

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

CRISTIANE ZUFFO DA SILVA
PATRÍCIA TONON

**ANÁLISE NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SOB
CARREGAMENTOS CÍCLICOS EMPREGANDO MECÂNICA DO
DANO CONTÍNUO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2014

CRISTIANE ZUFFO DA SILVA
PATRÍCIA TONON

**ANÁLISE NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SOB
CARREGAMENTOS CÍCLICOS EMPREGANDO MECÂNICA DO
DANO CONTÍNUO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a conclusão do curso de Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo A. K. Sanches
Coorientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

PATO BRANCO
2014



TERMO DE APROVAÇÃO

ANÁLISE NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SOB CARREGAMENTOS CÍCLICOS EMPREGANDO MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

CRISTIANE ZUFFO DA SILVA

e

PATRÍCIA TONON

Aos 11 dias do mês de fevereiro do ano de 2014, às 10h, na Sala de Treinamento da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, este trabalho de conclusão de curso foi julgado e, após arguição pelos membros da Comissão Examinadora abaixo identificados, foi aprovado como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, conforme Ata de Defesa Pública nº 07 – TCC/2014.

Orientador: Prof. Dr. RODOLFO ANDRÉ K. SANCHES (DACOC / UTFPR-PB)

Coorientador: Prof. Dr. ROGÉRIO CARRAZEDO (DACOC / UTFPR-PB)

Membro 1 da Banca: Prof^ª. Dr^ª. PAÔLA REGINA DALCANAL (DACOC / UTFPR-PB)

Membro 2 da Banca: Prof. Dr. GUSTAVO LACERDA DIAS (DACOC / UTFPR – PB)

Aos nossos pais

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus pelo dom da vida, pelo seu amor infinito, por ser nosso suporte nos momentos difíceis e pelas bênçãos recebidas.

Aos nossos familiares Léo Tonon, Marizete Pieta Tonon, Gabriela Tonon, Fernando Tonon, José Camargo da Silva, Sirlei Zuffo da Silva. Obrigada pelo incentivo, orientação e pelas orações ao nosso favor.

Aos nossos amigos Francielle Honesko, André Luiz Marasca, Alisson Ostjen e Jeferson Willian Dossa Fernandes pelo apoio, companheirismo e conselhos nas horas difíceis.

Reverenciamos todos os professores do Curso de Engenharia Civil da UTFPR -PB, e principalmente ao nosso orientador Rodolfo André Kuche Sanches e nosso coorientador Rogério Carrazedo pela dedicação, persistência e pelos conhecimentos transmitidos ao longo deste trabalho de conclusão de curso.

Externamos ainda, nossos agradecimentos à Comissão Examinadora composta pelos discentes Gustavo Lacerda Dias e Paôla Regina Dalcanal pelo tempo dedicado e pelas colaborações para tornar esse trabalho melhor.

Finalizamos agradecendo a todos que, mesmo não sendo citados, de alguma forma contribuíram para a conclusão desta etapa de nossas vidas.

“Se, a princípio, a ideia não é absurda, então não há esperança para ela.”
Albert Einstein

RESUMO

Os avanços tecnológicos têm levado ao desenvolvimento de estruturas cada vez mais arrojadas, esbeltas e com maiores vãos, de forma que é necessário conhecer com bastante precisão o comportamento dos materiais solicitados tanto a carregamentos estáticos quanto dinâmicos. Estruturas marítimas, pavimentos de aeroportos, torres, pontes, entre outras são submetidas a carregamentos cíclicos que podem causar fadiga. Nesse fenômeno, o material se degrada a cada carregamento, apresentando tanto redução de rigidez como da resistência, rompendo a limites de tensões inferiores aos da resistência estática. Em vista disso, este trabalho consiste no estudo e aplicação de um modelo constitutivo para determinar o comportamento de estruturas de concreto submetidas a tensões de tração decorrentes de carregamentos cíclicos. Para tal, utiliza-se a Mecânica do Dano Contínuo fundamentada nas teorias de Lemaitre e Chaboche (1990) e Papa et al. (1991). A formulação numérica é baseada no Método dos Elementos Finitos, adotando-se um elemento finito triangular isoparamétrico com 10 nós e funções de forma cúbicas do tipo polinômios de Lagrange, capaz de modelar tanto estado plano de tensão como de deformação, de acordo com a preferência do usuário. O programa é testado por meio de exemplos numéricos e os resultados obtidos são comparados com resultados da literatura e mostram-se consistentes.

Palavras-chave: Concreto. Fadiga. Mecânica do dano contínuo. Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

Technological advances have led to the development of bolder slenderer structures with larger spans so that it is important to know precisely the materials behavior when requested to both static and dynamic loadings. Maritime structures, airports pavements, towers and bridges among others kinds of structures frequently face cyclic loading and may present fatigue. In this phenomenon, the material deteriorates for each load cycle reducing its stiffness and strength presenting rupture with stresses limits considerably below the static strength. In this context, this work studies and applies a constitutive model for determining concrete structures behavior under tensile stresses due to cyclic loadings. To this end it is employed the Continuum Damage Mechanics based on the theories of Lemaitre and Chaboche (1990) and Papa et al. (1991). The numerical formulation is based on the Finite Element Method, as it is used an iso-parametric triangular finite element with 10 nodes and cubic Lagrange polynomials shape functions, designed to analyze plan stress or plan strain according to the user preference. The computational code is tested by some numerical examples and the results are compared to the literature showing good agreement.

