

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

JEFERSON WILIAN DOSSA FERNANDES

**DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMA PARA SIMULAÇÃO DE
ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COM FRONTEIRA MÓVEL**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2014



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL
JEFERSON WILIAN DOSSA FERNANDES



DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMA PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COM FRONTEIRA MÓVEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Civil do Campus Pato Branco da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

Coorientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

PATO BRANCO

2014



TERMO DE APROVAÇÃO

DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMA PARA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COM FRONTEIRA MÓVEL

JEFERSON WILIAN DOSSA FERNANDES

Aos 13 dias do mês de fevereiro do ano de 2014, às 13h15min, na Sala de Treinamento da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, este trabalho de conclusão de curso foi julgado e, após arguição pelos membros da Comissão Examinadora abaixo identificados, foi aprovado como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, conforme Ata de Defesa Pública nº 16-TCC/2014.

Orientador: Prof. Dr. RODOLFO ANDRÉ K. SANCHES (DACOC/UTFPR-PB)

Coorientador: Prof. Dr. ROGÉRIO CARRAZEDO (DACOC/UTFPR-PB)

Membro 1 da Banca: Prof. Dr. FRANCISCO AUGUSTO A. GOMES (DAMEC/UTFPR-PB)

Membro 2 da Banca: Prof. Msc. MARCIO TADAYUKI NAKAURA (DAMEC/UTFPR-PB)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, aos meus pais e irmãos, pelo suporte emocional recebido ao longo destes cinco anos e, principalmente, na reta final que incluiu o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus professores, pelo empenho e dedicação com o ensino e sem os quais não teria chegado até aqui.

Especialmente ao meu orientador, Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches, pelo exemplo de comprometimento e profissionalismo, pela motivação e incentivo depositados, pela incrível atenção em me auxiliar sempre que preciso e por ter confiado em mim para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de aula, que tornaram o sofrimento menos penoso durante estes últimos cinco anos.

Em especial, gostaria de agradecer às colegas Fabiana Grando e Naiá Mendes Maccarini, pelos momentos de felicidade e de frustração compartilhados e com as quais pude contar com a amizade durante estes últimos cinco anos.

Às colegas Cristiane Zuffo da Silva e Patrícia Tonon, pela amizade e companheirismo nas tardes em que este trabalho foi desenvolvido.

Por fim, aos amigos integrantes do Coral Contraponto (UTFPR-PB) pelos fins de tarde mais alegres e descontraídos da minha graduação.

*“Nobody said it was easy
No one ever said it would be this hard
I’m going back to the start”*

(CHAMPION, W.; BUCKLAND, J.; BERRYMAN, G.; MARTIN, C.;
The Scientist, Coldplay)

Ninguém disse que era fácil
Ninguém jamais disse que seria tão difícil assim
Estou voltando ao início
(CHAMPION, W.; BUCKLAND, J.; BERRYMAN, G.; MARTIN, C.;
The Scientist, Coldplay)

RESUMO

FERNANDES, Jeferson Wilian Dossa. Desenvolvimento de programa para simulação de escoamentos incompressíveis com fronteira móvel. 65 folhas. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil) Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco. 2014.

Este trabalho consiste no desenvolvimento de um código computacional para análise de escoamentos incompressíveis com contorno móvel baseado no Método dos Elementos Finitos. Tais problemas estão presentes na engenharia de diversas formas. Como exemplo, é possível citar escoamentos com superfície livres e problemas de interação fluido-estrutura que, no entanto, não apresentam solução analítica satisfatória e ainda apresentam vários desafios à simulação numérica. Diante disso, nas últimas décadas métodos aproximados, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sido largamente estudados nesse contexto. O programa desenvolvido neste trabalho emprega integração temporal implícita e elementos finitos estáveis de aproximação quadrática para a velocidade e linear para a pressão. As equações governantes da mecânica dos fluidos são descritas na forma Lagrangeana-Euleriana arbitrária (ALE) o que possibilita a movimentação da malha para acompanhar o movimento do contorno. Por fim, o programa é testado por meio de exemplos numéricos clássicos que são comparados com resultados da literatura e apresenta-se também exemplo de solução de problema transiente com contorno móvel.

Palavras-chave: Escoamentos incompressíveis. Mecânica dos fluidos computacional. Método dos elementos finitos. Contornos móveis.

ABSTRACT

FERNANDES, Jeferson Wilian Dossa. Program development for simulation of incompressible flows with moving boundary. 65 f.. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil) Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco. 2014.

In this work we develop a computational code for incompressible flows with moving boundaries based on the finite element method. Such problems are found in engineering in several ways. As example one may cite the free surface flows and the fluid-structure problems. However there is no satisfactory analytical solution and even numerical solutions are challenging. In this sense, in the last decades, approximate methods, such as the finite element method, have been widely employed in this context. In our code we employ implicit temporal integration and mixed stable finite elements with linear shape functions for pressure and quadratic for velocities. The fluid dynamics governing equations are described in the arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) way, enabling mesh moving to accommodate the boundary movement. Finally, the program is tested by numerical classical examples which are compared to the literature and we also present one example of transient moving boundary problem.

Keywords: Incompressible flows. Computational fluid mechanics. Finite element method. Moving boundary.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Malha de elementos finitos	15
Figura 2 - Classificação dos escoamentos segundo a Mecânica dos Fluidos	24
Figura 3 - Regimes de escoamento	26
Figura 4 - Cinemática da descrição ALE.....	28
Figura 5 - Algoritmo de integração temporal	38
Figura 6 - Elemento finito (a) quadrangular e (b) isoparamétrico.....	39
Figura 7 - Elementos finitos que atendem à condição LBB	40
Figura 8 - Elemento finito utilizado (a) para pressão (b) para velocidade	41
Figura 9 - Condições de contorno do problema da cavidade quadrada.....	42
Figura 10 - Malha utilizada para a simulação do problema da cavidade quadrada.....	43
Figura 11 - Escoamento de Stokes	44
Figura 12 - Resultados obtidos para o escoamento de Stokes.....	44
Figura 13 - Distribuição de velocidade na seção vertical central para o escoamento de Stokes	45
Figura 14 - Escoamento $Re=100$	45
Figura 15 - Resultados obtidos para $Re=100$	46
Figura 16 - Distribuição de velocidade na seção vertical central para $Re=100$	46
Figura 17 - Malha refinada	47
Figura 18 - Resultados obtidos para $Re=100$ com a malha refinada.....	47
Figura 19 - Comparação entre a distribuição de velocidade na seção vertical central para $Re=100$	48
Figura 20 - Escoamentos com $Re=400$	48
Figura 21 - Resultados para $Re=400$	49
Figura 22 - Distribuição de velocidade na seção vertical central para $Re=400$	49
Figura 23 - Resultados obtidos para $Re=400$ com a malha refinada.....	50
Figura 24 - Comparação entre a distribuição de velocidade na seção vertical central para $Re=400$	50
Figura 25 - Geometria e condições de contorno para o canal com degrau a montante	51
Figura 26 - Malha utilizada para a simulação do canal com degrau a montante.....	52
Figura 27 - Malha de elementos finitos utilizada por Ciarlet e Lions (2003)	52
Figura 28 - Escoamento com $Re=50$	53

Figura 29 - Resultados obtidos para $Re=50$	53
Figura 30 - escoamento com $Re=150$	54
Figura 31 - Resultados obtidos para $Re=150$	54
Figura 32 - Condições de contorno do problema da barragem (vista lateral)	55
Figura 33 - Malha de elementos finitos utilizada para o problema da barragem	56
Figura 34 - Instante de tempo $t = 2,0$ s	57
Figura 35 - Instante de tempo $t = 4,0$ s	58
Figura 36 - Instante de tempo $t = 6,0$ s	59

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Minúsculas

c - velocidade do som no fluido

g_i - aceleração da gravidade na direção i

k - condutividade térmica

p - pressão

t - tempo

u, v, w - velocidades do escoamento nas respectivas direções x, y e z

x, y, z - eixos de coordenadas cartesianas

\mathbf{u} - vetor de velocidades

$\dot{\mathbf{u}}$ - vetor de aceleração

u_∞ - velocidade máxima do escoamento

z - velocidade de movimentação da malha

\mathbf{z} - vetor de velocidades da malha

Letras Romanas Maiúsculas

E - energia específica

L - comprimento característico

M - número de Mach

Q - função ponderadora para a variável pressão

Re - número de Reynolds

T - temperatura absoluta

W - função ponderadora para a variável velocidade

\mathbf{Q} - matriz de pressão

\mathbf{M} - matriz de massa

$\mathbf{C}(\mathbf{u})$ - matriz de convecção

\mathbf{K} - matriz de difusão

\mathbf{P} - vetor de pressões nodais

\mathbf{F} - vetor de forças

Letras Gregas Minúsculas

α - coeficientes das funções de interpolação ou funções de forma

ϕ_i - função de forma para a variável pressão, no respectivo nó i

ψ_i - função de forma para a variável velocidade, no respectivo nó i

μ - viscosidade dinâmica de um fluido

ν - viscosidade cinemática de um fluido

ρ - densidade do fluido

τ_{ij} - tensão de cisalhamento no plano ij

Letras Gregas Maiúsculas

Γ - contorno ou fronteira do problema

Γ_e - contorno ou fronteira de um elemento finito

Y - componentes das tensões na fronteira do problema

Ω - domínio de integração do problema

Ω_e - domínio de integração de um elemento

Φ - vetor das funções de forma da variável pressão

Ψ - vetor das funções de forma da variável velocidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	APRESENTAÇÃO DO TEXTO	12
1.2	ESTADO DA ARTE	13
1.3	OBJETIVOS	17
1.3.1	Objetivos Específicos	17
1.4	METODOLOGIA	18
1.5	JUSTIFICATIVA	18
2	MECÂNICA DOS FLUIDOS	20
2.1	EQUAÇÕES GOVERNANTES DA MECÂNICA DOS FLUIDOS	20
2.1.1	A Conservação da Massa	20
2.1.2	Segunda Lei de Newton	21
2.1.3	A Primeira Lei da Termodinâmica	22
2.1.4	Notação Indicial	23
2.2	CLASSIFICAÇÃO DOS ESCOAMENTOS	24
2.2.1	Classificação quanto à viscosidade	24
2.2.2	Classificação quanto à turbulência	25
2.2.3	Classificação quanto à compressibilidade	26
2.3	ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL	27
2.4	DESCRIÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (ALE)	28
3	FORMULAÇÃO NUMÉRICA	30
3.1	INTEGRAÇÃO NO TEMPO	35
3.1.1	Método de Adams-Bashforth ou Regra do Trapézio	36
3.2	ELEMENTO FINITO	38
4	RESULTADOS	42
4.1	CAVIDADE QUADRADA	42
4.2	CANAL COM DEGRAU A MONTANTE	51
4.3	BARRAGEM	55
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
6	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo escoamento de fluidos estão presentes nas mais diversas áreas da engenharia. Na engenharia civil pode-se destacar o vento atuando sobre estruturas, escoamento de água interagindo com barragens e estruturas *offshore*, escoamentos em canais e vertedores, e também escoamentos em meios porosos, tal como o solo. Nota-se que grande parte dos problemas de engenharia civil trata-se de escoamentos de baixo número de *Mach*, sendo, portanto, considerados incompressíveis.

Os escoamentos incompressíveis são aqueles onde não há variação significativa na densidade do fluido ao longo do escoamento, ou ainda, para gases, os quais o número de *Mach* é menor do que 0,3 (POTTER e WIGGERT, 2009). Tomando o ar à pressão atmosférica, ao nível do mar e temperatura ambiente, este intervalo compreende escoamentos com velocidades da ordem de até 370 km/h.

Contudo, a grande maioria dos problemas pertinentes à engenharia não possuem solução analítica satisfatória, pois estas demandam de simplificações exageradas, que acabam por refletir em resultados pouco confiáveis ou de baixa aplicabilidade, além de serem inviáveis quando se possui um domínio de alta complexidade. Por outro lado, análises experimentais também são muito dispendiosas, demandam espaço e possuem aplicação limitada ao tipo de problema e geometria simulados. Com o amplo desenvolvimento das técnicas computacionais, além do aumento do desempenho dos processadores nas últimas décadas, a simulação numérica ganha destaque por apresentar vantagens financeiras aliadas a resultados de alta confiabilidade.

Este trabalho consiste no desenvolvimento de um programa que possibilite a simulação de problemas envolvendo escoamentos incompressíveis, viscosos e de fronteira móvel, ou seja, problemas dinâmicos em mecânica dos fluidos onde o domínio de análise se movimenta ou se deforma.

1.1 APRESENTAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho está dividido em 5 capítulos.

No primeiro capítulo, o tema e a situação problema são apresentados, através de uma breve revisão sobre o *Estado da arte* no âmbito da mecânica dos fluidos computacional. Além

disso, são delimitados os objetivos do trabalho, e, com base no Estado da Arte, os mesmos são justificados.

O capítulo 2, por sua vez, traz um breve resumo sobre conceitos inerentes à Mecânica dos Fluidos, necessários ao desenvolvimento deste trabalho, incluindo definições, classificações dos tipos de escoamentos e a apresentação das equações governantes do movimento dos fluidos.

No capítulo 3, aborda-se matematicamente o problema incompressível no âmbito do Método dos Elementos Finitos (MEF). Inclui-se ainda um breve resumo sobre a técnica de elementos finitos, além de explicitar o processo matemático utilizado para a obtenção da formulação numérica.

O capítulo 4 traz os resultados obtidos, os quais são comparados com resultados apresentados na literatura.

Finalmente, no capítulo 5 são feitas as considerações finais sobre o trabalho, que incluem uma análise geral dos resultados obtidos e limitações encontradas, além de sugestões para trabalhos futuros.

1.2 ESTADO DA ARTE

O estudo de problemas mecânicos de engenharia costuma ser realizado de duas maneiras: através de análise experimental, em túneis de vento, por exemplo, ou através de simulação computacional. Esta última tem se desenvolvido rapidamente, principalmente depois do grande avanço ocorrido na informática nas últimas décadas, sobretudo no que diz respeito à velocidade de processamento, além de apresentar grandes vantagens econômicas em relação à análise experimental (SANCHES, 2011).

No âmbito dos problemas de mecânica dos fluidos, os métodos de diferenças finitas e de volumes finitos são amplamente utilizados por não apresentarem dificuldades ao se resolver equações de convecção (MALISKA, 1995). Contudo, apesar de ainda não ser o mais utilizado para esse tipo de simulação, o método dos elementos finitos vem ganhando espaço desde meados da década de 1970 (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000b).

1.2.1- O método dos elementos finitos e a mecânica dos fluidos

A maioria dos problemas de engenharia é descrito por equações diferenciais ordinárias (EDO) ou equações diferenciais parciais (EDP). Para ambos os casos, a obtenção

da solução exata, quando possível, pode ser de grande complexidade, de modo que a aplicação de métodos aproximados se torna mais vantajosa na maioria das vezes.

A resolução numérica de problemas pode acontecer de duas formas. A primeira delas é pela resolução direta das equações diferenciais, ordinárias ou parciais, que regem o problema, que se denomina “forma forte”. Este método de resolução exige que as soluções sejam contínuas e diferenciáveis até, no mínimo, a mesma ordem da equação diferencial que descreve o problema. Nesse sentido, a resolução de problemas através da sua forma forte acaba se mostrando dificultosa em muitos casos, especialmente na aplicação das condições de contorno (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000a).

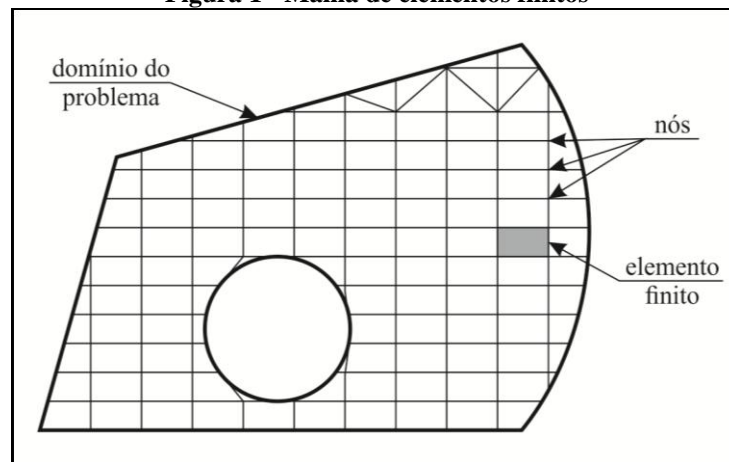
O segundo método é através da utilização de métodos variacionais, como o Método de Rayleigh-Ritz ou o Método de Galerkin, por exemplo, que aproximam as equações diferenciais por relações integrais, as quais passam a possuir menor complexidade para a resolução através de métodos numéricos. Esta abordagem, por sua vez, é conhecida como “forma fraca” (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000a).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) trata-se de um método numérico que oferece uma solução aproximada para problemas físicos descritos por equações diferenciais parciais, sendo muito aplicável a situações reais por apresentar vantagens em relação a outros métodos, principalmente no que concerne a complexidades quanto à geometria ou às condições de contorno por possuir maior ordem de precisão da discretização espacial (REDDY, 2006).

O MEF é geralmente baseado no Método de Rayleigh-Ritz ou em métodos de resíduos ponderados e propõe-se em subdividir o domínio de integração do problema (meio contínuo) em um número finito de pequenas regiões, denominadas “elementos finitos” (meio discreto). Ao conjunto de elementos finitos, dá-se o nome de “malha” e aos pontos de cada elemento empregados para aproximar a solução, o nome de “nós”, como pode ser visto mais detalhadamente na figura 1 (ASSAN, 2003).

A utilização de algoritmos baseados no MEF na forma clássica requer a aplicação de métodos implícitos e explícitos para a discretização das equações governantes no tempo, seguidas da aplicação do método dos resíduos ponderados através do processo de Galerkin ou de suas variações para discretização espacial.

Figura 1 - Malha de elementos finitos



Fonte: Adaptado de ASSAN (2003).

