

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LETICIA BARIZON COL DEBELLA

**ESTUDO DA ANALOGIA DE GRELHA NO CÁLCULO DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO
ARMADO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2015

LETICIA BARIZON COL DEBELLA

ESTUDO DA ANALOGIA DE GRELHA NO CÁLCULO DE LAJES MACIÇAS DE
CONCRETO ARMADO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como requisito parcial à
obtenção do título de Bacharel em
Engenharia Civil, da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná, *Câmpus*
Pato Branco.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Lacerda
Dias

PATO BRANCO

2015



TERMO DE APROVAÇÃO

ESTUDO DA ANALOGIA DE GRELHA NO CÁLCULO DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO

LETICIA BARIZON COL DEBELLA

No dia 19 de agosto de 2015, às 10h30min, na sala N109 da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, este trabalho de conclusão de curso foi julgado e, após arguição pelos membros da Comissão Examinadora abaixo identificados, foi aprovado como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, conforme Ata de Defesa Pública nº18-TCC/2015.

Orientador: Prof.Dr. GUSTAVO LACERDA DIAS (DACOC/UTFPR-PB)

Co-orientador: Prof. Dr. RODRIGO VILLACA SANTOS (DAMEC/UTFPR-PB)

Membro 1 da Banca: Prof. Dr. VOLMIR SABBI (DACOC/UTFPR-PB)

Membro 2 da Banca: Prof^a. Dr^a PAÔLA REGINA DALCANAL (DACOC/UTFPR-PB)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço ao professor orientador desse trabalho, Prof. Dr. Gustavo Lacerda Dias, por toda a paciência, e confiança em mim.

Gratifico meu namorado, e co-orientador deste trabalho, Rodrigo Villaca Santos por toda força e apoio, em todos os momentos.

Reverencio também todos os professores do curso de Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Pato Branco, pelos conhecimentos repassados.

Estendo meus agradecimentos a todos que de alguma forma, contribuíram para a conclusão desta etapa.

RESUMO

COL DEBELLA, Leticia Barizon. **Estudo da analogia de grelha no cálculo de lajes maciças de concreto armado**. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2015.

Para o estudo do comportamento das lajes maciças, diversos modelos matemáticos têm sido propostos. Esses modelos são utilizados para analisar os esforços internos e deslocamentos, devido às formas, condições de contorno e de carregamentos impostos sobre as lajes. Dentre os processos que possibilitam a consideração da estrutura no seu aspecto tridimensional, destaca-se o processo da analogia de grelha que tem como ideia principal a divisão das lajes que compõem o pavimento em um número adequado de barras, onde as rigidezes à torção e à flexão da laje são concentradas nessas barras. Esse processo permite reproduzir um comportamento estrutural bastante aproximado da realidade, podendo-se variar a geometria e as situações do arranjo estrutural. Diferentemente da analogia de grelha, o método analítico através das tabelas de Bares adota a decomposição da estrutura em lajes e vigas para a análise individual de cada elemento. Essa simplificação pode não traduzir corretamente o comportamento da estrutura. Nesse contexto, no presente trabalho foram comparados os valores dos momentos fletores máximos obtidos pela analogia de grelha, utilizando o *software* SAP2000, com aqueles obtidos empregando as tabelas de Bares. Esse comparativo foi aplicado a três diferentes geometrias de lajes: uma laje maciça quadrada, uma retangular e um painel contendo duas lajes. Dentro do âmbito da analogia de grelha, foram testadas hipóteses a respeito da influência do refinamento da malha, da redução da rigidez a torção das barras, e da flexibilidade das vigas que servem de apoios a essas lajes. Por meio desses comparativos, pôde-se observar mudanças significativas nos valores dos momentos fletores, reforçando a validação e a importância desse estudo.

Palavras-chave: Lajes Maciças; Momentos Fletores; Tabelas de Bares; Analogia de Grelha.

ABSTRACT

COL DEBELLA, Leticia Barizon. **Study of grillage analogy in massive slabs of concrete**. 2015. Monograph (Civil Engineering) – Federal Technological University of Paraná. Pato Branco, 2015.

For the study of the behaviour of massive slabs, several mathematical models have been proposed. These models are used to analyse the internal efforts and displacements due to shapes, boundary conditions and loads of taxes on the slabs. Among the processes that allow the consideration of the structure in its three-dimensional aspect, we highlight the process of grillage analogy that has as main idea the division of the slabs that make up the pavement in an appropriate number of bars, where the torsional and flexural rigidities of the slab are concentrated in these bars. This process lets you play a structural behavior of reality, and may close enough if you vary the geometry and the situations of structural arrangement. Unlike the grillage analogy, the analytical method through the tables of Bares adopts the structure decomposition into slabs and beams for the individual analysis of each element. This simplification may not translate correctly the behaviour of the structure. In this context, the present study were compared the values of maximum bending moments produced by the grillage analogy, using SAP2000 software, with those obtained using the tables of Bares. This comparison was applied to three different geometries of slabs: a massive slab square, a rectangle and a panel containing two slabs. Within the framework of the grillage analogy were tested hypotheses about the influence of mesh refinement, reducing the rigidity of torsion bars, and flexibility of the beams that serve as support for these slabs. Through these comparisons, was able to observe significant changes in values of bending moments, reinforcing the validation and the importance of this study.

Keywords: Massive Slabs; Bending Moments; Tables of Bares; Grillage Analogy.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – lajes e suas dimensões	16
Figura 02 – representação dos tipos de apoio	18
Figura 03 – casos de vinculação nas lajes	19
Figura 04 – viga de bordo com apoio	20
Figura 05 – laje em balanço engastada na viga de apoio	20
Figura 06 – engastamento elástico entre lajes contínuas l1 e l2, e seus momentos de engastamento ml1 e ml2	21
Figura 07 – compatibilização de momentos fletores nas lajes	23
Figura 08 – condição de engastamento em duas lajes adjacentes	24
Figura 09 – caso especial de vinculação da laje	25
Figura 10 – critério para uma borda com parte engastada e parte apoiada	25
Figura 11 – influência da deformação das vigas nos modelos de lajes	27
Figura 12 – grelha plana e suas coordenadas	33
Figura 13 – graus de liberdade de uma barra da grelha	33
Figura 14 – matriz rigidez da barra em relação ao sistema de eixos local	34
Figura 15 – a) laje maciça b) grelha equivalente da laje	35
Figura 16 – carregamento nodal e distribuído	38
Figura 17 – laje maciça quadrada e suas dimensões	45
Figura 18 – laje maciça retangular e suas dimensões	45
Figura 19 – painel de lajes maciças e suas dimensões	46
Figura 20 – organograma do roteiro do trabalho	47
Figura 21 – laje do exemplo 4.1	49
Figura 22 – malha 80x80 e 40x40 centímetros	50
Figura 23 – malha 25x25 e 20x20 centímetros	50
Figura 24 – malha 10x10 e 5x5 centímetros	50
Figura 25 – momentos fletores positivos máximos em função da rigidez e do refinamento da malha	52
Figura 26 – momentos fletores negativos máximos em função da rigidez e do refinamento da malha	53
Figura 27 – diagrama de momento fletor da laje sem redução da rigidez a torção, e a descontinuidade acentuada nos nós das barras provocadas pelo momento torsor	54
Figura 28 – diagrama de momento fletor da laje com 15% da rigidez a torção, uma menor descontinuidade nos nós das barras provocadas pelo momento torsor	55

Figura 29 – a) barra da grelha quando as dimensões “e” e “f” correspondem as equações de gere e weaver b) inversão das dimensões “e” e “f”	56
Figura 30 – laje do exemplo 4.2	57
Figura 31 – momentos fletores positivos máximos em x e em y em função da rigidez a torção e do refinamento da malha.....	58
Figura 32 – momentos fletores negativos máximos em x e em y em função da rigidez a torção e do refinamento da malha	58
Figura 33 – momentos fletores da laje maciça retangular quando a rigidez a torção é reduzida conforme a nbr 6118/2014	60
Figura 34 – momentos fletores da laje maciça quadrada quando a rigidez a torção é reduzida conforme a nbr 6118/2014	60
Figura 35 – momento fletor negativo na borda simplesmente apoiada	61
Figura 36 – laje quadrada modelada com os quatro vértices impedidos de se deslocarem verticalmente e com as vigas de borda flexíveis	62
Figura 37 – laje quadrada modelada com as quatro bordas impedidas de se deslocarem verticalmente	63
Figura 38 – momentos fletores na laje quadrada, quando as vigas são flexíveis.....	64
Figura 39 – momentos fletores na laje quadrada, quando as vigas são indeslocáveis verticalmente.....	64
Figura 40– deformação na laje sob apoios rígidos e flexíveis	65
Figura 41– painel de lajes com as suas respectivas dimensões e indicação de vão	66
Figura 42– momentos fletores no painel de lajes quando as vigas são flexíveis	67
Figura 43– momentos fletores no painel de lajes quando as vigas são indeslocáveis verticalmente.....	67
Figura 44– coeficientes $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$ para o cálculo dos momentos fletores máximos em lajes maciças de concreto armado, para o caso 1,2 e 3	79
Figura 45– coeficientes $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$ para o cálculo dos momentos fletores máximos em lajes maciças de concreto armado, para o caso 4,5 e 6	80
Figura 46– coeficientes $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$ para o cálculo dos momentos fletores máximos em lajes maciças de concreto armado, para o caso 7,8 e 9	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 – valores das cargas distribuídas	50
Tabela 02 – exemplo 4.1 - comparação entre os valores de momentos fletores máximos de modelos com diferentes reduções da rigidez a torção (J) e refinamento da malha	52
Tabela 03 – exemplo 4.1 - momentos fletores obtidos pelas tabelas de bares	52
Tabela 04 – relação entre cálculo dos momentos fletores por tabelas e por analogia de grelha	54
Tabela 05 – comparativo dos momentos torsões com os fletores para uma laje quadrada de espaçamento 40x40 centímetros	55
Tabela 06 – exemplo 4.2 - comparação entre os valores de momentos fletores máximos de modelos com diferentes reduções da rigidez a torção (J) e refinamento da malha	58
Tabela 07 – exemplo 4.2 – momentos fletores obtidos pelas tabelas de bares	58
Tabela 08 – relação entre momentos fletores obtidos pela analogia de grelha sem redução da rigidez a torção e tabelas de bares	59
Tabela 09 – comparativo dos valores de momento fletor da laje quadrada modelada com vigas flexíveis, com as tabelas de bares	63
Tabela 10 – comparativo dos valores de momento fletor da laje quadrada modelada com vigas indeformáveis, com as tabelas de bares.....	63
Tabela 11 – valores dos momentos fletores máximos do painel de lajes calculados com as tabelas de bares, e modelados com vigas flexíveis e indeformáveis.....	66
Tabela 12 – valores de momento fletor no painel de lajes modelado com vigas flexíveis de 14x40 centímetros	68

LISTA DE QUADROS

Quadro 01 – parâmetros da modelagem do exemplo 4.1	49
Quadro 02 – parâmetros da modelagem do exemplo 4.2	57

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
1.1 OBJETIVOS	12
1.1.1 Objetivo Geral	12
1.1.2 Objetivos Específicos	13
1.2 JUSTIFICATIVA	13
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1 LAJES MACIÇAS.....	16
2.2 CONDIÇÕES DE APOIO	17
2.2.1 Bordas imlesmente apoiadas	19
2.2.2 Bordas engastadas	20
2.2.3 Bordas livres.....	22
2.3 COMPATIBILIZAÇÃO DE MOMENTOS	22
2.4 CRITÉRIOS DE VERIFICAÇÃO DAS BORDAS ADJACENTES.....	23
2.5 A INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DOS APOIOS	25
2.6 MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO.....	27
2.7 TEORIA DAS PLACAS.....	28
2.7.1 A utilização de tabelas.....	29
2.7.2 Tabelas de bares.....	30
2.8 TEORIA DE GRELHA	30
2.8.1 Análise matricial de estruturas	31
2.8.2 Método dos deslocamentos.....	31
2.8.3 Análise de grelhas	32
2.9 MODELAGEM POR ANALOGIA DE GRELHA	35
2.9.1 Propriedades físicas e geométricas das barras.....	36
2.9.1.1 Rigidez à flexão das barras (I).....	37
2.9.1.2 Rigidez à torção das barras (J)	37

2.9.1.3 Carregamento	38
2.10 Software SAP2000 e o método dos elementos finitos.....	39
3. METODOLOGIA DE PESQUISA.....	41
3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA	41
3.2 MÉTODO DA PESQUISA	42
4.0 ANÁLISE DOS RESULTADOS	48
4.1 ESTUDO COMPARATIVO PARA UMA LAJE QUADRADA.....	48
4.2 ESTUDO COMPARATIVO PARA UMA LAJE RETANGULAR	56
4.3 ESTUDO COMPARATIVO DA FLEXIBILIDADE DAS VIGAS DE BORDO PARA UMA LAJE ISOLADA.....	61
4.4 ESTUDO COMPARATIVO DA FLEXIBILIDADE DAS VIGAS DE BORDO PARA UM PAINEL DE LAJES	64
5.0 CONCLUSÃO	68
REFERÊNCIAS.....	70
APÊNDICE A – CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES DAS LAJES MACIÇAS ATRAVÉS DAS TABELAS DE BARES	72
ANEXO A – TABELAS DE BARES PARA O CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES MÁXIMO DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO.....	77

1. INTRODUÇÃO

A análise estrutural é uma etapa importante na elaboração do projeto de um edifício de concreto. Consiste em obter a resposta da estrutura perante as ações que lhe serão aplicadas. Em outras palavras, consiste em calcular os deslocamentos e os esforços solicitantes nos elementos estruturais, tais como pilares, vigas e lajes presentes no edifício. Deve ser representada por um modelo estrutural que apresente, da maneira mais adequada possível, o comportamento real da estrutura.

As estruturas comuns de um edifício podem ser tratadas como sendo um conjunto de elementos estruturais básicos, e que são classificadas de acordo com sua forma e seu comportamento estrutural, tais como as lajes, vigas e pilares.

As lajes dos edifícios de concreto armado são representadas usualmente por placas, pois apresentam comportamentos semelhantes às mesmas. A característica principal das placas é possuir uma superfície plana onde atuam carregamentos normais ao seu plano médio. Segundo Timoshenko (1959), a Teoria de Kirchhoff para placas delgadas descreve satisfatoriamente o comportamento das lajes.

A teoria das placas de Kirchhoff engloba equações diferenciais de graus elevados, e por isso, sua resolução é, na maioria das vezes extensa, e demanda tempo. Devido a dificuldade de resolver as placas por essas equações, Bares (1972) simplificou a teoria através de tabelas, e por meio delas os esforços das lajes podem ser obtidos. Esse método tem como limitações o cálculo de lajes com geometrias simples, geralmente retangulares, e consideram os painéis de lajes de forma independente das vigas que lhe servem de apoio, desconsiderando sua flexibilidade e sua rigidez à torção. A continuidade entre os painéis é tratada de forma simplificada, como se não houvesse interação entre eles.

Desse modo, uma estrutura tridimensional, onde todos os elementos estruturais são analisados de forma integrada, pode ser analisada por outros métodos que consideram o comportamento global da estrutura. Esses métodos são à base de equações diferenciais e cálculos matriciais, e pode-se destacar a analogia de grelha e o método dos elementos finitos, ambos aplicados na engenharia através de *softwares* de modelagem de análise estrutural.

A analogia de grelha consiste em simular a placa através de elementos de barras. Ela possui algumas vantagens em relação a outros processos numéricos,

entre os quais se pode citar a sua formulação mais simples, e não requerer um alto grau de especialização do usuário para a modelagem e análise dos resultados.

Além de possibilitar o cálculo integrado de um pavimento, o processo de analogia de grelha permite ainda que, fazendo-se apenas pequenas modificações em um mesmo conjunto de dados, se analise um mesmo pavimento em diferentes situações de esquema estrutural, propiciando desta maneira, ao projetista, rapidez na definição do sistema estrutural mais adequado a ser utilizado.

Em virtude dos programas computacionais atuais empregarem regularmente modelos de grelhas de vigas para compor lajes maciças de concreto, em detrimento dos cálculos feitos por meio das tabelas, torna-se necessário adquirir uma sensibilidade em relação aos parâmetros envolvidos no cálculo dos esforços.

Neste sentido, portanto, o objetivo desse estudo é verificar, dentro desse conjunto de dados relacionados à analogia de grelha, qual a influência nos momentos fletores de lajes maciças de concreto armado, quando mudam-se as condições de apoio da laje, a rigidez a torção das barras da grelha, e o refinamento da malha utilizada.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral:

O objetivo geral deste trabalho é analisar o comportamento estrutural de lajes maciças de concreto armado, comparando os resultados dos momentos fletores obtidos por analogia de grelha com os obtidos pelas tabelas de Bares. Confrontar os resultados, e discorrer sobre a modelagem computacional de lajes maciças.

1.1.2 Objetivos específicos:

A fim de cumprir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são desenvolvidos:

- 1- Revisar os conceitos relacionados à análise estrutural, e ao cálculo de lajes de concreto armado;
- 2- Revisar os conceitos relacionados ao cálculo de grelhas, e ao método dos elementos finitos;
- 3-Delimitar exemplos aplicáveis ao comparativo em questão;
- 4- Avaliar a influência do refinamento da malha da grelha, bem como a alteração da rigidez a torção das barras, e comparar com os resultados obtidos através das tabelas de Bares;
- 5- Analisar a influência da flexibilidade das vigas de apoio das lajes, alterando as condições de contorno da grelha no programa SAP2000, e também comparar com as tabelas de Bares;

1.2 JUSTIFICATIVA

Este estudo justifica-se pela necessidade de analisar o comportamento de lajes maciças de concreto armado por uma metodologia de cálculo que permita a modelagem tridimensional da estrutura, e conseqüentemente, uma análise global e integrada entre todos os elementos estruturais. O cálculo analítico, apesar de baseado na teoria de Kirchhoff, trata da estrutura separadamente, sem interação entre os elementos de lajes, vigas e pilares.

A analogia de grelha é um método de cálculo de fácil compreensão, e pode ser aplicado em estruturas de concreto armado. Para tanto, é preciso avaliar o processo, visto que há uma gama de variáveis relacionadas a esse método, e que se aplicadas de forma errônea podem distorcer os resultados dos momentos fletores, e conseqüentemente, o dimensionamento estrutural dos elementos.

O método da analogia de grelha vem sendo amplamente utilizado nos *softwares* de cálculo estrutural na engenharia civil, como o *Eberick*, por exemplo, da

empresa *AltoQi*, em função da sua capacidade de analisar a estrutura de uma forma global. Capacidade essa, que o cálculo analítico realizado através das tabelas de Bares não possui, pois calcula individualmente as vigas, pilares e lajes.

A inserção do método da analogia de grelha no mercado, e a falta de bibliografia específica, motivaram diversos autores a estudar o cálculo da obtenção dos esforços por esse método. Sússekind (1987), Carvalho (1994) e a própria norma vigente NBR 6118/2014 possuem teorias distintas a respeito de considerações de modelagem. O valor da redução da rigidez a torção das barras, que é uma variável estudada nesse trabalho, é um exemplo de divergência entre autores.

Sendo assim, o presente trabalho visa apresentar a mudança no comportamento de lajes, comparando-se os valores de momento fletor das mesmas. Através da modelagem computacional altera-se a rigidez à torção nas barras da grelha, as condições de apoio nos painéis de lajes, e o refinamento da malha, a fim de elencar a melhor relação entre essas variáveis, para que o cálculo represente o comportamento mais real possível das lajes.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

As considerações a respeito desta pesquisa estão estruturadas em cinco capítulos. Neste primeiro, tem-se uma introdução ao assunto do trabalho, apresentando o contexto no qual está inserido, os objetivos a serem atingidos e a sua justificativa.

No segundo capítulo é conduzida uma revisão bibliográfica sobre os processos de cálculo de lajes maciças de concreto armado, com foco na analogia de grelha.

No terceiro capítulo é descrita a classificação da pesquisa e a metodologia que se pretende utilizar para a realização desse trabalho.

