44E-05	1,04E-05	7,47E-05	0,000115	6,43E-06	3,42E-06
Posição 18	2,68E-05	0,000511	0,001627	0,001554	0,000166	5,27E-05	0,002238
Posição 19	1,22E-06	1,25E-05	1,33E-05	1,12E-04	9,96E-05	5,51E-07	0,000228
Posição 20	1,22E-06	1,25E-05	1,33E-05	1,12E-04	9,96E-05	5,51E-07	0,000228
Posição 21	3,56E-05	0,000614	0,001616	0,00084	0,00066	7,96E-05	0,001369
Posição 22	1,34E-06	9,59E-06	3,63E-05	0,000123	4,51E-05	5,62E-06	0,000278

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	3,56E-05	0,000614	0,001616	0,00084	0,00066	7,96E-05	0,001369

Matriz de residuo com força aplicada no nó 8:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	2,16E-07	5,84E-06	3,00E-05	6,47E-05	7,14E-05	5,90E-06	0,000211
Posição 2	2,16E-07	5,84E-06	3,00E-05	6,47E-05	7,14E-05	5,90E-06	0,000211
Posição 3	8,27E-07	2,24E-05	1,16E-04	0,000252	0,00028	2,34E-05	0,000846
Posição 4	4,19E-07	1,03E-05	4,72E-05	8,80E-05	8,03E-05	5,10E-06	0,000123
Posição 5	4,19E-07	1,03E-05	4,72E-05	8,80E-05	8,03E-05	5,10E-06	0,000123
Posição 6	3,25E-06	8,41E-05	0,000412	0,000839	0,000866	6,61E-05	0,002154
Posição 7	6,07E-07	1,33E-05	5,22E-05	7,44E-05	3,94E-05	1,44E-07	0,000114
Posição 8	6,07E-07	1,33E-05	5,22E-05	7,44E-05	3,94E-05	1,44E-07	0,000114
Posição 9	7,17E-06	1,74E-04	0,000793	0,001463	0,001328	8,53E-05	0,002195
Posição 10	7,82E-07	1,49E-05	4,62E-05	3,33E-05	2,65E-05	5,98E-06	0,000281
Posição 11	7,82E-07	1,49E-05	4,62E-05	3,33E-05	2,65E-05	5,98E-06	0,000281
Posição 12	1,25E-05	0,000282	0,00117	0,001877	0,001378	6,18E-05	0,000667
Posição 13	9,42E-07	1,53E-05	3,13E-05	2,16E-05	8,69E-05	8,64E-06	0,000233
Posição 14	9,42E-07	1,53E-05	3,13E-05	2,16E-05	8,69E-05	8,64E-06	0,000233
Posição 15	1,91E-05	0,000398	0,001467	0,001922	0,000943	5,43E-06	0,001322
Posição 16	1,09E-06	1,44E-05	1,04E-05	7,47E-05	0,000115	6,43E-06	3,42E-06
Posição 17	1,09E-06	1,44E-05	1,04E-05	7,47E-05	0,000115	6,43E-06	3,42E-06
Posição 18	2,68E-05	0,000511	0,001627	0,001554	0,000166	5,27E-05	0,002238
Posição 19	1,22E-06	1,25E-05	1,33E-05	1,12E-04	9,96E-05	5,51E-07	0,000228
Posição 20	1,22E-06	1,25E-05	1,33E-05	1,12E-04	9,96E-05	5,51E-07	0,000228
Posição 21	3,56E-05	0,000614	0,001616	0,00084	0,00066	7,96E-05	0,001369
Posição 22	1,34E-06	9,59E-06	3,63E-05	0,000123	4,51E-05	5,62E-06	0,000278

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	3,56E-05	0,000614	0,001616	0,00084	0,00066	7,96E-05	0,001369

Matriz de residuo com força aplicada no nó 9:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	5,11E-06	1,53E-04	9,12E-04	2,54E-03	4,82E-03	7,00E-03	0,008152
Posição 2	5,11E-06	1,53E-04	9,12E-04	2,54E-03	4,82E-03	7,00E-03	0,008152
Posição 3	1,95E-05	5,89E-04	3,53E-03	0,009901	0,018901	2,77E-02	0,032623
Posição 4	9,89E-06	2,69E-04	1,43E-03	3,46E-03	5,41E-03	6,05E-03	0,004756
Posição 5	9,89E-06	2,69E-04	1,43E-03	3,46E-03	5,41E-03	6,05E-03	0,004756
Posição 6	7,69E-05	2,20E-03	0,012528	0,033006	0,058425	7,84E-02	0,083035
Posição 7	1,43E-05	3,48E-04	1,59E-03	2,93E-03	2,66E-03	1,71E-04	0,00439
Posição 8	1,43E-05	3,48E-04	1,59E-03	2,93E-03	2,66E-03	1,71E-04	0,00439
Posição 9	1,69E-04	4,56E-03	0,024102	0,057541	0,089547	1,01E-01	0,084612
Posição 10	1,85E-05	3,92E-04	1,40E-03	1,31E-03	1,79E-03	7,09E-03	0,010826
Posição 11	1,85E-05	3,92E-04	1,40E-03	1,31E-03	1,79E-03	7,09E-03	0,010826
Posição 12	2,95E-04	0,007393	0,035553	0,073813	0,092938	7,33E-02	0,025727
Posição 13	2,23E-05	4,01E-04	9,53E-04	8,48E-04	5,86E-03	1,03E-02	0,00898
Posição 14	2,23E-05	4,01E-04	9,53E-04	8,48E-04	5,86E-03	1,03E-02	0,00898
Posição 15	4,50E-04	0,010423	0,044578	0,075605	0,063586	6,44E-03	0,050978
Posição 16	2,57E-05	3,78E-04	3,17E-04	2,94E-03	0,007782	7,63E-03	1,32E-04
Posição 17	2,57E-05	3,78E-04	3,17E-04	2,94E-03	0,007782	7,63E-03	1,32E-04
Posição 18	6,34E-04	0,013401	0,049442	0,061113	0,011185	6,25E-02	0,086268
Posição 19	2,89E-05	3,27E-04	4,03E-04	4,39E-03	6,72E-03	6,54E-04	0,008776
Posição 20	2,89E-05	3,27E-04	4,03E-04	4,39E-03	6,72E-03	6,54E-04	0,008776
Posição 21	8,42E-04	0,016097	0,049116	0,033028	0,044534	9,45E-02	0,052781
Posição 22	3,17E-05	2,51E-04	1,10E-03	0,004833	3,04E-03	6,67E-03	0,010709

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	8,42E-04	0,016097	0,049116	0,033028	0,044534	9,45E-02	0,052781

Matriz de residuo com força aplicada no nó 10:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	2,78E-07	6,56E-06	2,66E-05	2,90E-05	4,81E-05	2,45E-04	0,000522
Posição 2	2,78E-07	6,56E-06	2,66E-05	2,90E-05	4,81E-05	2,45E-04	0,000522
Posição 3	1,07E-06	2,52E-05	1,03E-04	0,000113	0,000189	9,71E-04	0,002087
Posição 4	5,39E-07	1,15E-05	4,18E-05	3,94E-05	5,41E-05	2,12E-04	0,000304