Em problemas de dinâmica dos fluidos com convecção dominante, há ocorrência de variações espúrias nos resultados decorrentes da aplicação do método clássico de Galerkin (Bubnov-Galerkin). Isso ocorre principalmente para problemas cujo número de Reynolds, ou mais especificamente para elementos finitos número de Peclet possuir valor elevado, gerando instabilidade devido às características hiperbólicas dos termos convectivos serem dominantes. Na tentativa de reduzir as variações espúrias geradas no processo, algumas alterações foram aplicadas ao método de Galerkin, de modo a adicionar uma difusividade artificial a fim de reduzir tais variações espúrias (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000b; TEIXEIRA, 2001; CHUNG, 2002; STRANG e FIX, 2008).

Uma das alterações propostas foi o emprego de funções ponderadoras de maior ordem do que as funções de interpolação, o GLS (Galerkin/Least-Squares), entre outros (TEIXEIRA, 1996). Além disso, há também o processo *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin* – SUPG, proposto por Brooks e Hughes (1982), que baseia-se na utilização do processo de Petrov-Galerkin, com o emprego de funções ponderadoras com o propósito de se adicionar difusividade na direção das linhas de corrente.

Existe ainda a possibilidade da aplicação do Método de Galerkin Descontínuo (DG), que reduz as variações espúrias em relação ao método clássico, especialmente quando aplicadas funções de forma de baixa ordem. Porém o DG possui a desvantagem de não ser diretamente aplicado às equações não-lineares, requerendo o emprego de fluxos numéricos e do aumento dos graus de liberdade, acarretando no aumento do custo computacional (ODEN et al., 1998; DEVLOO e FORTI, 2005; CALLE et al., 2005).

Neste trabalho, não será abordada a aplicação do Método de Galerkin Descontínuo, optando-se pela utilização do processo SUPG para a redução das variações espúrias nos problemas com número de Reynolds mais elevados.

1.2.2 Integração temporal

Outro ponto importante para a convergência da solução numérica é a escolha de um algoritmo de integração temporal adequado, podendo ser um método explícito, semi-implícito ou implícito. Os métodos explícitos apresentam vantagens quando da aplicação em simulações de escoamentos compressíveis ou com elevados números de Reynolds, por reduzirem consideravelmente os esforços computacionais. Os métodos semi-implícitos mostram-se vantajosos para a aplicação em simulações de escoamentos incompressíveis ou quase incompressíveis. Por fim, os métodos implícitos apresentam vantagens para a simulação de escoamentos incompressíveis ou com menor valor para o número de Reynolds, o que torna o problema com viscosidade dominante (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000b).

Nota-se que os métodos explícitos são condicionalmente estáveis, demandando passos de tempo menores, enquanto a estabilidade dos métodos implícitos não está diretamente associada ao passo de tempo adotado (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000b; TEIXEIRA, 2001; CHUNG, 2002).

1.2.3 Simulação de Escoamentos incompressíveis

Ao estudar problemas incompressíveis de dinâmica dos fluidos, Reddy e Garling (2000) consideram dois métodos diferentes para a análise das equações governantes pelo Método dos Elementos Finitos. A primeira delas é uma formulação onde as formas fracas das equações governantes são utilizadas para a determinação do equacionamento, utilizando funções aproximadoras diferentes para as variáveis do problema: pressão e velocidade. Essa abordagem é também chamada de modelo velocidade-pressão ou ainda, de modelo misto. Tal denominação se deve ao fato de que tanto as variáveis de velocidade quanto as de pressão ficam contidas em uma única formulação.

O segundo método de análise baseia-se na utilização da equação da continuidade como uma relação entre as componentes da velocidade, satisfeita através dos métodos de mínimos quadrados. Esse método consiste na inclusão de tal restrição na formulação e é

conhecido como método da função de penalidade, assim chamado por conter na formulação um parâmetro de penalidade que acaba por eliminar do cálculo as variáveis de pressão.

Quanto ao elemento finito a ser utilizado na análise, existem restrições de ordem matemática quanto à sua escolha. A condição de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) deve ser satisfeita, o que afeta tanto na escolha da geometria do elemento, quanto no número de nós e nas funções de forma empregadas (DONEA e HUERTA, 2003).

Para problemas de contorno móvel, existem diversas formulações que podem ser empregadas, como por exemplo, utilização da formulação Space-time, que implica na consideração do tempo como uma dimensão adicional, tratado como uma coordenada espacial adicional. Além disso, existe o método dos contornos imersos (Immersed Boundary Method – IBM), utilizado principalmente em biomecânica por considerar contornos flexíveis imersos no fluido. Outra alternativa, utilizada neste trabalho, é o emprego da descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária, que combina as vantagens das descrições Eulerianas e Lagrangeanas em uma única formulação (DONEA e HUERTA, 2003; THOMPSON e PINSKY, 1996; WANG e LIU, 2004).

1.3 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo geral o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para análise de escoamentos incompressíveis, bidimensionais, e com contornos móveis por meio de simulação numérica pelo Método dos Elementos Finitos.

1.3.1 Objetivos Específicos

Para que o objetivo geral seja atingido de maneira satisfatória, os seguintes objetivos específicos também devem ser alcançados:

- Realizar levantamento bibliográfico a fim de contextualizar a situação problema da pesquisa;
- Definir o elemento finito a ser utilizado;
- Definir o algoritmo de integração temporal;
- Realizar a implementação computacional da formulação numérica;
- Validar o modelo numérico através da simulação de problemas incompressíveis e comparação com resultados da literatura.

1.4 METODOLOGIA

Neste trabalho desenvolve-se uma ferramenta computacional para análise de escoamentos incompressíveis com fronteira móvel. O desenvolvimento do programa foi realizado inteiramente em ambiente Linux, por se tratar de uma plataforma de código livre. Como linguagem de programação, optou-se pela utilização do FORTRAN 77, por possuir as seguintes vantagens:

- é uma linguagem de alto nível;
- possui padronização pela ANSI e ISSO/IEC;
- é uma das uma das linguagens de programação mais empregadas no meio científico, especialmente na utilização em cálculos numéricos e no tratamento de problemas matriciais;
- pela facilidade de implementação do código.

A integração temporal foi implementada através de um algoritmo implícito com aproximação de segunda ordem, denominado método de Adams-Bashforth ou Regra do Trapézio. Empregou-se também a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária para a simulação de contornos móveis.

De acordo com a condição LBB e a formulação numérica utilizada, são necessárias duas malhas para a simulação numérica, uma para cada variável: pressão e velocidade. Para ambas as variáveis utilizaram-se elementos finitos triangulares, possuindo três nós para a pressão e seis nós para a velocidade.

As malhas utilizadas nas análises foram geradas a partir do software Gmsh. Além disso, para o pós-processamento e visualização dos resultados, utilizou-se o software Kitware ParaView, por também possuir código livre, além de ter interface gráfica de manipulação simples. Por fim, para a construção dos gráficos apresentados, empregou-se o software Gnuplot.

1.5 JUSTIFICATIVA

Nas últimas décadas, com a evolução das tecnologias computacionais, a simulação de problemas de engenharia através de métodos numéricos vem ganhando amplo destaque no meio científico.

A investigação de problemas de mecânica dos fluidos através de recursos computacionais (CFD – *Computational Fluid Dynamics*) mostra-se importante a partir do

momento em que não se dispõe de solução analítica para tais problemas. Isso ocorre na maioria dos casos, e naqueles em que é possível se obter uma solução analítica, em geral esta implica na simplificação exagerada do problema, acarretando em resultados pouco compatíveis com a realidade.

A análise experimental, através de túneis de vento, por exemplo, é uma boa alternativa para a resolução de problemas de alta complexidade. No entanto, esta opção mostra-se dispendiosa e pouco geral, ou seja, além de onerosa, produz soluções de aplicabilidade limitada.

A elaboração de um programa próprio possibilita a alteração, refinamento e aprimoramento do código, o que inclui o estudo e inclusão de novas formulações e de técnicas computacionais mais avançadas. Com o emprego de técnicas corretas, o programa pode se equiparar a softwares comerciais em termos de velocidade de processamento e confiabilidade de resultados, ao mesmo tempo em que atende exatamente aos anseios do pesquisador, que pode adaptá-lo ao problema em estudo.

Por fim, o desenvolvimento deste trabalho cria uma base para que novas pesquisas sejam realizadas avançando mais sobre o presente tema dentro do Grupo de Pesquisas em Mecânica Computacional – GRUMEC, da UTFPR de Pato Branco, no qual o autor deste está inserido. Não menos importante, o trabalho também se justifica por contribuir com a formação do acadêmico.

2 MECÂNICA DOS FLUIDOS

Fox, McDonald e Pritchard (2006), definem que um fluido é um material que se deforma continuamente quando submetido a uma tensão de cisalhamento, por menor que seja. Nota-se que esta definição fica restrita aos fluidos Newtonianos. Na fase sólida, o material apresenta deformações quando submetido a uma tensão de cisalhamento, porém não continuamente. Desse modo, as fases líquidas e gasosas de qualquer substância podem ser classificadas como fluidos, sendo a mecânica dos fluidos a área do conhecimento que procura descrever os fenômenos envolvidos no movimento de materiais nestes estados físicos.

2.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Dentro da abordagem clássica da mecânica, o escoamento de um fluido pode ser descrito através de três leis básicas: a conservação da massa, a Segunda Lei de Newton e a Primeira Lei da Termodinâmica.

Usualmente, as equações são descritas nas formas Lagrangeanas ou Eulerianas, esta última de aplicação mais simples aos problemas de escoamentos e, portanto, essa será a descrição na qual as equações governantes serão apresentadas neste capítulo.

2.1.1 A Conservação da Massa

Chamada também de equação da continuidade, a conservação da massa implica na indestrutibilidade da matéria. Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein, isso nem sempre é verdade, pois em determinadas situações a matéria pode ser convertida em energia; como exemplo, têm-se as estrelas que produzem radiação a partir da conversão de matéria em energia. Contudo, para os problemas de Mecânica dos Fluidos relacionados à engenharia, a destrutibilidade da matéria não é mensurável e não se opõe ao princípio da conservação da massa (POTTER e WIGGERT, 2009).

Logo, o princípio da conservação da massa implica que a massa deve permanecer constante ao longo do tempo, sendo descrita matematicamente através da equação 1:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z} = 0, . \quad (1)$$

em que ρ é a densidade do fluido, t é o tempo, u , v e w as velocidades nas respectivas direções x , y e z e $\frac{D}{Dt}$ representa a derivada substancial.

2.1.2 Segunda Lei de Newton

Também conhecida como Lei de Conservação do *momentum* (quantidade de movimento), a segunda lei de Newton afirma que a soma de todas as forças externas atuando sobre um sistema é igual à taxa de variação com o tempo de sua quantidade de movimento linear (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2006).

Potter e Wiggert (2009) definem a quantidade de movimento de um fluido na sua forma diferencial através das equações 2, 3 e 4, para as respectivas direções x , y e z :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho u)}{\partial z} = g_x \rho + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho v)}{\partial z} = g_y \rho + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho w)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho w)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho w)}{\partial z} = g_z \rho + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4)$$

em que g_x , g_y e g_z são as componentes da aceleração gravitacional nas respectivas direções x , y e z , p é a pressão do fluido e τ é a tensão de cisalhamento no plano indicado pelas letras em subscrito quando estas forem diferentes, ou a tensão viscosa normal quando as letras subscritas forem iguais.

Para um fluido newtoniano, a tensão viscosa é diretamente proporcional à taxa de deformação por cisalhamento. Sendo assim, as tensões viscosas podem ser definidas de acordo com as equações 5 a 10:

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\tau_{yy} = -\frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\tau_{zz} = -\frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad (8)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad (9)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad (10)$$

em que ∇ representa o operador gradiente, μ é a viscosidade dinâmica do fluido e \vec{V} indica o vetor de velocidades do fluido (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2006).

Tais relações advêm da obtenção do tensor desviador, tendo em vista a hipótese de Stokes. Ao substituírmos as equações 5 a 10, nas equações 2 a 4, obtém-se as relações conhecidas como equações de Navier-Stokes.

2.1.3 A Primeira Lei da Termodinâmica

Segundo Potter e Wiggert (2009), a Primeira Lei da Termodinâmica ou lei de Conservação de Energia, diz que a energia total de um sistema isolado deve permanecer constante. A energia total consiste na somatória das energias potencial, cinética e interna, sendo a última correspondente à parcela devido à temperatura do sistema, de modo que outras formas de energia não são consideradas em análises no âmbito da Mecânica dos Fluidos. Sendo assim, a Lei de Conservação da Energia é definida através da equação 11:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Ew)}{\partial z} - k \frac{\partial T}{\partial x} - k \frac{\partial T}{\partial y} - k \frac{\partial T}{\partial z} - \\
& \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy}v)}{\partial y} + \\
& \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{zz}w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z} + \\
& \rho g_x u + \rho g_y v + \rho g_z w = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

em que E corresponde à energia específica, k é a condutividade térmica e T é a temperatura absoluta do fluido.

2.1.4 Notação Indicial

No âmbito do cálculo numérico, a utilização de notação indicial, é comumente empregada a fim de facilitar a escrita das equações no desenvolvimento das formulações. Neste ponto, convencionou-se a adoção de notação indicial para as equações, justamente por proporcionar maior praticidade na representação das expressões. Portanto, as equações da continuidade, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia podem ser reescritas de acordo com as equações 12, 13 e 14, respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = - \frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i, \tag{13}$$

e

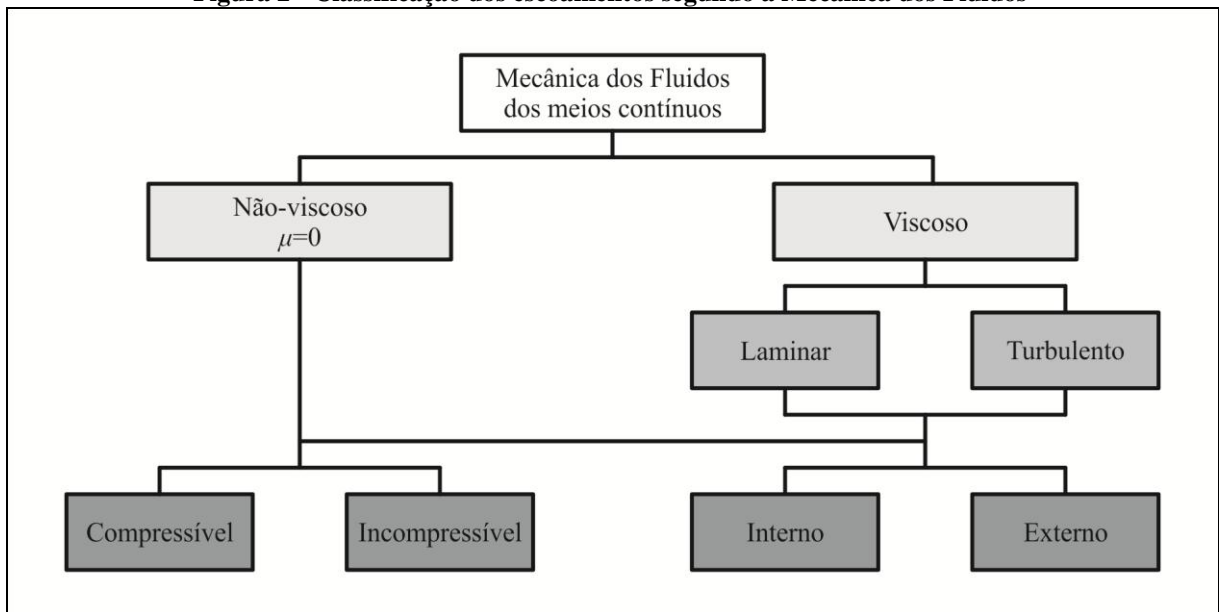
$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j p) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) + \rho g_i u_i, \tag{14}$$

em que os índices i e j indicam soma, e sendo que os eixos cartesianos x , y e z correspondem, respectivamente, aos índices 1, 2 e 3 (SANCHES, 2011).

2.2 CLASSIFICAÇÃO DOS ESCOAMENTOS

A maioria dos problemas de dinâmica dos fluidos possui grande complexidade matemática em sua resolução. Assim, é comum que se façam algumas simplificações nas características dos escoamentos analisados, que acabam por facilitar o cálculo sem interferir significativamente nos resultados. Essas simplificações advêm principalmente de algumas classificações do movimento de fluidos (figura 2) que levam em consideração fatores como a compressibilidade, viscosidade, além de parâmetros adimensionais, como o número de Reynolds e o número de Mach.

Figura 2 - Classificação dos escoamentos segundo a Mecânica dos Fluidos



Fonte: Adaptado de Fox, McDonald e Pritchard(2006).

2.2.1 Classificação quanto à viscosidade

A viscosidade pode ser considerada como “aderência” interna de um fluido, sendo a responsável pelas perdas de energia associadas ao transporte de fluidos em dutos, canais e tubulações, por exemplo. A taxa de deformação de um fluido é também diretamente ligada à sua viscosidade, de modo que um fluido com grande viscosidade se deforma menos do que um fluido de viscosidade menor, quando se aplica uma tensão de cisalhamento equivalente em ambos. Matematicamente, pode-se representar a tensão de cisalhamento para um fluido Newtoniano em função da viscosidade para um escoamento unidimensional (POTTER; WIGGERT, 2009) por meio de:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (15)$$

em que μ representa a viscosidade dinâmica do fluido.

A relação entre as forças inerciais e viscosas serve como parâmetro para se identificar a influência da viscosidade no escoamento, sendo essa relação conhecida como número de Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{u L}{\nu}, \quad (16)$$

em que u é a velocidade média do escoamento, L o comprimento característico (para um tubo circular, L é igual ao diâmetro) e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

Existem alguns casos em que, para simplificação da análise, despreza-se o efeito das forças viscosas. Fox, McDonald e Pritchard (2006) destacam que se o Número de Reynolds tiver valores elevados, os efeitos de pressão se sobrepõem aos efeitos viscosos, tornando os últimos desprezíveis. Em contrapartida, quando se tem um escoamento no qual o Número de Reynolds é pequeno, as ações da viscosidade se mostram de extrema importância, sobrepondo-se aos efeitos de pressão. Por fim, quando o escoamento possui regime transiente, nada se pode afirmar quanto à importância dos efeitos viscosos.