No quarto capítulo é apresentado o desenvolvimento da pesquisa, incluindo os resultados e discussões.

No quinto capítulo são registradas as conclusões do trabalho e sugestões para a continuidade deste.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Durante muitos anos, o cálculo de pavimentos de edifícios com a estrutura composta por lajes e vigas foi feito com a utilização de tabelas originadas da teoria das placas de Kirchhoff (Timoshenko; Woinowsky 1959), considerando as lajes como elementos isolados e apoiados em vigas indeformáveis. Com o avanço tecnológico, foram desenvolvidos softwares que utilizam modelos matemáticos para analisar a estrutura tridimensionalmente, permitindo analisar o pavimento, lajes e vigas, como um todo. Dessa forma, essa análise aproxima-se do comportamento real da estrutura.

Nesse contexto, dentre os vários métodos existentes (Wang; Reddy; Lee, 2000; Bares, 1972; Cook; Malkus; Plesha, 1989) pode-se destacar a analogia de grelha como sendo um método eficiente para a obtenção dos esforços nas lajes, pois permite uma análise global da estrutura. Stramandinoli (2003) afirma que esse método é muito utilizado na análise de lajes, principalmente devido à sua facilidade de compreensão e utilização.

A analogia de grelha consiste em representar a laje através de barras perpendiculares entre si, e ligadas por nós. Existem quatro esforços principais a serem considerados no cálculo pela analogia de grelha, sendo dois momentos (um torsor e um fletor) e dois esforços cortantes. Também, nesse caso, são considerados na análise alguns parâmetros importantes como a rigidez à torção das lajes e vigas.

Carvalho (1994) atenta para que, ao fazer essa representação, deve-se ponderar as rigidezes das barras que compõe a grelha. O estudo da rigidez à torção das barras da grelha equivalente tem sido verificado em experimentações numéricas de diversos trabalhos. Considerando isso, percebeu-se que ao utilizar a rigidez à torção como metade da rigidez à flexão, sugerido por Hambly (1976), obtêm-se resultados satisfatórios em comparação aos resultados calculados pelas tabelas baseadas na teoria da elasticidade. A norma vigente de concreto armado NBR 6118/2014 possui uma teoria diferente a respeito dessa relação, assim como Carvalho (1994) e Süsskind (1987).

Segundo Silva (2002), a analogia de grelha pode ser empregada na resolução de lajes em conjunto com os apoios, que na sua maioria são flexíveis. Diferente da hipótese simplificadora com o cálculo dos esforços feitos por tabelas, onde a

continuidade entre as placas pode ser considerada através da introdução de momentos de correção em lajes adjacentes, e os apoios que contornam as lajes são indeformáveis. A continuidade entre lajes é de grande importância para a análise de um pavimento. No trabalho de Coelho (2000), são testados alguns parâmetros físicos e diferentes condições de contorno das vigas de borda de lajes maciças.

Ainda em relação à analogia de grelha, as lajes devem ser discretizadas em um número adequado de barras cujo espaçamento depende das dimensões e da geometria do pavimento. Entende-se que a discretização ideal correspondente à formulação da malha, é aquela em que se obtenham corretamente os valores dos esforços internos da laje, mas que não demande um gasto computacional elevado.

Existem hoje, poucas publicações sobre a analogia de grelha, e as considerações a respeito da redução da rigidez à torção e do espaçamento de malha não são conclusivas. Logo, o tema envolve uma série de problemas de engenharia de lajes que podem ser modeladas e estudadas. Neste trabalho será apresentado um comparativo dos valores de momentos fletores de dois exemplos numéricos de lajes maciças, calculadas por analogia de grelha e pelas tabelas de Bares, a fim de testar a utilização desses métodos no cálculo dos esforços das mesmas.

2.1 LAJES MACIÇAS

Segundo Araújo (2003), as lajes são os elementos estruturais que têm a função básica de receber as cargas de utilização das edificações, aplicadas no piso, e transmiti-las às vigas. São elementos bidimensionais, planos, cuja espessura é bem inferior as suas outras dimensões. A figura 01 representa o esquema de uma laje, L_1 e L_2 sendo os lados, e L_3 a espessura.

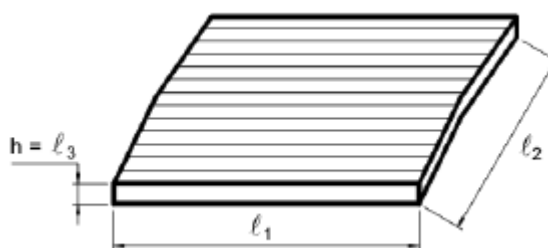


Figura 01: laje e suas dimensões
Fonte: Bastos, 2007

As lajes de concreto armado geralmente são maciças, nervuradas, ou pré-fabricadas, conforme Bastos (2007).

A principal característica das lajes maciças é que elas distribuem suas reações em todas as vigas de contorno, diferentemente das pré-moldadas. Com isso, há um melhor aproveitamento das vigas do pavimento, pois todas podem ter cargas da mesma ordem de grandeza, e dependem apenas do vão. Outra vantagem em relação às pré-moldadas é a facilidade em colocar antes da concretagem as tubulações. É importante destacar que as fôrmas representam grande parcela do custo final da estrutura, em particular da laje. Porém, o custo de pavimentos com lajes maciças diminui consideravelmente quando o pavimento se repete, pois pode ser usado o mesmo jogo de fôrmas e de escoramento. (CARVALHO & FIGUEIREDO FILHO, 2004)

Para o cálculo dos esforços solicitantes em uma laje, alguns conceitos a respeito das suas vinculações são de fundamental importância, e serão expostos a seguir.

2.2 CONDIÇÕES DE APOIO

De uma forma geral, existem três tipos de apoios das lajes: paredes de alvenaria, vigas ou pilares. Dentre eles, as vigas nas bordas são o tipo mais comum nas construções.

Para o cálculo analítico dos esforços solicitantes e das deformações nas lajes, é necessário estabelecer os vínculos da laje com seus apoios, sejam eles pontuais como os pilares, ou distribuídos como as vigas nas bordas.

As tabelas habituais para cálculo dos esforços solicitantes nas lajes admitem alguns poucos tipos de vínculos das lajes, o apoio simples, o engaste perfeito, a borda livre, e apoios pontuais. (BASTOS, 2007)

Os apoios podem ser pontuais, representando os pilares, mas também podem ser contínuos, simulando vigas ou paredes.

A borda livre caracteriza-se pela ausência de apoio, apresentando, portanto, deslocamentos verticais. Nos outros dois tipos de vinculação, não há deslocamentos verticais. Nas bordas engastadas, também as rotações são impedidas. Este é o

caso, por exemplo, de lajes que apresentam continuidade, sendo o engastamento promovido pela laje adjacente. (PINHEIRO, 2007)

Uma diferença significativa entre as espessuras de duas lajes adjacentes pode limitar a consideração de borda engastada somente para a laje com menor espessura, admitindo-se simplesmente apoiada a laje com maior espessura. Essa consideração pode ser feita também através de uma relação entre os momentos fletores dessas lajes adjacentes. Quando essa relação dos momentos for maior que 2, a laje de maior dimensão é considerada simplesmente apoiada.

A convenção da vinculação das diferentes condições de apoios das lajes pode ser feita com diferentes tipos de linhas:

Borda livre	Borda simplesmente apoiada	Borda engastada
-----	—————	// // // // //

Figura 02: representação dos tipos de apoio
Fonte: Pinheiro, 2007

Dessa forma, as lajes podem receber uma numeração que as diferenciam conforme as combinações de vínculos nas bordas, como indicado na figura 03.

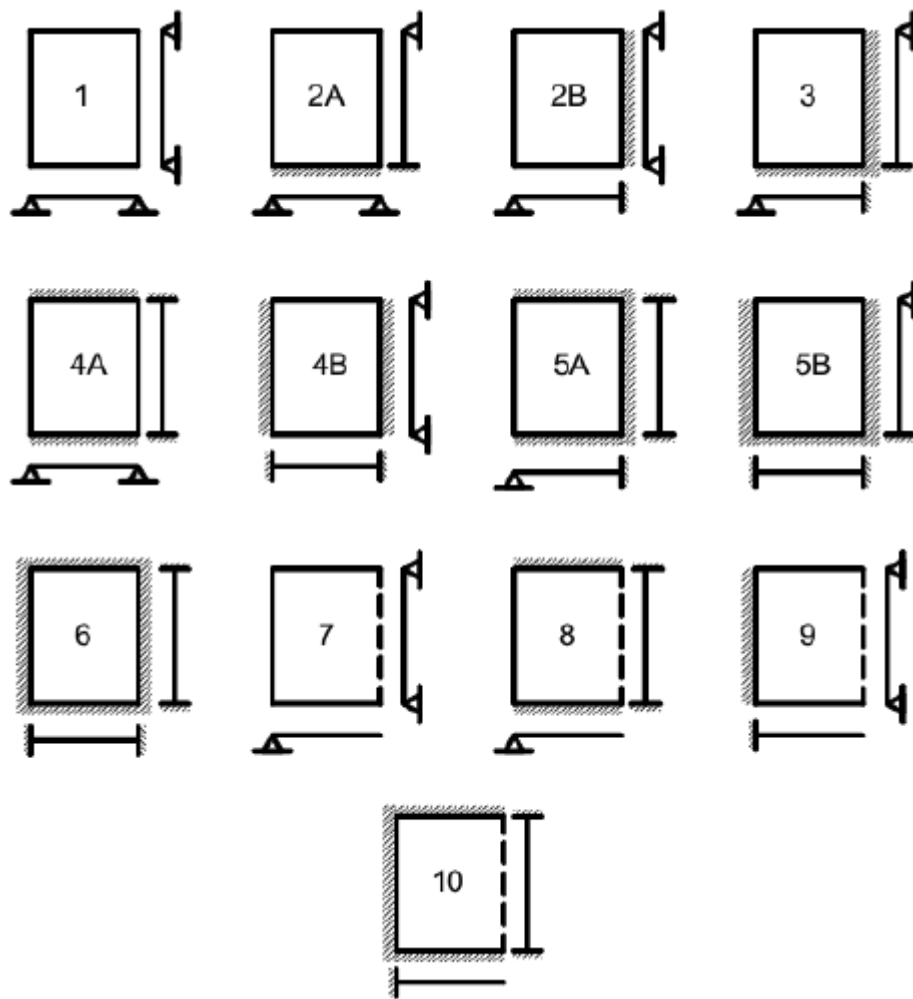


Figura 03: casos de vinculação nas lajes
Fonte: Bastos, 2007.

2.2.2 Bordas simplesmente apoiadas

Quando as lajes estão simplesmente apoiadas em seu contorno, sofrem pequenas rotações sobre os apoios. Assim, quando a tendência de rotação da laje solicita a viga à torção, a viga apresenta resistência desprezível, deformando-se e garantindo a concepção teórica de apoio simples. (CUNHA; SOUZA, 1998)

A figura 04 demonstra essa rotação.

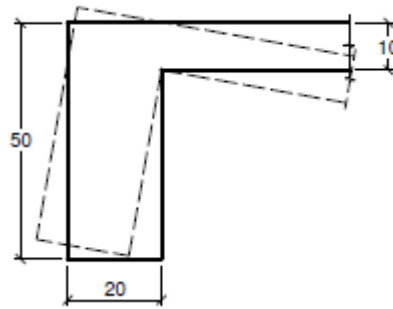


Figura 04: viga de borda com apoio simples da laje
Fonte: Bastos, 2007

2.2.3 Bordas engastadas

As lajes com bordas engastadas se subdividem em dois tipos de engastamento: o engastamento perfeito e o engastamento elástico.

O engastamento perfeito é aquele que ocorre, por exemplo, nas marquises engastadas em vigas de concreto ou alvenarias. Já o engastamento elástico é o caso de lajes contínuas, apoiadas sobre vigas ou paredes. Momentos de engastamento são gerados nos apoios intermediários, devido a continuidade da laje. (BASTOS, 2007)

A figura 05 representa um engaste perfeito de uma laje em balanço engastada em uma viga, e a figura 06 representa o engaste elástico entre lajes contínuas.

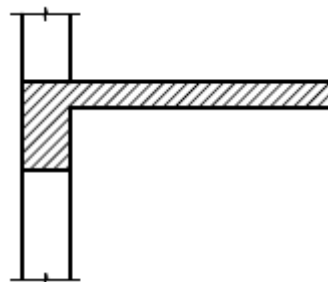


Figura 05: laje em balanço engastada na viga de apoio
Fonte: Bastos, 2007

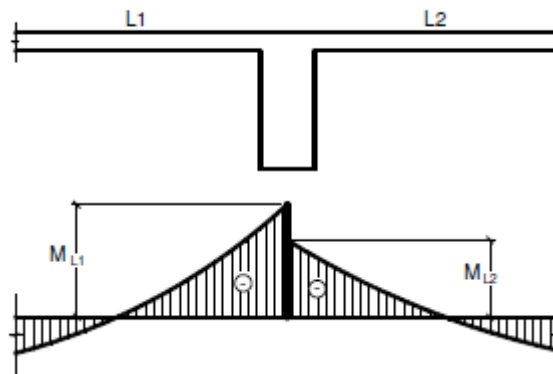


Figura 06: engastamento elástico entre lajes contínuas L1 e L2, e seus momentos de engastamento ML1 e ML2
Fonte: Bastos, 2007

2.2.4 Bordas livres

As lajes com bordas livres caracterizam-se pela ausência de apoio, apresentando, portanto, deslocamentos verticais e rotações, sendo que nos outros tipos de vinculação, não há deslocamentos verticais nos apoios, por estes serem considerados indeformáveis na resolução das equações. (CUNHA; SOUZA, 1998)

2.3 COMPATIBILIZAÇÃO DE MOMENTOS

Para o cálculo analítico de lajes maciças, nos apoios intermediários de lajes contíguas, surgem momentos de engastamento gerados pela continuidade entre as lajes. A ponderação feita entre os diferentes valores dos momentos fletores que surgem nesses apoios conduz ao engastamento elástico. Entretanto, para o cálculo inicial dos momentos fletores, as lajes contínuas devem ser consideradas perfeitamente engastadas nos apoios intermediários. (BASTOS, 2007)

Conforme Pinheiro (2007), em um pavimento, em geral, as lajes adjacentes diferem nas condições de apoio, nos vãos teóricos ou nos carregamentos, resultando, no apoio comum, dois valores diferentes para o momento negativo. Daí a necessidade de promover a compatibilização desses momentos.

Na compatibilização dos momentos negativos, o critério usual consiste em adotar o maior valor entre a média dos dois momentos, e 80% do maior. Esse critério apresenta razoável aproximação quando os dois momentos são da mesma ordem de grandeza. (BASTOS, 2007)

A figura 07 explicita melhor essa aproximação. Os momentos m_1 , m_2 , m_3 e m_4 são os momentos positivos gerados pelo pavimento. O m'_{12} , m'_{21} , m'_{23} , m'_{32} , m'_{34} e m'_{43} são os momentos negativos nos apoios intermediários entre as lajes. Já os momentos que possuem um asterisco, são os que sofreram alteração devido à compatibilização.

Como consequência da compatibilização dos momentos negativos, os momentos positivos na mesma direção devem ser analisados. Se essa correção tende a diminuir o valor do momento positivo, como ocorre nas lajes L1 e L4 da Figura 08, ignora-se a redução, a favor da segurança. Caso contrário, se houver acréscimo no valor do momento positivo, a correção deverá ser feita, somando-se ao valor deste momento fletor, a média das variações ocorridas nos momentos fletores negativos sobre os respectivos apoios, como no caso da laje L2 da Figura 07.

Pode acontecer de a compatibilização acarretar diminuição do momento positivo, de um lado, e acréscimo, do outro. Neste caso, ignora-se a diminuição e considera-se somente o acréscimo, como no caso da laje L3 da figura 07.

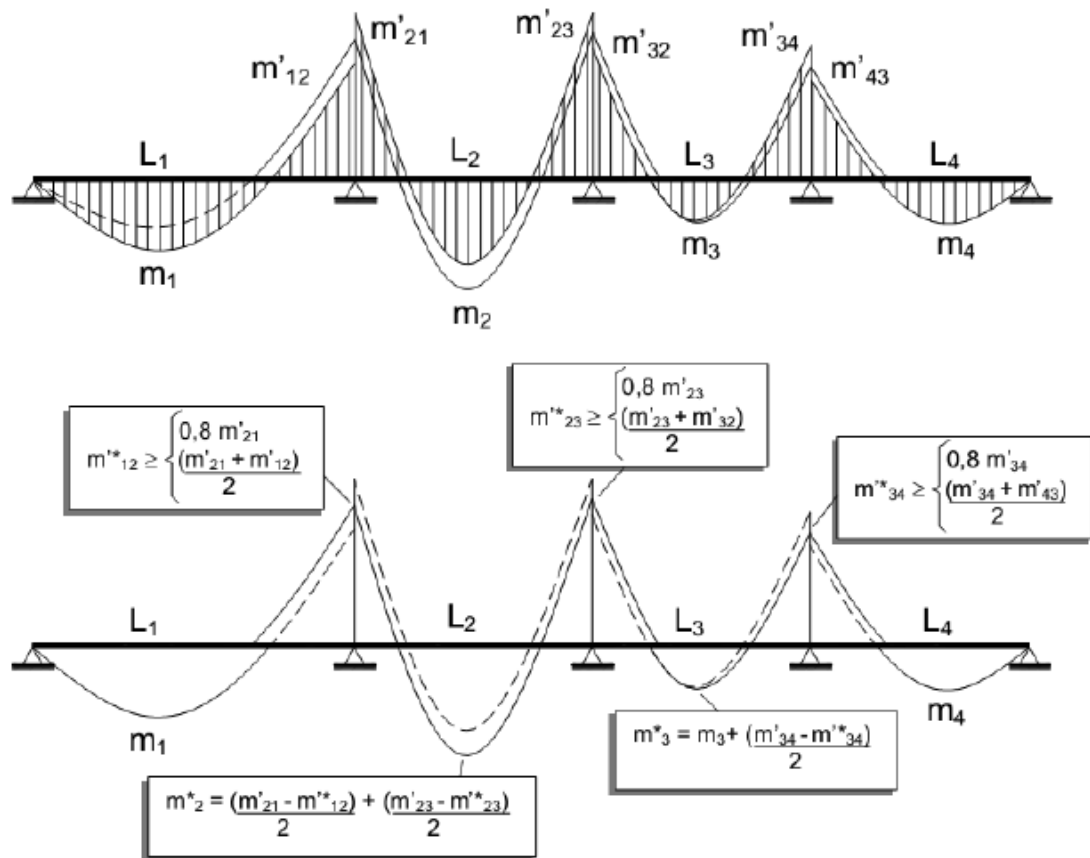


Figura 07: compatibilização de momentos fletores nas lajes
 Fonte: Pinheiro, 2007

Tendo em vista estes conceitos para o cálculo analítico de momentos fletores de lajes maciças, os métodos de cálculo podem ser introduzidos e melhor compreendidos.

2.4 CRITÉRIOS DE VERIFICAÇÃO DAS BORDAS ADJACENTES

Para o caso de lajes adjacentes, vários aspectos devem ser analisados para se adotar o tipo de apoio nos vínculos entre essas lajes.

Uma diferença significativa entre os momentos negativos de duas lajes adjacentes poderia levar à consideração de borda engastada para uma das lajes e simplesmente apoiada para a outra, em vez de engastada para ambas. (BASTOS, 2007)

A figura 08 demonstra a condição de engastamento. Quando a relação entre os momentos negativos das lajes L1 e L2, m'_1 e m'_2 , é maior que 2, somente a menor laje está engastada na maior. Quando a relação é menor que 2, as duas são consideradas engastadas.