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 5	5,39E-07	1,15E-05	4,18E-05	3,94E-05	5,41E-05	2,12E-04	0,000304
Posição 6	4,19E-06	9,45E-05	0,000365	0,000376	0,000583	2,75E-03	0,005312
Posição 7	7,82E-07	1,49E-05	4,62E-05	3,33E-05	2,65E-05	5,98E-06	0,000281
Posição 8	7,82E-07	1,49E-05	4,62E-05	3,33E-05	2,65E-05	5,98E-06	0,000281
Posição 9	9,23E-06	1,96E-04	0,000702	0,000655	0,000894	3,54E-03	0,005413
Posição 10	1,01E-06	1,68E-05	4,09E-05	1,49E-05	1,79E-05	2,48E-04	0,000693
Posição 11	1,01E-06	1,68E-05	4,09E-05	1,49E-05	1,79E-05	2,48E-04	0,000693
Posição 12	1,61E-05	0,000317	0,001036	0,00084	0,000928	2,57E-03	0,001646
Posição 13	1,21E-06	1,72E-05	2,78E-05	9,66E-06	5,85E-05	3,59E-04	0,000575
Posição 14	1,21E-06	1,72E-05	2,78E-05	9,66E-06	5,85E-05	3,59E-04	0,000575
Posição 15	2,45E-05	0,000447	0,001298	0,000861	0,000635	2,25E-04	0,003261
Posição 16	1,40E-06	1,62E-05	9,23E-06	3,34E-05	7,77E-05	2,67E-04	8,44E-06
Posição 17	1,40E-06	1,62E-05	9,23E-06	3,34E-05	7,77E-05	2,67E-04	8,44E-06
Posição 18	3,45E-05	0,000575	0,00144	0,000696	0,000112	2,19E-03	0,005519
Posição 19	1,57E-06	1,40E-05	1,17E-05	5,00E-05	6,71E-05	2,29E-05	0,000561
Posição 20	1,57E-06	1,40E-05	1,17E-05	5,00E-05	6,71E-05	2,29E-05	0,000561
Posição 21	4,59E-05	0,00069	0,001431	0,000376	0,000445	3,31E-03	0,003377
Posição 22	1,73E-06	1,08E-05	3,21E-05	5,50E-05	3,04E-05	2,34E-04	0,000685

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	4,59E-05	0,00069	0,001431	0,000376	0,000445	3,31E-03	0,003377

Matriz de residuo com força aplicada no nó 11:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	2,78E-07	6,56E-06	2,66E-05	2,90E-05	4,81E-05	2,45E-04	0,000522
Posição 2	2,78E-07	6,56E-06	2,66E-05	2,90E-05	4,81E-05	2,45E-04	0,000522
Posição 3	1,07E-06	2,52E-05	1,03E-04	0,000113	0,000189	9,71E-04	0,002087
Posição 4	5,39E-07	1,15E-05	4,18E-05	3,94E-05	5,41E-05	2,12E-04	0,000304
Posição 5	5,39E-07	1,15E-05	4,18E-05	3,94E-05	5,41E-05	2,12E-04	0,000304
Posição 6	4,19E-06	9,45E-05	0,000365	0,000376	0,000583	2,75E-03	0,005312
Posição 7	7,82E-07	1,49E-05	4,62E-05	3,33E-05	2,65E-05	5,98E-06	0,000281
Posição 8	7,82E-07	1,49E-05	4,62E-05	3,33E-05	2,65E-05	5,98E-06	0,000281
Posição 9	9,23E-06	1,96E-04	0,000702	0,000655	0,000894	3,54E-03	0,005413
Posição 10	1,01E-06	1,68E-05	4,09E-05	1,49E-05	1,79E-05	2,48E-04	0,000693
Posição 11	1,01E-06	1,68E-05	4,09E-05	1,49E-05	1,79E-05	2,48E-04	0,000693

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 12	1,61E-05	0,000317	0,001036	0,00084	0,000928	2,57E-03	0,001646
Posição 13	1,21E-06	1,72E-05	2,78E-05	9,66E-06	5,85E-05	3,59E-04	0,000575
Posição 14	1,21E-06	1,72E-05	2,78E-05	9,66E-06	5,85E-05	3,59E-04	0,000575
Posição 15	2,45E-05	0,000447	0,001298	0,000861	0,000635	2,25E-04	0,003261
Posição 16	1,40E-06	1,62E-05	9,23E-06	3,34E-05	7,77E-05	2,67E-04	8,44E-06
Posição 17	1,40E-06	1,62E-05	9,23E-06	3,34E-05	7,77E-05	2,67E-04	8,44E-06
Posição 18	3,45E-05	0,000575	0,00144	0,000696	0,000112	2,19E-03	0,005519
Posição 19	1,57E-06	1,40E-05	1,17E-05	5,00E-05	6,71E-05	2,29E-05	0,000561
Posição 20	1,57E-06	1,40E-05	1,17E-05	5,00E-05	6,71E-05	2,29E-05	0,000561
Posição 21	4,59E-05	0,00069	0,001431	0,000376	0,000445	3,31E-03	0,003377
Posição 22	1,73E-06	1,08E-05	3,21E-05	5,50E-05	3,04E-05	2,34E-04	0,000685

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	4,59E-05	0,00069	0,001431	0,000376	0,000445	3,31E-03	0,003377

Matriz de residuo com força aplicada no nó 12:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	8,89E-06	2,48E-04	1,34E-03	3,26E-03	5,00E-03	5,07E-03	0,002479
Posição 2	8,89E-06	2,48E-04	1,34E-03	3,26E-03	5,00E-03	5,07E-03	0,002479
Posição 3	3,40E-05	9,53E-04	5,20E-03	0,012701	0,019617	2,01E-02	0,00992
Posição 4	1,72E-05	4,36E-04	2,12E-03	4,44E-03	5,62E-03	4,38E-03	0,001446
Posição 5	1,72E-05	4,36E-04	2,12E-03	4,44E-03	5,62E-03	4,38E-03	0,001446
Posição 6	1,34E-04	3,57E-03	0,01848	0,04234	0,060638	5,68E-02	0,025248
Posição 7	2,49E-05	5,64E-04	2,34E-03	3,75E-03	2,76E-03	1,24E-04	0,001335
Posição 8	2,49E-05	5,64E-04	2,34E-03	3,75E-03	2,76E-03	1,24E-04	0,001335
Posição 9	2,95E-04	7,39E-03	0,035553	0,073813	0,092938	7,33E-02	0,025727
Posição 10	3,21E-05	6,34E-04	2,07E-03	1,68E-03	1,86E-03	5,13E-03	0,003292
Posição 11	3,21E-05	6,34E-04	2,07E-03	1,68E-03	1,86E-03	5,13E-03	0,003292
Posição 12	5,13E-04	0,011975	0,052444	0,094685	0,096458	5,31E-02	0,007823
Posição 13	3,87E-05	6,49E-04	1,41E-03	1,09E-03	6,08E-03	7,42E-03	0,002731
Posição 14	3,87E-05	6,49E-04	1,41E-03	1,09E-03	6,08E-03	7,42E-03	0,002731
Posição 15	7,83E-04	0,016881	0,065758	0,096985	0,065994	4,66E-03	0,0155
Posição 16	4,48E-05	6,13E-04	4,68E-04	3,77E-03	8,08E-03	5,53E-03	4,01E-05
Posição 17	4,48E-05	6,13E-04	4,68E-04	3,77E-03	8,08E-03	5,53E-03	4,01E-05
Posição 18	1,10E-03	0,021705	0,072932	0,078394	0,011608	4,53E-02	0,026231

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 19	5,02E-05	5,30E-04	5,95E-04	5,64E-03	6,97E-03	4,74E-04	0,002668
Posição 20	5,02E-05	5,30E-04	5,95E-04	5,64E-03	6,97E-03	4,74E-04	0,002668
Posição 21	1,46E-03	0,026071	0,072452	0,042367	0,04622	6,84E-02	0,016049
Posição 22	5,52E-05	4,07E-04	1,63E-03	6,20E-03	3,16E-03	4,83E-03	0,003256