Keywords: Concrete. Fatigue. Continuum Damage Mechanics. Finite Element Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Curva S-N para determinado material metálico	16
Figura 2 - Curva S-N para o concreto solicitado a compressão	17
Figura 3 - Diagrama de Goodman.....	18
Figura 4- Curva S-N para o concreto solicitado a tração	18
Figura 5 – Algoritmo de análise do comportamento a fadiga do concreto	23
Figura 6 - Representação da microestrutura do concreto	26
Figura 7 - Leis tensão-deformação do agregado, da pasta de cimento e do concreto.....	27
Figura 8 – Curvas tensão deformação típicas para tração e compressão uniaxiais	27
Figura 9 – Mapa de fissuras.....	28
Figura 10 - Modos de formação de fissura.....	29
Figura 11 – Redução no módulo de elasticidade vs. deformação.....	30
Figura 12 - Variação do módulo de elasticidade secante do concreto vs. ciclos de cargas	31
Figura 13 - Variação da deformação do concreto em função dos ciclos de cargas	32
Figura 14 - Relação tensão-deformação do concreto solicitado à carga monotônica e cíclica	33
Figura 15 - Comportamento do concreto ao carregamento cíclico de compressão	34
Figura 16 - Reversibilidade das deformações no concreto.....	34
Figura 17 - Comportamento do concreto ao carregamento cíclico de tração.....	35
Figura 18 - Área (a) nominal e (b) degradada	36
Figura 19 - Deformação equivalente.....	38
Figura 20 - Diagrama de tensão vs. deformação uniaxial	40
Figura 21 - Comportamentos distintos de abrandamento e endurecimento	43
Figura 22 – Elemento quadrangular e elemento isoparamétrico	52
Figura 23 - Elemento finito triangular com 10 nós.....	54
Figura 24 - Elemento de barra 2d e malha discretizada	55
Figura 25 - Tensão vs. Deformação no eixo X para tensão cíclica.....	56
Figura 26- Tensão vs. Deformação no eixo X para tensão cíclica.....	56
Figura 27- Redução do módulo de elasticidade secante conforme número de ciclos.....	57
Figura 28- Evolução da deformação no eixo X conforme número de ciclos	58
Figura 29- Deslocamento no eixo X para ciclo intermediário a) carregamento e b) descarregamento.....	58
Figura 30- Deslocamento no eixo X para ciclo próximo da ruptura a) carregamento e b) descarregamento.....	59
Figura 31- Tensão vs deformação no eixo X para deformação cíclica	60
Figura 32- Tensão vs. deformação para deformação cíclica	60
Figura 33 – Elemento de paver e malha utilizada.....	61
Figura 34 - Tensão vs. Deformação no eixo X para tensão cíclica.....	62
Figura 35- Evolução da deformação no eixo X conforme número de ciclos	62
Figura 36- Deslocamentos para carga máxima.....	63
Figura 37- Tensões normal no eixo X.....	64
Figura 38- Tensões de cisalhamento	64

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\sigma_{m\acute{a}x}$ - Tensão máxima atuante
 f_{ctm} - Resistência à compressão
 β - Constante do material
 R - Relação entre tensão mínima e máxima
 N - Número de ciclos
 d - Variável do dano
 Ad - Área degradada
 A - Área nominal
 \bar{A} - Área efetiva
 σ - Tensão nominal
 F - Força
 $\bar{\sigma}$ - Tensão efetiva
 $\bar{\mathbf{T}}$ - Tensor de tensões efetivas
 \mathbf{T} - Tensor de Cauchy
 ε - Deformação
 $\boldsymbol{\varepsilon}$ - Pseudo-tensor de deformações
 E - Módulo de Elasticidade
 Ed - Módulo de Elasticidade danificado
 \mathbf{D} - Tensor de constantes elásticas
 t - Pseudo-tempo relacionado aos incrementos de deformação
 C - Função do critério do dano
 τ - Tensão efetiva equivalente
 r - Valor limite de dano
 r_0 - Valor inicial do limite de dano
 f_t - Resistência uniaxial à tração
 q - Variável interna tipo tensão
 G - Função do critério do dano no espaço de tensões
• - Derivada em função do tempo
 λ - Lei de evolução do limite de dano
 H - Módulo de abrandamento/endurecimento
 η - Parâmetro relacionado com a energia de fratura do material
 G_f - Energia de fratura do concreto
 l - Tamanho do elemento finito
 x_{n+1} e x_n - Raízes obtidas através do método iterativo de Newton-Raphson
 $f(x_n)$ - Função para a qual deseja-se obter a raiz pelo método de Newton-Raphson
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - Tensões normais de Cauchy
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ - Tensões de cisalhamento no plano
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - Deformações nos eixos principais
 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}, \gamma_{xy}$ - Distorções no plano
: - Produto interno de tensores
 U_e - Energia de deformação elástica
 Ω - Domínio do sólido
 \mathbf{b} - Vetor de forças externas

ΓN - Contorno do sólido
 \mathbf{P} - Forças concentradas
 \mathbf{f} - Forças de contorno
 δ_u - Campo de deslocamentos
 $\delta_{u1}, \delta_{u2}, \delta_{u3}, \delta_{ux}, \delta_{uy}, \delta_{uz}$ - Deslocamentos
 δU_f - Incremento de energia potencial das forças externas
 W_f - Trabalho de forças externas
 U_f - Energia potencial externa
 Π - Funcional de energia
 $u(x)$ - função deslocamento
 $\tilde{u}(x)$ - Função aproximadora
 α_i - parâmetros ajustáveis
 N_i - funções de forma
 m - ordem de maior derivada do funcional
 $\langle \rangle$ - parênteses de Macaulay
 B, C, N - Parâmetros do modelo de concreto à tração cíclica calibrados experimentalmente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO	14
1.2 ESTADO DA ARTE	15
1.2.1 Fadiga	15
1.2.2 Mecânica do Dano Contínuo.....	19
1.2.3 Método dos Elementos Finitos.....	20
1.3 OBJETIVOS	21
1.3.1 Objetivos específicos.....	21
1.4 METODOLOGIA	22
1.5 JUSTIFICATIVA.....	23
2 FADIGA ESTRUTURAL EM ELEMENTOS DE CONCRETO	25
2.1 MICROESTRUTURA DO CONCRETO	25
2.2 FADIGA	30
2.2.1 Concreto em compressão uniaxial.....	33
2.2.2 Concreto em tração uniaxial	35
3 MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO APLICADA AO CONCRETO	36
3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	36
3.2 MODELO CONSTITUTIVO DE DANO ISOTRÓPICO PARA CARGAS MONOTÔNICAS	40
3.2.1 Critério de Dano	40
3.2.2 Lei da Evolução do dano	43
3.3 MODELO CONSTITUTIVO DE DANO ISOTRÓPICO PARA CARGAS CÍCLICAS	45
4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	48
4.1 MÉTODO DE RITZ.....	49
4.2 A TÉCNICA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS	51
5 EXEMPLOS NUMÉRICOS E VALIDAÇÃO	55
5.1 TRAÇÃO PURA COM CONTROLE DE CARGA	55
5.2 TRAÇÃO PURA COM CONTROLE DE DESLOCAMENTOS	59
5.3 FLEXÃO NORMAL SIMPLES COM CONTROLE DE CARREGAMENTO	61
6 CONCLUSÃO	65
REFERÊNCIAS	67
ANEXOS	71
ANEXO A – Funções de forma para elemento finito QST	72

1 INTRODUÇÃO

Estruturas de concreto, em geral, são projetadas considerando-se que os carregamentos são estáticos e que os elementos estruturais trabalham em regime elástico linear. Entretanto, ações dinâmicas, como a ação de ventos, abalos sísmicos e efeitos de temperatura podem levar à falha da estrutura sob níveis de tensões abaixo dos estabelecidos em projeto devido ao fenômeno da fadiga. Além disso, há vários problemas em que a atuação de uma carga cíclica mesmo em frequências mais baixas podem igualmente levar a estrutura a ruína pelo processo de fadiga. Como os projetos estruturais buscam a forma mais eficiente para conferir resistência e durabilidade às estruturas, métodos confiáveis para prever o comportamento à fadiga do concreto são necessários (ALLICHE, 2004).