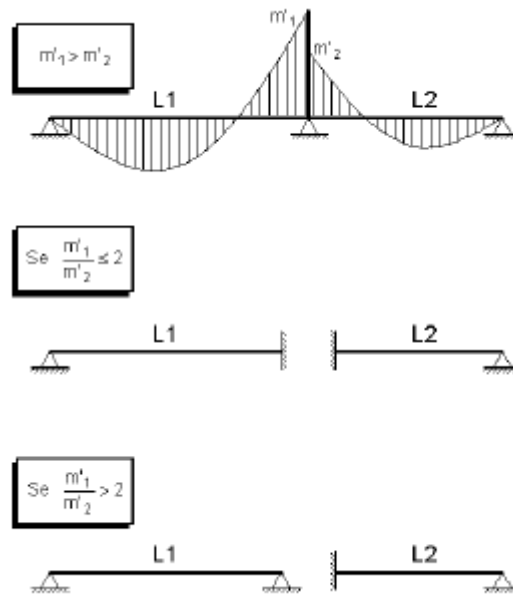


Figura 08: condição de engastamento em duas lajes adjacentes
Fonte: Pinheiro, 2007

A tabela de dimensionamento das lajes, apresentada na figura 07, considera as bordas com o mesmo tipo de vinculação ao longo de toda sua extensão. Na prática, outras situações podem acontecer, devendo-se utilizar critérios específicos para cada caso, para que assim os esforços das lajes possam ser corretamente calculados. (PINHEIRO, 2007)

Um exemplo comum desses casos especiais, devido a arquitetura arrojada que os pavimentos de lajes são sujeitos, é a ocorrência de uma borda parcialmente engastada. A figura 09 mostra esse caso, com o lado maior ly , dividido em $ly1$ e $ly2$, sendo que apenas $ly1$ está engastado.

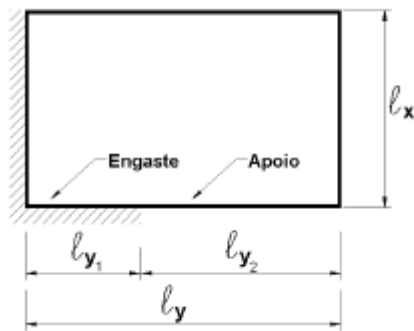


Figura 09: caso especial de vinculação da laje
Fonte: Pinheiro, 2007

Um critério aproximado possível para esse caso é sugerido por Pinheiro (2007), conforme exemplificado na figura 10.

$l_{y1} \leq \frac{l_y}{3}$	Considera-se a borda totalmente apoiada
$\frac{l_y}{3} < l_{y1} < \frac{2 \cdot l_y}{3}$	Calculam-se os esforços para as duas situações – borda totalmente apoiada e borda totalmente engastada – e adotam-se os maiores valores no dimensionamento
$l_{y1} \geq \frac{2 \cdot l_y}{3}$	Considera-se a borda totalmente engastada

Figura 10: critério para uma borda com parte engastada e parte apoiada
Fonte: Pinheiro, 2007

2.5 A INFLUÊNCIA DA FLEXIBILIDADE DOS APOIOS

Sabe-se que o cálculo de pavimentos de edifícios, compostos por vigas e lajes, foi feito durante muito tempo de maneira simplificada, considerando as lajes apoiadas em vigas indeformáveis. Isso se devia à falta de recursos computacionais capazes de resolver o grande volume de equações simultâneas necessárias para analisar um pavimento como um todo. (BANKI;COELHO 2013)

Os métodos tradicionais para a determinação da distribuição de momentos em uma laje têm sido explicitados através de tabelas, originadas da teoria de Kirchhoff. Porém, essas soluções limitam-se a casos nos quais se tenha condições de contorno simples. Os apoios, considerados rígidos e indeformáveis, são uma dessas condições simplificadoras. Todavia, essas simplificações podem levar a erros

significativos, que podem vir a superar a capacidade de redistribuição de esforços da estrutura.

Em pavimentos de edifícios reais, as lajes são apoiadas sobre vigas que são flexíveis, ou seja, se deformam sob ações de cargas. Essa condição de apoio altera o campo de deformação da laje, e como consequência, os esforços internos e as reações de apoio. Nessa situação, a laje e as vigas de apoio, portanto, passam a ser uma única estrutura.

Diversos métodos aproximados de análise de lajes têm sido propostos a fim de se obter uma análise mais real da estrutura. Muitos desses métodos foram desenvolvidos antes da era dos computadores. A substituição de uma laje por uma série ortogonal de vigas que se cruzam é, provavelmente, uma das mais antigas propostas de solução.

Ao se dividir a laje em um número suficiente de faixas, é possível reproduzir o comportamento de estruturas com praticamente qualquer geometria. Esta é a base do processo da analogia de grelha utilizado por diversos *softwares* de engenharia. O modelo também pode conter todas as lajes de um pavimento e todas as vigas, analisando o comportamento do painel como um todo. (COELHO, 2000)

Segundo Banki e Coelho (2013), o cálculo dos esforços de lajes pode ser obtido pelas tabelas originadas da teoria de Kirchhoff, sendo esta apresentada apenas para alguns casos particulares com lajes isoladas. Ao comparar esses resultados com métodos mais complexos, como a analogia de grelha, os resultados não variam consideravelmente. Porém, quando se consideram duas lajes justapostas, com uma viga central, ao reduzir a rigidez desta viga pode-se chegar a resultados nos quais o momento fletor sobre a viga é positivo e não negativo. A figura 11 demonstra visualmente essa influência da deformação das vigas de bordo num painel de lajes.

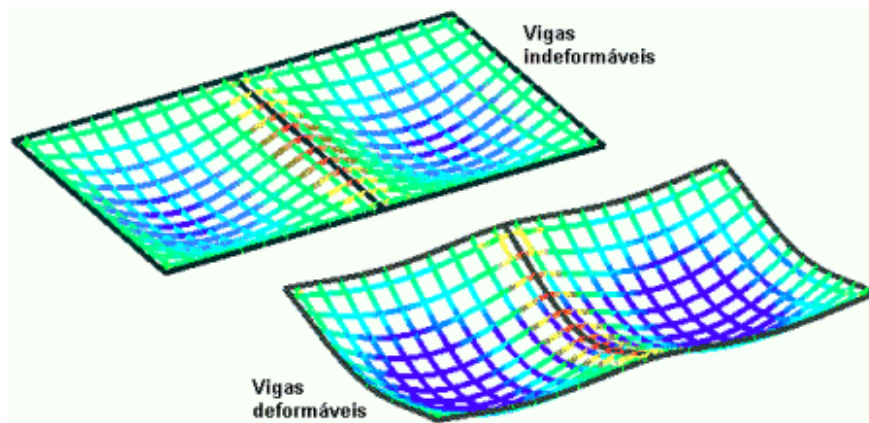


Figura 11: influência da deformação das vigas nos modelos de lajes
Fonte: Banki; Coelho, 2013

Em suma, Banki e Coelho (2013) afirmam que processos simplificados para análise de lajes isoladas fornecem resultados próximos aos da Analogia de Grelha (mais próximos também do real) enquanto se tem lajes retangulares maciças com apoios muito rígidos. Lajes apoiadas em vigas de seção usual podem fornecer resultados bastante diferentes.

2.6 MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO

Existem basicamente dois métodos de cálculo para lajes maciças: o elástico, que é abordado no presente trabalho, e o plástico.

O cálculo plástico fundamenta-se nos mecanismos de ruptura de laje, e não será abordado no presente trabalho.

O cálculo elástico, segundo Carvalho (2004), é fundamentado na análise do comportamento do elemento estrutural sob cargas de serviço e concreto não fissurado. Além disso, os esforços solicitantes podem ser obtidos através da teoria clássica das placas delgadas, ou teoria de Kirchhoff, que supõe algumas características para o concreto, conforme demonstrado a seguir.

2.7 TEORIA DAS PLACAS

Placas podem ser definidas como estruturas planas, onde uma das dimensões é pequena quando comparada com suas outras duas, e que estão submetidas a cargas perpendiculares ao seu plano.

O estudo das estruturas de superfície, no caso mais geral em regime elástico, pode ser designado pela Teoria das Placas de Kirchhoff, e pode ser encontrada detalhadamente em Timoshenko e Woinowsky (1959) e Bares (1972). Esse método fundamenta-se nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa e nas relações de compatibilidade das deformações desse elemento. Dessa forma, as lajes maciças são consideradas placas delgadas de concreto, e segundo Carvalho (1994), a elas se aplicam todos os conceitos e teorias desenvolvidas para as placas delgadas.

Na teoria de Kirchhoff são admitidas placas delgadas com pequenas deflexões. Essa consideração implica em algumas hipóteses a respeito dessas placas, e podem ser vistas detalhadamente em Wang, Reddy, Lee (2000).

Segundo Carvalho (1994), a Teoria das Placas proporciona a equação geral das placas, obtida por Lagrange em 1811, que relaciona a deformada elástica “ w ” da placa com a carga “ P ” unitária, uniformemente distribuída na área da placa. A equação tem a forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{P}{D} \quad (01)$$

E a rigidez à flexão da placa “ D ” é dada por:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (02)$$

sendo w o deslocamento vertical, x e y as coordenadas de um ponto genérico na placa, P a intensidade da carga atuante, D a rigidez à flexão da placa, E o módulo de deformação longitudinal do concreto e ν o coeficiente de Poisson.

Da solução da equação geral das placas, originaram-se tabelas compostas por coeficientes que proporcionam com maior facilidade o cálculo dos momentos fletores, para casos específicos de apoios e carregamentos nas lajes.

2.7.1 Utilização de Tabelas

A utilização de tabelas facilita o cálculo dos momentos fletores e deslocamentos máximos a partir da geometria e das condições de vinculação da placa. De acordo com Carvalho e Figueiredo Filho (2004), o pavimento deve ser discretizado, ou seja, cada laje deve ser tratada individualmente, de acordo com sua vinculação às demais, e são possíveis bordas simplesmente apoiadas, engastadas ou livres. De maneira geral, considera-se que as lajes menos rígidas e menores, são engastadas nas mais rígidas e maiores. Os diversos tipos de vinculação já foram expostos na figura 03.

Para o cálculo de painéis contínuos de lajes apoiadas em vigas, o cálculo através de tabelas restringe-se ao cálculo de lajes isoladas com a utilização de critérios para corrigir os esforços devido à continuidade, como afirmam Banki e Coelho (2013). No caso do apoio em vigas, a flexibilidade é desprezada, o que, em alguns casos, pode resultar em grandes diferenças nos valores dos esforços e nos deslocamentos verticais.

2.7.2 Tabelas de Bares

Bares (1972) desenvolveu tabelas para o cálculo de lajes maciças. Carvalho e Figueiredo Filho (2013) adaptaram-nas para o coeficiente de Poisson igual a 0,2.

Conforme relatado, para encontrar o coeficiente “ μ ” relacionado ao momento fletor nestas tabelas, é preciso calcular o parâmetro λ , que reflete a geometria da laje, expresso por:

$$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}, \quad (03)$$

sendo ℓ_y a maior das dimensões da superfície da placa, e ℓ_x a menor.

Os momentos fletores máximos, sendo os positivos designados pela letra “ m ” e os negativos, pela letra “ x ”, são determinados pelas equações (04) a (07) em que $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$, são coeficientes fornecidos nas tabelas.

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (04)$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot \ell_y^2}{100} \quad (05)$$

Os momentos fletores máximos negativos, por unidade de comprimento nas direções x e y são, portanto:

$$x_x = \mu'_x \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (06)$$

$$x_y = \mu'_y \cdot \frac{p \cdot \ell_y^2}{100} \quad (07)$$

A utilização dessas tabelas facilita o cálculo dos momentos fletores máximos a partir da geometria e das condições de apoio da placa. De acordo com Carvalho (1994), o pavimento deve ser discretizado, ou seja, cada laje deve ser tratada individualmente de acordo com suas condições de apoios. Como limitação, essas tabelas podem ser utilizadas somente para configurações de apoios das lajes com bordas totalmente apoiadas, engastadas ou livres.

As tabelas de Bares utilizadas neste trabalho encontram-se nos anexos.

2.8 TEORIA DE GRELHA

Tendo sido introduzidos os conceitos sobre a teoria das placas de Kirchhoff, e sobre o cálculo analítico de lajes maciças através de tabelas, pode-se partir para a

análise de lajes pela analogia de grelha. Para tanto, é importante que alguns conceitos sobre o cálculo dos esforços, que envolve a análise matricial, sejam igualmente introduzidos, bem como algumas questões a respeito da sua modelagem computacional.

2.8.1 Análise matricial de estruturas

Conforme pode ser visto em Castro (2007), a análise matricial de estruturas tem como objetivo geral a modelagem e a análise estática linear de estruturas reticuladas. Para isso, é comumente utilizado o método dos deslocamentos com formulação matricial, visando sua implementação em programas computacionais.

Também conhecido como “método da rigidez”, o método dos deslocamentos é muito utilizado para resolver estruturas através da análise matricial, pois segundo Castro (2007), possui um bom desempenho na programação.

2.8.1 Método Dos Deslocamentos

O método dos deslocamentos consiste em obter os deslocamentos de uma estrutura através das equações de compatibilidade e, a partir de tais deslocamentos obter os esforços da estrutura, conforme observado em Loriggio (2001).

Primeiramente fixam-se os graus de liberdade da estrutura, obtendo-se o sistema principal. Em cada nó da barra os coeficientes de rigidez são obtidos introduzindo-se um deslocamento unitário – rotação ou translação – na direção dos graus de liberdade, impedindo-se os deslocamentos nas demais direções.

Em seguida montam-se as equações de equilíbrio de forças em torno dos nós, tendo-se como incógnitas os deslocamentos e compõe-se assim, a matriz de rigidez de cada barra. (LORIGGIO, 2001)

Para obter-se a matriz de rigidez do sistema é necessário sobrepor os coeficientes dos elementos que compartilham o mesmo nó.

A equação básica do método é:

$$[K] \cdot [\delta] = \{F\} - \{F_0\} \quad (08)$$

Onde:

$\{F\}$ = matriz coluna das ações externas atuantes na estrutura;

$\{F_0\}$ = matriz coluna das ações atuantes na estrutura;

$[K]$ = matriz de rigidez da estrutura;

$[\delta]$ = matriz coluna dos deslocamentos.

Entende-se que quando todos os deslocamentos e reações de apoio tiverem sido obtidos, a análise pode ser considerada como terminada. O cálculo detalhado de estruturas pelo método dos deslocamentos pode ser visto em Loriggio (2001).

2.8.2 Análise De Grelhas

A grelha é uma estrutura plana composta de barras contínuas que se interceptam ou se cruzam mutuamente. Segundo Coelho (2000), todas as barras e nós existem no mesmo plano, sendo que as barras estão rigidamente ligadas entre si.

A estrutura de grelha assemelha-se, em vários aspectos, a um pórtico plano, conforme Stramandinoli (2003). Entretanto as cargas da grelha atuam normalmente ao plano da mesma e todos os binários têm seus vetores, com seta dupla, no mesmo plano da grelha.

Os efeitos de flexão são predominantes nessa estrutura, porém os efeitos de torção são também importantes.

Na análise de uma estrutura de grelha, os eixos ordenados são tomados como mostrado na figura 12. A estrutura existe no plano x-y, todas as forças aplicadas atuando paralelas no eixo z.

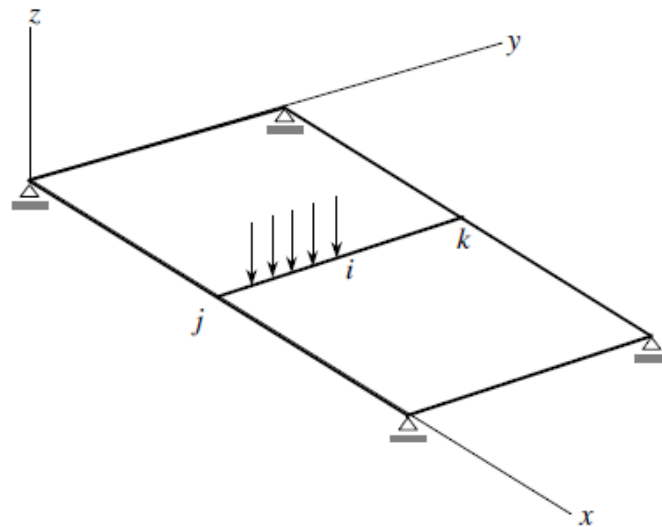


Figura 12: grelha plana e suas coordenadas
Fonte: COELHO (2000)

Cada barra de grelha possui um sistema de eixos cartesianos ortogonais próprio, conhecidos como eixos de coordenadas locais. No sistema local, considera-se grau de liberdade de um elemento estrutural a soma da quantidade de movimentações que cada apoio pode ter. No caso em questão, duas rotações e uma translação podem ser observadas em cada nó, o que nos dá um total de seis graus de liberdade por barra. Os graus de liberdade (deslocamentos possíveis) podem ser observados na figura 13 abaixo. A razão para numerar os giros antes das translações em cada nó é para manter uma analogia com a análise de um pórtico plano. (STRAMANDINOLI, 2003).

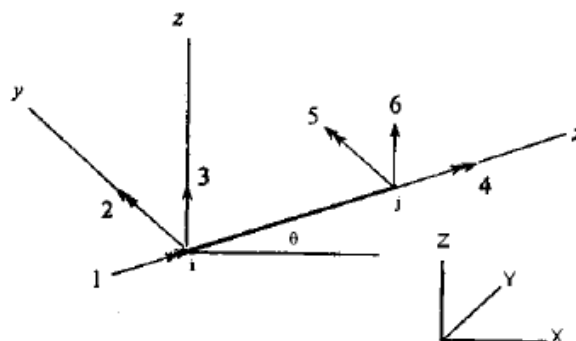


Figura 13: graus de liberdade em uma barra da grelha.
Fonte: COELHO, 2000

É válido salientar, segundo Loriggio (2000), que os esforços solicitantes são:

- Momento fletor (em torno do eixo 2);
- Momento torsor (em torno do eixo 1);
- Esforço cortante (paralelo ao eixo 3).

Os coeficientes da matriz de rigidez da barra da grelha podem ser obtidos segundo o procedimento de cálculo do método dos deslocamentos, ou seja, a barra deve ser totalmente restringida e devem ser aplicados deslocamentos unitários nesses seis graus de liberdade, um de cada vez.

As reações que surgem devido a esses deslocamentos unitários são os coeficientes de rigidez da barra. Ao serem agrupados, esses coeficientes de rigidez, vão formar uma matriz de ordem 6x6 (6 graus de liberdade) que é a chamada “matriz de rigidez” da barra da grelha, no sistema local. (STRAMANDINOLI, 2003). Esses coeficientes estão mostrados na figura 14.

$$S_L = \begin{pmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_Y}{L} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_Y}{L} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} \end{pmatrix}$$

Figura 14: matriz rigidez da barra em relação ao sistema de eixos local.
Fonte: STRAMANDINOLI, 2003

Onde:

E = módulo de elasticidade longitudinal

G = módulo de elasticidade transversal

J = momento de inércia à torção da barra da grelha J

I_y = momento de inércia à flexão da seção da barra em relação ao eixo y

L = comprimento da barra

2.9 MODELAGEM POR ANALOGIA DE GRELHA

Para analisar uma laje por analogia de grelha, deve-se discretizá-la por uma série de faixas com determinada largura. Considerando que as faixas podem ser substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, obtém-se então uma grelha de barras. A figura 15 exemplifica essa analogia.

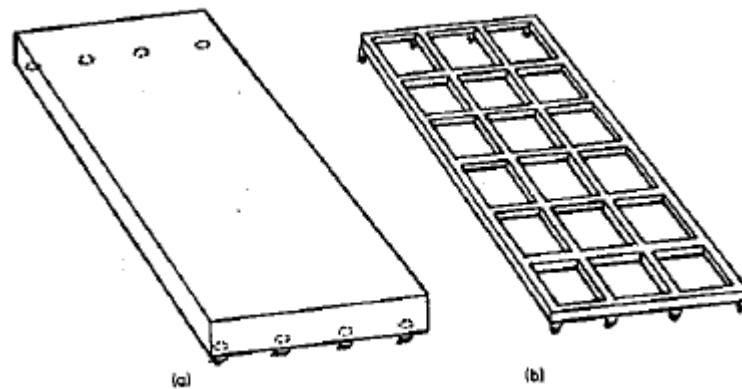


Figura 15: a) laje maciça b) grelha equivalente da laje
Fonte: HAMBLY, 1976

De acordo com Reis (2007), as grelhas podem ser consideradas como um conjunto de vigas individuais, interconectadas nos seus nós ou pontos nodais.