Portanto, denominam-se escoamentos viscosos aqueles em os efeitos de viscosidade não são desprezíveis e não viscosos aqueles onde se despreza o efeito da viscosidade do fluido.

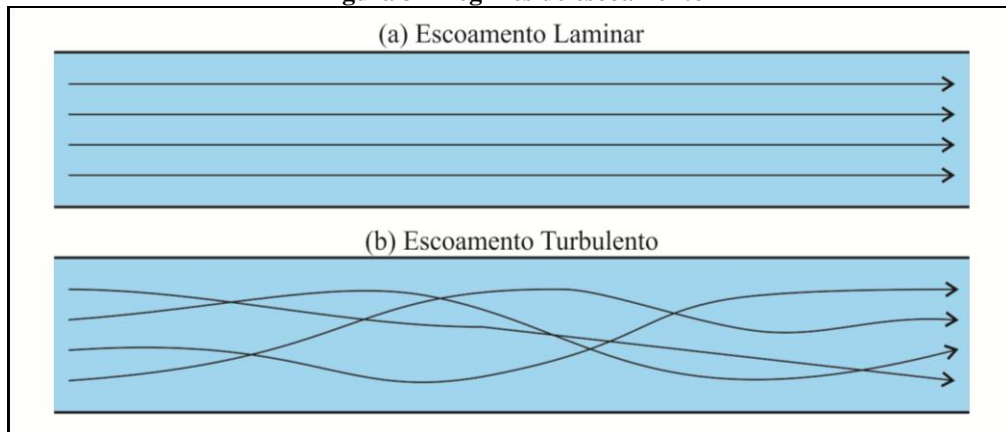
2.2.2 Classificação quanto à turbulência

Os escoamentos podem ainda ser classificados em laminares, de transição ou turbulentos. Em um escoamento laminar, não há nenhuma mistura significativa entre as partículas do fluido com o passar do tempo, ou seja, é aquele onde as partículas do fluido se movem em camadas lisas (lâminas). Já o escoamento turbulento é definido como aquele em que os movimentos do fluido variam irregularmente, de modo que grandezas como velocidade e pressão apresentam variação com o tempo e espaço. É importante ressaltar que a turbulência implica na mistura rápida entre as partículas fluidas enquanto se movimentam ao longo do

escoamento, devido às flutuações aleatórias no campo de velocidades, como pode ser visto na figura 3. Por fim, o escoamento de transição, como seu nome já define, trata-se do estado intermediário entre os escoamentos laminares e turbulentos, ou ainda, a transição de um estado para o outro (POTTER e WIGGERT, 2009; FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2006).

O número de Reynolds é um parâmetro que permite classificar o comportamento do escoamento quanto à sua turbulência. Quando o escoamento é tido como laminar, o número de Reynolds é menor que o valor crítico para o problema (Re_{crit}). Todavia, o número crítico de Reynolds é diferente para cada geometria e situação de escoamento, tornando difícil a sua determinação. Em termos práticos, para escoamentos em tubulação de paredes rugosas, se tem $Re_{crit} \approx 2000$, ao passo que quanto mais lisa for a parede da tubulação, o valor de Re_{crit} tende a aumentar. Já para escoamento entre placas paralelas, tem-se $Re_{crit} \approx 1500$ (POTTER e WIGGERT, 2009).

Figura 3 - Regimes de escoamento



Fonte: O Autor (2014).

2.2.3 Classificação quanto à compressibilidade

Os escoamentos de fluidos podem também ser classificados quanto à compressibilidade; aqueles em que as variações da densidade ao longo do tempo são desprezíveis denominam-se incompressíveis. Já os que se deve ter atenção quanto às variações da densidade ao longo do escoamento e/ou do tempo, denominam-se compressíveis (FOX, MCDONALD e PRITCHARD, 2006).

Para o escoamento de gases, Potter e Wiggert (2009) apontam que o número de Mach (equação 17) pode servir como parâmetro para se determinar se o escoamento pode ser

estudado como incompressível. Estima-se que se o número de Mach tiver valor inferior a 0,3, as variações da densidade são de no máximo 3% e o escoamento pode ser tratado como incompressível; caso contrário, devem-se levar em consideração os efeitos da compressibilidade na análise.

O número de Mach, M , consiste na relação entre a velocidade do escoamento (u) e a velocidade do som no fluido (c):

$$M = \frac{u}{c}. \quad (17)$$

2.3 ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL

Quando o escoamento é considerado incompressível, é possível realizar algumas simplificações nas equações governantes da Mecânica dos Fluidos, reduzindo desse modo o número de incógnitas do problema. Assim, temos a equação da continuidade dada por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (18)$$

uma vez que a densidade não varia ao longo do tempo. Partindo desse mesmo princípio, as equações da quantidade de movimento e da conservação da energia assumem a seguinte forma, respectivamente:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i, \quad (19)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j E) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j p) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) + \rho g_i u_i \right]. \quad (20)$$

Observa-se que as leis governantes dos movimentos de fluidos tratam de um conjunto de equações diferenciais acopladas, não lineares, dadas em função das componentes de velocidade, temperatura e pressão. Ao se estudar um escoamento incompressível desprezando-se os efeitos da temperatura, ou seja, quando não há variações significativas da temperatura ao longo do escoamento (escoamento isotérmico), as equações da conservação da

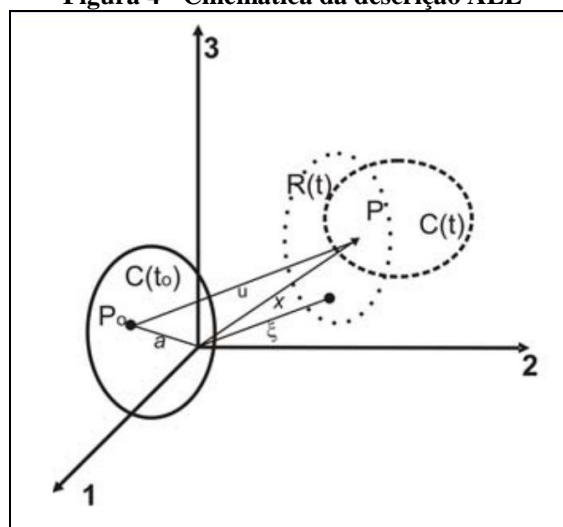
energia e da quantidade de movimento tornam-se desacopladas. Sendo assim, nos escoamentos isotérmicos é necessária a resolução apenas das equações de Navier-Stokes (equação 19) e da continuidade (equação 18). Quando o número de Reynolds de um escoamento é muito baixo, os termos não lineares podem ser desprezados devido aos efeitos inerciais, resultando em um problema de valor de contorno linear. Esse escoamento é também denominado como escoamento de Stokes (REDDY e GARTLING, 2000).

2.4 DESCRIÇÃO LAGRANGEANA-EULERIANA ARBITRÁRIA (ALE)

Na modelagem de problemas de mecânica dos sólidos, o objeto em questão é descrito em formulação Lagrangeana, ou seja, a análise acompanha o movimento ou as deformações do sólido ao longo do tempo. Já em mecânica dos fluidos, a modelagem mais empregada é através da formulação Euleriana, que consiste na observação do comportamento das partículas fluidas ao longo do tempo dentro de um domínio ou de um volume de controle de interesse fixo no espaço. Essa situação se torna um empecilho quando do estudo de problemas com contornos móveis, como por exemplo no caso de interação fluido-estrutura. Nesse sentido, a descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária, ou ALE (do inglês *Arbitrary Lagrangean-Eulerian*), passa a ser a mais indicada.

A figura 4 representa a movimentação do domínio R ao longo do tempo, onde $C(t_0)$ e $C(t)$ representam as posições inicial e final do domínio computacional, respectivamente.

Figura 4 - Cinemática da descrição ALE



Fonte: SANCHES (2011).

A descrição ALE possibilita a representação numérica de deformações ou movimentações da malha através do emprego de um vetor de velocidades z , que representa a velocidade que cada nó da malha possui, sendo atualizado a cada passo de tempo. Assim, as equações governantes do movimento dos fluidos podem ser reescritas como expresso a seguir, em que as equações 21, 22 e 23 representam as leis de conservação da massa, do *momentum* e da energia na abordagem Lagrangeana-Euleriana arbitrária, respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = z_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i = z_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho E)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j p) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_j) - \rho g_i u_i = z_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i}, \quad (23)$$

ou ainda, para escoamentos incompressíveis as equações 15 e 16 assumem a seguinte forma:

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i = z_j \frac{\partial(u_i)}{\partial x_j}. \quad (25)$$

Para maiores detalhes sobre a obtenção da formulação, recomenda-se a consulta de Donea et al. (1982), Basilevs e Hughes (2008) e Basilevs et al. (2008).

Ao analisar as equações anteriores, pode-se perceber que quando o vetor z possui valor igual à zero, recaímos no caso da formulação Euleriana. Analogamente, quando z possui valor igual a u , a formulação é Lagrangeana. (DONEA et al., 1982).

3 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Dentre as formulações existentes para a simulação de escoamentos incompressíveis, optou-se pela utilização do modelo misto, ou velocidade-pressão. A obtenção desse modelo se inicia através da integração ponderada expressa nas equações 26 e 27, por meio do método de Galerkin, das equações governantes do escoamento do fluido: equação da continuidade e conservação do *momentum*. Para facilitar a escrita, ambas são representadas por f_1 e f_2 , respectivamente:

$$\int_{\Omega_e} Qf_1 d\Omega_e = 0, \quad (26)$$

$$\int_{\Omega_e} Wf_2 d\Omega_e = 0, \quad (27)$$

onde Ω_e denota o domínio de integração, ou seja, o volume do elemento finito (para o caso tridimensional); Q e W são funções ponderadoras, utilizadas para as variáveis de pressão (P) e velocidade (u_i), respectivamente.

A resolução de qualquer problema pelo MEF se torna viável quando a obtenção da solução exata, ou analítica, do problema se mostra dispendiosa, ou ainda, quando esta não existe. Sendo assim, a solução aproximada (U_N) é obtida por uma função (geralmente polinômios de Lagrange), dependentes da posição dos nós do elemento, na qual se deseja encontrar os coeficientes de U_N , como ilustrado na equação 28 (REDDY, 2006):

$$u(x) \approx U_N(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x), \quad (28)$$

onde $u(x)$ é a solução exata do problema, $U_N(x)$ é a solução aproximada, $\phi_j(x)$ são as funções aproximadoras ou funções de forma, α_j são os coeficientes da solução aproximada e N é o número de nós do elemento.

Devido à subdivisão do domínio global em vários elementos finitos, ao invés de se buscar funções aproximadoras que satisfaçam as condições de contorno de todo o domínio, no MEF as funções devem atender às restrições no subdomínio de cada elemento, o que acaba se tornando uma grande vantagem do método (ASSAN, 2003).

Em sequência, para a obtenção da forma fraca das equações, utiliza-se a integração por partes em 26 e 27, que proporciona uma distribuição equitativa entre as variáveis e as funções ponderadoras:

$$\int_{\Omega_e} Q \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) dx = 0, \quad (29)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[\rho \left(W_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + W_i (u_j - z_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \left(-P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho W_i f_i \right) \right] dx \quad (30)$$

$$- \oint_{\Gamma_e} W_i \Upsilon_i ds = 0,$$

onde Γ_e denota o contorno, ou fronteira do elemento, e Υ_i representa as componentes das tensões na fronteira do elemento, de acordo com a equação 31:

$$\Upsilon_i = \mu \left[2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} n_i + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] - P n_i, \quad (31)$$

em que n_i é a componente do vetor normal localizado no contorno do elemento, na respectiva direção i .

De acordo com a equação 28, a solução aproximada do problema pode ser escrita como a combinação linear de funções interpoladoras, ou funções de forma, multiplicadas por determinados coeficientes. Portanto, as variáveis do problema (u_i e P) podem ser escritas como expansões das equações 26 e 27, em que Ψ e Φ são vetores da função interpoladora das respectivas variáveis: velocidade (u_i) e pressão (P) e onde o índice T denota o vetor transposto:

$$u_i(x, t) = \sum_{m=1}^M \psi_m(x) u_i^m(t) = \Psi^T u_i, \quad (32)$$

$$P(x, t) = \sum_{l=1}^L \phi_l(x) P_l(t) = \Phi^T P. \quad (33)$$

Neste caso, é realizada a aplicação do método de Galerkin clássico para a determinação da forma fraca do problema, o que implica na utilização das funções ponderadoras (Q e W) iguais às respectivas funções aproximadoras, ou funções de forma (Φ e Ψ).

Sendo assim, a aplicação das funções ponderadoras nas equações 32 e 33, com a posterior realização da integração descrita nas equações 29 e 30, obtém-se:

$$-\left[\int_{\Omega_e} \Phi \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dx \right] u_i = 0, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Omega_e} \rho \Psi \Psi^T dx \right] \{ \dot{u}_i \} + \left[\int_{\Omega_e} \rho \Psi (\Psi^T u_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx \right] \{ u_i \} - \left[\int_{\Omega_e} \rho \Psi (\Psi^T z_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx \right] \{ u_i \} \\ + \left[\int_{\Omega_e} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx \right] \{ u_i \} - \left[\int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T dx \right] \{ P \} \\ = \left[\int_{\Omega_e} \rho \Psi f_i dx \right] + \left\{ \oint_{\Gamma_e} \Upsilon_i \Psi ds \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Novamente, a fim de facilitar a representação, as equações 34 e 35 são reescritas na forma matricial,

$$-\mathbf{Q}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (36)$$

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{z}) \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{Q} \mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad (37)$$

onde o ponto localizado acima do vetor \mathbf{u} indica a sua derivada temporal.

Para o caso bidimensional, as equações da continuidade e do *momentum* podem ser combinadas em um sistema de equações, expresso pela equação 38:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{u}) - \mathbf{C}(\mathbf{z}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}(\mathbf{u}) - \mathbf{C}(\mathbf{z}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{12} & -\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{11} + 2\mathbf{K}_{22} & -\mathbf{Q}_2 \\ -\mathbf{Q}_1^T & -\mathbf{Q}_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{38}$$

De modo que os coeficientes das matrizes são obtidos através das expressões a seguir:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_e} \rho \Psi \Psi^T dx, \tag{39}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_e} \rho \Psi (\Psi^T u_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dx, \tag{40}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{z}) = \int_{\Omega_e} \rho \Psi (\Psi^T z_j) \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_i} dx \tag{41}$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_e} \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi^T}{\partial x_j} dx, \tag{42}$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \Phi^T dx, \tag{43}$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_e} \rho \Psi f_i dx + \oint_{\Gamma_e} \Psi \Upsilon_i ds. \tag{44}$$

As funções de forma abordadas nas equações 32 e 33 associam-se a dois tipos de elementos finitos, um para cada variável de campo (u_i e P). Logo, deve haver duas malhas de elementos finitos diferentes, uma correspondente a cada variável, sobre o mesmo domínio de integração, Ω . Devido ao fato de a forma fraca, explicitada nas equações 34 e 35, possuir derivadas em primeira ordem da velocidade e não possuir derivadas da pressão, a interpolação utilizada em cada uma das variáveis deve ser diferente. Denota-se ainda que as condições de

contorno essenciais (condições de contorno de Dirichlet) não devem incluir a especificação de valores de pressão, que devem ser introduzidas como uma parte das condições de contorno naturais (condições de contorno de Neumann). Isso leva à constatação de que a pressão pode ser interpolada com funções de ordem um grau menor do que para o campo de velocidade. Logo, o modelo admite aproximação quadrática para o campo de velocidade e interpolação linear para a pressão.

Por fim, as equações 36 e 37 podem ser combinadas em um sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{u}) - \mathbf{C}(\mathbf{z}) & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (45)$$

ou ainda, numa notação simbólica:

$$\overline{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \overline{\mathbf{F}}, \quad (46)$$

em que:

$$\mathbf{U} = \{u_1 \quad u_2 \quad P\}^T. \quad (47)$$

Neste trabalho, optou-se pela utilização do processo *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG), metodologia abordada primeiramente por Brooks e Hughes (1982). Trata-se de um dos métodos mais utilizados para a redução das variações espúrias decorrentes da aplicação do método de Galerkin clássico. Este método consiste basicamente na alteração das funções ponderadoras utilizadas no Método de Galerkin (Q e W), modificando-as de modo a induzir difusão (ou viscosidade) adicional na direção das linhas de corrente (BASILEVS et al., 2013).

Este processo difere do método de Galerkin clássico por empregar funções ponderadoras diferentes para a velocidade. Desse modo, a utilização do processo SUPG deve ocorrer com a utilização da função ponderadora definida pela equação 48:

$$W = \tau_{SUPG} \mathbf{u} \cdot \nabla \psi_i. \quad (48)$$

Tal que τ_{SUPG} é definido por:

$$\tau_{SUPG} = \left(\frac{1}{\tau_{SUGN1}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN2}^2} + \frac{1}{\tau_{SUGN3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (49)$$

em que:

$$\tau_{SUGN1} = \left(\sum_{a=1}^{n_{\text{nós}}} |\mathbf{u} \cdot \nabla \Psi_a| \right), \quad (50)$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (51)$$

$$\tau_{SUGN3} = \frac{1}{\nu} \left(\sum_{a=1}^{n_{\text{nós}}} \left(\frac{|\nabla |\mathbf{u}|}{\|\nabla |\mathbf{u}|\|} \right) \cdot \nabla \Psi_a \right)^{-2}, \quad (52)$$

em que ∇ denota o operador gradiente, $n_{\text{nós}}$ representa o número de nós do elemento, Δt é o passo de tempo.