O fenômeno da fadiga é caracterizado pela mudança das propriedades do material devido a ciclos repetidos de carregamento e descarregamento (TEIXEIRA, 2004). As estruturas mais suscetíveis a este fenômeno são estruturas marítimas (off-shore), pavimentos de aeroportos, pontes, torres, usinas eólicas, base de máquinas e estruturas submetidas a sismos ciclicamente (HORDIJK, 1991).

No Brasil o dimensionamento de estruturas de concreto armado, suscetíveis a choques e vibrações, considerando a fadiga é realizado desde 1967. Primeiramente os procedimentos de cálculo foram descritos na EB3 (1967) – “Barras e fios destinados a armadura de concreto armado”, e após algumas revisões, têm-se a última versão na NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO..., 2007) – “Projeto de Estruturas de Concreto”. Contudo, ainda se faz necessário um conhecimento mais aprofundado do comportamento dos materiais submetidos a ações cíclicas para aprimoramento desses critérios de cálculo (DANTAS, 2010).

Os fatores mais relevantes na análise de fadiga em estruturas de concreto são o aumento na deformação e fissuração do elemento estrutural. Após um determinado número de ciclos, a fissura pode adquirir dimensões relevantes, podendo levar a estrutura à ruptura. Nota-se então que a ruptura não é produzida pela fadiga e sim pelas deteriorações progressivas nas quais a fadiga é um elemento contribuinte (CEB, 1988 apud DRIEMEIER, 1995). A formação de fissuras e mecanismos de fratura são fenômenos relativos a rearranjos internos que, em um nível macroscópico (fenomenológico) refletem nas não-linearidades descritas pelas relações tensão-deformação (ÁLVARES, 1993).

Desde a década de 70, intensivas pesquisas têm sido realizadas com o intuito de desenvolver modelos constitutivos para o concreto que descrevam o comportamento não-linear do material. O desenvolvimento de técnicas experimentais sofisticadas, que permitem

avaliar o comportamento microestrutural do material bem como o aperfeiçoamento de métodos numéricos e de ferramentas de cálculo, são fatores que têm possibilitado a obtenção de modelos mais realísticos. Por outro lado, a complexidade do concreto produz uma enorme dificuldade ao se formular um modelo completo e geral levando os engenheiros a ainda lançarem mão de muitas simplificações (ÁLVARES, 1993).

Dessa forma, modelos baseados na teoria da elasticidade, teoria da plasticidade e mecânica do dano têm sido propostos procurando reproduzir algumas das propriedades do material, e exibindo bom desempenho dentro de uma faixa cada vez mais ampla de aplicabilidade (PITUBA, 1998).

Os modelos constitutivos que consideram o processo de fissuração como principal fator gerador das não-linearidades do concreto podem ser classificados em modelos teóricos discretos ou contínuos. Os primeiros (discretos) consideram que o meio é descontínuo desde o início do processo de formação da fissura, e os segundos consideram o meio contínuo utilizando relações constitutivas entre tensão e deformação para representar o comportamento não linear produzido pelas fissuras (GONÇALVES, 2003).

Os modelos discretos são baseados na mecânica da fratura, a qual define a base para a resistência de estruturas com descontinuidades iniciais e permite determinar a taxa de propagação de fraturas. Uma ramificação é a mecânica da fratura linear elástica, a qual estuda as condições do estado de tensões necessárias para ocorrer a propagação de uma fissura já existente (GONÇALVES, 2003).

Os modelos contínuos, baseados na mecânica do dano contínuo, lidam com a capacidade de carga de sólidos sem fissuras principais. Dessa forma, os efeitos da deterioração do material são considerados através do comportamento mecânico macroscópico (redução das propriedades elásticas e da resistência) (ÁLVARES, 1993).

Os modelos baseados na mecânica do dano contínuo podem ser divididos em escalares (isotrópicos) e tensoriais (anisotrópicos). Nos modelos constitutivos escalares supõe-se que a degradação do material ocorre de tal modo a manter invariante a propriedade de isotropia inicial. Já nos modelos tensoriais, tem-se a hipótese de que o processo de microfissuração conduz a uma anisotropia do material (PITUBA, 1998).

A mecânica do dano contínuo apresenta-se como uma ferramenta de grande interesse para determinar o comportamento do concreto, pois possibilita a consideração de efeitos de microfissuração difusa sobre a degradação das propriedades dos materiais (LEMAITRE 1984).

Dessa forma, com intuito de avaliar o comportamento do concreto quando submetido a carregamentos cíclicos que gerem tensão de tração, este trabalho trata da implementação de um código computacional por meio do Método dos Elementos Finitos, fundamentado em um modelo isotrópico da mecânica do dano contínuo.

1.1 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho foi estruturado em 6 capítulos conforme descrito a seguir.

No capítulo 1 é introduzido o tema pesquisado, sendo apresentado na sessão 1.2 *Estado da arte* os principais estudos desenvolvidos sobre fadiga e mecânica do dano contínuo. Por fim, são delimitados os objetivos da pesquisa, o trabalho é justificado e descreve-se a metodologia empregada.

No capítulo 2 discorre-se brevemente a respeito da microestrutura do concreto, mecanismos de formação e propagação de fissuras e a influência desses mecanismos no comportamento do concreto. Nesse capítulo ainda é descrito o comportamento do concreto perante o fenômeno de fadiga quando submetido a carregamentos cíclicos que geram tensões de tração e compressão.

O capítulo 3 apresenta os fundamentos da mecânica do dano contínuo, indispensáveis ao desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente definem-se os conceitos e hipóteses fundamentais sobre o dano. Por fim, são apresentados os modelos de dano isotrópico para concreto submetido a carregamentos cíclicos e monotônicos.

O capítulo 4 é destinado ao Método dos Elementos Finitos. Num primeiro instante é desenvolvida a formulação do método de Ritz, sendo, em seguida, definido o Método dos Elementos Finitos com a utilização de elementos finitos isoparamétricos.

No capítulo 5 são apresentados exemplos de aplicações para o código computacional desenvolvido (DAMAGE2D), sendo os exemplos validados por comparação com resultados apresentados na literatura.

No capítulo 6 faz-se uma análise sobre o cumprimento dos objetivos propostos e a relevância do estudo desenvolvido, explanando-se as limitações do código computacional gerado, bem como sugestões para a continuidade da pesquisa.

1.2 ESTADO DA ARTE

Esse trabalho é baseado principalmente nos temas: Fadiga, Mecânica do Dano Contínuo e Método dos Elementos Finitos. Dessa forma, esse item tem intuito de relatar os resultados das principais pesquisas desenvolvidas até os dias atuais sobre esses assuntos.