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	1,46E-03	0,026071	0,072452	0,042367	0,04622	6,84E-02	0,016049

Matriz de residuo com força aplicada no nó 13:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	3,36E-07	6,72E-06	1,80E-05	1,87E-05	1,58E-04	3,55E-04	0,000433
Posição 2	3,36E-07	6,72E-06	1,80E-05	1,87E-05	1,58E-04	3,55E-04	0,000433
Posição 3	1,28E-06	2,58E-05	6,97E-05	7,30E-05	0,000618	1,40E-03	0,001731
Posição 4	6,50E-07	1,18E-05	2,84E-05	2,55E-05	1,77E-04	3,06E-04	0,000252
Posição 5	6,50E-07	1,18E-05	2,84E-05	2,55E-05	1,77E-04	3,06E-04	0,000252
Posição 6	5,05E-06	9,68E-05	0,000248	0,000243	0,001911	3,97E-03	0,004406
Posição 7	9,42E-07	1,53E-05	3,13E-05	2,16E-05	8,69E-05	8,64E-06	0,000233
Posição 8	9,42E-07	1,53E-05	3,13E-05	2,16E-05	8,69E-05	8,64E-06	0,000233
Posição 9	1,11E-05	2,00E-04	0,000476	0,000424	0,002928	5,13E-03	0,00449
Posição 10	1,21E-06	1,72E-05	2,78E-05	9,66E-06	5,85E-05	3,59E-04	0,000575
Posição 11	1,21E-06	1,72E-05	2,78E-05	9,66E-06	5,85E-05	3,59E-04	0,000575
Posição 12	1,94E-05	0,000325	0,000703	0,000544	0,003039	3,71E-03	0,001365
Posição 13	1,46E-06	1,76E-05	1,88E-05	6,25E-06	1,92E-04	5,19E-04	0,000477
Posição 14	1,46E-06	1,76E-05	1,88E-05	6,25E-06	1,92E-04	5,19E-04	0,000477
Posição 15	2,96E-05	0,000458	0,000881	0,000557	0,002079	3,26E-04	0,002705
Posição 16	1,69E-06	1,66E-05	6,27E-06	2,16E-05	2,54E-04	3,86E-04	7,00E-06
Posição 17	1,69E-06	1,66E-05	6,27E-06	2,16E-05	2,54E-04	3,86E-04	7,00E-06
Posição 18	4,16E-05	0,000588	0,000977	0,00045	0,000366	3,17E-03	0,004578
Posição 19	1,90E-06	1,44E-05	7,97E-06	3,24E-05	2,20E-04	3,31E-05	0,000466
Posição 20	1,90E-06	1,44E-05	7,97E-06	3,24E-05	2,20E-04	3,31E-05	0,000466
Posição 21	5,53E-05	0,000707	0,000971	0,000243	0,001456	4,78E-03	0,002801
Posição 22	2,08E-06	1,10E-05	2,18E-05	3,56E-05	9,95E-05	3,38E-04	0,000568

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	5,53E-05	0,000707	0,000971	0,000243	0,001456	4,78E-03	0,002801

Matriz de residuo com força aplicada no nó 14:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	3,36E-07	6,72E-06	1,80E-05	1,87E-05	1,58E-04	3,55E-04	0,000433
Posição 2	3,36E-07	6,72E-06	1,80E-05	1,87E-05	1,58E-04	3,55E-04	0,000433
Posição 3	1,28E-06	2,58E-05	6,97E-05	7,30E-05	0,000618	1,40E-03	0,001731
Posição 4	6,50E-07	1,18E-05	2,84E-05	2,55E-05	1,77E-04	3,06E-04	0,000252
Posição 5	6,50E-07	1,18E-05	2,84E-05	2,55E-05	1,77E-04	3,06E-04	0,000252
Posição 6	5,05E-06	9,68E-05	0,000248	0,000243	0,001911	3,97E-03	0,004406
Posição 7	9,42E-07	1,53E-05	3,13E-05	2,16E-05	8,69E-05	8,64E-06	0,000233
Posição 8	9,42E-07	1,53E-05	3,13E-05	2,16E-05	8,69E-05	8,64E-06	0,000233
Posição 9	1,11E-05	2,00E-04	0,000476	0,000424	0,002928	5,13E-03	0,00449
Posição 10	1,21E-06	1,72E-05	2,78E-05	9,66E-06	5,85E-05	3,59E-04	0,000575
Posição 11	1,21E-06	1,72E-05	2,78E-05	9,66E-06	5,85E-05	3,59E-04	0,000575
Posição 12	1,94E-05	0,000325	0,000703	0,000544	0,003039	3,71E-03	0,001365
Posição 13	1,46E-06	1,76E-05	1,88E-05	6,25E-06	1,92E-04	5,19E-04	0,000477
Posição 14	1,46E-06	1,76E-05	1,88E-05	6,25E-06	1,92E-04	5,19E-04	0,000477
Posição 15	2,96E-05	0,000458	0,000881	0,000557	0,002079	3,26E-04	0,002705
Posição 16	1,69E-06	1,66E-05	6,27E-06	2,16E-05	2,54E-04	3,86E-04	7,00E-06
Posição 17	1,69E-06	1,66E-05	6,27E-06	2,16E-05	2,54E-04	3,86E-04	7,00E-06
Posição 18	4,16E-05	0,000588	0,000977	0,00045	0,000366	3,17E-03	0,004578
Posição 19	1,90E-06	1,44E-05	7,97E-06	3,24E-05	2,20E-04	3,31E-05	0,000466
Posição 20	1,90E-06	1,44E-05	7,97E-06	3,24E-05	2,20E-04	3,31E-05	0,000466
Posição 21	5,53E-05	0,000707	0,000971	0,000243	0,001456	4,78E-03	0,002801
Posição 22	2,08E-06	1,10E-05	2,18E-05	3,56E-05	9,95E-05	3,38E-04	0,000568

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	5,53E-05	0,000707	0,000971	0,000243	0,001456	4,78E-03	0,002801

Matriz de residuo com força aplicada no nó 15:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	1,36E-05	3,49E-04	1,69E-03	3,34E-03	3,42E-03	4,45E-04	0,004912
Posição 2	1,36E-05	3,49E-04	1,69E-03	3,34E-03	3,42E-03	4,45E-04	0,004912