Pelo fato das lajes possuírem formas variadas, bem como diferentes tipos de carregamento, a malha ideal não é uma formulação padrão. No entanto, baseado em Hambly (1976) e em Reis (2007), pode-se estabelecer alguns critérios para lajes retangulares, que devem ser adequados a cada projeto:

- a) Procurar localizar as barras da grelha em posições pré-determinadas no projeto, tais como linhas de apoio ao longo das vigas de extremidade, bem como de outras se existirem, que contenham uma ação específica, etc;
- b) Numa laje isótropa, cada barra deve ter no máximo largura igual a $\frac{1}{4}$ do vão transversal ao seu eixo;
- c) Numa laje ortótropa, na direção da menor inércia, deve-se considerar a largura das barras igual a 40% do vão transversal ao seu eixo. Caso haja dúvida quanto à ortotropia, deve-se adotar o critério b;

- d) Quanto mais densa a malha, melhores são os resultados obtidos. No entanto, essa melhora deixa de acontecer quando a largura das barras for menor que 2 ou 3 vezes a espessura da laje;
- e) No caso de balanço na laje, é necessário colocar-se pelo menos duas barras transversais ao vão em balanço;
- f) Deve-se colocar uma linha de barras no contorno livre da laje, cuja largura deve ser diminuída de $0,3h$;
- g) Nas regiões de grande concentração de esforços, tais como apoios ou cargas concentradas, recomenda-se dispor uma malha cuja largura das barras não seja superior a 3 ou 4 vezes a espessura da laje.

Além das recomendações do autor sobre a modelagem de grelhas, o manual de utilização do SAP2000, fornecido pela Universidade Estadual de Campinas (DIEGUEZ, COSTA, 2004), sugere que a dimensão das barras da grelha não devem exceder $1/10$ do vão teórico da laje analisada.

É importante salientar que essas regras devem ser adaptadas a cada situação de laje, em função da grande variação de formas, dimensões e condições de contorno existentes.

2.9.1 Propriedades físicas e geométricas das barras

As propriedades das barras influenciam diretamente nos resultados e, portanto deve-se analisar vários aspectos das mesmas. Cada barra da grelha irá representar certa faixa da placa, representado a espessura da laje e a largura, a qual depende da malha de grelha. As propriedades físicas dependem do material da placa.

2.9.1.1 Rigidez à flexão das barras (I)

Segundo Hambly (1976), o momento de inércia à flexão (I) das barras longitudinais e transversais da grelha é calculado considerando que cada barra representa uma largura “ b ” da laje igual à distância entre os centros dos vão adjacentes à barra. Assim:

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad (09)$$

sendo b a largura da barra da grelha e h a altura da barra da grelha.

2.9.1.2 Rigidez à torção das barras (J)

O outro parâmetro a ser analisado é a rigidez à torção (J) da seção transversal da barra. De acordo com Hambly (1976) a rigidez à torção não é simplesmente uma propriedade geométrica da área da seção transversal da barra, como é o momento de inércia à flexão (I). No caso de um cilindro, a rigidez à torção é igual ao momento polar de inércia (I_p), entretanto este é um caso especial, sendo que para outros tipos de seção transversal a rigidez à torção é totalmente diferente de I_p . Portanto, não existe uma regra geral para o cálculo da rigidez à torção. Para um retângulo de lados “ b ” e “ h ”, Gere e Weaver (1981), sugerem que a relação pode ser dada por:

$$J = \beta e^3 f, \quad (10)$$

sendo e a menor dimensão da seção transversal, f a maior dimensão da seção transversal, e

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{e}{f}\right) \left(1 - \frac{e^4}{12f^4}\right). \quad (11)$$

A expressão dada para β , e pode ser vista detalhadamente em Timoshenko (1959). Constatou-se também que o *software* SAP2000, utilizado nas modelagens do presente trabalho, utiliza as fórmulas sugeridas por Gere e Weaver (1981) para o cálculo da rigidez à torção.

2.9.1.3 Carregamento

As cargas atuantes na laje provenientes do peso-próprio, revestimentos, paredes divisórias, cargas acidentais e outras que possam estar atuando na estrutura, atuam perpendicularmente ao plano XY e podem ser representadas de duas maneiras: como cargas distribuídas ao longo das barras e como cargas concentradas nos nós (STRAMANDINOLI, 2003). Para ambos os casos a carga deve ser calculada através da área de influência do elemento (barra ou nó) conforme figura 16.

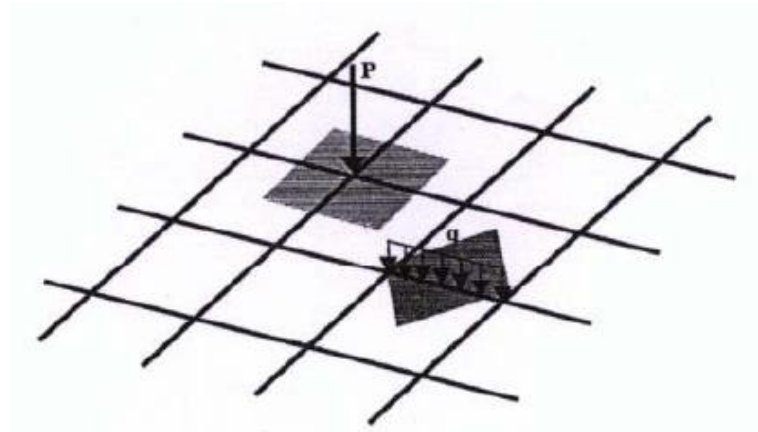


Figura 16: carregamento nodal e distribuído.
Fonte: STRAMANDINOLI, 2003.

Em todos os exemplos mostrados adiante foram consideradas cargas distribuídas ao longo da barra.

O valor numérico destas cargas foi determinado a partir da área de influência das barras. Assim:

Para as barras de contorno:

$$P = \frac{\left(\frac{l^2}{4} \cdot Q\right)}{l} \quad (12)$$

Para as barras do centro:

$$P = \frac{\left(\frac{l^2}{4} \cdot 2Q\right)}{l} \quad (13)$$

Onde:

P = carregamento distribuído (kgf/m);

l = largura da malha (m)

Q= carga por metro, calculada analiticamente (kgf/m²)

2.10 SOFTWARE SAP2000 E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O *software* utilizado no presente trabalho, SAP2000, é um programa de elementos finitos, com interface gráfica 3D, que realiza de forma totalmente integrada a modelagem, análise e dimensionamento do mais vasto conjunto de problemas de engenharia de estruturas.

Segundo REZENDE (1990), o método dos elementos finitos pode ser definido como um procedimento geral de discretização de problemas contínuos, delineados por expressões definidas matematicamente. O processo de discretização é feito de acordo com o seguinte princípio: o meio contínuo é dividido em um número finito de partes (elementos), cujo comportamento se especifica em função de um número finitos de parâmetros.

O método analisa cada um dos elementos da discretização isoladamente, o que possibilita a escolha de polinômios mais simples para descrever a solução aproximada, que em geral teriam funções complexas, se comparado à teoria da elasticidade. (LA ROVERE, 2001)

No caso da análise estrutural, o método pode ser empregado tanto na formulação para a obtenção dos deslocamentos, quanto na formulação para a obtenção dos esforços internos. Essas formulações são análogas ao método da

rigidez e ao método das forças, utilizados na análise de estruturas reticuladas. (LA ROVERE, 2001)

Cada elemento é definido por sua geometria e pelo número de nós. O *software* SAP2000, segundo dados do fabricante contidos no manual do programa, é capaz de modelar elementos de barra, de placa, e elementos sólidos. No presente trabalho, as lajes maciças foram discretizadas em grelhas, e modeladas como elementos finitos de barra, com dois nós cada barra.

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

Este capítulo tem por objetivo descrever a classificação da pesquisa, bem como a metodologia utilizada para o desenvolvimento desse trabalho.

3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

Com base no objetivo desta pesquisa, ela se classifica como exploratória, pois envolve um levantamento bibliográfico a partir de livros, teses, dissertações e artigos. Gil (2002) descreve que um estudo exploratório tem por objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou construir hipóteses. Pode-se dizer também que a pesquisa exploratória tem como objetivo principal o aprimoramento de ideias e a descoberta de intuições, quando o tema de estudo é pouco explorado. Objetivo esse, que se encaixa no presente trabalho devido a falta de informações acerca das incógnitas e considerações feitas para a aplicação da analogia de grelha.

Quanto ao método de abordagem, a pesquisa é considerada qualitativa/quantitativa, pois ao passo que apresenta os resultados através de proporções e comparações, avalia os mesmos quanto a sua utilização e grandeza. De fato, para as análises das lajes maciças, são avaliados os resultados dos momentos fletores obtidos por métodos mais simples, e comparados com os resultados obtidos através de um método mais complexo, fazendo-se portanto uma análise quantitativa. Contudo, as discrepâncias de resultados são confrontadas e devidamente explicadas através da teoria envolvida, que, portanto, caracteriza a abordagem do presente trabalho como qualitativa.

O procedimento técnico utilizado é o de pesquisa bibliográfica, pois existe um referencial teórico baseado principalmente em livros e artigos científicos. Entretanto, de acordo com Gil (2002), a pesquisa experimental consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e observação dos efeitos que a variável produz no objeto. Tendo em vista que o presente trabalho necessita de uma fundamentação teórica

para que se tenha conhecimento a respeito da analogia de grelha, mas testa a influência de variáveis quando da aplicação da mesma, ele pode ser delineado como uma pesquisa bibliográfica aplicada essencialmente ao referencial teórico, e experimental quando se trata dos exemplos práticos, que alteram as incógnitas relacionadas ao tema.

O planejamento da pesquisa experimental implica o desenvolvimento de uma série de passos, que serão descritos na sequência, conforme sugerido por Gil (2002).

3.2 MÉTODO DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida seguindo o roteiro sugerido por Gil (2002) e, alguns dos seus passos serão adaptados conforme o contexto desse trabalho. Assim, a metodologia será desenvolvida da seguinte maneira:

1)Formulação do problema: o estudo iniciou-se procurando uma melhor representação do comportamento de lajes maciças de concreto armado. Uma das formas de fazer essa análise numericamente é comparando os valores dos momentos fletores das lajes, obtidos através das tabelas de Bares, com os valores obtidos por um método que consiga fazer uma análise global da estrutura. Sabe-se que as tabelas de Bares, originadas da teoria de Kirchhoff, analisam a estrutura de forma individual, e considera que as vigas do contorno da laje são indeformáveis. Já o método da analogia de grelha, consegue analisar o deslocamento global de vigas, pilares e lajes de forma conjunta, alterando o valor dos esforços obtidos.

Na teoria de grelha, cada barra da grelha possui uma rigidez a flexão e uma rigidez a torção. Esses parâmetros são baseados principalmente na dimensão dessas barras, que por sua vez, são modificadas de acordo com o espaçamento entre elas. Numa laje maciça de espessura 8 centímetros, por exemplo, com uma grelha espaçada 20x20 centímetros, cada barra teria 20x8 centímetros. Não há uma regra geral para a determinação desse espaçamento, mas no presente trabalho foram seguidas as sugestões de Hambly (1976).

A respeito da rigidez a torção, entende-se que ela é um parâmetro que deve ser analisado com cautela, pois delimita o quanto essas barras estão sensíveis ao

giro, e também o valor do momento torsor, que por sua vez, influencia diretamente nos valores dos momentos fletores.

Ainda, quando essa análise de momentos fletores se estende para um painel de lajes (como um pavimento tipo, por exemplo), a flexibilidade das vigas de bordo é um fator determinante quando se pretende representar a laje de forma realística. No método tradicional de cálculo de lajes maciças, as vigas são consideradas indeformáveis, e a deformação é destinada somente à própria laje. Fato esse que não se aplica a uma estrutura real contida de pilares, vigas e lajes.

2) Construção das hipóteses: depois de selecionados os métodos de cálculo, no caso as tabelas de Bares e a analogia de grelha, pode-se definir as comparações a serem feitas. Para isso, foram testadas hipóteses em relação à analogia de grelha, quanto ao valor da rigidez à torção, ao tamanho do espaçamento entre as barras da grelha, e a flexibilidade das vigas de bordo na modelagem de lajes. Os valores dos momentos fletores obtidos em cada uma dessas variações, foi comparado ao obtido pelas tabelas de Bares.

O cálculo analítico das lajes maciças utilizando as tabelas de Bares foi feito seguindo o roteiro de cálculo sugerido por Carvalho e Figueiredo Filho (2004).

Em relação ao espaçamento da malha, existem diversos estudos a cerca da melhor modelagem. Entende-se que o espaçamento ideal, é aquele capaz de gerar resultados condizentes com a realidade da peça estrutural, e que não cause um gasto computacional muito alto, com um número elevado de nós. Para o presente trabalho, serão comparadas malhas de 80x80, 40x40, 25x25, 20x20, 10x10 e 5x5 centímetros, para cada caso de laje isolada.

A respeito da influência das vigas de bordo, inicialmente uma laje isolada é testada para a hipótese de ter as vigas indeformáveis, ou seja, na modelagem elas estão impedidas de se deslocarem verticalmente. Depois, essas mesmas vigas ficam flexíveis, ou seja, não tem nenhuma restrição de deslocamento e giro, e podem se deformar junto com a laje. Um painel de lajes com tamanhos distintos sofre a mesma mudança de condições de contorno de vigas, e os resultados dos dois casos ainda são confrontados com o calculado pelas tabelas de Bares.

Para a análise estrutural, é importante ressaltar que quando se tratam de lajes maciças de concreto, é necessário que se leve em consideração uma característica peculiar do material, que é a fissuração por retração. Na modelagem computacional, uma forma de representar a perda da rigidez da laje devido à fissuração é reduzir a

rigidez à torção das barras da grelha. Existem na literatura, diversas teorias acerca do índice correto dessa redução, e, no presente artigo são comparados os resultados dos momentos obtidos através da modificação desta variável, segundo:

- Süssekind (1987): Para análise estrutural de lajes maciças através da analogia de grelha equivalente, Süssekind sugere adotar a rigidez à torção apenas com 1/5 do seu valor, ou seja, apenas 20% para todos os elementos da grelha. Essa consideração a favor da segurança permite uma rotação maior dos apoios, criando uma situação teoricamente mais aproximada da realidade.

- Carvalho (1994): O valor da rigidez à torção das vigas de bordo das lajes pode ser considerado igual a 10% do seu valor integral. Ainda, o autor afirma que para as barras da grelha que representam a laje propriamente dita, deve-se manter o valor total da rigidez a torção.

- NBR 6118/2014: o item 14.7.6.2 da referida norma, permite a modelagem dos pavimentos de edifícios como grelhas, para estudo das cargas verticais. É permitida a redução da rigidez à torção para 15% do valor total da mesma.

- Hambly (1976): o autor propõe que se use, para uma barra de grelha que representa uma largura “*b*” de uma laje maciça, a rigidez a torção sendo igual ao dobro da rigidez a flexão. Essa relação implica em uma redução da rigidez à torção que depende do espaçamento da grelha, pois ao passo que o espaçamento é modificado, a dimensão da barra também é modificada, e conseqüentemente, o valor da rigidez a torção é diferente. Para cada caso de espaçamento, portanto, foi determinada a porcentagem de redução da rigidez a torção que atende a relação $J=2I$.

Ainda, para complementar o estudo, o mesmo modelo de grelha foi modelado sem nenhuma redução na rigidez à torção.

3) Definição do plano experimental: uma laje quadrada (figura 17) e uma retangular (figura 18) serão submetidas à modelagem computacional através do *software*SAP2000 versão estudantil, variando os dados de entrada da rigidez a torção e do espaçamento da malha de grelha. Esses valores serão comparados aos obtidos através das tabelas de Bares. Já para a verificação da influência da flexibilidade das vigas de contorno, uma laje isolada, como a da figura 17 foi inicialmente analisada, e para enfatizar a teoria, um painel com lajes de dimensões diferentes das lajes anteriores (figura 19) finalizará as modelagens. Esses últimos, também serão comparados com os valores obtidos através das tabelas de Bares.