1.2.1 Fadiga

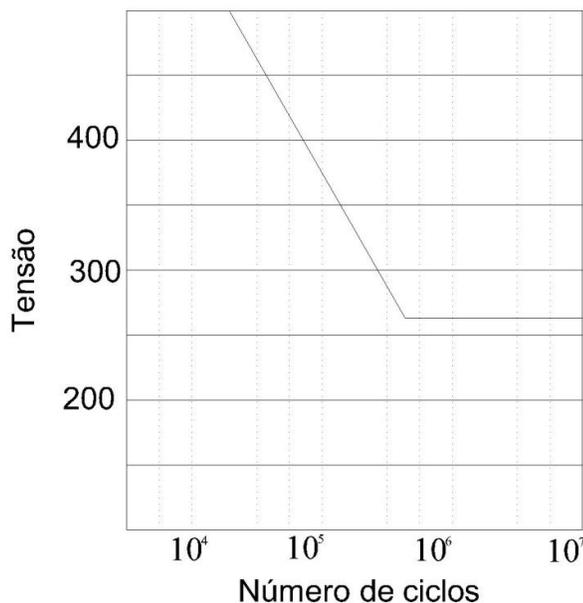
Quando um material se rompe sob um número repetido de solicitações, todas elas inferiores do que a resistência, diz-se que houve a ruptura por fadiga (NEVILLE, 1997). Esse fenômeno pode ser entendido como a diminuição gradual da resistência de um material devido à solicitações periódicas, sendo a perda de resistência (amolecimento) acompanhada de perda de rigidez (redução do módulo de elasticidade) (DRIEMEIER, 1995).

Os primeiros estudos relacionados ao fenômeno da fadiga são associados aos metais e foram desenvolvidos na época da revolução industrial, período em quem são registrados muitos acidentes com locomotivas e máquinas a vapor. Acredita-se que o primeiro estudo tenha sido desenvolvido pelo engenheiro alemão W. A. J. Albert, por volta de 1829, o qual efetuou análises em correntes de guindastes utilizados em minas (DRIEMEIER, 1995). A partir de 1858, August Wöhler realizou ensaios em eixos de locomotivas, e os resultados foram publicados em forma de gráfico por L. Spangenberg, em 1874. Tais gráficos ficaram conhecidos como diagramas S-N (tensão máxima x número de ciclos), sendo aceitos até os dias atuais (MONTEZUMA, 2002).

Esses diagramas resultam de uma análise estatística sobre dados de inúmeros testes experimentais realizados em materiais sob tensões repetidas. Desta forma, são usados comumente para determinar o limite de fadiga, ou seja, o nível de tensão que pode ser aplicado para que depois de um grande número de ciclos não haja ruptura (GONÇALVES, 2003). A figura 1 apresenta um exemplo de curva S-N para determinado material metálico.

As curvas de Wöhler foram desenvolvidas para carregamentos de amplitude constante que não são tão comuns como as tensões de amplitude variável. Assim, para tratar de carregamentos de amplitude variável pode-se utilizar da regra de Palmgren-Miner que foi apresentada em 1945. Essa regra afirma que a falha por fadiga ocorrerá quando a soma das frações de vida gasta para cada carregamento aleatório se igualar a 1 (TEIXEIRA, 2004).

Figura 1 - Curva S-N para determinado material metálico



Fonte: Gonçalves (2003)

Desde então, muitas pesquisas foram desenvolvidas, entretanto, somente por volta de 1963 surge a primeira ideia inovadora desde os estudos de Wöhler, a Lei de Paris. Essa lei foi publicada por Paris e Erdogan, que através de estudos experimentais, constataram que a taxa de crescimento da fissura com o número de ciclos de carga depende principalmente da amplitude de variação do chamado fator de intensidade de tensão (MONTEZUMA, 2002).

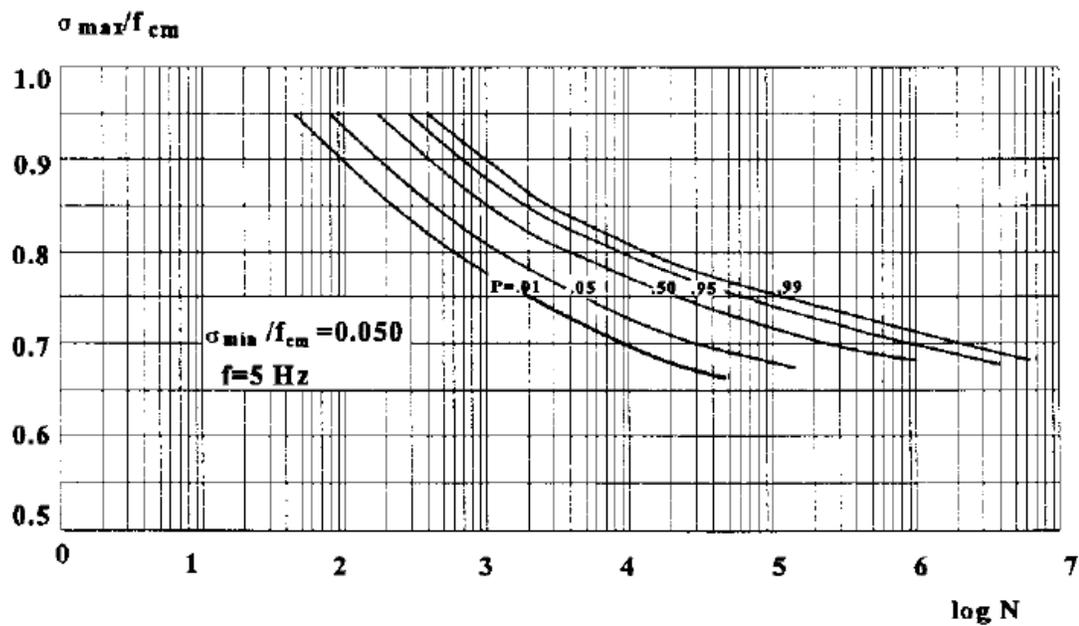
Os estudos acerca da fadiga em estruturas de concreto são mais recentes, isso porque se acreditava que esse fenômeno ocorresse apenas em materiais dúcteis. Entretanto, atualmente dispõe-se de vários estudos que comprovam a influência desse fenômeno no processo de fraturamento de materiais frágeis (concreto, cerâmicas, etc) (DRIEMEIER, 1995). Estudos como os de Hordijk (1991) e Hordjick e Reinhardt (1993), utilizados ao longo do desenvolvimento desse trabalho, são exemplos de pesquisas pioneiras acerca da fadiga.

Atualmente, pode-se estimar a vida útil à fadiga de uma estrutura de concreto baseando-se na mecânica da fratura e mecânica do dano, via método numérico, e através das curvas S-N, sendo este último um método simples para avaliação do fenômeno.

Devido às particularidades do concreto, são adicionadas às curvas S-N desse material uma probabilidade de ruptura P . Na figura 2 pode-se observar a curva para o material submetido a compressão, sendo no eixo das ordenadas apresentados os valores da $\sigma_{m\acute{a}x}/f_{cm}$,

onde $\sigma_{m\acute{a}x}$ é a máxima tensão aplicada e f_{cm} a resistência do concreto a compressão, e no eixo das abscissas o valor logarítmico do número de ciclos.