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 3	5,20E-05	1,34E-03	6,52E-03	1,30E-02	0,013421	1,76E-03	0,019655
Posição 4	2,63E-05	6,14E-04	2,65E-03	4,55E-03	3,84E-03	3,85E-04	0,002866
Posição 5	2,63E-05	6,14E-04	2,65E-03	4,55E-03	3,84E-03	3,85E-04	0,002866
Posição 6	2,04E-04	5,03E-03	0,023172	0,043368	0,041487	4,99E-03	0,050027
Posição 7	3,81E-05	7,95E-04	2,93E-03	3,84E-03	1,89E-03	1,09E-05	0,002645
Posição 8	3,81E-05	7,95E-04	2,93E-03	3,84E-03	1,89E-03	1,09E-05	0,002645
Posição 9	4,50E-04	1,04E-02	0,044578	0,075605	0,063586	6,44E-03	0,050978
Posição 10	4,91E-05	8,94E-04	2,60E-03	1,72E-03	1,27E-03	4,51E-04	0,006523
Posição 11	4,91E-05	8,94E-04	2,60E-03	1,72E-03	1,27E-03	4,51E-04	0,006523
Posição 12	7,83E-04	0,016881	0,065758	0,096985	0,065994	4,66E-03	0,0155
Posição 13	5,92E-05	9,15E-04	1,76E-03	1,11E-03	4,16E-03	6,52E-04	0,005411
Posição 14	5,92E-05	9,15E-04	1,76E-03	1,11E-03	4,16E-03	6,52E-04	0,005411
Posição 15	1,20E-03	0,023798	0,082451	0,09934	0,045152	4,10E-04	0,030713
Posição 16	6,84E-05	8,64E-04	5,86E-04	3,86E-03	5,53E-03	4,85E-04	7,95E-05
Posição 17	6,84E-05	8,64E-04	5,86E-04	3,86E-03	5,53E-03	4,85E-04	7,95E-05
Posição 18	1,68E-03	0,030598	0,091447	0,080298	0,007942	3,98E-03	0,051976
Posição 19	7,68E-05	7,47E-04	7,46E-04	5,77E-03	4,77E-03	4,16E-05	0,005287
Posição 20	7,68E-05	7,47E-04	7,46E-04	5,77E-03	4,77E-03	4,16E-05	0,005287
Posição 21	2,24E-03	0,036753	0,090845	0,043396	0,031623	6,01E-03	0,0318
Posição 22	8,43E-05	5,74E-04	2,04E-03	6,35E-03	2,16E-03	4,24E-04	0,006452

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	2,24E-03	0,036753	0,090845	0,043396	0,031623	6,01E-03	0,0318

Matriz de residuo com força aplicada no nó 16:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	3,88E-07	6,34E-06	6,00E-06	6,49E-05	2,09E-04	2,64E-04	6,36E-06
Posição 2	3,88E-07	6,34E-06	6,00E-06	6,49E-05	2,09E-04	2,64E-04	6,36E-06
Posição 3	1,48E-06	2,44E-05	2,32E-05	2,53E-04	0,000821	1,05E-03	2,54E-05
Posição 4	7,51E-07	1,11E-05	9,43E-06	8,83E-05	2,35E-04	2,28E-04	3,71E-06
Posição 5	7,51E-07	1,11E-05	9,43E-06	8,83E-05	2,35E-04	2,28E-04	3,71E-06
Posição 6	5,84E-06	9,13E-05	8,24E-05	0,000842	0,002539	2,95E-03	6,48E-05
Posição 7	1,09E-06	1,44E-05	1,04E-05	7,47E-05	1,15E-04	6,43E-06	3,42E-06
Posição 8	1,09E-06	1,44E-05	1,04E-05	7,47E-05	1,15E-04	6,43E-06	3,42E-06
Posição 9	1,29E-05	1,89E-04	0,000159	0,001468	0,003891	3,82E-03	6,60E-05

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 10	1,40E-06	1,62E-05	9,23E-06	3,34E-05	7,77E-05	2,67E-04	8,44E-06
Posição 11	1,40E-06	1,62E-05	9,23E-06	3,34E-05	7,77E-05	2,67E-04	8,44E-06
Posição 12	2,24E-05	0,000306	0,000234	0,001883	0,004038	2,76E-03	2,01E-05
Posição 13	1,69E-06	1,66E-05	6,27E-06	2,16E-05	2,54E-04	3,86E-04	7,00E-06
Posição 14	1,69E-06	1,66E-05	6,27E-06	2,16E-05	2,54E-04	3,86E-04	7,00E-06
Posição 15	3,42E-05	0,000432	0,000293	0,001929	0,002763	2,43E-04	3,98E-05
Posição 16	1,95E-06	1,57E-05	2,08E-06	7,49E-05	3,38E-04	2,88E-04	1,03E-07
Posição 17	1,95E-06	1,57E-05	2,08E-06	7,49E-05	3,38E-04	2,88E-04	1,03E-07
Posição 18	4,81E-05	0,000555	0,000325	0,001559	0,000486	2,36E-03	6,73E-05
Posição 19	2,19E-06	1,36E-05	2,65E-06	1,12E-04	2,92E-04	2,47E-05	6,84E-06
Posição 20	2,19E-06	1,36E-05	2,65E-06	1,12E-04	2,92E-04	2,47E-05	6,84E-06
Posição 21	6,40E-05	0,000667	0,000323	0,000843	0,001935	3,56E-03	4,12E-05
Posição 22	2,41E-06	1,04E-05	7,25E-06	1,23E-04	1,32E-04	2,51E-04	8,35E-06

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 18	4,81E-05	0,000555	0,000325	0,001559	0,000486	2,36E-03	6,73E-05

Matriz de residuo com força aplicada no nó 17:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	3,88E-07	6,34E-06	6,00E-06	6,49E-05	2,09E-04	2,64E-04	6,36E-06
Posição 2	3,88E-07	6,34E-06	6,00E-06	6,49E-05	2,09E-04	2,64E-04	6,36E-06
Posição 3	1,48E-06	2,44E-05	2,32E-05	2,53E-04	0,000821	1,05E-03	2,54E-05
Posição 4	7,51E-07	1,11E-05	9,43E-06	8,83E-05	2,35E-04	2,28E-04	3,71E-06
Posição 5	7,51E-07	1,11E-05	9,43E-06	8,83E-05	2,35E-04	2,28E-04	3,71E-06
Posição 6	5,84E-06	9,13E-05	8,24E-05	0,000842	0,002539	2,95E-03	6,48E-05
Posição 7	1,09E-06	1,44E-05	1,04E-05	7,47E-05	1,15E-04	6,43E-06	3,42E-06
Posição 8	1,09E-06	1,44E-05	1,04E-05	7,47E-05	1,15E-04	6,43E-06	3,42E-06
Posição 9	1,29E-05	1,89E-04	0,000159	0,001468	0,003891	3,82E-03	6,60E-05
Posição 10	1,40E-06	1,62E-05	9,23E-06	3,34E-05	7,77E-05	2,67E-04	8,44E-06
Posição 11	1,40E-06	1,62E-05	9,23E-06	3,34E-05	7,77E-05	2,67E-04	8,44E-06
Posição 12	2,24E-05	0,000306	0,000234	0,001883	0,004038	2,76E-03	2,01E-05
Posição 13	1,69E-06	1,66E-05	6,27E-06	2,16E-05	2,54E-04	3,86E-04	7,00E-06
Posição 14	1,69E-06	1,66E-05	6,27E-06	2,16E-05	2,54E-04	3,86E-04	7,00E-06
Posição 15	3,42E-05	0,000432	0,000293	0,001929	0,002763	2,43E-04	3,98E-05
Posição 16	1,95E-06	1,57E-05	2,08E-06	7,49E-05	3,38E-04	2,88E-04	1,03E-07

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 17	1,95E-06	1,57E-05	2,08E-06	7,49E-05	3,38E-04	2,88E-04	1,03E-07
Posição 18	4,81E-05	0,000555	0,000325	0,001559	0,000486	2,36E-03	6,73E-05
Posição 19	2,19E-06	1,36E-05	2,65E-06	1,12E-04	2,92E-04	2,47E-05	6,84E-06
Posição 20	2,19E-06	1,36E-05	2,65E-06	1,12E-04	2,92E-04	2,47E-05	6,84E-06
Posição 21	6,40E-05	0,000667	0,000323	0,000843	0,001935	3,56E-03	4,12E-05
Posição 22	2,41E-06	1,04E-05	7,25E-06	1,23E-04	1,32E-04	2,51E-04	8,35E-06

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 18	4,81E-05	0,000555	0,000325	0,001559	0,000486	2,36E-03	6,73E-05