3.1 INTEGRAÇÃO NO TEMPO

A equação 46 representa um espaço discreto, com aproximação contínua no tempo. Logo, para realizar a integração temporal, utilizam-se também métodos aproximados. O procedimento consiste em se realizar a integração para uma pequena escala de tempo do problema que resulta num avanço gradual da solução, discreta no tempo. Contudo, a adoção de tal procedimento implica na consideração das questões de estabilidade e precisão numérica (REDDY e GARTLING, 2000).

Apesar de serem utilizados métodos explícitos para a realização da integração temporal em problemas relacionados à equação 46, é recomendado uso de métodos implícitos, pois segundo Reddy e Gartling (2000), os métodos de integração explícitos apresentam as seguintes desvantagens:

- Implicidade natural da pressão em um fluido incompressível;

- Restrições quanto ao passo de tempo necessário para se obter estabilidade no processo de integração;
- Problemas de diagonalização e inversão da matriz \mathbf{M} , que acarretam na redução da precisão dos resultados.

Neste trabalho, optou-se pela utilização do Método de Adams-Bashforth, ou Regra do Trapézio, por se tratar de um método implícito.

3.1.1 Método de Adams-Bashforth ou Regra do Trapézio

A Regra do Trapézio ou Método de Adams-Bashforth trata-se de um método implícito de integração temporal de segunda ordem de precisão. A utilização deste método requer a adoção de um algoritmo preditor/corretor, dado pela equação 53, que proporciona melhor precisão de resultados:

$$U_p^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t_n}{2} \left[\left(2 + \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n+1}} \dot{U}^n \right) - \left(\frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n+1}} \dot{U}^{n-1} \right) \right], \quad (53)$$

em que $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ e $\Delta t_{n-1} = t_n - t_{n-1}$, de modo que a equação 53 pode ser utilizada para prever a solução do vetor de velocidades em função de dois vetores de aceleração, obtidos em passos de tempo anteriores. Sendo assim, U_p^{n+1} trata-se de um vetor que representa uma solução aproximada para o valor real de U^{n+1} , utilizado para iniciar o processo iterativo de resolução da equação 54:

$$\left[\frac{2}{\Delta t_n} \bar{M} + \bar{K}(U^{n+1}) \right] U^{n+1} = \frac{2}{\Delta t_n} \bar{M} U^n + \bar{M} \dot{U}^n + \bar{F}(U^{n+1}). \quad (54)$$

A equação 48 é obtida utilizando-se a Regra do Trapézio junto à equação 46, apresentando-se como um sistema algébrico não linear, sendo que o vetor U^{n+1} pode ser calculado utilizando-se, por exemplo, o método de iterativo de Newton-Raphson.

Reddy e Gartling (2000) descrevem um algoritmo simples para o cálculo do vetor de velocidade em cada passo de tempo, seguindo 5 passos:

1 - O vetor de tentativa de solução é calculado (U_p^{n+1}) através da equação 53, sendo que as variáveis de pressão não estão incluídas nessa predição;

2 - A solução real do passo de tempo (U^{n+1}) é calculada através da equação 54 utilizando-se U_p^{n+1} para iniciar o processo iterativo;

3 - O vetor de aceleração é atualizado a partir de U^{n+1} de acordo com a equação 55:

$$\dot{U}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t_n} (U^{n+1} - U^n) - \dot{U}^n. \quad (55)$$

4 - Um novo passo de tempo é computado. A seleção do passo de tempo seguinte pode ser realizada a partir da análise dos erros de truncamento do tempo nas equações do vetor preditor e do vetor solução, descritos a seguir:

A implementação do método de Newton-Raphson na etapa 2 geralmente não leva a uma convergência absoluta dos resultados. Portanto, aplica-se uma correção, estimando-se o novo passo de tempo, de acordo com a equação 56:

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \left(b \frac{\epsilon^t}{d_{n+1}} \right)^m, \quad (56)$$

onde:

- $m = 1/3$;
- $b = 3(1 + \Delta t_{n-1}/\Delta t_n)$;
- ϵ^t é o erro tolerável, especificado pelo usuário, geralmente com valor de 0,001;
- d_{n+1} é definido como a norma da diferença entre os valores de U_p^{n+1} e U^{n+1} ,

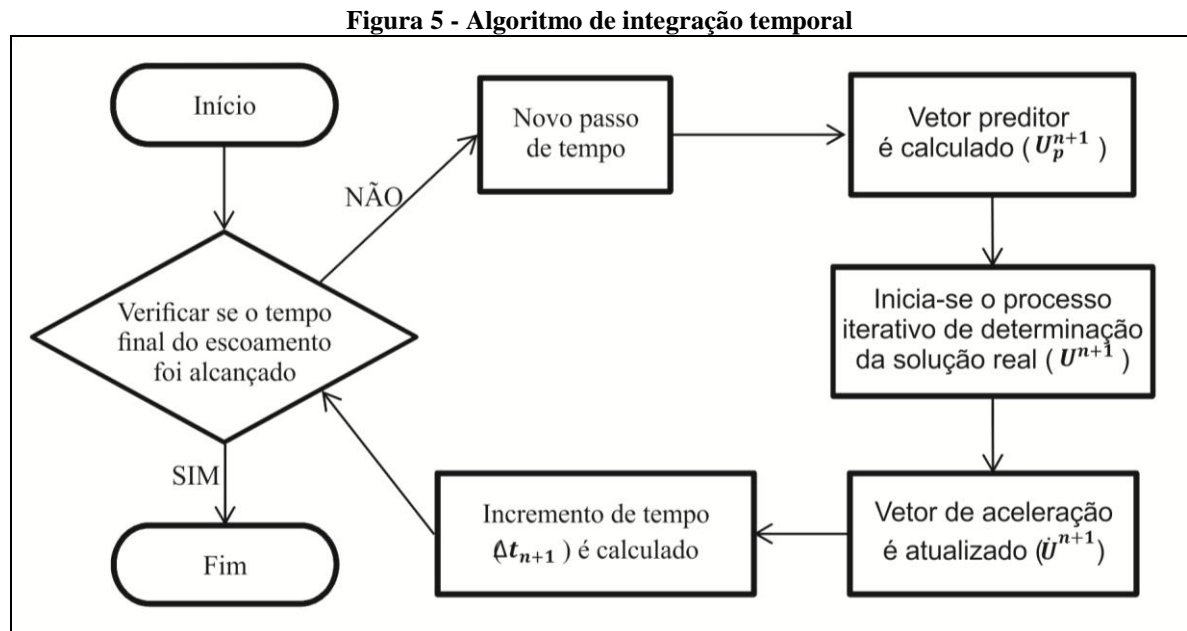
definido pela equação 57:

$$d_{n+1}^U = \frac{1}{U_{\max}} \left[\sum_{i=1}^N (U_{i(n+1)} - U_{i(n+1)}^p)^2 \right]^{1/2}. \quad (57)$$

Contudo, quando há a adoção de um passo de tempo constante, a etapa 4 é omitida do processo de cálculo.

5 - Retorna-se à etapa 1 com um novo incremento de tempo.

Para facilitar a compreensão do algoritmo de integração temporal, construiu-se ainda o fluxograma da figura 5.

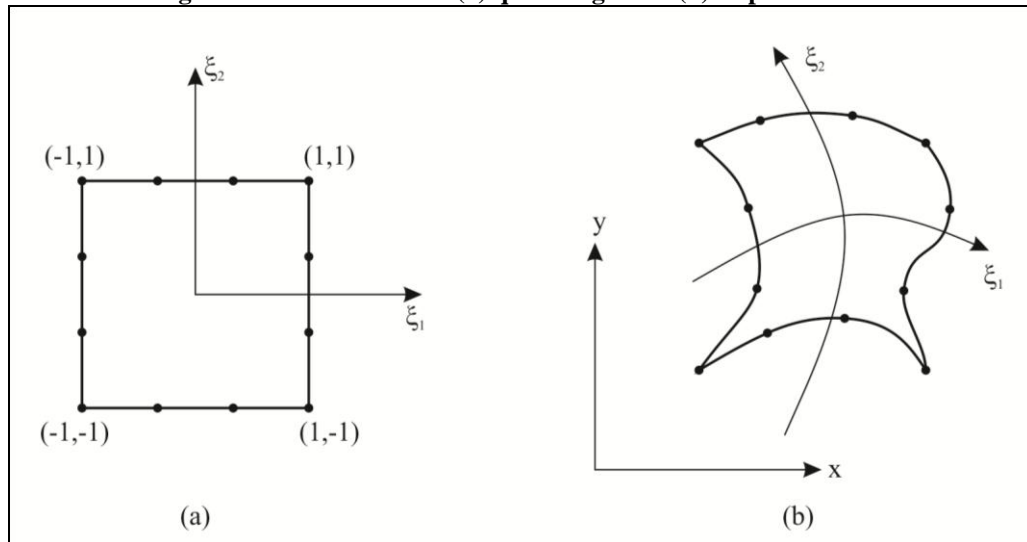


Fonte: O Autor (2014).

3.2 ELEMENTO FINITO

Devido à complexidade das geometrias a serem empregadas em análises baseadas no Método dos Elementos Finitos, é necessário que os elementos empregados possam se adaptar e representar com grau de precisão satisfatório quaisquer contornos irregulares que porventura possam existir, de acordo com a figura 6. Para melhorar essa condição, há a possibilidade de se empregar elementos finitos isoparamétricos na análise (ASSAN, 2003).

Figura 6 - Elemento finito (a) quadrangular e (b) isoparamétrico



Fonte: Adaptado de ASSAN (2003).

Para que o elemento isoparamétrico possa ser utilizado, deve haver um mecanismo em que as posições dos nós possam ser mapeadas de acordo com as coordenadas locais, ou homogêneas ξ_1 e ξ_2 . Tal mapeamento pode ser realizado de acordo com as equações 58 e 59:

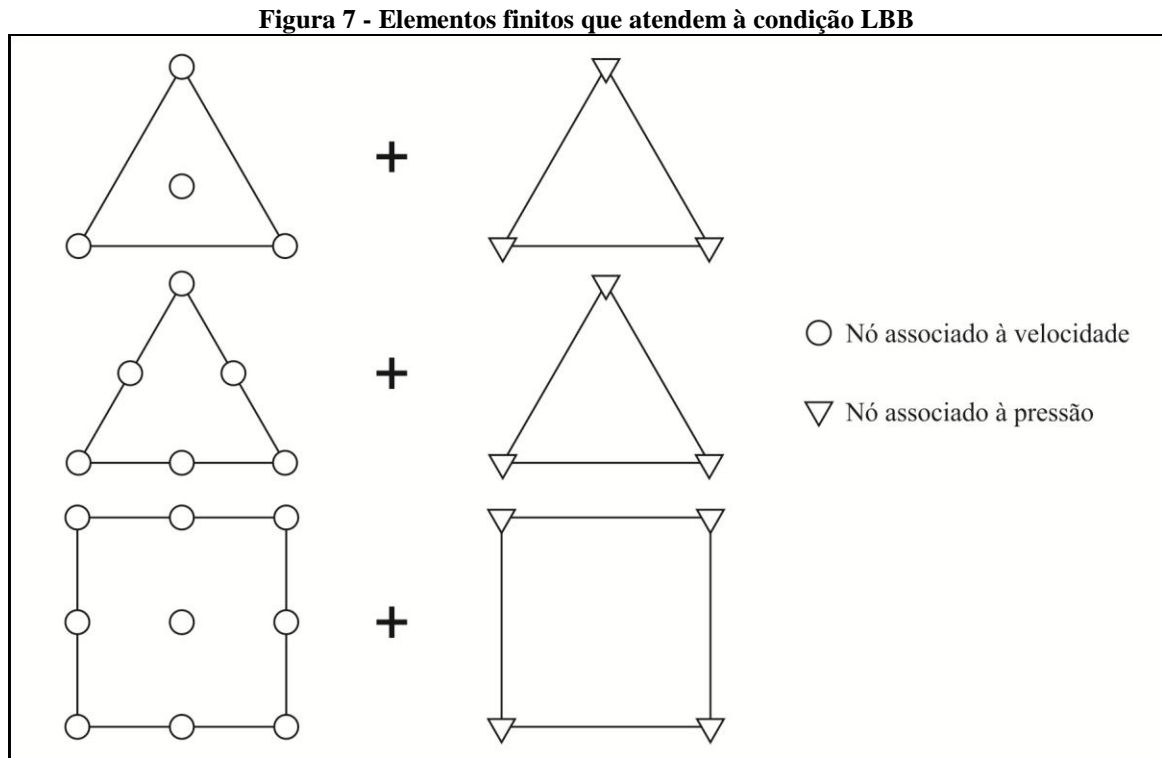
$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \dots + \phi_n x_n, \quad (58)$$

$$y = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \dots + \phi_n y_n. \quad (59)$$

em que x_i e y_i são as coordenadas dos nós do elemento e ϕ_i é a função de forma associada ao respectivo nó i .

Para que o sistema de equações resultantes, definido pela equação 46, possa ser resolvido, a matriz $\bar{\mathbf{K}}$ além de ser simétrica, deve ser positiva-definida. Consequentemente, isso a torna não singular, resultando em uma única solução tanto para o campo de velocidade e quanto para a pressão. Caso essa condição não seja satisfeita, a solução obtida pode ser estável e convergente para o campo de velocidades, porém apresenta variações espúrias e resultados oscilatórios para o campo de pressão. Para contornar este problema, Ladyzhenskaya (1969), Babuška (1970/71) e Brezzi (1974) determinaram uma condição de compatibilidade conhecida como condição de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi, ou simplesmente LBB, que espaços contínuos e discretos devem satisfazer para garantir a estabilidade do modelo misto (DONEA; HUERTA, 2003).

Desse modo, a escolha do elemento finito a ser utilizado não deve ser tomada arbitrariamente. Zienkiewicz e Taylor (2000) listam alguns elementos finitos cujas funções de forma não violam a convergência dos resultados da simulação e que atendem à condição LBB (figura 7).

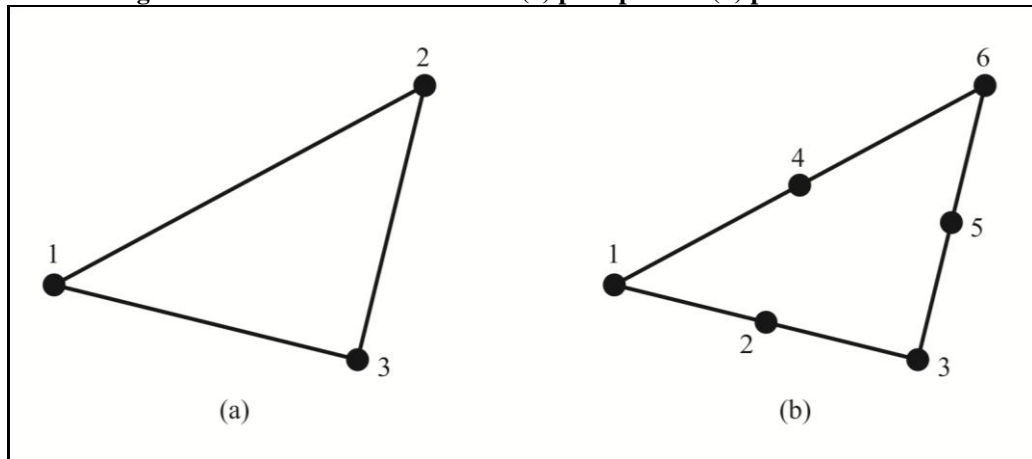


Fonte: Adaptado de Zienkiewicz e Taylor (2000).

Além disso, de acordo com a formulação matemática descrita anteriormente, Reddy e Gartling (2000) definem que, para uma melhor convergência de resultados, e devido às derivadas contidas nas equações governantes, devem-se utilizar diferentes malhas e funções de interpolação para as variáveis do problema (velocidade e pressão).

Dentre os elementos finitos analisados, optou-se pela utilização de um elemento finito misto para a realização da implementação computacional. Tal elemento (Figura 8) possui formato triangular, com três nós, um em cada vértice, quando se trata da variável pressão (P) e com seis nós, três deles localizados nos vértices e três localizados nos pontos associados às mediatrizes do triângulo, para a variável velocidade (u_i).

Figura 8 - Elemento finito utilizado (a) para pressão (b) para velocidade



Fonte: O Autor (2014).

A utilização da forma fraca do problema durante a obtenção da formulação numérica implica ainda na utilização de, no mínimo, funções de forma lineares e quadráticas para a pressão e velocidade, respectivamente, situação também adotada para este trabalho. A seguir, são apresentadas as funções de forma utilizadas, expressas em termos das coordenadas homogêneas, sendo que ϕ_i são as funções de forma associadas à pressão e ψ_i as funções de forma associadas à velocidade.

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \xi_1, \\ \phi_2 &= \xi_2, \\ \phi_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2;\end{aligned}\tag{60}$$

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \xi_3(2\xi_3 - 1), \\ \psi_2 &= 4\xi_3\xi_1, \\ \psi_3 &= \xi_1(2\xi_1 - 1), \\ \psi_4 &= 4\xi_2\xi_3, \\ \psi_5 &= 4\xi_1\xi_2, \\ \psi_6 &= \xi_2(2\xi_2 - 1).\end{aligned}\tag{61}$$

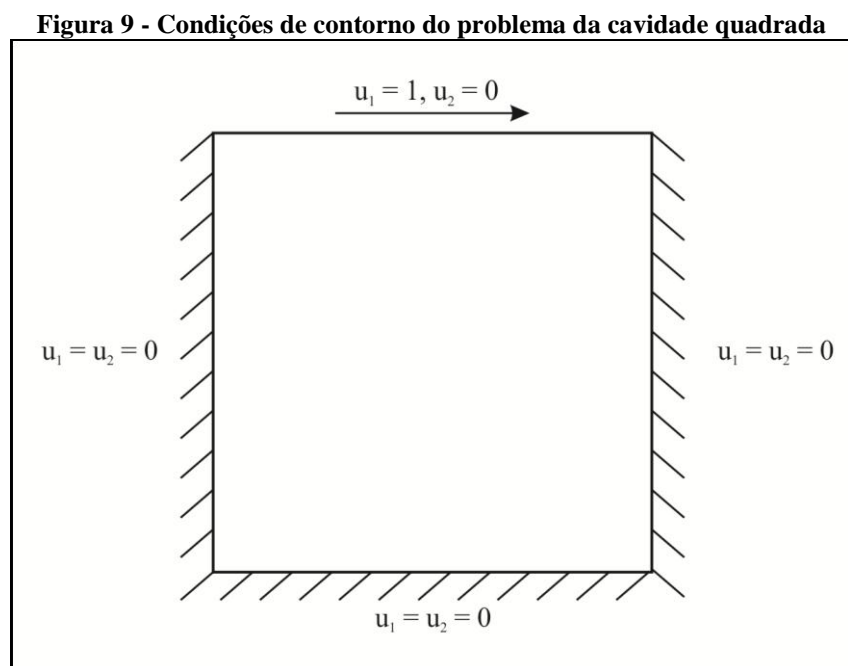
4 RESULTADOS

Neste capítulo o programa desenvolvido é testado por meio de alguns exemplos. Primeiramente são testados problemas transientes que evoluem para estados estacionários, nos quais a malha é fixa (recaindo na formulação Euleriana). Por fim, é apresentado um problema transiente com contorno móvel.