Figura 2 - Curva S-N para o concreto solicitado a compressão



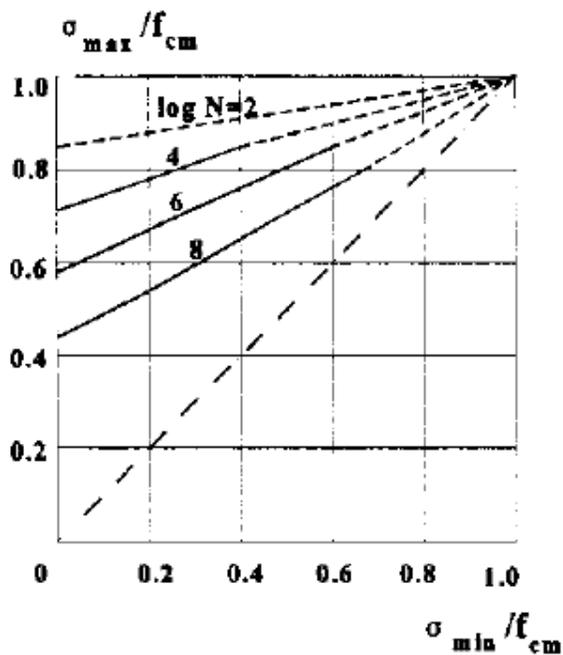
Fonte: Driemeier (1995)

Conforme pode ser observado no diagrama de Goodman (tensão máxima vs. tensão mínima nos ciclos), apresentado na figura 3, a resistência à fadiga pode ser aumentada pela diminuição da variação dos níveis de tensão.

A partir das considerações apresentadas de tensões máximas e mínimas e curva S-N, uma expressão que relaciona o número de ciclos para a ruptura em função da tensão máxima é (TEPFERS e KUTTI,1979 apud GONÇALVES 2003):

$$\frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{f_{cm}} = 1 - \beta(1 - R) \log N. \quad (1)$$

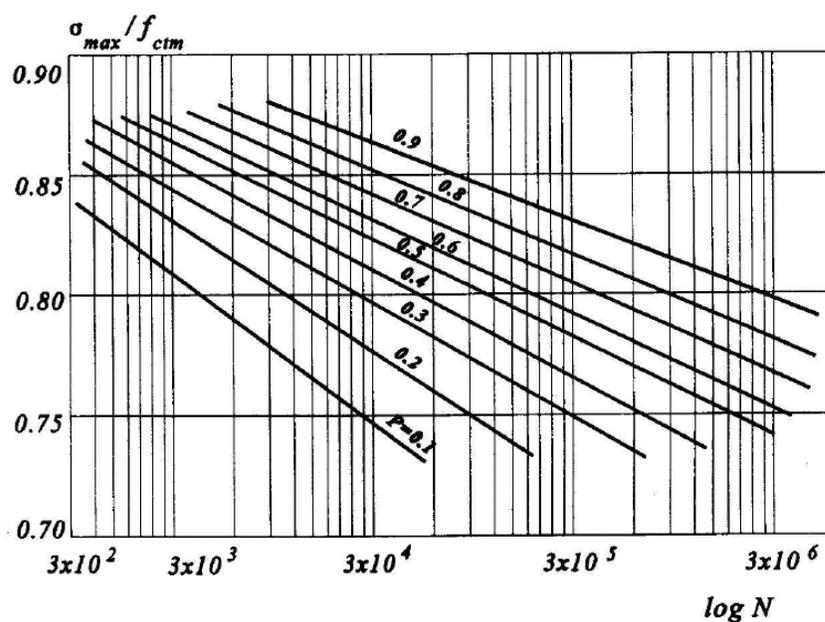
Figura 3 - Diagrama de Goodman



Fonte: CEB (1988 apud DRIEMEIER, 1995)

Na figura 4 pode-se observar a curva S-N do concreto submetido à solitação de tração.

Figura 4- Curva S-N para o concreto solitado a tração



Fonte: Driemeier (1995)

Ensaios têm demonstrado que a relação apresentada na equação (1) para o concreto submetido à compressão pode ser utilizada também para a sollicitação de tração (CEB 1988 apud DRIEMEIER, 1995).

1.2.2 Mecânica do Dano Contínuo

A mecânica do dano contínuo tem como finalidade a formulação de leis constitutivas para prever a resposta não-linear de estruturas submetidas a ações externas (ÁLVARES 1993).

O trabalho de Kachanov em 1958 pode ser considerado como uma referência às origens da mecânica do dano, sendo utilizado na modelagem do efeito da fissuração distribuída na ruptura frágil observada em metais após um período de deformação lenta (LEMAITRE E CHABOCHE, 1990).

Em 1977, Janson e Hult sugeriram a terminologia ‘Mecânica do Dano Contínuo’ para designar modelos em Mecânica do Contínuo destinados ao estudo da resposta de materiais em regime de ruptura considerando-se o processo de danificação. Em 1985 foi formalizada por Lemaitre e Chaboche com base na termodinâmica dos processos irreversíveis (DRIEMEIER, 1995).

Em relação ao concreto, diversos modelos de mecânica do dano contínuo têm sido propostos nos últimos anos. Dentro dos modelos isotrópicos pode-se citar o modelo de Resende (1984), de Mazars (1984) e o modelo de Simó e Ju (1987). Entre os modelos anisotrópicos tem-se o trabalho de Ortiz (1985).

Têm-se ainda os modelos aplicados a situações de carregamentos cíclicos, como o modelo de Marigo (1985) e o de Papa et al. (1991) utilizado nesse estudo.

O fenômeno do dano é representado por superfícies descontínuas na forma de microfissuras ou volumes descontínuos na forma de cavidades. A teoria do dano descreve a evolução do fenômeno entre o estado inalterado até a formação de microfissuras. Uma característica importante do dano é a irreversibilidade, apenas processos termomecânicos podem remover parcialmente os defeitos causados (LEMAITRE E CHABOCHE, 1990).

A teoria da termodinâmica garante que modelos constitutivos baseados na mecânica do dano contínuo sejam formulados de maneira fisicamente coerente. Isto se deve ao fato de que a formalização por essa teoria assume que o sistema termodinâmico (quantidade de matéria contínua e invariante) passa por um processo (mudança das variáveis com o tempo)

irreversível (não voltam ao estado original), como é o caso da plastificação e da danificação. (GUELLO, 2002).

Modelos constitutivos baseados na mecânica do dano contínuo têm sido usados como ferramenta de análise na perda de rigidez da estrutura, com finalidade de prever a degradação do material. Sua simulação é adequada para materiais quase-frágeis (concreto, cerâmicas, etc), os quais apresentam uma fase inicial em regime elástico, seguida por um encruamento linear negativo (abrandamento), delineando o comportamento não linear do material (RODRIGUES, 2011).