Matriz de residuo com força aplicada no nó 18:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	1,91E-05	4,49E-04	1,87E-03	2,70E-03	6,02E-04	4,33E-03	8,31E-03
Posição 2	1,91E-05	4,49E-04	1,87E-03	2,70E-03	6,02E-04	4,33E-03	8,31E-03
Posição 3	7,31E-05	1,73E-03	7,23E-03	1,05E-02	0,002361	1,71E-02	3,33E-02
Posição 4	3,70E-05	7,90E-04	2,94E-03	3,68E-03	6,76E-04	3,74E-03	4,85E-03
Posição 5	3,70E-05	7,90E-04	2,94E-03	3,68E-03	6,76E-04	3,74E-03	4,85E-03
Posição 6	2,87E-04	6,47E-03	2,57E-02	0,035055	0,007298	4,84E-02	8,47E-02
Posição 7	5,36E-05	1,02E-03	3,25E-03	3,11E-03	3,32E-04	1,05E-04	4,48E-03
Posição 8	5,36E-05	1,02E-03	3,25E-03	3,11E-03	3,32E-04	1,05E-04	4,48E-03
Posição 9	6,34E-04	1,34E-02	0,049442	0,061113	0,011185	6,25E-02	8,63E-02
Posição 10	6,90E-05	1,15E-03	2,88E-03	1,39E-03	2,23E-04	4,38E-03	1,10E-02
Posição 11	6,90E-05	1,15E-03	2,88E-03	1,39E-03	2,23E-04	4,38E-03	1,10E-02
Posição 12	1,10E-03	0,021705	0,072932	0,078394	0,011608	4,53E-02	2,62E-02
Posição 13	8,32E-05	1,18E-03	1,95E-03	9,01E-04	7,32E-04	6,33E-03	9,16E-03
Posição 14	8,32E-05	1,18E-03	1,95E-03	9,01E-04	7,32E-04	6,33E-03	9,16E-03
Posição 15	1,68E-03	0,030598	0,091447	0,080298	0,007942	3,98E-03	5,20E-02
Posição 16	9,62E-05	1,11E-03	6,50E-04	3,12E-03	9,72E-04	4,71E-03	1,35E-04
Posição 17	9,62E-05	1,11E-03	6,50E-04	3,12E-03	9,72E-04	4,71E-03	1,35E-04
Posição 18	2,37E-03	0,03934	0,101424	0,064907	0,001397	3,86E-02	8,80E-02
Posição 19	1,08E-04	9,60E-04	8,27E-04	4,67E-03	8,39E-04	4,04E-04	8,95E-03
Posição 20	1,08E-04	9,60E-04	8,27E-04	4,67E-03	8,39E-04	4,04E-04	8,95E-03
Posição 21	3,15E-03	0,047254	0,100757	0,035078	0,005563	5,83E-02	5,38E-02
Posição 22	1,19E-04	7,38E-04	2,26E-03	5,13E-03	3,80E-04	4,12E-03	1,09E-02

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	3,15E-03	0,047254	0,100757	0,035078	0,005563	5,83E-02	5,38E-02

Matriz de residuo com força aplicada no nó 19:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	4,36E-07	5,48E-06	7,63E-06	9,71E-05	1,81E-04	2,26E-05	4,23E-04
Posição 2	4,36E-07	5,48E-06	7,63E-06	9,71E-05	1,81E-04	2,26E-05	4,23E-04
Posição 3	1,67E-06	2,11E-05	2,95E-05	3,78E-04	0,000709	8,96E-05	1,69E-03
Posição 4	8,43E-07	9,64E-06	1,20E-05	1,32E-04	2,03E-04	1,96E-05	2,47E-04
Posição 5	8,43E-07	9,64E-06	1,20E-05	1,32E-04	2,03E-04	1,96E-05	2,47E-04
Posição 6	6,55E-06	7,90E-05	1,05E-04	0,00126	0,002192	2,53E-04	4,31E-03
Posição 7	1,22E-06	1,25E-05	1,33E-05	1,12E-04	9,96E-05	5,51E-07	2,28E-04
Posição 8	1,22E-06	1,25E-05	1,33E-05	1,12E-04	9,96E-05	5,51E-07	2,28E-04
Posição 9	1,44E-05	1,64E-04	0,000202	0,002197	0,003359	3,27E-04	4,39E-03
Posição 10	1,57E-06	1,40E-05	1,17E-05	5,00E-05	6,71E-05	2,29E-05	5,61E-04
Posição 11	1,57E-06	1,40E-05	1,17E-05	5,00E-05	6,71E-05	2,29E-05	5,61E-04
Posição 12	2,51E-05	0,000265	0,000297	0,002818	0,003486	2,37E-04	1,33E-03
Posição 13	1,90E-06	1,44E-05	7,97E-06	3,24E-05	2,20E-04	3,31E-05	4,66E-04
Posição 14	1,90E-06	1,44E-05	7,97E-06	3,24E-05	2,20E-04	3,31E-05	4,66E-04
Posição 15	3,84E-05	0,000373	0,000373	0,002886	0,002385	2,08E-05	2,64E-03
Posição 16	2,19E-06	1,36E-05	2,65E-06	1,12E-04	2,92E-04	2,47E-05	6,84E-06
Posição 17	2,19E-06	1,36E-05	2,65E-06	1,12E-04	2,92E-04	2,47E-05	6,84E-06
Posição 18	5,40E-05	0,00048	0,000414	0,002333	0,00042	2,02E-04	4,47E-03
Posição 19	2,46E-06	1,17E-05	3,37E-06	1,68E-04	2,52E-04	2,11E-06	4,55E-04
Posição 20	2,46E-06	1,17E-05	3,37E-06	1,68E-04	2,52E-04	2,11E-06	4,55E-04
Posição 21	7,18E-05	0,000577	0,000411	0,001261	0,001671	3,05E-04	2,74E-03
Posição 22	2,70E-06	9,01E-06	9,23E-06	1,84E-04	1,14E-04	2,15E-05	5,55E-04

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	7,18E-05	0,000577	0,000411	0,001261	0,001671	3,05E-04	2,74E-03

Matriz de residuo com força aplicada no nó 20:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	4,36E-07	5,48E-06	7,63E-06	9,71E-05	1,81E-04	2,26E-05	4,23E-04
Posição 2	4,36E-07	5,48E-06	7,63E-06	9,71E-05	1,81E-04	2,26E-05	4,23E-04
Posição 3	1,67E-06	2,11E-05	2,95E-05	3,78E-04	0,000709	8,96E-05	1,69E-03
Posição 4	8,43E-07	9,64E-06	1,20E-05	1,32E-04	2,03E-04	1,96E-05	2,47E-04
Posição 5	8,43E-07	9,64E-06	1,20E-05	1,32E-04	2,03E-04	1,96E-05	2,47E-04
Posição 6	6,55E-06	7,90E-05	1,05E-04	0,00126	0,002192	2,53E-04	4,31E-03
Posição 7	1,22E-06	1,25E-05	1,33E-05	1,12E-04	9,96E-05	5,51E-07	2,28E-04
Posição 8	1,22E-06	1,25E-05	1,33E-05	1,12E-04	9,96E-05	5,51E-07	2,28E-04
Posição 9	1,44E-05	1,64E-04	0,000202	0,002197	0,003359	3,27E-04	4,39E-03
Posição 10	1,57E-06	1,40E-05	1,17E-05	5,00E-05	6,71E-05	2,29E-05	5,61E-04
Posição 11	1,57E-06	1,40E-05	1,17E-05	5,00E-05	6,71E-05	2,29E-05	5,61E-04
Posição 12	2,51E-05	0,000265	0,000297	0,002818	0,003486	2,37E-04	1,33E-03
Posição 13	1,90E-06	1,44E-05	7,97E-06	3,24E-05	2,20E-04	3,31E-05	4,66E-04
Posição 14	1,90E-06	1,44E-05	7,97E-06	3,24E-05	2,20E-04	3,31E-05	4,66E-04
Posição 15	3,84E-05	0,000373	0,000373	0,002886	0,002385	2,08E-05	2,64E-03
Posição 16	2,19E-06	1,36E-05	2,65E-06	1,12E-04	2,92E-04	2,47E-05	6,84E-06
Posição 17	2,19E-06	1,36E-05	2,65E-06	1,12E-04	2,92E-04	2,47E-05	6,84E-06
Posição 18	5,40E-05	0,00048	0,000414	0,002333	0,00042	2,02E-04	4,47E-03
Posição 19	2,46E-06	1,17E-05	3,37E-06	1,68E-04	2,52E-04	2,11E-06	4,55E-04
Posição 20	2,46E-06	1,17E-05	3,37E-06	1,68E-04	2,52E-04	2,11E-06	4,55E-04
Posição 21	7,18E-05	0,000577	0,000411	0,001261	0,001671	3,05E-04	2,74E-03
Posição 22	2,70E-06	9,01E-06	9,23E-06	1,84E-04	1,14E-04	2,15E-05	5,55E-04