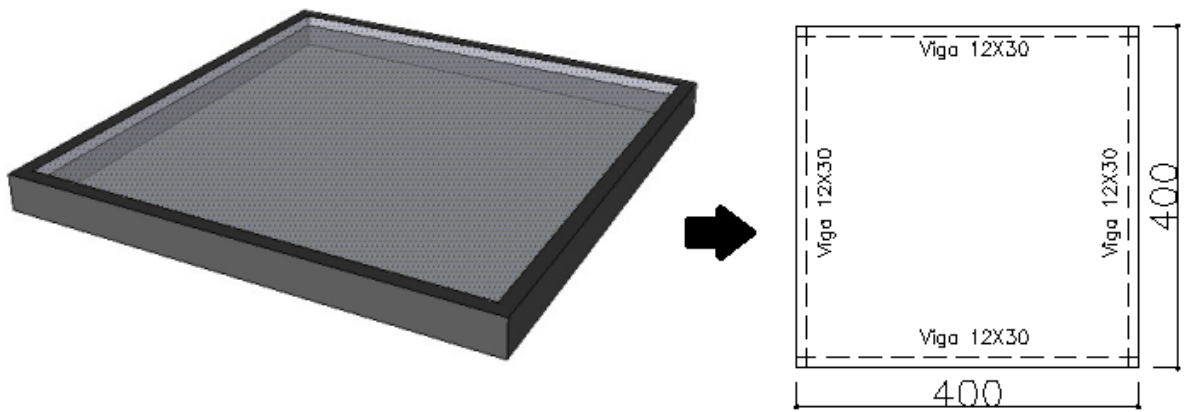


Figura 17: laje maciça quadrada e suas dimensões
Fonte: autoria própria

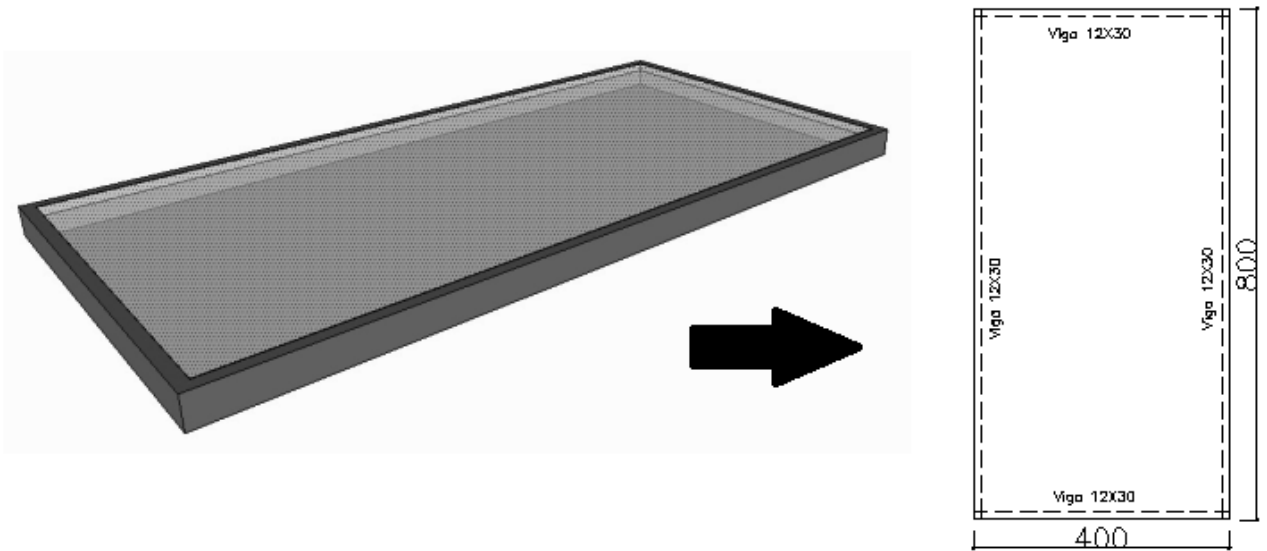


Figura 18: laje maciça retangular e suas dimensões
Fonte: autoria própria

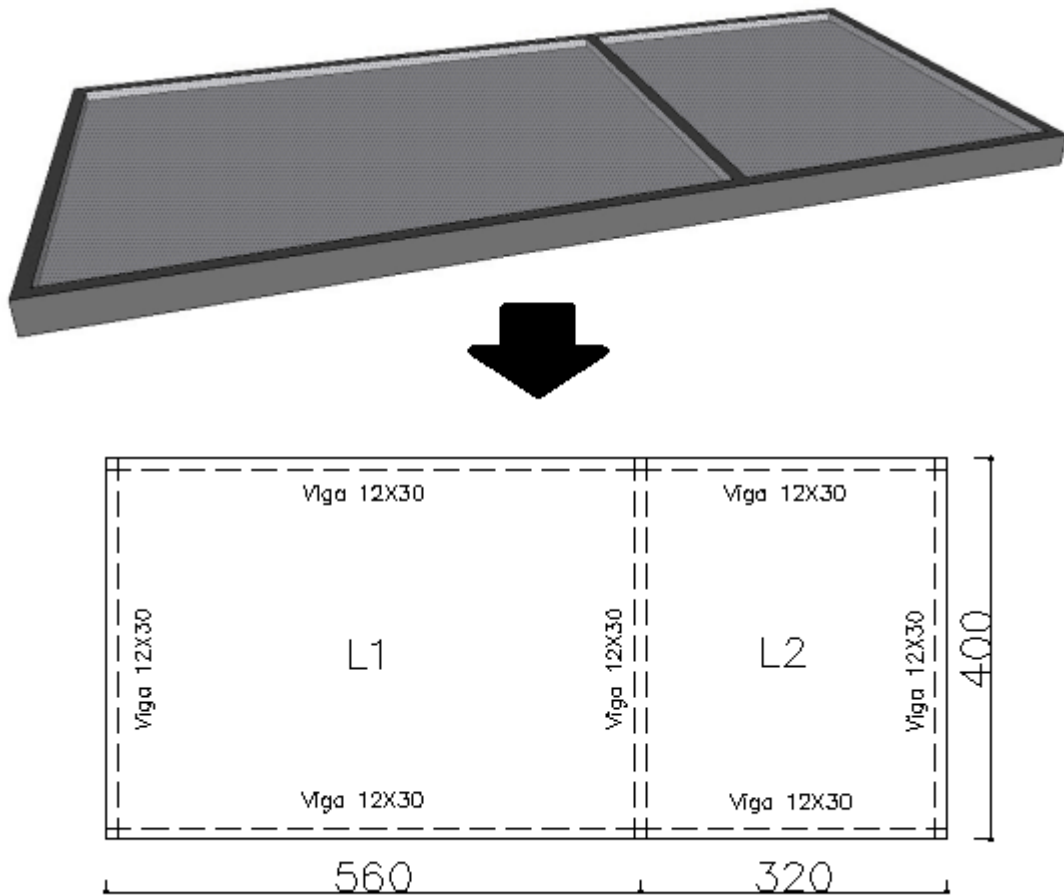


Figura 19: painel de lajes maciças e suas dimensões
Fonte: autoria própria

A fim de representar melhor o roteiro da análise dos momentos fletores das lajes maciças, o organograma da figura 20 mostra os passos seguidos no presente trabalho.

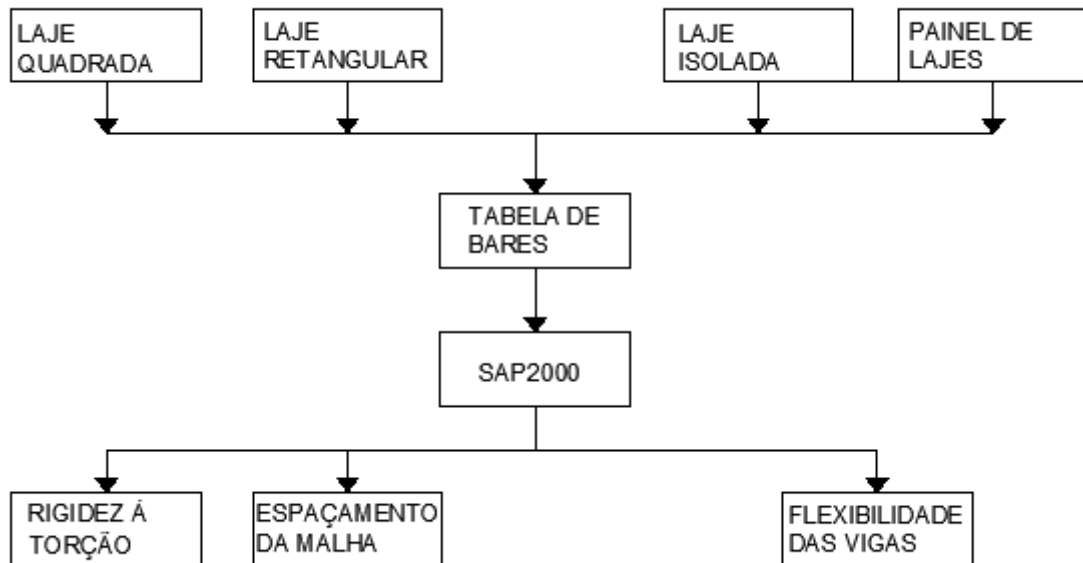


Figura 20: organograma do roteiro do trabalho
 Fonte: autoria própria

4) Análise e interpretação dos dados: em cada caso de laje, para cada mudança feita na modelagem computacional, terá um valor de momento fletor máximo positivo e negativo na direção X e em Y. Esses valores serão confrontados entre si, e entre os obtidos através das tabelas de Bares. Para cada situação, os valores dos momentos sofrem uma alteração para mais ou para menos. Essas alterações serão interpretadas e relacionadas com a teoria envolvendo a análise estrutural.

5) Apresentação das conclusões: em relação à malha de grelha, as conclusões serão referentes às discrepâncias dos resultados ao passo que a malha é refinada. O espaçamento que mais atende as exigências de cálculo também é apontado.

Com relação à rigidez a torção, as diversas hipóteses utilizadas neste trabalho são avaliadas quanto à sua utilização ou não para o cálculo dos esforços em lajes maciças.

Por fim, uma análise sobre a flexibilidade dos apoios é efetuada, com base nos valores de momentos fletores obtidos da comparação com vigas indeformáveis e flexíveis. As discrepâncias de resultados são avaliadas, bem como sua utilização a favor ou contra a segurança.

4. ANÁLISES DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos pela analogia de grelha, calculados pelo *software* SAP2000, estão divididos entre os itens 4.1 e 4.2, onde são apresentados os resultados dos modelos de grelha equivalente de lajes isoladas. No item 4.3 são apresentados os resultados para o modelo de grelha equivalente de uma laje isolada, variando as condições de contorno das vigas de bordo. Ainda, no item 4.4, um painel de lajes formado por duas lajes é usado como exemplo. Os dados estão dispostos em tabelas, e foram utilizados gráficos de barras para uma melhor compreensão dos resultados.

4.1 ESTUDO COMPARATIVO PARA UMA LAJE QUADRADA

Para a modelagem e obtenção dos resultados deste exemplo numérico, laje maciça quadrada, foram utilizadas os parâmetros conforme apresenta o quadro 01. E na figura 21 têm-se as dimensões da laje e da seção das vigas de contorno em estudo. Nesse exemplo serão apresentadas variações do espaçamento da grelha, bem como, reduções da rigidez à torção para o cálculo dos momentos fletores.

Laje maciça de dimensões 4x4 m
Relação entre vãos $lx/ly = 1$
Espessura $h=10$ cm
Considerada engastada em duas bordas adjacentes
Carga distribuída de 750 kgf/m ²
Resistência à compressão característica do concreto (f_{ck})=25 Mpa
Coefficiente de Poisson = 0,2
Seção das vigas de contorno = 12x30 cm

Quadro 01: Parâmetros da modelagem exemplo 4.1
Fonte: autoria própria

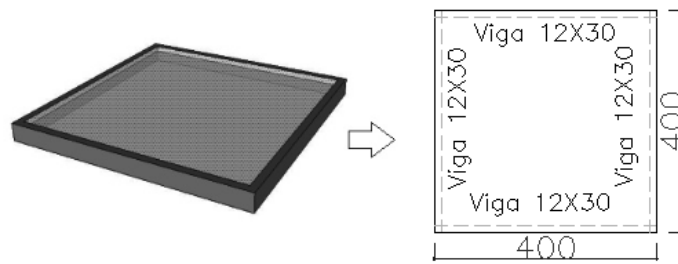


Figura 21: Laje do exemplo 4.1
Fonte: autoria própria

O carregamento distribuído na laje foi calculado de acordo com o espaçamento da grelha, conforme mostra a tabela 01. O valor de 750 kgf/m², quadro 01, foi distribuído nas barras e nas vigas de bordo de acordo com sua área de influência. E os espaçamentos das malhas utilizados nesse trabalho estão representados nas figuras 22 a 24, com variações de malha de 80x80 até 5x5 centímetros.

Tabela 01: Valores das cargas distribuídas

malha (cm)	carga distribuída (kgf/m)	
	vigas de contorno	barras da grelha
80x80	150	300
40x40	75	150
25x25	46,88	93,75
20x20	37,50	75,0
10x10	18,75	37,50
5x5	9,38	18,75

Fonte: autoria própria

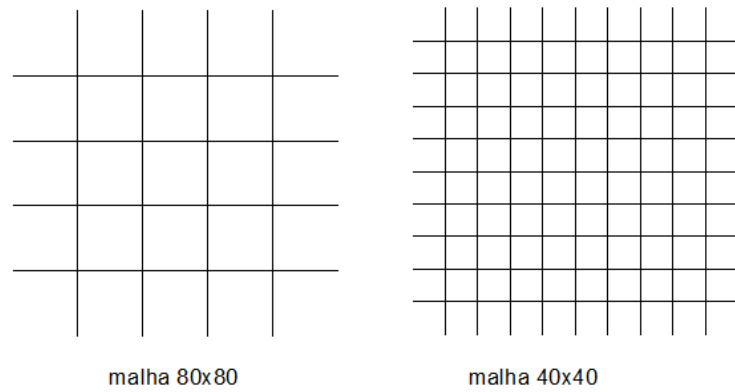


Figura 22: Malha 80x80 e 40x40 centímetros
Fonte: autoria própria

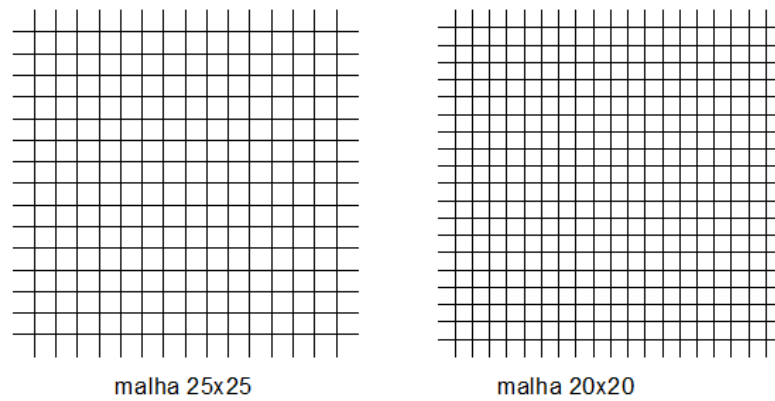


Figura 23: Malha 25x25 e 20x20 centímetros
Fonte: autoria própria

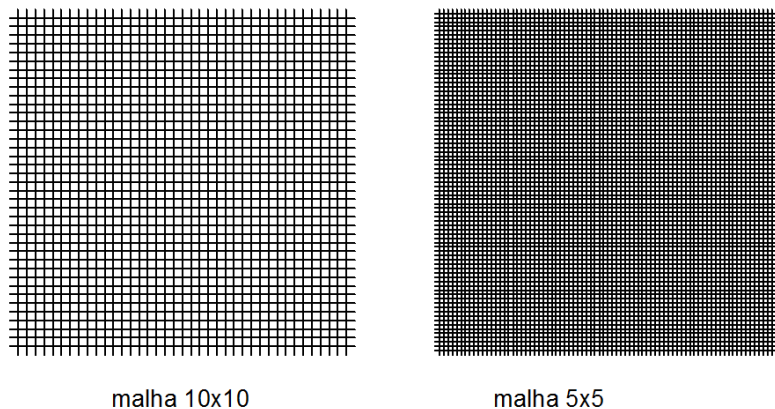


Figura 24: Malha 10x10 e 5x5 centímetros
Fonte: autoria própria

Como resultado, para esse exemplo, a tabela 02 apresenta os valores do refinamento de malha *versus* os valores do momento fletor máximo para cada teoria, utilizando seus respectivos índices de redução da rigidez a torção. Ainda, a tabela 03 traz os resultados obtidos através das tabelas de Bares. Para melhor

entendimento, um gráfico de barras foi gerado com os resultados, e pode ser visto nas figuras 25 e 26. Como a laje em questão é quadrada, os momentos em x e em y são iguais, e com isso a laje maciça possui apenas momentos fletores máximos negativos e positivos.

Tabela 02: exemplo 4.1 - comparação entre os valores de momentos fletores máximos de modelos com diferentes reduções de rigidez a torção (J) e refinamento da malha

MALHA	S/ REDUÇÃO J-VIGAS: 100% J-LAJE: 100%		HAMBLY J/I=2		CARVALHO J-VIGAS:10% J-LAJES: 100%		SUSSEKIND J-VIGAS: 20% J-LAJES: 20%		NBR 6118 J-VIGAS: 15% J-LAJES: 15%	
	Mx+ = My+	Mx- = My-	Mx+ = My+	Mx- = My-	Mx+ = My+	Mx- = My-	Mx+ = My+	Mx- = My-	Mx+ = My+	Mx- = My-
80X80	338	761	340	813	407	811	431	922	446	937
40X40	274	751	313	808	307	795	426	937	444	954
25X25	271	765	309	809	299	806	434	945	452	962
20X20	276	773	306	807	302	815	435	947	452	963
10X10	318	821	298	799	350	873	457	968	471	981
5X5	459	967	459	967	513	1012	506	1007	510	1009

Fonte: autoria própria

Tabela 03: exemplo 4.1 - momentos fletores obtidos pelas tabelas de Bares

TABELA DE BARES	
MOMENTOS MÁXIMOS (Kgf.m/m)	
Mx + = My+	Mx - = My -
337	839

Fonte: autoria própria

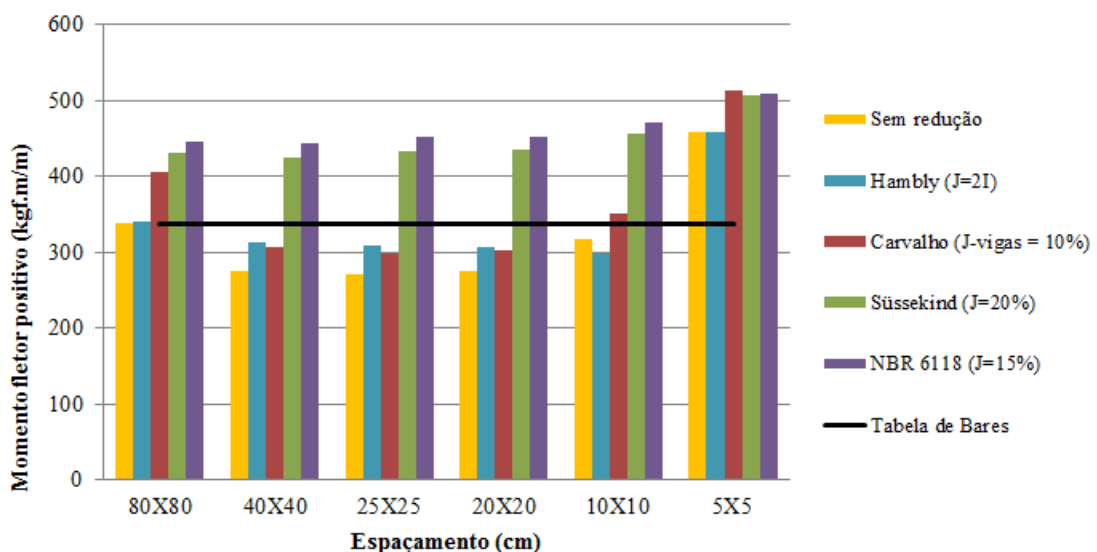


Figura 25: Momentos fletores positivos máximos em função da rigidez a torção e do refinamento da malha.

Fonte: autoria própria

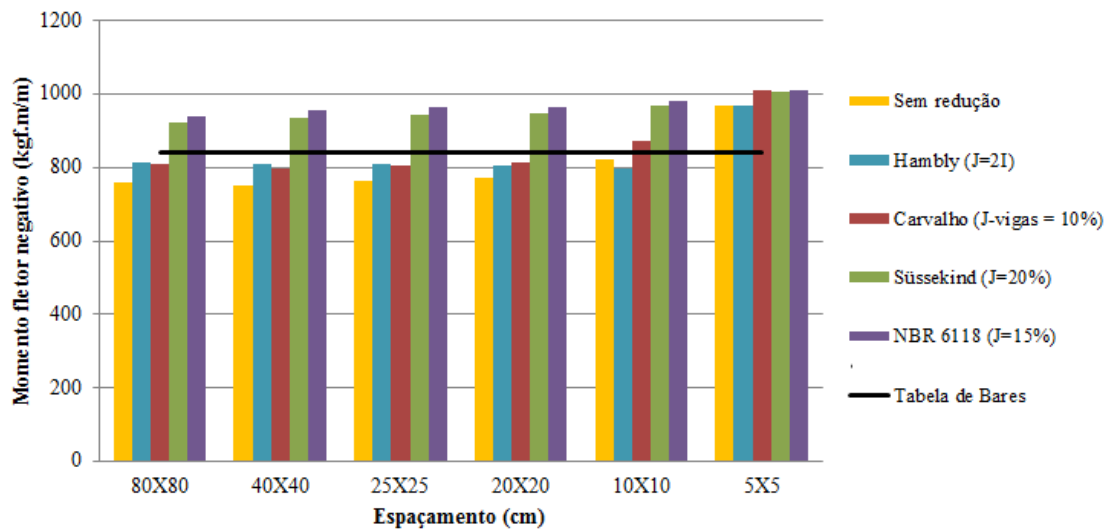


Figura 26: Momentos fletores negativos máximos em função da rigidez a torção e do refinamento da malha.

Fonte: autoria própria

Analisando os resultados das tabelas 02 e 03, pode-se perceber que de uma forma geral, quanto menor a rigidez à torção das barras da grelha, maior o momento fletor. Percebe-se que os menores valores de momento fletor ocorrem quando não há nenhuma redução na rigidez à torção, e os maiores valores ocorrem quando a rigidez à torção se restringe a apenas 15% do seu valor total, conforme sugere a NBR 6118/2014. Esses resultados são explicados pela relação que o momento fletor tem com o momento torsor: quanto maior a rigidez à torção, maior o momento torsor dessa barra. Ao diminuir a rigidez a torção, diminui-se também a sensibilidade das barras à rotação da laje, e conseqüentemente, os valores dos momentos fletores são maiores.

Ainda, percebe-se que os esforços obtidos através das tabelas de Bares se assemelham aos obtidos com uma rigidez a torção maior. O que é justificável, pois essa rigidez não é considerada no cálculo analítico. Já com um espaçamento de grelha 25x25 centímetros, por exemplo, e com a rigidez a torção reduzida a 15%, conforme a NBR 6118/2014, os valores obtidos pelas tabelas de Bares diferem para menos, em aproximadamente 34% para o momento positivo, e 15% para o negativo. A tabela 04 mostra essa diferença.

Tabela 04: Relação entre cálculo dos momentos fletores por tabelas e por analogia de grelha.