Como a fissuração no concreto ocorre de forma distribuída a mecânica do dano é capaz de formular modelos muito realistas para este material (RODRIGUES, 2011). Nestes modelos a resistência é determinada em função da evolução de um campo de defeitos continuamente distribuídos. E o dano, por não ser mensurável diretamente, é determinado através da redução progressiva de uma propriedade mecânica, como o módulo de elasticidade (GUELLO, 2002).

Inicialmente, a mecânica do dano contínuo foi desenvolvida a fim de analisar estados de fissuração difusos os quais ocorrem, por exemplo, na região comprimida do concreto. Mas, atualmente, vem sendo empregado com êxito nos casos onde a não linearidade estrutural é proveniente de estados de tração, representando a degradação que precede a formação de fraturas (RODRIGUES, 2011).

Os modelos para a mecânica do dano contínuo podem ser isotrópicos ou anisotrópicos. No modelo isotrópico a variável do dano é linear e apresenta como vantagem um número reduzido de parâmetros a identificar o que, no entanto, tem a aplicação reduzida a algumas situações. Já nos modelos anisotrópicos a variável do dano é uma grandeza tensorial, não apresentando tantas restrições em sua utilização, porém, a identificação dos parâmetros do modelo é mais complexa (GUELLO, 2002).

1.2.3 Método dos Elementos Finitos (MEF)

Enquanto encontrar a distribuição de tensões em um sólido já pode ser uma tarefa complicada, e em muitos casos sem solução analítica, a modelagem do comportamento próximo à ruptura é ainda mais complexa. Assim, no presente trabalho, lança-se mão do Método dos Elementos Finitos, pois tal método possibilita a análise de tensões e deslocamentos em estruturas com as mais variadas formas de vínculos e carregamentos, em domínios de geometria complexa.

O surgimento do computador, e a demanda por estruturas mais esbeltas e menos rígidas, conduziram no início da década de 50 ao desenvolvimento de métodos numéricos que pudessem ser utilizados na análise de problemas mais complexos. Entre os trabalhos pioneiros nessa área, pode-se citar o trabalho de Argyris e Kelsey (1954), no qual a formulação do método de Rayleigh-Ritz com a técnica de elementos finitos ficou definitivamente determinada e foi aplicada para analisar fuselagens e asas de aviões, e o trabalho de Turner, Clough, Martin e Topp (1956), onde têm-se a formulação do Método dos Elementos Finitos como é hoje (ASSAN, 2003).

Embora a formulação do Método dos Elementos Finitos já fosse conhecida desde os anos 50, sua formulação passou a ser difundida e aplicada em várias áreas com a expansão e evolução dos computadores. Hoje em dia, há milhares de programas computacionais em diversas áreas do conhecimento que utilizam o MEF como base em suas análises (ASSAN, 2003).

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho consiste em desenvolver um programa para análise de elementos de concreto submetidos a carregamentos cíclicos considerando dano devido às tensões de tração.

1.3.1 Objetivos específicos

Para o cumprimento do objetivo geral de maneira satisfatória, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Atualizar revisão bibliográfica sobre o tema;
- Escolher um modelo matemático do comportamento do concreto que seja viável para esta pesquisa;
- Definir o elemento finito a ser utilizado;
- Implementar código computacional para análise de fadiga em estruturas de concreto;
- Comparar e validar os resultados.

1.4 METODOLOGIA

Neste estudo desenvolve-se um programa para análise de estruturas de concreto submetidas a carregamentos cíclicos. A formulação baseia-se na mecânica do dano contínuo devido à forma realista como esta descreve o campo de degradação distribuído no concreto.

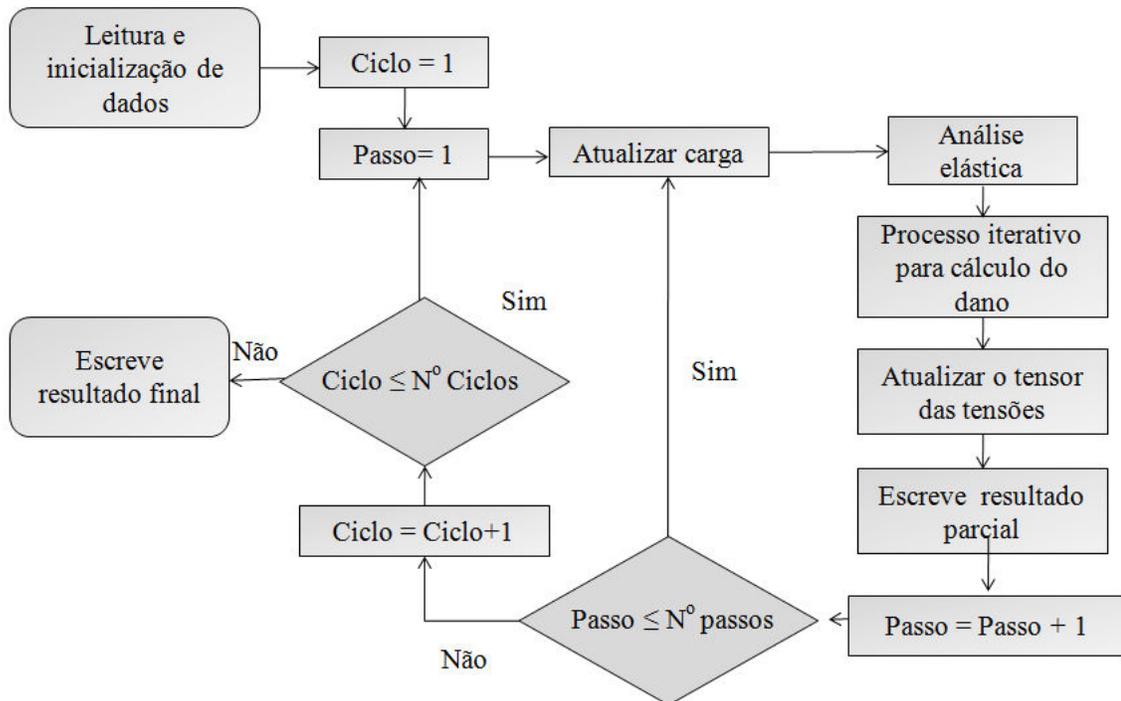
O código computacional foi desenvolvido em ambiente Linux e implementado em linguagem computacional Fortran77. Essa tem como principal vantagem a padronização pelos institutos ANSI e ISO, sendo uma linguagem altamente difundida.

Na modelagem dos sólidos foram empregados elementos finitos bidimensionais de chapa. Tais elementos são facilmente encontrados em bibliografias como Assan (2003) e Zienkiewicz e Taylor (2000). Estes elementos permitem a modelagem tanto de Estados Planos de Tensões (EPT) quanto Estados Planos de Deformações (EPD).