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	7,18E-05	0,000577	0,000411	0,001261	0,001671	3,05E-04	2,74E-03

Matriz de residuo com força aplicada no nó 21:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	2,54E-05	5,40E-04	1,86E-03	1,46E-03	2,40E-03	6,54E-03	5,09E-03
Posição 2	2,54E-05	5,40E-04	1,86E-03	1,46E-03	2,40E-03	6,54E-03	5,09E-03
Posição 3	9,72E-05	2,08E-03	7,18E-03	5,68E-03	0,0094	2,59E-02	2,04E-02
Posição 4	4,92E-05	9,48E-04	2,92E-03	1,99E-03	2,69E-03	5,65E-03	2,97E-03
Posição 5	4,92E-05	9,48E-04	2,92E-03	1,99E-03	2,69E-03	5,65E-03	2,97E-03
Posição 6	3,82E-04	7,77E-03	2,55E-02	0,018945	0,029056	7,32E-02	5,18E-02

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 7	7,13E-05	1,23E-03	3,23E-03	1,68E-03	1,32E-03	1,59E-04	2,74E-03
Posição 8	7,13E-05	1,23E-03	3,23E-03	1,68E-03	1,32E-03	1,59E-04	2,74E-03
Posição 9	8,42E-04	1,61E-02	0,049116	0,033028	0,044534	9,45E-02	5,28E-02
Posição 10	9,18E-05	1,38E-03	2,86E-03	7,52E-04	8,89E-04	6,62E-03	6,75E-03
Posição 11	9,18E-05	1,38E-03	2,86E-03	7,52E-04	8,89E-04	6,62E-03	6,75E-03
Posição 12	1,46E-03	0,026071	0,072452	0,042367	0,04622	6,84E-02	1,60E-02
Posição 13	1,11E-04	1,41E-03	1,94E-03	4,87E-04	2,91E-03	9,57E-03	5,60E-03
Posição 14	1,11E-04	1,41E-03	1,94E-03	4,87E-04	2,91E-03	9,57E-03	5,60E-03
Posição 15	2,24E-03	0,036753	0,090845	0,043396	0,031623	6,01E-03	3,18E-02
Posição 16	1,28E-04	1,33E-03	6,46E-04	1,69E-03	3,87E-03	7,12E-03	8,23E-05
Posição 17	1,28E-04	1,33E-03	6,46E-04	1,69E-03	3,87E-03	7,12E-03	8,23E-05
Posição 18	3,15E-03	0,047254	0,100757	0,035078	0,005563	5,83E-02	5,38E-02
Posição 19	1,44E-04	1,15E-03	8,22E-04	2,52E-03	3,34E-03	6,10E-04	5,47E-03
Posição 20	1,44E-04	1,15E-03	8,22E-04	2,52E-03	3,34E-03	6,10E-04	5,47E-03
Posição 21	4,19E-03	0,056761	0,100093	0,018958	0,022148	8,82E-02	3,29E-02
Posição 22	1,58E-04	8,86E-04	2,25E-03	2,77E-03	1,51E-03	6,22E-03	6,68E-03

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	4,19E-03	0,056761	0,100093	0,018958	0,022148	8,82E-02	3,29E-02

Matriz de residuo com força aplicada no nó 22:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 1	4,78E-07	4,21E-06	2,09E-05	1,07E-04	8,19E-05	2,31E-04	5,16E-04
Posição 2	4,78E-07	4,21E-06	2,09E-05	1,07E-04	8,19E-05	2,31E-04	5,16E-04
Posição 3	1,83E-06	1,62E-05	8,07E-05	4,16E-04	0,000321	9,13E-04	2,06E-03
Posição 4	9,26E-07	7,41E-06	3,28E-05	1,45E-04	9,20E-05	1,99E-04	3,01E-04
Posição 5	9,26E-07	7,41E-06	3,28E-05	1,45E-04	9,20E-05	1,99E-04	3,01E-04
Posição 6	7,20E-06	6,07E-05	2,87E-04	0,001386	0,000993	2,58E-03	5,25E-03
Posição 7	1,34E-06	9,59E-06	3,63E-05	1,23E-04	4,51E-05	5,62E-06	2,78E-04
Posição 8	1,34E-06	9,59E-06	3,63E-05	1,23E-04	4,51E-05	5,62E-06	2,78E-04
Posição 9	1,59E-05	1,26E-04	0,000552	0,002416	0,001522	3,33E-03	5,35E-03
Posição 10	1,73E-06	1,08E-05	3,21E-05	5,50E-05	3,04E-05	2,34E-04	6,85E-04
Posição 11	1,73E-06	1,08E-05	3,21E-05	5,50E-05	3,04E-05	2,34E-04	6,85E-04
Posição 12	2,76E-05	0,000204	0,000814	0,0031	0,001579	2,41E-03	1,63E-03
Posição 13	2,08E-06	1,10E-05	2,18E-05	3,56E-05	9,95E-05	3,38E-04	5,68E-04

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 14	2,08E-06	1,10E-05	2,18E-05	3,56E-05	9,95E-05	3,38E-04	5,68E-04
Posição 15	4,21E-05	0,000287	0,00102	0,003175	0,00108	2,12E-04	3,23E-03
Posição 16	2,41E-06	1,04E-05	7,25E-06	1,23E-04	1,32E-04	2,51E-04	8,35E-06
Posição 17	2,41E-06	1,04E-05	7,25E-06	1,23E-04	1,32E-04	2,51E-04	8,35E-06
Posição 18	5,93E-05	0,000369	0,001131	0,002566	0,00019	2,06E-03	5,46E-03
Posição 19	2,70E-06	9,01E-06	9,23E-06	1,84E-04	1,14E-04	2,15E-05	5,55E-04
Posição 20	2,70E-06	9,01E-06	9,23E-06	1,84E-04	1,14E-04	2,15E-05	5,55E-04
Posição 21	7,88E-05	0,000443	0,001124	0,001387	0,000757	3,11E-03	3,34E-03
Posição 22	2,97E-06	6,92E-06	2,52E-05	2,03E-04	5,17E-05	2,20E-04	6,78E-04

O vetor de posição que melhor representa essa matriz segundo o método é:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
Posição 21	7,88E-05	0,000443	0,001124	0,001387	0,000757	3,11E-03	3,34E-03