4.1 CAVIDADE QUADRADA

O problema da cavidade quadrada, ou cavidade fechada, é um dos mais utilizados na literatura que aborda a dinâmica dos fluidos computacional. Este problema trata, basicamente, de uma cavidade com paredes em três lados, ambas com condição de não escorregamento, e velocidade tangencial no lado superior. Na figura 9, pode-se observar mais claramente a situação proposta, explicitando inclusive as condições de contorno a serem utilizadas para a análise.

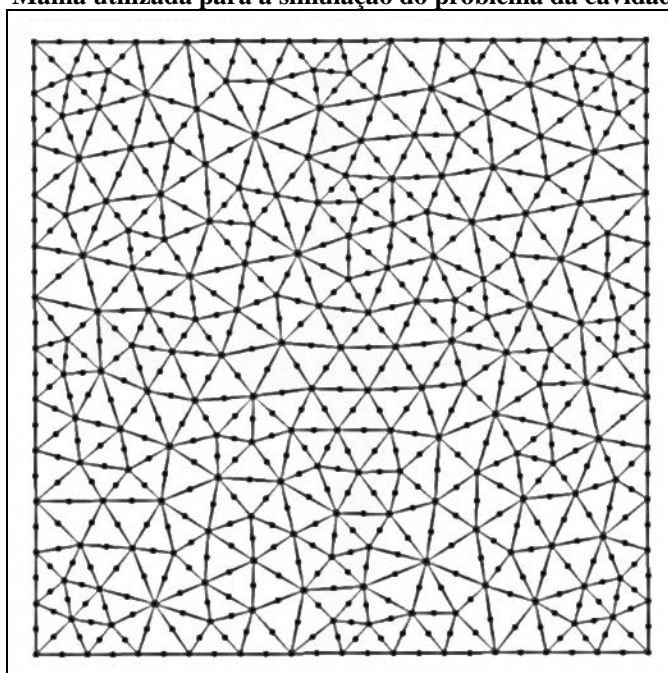
Para fins de comparação, as simulações desenvolvidas para a análise deste problema tiveram seus resultados comparados com aqueles obtidos por Ghia et al. (1982), Zienkiewicz e Taylor (2000) e Ciarlet e Lions (2003).



Fonte: Adaptado de Ghia et al. (2000).

Na figura 10 é apresentada a malha de elementos finitos empregada na análise dos escoamentos. Tal malha conta com 376 elementos, 213 nós para a variável pressão e 801 nós para a velocidade, sendo que seus lados possuem dimensão de uma unidade de comprimento. Em contrapartida, Ghia et al. utilizaram uma malha mais refinada, tratando-se de uma grade uniforme de 129x129 nós. Zienkiewicz e Taylor, por sua vez, usaram uma malha com total de 1521 nós e 2888 elementos e Ciarlet e Lions utilizaram uma malha com 4225 nós e 8192 elementos.

Figura 10 - Malha utilizada para a simulação do problema da cavidade quadrada

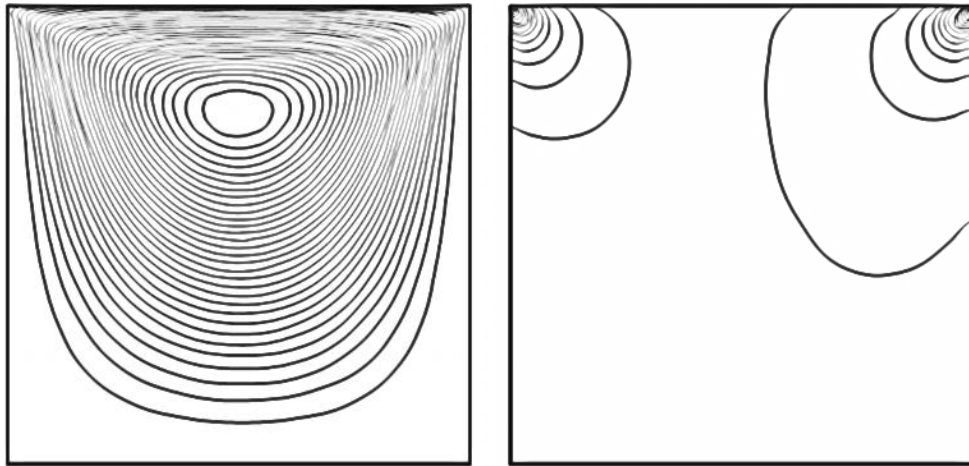


Fonte: O Autor (2014).

Para o primeiro teste, escolheu-se o escoamento de Stokes. Este escoamento caracteriza-se por possuir convecção desprezível, além de que as equações governantes tornam-se independentes do tempo. Matematicamente, os termos da matriz $\mathbf{C}(\mathbf{u})$, definida pela formulação numérica, tornam-se nulos (DONEA e HUERTA, 2003).

Neste exemplo, utilizou-se viscosidade cinemática igual à uma unidade e como referências, os dados de Zienkiewicz e Taylor (2000) mostrados na figura 11, que ilustram a disposição das linhas de corrente (a) e do campo de pressões (b).

Figura 11 - Escoamento de Stokes



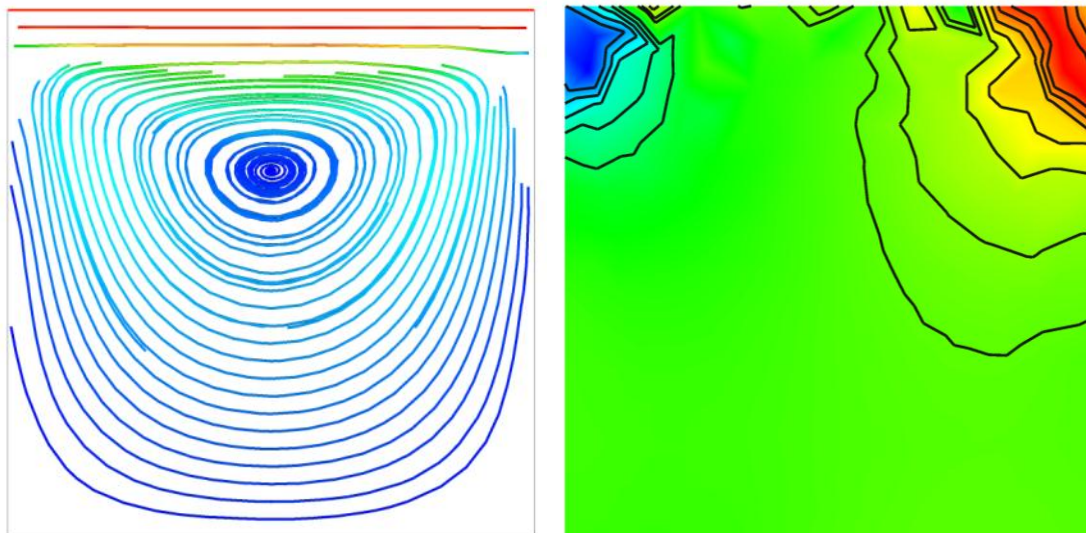
(a) linhas de corrente

Fonte: Zienkiewicz e Taylor (2000).

(b) curvas de nível do campo de pressão

Na simulação realizada, presente na figura 12, pode-se perceber grande semelhança tanto para as linhas de corrente quanto para o perfil de pressões obtido por Zienkiewicz e Taylor (2000).

Figura 12 - Resultados obtidos para o escoamento de Stokes



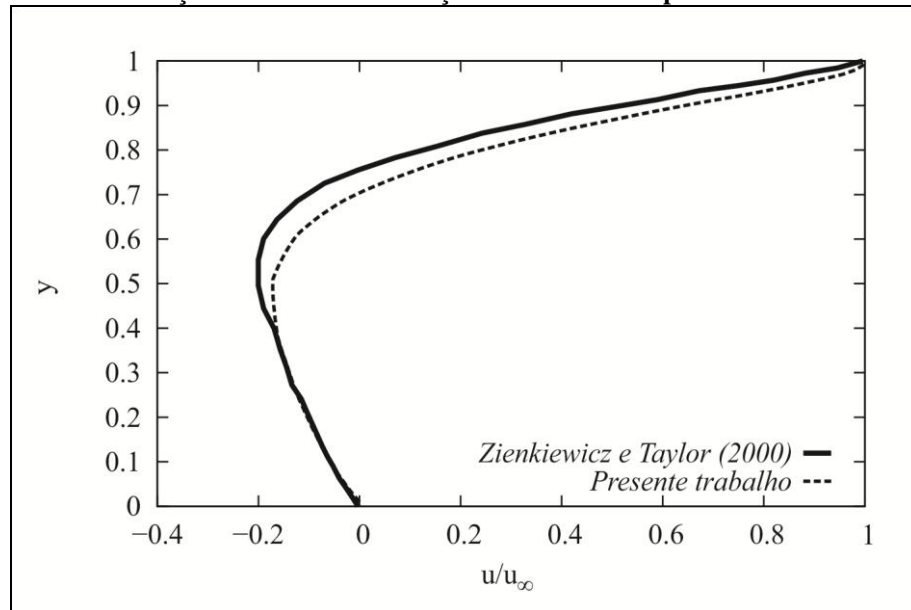
(a) linhas de corrente

Fonte: O Autor (2014).

(b) curvas de nível do campo de pressão

Em seguida, pôde-se também construir o gráfico da velocidade adimensional em função da altura da cavidade (figura 13), calculada considerando-se a seção vertical intermediária, onde novamente é observada grande proximidade entre os valores.

Figura 13 - Distribuição de velocidade na seção vertical central para o escoamento de Stokes

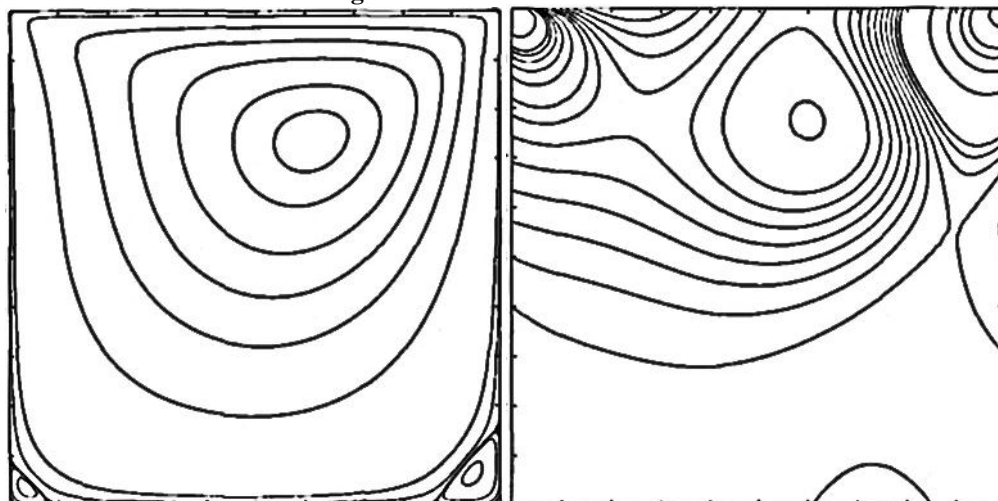


Fonte: O Autor (2014).

Nota: u_∞ denota a velocidade máxima na seção.

Na segunda situação, estudou-se o caso em que o escoamento possui número de Reynolds igual a 100, calculado tomando-se como comprimento característico (L) o valor correspondente ao comprimento da face onde a velocidade tangencial é aplicada. Na figura 14, são exibidos os resultados obtidos por Ciarlet e Lions (2003).

Figura 14 - Escoamento $Re=100$



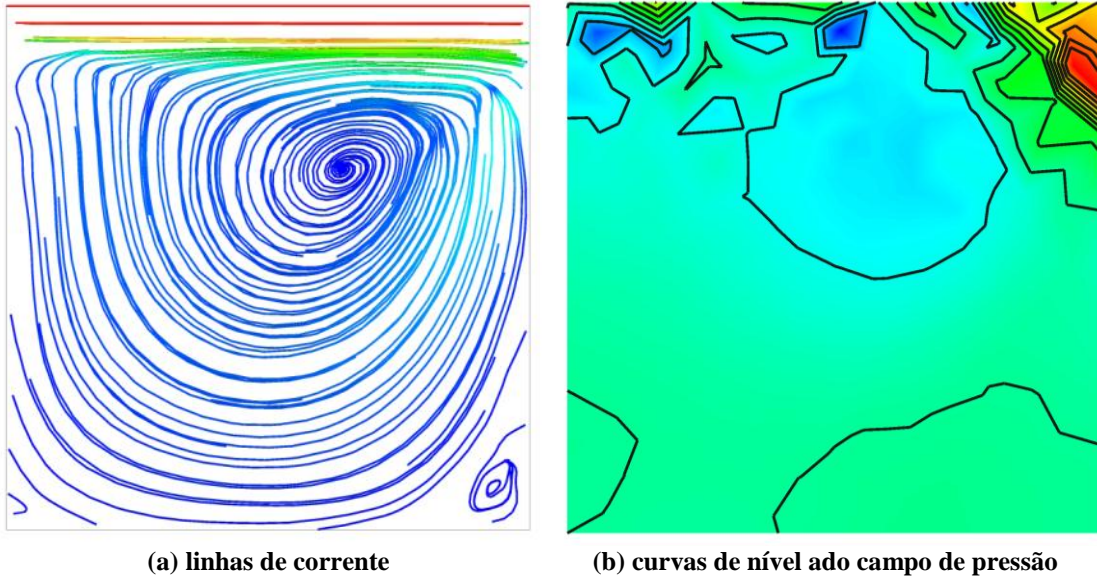
(a) linhas de corrente
Fonte: CIARLET, LIONS (2003).

(b) curvas de nível do campo de pressão

A seguir, na figura 15, são apresentados os resultados obtidos para o escoamento com número de Reynolds igual a 100, onde se verifica uma boa aproximação em relação aos

resultados obtidos por Ciarlet e Lions (2003), principalmente no que diz respeito à distribuição das linhas de corrente.

Figura 15 - Resultados obtidos para $Re=100$

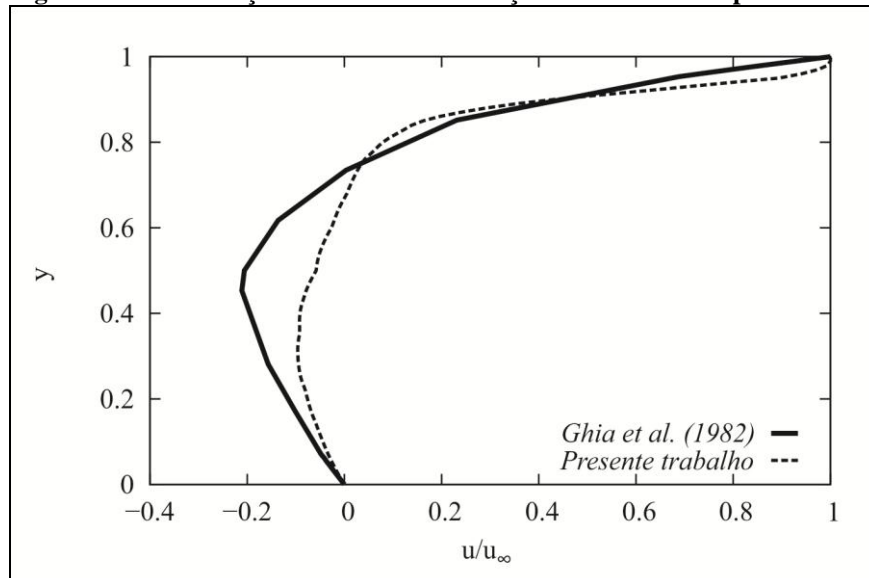


Fonte: O Autor (2014).

Ao analisarmos os gráficos de pressão, pode-se perceber que algumas imprecisões surgem nos resultados, especialmente nos elementos localizados na parte superior da malha.

A fim de se comparar a distribuição de velocidade, construiu-se também o gráfico de velocidade adimensional para essa situação, onde fica evidente a perda de precisão em relação à simulação realizada anteriormente, para o escoamento de Stokes.

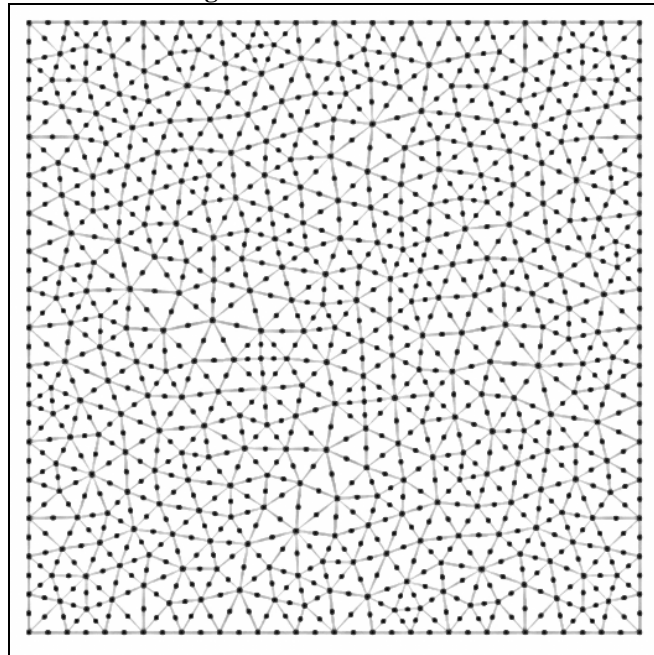
Figura 16 - Distribuição de velocidade na seção vertical central para $Re=100$



Fonte: O Autor (2014).