A geração da malha para os problemas foi feita com auxílio do software Gmsh. Para o pós-processamento utilizou-se o software Kitware Paraview, por apresentar interface gráfica simples e parametrizável, além de ser um software livre. Os gráficos apresentados nos resultados foram gerados através do software Gnuplot.

Na figura 5, pode-se observar no algoritmo do programa, a sequência de passos realizados para obtenção da análise do comportamento cíclico do concreto.

Figura 5 – Algoritmo de análise do comportamento a fadiga do concreto



Fonte: Autoras (2014)

1.5 JUSTIFICATIVA

Com o advento de novas tecnologias tem-se desenvolvido diversos tipos de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos (pavimentos de aeroportos, pontes, etc). Embora em grande parte das estruturas o efeito destes carregamentos cíclicos seja tratado como estático e permanente, há casos em que a frequência do carregamento ultrapassa significativamente os requisitos para uma análise estática. Nesses casos a fadiga pode ser responsável pela ruptura sob carregamentos inferiores aos projetados. Em tais estruturas faz-se necessária a consideração dos efeitos de solicitações variáveis durante o projeto, a fim de que se possa garantir a segurança.

Os modelos adotados para dimensionamento de estruturas em concreto são baseados em simplificações da Resistência dos Materiais. As simplificações desses modelos são baseadas no Método dos Estados Limites, o qual considera a aplicação de fatores de segurança que reduzem a resistência e maximizam os carregamentos como pode ser visto na NBR 6118(ASSOCIAÇÃO..., 2007). No entanto, o concreto é um material heterogêneo de

natureza complexa, tornando importante o desenvolvimento de modelos que forneçam uma previsão mais realista do comportamento deste material perante aos diversos carregamentos aos quais possa estar submetido.

Dessa forma, justifica-se desenvolver uma ferramenta computacional para a simulação e modelagem de estruturas de concreto submetidas a carregamentos cíclicos considerando dano devido às tensões de tração.

O desenvolvimento de tal programa ainda é justificado por prover uma plataforma computacional para que outros trabalhos numéricos e aplicados sejam desenvolvidos pela área de Estruturas da UTFPR de Pato Branco. Outra justificativa não menos importante é a contribuição para a formação acadêmica das autoras.

2 FADIGA ESTRUTURAL EM ELEMENTOS DE CONCRETO

O conhecimento das características da estrutura interna do concreto é de grande importância para a formulação de modelos realistas que permitam relacionar mudanças ocorridas na microestrutura com fenômenos observados macroscopicamente. Portanto, neste capítulo dá-se ênfase à microestrutura do concreto e ao comportamento deste material perante o fenômeno de fadiga. A discussão se desenvolve em torno do comportamento do concreto de resistência normal, não sendo abordado o comportamento de concretos de alto desempenho ou concretos especiais.

2.1 MICROESTRUTURA DO CONCRETO

O concreto é um material composto pela mistura adequada de cimento, água, agregado miúdo e agregado graúdo, podendo incorporar outros materiais a fim de melhorar alguma característica do composto (CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2012).

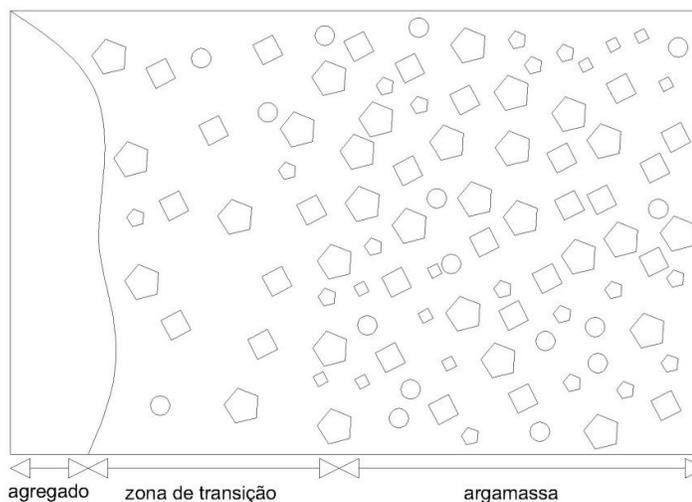
Microscopicamente este composto não é homogêneo, sendo dividido em três fases: agregado, matriz de argamassa e zona de transição. O agregado é o material inerte envolto por argamassa, sendo predominantemente responsável na determinação da massa unitária, módulo de elasticidade e estabilidade dimensional do concreto. A matriz de argamassa é constituída pelos demais elementos (cimento, agregado miúdo, água) tendo como principais funções promover impermeabilidade ao material, conferir resistência aos esforços mecânicos e durabilidade contra agentes nocivos. Na ligação entre a matriz de argamassa e o agregado graúdo é formada uma camada delgada denominada zona de transição (MEHTA e MONTEIRO, 1994).

Apesar de apresentarem a mesma constituição, a microestrutura da zona de transição difere da matriz de argamassa, conforme pode ser observado na figura 6. Em concreto recentemente compactado ocorre um acúmulo de água ao redor dos agregados. Em seguida, tem início a formação de etringita e, devido à concentração maior de água ao redor dos agregados graúdos, os cristais formados na zona de transição são relativamente grandes, formando uma estrutura mais porosa do que na matriz de argamassa (MAZO, 1980 apud MEHTA E MONTEIRO, 1994).

Outra característica da zona de transição é a microfissuração ocorrida durante a fase de secagem e esfriamento do concreto. Essa microfissuração é originada pela retração,

variações térmicas e pelas diferenças das propriedades mecânicas do agregado e da argamassa (NEVILLE, 1997).

Figura 6 - Representação da microestrutura do concreto

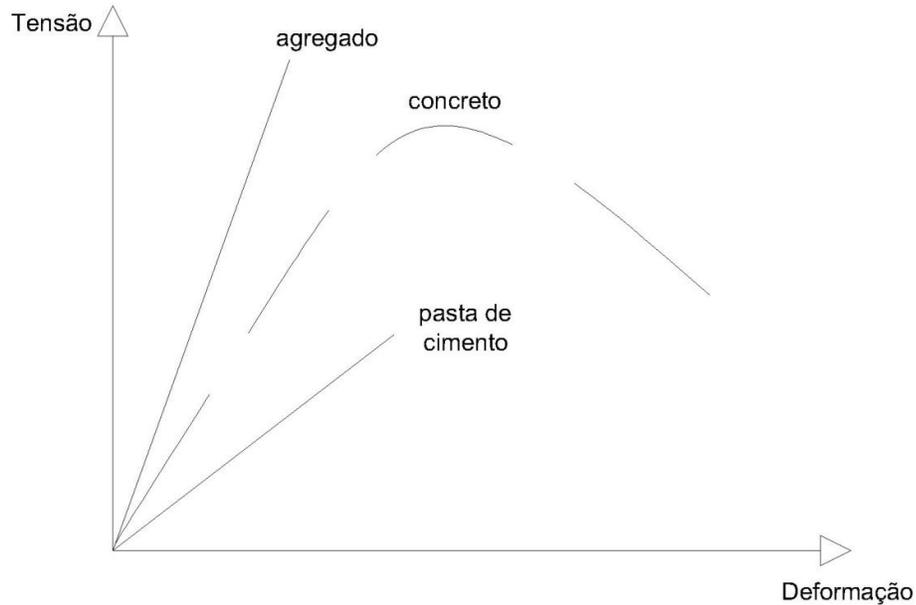


Fonte: Autoras (2014)