Analogamente ao que foi realizado no sistema discreto com quatro graus de liberdade, o método faz uma análise entre os vetores de posição escolhidos anteriormente, ou seja, analisando os vinte e dois vetores e suas respectivas posições:

Posição do sensor	Força aplicada	Mínimo valor das respostas obtidas
21	1	1,26999871E-05
21	2	1,26999871E-05
21	3	9,71694901E-05
21	4	2,45807700E-05
21	5	2,45807700E-05
21	6	3,82046601E-04
21	7	3,56431645E-05
21	8	3,56431645E-05
21	9	8,42125855E-04
21	10	4,58892727E-05
21	11	4,58892727E-05
21	12	1,46492392E-03
21	13	5,53230656E-05
21	14	5,53230656E-05
21	15	2,23800370E-03
18	16	4,81119366E-05

Posição do sensor	Força aplicada	Mínimo valor das respostas obtidas
18	17	4,81119366E-05
21	18	3,14900705E-03
21	19	7,17821317E-05
21	20	7,17821317E-05
21	21	4,18569532E-03
21	22	7,88293382E-05

Analisando os valores da tabela acima, exclui-se o menor valor de resposta que será o da posição 21 com força aplicada em 1 e 2, pois ambos possuem o mesmo valor.

Sendo assim seguindo o mesmo raciocínio a fim de obter o maior valor das respostas obtidas, tem-se que a posição ótima determinada pelo resíduo para o sistema de viga engastada é a posição com força aplicada no nó 21 com o sensor posicionado no mesmo nó.

Posição do sensor	Força aplicada	Mínimo valor das respostas obtidas
21	1	1,27E-05
21	2	1,27E-05
21	3	9,72E-05
21	4	2,46E-05
21	5	2,46E-05
21	6	3,82E-04
21	7	3,56E-05
21	8	3,56E-05
21	9	8,42E-04
21	10	4,59E-05
21	11	4,59E-05
21	12	1,46E-03
21	13	5,53E-05
21	14	5,53E-05
21	15	2,24E-03
18	16	4,81E-05
18	17	4,81E-05
21	18	3,15E-03
21	19	7,18E-05
21	20	7,18E-05
21	21	4,19E-03
21	22	7,88E-05

4.2.5 Carta de Pareto

Da mesma maneira que foi efetuado para o sistema discreto, o método Carta de Pareto para o sistema de viga engastada obteve um gráfico para força aplicada em cada nó, gerando um total de 22 gráficos. Porém para o método no presente trabalho a resposta será representada apenas com a força aplicada no nó 21, a qual foi a resposta obtida como ótima para o método de Resíduo, sendo assim o sinal (rms) de cada posição através da resposta ao impulso obtido foi:

Localização do sensor	Sinal RMS
Nó 1	0.0001
Nó 2	0.0005
Nó 3	0.0010
Nó 4	0.0017
Nó 5	0.0025
Nó 6	0.0034
Nó 7	0.0045
Nó 8	0.0056
Nó 9	0.0068
Nó 10	0.0081
Nó 11	0.0095
Nó 12	0.0109
Nó 13	0.0124
Nó 14	0.0139
Nó 15	0.0155
Nó 16	0.0171
Nó 17	0.0188
Nó 18	0.0205
Nó 19	0.0222
Nó 20	0.0240
Nó 21	0.0257
Nó 22	0.0275

A resposta do sistema seguindo o raciocínio da metodologia da Carta de Pareto deve ser realizada na forma de que a soma das percentagens dos pontos escolhidos cheguem a um mínimo de 80%, já que trata-se de um método estatístico, sendo assim os resultados obtidos foram:

Para força aplicada no nó 21:

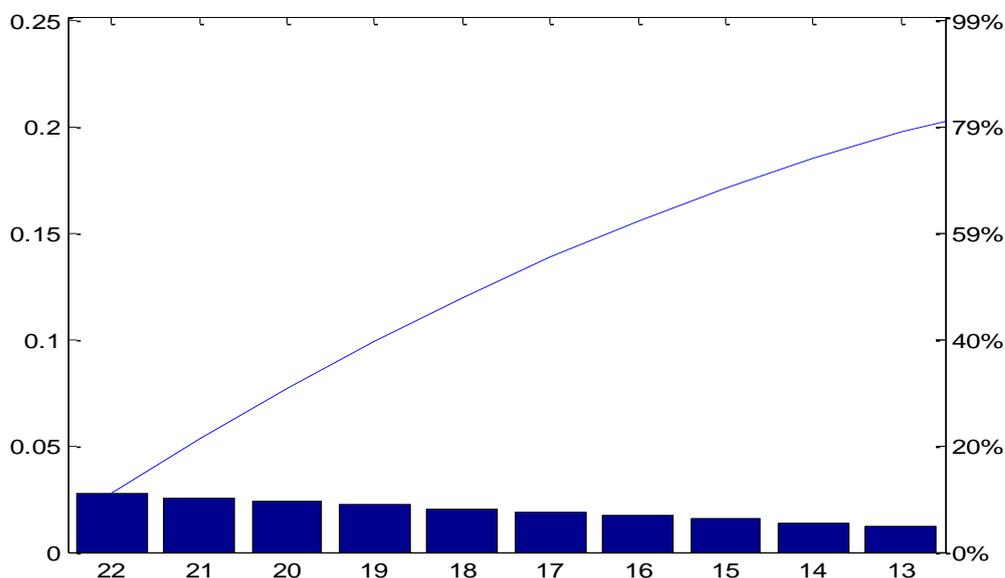


Figura 15 - Representação da estimativa para força aplicada no nó 21
Fonte: Autoria própria.

Tem-se que para obter 80% do sinal com a força aplicada no nó 21, deve-se utilizar os sensores nos nós 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 22.

4.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Fazendo uma síntese dos resultados obtidos pela aplicação dos métodos Fator de Participação, Índice da Matriz Grammiana, Resíduo e Carta de Pareto para cada caso aplicado temos:

4.3.1 CASO 1: SISTEMA DISCRETO

Sistema Discreto	Posição ótima para a força aplicada	Posição ótima para o sensor
Fator de participação	-	2
Índice da Matriz Grammiana	-	1
Resíduo	3	1
Carta de Pareto	1	1, 2 e 3
	2	2, 3 e 4
	3	2, 3 e 4
	4	2, 3 e 4

4.3.2 CASO 2: SISTEMA DE VIGA ENGASTADA

Sistema Contínuo	Posição ótima para a força aplicada	Posição ótima para o sensor
Fator de participação	-	22
Índice da Matriz Grammiana	-	22
Resíduo	21	21
Carta de Pareto	21	13 ao 22

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentados quatro métodos para o posicionamento ótimo de sensores em ensaio de vibração os quais foram estudados e aplicados em dois casos sendo eles: um sistema discreto com quatro graus de liberdade e um sistema de viga engastada. Os métodos foram implementados através de códigos no *software* Matlab para posterior análise.

Pela aplicação dos métodos e com base nas respostas obtidas, pode-se concluir que os métodos diferem bastante entre si, desde o modo como são formulados, até como as respostas são determinadas. Basicamente, cada método mostra uma resposta com a melhor posição em que o sensor deve ser colocado para que se obtenha o máximo e os mais importantes valores modais de um sistema.