Pode-se perceber que para este caso, houve maior diferença nos resultados. Diante disso, optou-se pela realização de uma nova simulação, essa vez com uma malha mais refinada (figura 17), esta contando com 680 elementos, 373 nós para a pressão e 1425 nós para a velocidade.

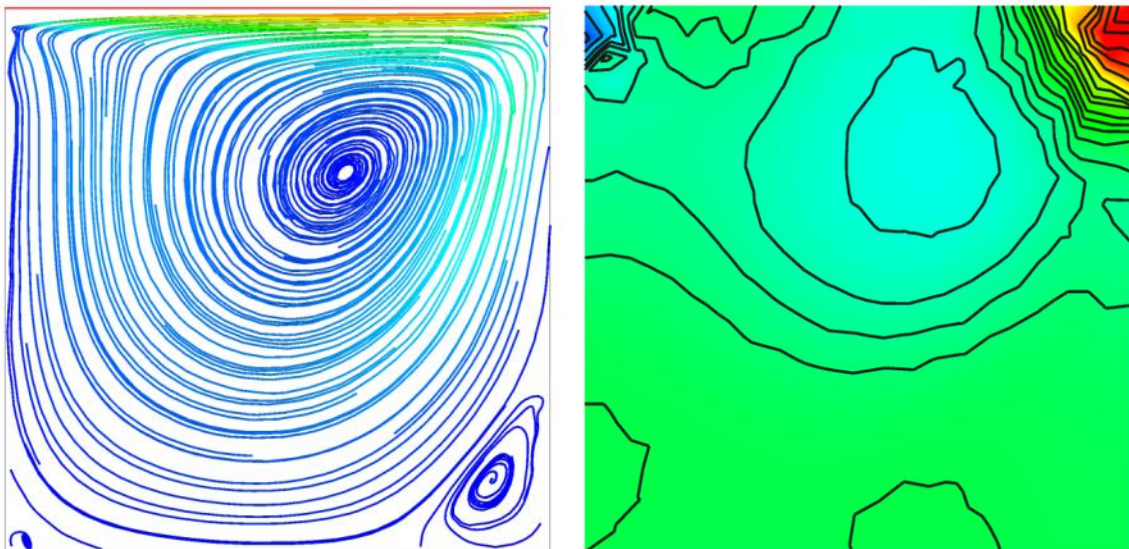
Figura 17 - Malha refinada



Fonte: O Autor (2014).

Com esta malha, obtiveram-se melhores resultados, expostos na figura 18.

Figura 18 - Resultados obtidos para $Re=100$ com a malha refinada



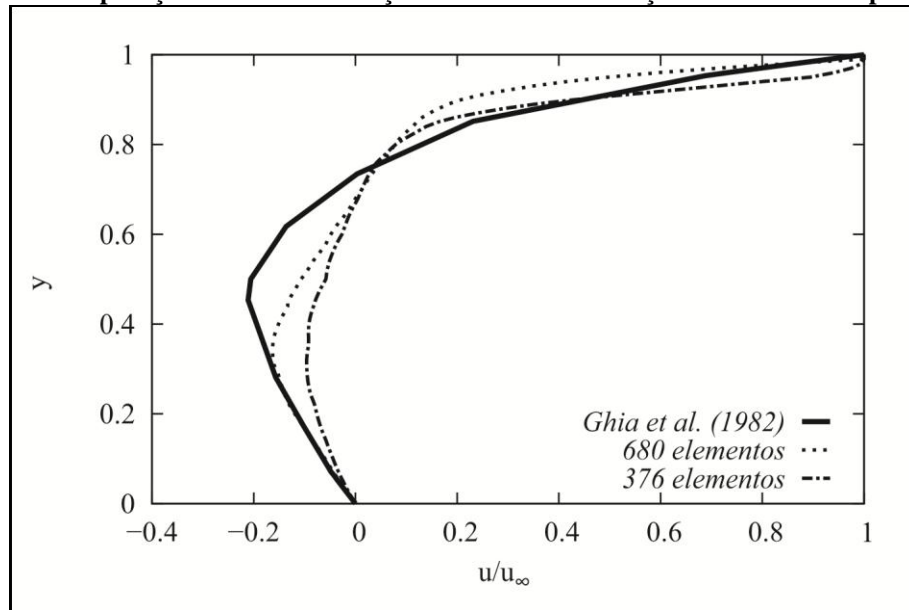
(a) linhas de corrente

(b) curvas de nível do campo de pressão

Fonte: O Autor (2014).

Ainda, para fins comparativos, construiu-se o gráfico com a distribuição das velocidades (figuras 19), para as duas simulações realizadas: uma malha com 376 elementos e outra com 680 elementos, além do resultado obtido por Ghia et al. (1982).

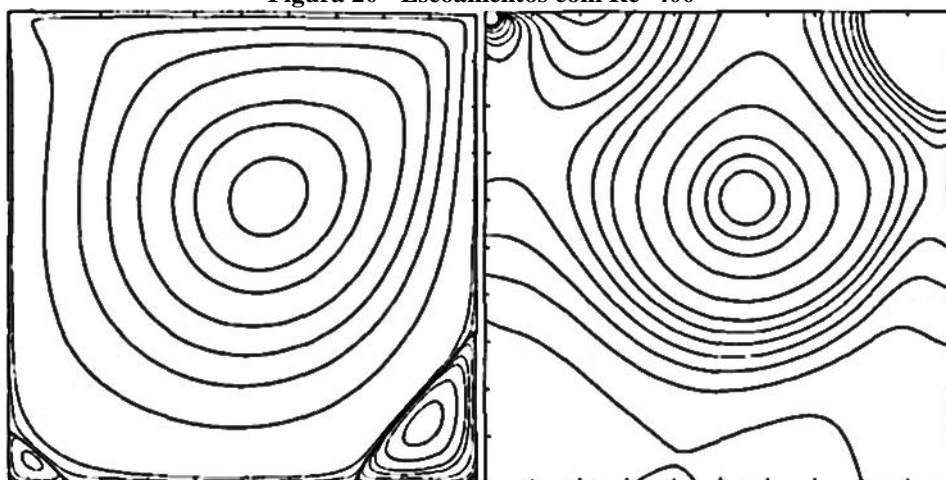
Figura 19 - Comparação entre a distribuição de velocidade na seção vertical central para $Re=100$



Fonte: O Autor (2014).

Em seguida, analisou-se também o comportamento do escoamento ao elevar o número de Reynolds para 400, primeiramente com a malha inicial, de 376 elementos. Para esta situação, novamente utilizaram-se os dados apresentados por Ciarlet e Lions (2003), exibidos na figura 20, seguidos pelos resultados obtidos na simulação realizada (figura 21).

Figura 20 - Escoamentos com $Re=400$

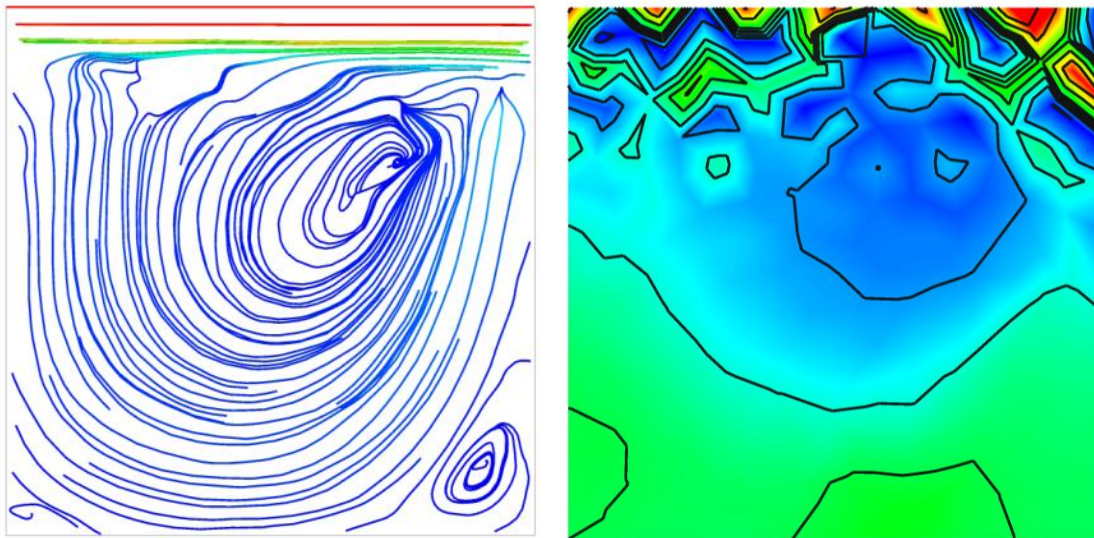


(a) linhas de corrente

(b) curvas de nível do campo de pressão

Fonte: CIARLET, LIONS (2003).

Figura 21 - Resultados para Re=400



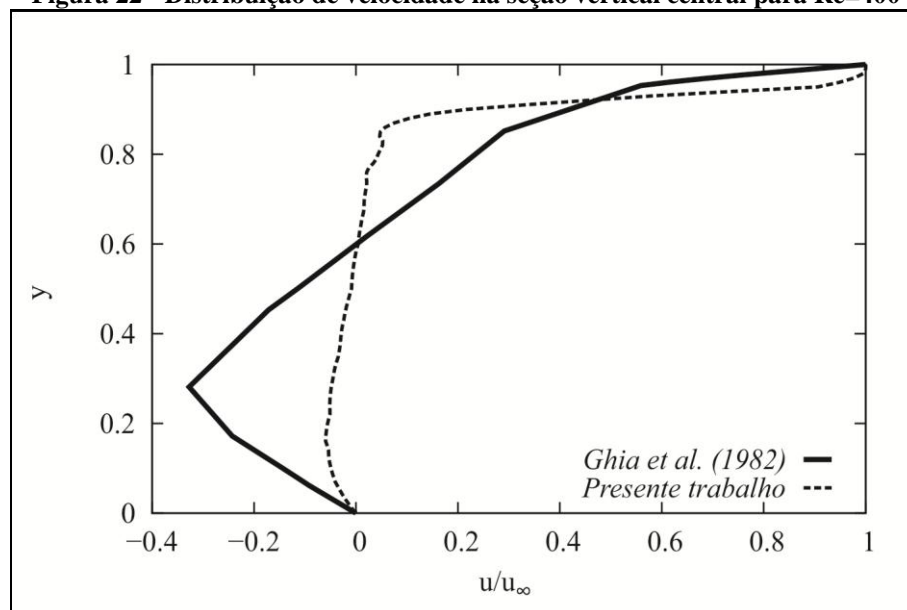
(a) linhas de corrente

(b) curvas de nível do campo de pressão

Fonte: O Autor (2014).

Neste caso, pode-se perceber a perda significativa da estabilidade numérica do programa. Observa-se ainda que as linhas de corrente, apesar de parecidas com os resultados de Ciarlet e Lions (2003), indicam um princípio de formação de vórtices em locais não equivalentes quando comparadas com a figura 20a. Além disso, os diagramas de pressão apresentaram resultados muito díspares. Ainda assim, traçou-se o gráfico com a distribuição de velocidades ao longo da linha vertical central, analogamente às situações anteriores (figura 22), onde se comprova também variação significativa com a resposta esperada.

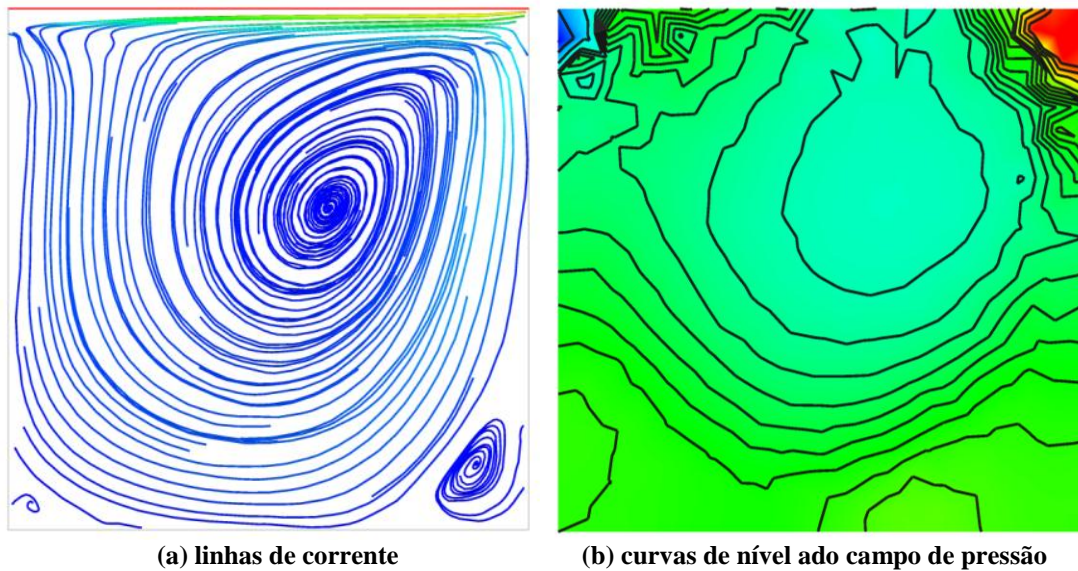
Figura 22 - Distribuição de velocidade na seção vertical central para Re=400



Fonte: O Autor (2014).

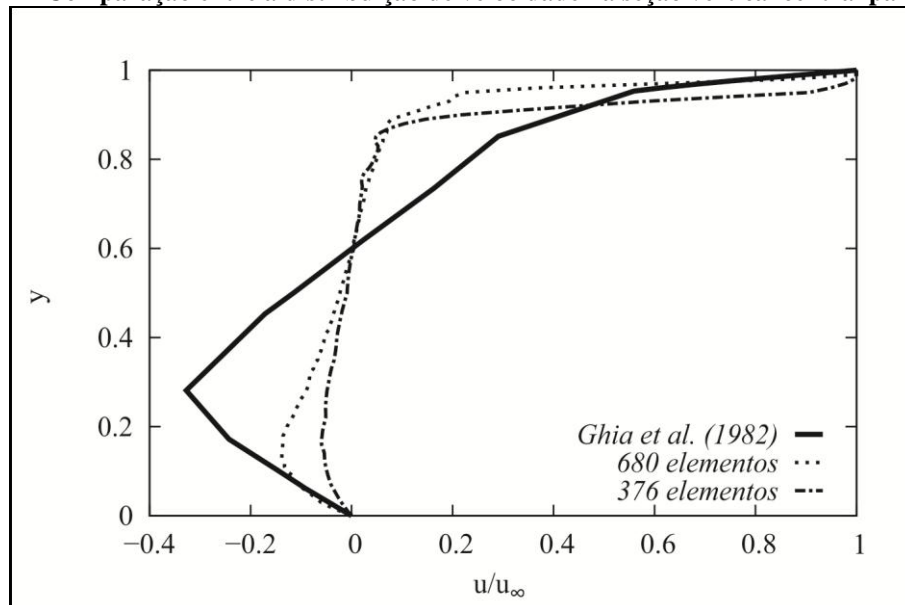
Analogamente ao caso de $Re=100$, diante da disparidade de resultados, optou-se pela realização de uma nova simulação do escoamento, dessa vez com a utilização da malha refinada (com 680 elementos), sendo que seus resultados são expostos nas figuras 23 e 24.

Figura 23 - Resultados obtidos para $Re=400$ com a malha refinada



Fonte: O Autor (2014).

Figura 24 - Comparação entre a distribuição de velocidade na seção vertical central para $Re=400$



Fonte: O Autor (2014).

Através dos gráficos apresentados anteriormente, observa-se que embora tenham sido obtidos resultados satisfatórios quanto à distribuição das linhas de corrente, há alguma divergência quanto ao perfil de velocidades na seção vertical intermediária.

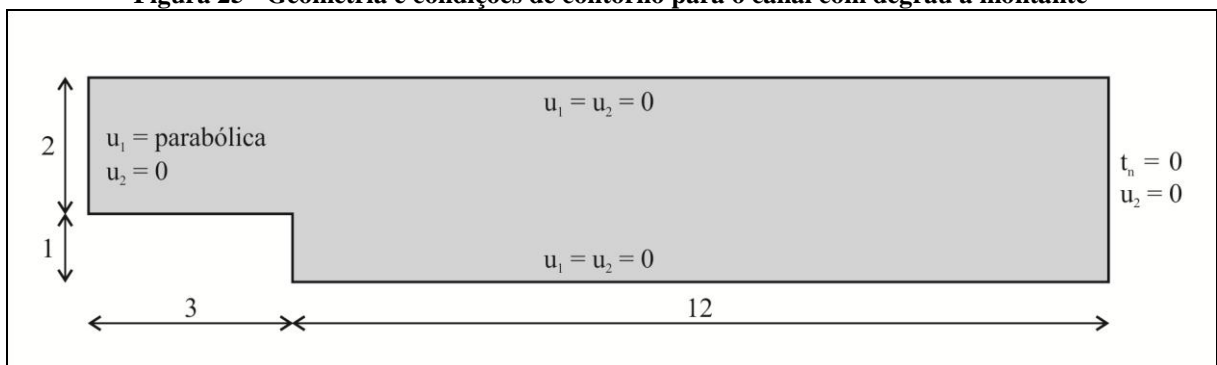
Ao analisar mais profundamente as figuras 19 e 24, percebe-se que com o aumento do refinamento da malha utilizada, pode-se melhorar significativamente o resultado. Em contrapartida, essa medida acaba por aumentar o custo computacional da simulação, exigindo tempos de processamento maiores.