	$M_{x+}=M_{y+}$	$M_{x-}=M_{y-}$
	(Kgf.m/m)	
(A) Grelha 25x25; J=15%	452	962
(B) Tabelas	337	839
Relação A/B	1,34	1,15

Fonte: autoria própria

Outro resultado analisado nesse exemplo é a avaliação do diagrama de momentos fletores da laje em relação às reduções da rigidez à torção. As figuras 27 e 28 mostram os diagramas de momento fletor sem a redução da rigidez a torção e com 15% da rigidez a torção, respectivamente. Nessas figuras percebe-se uma descontinuidade nos diagramas, ocasionadas justamente pela presença do momento torsor. Ou seja, se existe uma descontinuidade na direção x no diagrama de momento fletor, é porque existe um momento torsor em x aplicado no nó referente a essas barras. À medida que a inércia a torção sofre uma redução, o valor do momento torsor diminui, o momento fletor aumenta, e a descontinuidade do gráfico fica menos acentuada.

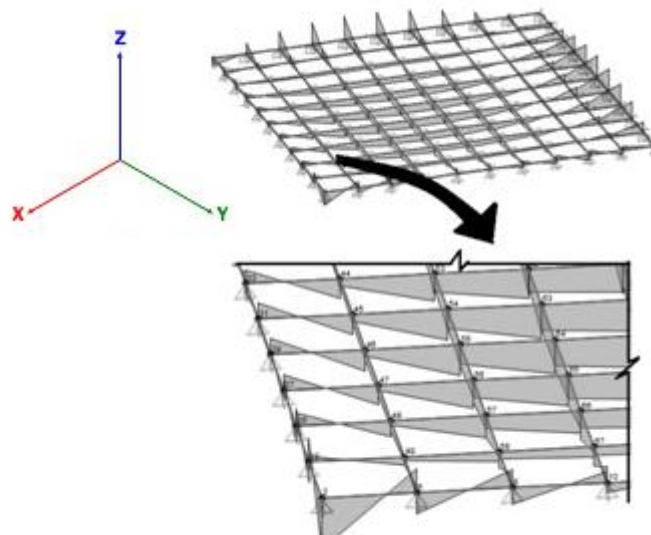


Figura 27: Diagrama de momento fletor da laje sem redução da rigidez torção, e a descontinuidade acentuada nos nós das barras provocada pelo momento torsor.

Fonte: autoria própria

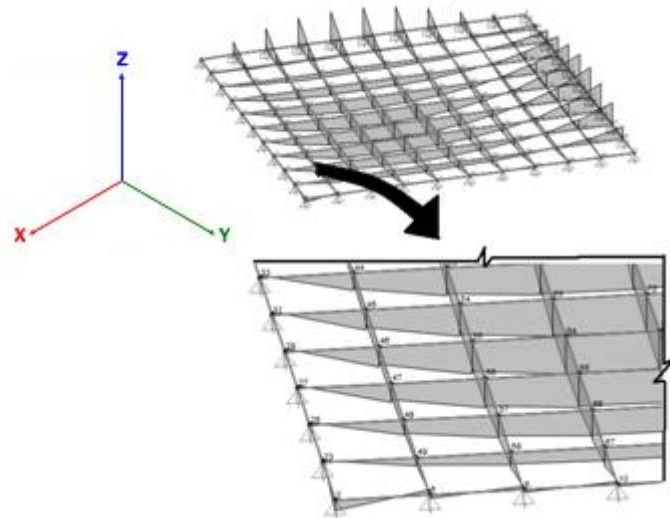


Figura 28:Diagrama de momento fletor da laje com 15% da rigidez a torção, e uma menor descontinuidade nos nós das barras provocada pelo momento torsor.
Fonte: autoria própria

Para melhor entendimento dessa relação do momento torsor com o momento fletor, apresentada nas figuras 27 e 28, a tabela 4 mostra os valores obtidos do momento torsor (M_t), em comparação aos momentos fletores (M_x e M_y), quando a laje quadrada é modelada com uma grelha de 40x40 centímetros. Para esse caso, obedecendo a relação sugerida por Hambly (1976) de $J=2I$, a rigidez a torção é reduzida a 59% do seu valor total. Novamente percebe-se na tabela 05 que ao passo que a rigidez a torção diminui, o momento torsor decresce. E à medida que esse momento torsor diminui, o momento fletor aumenta.

Tabela 05: Comparativo dos momentos torsesores com os fletores para uma laje quadrada de espaçamento 40x40 centímetros

	S/ REDUÇÃO	HAMBLY	CARVALHO	SUSSEKIND	NBR 6118
	J-VIGAS: 100%	J/I=2	J-VIGAS:10%	J-VIGAS: 20%	J-VIGAS: 15%
	J-LAJE: 100%	J=59%	J-LAJES: 100%	J-LAJES: 20%	J-LAJES: 15%
$M_x+=M_y+$ (kgf.m/m)	274	313	307	426	444
$M_x-=M_y-$ (kgf.m/m)	751	808	795	937	954
M_t (Kgf.m/m)	360	270	278	127	97

Fonte: autoria própria

Analisando os resultados obtidos nesse exemplo, percebe-se de uma forma geral, que os valores de momento fletor variam irregularmente conforme a malha é

refinada. Porém, os valores desses momentos são semelhantes, enquanto as barras da malha tem uma relação de largura e altura coerentes com as equações (10) e (11) (p. 37) de Gere e Weaver (1981). Quando a malha é espaçada em 80, 40, 25 e 20 centímetros, o parâmetro “ e ”, equação (10), é a menor dimensão, correspondente a 10 centímetros que é a espessura da laje, e o parâmetro “ f ”, a maior dimensão, referente ao espaçamento da malha. Assim, a equação (10) da rigidez a torção que é proporcional ao cubo da menor dimensão, satisfaz o comportamento dessas barras. Já quando a malha é espaçada em 10 e 5 centímetros, essas dimensões se invertem, resultando em valores incorretos para o momento fletor. A figura 29 apresenta essa inversão de valores em uma barra da grelha.

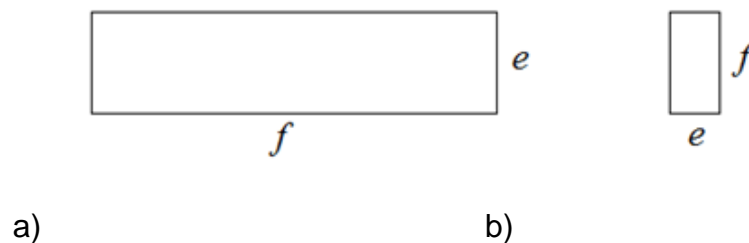


Figura 29 a) barra da grelha quando as dimensões “ e ” e “ f ” correspondem as equações de Gere e Weaver b) inversão das dimensões “ e ” e “ f ”
 Fonte: autoria própria

4.2 ESTUDO COMPARATIVO PARA UMA LAJE RETANGULAR

Nesse estudo, o método de análise comparativa é igual ao exemplo anterior, utilizando os mesmos espaçamentos de malha, bem como a distribuição do carregamento de 750 kgf/m². Para esta modelagem foram utilizados os parâmetros conforme apresenta o quadro 02, e as dimensões da laje e das vigas podem ser vistas na figura 30.

Laje maciça de dimensões 4x8 m
Relação entre vãos $l_x/l_y = 2$
Espessura $h=10$ cm
Considerada engastada em duas bordas adjacentes
Carga distribuída de 750 kgf/m ²
Resistência a compressão característica do concreto (f_{ck}) = 25 Mpa
Coefficiente de Poisson = $0,2$
Seção das vigas de contorno = 12×30 cm

Quadro 02: Parâmetros da modelagem exemplo 4.2

Fonte: autoria própria

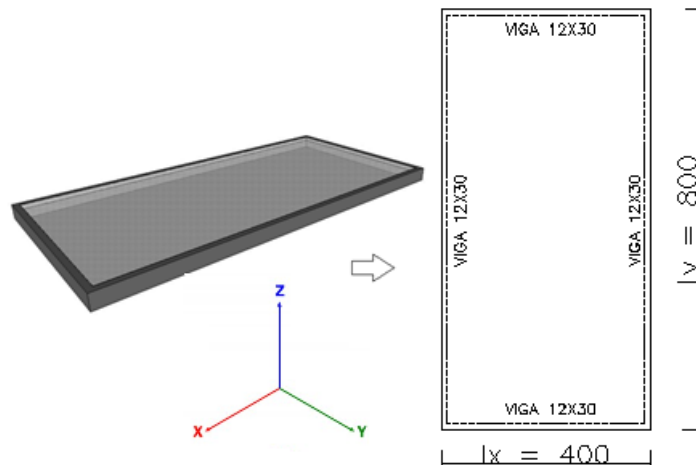


Figura 30: Laje do exemplo 4.2

Fonte: autoria própria

Como resultado, para esse exemplo, a tabela 06 apresenta os valores do refinamento de malha *versus* os valores do momento fletor para cada índice de redução da rigidez a torção. Ainda, a tabela 07 mostra os valores obtidos através das tabelas de Bares. Nas figuras 31 e 32 têm-se gráficos de barras contendo os resultados para os momentos fletores positivos e negativos em x e y , respectivamente.

Tabela 06: exemplo 4.2 - comparação entre os valores de momento fletor máximo de modelos com diferentes reduções de rigidez a torção e refinamento da malha

	S/ REDUÇÃO J-VIGAS: 100% J-LAJES: 100%				HAMBLY J/l=2				CARVALHO J-VIGAS: 10% J-LAJES: 100%				SUSSEKIND J-VIGAS: 20% J-LAJES: 20%				NBR 6118 J-VIGAS: 15% J-LAJES: 15%			
MOMENTOS MÁXIMOS (kgf.m/m)																				
MALHA	Mx +	Mx -	My+	My-	Mx +	Mx -	My+	My-	Mx +	Mx -	My+	My-	Mx +	Mx -	My+	My-	Mx +	Mx -	My+	My-
80X80	704	1318	354	945	777	1405	285	945	731	1354	434	965	882	1529	293	945	898	1548	288	943
40X40	681	1330	241	950	753	1413	237	954	709	1366	294	969	873	1556	295	963	889	1575	284	969
25X25	692	1349	211	952	746	1411	217	956	722	1384	249	970	878	1565	272	966	893	1584	280	965
20X20	701	1362	203	952	743	1410	209	955	730	1399	238	971	878	1570	270	965	892	1587	279	964
10X10	760	1432	202	957	741	1410	197	957	795	1474	238	976	898	1594	274	965	908	1605	282	965
5X5	830	1512	220	954	740	1409	191	956	916	1614	282	963	916	1614	282	963	922	1622	288	963

Fonte: autoria própria

Tabela 07: exemplo 4.2 - momentos fletores obtidos pelas tabelas de Bares

TABELA DE BARES			
MOMENTOS MÁXIMOS (kgf.m/m)			
Mx +	Mx -	My+	My-
689	1427	226	984

Fonte: autoria própria

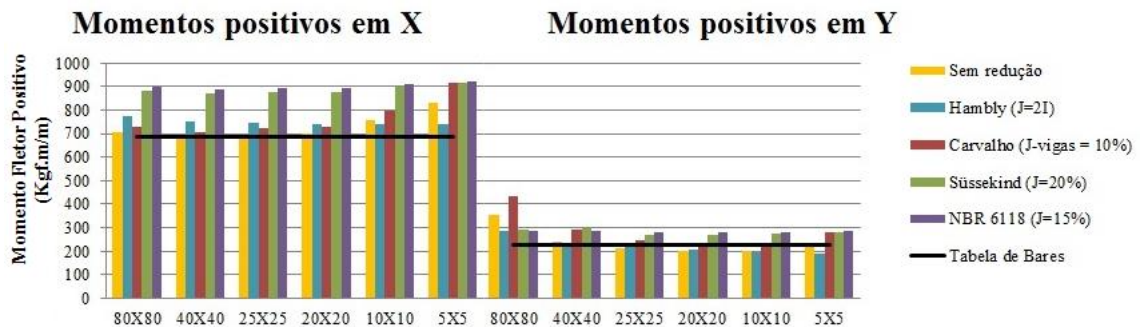


Figura 31: Momentos fletores positivos máximos em x e em y em função da rigidez à torção e do refinamento da malha.

Fonte: autoria própria

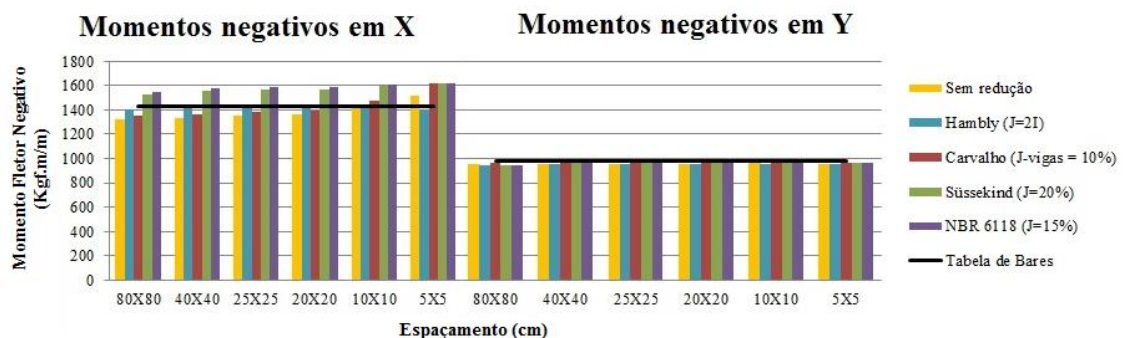


Figura 32: Momentos fletores negativos máximos em x e em y em função da rigidez à torção e do refinamento da malha.

Fonte: autoria própria

Analisando os resultados obtidos para a laje retangular, percebe-se que os valores dos momentos fletores negativos em y praticamente não variam. Esses momentos fletores são causados pelo engaste da laje nas bordas adjacentes, e não são sensíveis a alteração, quando as propriedades das barras da laje se alteram. Em outras palavras, o momento negativo do engaste existe, sendo independente da alteração na rigidez das barras, e é referente à reação do engaste devido aos esforços que a laje está sendo solicitada.

Já o momento fletor negativo em x sofre mais variações ao passo que a rigidez das barras e a malha da grelha se modificam. Esse comportamento da laje retangular é explicado por Carvalho (1994), que diz que à medida que as lajes se aproximam das armadas em uma só direção, ou seja, quando a relação entre vãos l_x e l_y é maior que 2, o seu comportamento é comparável ao de uma viga. Ou seja, no menor vão, os momentos negativos e positivos são mais suscetíveis a alterações no valor, quando as propriedades das barras da grelha se modificam.

Ainda, analisando os valores dos momentos fletores, figuras 31 e 32, percebe-se que quando não há redução na rigidez à torção das barras, e quando as barras da grelha tem uma relação de largura e altura coerentes com as equações (09) e (10) de Gere e Weaver (1980), os valores obtidos dos momentos fletores se assemelham aos obtidos pelas tabelas de Bares. A tabela 08 mostra que de fato, a diferença de valores é mínima entre a modelagem da laje com uma grelha de 25x25 centímetros, sem redução da rigidez a torção das barras, e os valores obtidos pelas tabelas de Bares.

Tabela 08: Relação entre momentos obtidos pela analogia de grelha sem redução da rigidez a torção e tabela de Bares

	Mx+	Mx-	My+	My-
	(Kgf.m/m)			
(A) Grelha 25x25; J=100%	692	1349	211	952
(B) Tabelas	689	1427	226	984
Relação A/B	1,00	0,95	0,93	0,97

Fonte: autoria própria

O comportamento da laje retangular, com relação entre vãos $l_x/l_y=2$ é um pouco diferente da laje quadrada, devido a sua tendência a se comportar como uma viga. Apesar disso, a distribuição de momentos fletores nas duas lajes é coerente com a realidade, e semelhantes entre si, como mostram os gráficos de momento fletor nas figuras 33 e 34. Esses gráficos foram gerados quando a rigidez a torção das barras obedece a recomendação da NBR 6118/2014, e vale 15% do seu valor total.

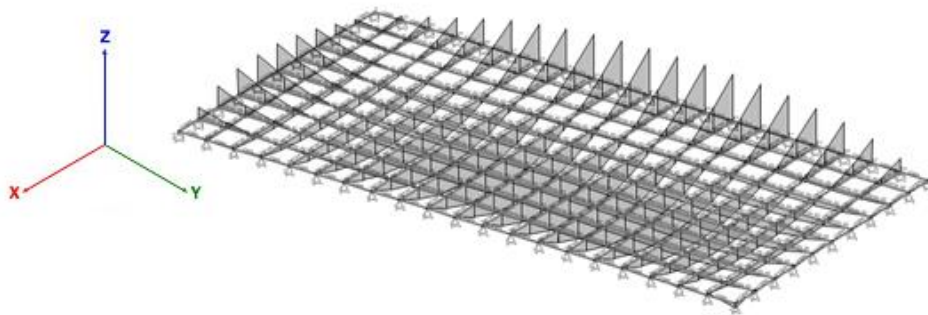


Figura 33: Momentos fletores da laje maciça retangular quando a rigidez a torção é reduzida conforme a NBR6118/2014
 Fonte: autoria própria

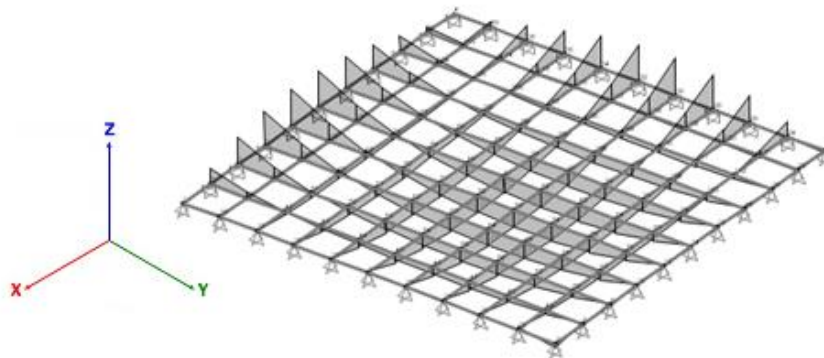


Figura 34: Momentos fletores da laje maciça quadrada quando a rigidez a torção é reduzida conforme a NBR6118/2014
 Fonte: autoria própria

Uma colocação importante a respeito da distribuição de esforços é a presença de momento fletor negativo nas bordas onde não há engaste. Esse momento é ocasionado por questões de execução da estrutura. Mais especificamente, na maioria dos casos as lajes são concretadas junto com as vigas, e isso gera certo

engastamento entre esses elementos estruturais. Quando a laje é solicitada à flexão, a viga tende a girar junto com a laje, e o que impede esse movimento é a rigidez a torção dessas vigas. Esse esforço para conter a rotação das vigas gera os momentos negativos nas bordas. A figura 35 mostra o momento fletor negativo presente na borda oposta àquela que possui engaste.

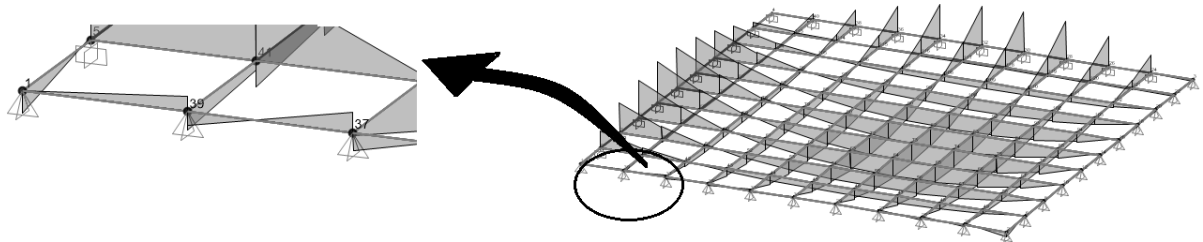


Figura 35: Momento fletor negativo na borda simplesmente apoiada
Fonte: autoria própria

O momento fletor negativo nessas bordas simplesmente apoiadas não aparecem evidentemente no cálculo analítico através das tabelas de Bares. Para o caso de vinculação de uma laje com os quatro lados simplesmente apoiados, por exemplo, a tabela de Bares dispõe apenas de momento positivo em x e em y . No caso de vinculação da laje em questão, o momento negativo obtido através dessas tabelas é referente apenas à borda engastada. A borda oposta ao engaste, que é simplesmente apoiada, possui teoricamente, momento negativo nulo. Essa simplificação não representa o real comportamento da laje maciça, como pode ser observado através da modelagem por analogia de grelha. A inclusão desse efeito de momento fletor negativo nas lajes foi considerada pela última atualização da NBR 6118, em 2014. A referida norma sugere que se tenha uma armadura mínima negativa nas bordas das lajes em que não há continuidade, para justamente conter esse momento fletor negativo.