Para tanto, observou-se que alguns métodos são mais eficientes que outros. Por exemplo, o método de 'Fator de Participação' para o sistema discreto se resume a analisar os valores obtidos em cada posição a partir de uma força aplicada, porém não leva em conta o corpo em que essa força foi aplicada, como é o caso do método de 'Resíduo', que além de observar as posições em que o sensor pode ser colocado, também analisa a posição em que a força foi aplicada, e assim por operações iterativas escolhe a melhor posição do sensor para o sistema. Porém, como ficou claro na aplicação da viga engastada, a desvantagem do método de 'Resíduo' está no fato de que ele faz a seleção final da melhor posição através da exclusão das posições com os mínimos valores de resposta e assim é possível que exclua mutuamente uma posição candidata que poderia ser ótima. Sendo assim a determinação da posição ideal para a viga deixa dúvidas, pois excluiu-se a posição 21 na primeira iteração de exclusão, a qual era posição candidata para a maioria dos nós, e por fim sobrou apenas a posição 18 que automaticamente ficou definida como a melhor posição.

Assim, como o 'Fator de Participação', o método do 'Índice da Matriz Grammiana' também não leva em conta o corpo onde a força foi aplicada, analisando apenas as posições candidatas para o sensor e, portanto não se pode dizer que é um método efetivo para analisar com êxito as posições ótimas para sensores.

Através do método da 'Carta de Pareto' é possível fazer análises estatísticas sobre quais posições são capazes de obter os melhores valores modais do sistema. Porém numericamente falando este método não traz muitas conclusões para o fim deste trabalho, pois não determina uma posição específica que seja a ideal, e sim faz uma soma de quais posições resultariam em certa porcentagem mínima de obtenção de valores. Neste trabalho a aplicação desse método resultou na necessidade de três sensores para a obtenção de 80% dos modos do sistema, o que se torna inválido para o fim deste trabalho, pois foi determinado o uso de apenas um sensor para o ensaio.

Portanto para a análise mostrada neste trabalho, é válido dizer que o método de 'Resíduo' é mais completo e gera informações mais concretas do que qualquer outro. Para uma análise que provavelmente seria mais informativa do que os métodos vistos singularmente, e para possíveis trabalhos futuros, seria interessante aliar dois dos métodos fazendo com que se complementem, como no caso do 'Resíduo' e do 'Pareto' que poderiam ser aplicados levando em conta as vantagens de cada um, sendo que o 'Resíduo' observa as posições em que o sensor pode ser colocado, juntamente com a posição em que a força foi aplicada e o 'Pareto' analisa quais posições resultariam em certa porcentagem mínima de obtenção de valores. Assim, aliando dois métodos, nenhuma posição ia se desfavorecer por falha de um deles.

REFERÊNCIAS

ALLEMANG R. J.; BROWN D. L. **A correlation coefficient for modal vector analysis**. Orlando, Florida (1982)

BALACHANDRAN, Balakumar; MAGRAB, Edward B. **Vibrações mecânicas**. Tradução da segunda edição, editora Cengage Learning, 2009.

BATHE, J.; WILSON, E. L. **Numerical methods in finite element analysis**. EnglewoodCliffs: Prentice-Hall, 1976. 528p.

BUENO, Douglas D. **Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos**. Tese de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira – SP, 2007.

BUENO, Douglas D.; MARQUI, Clayton R. **Identificação de sistemas via funções ortogonais**. Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira –SP, 2006.

BORGES, Adailton Silva. **Análise modal baseada apenas na resposta**. Tese de mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2006.

CABRAL, Eduardo Lobo Lustosa. **Controlabilidade e Observabilidade**. Engenheiro mecânico pela Universidade de São Paulo – USP. Tese de mestrado, Instituto de Pesquisas Energéticas e nucleares 1985.

CAMPOS, Nivaldo Benedito Ferreira. **Ajuste de modelos numéricos usando funções de resposta em frequência**. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2002. Tese de mestrado, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2012.

CASTRO, A. V. **Comparação entre modelos numéricos e experimentais em análise dinâmica de placas**. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 1996.

COPETTI, Rosemaira Dalcin. **Sistemas concentrados e distribuídos através da análise modal adjunta**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre 2002.

DEMETRIOU, M.A. **Integrated actuator-sensor placement and hybrid controller design of flexible structures under worst case spatiotemporal disturbance variations**. Journal of intelligent material systems and structures, Vol. 15, p. 901-921, 2004.

GAWRONSKI, W. (1997) **Actuator and sensor placement for structural testing and control**. Journal of Sound and Vibration, vol. 208, no. 1, pp. 101-109.

GAWRONSKI, W. **Dynamics and control of structures: a modal approach**. Springer Verlag, 1. Ed. New York, 1998.

LEME, Leandro Marinho Marques. **Estudo de técnicas de análise modal experimental no domínio do tempo e da frequência**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2014.

LEMLER, Kaci J., SEMKE William H. **Application of modal testing and analysis techniques on a sUAV (Small Unmanned Aerial Vehicle)**. University of North Dakota, 2012.

LEMLER, K. J.; SEMKE, W. H. **Structural Analysis of the Effects of Wing Payload Pods on Small UAS**. In 30th International Modal Analysis Conference (IMAC), Jacksonville, Florida, February 2012.

LI, Z. N. TANG, J. **Optimal sensor locations for structural vibration measurements**. University of Hong Kong, Kowloon, Hong Kong, 2004.

MEIRELES, José Filipe B. **Análise dinâmica de estruturas por modelos de elementos finitos identificados experimentalmente**. Tese de doutorado, Universidade do Minho, Guimarães 2007.

MENDES, Paulo. **Análise dinâmica de estruturas**. Tese de doutorado, Universidade do Porto, Lisboa 2008.

MIRZA, M.L.; NIEKERK, J.L.V. **Optimal Actuator Placement of Active Vibration Control with Known Disturbances**. JOURNAL OF VIBRATION AND CONTROL, 5: 709-724, 1999.

MOHEIMAI, S.; RYALL, T. (1999) **Considerations in placement of piezoceramic actuators that are used in structural vibration control**. Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA. pp. 1118-1123.

MORACO, Anna Giuglia M. **Utilização de fatores de participação estendidos na detecção de flutuações de tensão em sistemas com geração síncrona distribuída**. Universidade de São Paulo, Escola Engenharia de São Carlos, 2011.

PARETO, Vilfredo (1848-1923). **Bibliografia**. Disponível em:
< <http://iscsp.utl.pt/~lbatalha/ICS/Pareto> >. Acesso em: 1 jun. 2015, 20:00.

PAPADIMITRIOU, Costas. **Pareto optimal sensor locations for structural identification**. University of Thessaly.Volos, Grece 2004.

PAPATHEODOROU, M.; TAYLOR, C.A.; LIEVEN, N.A.J. **Optimal sensor locations for dynamic verification**. Structural dynamics – eurodyn, p. 587-592, 1999.

PRAZZO, Carlos Eduardo. **Análise modal de uma estrutura do tipo viga utilizando materiais piezelétricos (PVDF) como sensores**. Tese de mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2011.

PALMA, Paulo Henrique Tozoni. **Identificação Experimental e Controle Ativo de Vibrações aplicadas em Estruturas Inteligentes**. Tese de mestrado, Universidade Estadual Paulista. Ilha solteira – SP, 2007.

PÉREZ-ARRIAGA I. J.; VERGHESE G. C.; SCHWEPPE F. **Selective modal analysys with applications to electric power systems, part i: heuristic**

introduction. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, VOL. PAS-101, September 1982, pp. 3117-3125.

RAO, Singiresu. **Vibrações mecânicas.** Quarta edição, editora Pearson Prentice Hall, 2008.

SOEIRO, Newton Sure. **Curso de fundamentos de vibrações e balanceamento de rotores.** Belém, Pará, 2008

THOMSON, William T.; DAHLEH, M. D. **Theory of Vibration with Applications.** Fifth Edition, Prentice Hall, 1998.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method.** 3. ed. London: McGraw-Hill, 1985.