Outras medidas aplicáveis para melhorar a convergência dos resultados estão relacionadas com a modificação do passo de tempo, ou a alteração das unidades das variáveis informadas ao programa, de modo a induzir os termos da matriz \mathbf{K} a terem a mesma ordem de grandeza.

4.2 CANAL COM DEGRAU A MONTANTE

Este exemplo também é um dos problemas mais conhecidos e aplicados para a validação e comparação de resultados de modelos envolvendo as equações de Navier-Stokes. Trata-se de um canal com paredes nas superfícies inferior e superior, ambas com condição de não escorregamento; na entrada do escoamento o perfil de velocidades horizontais deve ser parabólico e a componente vertical, nula. Além disso, impõe-se a condição de pressão uniforme na saída do canal, sendo que a componente vertical da velocidade também deve ser nula neste contorno. A seguir, na figura 25, são representadas com mais detalhes a geometria e as condições de contorno do problema proposto. Para este exemplo, utilizaram-se os resultados disponibilizados por Ciarlet e Lions (2003) para fins de comparação.

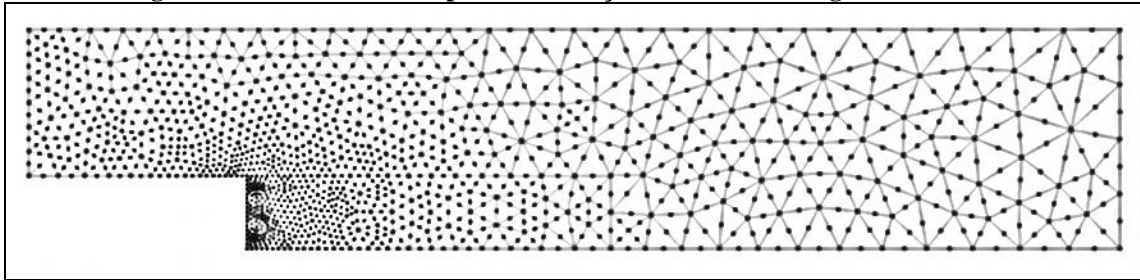
Figura 25 - Geometria e condições de contorno para o canal com degrau a montante



Fonte: Adaptado de ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000).

Para este exemplo, é necessário que a malha empregada possua bom refinamento em regiões críticas do escoamento, isto é, requer que os elementos sejam menores na região onde ocorre a formação de vórtices. Assim, optou-se pela utilização de uma malha (figura 26), possuindo 716 elementos, 402 nós para a variável pressão e 1519 nós para a variável velocidade.

Figura 26 - Malha utilizada para a simulação do canal com degrau a montante



Fonte: O Autor (2014).

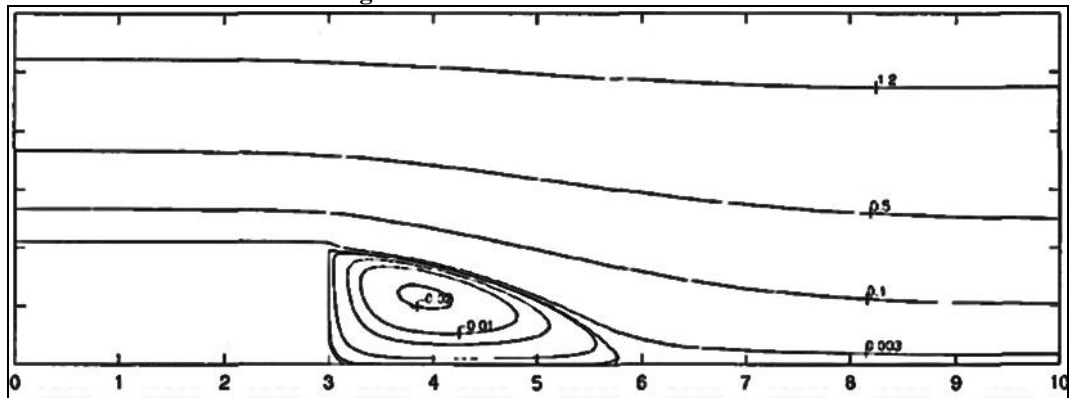
Ciarlet e Lions (2003) não informam a quantidade exata de nós e de elementos da malha utilizada em sua análise. Porém, como se pode analisar na figura 27, o elemento finito empregado na simulação é quadrilateral, e observa-se ainda uma densidade maior de elementos localizados nas regiões dos contornos e na área próxima ao degrau.

Figura 27 - Malha de elementos finitos utilizada por Ciarlet e Lions (2003)

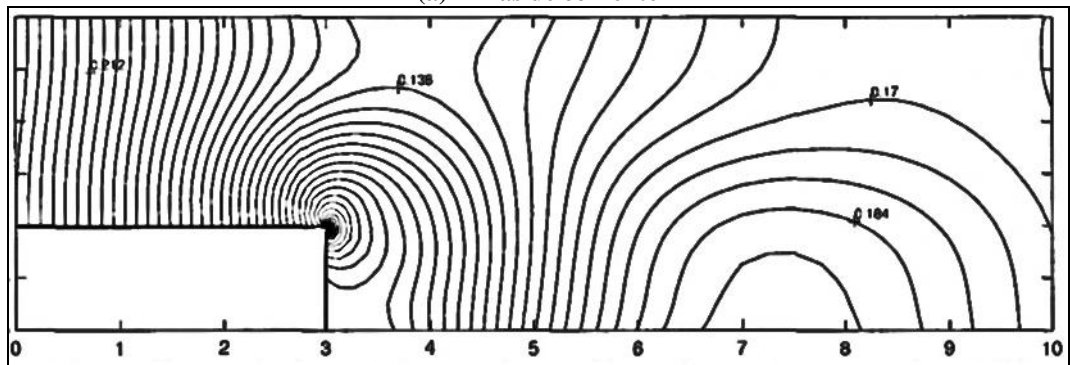


Fonte: CIARLET, LIONS (2003).

O primeiro exemplo de aplicação do programa para este problema foi a simulação de um escoamento com número de Reynolds igual a 50. Neste caso, tal parâmetro foi calculado tomando-se como comprimento característico (L) a altura do degrau, de acordo com o que é indicado por Ciarlet e Lions (2003), cujos resultados para as linhas de corrente e para o diagrama de pressões são apresentados na figura 28.

Figura 28 - Escoamento com $Re=50$ 

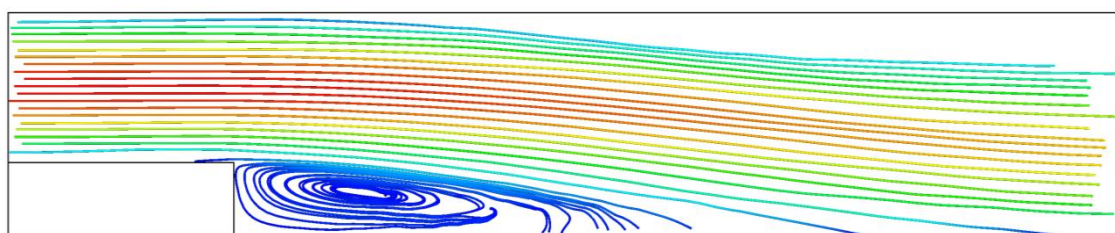
(a) linhas de corrente



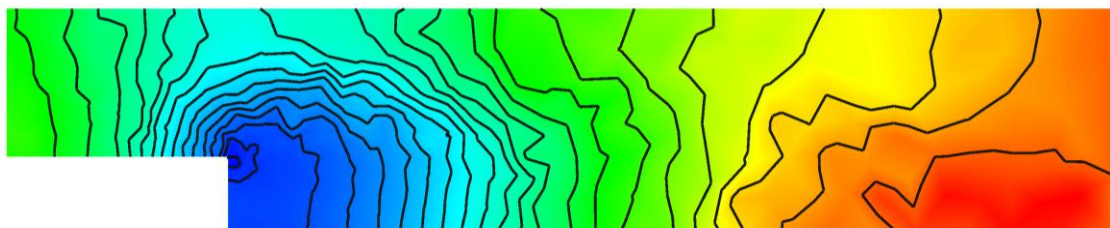
(b) curvas de nível do campo de pressão

Fonte: CIARLET, LIONS (2003).

A análise realizada pode ser observada na figura 29, onde são apresentadas as linhas de corrente e o campo de pressão.

Figura 29 - Resultados obtidos para $Re=50$ 

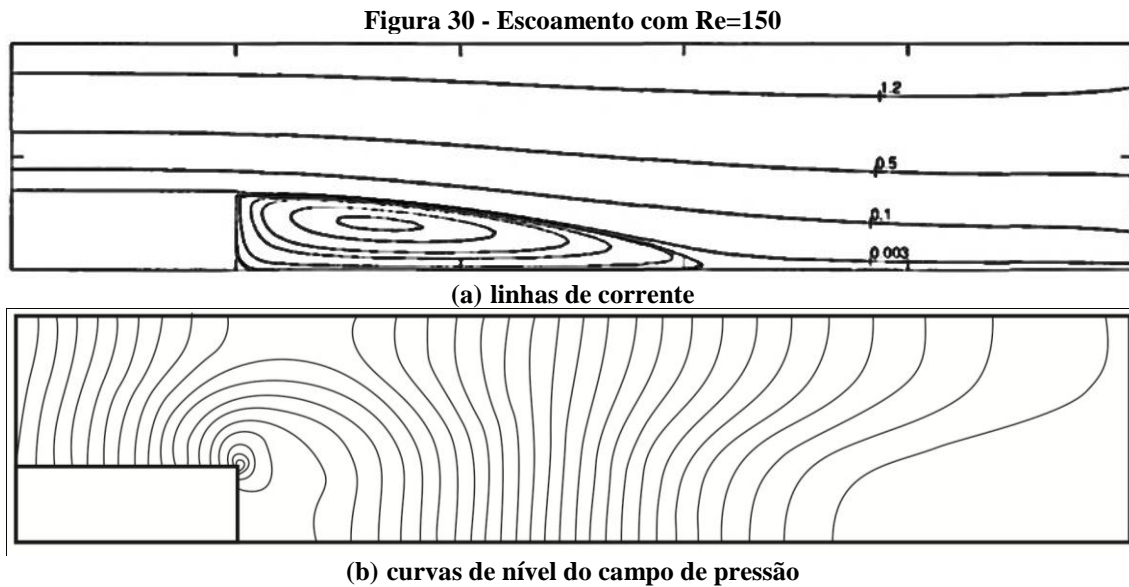
(a) linhas de corrente



(b) campo de pressão

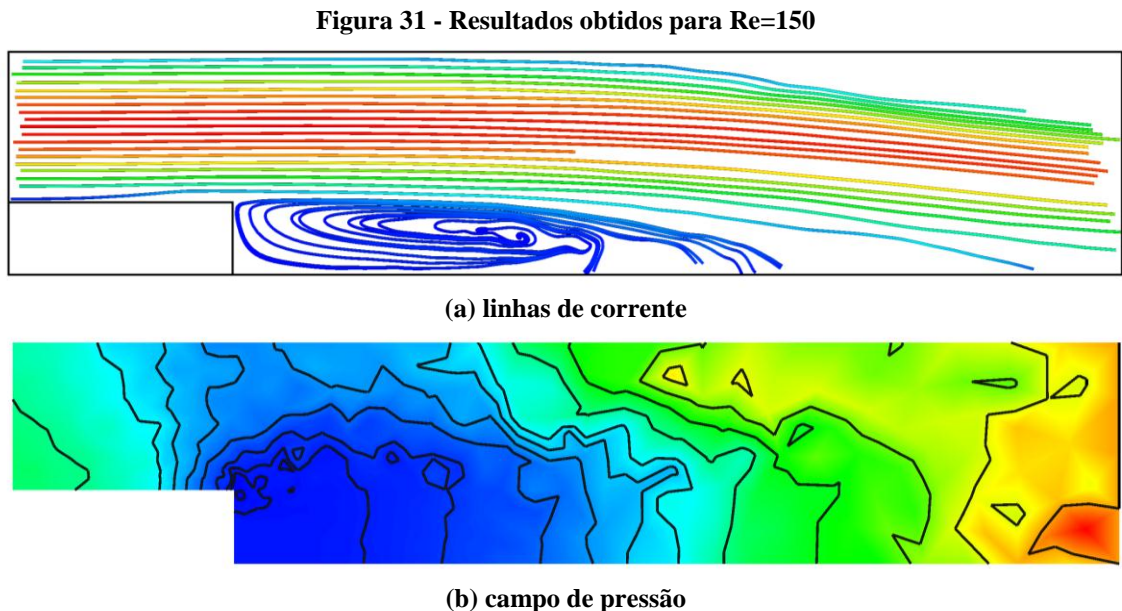
Fonte: O Autor (2014).

Posteriormente, analisou-se também a situação em que há o incremento no número de Reynolds, que passa a assumir o valor de 150. Esta situação também foi simulada por Ciarlet e Lions (2003), cujos resultados são mostrados na figura 30.



Fonte: CIARLET e LIONS (2003).

Por fim, os resultados obtidos para esta situação são apresentados na figura 31.



Fonte: O Autor (2014).

Analogamente ao exemplo da cavidade quadrada, observa-se que há certa disparidade entre os resultados obtidos. Contudo, essa divergência se torna aceitável quando

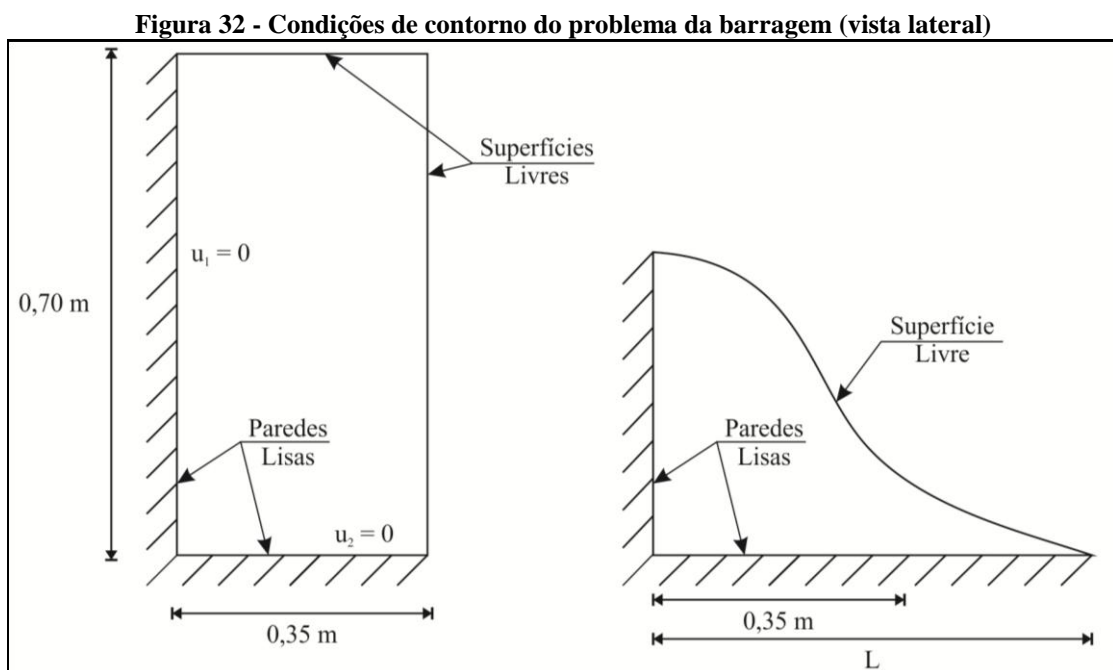
se observa o número de elementos contidos na malha utilizada por Ciarlet e Lions (2003), de modo que as imprecisões obtidas na análise podem ser atribuídas à falta de refinamento na malha empregada. Além disso, a maior divergência de resultados é observada à medida que se observa a região onde a malha é mais grosseira, com elementos maiores.

Nesse sentido, pode-se concluir que com o aumento do número de elementos para uma situação similar à utilizada por Ciarlet e Lions (2003), a solução tende a se aproximar da configuração esperada, novamente com a desvantagem de se aumentar consideravelmente o tempo de processamento.

4.3 BARRAGEM

Este exemplo pode ser analisado como um tanque ou barragem de dimensões 0,35 m de largura e 0,7 m de altura, contendo um fluido de densidade 1000 kg/m^3 , viscosidade $0,1 \text{ Pa.s}$, sob a ação da aceleração da gravidade com valor de 10 m/s^2 . Inicialmente o fluido encontra-se em repouso, com distribuição hidrostática de pressão. Em seguida uma das paredes laterais é removida, dando início ao escoamento. Na figura 32, é apresentado um esquema que mostra as condições de contorno empregadas para as paredes do tanque (paredes lisas).

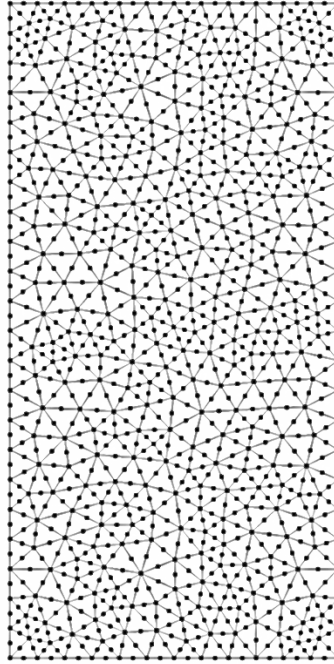
Este exemplo tem o objetivo de submeter o programa ao teste de movimentação da malha, possível através da implementação da descrição ALE na formulação.



Fonte: Adaptado de SANCHES (2011).

Para a simulação deste exemplo, utilizou-se uma malha com 640 elementos, 355 nós para a pressão e 1349 nós para a velocidade, como mostra a figura 33.

Figura 33 - Malha de elementos finitos utilizada para o problema da barragem



Fonte: O Autor (2014).

A seguir, nas figuras 34 a 36, são mostrados os perfis de velocidade horizontal (x), velocidade vertical (y), a configuração da malha deformada. A velocidade encontra-se expressa em dm/s.