Por fim, fazendo-se uma análise geral das hipóteses de modelagem para essas lajes isoladas, pode-se perceber em relação ao espaçamento da malha, que enquanto esse espaçamento sugerem barras que obedecem as equações de Gere e Weaver (1980), os valores de momento fletor convergem para um resultado coerente. Ou seja, quando o espaçamento é de 40x40, 25x25, e 20x20 centímetros, os valores de momento pouco variam, mesmo quando há a redução da rigidez a torção das barras. Para as lajes modeladas nesse trabalho, a malha de 80x80 centímetros mostrou-se muito espaçada, fazendo com que os momentos fletores

sofressem picos, quando comparados com os valores obtidos no refinamento dessa malha.

4.3 ESTUDO COMPARATIVO DA FLEXIBILIDADE DAS VIGAS DE BORDO PARA UMA LAJE ISOLADA

A laje maciça utilizada neste exemplo é quadrada, com 4 metros de lado, e possui as mesmas características da laje do exemplo 4.1, porém neste exemplo, todas as bordas são simplesmente apoiadas. Para esta modelagem, foi considerada uma redução de 15% da rigidez à torção nas barras, conforme recomendação da NBR 6118/2014.

Inicialmente a modelagem foi feita com restrição ao deslocamento vertical somente nos quatro vértices da laje, assemelhando-se a uma laje com vigas flexíveis e deformáveis, e com quatro pilares. A figura 36 mostra a modelagem. Em seguida, todas as quatro bordas da laje foram restringidas ao deslocamento vertical para simular uma laje com as vigas de bordo indeformáveis, como é considerado no cálculo analítico. A figura 37 mostra a modelagem em questão. Os valores obtidos dos momentos fletores serão dispostos nas tabelas 09 e 10, comparados entre si, e entre os obtidos pelas tabelas de Bares, que também constam nas tabelas 09 e 10.

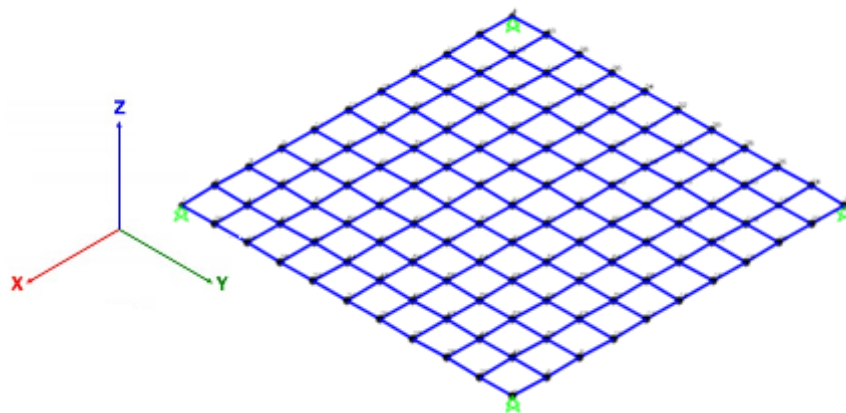


Figura 36: laje quadrada modelada com os quatro vértices impedidos de se deslocarem verticalmente, e com as vigas de borda flexíveis

Fonte: autoria própria

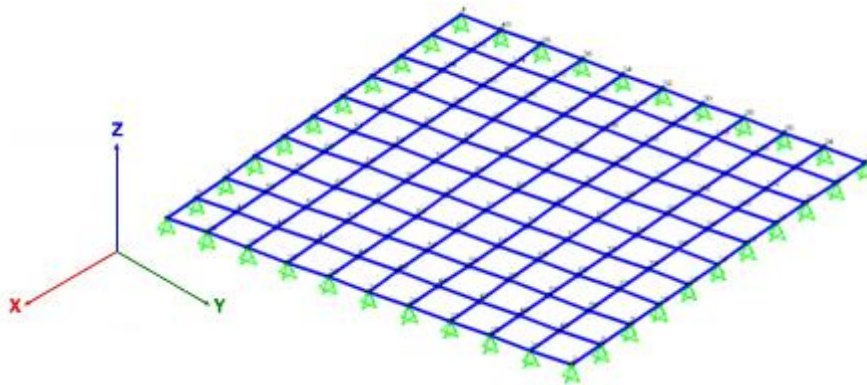


Figura 37: laje quadrada modelada com as quatro bordas impedidos de se deslocarem verticalmente

Fonte: autoria própria

MODELAGEM VIGAS FLEXÍVEIS 12x30		
MOMENTOS MÁXIMOS (kgf.m/m)		
	TABELA DE BARES	SAP
$M_{x+} = M_{y+}$	529	743
$M_{x-} = M_{y-}$	0	15

Tabela 09: comparativo dos valores de momento fletor da laje quadrada modelada com vigas flexíveis, com as tabelas de Bares

Fonte: autoria própria

MODELAGEM VIGAS INDEFORMÁVEIS 12x30		
MOMENTOS MÁXIMOS (kgf.m/m)		
	TABELA DE BARES	SAP
$M_{x+} = M_{y+}$	529	727
$M_{x-} = M_{y-}$	0	55

Tabela 10: comparativo dos valores de momento fletor da laje quadrada modelada com vigas indeformáveis com as tabelas de Bares

Fonte: autoria própria

Analisando as tabelas 09 e 10 percebe-se que comparando-se as duas modelagens, os momentos fletores das barras centrais da laje, que estão descritos nas tabelas em questão, não possuem diferença significativa. Porém, os gráficos de momento fletor são bastante diferentes entre si, como pode ser visto nas figuras 38 e 39.

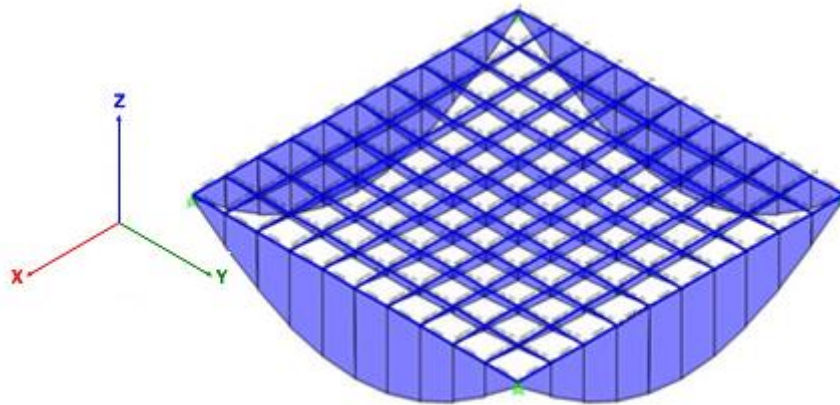


Figura 38: momentos fletores na laje quadrada, quando as vigas são flexíveis
 Fonte: autoria própria

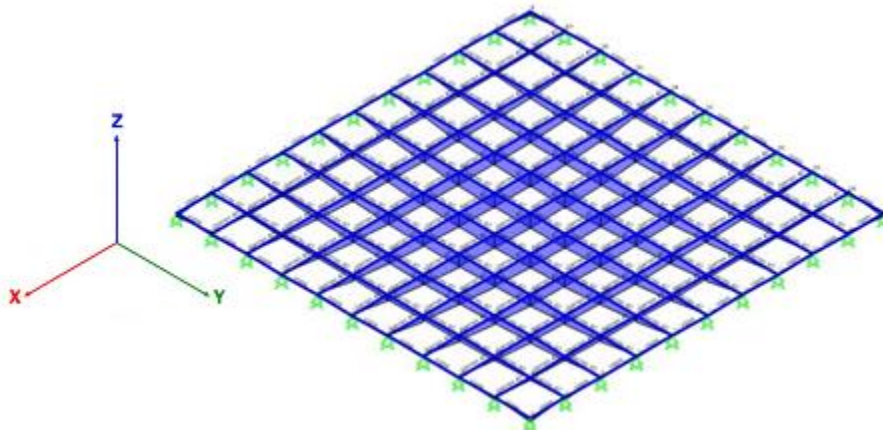


Figura 39: momentos fletores na laje, quando as vigas são indeslocáveis verticalmente
 Fonte: autoria própria

Observando as figuras, percebe-se que os maiores valores de momento fletor, encontram-se nas vigas de bordo. O que é razoável, visto que quando as vigas são consideradas flexíveis, a estrutura trabalha como um todo e as vigas tendem a se deformarem mais.

Analisando as duas modelagens, pode-se inferir que ao considerar as vigas de bordo flexíveis, a laje maciça não sofre significativa mudança. Ou seja, seu dimensionamento partindo dos valores dos momentos fletores máximos, não seria afetado com essa consideração. Porém, na figura 38 percebe-se que as próprias vigas de bordo recebem uma carga de reação da laje muito maior, quando comparada com a consideração de vigas indeslocáveis. A figura 40 mostra de forma simplificada, o que acontece com as vigas quando elas são consideradas indeslocáveis verticalmente, e quando são flexíveis, respectivamente.

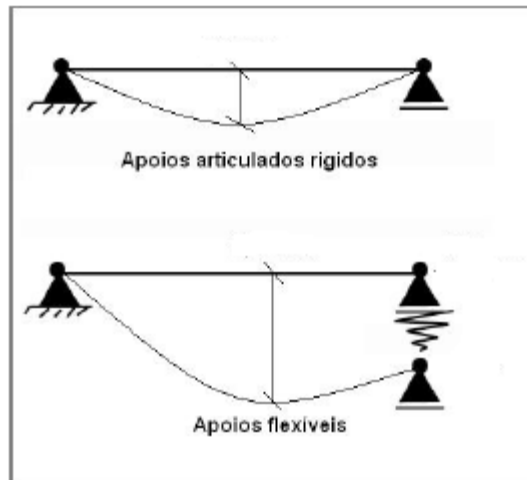


Figura 40: deformação na laje sob apoios rígidos e flexíveis.
 Fonte: adaptado de Coelho (2000)

Ainda, deve-se atentar ao fato de que em todas as modelagens deste exemplo, foi constatado momento negativo nas bordas. Como já dito anteriormente, a não consideração da existência deste momento fletor no cálculo analítico é mais uma simplificação de cálculo, que a NBR 6118/2014 já considera e sugere que se tenha armadura.

4.4 ESTUDO COMPARATIVO DA FLEXIBILIDADE DAS VIGAS DE BORDO PARA UM PAINEL DE LAJES

Neste último exemplo, considera-se um painel de lajes, sendo a laje $L1$ retangular com 5,60 x 4,00 metros, e a laje $L2$ com 3,20 x 4,0 metros, conforme a figura 41. As características do concreto são as mesmas anteriormente utilizadas. A mesma carga de 750 kgf/m² foi dividida entre as barras por área de influência, e a espessura das duas lajes também é 10 centímetros. Para essa modelagem, foi utilizada uma grelha de espaçamento 40x40 centímetros, e a rigidez à torção foi reduzida a 15% do seu valor, conforme recomendação da NBR 6118/2014.

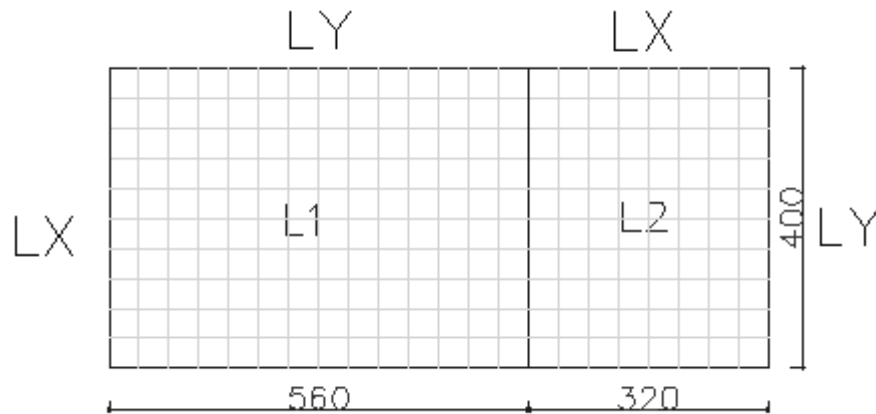


Figura 41: painel de lajes com suas respectivas dimensões e indicação de vão
Fonte: autoria própria

O painel foi modelado com as vigas de borda flexíveis, e nos cantos extremos das lajes, um apoio com restrição de deslocamento vertical foi colocado, a fim de melhor exemplificar os pilares presentes em um pavimento. Depois, a modelagem é repetida e as vigas, antes flexíveis, são impedidas de se deslocarem verticalmente. Os resultados são comparados entre si, e entre os obtidos através das tabelas de Bares, a fim de entender a influência da flexibilidade dos apoios das lajes. A tabela 11 traz esses resultados

Tabela 11: valores de momentos fletores máximos do painel de lajes calculados com as tabelas de Bares, e modelados com vigas flexíveis e indeformáveis

	TABELAS DE BARES		SAP - VIGAS FLEXÍVEIS 12x30		SAP - VIGAS INDEFORMÁVEIS 12x30	
	MOMENTOS MÁXIMOS (kgf.m/m)					
	Laje 01	Laje 02	Laje 01	Laje 02	Laje 01	Laje 02
Mx+	714	386	1024	186	1018	458
My+	505	193	830	987	614	170
Mx-	0	785	16	848	47	1217
My-	1303	0	851	19	1231	35

COMPATIBILIZAÇÃO TABELA DE BARES M12=1044

Fonte: autoria própria

Analisando a tabela 11 percebe-se um aumento significativo nos valores do momento fletor positivo no eixo y das duas lajes na modelagem com vigas flexíveis, em comparação com a modelagem com vigas indeformáveis. Esse acréscimo é mais perceptível na laje L2, que sofre um aumento de mais de 500% nesse momento fletor, quando comparado com a modelagem por vigas indeformáveis. Essa variação de valores é aceitável, visto que o software analisa o pavimento trabalhando em

conjunto, e a distribuição de esforços é diferente. Observa-se analisando a figura 42 que as vigas da borda estão sendo mais solicitadas, quando comparadas com a modelagem de vigas indeformáveis, presente na figura 43.

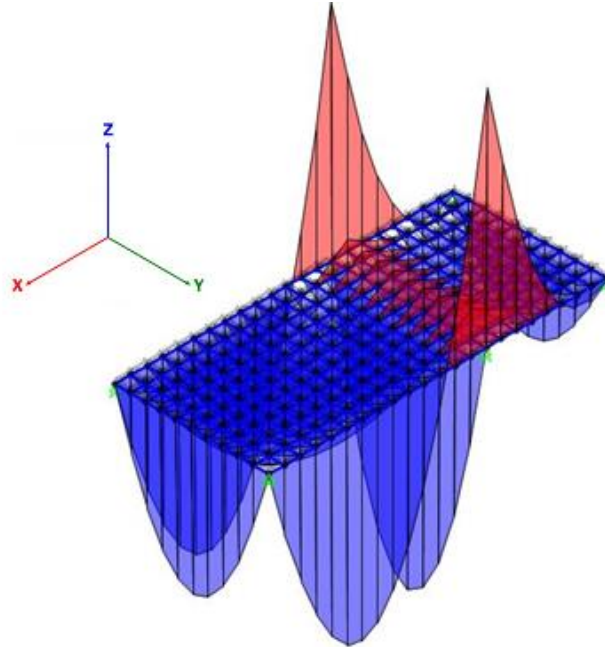


Figura 42: momentos fletores no painel de lajes quando as vigas são flexíveis
Fonte: autoria própria

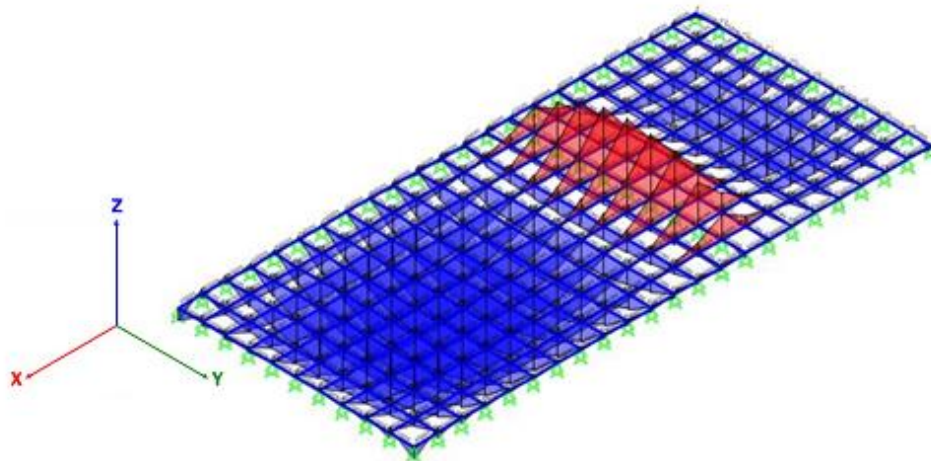


Figura 43: momentos fletores no painel de lajes quando as vigas são indeslocáveis verticalmente
Fonte: autoria própria

Como dito anteriormente, a analogia de grelha é um processo capaz de analisar o pavimento como um todo, e dessa forma, a interação entre os elementos estruturais é considerada na análise estrutural. Devido a isso, percebeu-se que o fato das vigas serem consideradas flexíveis fez com que o pavimento todo se

deformasse mais, quando comparado com a modelagem com vigas indeformáveis. Quando as vigas são impedidas de se deslocarem verticalmente, o pavimento todo fica mais rígido, e os valores de momento fletor são menores.

Para melhor compreensão dos resultados, o mesmo painel com vigas flexíveis foi modelado com vigas de bordo maiores, com altura equivalente a 10% do vão da laje. A intenção de aumentar a seção das vigas é criar mais rigidez ao painel, e comparar os resultados com os anteriormente obtidos. A seção adotada foi de 14x40 centímetros, e a tabela 12 mostra os resultados da modelagem.

Tabela 12: valores de momento fletor do painel de lajes modelado com vigas flexíveis de 14x40 centímetros

SAP - VIGAS FLEXÍVEIS 14x40		
MOMENTOS MÁXIMOS (kgf.m/m)		
	Laje 01	Laje 02
Mx+	971	310
My+	677	477
Mx-	57	887
My-	907	52

Fonte: autoria própria

Analisando a tabela 12, percebe-se que ao passo que a altura da seção da viga aumenta, os valores dos esforços assemelham-se aos obtidos na modelagem com vigas indeformáveis. As vigas com maior altura proporcionam uma rigidez maior ao painel como um todo. Ao comparar os resultados da tabela 12 com os da tabela 11, pode-se inferir que quando a rigidez do painel é baixa, as lajes possuem um comportamento similar ao de uma laje plana, ou seja, as vigas de bordo pouco sustentam a laje, e as suas reações estariam sendo descarregadas diretamente nos pilares.

Ainda em relação ao painel de lajes, os resultados que mais se aproximam dos obtidos através das tabelas de Bares são os da modelagem com vigas indeformáveis verticalmente. Essa semelhança é aceitável, visto que no cálculo dos esforços através de tabelas, as vigas de borda são consideradas indeformáveis, de fato.

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou avaliar o comportamento estrutural de lajes maciças de concreto armado, comparando os valores de momento fletor obtidos através das tabelas de Bares, com os obtidos pela analogia de grelha. Baseada nas simplificações a serem feitas no cálculo analítico através das tabelas, optou-se por calcular os momentos fletores das lajes através de um método que permitisse uma análise global da estrutura, e representasse melhor o comportamento real de uma laje maciça.