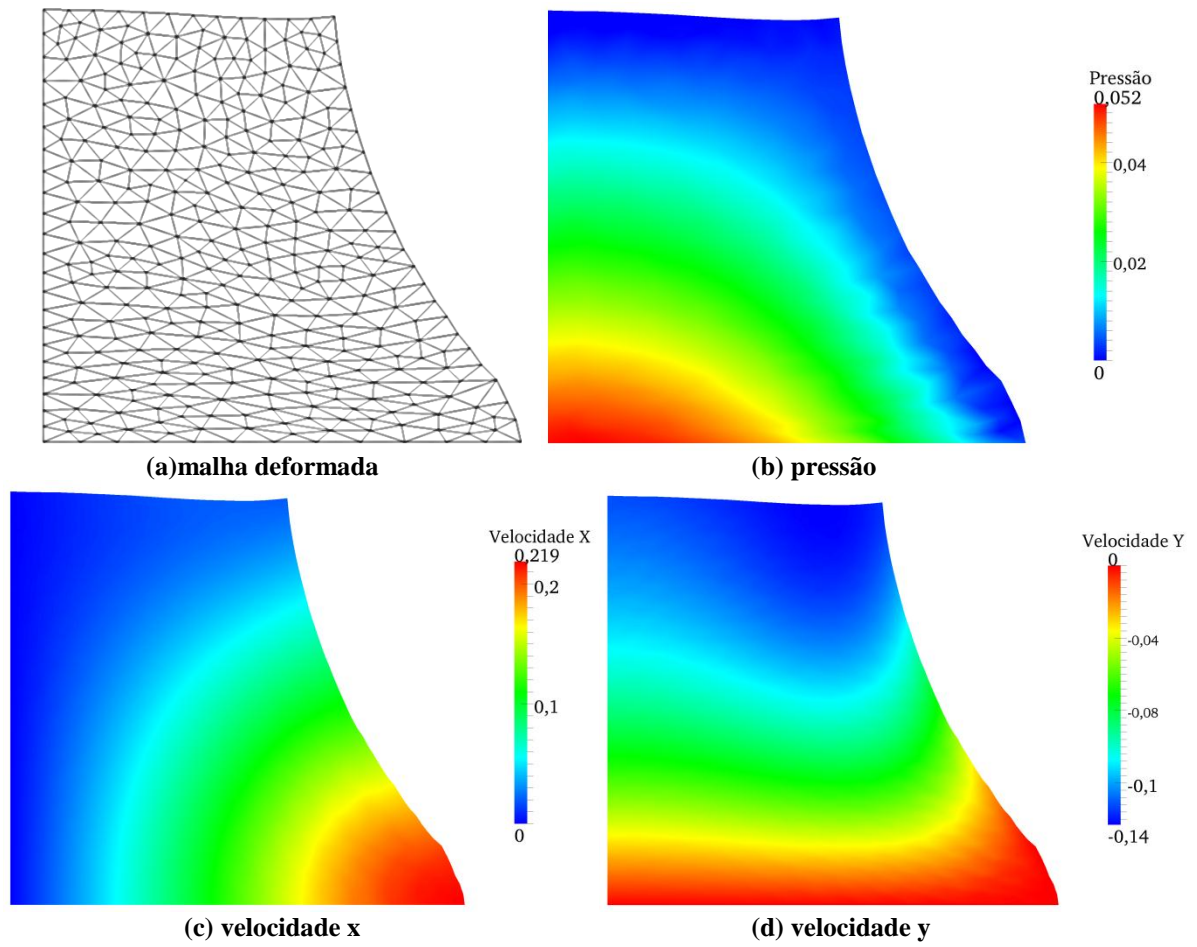
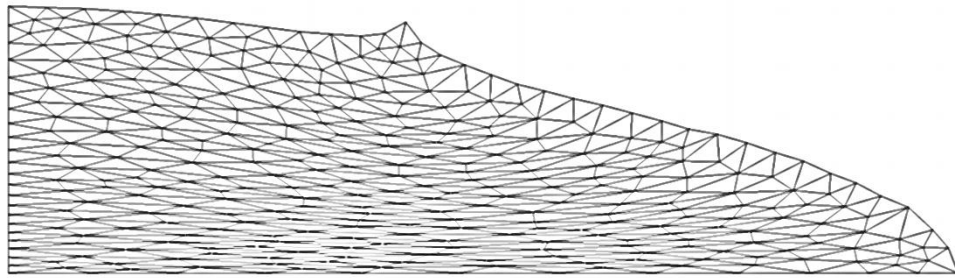
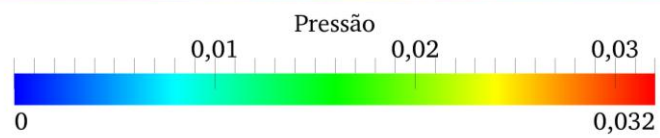
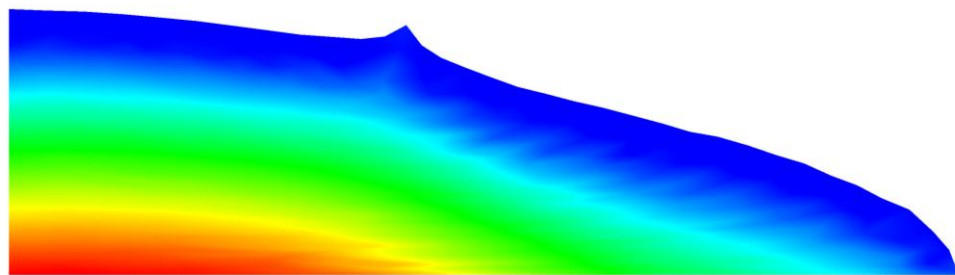
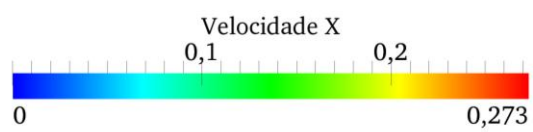
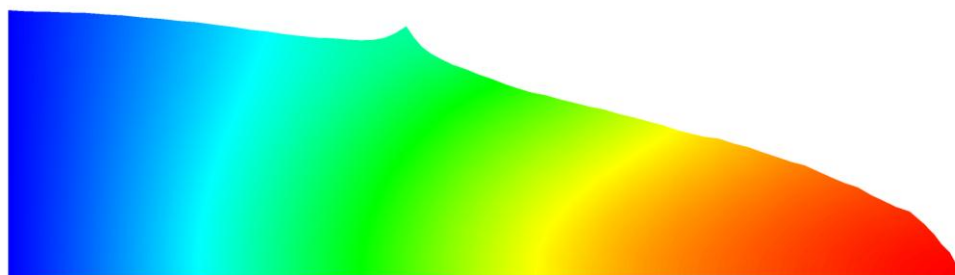
Figura 34 - Instante de tempo $t = 2,0$ s

Figura 35 - Instante de tempo $t = 4,0$ s

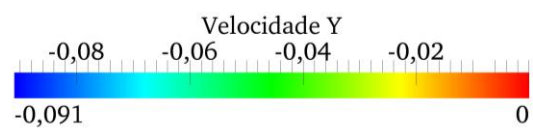
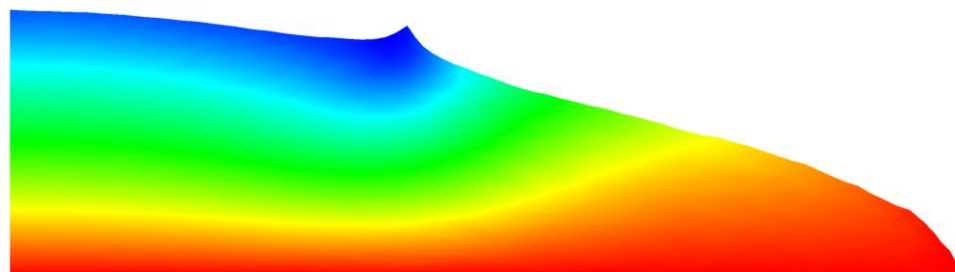
(a) malha deformada



(b) pressão

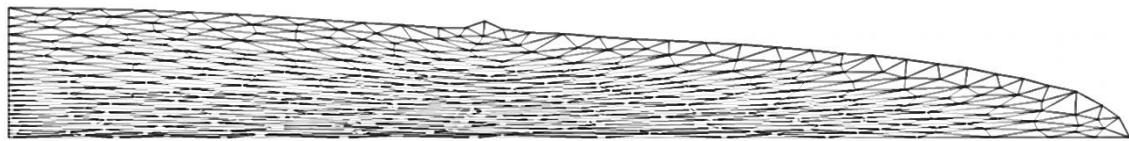


(c) velocidade x

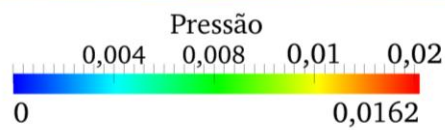
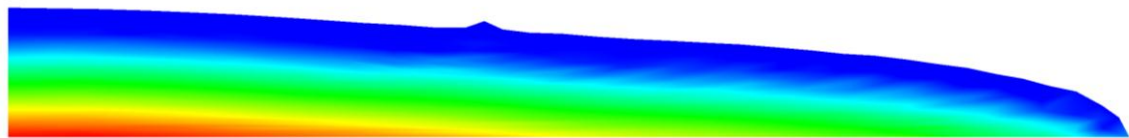


(d) velocidade y

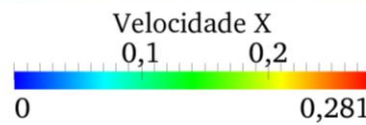
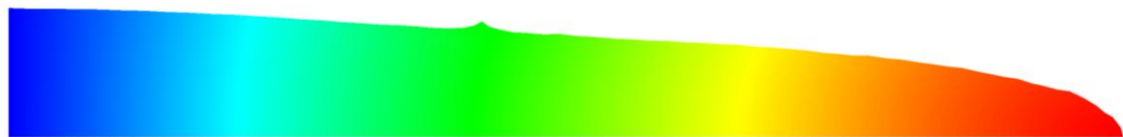
Fonte: O Autor (2014).

Figura 36 - Instante de tempo $t = 6,0$ s

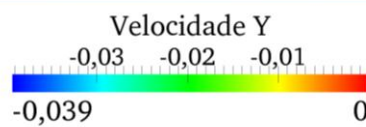
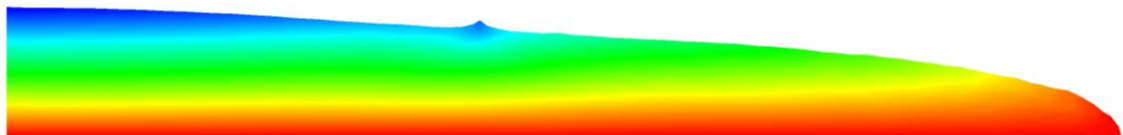
(a) malha deformada



(b) pressão



(c) velocidade x



(d) velocidade y

Fonte: O Autor (2014).

Quanto a este último exemplo, verificou-se que mesmo possuindo algumas distorções com a evolução do escoamento, localizadas nos vértices da malha indeformada, o programa mostrou-se eficiente para a simulação de problemas com contorno móvel.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral deste trabalho foi atingido, e consistia no desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de realizar a simulação de escoamentos incompressíveis, bidimensionais, com fronteira móvel empregando o Método dos Elementos Finitos. Ao longo do trabalho, fica claro o fato de que a escolha do elemento finito a ser utilizado não deve ser feita aleatoriamente. Matematicamente, a condição LBB deve ser satisfeita, o que demonstra que existem restrições quanto à escolha do elemento e de suas funções de forma para que o modelo misto possa ter convergência numérica. Desse modo, uma das possibilidades de aperfeiçoamento do código é a realização de testes com outros elementos finitos e/ou funções de forma.

Quanto ao algoritmo de integração temporal, empregou-se um método implícito com aproximação de segunda ordem de precisão. Logo, perceberam-se melhores valores e melhor convergência para os escoamentos com menor número de Reynolds, pois nestes casos o problema torna-se de viscosidade dominante com ausência de turbulência. Constatou-se a perda de estabilidade nos resultados à medida que se aumentava o número de Reynolds. Para estes casos, deve-se refinar malha para que vórtices possam ser capturados com maior precisão, sendo que a utilização de métodos explícitos ou semi-implícitos para a integração no tempo também são aplicadas com sucesso por alguns autores sem a necessidade de se empregar o método de Newton-Raphson, o qual deixa de convergir.

De um modo geral, os resultados obtidos através do programa desenvolvido neste trabalho se mostraram satisfatórios, levando-se em conta o grau de refinamento das malhas utilizadas nas análises. Contudo, para a obtenção de resultados mais precisos e confiáveis, a utilização de malhas com maior número de elementos se mostra mais eficiente, apesar de acarretar em um maior custo computacional.

Problemas de engenharia que possam ser simplificados para uma situação bidimensional podem ser simulados no programa, desde que a malha empregada na análise possua refinamento adequado. Como sugestão para trabalhos futuros, indica-se ainda o aprimoramento do código com a utilização de outras técnicas como o Método de Galerkin Descontínuo, de outras técnicas de movimentação da malha e/ou de formulações alternativas a ALE (Space-time, contornos imersos etc.), além de adaptá-lo de modo a realizar também a simulação de problemas tridimensionais.

6 REFERÊNCIAS

ASSAN, A. E., **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 1. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

BABUŠKA, I. **Error-bounds for finite element method**. Numer. Math. 16, 322-333, 1970/71

BASILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R.; **NURBS-Based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components**. Computational Mechanics, 43(1):143-150, 2008.

BASILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; **Computational Fluid-Structure Interaction**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.

BASILEVS, Y. et al. **Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations**. Computational Mechanics, 43(1): 3-37, 2008.

BREZZI, F. **On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers**. RAIRO Anal. Numér. 8(R-2), 129-151, 1974.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J.; **Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations**. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 32, n. 1-3, p. 199-259, 1982. ISSN 0045-7825.

CALLE, J. L. D.; DEVLOO, P. R. B.; GOMES, S. M.; **Stabilized discontinuous galerkin method for hyperbolic equations**. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 194, n. 17, p. 1861-1874, 2005. ISSN 0045-7825.

CHUNG, T. J.; **Computational fluid dynamics**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

CIARLET, P. G.; LIONS, J. L.; **Numerical Methods for Fluids: Part 3**. Amsterdam, NL: Elsevier Science B. V., 2003.

DEVLOO, P. R. B.; FORTI, T.; **Método de elementos finitos contínuo e descontínuo combinados aplicado a problema de convecção-difusão**. In XXVI Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia – CILAMCE. Guarapará – ES, Brasil: [s.n.], 2005.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.; **An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. v.33, n. 1-3, p. 689-723, 1982.ISSN 0045-7825.

DONEA, J.; HUERTA, A.; **Finite Element Methods for Flow Problems**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2003.

FERZIGER, J.; **Simulation of complex turbulent flows: recent advances and prospects in wind engineering**. Journal of wind engineering and industrial aerodynamics, v. 46-47, p. 195-212, 1993. ISSN 0167-6105. Proceedings of the 1st International on Computational Wind Engineering.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J.; **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 6. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T.; **High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method**. Journal of Computational Physics, v. 48, 387-411, 1982

GMSH. Version 2.8.4. France: GEUZAIN, C.; REMACLE, J. F., 2014.

GNUPLOT. Version 4.7. BRÖKER *et al.*, 2013.

KITWARE PARAVIEW. Version 4.1.0. USA: Kitware, Inc., 2013.

LADYZHENSKAYA, O. A. **The mathematical theory of viscous incompressible flow**. Gordon and Breach Science, New York, 1969.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos de coordenadas generalizadas**. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H.; **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos**. 4.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

NITHIARASU, P.; **An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme.** International Journal for Numerical Methods in Fluids, 48, n. 12, p. 1415-1428, Aug 30 2005. ISSN 0271-2091.

ODEN, J.; BABUSKA, I.; BAUMANN, C.; **A discontinuous hp finite element method for diffusion problems.** Journal of Computational Physics, 14, n. 2, p. 491-519, Nov 1 1998. ISSN 0021-9991.

POTTER, M. C.; WIGGERT, D. C.; **Mecânica dos Fluidos.** 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

REDDY, J. N.; **An introduction to the finite element method.** 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2006.

REDDY, J. N.; GARTLING, David K.; **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics.** 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2000.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B.; **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.10, n. 43, p. 33-54, 2008.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B.; **Fluid-structure interaction using an arbitrary lagrangian-eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver.** Mecânica Computacional, Buenos Aires, v. XXIX, p.1627-1647, 2010.

SANCHES, R. A. K. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos.** 2011. 228 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

STRANG, G.; FIX, G.; **An analysis of the finite element method.** 2nd. ed. [S.I.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.

TEIXEIRA, P. R. F.; **Simulação numérica de escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis Aplicando o Método dos elementos finito.** Tese (Dissertação de Mestrado) – UFRGS, Rio Grande do Sul, Brasil, 1996.

TEIXEIRA, P. R. F.; **Simulação Numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método de elementos finitos.** 237 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

THOMPSON, L. L.; PINSKY, P. M.; **A Space-time finite element method for exterior acoustics problem.** The Journal of the Acoustical Society of America, v. 99, p. 3297-3311, 1996.

WANG, X.; LIU, W. K. **Extended immersed boundary method using FEM and RKPM.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. v. 193, p. 1305-1321, 2004.

WHITE, F. M.; **Mecânica dos Fluidos.** 4. ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R.; **Search for a general fluid mechanics algorithm.** *Frontiers of computational fluid dynamics*, John Wiley & Sons Inc., p.101-113,1994.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; **The Finite Element Method.** Oxford, England: Butterworth-heinemann Linacre house, Jordan Hill, 2000a. (v.1 – The Basis, 5.ed.).

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; **The Finite Element Method.** Oxford, England: Butterworth-Heinemann Linacre house, Jordan Hill, 2000b. (v.3 – Fluid Dynamics, 5.ed.).