A analogia de grelha possibilita uma análise tridimensional e integrada, mas quando se trata da modelagem computacional, existem algumas considerações a respeito das variáveis que envolvem o cálculo de esforços. Foram testadas, portanto, hipóteses a respeito do espaçamento da malha utilizada na modelagem, e da influência nos valores de momento fletor quando se reduz a rigidez à torção das barras da grelha.

O modelo de analogia de grelha mostrou certa irregularidade na variação dos resultados obtidos à medida que diminui-se o espaçamento das barras. Ou seja, não é a grelha menos espaçada que traz os resultados mais coerentes de momento fletor. Para os exemplos deste trabalho, a malha de 40x40 centímetros mostrou-se satisfatória, visto que ao se observar os valores obtidos pela malha de 25x25 e 20x20 centímetros, nota-se uma variação mínima. Isso implica que realmente os valores de momento fletor convergem, e obviamente, a malha mais espaçada demanda um número bem menor de cálculos a serem feitos.

Em relação à rigidez à torção das barras, entende-se que considerar a redução dessa variável no cálculo de uma laje maciça de concreto traz resultados mais realistas. Sem nenhuma redução da rigidez à torção, o modelo de grelha equivalente fica, apesar de coerente em relação às tabelas de Bares, incompatível com as estruturas reais, pois desconsidera uma característica típica do concreto, que é a fissuração. Reduzir a inércia à torção do elemento na análise estrutural significa, em termos práticos, que a região efetiva de concreto que irá ser solicitada aos esforços de torção foi reduzida. De modo geral, a adoção de 15% da rigidez total à torção das vigas, além de atender a NBR 6118/2014, é uma boa forma de representar o comportamento real da laje maciça de concreto armado.

Quando se trata da análise das flexibilidades das vigas de borda, percebe-se uma divergência maior de resultados nas modelagens de um painel de lajes, do que na modelagem de uma laje isolada. Isto é, o fato da analogia de levar em conta a interação dos elementos estruturais, deixa os valores dos momentos fletores do painel de lajes mais sensíveis à mudança, quando comparados à modelagem de uma laje isolada, onde não há interação com outras lajes.

De maneira geral, com a utilização do processo de analogia de grelha é possível calcular pavimentos de concreto armado de uma forma integrada, diferentemente do cálculo analítico, o qual considera os elementos componentes do pavimento de forma isolada, sem levar em conta a interação entre os mesmos. Com o cálculo integrado, a contribuição de cada elemento que compõe o pavimento fica corretamente caracterizada e, dessa forma, os esforços e os deslocamentos determinados tendem a ser mais precisos e mais próximos dos valores reais.

Por fim, é possível afirmar que o cálculo analítico de momentos fletores a partir das tabelas de Bares são úteis para uma análise inicial, ou um pré-dimensionamento. Contudo, deve-se buscar modelos em que as simplificações sejam mínimas, devido à distorção que as mesmas podem causar na obtenção dos esforços. A analogia de grelha mostrou-se, portanto, de fácil compreensão e modelagem, sendo uma alternativa viável para a análise estrutural de edifícios.

Como sugestão para a continuidade do presente estudo, sugere-se utilizar o Método dos Elementos Finitos e modelar as lajes como elementos de placas para a comparação com os outros métodos adotados. Ainda, para uma análise mais aprofundada, é interessante que se adote um projeto com lajes de diferentes dimensões e condições de apoio, a fim de chegar a conclusões mais precisas acerca da redistribuição de esforços em um pavimento.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J.M. **Curso de Concreto Armado, vol II**. Editora Dunas. Rio Grande – RS, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118/2014** – Projeto de estruturas em concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BANKI, A. L.; COELHO, J. A.; **Modelos de análise de lajes de concreto armado** [artigo científico]. Santa Catarina, 2002. Disponível em: <http://www.eberick.com.br/suporte/EberickGold/duvidas_usuais/Dimensionamento/lajes_de_concreto_armado_Intro.htm>. Acesso em: março de 2015.

BARES, R. **Tablas para el cálculo de placas y vigas parede**. Barcelona: Editora Gustavo Gili S/A, 1972.

BASTOS, P. S.; **Lajes de concreto**. Bauru, São Paulo. Universidade Estadual de São Paulo, 2007.

CARVALHO, R. C.; **Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. Tese (doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, São Carlos, 1994.

CARVALHO, R. C; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo edetalhamento de estruturas usuais de concreto armado** – segundo a NBR 6118:2003. 2. Ed. São Carlos: UFSCar, 2004.

CASTRO, L. M. S. **Elementos Finitos para Análise Elástica de lajes**, Lisboa, Portugal, 2007. Disponível em: <http://www.civil.ist.utl.pt/ae2/EFALajes.pdf>>. Acesso em: mar. 2015.

COELHO, J.A. **Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis, 2000.

COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M. E., 1989. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3a Edição, John Wiley& Sons Inc.

CUNHA, A.J. P.; SOUZA, V. C. M. **Lajes em Concreto Armado e Protendido**. 2. Ed. Rio de Janeiro: UERJ, 1998.

DIEGUEZ, A. B.; COSTA, F. O. **Apostila para utilização passo a passo do SAP2000 para projetos de edifício de concreto armado**. Universidade Estadual de Campinas, SP, Campinas, 2004.

GERE, J.M.; WEAVER JR., W. **Análise de Estruturas Reticuladas**. Editora Guanabara Dois S. A. Rio de Janeiro – RJ, 1981.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª .ed. São Paulo: Atlas S.A., 2002.

HAMBLY, E.C. **Bridge deck behavior**. London, Chapman and Hall, 1976.

LA ROVERE, H. L. **Análise matricial de estruturas**. Curso de Pós-graduação em Estruturas, Universidade Federal de Santa Catarina, SC, Florianópolis, 2001.

LORIGGIO, D.D. **Apostila de “Análise matricial de estruturas” do curso de Pós-Graduação em Estruturas**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, 2001.

PINHEIRO, L. M.. **Fundamentos do Concreto e Projeto de Edifícios**. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2007

REIS, E. M. **Análise de pavimentos utilizando a analogia de grelha**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, SC, Florianópolis, 2007.

REZENDE, M. N. **Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador**. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1990.

STRAMANDINOLI, J.S.B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, SC, Florianópolis, 2003.

SÜSSEKIND, J. C., **Curso de Análise Estrutural Volume III**, Editora Globo, Rio de Janeiro, 1987.

TIMOSHENKO, S. P. ; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**, Mc Graw- Hill Kogakusha,Ltda, 1959.

WANG, C. M.; REDDY, J. N.; LEE, K.H. **Shear Deformation Theories of Beams and Plates Dynamics Relationships with Classical Solution**, Elsevier, U.K., 2000.

APÊNDICE A
CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES DAS LAJES MACIÇAS ATRAVÉS DAS
TABELAS DE BARES

Exemplo 1 – Laje maciça quadrada

Características da modelagem:

Laje maciça de dimensões 4x4 m

Relação entre vãos $L_x/L_y = 1$

Espessura $h=10$ cm

Considerada engastada em duas bordas adjacentes – caso 4

Carga distribuída “p” de 750 kgf/m²

Resistência a compressão característica do concreto (f_{ck}) = 25 Mpa

Coeficiente de Poisson = 0,2

Seção das vigas de contorno = 12x30 cm

Coeficientes retirados das tabelas de Bares:

$$\mu_x = 2,81$$

$$\mu_y = 2,81$$

$$\mu'_x = 6,99$$

$$\mu'_y = 6,99$$

Momentos fletores máximos positivos, por unidade de comprimento:

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m_x = 337 \text{ kgf.m/m}$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m_y = 839 \text{ kgf.m/m}$$

Momentos fletores máximos negativos, por unidade de comprimento:

$$m'_x = \mu'_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m'_x = 337 \text{ kgf.m/m}$$

$$m'_y = \mu'_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m'_y = 839 \text{ kgf.m/m}$$

Exemplo 2 – laje maciça retangular

Características da modelagem:

Laje maciça de dimensões 4x8 m

Relação entre vãos $L_x/L_y = 2$

Espessura $h=10$ cm

Considerada engastada em duas bordas adjacentes – caso 4

Carga distribuída “p” de 750 kgf/m²

Resistência a compressão característica do concreto (f_{ck}) = 25 Mpa

Coeficiente de Poisson = 0,2

Seção das vigas de contorno = 12x30 cm

Coeficientes retirados das tabelas de Bares:

$$\mu_x = 5,74$$

$$\mu_y = 1,88$$

$$\mu'_x = 11,89$$

$$\mu'_y = 8,20$$

Momentos fletores máximos positivos, por unidade de comprimento:

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m_x = 689 \text{ kgf.m/m}$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m_y = 226 \text{ kgf.m/m}$$

Momentos fletores máximos negativos, por unidade de comprimento:

$$m'_x = \mu'_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m'_x = 1427 \text{ kgf.m/m}$$

$$m'_y = \mu'_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m'_y = 984 \text{ kgf.m/m}$$

Exemplo 3 – painel com duas lajes maciças

Características da modelagem:

L1- Laje maciça de dimensões 5,60 x 4 m
L2 -Laje maciça de dimensões 3,20 x 4 m
Relação entre vãos L1 $L_x/L_y = 1,4$
Relação entre vãos L2 $L_x/L_y = 1,25$
Espessura de ambas $h=10$ cm
L1 – caso 3
L2 – caso 2
Carga distribuída “p” de 750 kgf/m ²
Resistência a compressão característica do concreto (fck) = 25 Mpa
Coefficiente de Poisson = 0,2
Seção das vigas de contorno = 12x30 cm

Coefficientes retirados das tabelas de Bares:

L1:

$$\mu_x = 5,51$$

$$\mu_y = 2,25$$

$$\mu'_x = 10,92$$

L2:

$$\mu_x = 4,88$$

$$\mu_y = 4,10$$

$$\mu'_y = 10,16$$

L1:

Momentos fletores máximos positivos, por unidade de comprimento:

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m_x = 661 \text{ kgf.m/m}$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m_y = 270 \text{ kgf.m/m}$$

Momentos fletores máximos negativos, por unidade de comprimento:

$$m'_x = \mu'_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore \quad m'_x = 1310 \text{ kgf.m/m}$$

L2:

Momentos fletores máximos positivos, por unidade de comprimento:

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore m_x = 375 \text{ kgf.m/m}$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot l_y^2}{100} \quad \therefore m_y = 315 \text{ kgf.m/m}$$

Momentos fletores máximos negativos, por unidade de comprimento:

$$m'_y = \mu'_y \cdot \frac{p \cdot l_x^2}{100} \quad \therefore m'_x = 780 \text{ kgf.m/m}$$

Conferência do engastamento entre as bordas:

$$\frac{m'_x(L1)}{m'_y(L2)} = \frac{1310}{780} = 1,68 < 2,0$$

\therefore engastamento ok!

Compatibilização de momentos fletores:

$$M_{12}' \geq \left\{ \frac{0,80 \cdot M'_{x1}}{(M'_{x1} + M'_{y2})} \right. \quad \therefore M_{12} = 1048 \text{ Kgf.m/m}$$

ANEXO A
TABELAS DE BARES PARA O CÁLCULO DOS MOMENTOS FLETORES
MÁXIMOS DE LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO

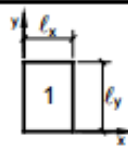
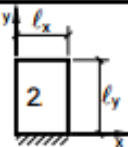
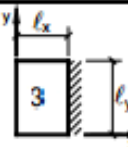
Tipo									Tipo
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	4,23	4,23	2,91	3,54	8,40	3,54	8,40	2,91	1,00
1,05	4,62	4,25	3,26	3,64	8,79	3,77	8,79	2,84	1,05
1,10	5,00	4,27	3,61	3,74	9,18	3,99	9,17	2,76	1,10
1,15	5,38	4,25	3,98	3,80	9,53	4,19	9,49	2,68	1,15
1,20	5,75	4,22	4,35	3,86	9,88	4,38	9,80	2,59	1,20
1,25	6,10	4,17	4,72	3,89	10,16	4,55	10,06	2,51	1,25
1,30	6,44	4,12	5,09	3,92	10,41	4,71	10,32	2,42	1,30
1,35	6,77	4,06	5,44	3,93	10,64	4,86	10,54	2,34	1,35
1,40	7,10	4,00	5,79	3,94	10,86	5,00	10,75	2,25	1,40
1,45	7,41	3,95	6,12	3,91	11,05	5,12	10,92	2,19	1,45
1,50	7,72	3,89	6,45	3,88	11,23	5,24	11,09	2,12	1,50
1,55	7,99	3,82	6,76	3,85	11,39	5,34	11,23	2,04	1,55
1,60	8,26	3,74	7,07	3,81	11,55	5,44	11,36	1,95	1,60
1,65	8,50	3,66	7,28	3,78	11,67	5,53	11,48	1,87	1,65
1,70	8,74	3,58	7,49	3,74	11,79	5,61	11,60	1,79	1,70
1,75	8,95	3,53	7,53	3,69	11,88	5,68	11,72	1,74	1,75
1,80	9,16	3,47	7,56	3,63	11,96	5,75	11,84	1,68	1,80
1,85	9,35	3,38	8,10	3,58	12,05	5,81	11,94	1,67	1,85
1,90	9,54	3,29	8,63	3,53	12,14	5,86	12,03	1,59	1,90
1,95	9,73	3,23	8,86	3,45	12,17	5,90	12,08	1,54	1,95
2,00	9,91	3,16	9,08	3,36	12,20	5,94	12,13	1,48	2,00
> 2,00	12,50	3,16	12,50	3,36	12,20	7,03	12,50	1,48	> 2,00

Figura 44: coeficientes $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$ para o cálculo dos momentos fletores máximos em lajes maciças de concreto armado, para o caso 1,2 e 3
 Fonte: Adaptado de Pinheiro, 2007

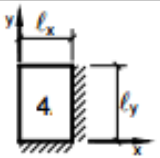
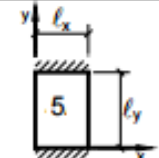
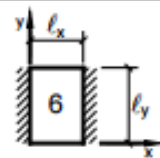
Tipo											Tipo
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	2,69	6,99	2,69	6,99	2,01	3,09	6,99	3,09	6,99	2,01	1,00
1,05	2,94	7,43	2,68	7,18	2,32	3,23	7,43	3,22	7,20	1,92	1,05
1,10	3,19	7,87	2,67	7,36	2,63	3,36	7,87	3,35	7,41	1,83	1,10
1,15	3,42	8,28	2,65	7,50	2,93	3,46	8,26	3,46	7,56	1,73	1,15
1,20	3,65	8,69	2,62	7,63	3,22	3,56	8,65	3,57	7,70	1,63	1,20
1,25	3,86	9,03	2,56	7,72	3,63	3,64	9,03	3,66	7,82	1,56	1,25
1,30	4,06	9,37	2,50	7,81	3,99	3,72	9,33	3,74	7,93	1,49	1,30
1,35	4,24	9,65	2,45	7,88	4,34	3,77	9,69	3,80	8,02	1,41	1,35
1,40	4,42	9,93	2,39	7,94	4,69	3,82	10,00	3,86	8,11	1,33	1,40
1,45	4,58	10,17	2,32	8,00	5,03	3,86	10,25	3,91	8,13	1,26	1,45
1,50	4,73	10,41	2,25	8,06	5,37	3,90	10,49	3,96	8,15	1,19	1,50
1,55	4,86	10,62	2,16	8,09	5,70	3,90	10,70	4,00	8,20	1,14	1,55
1,60	4,99	10,82	2,07	8,12	6,03	3,89	10,91	4,04	8,25	1,08	1,60
1,65	5,10	10,99	1,99	8,14	6,35	3,85	11,08	4,07	8,28	1,03	1,65
1,70	5,21	11,16	1,91	8,15	6,67	3,81	11,24	4,10	8,30	0,98	1,70
1,75	5,31	11,30	1,85	8,16	6,97	3,79	11,39	4,12	8,31	0,95	1,75
1,80	5,40	11,43	1,78	8,17	7,27	3,76	11,53	4,14	8,32	0,91	1,80
1,85	5,48	11,55	1,72	8,17	7,55	3,72	11,65	4,15	8,33	0,87	1,85
1,90	5,56	11,67	1,66	8,18	7,82	3,67	11,77	4,16	8,33	0,83	1,90
1,95	5,63	11,78	1,63	8,19	8,09	3,60	11,83	4,16	8,33	0,80	1,95
2,00	5,70	11,89	1,60	8,20	8,35	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76	2,00
> 2,00	7,03	12,50	1,60	8,20	12,50	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76	> 2,00

Figura 45: coeficientes $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$ para o cálculo dos momentos fletores máximos em lajes maciças de concreto armado, para o caso 4,5 e 6

Fonte: Adaptado de Pinheiro, 2007

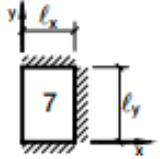
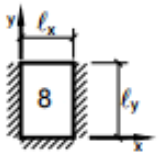
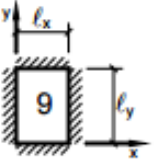
Tipo													Tipo
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	2,02	5,46	2,52	6,17	2,52	6,17	2,02	5,46	2,02	5,15	2,02	5,15	1,00
1,05	2,27	5,98	2,56	6,46	2,70	6,47	1,97	5,56	2,22	5,50	2,00	5,29	1,05
1,10	2,52	6,50	2,60	6,75	2,87	6,76	1,91	5,65	2,42	5,85	1,98	5,43	1,10
1,15	2,76	7,11	2,63	6,97	3,02	6,99	1,84	5,70	2,65	6,14	1,94	5,51	1,15
1,20	3,00	7,72	2,65	7,19	3,16	7,22	1,77	5,75	2,87	6,43	1,89	5,59	1,20
1,25	3,23	8,31	2,64	7,36	3,28	7,40	1,70	5,75	2,97	6,67	1,83	5,64	1,25
1,30	3,45	8,89	2,61	7,51	3,40	7,57	1,62	5,76	3,06	6,90	1,77	5,68	1,30
1,35	3,66	9,47	2,57	7,63	3,50	7,70	1,55	5,75	3,19	7,09	1,71	5,69	1,35
1,40	3,86	10,05	2,53	7,74	3,59	7,82	1,47	5,74	3,32	7,28	1,65	5,70	1,40
1,45	4,05	10,63	2,48	7,83	3,67	7,91	1,41	5,73	3,43	7,43	1,57	5,71	1,45
1,50	4,23	11,21	2,43	7,91	3,74	8,00	1,35	5,72	3,53	7,57	1,49	5,72	1,50
1,55	4,39	11,79	2,39	7,98	3,80	8,07	1,29	5,69	3,61	7,68	1,43	5,72	1,55
1,60	4,55	12,37	2,34	8,02	3,86	8,14	1,23	5,66	3,69	7,79	1,36	5,72	1,60
1,65	4,70	12,95	2,28	8,03	3,91	8,20	1,18	5,62	3,76	7,88	1,29	5,72	1,65
1,70	4,84	13,53	2,22	8,10	3,95	8,25	1,13	5,58	3,83	7,97	1,21	5,72	1,70
1,75	4,97	14,11	2,15	8,13	3,99	8,30	1,07	5,56	3,88	8,05	1,17	5,72	1,75
1,80	5,10	14,69	2,08	8,17	4,02	8,34	1,00	5,54	3,92	8,12	1,13	5,72	1,80
1,85	5,20	15,27	2,02	8,16	4,05	8,38	0,97	5,55	3,96	8,18	1,07	5,72	1,85
1,90	5,30	15,85	1,96	8,14	4,08	8,42	0,94	5,56	3,99	8,24	1,01	5,72	1,90
1,95	5,40	16,43	1,88	8,13	4,10	8,45	0,91	5,60	4,02	8,29	0,99	5,72	1,95
2,00	5,50	17,01	1,80	8,12	4,12	8,47	0,88	5,64	4,05	8,33	0,96	5,72	2,00
> 2,00	7,03	12,50	1,80	8,12	4,17	8,33	0,88	5,64	4,17	8,33	0,96	5,72	> 2,00

Figura 46: coeficientes $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$ para o cálculo dos momentos fletores máximos em lajes maciças de concreto armado, para o caso 7,8 e 9

Fonte: Adaptado de Pinheiro, 2007