Associando a alta porosidade à microfissuração inicial, considera-se a zona de transição como o elo mais fraco da estrutura do concreto ou fase de resistência limite. É devido a ela que o concreto usual rompe a níveis de tensão abaixo da resistência do agregado e da matriz de argamassa. A estrutura da zona de transição é responsável pelo comportamento elastoplástico do concreto, o qual se deve à formação e propagação de fissuras na zona de transição e matriz de argamassa. Isso é constatado uma vez que os elementos constituintes apresentam comportamento elástico até a ruptura quando ensaiados separadamente (MEHTA e MONTEIRO, 1994). Tal comportamento pode ser observado na figura 7.

As microfissuras presentes na zona de transição são responsáveis pela baixa resistência à tração do concreto (NEVILLE, 1997). A energia necessária para a formação e propagação de fissuras na matriz de argamassa é consideravelmente maior para carregamentos de compressão do que para carregamentos de tração, resultando em um comportamento frágil à tração e relativamente dúctil à compressão. Além da influência sobre a resistência, as microfissuras da zona de transição são determinantes na rigidez e na durabilidade do concreto (MEHTA E MONTEIRO, 1994).

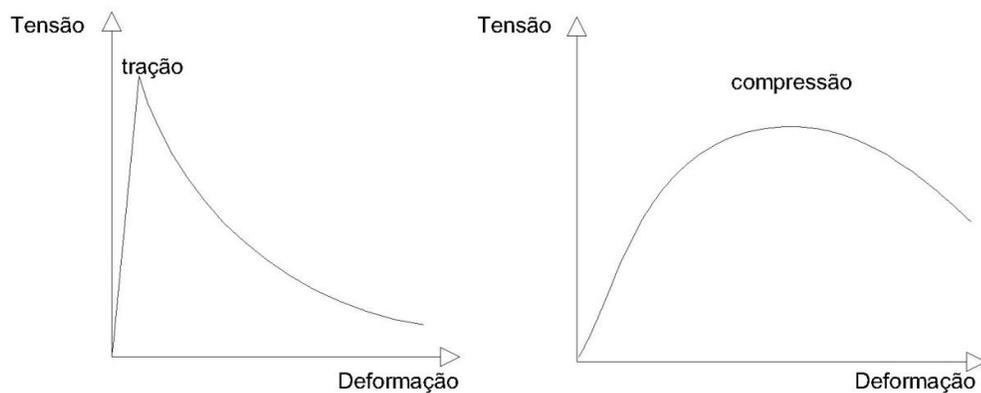
Figura 7 - Leis tensão-deformação do agregado, da pasta de cimento e do concreto



Fonte: Autoras (2014)

Conforme se observa na figura 8, para tração uniaxial o concreto apresenta uma resposta quase linear até atingir a tensão máxima e um amolecimento significativo no trecho descendente. O acréscimo de deformações no trecho descendente da curva de tração é decorrente da abertura de fissuras (ÁLVARES, 1993). O comportamento linear no concreto pode ser observado para carregamentos abaixo de 30% da carga última para solicitações de compressão e 80% para cargas de tração. A partir disso, o comportamento torna-se não linear com degradação contínua (GUELLO, 2002).

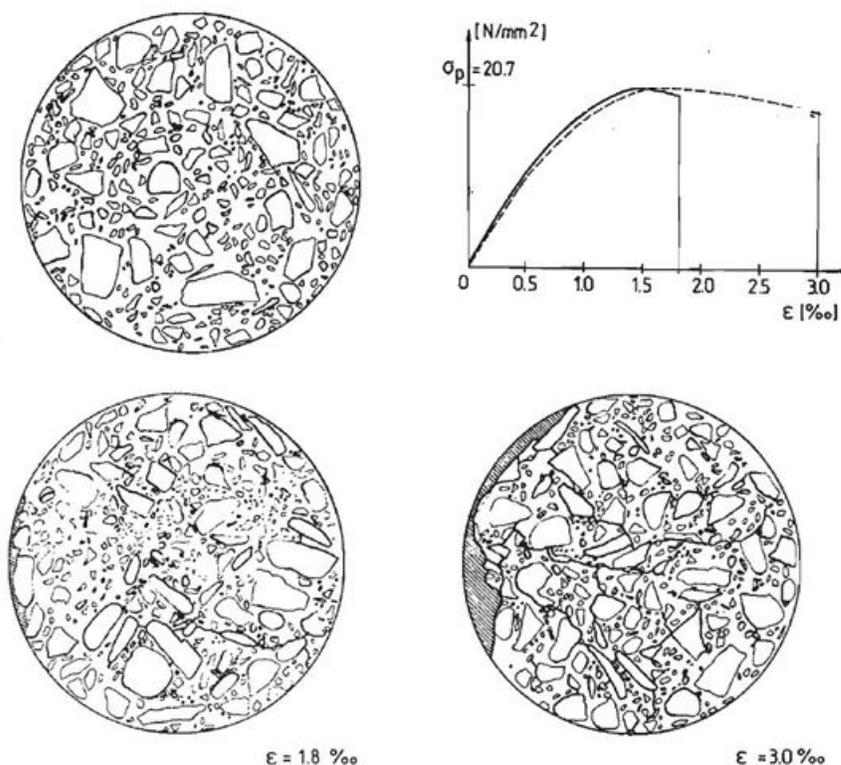
Figura 8 – Curvas tensão deformação típicas para tração e compressão uniaxiais



Fonte: Autoras (2014)

Na figura 9 pode ser observada a relação entre a perda de resistência e a abertura de fissuras para um corpo-de-prova de concreto submetido a carregamento de compressão uniaxial. Quando não há deformações no material notam-se apenas fissuras na zona de transição. Essas fissuras começam a crescer para uma tensão de aproximadamente 30% da tensão de ruptura sendo que o aumento dessas fissuras é acompanhado por um desvio de linearidade da curva tensão vs. deformação. Entre 70% e 90% da carga máxima há propagação das fissuras na argamassa. Já no ramo descendente da curva, as deformações já são na ordem de 0,3% e o equilíbrio se dá apenas com a redução de tensões (VAN MIER, 1985).

Figura 9 – Mapa de fissuras

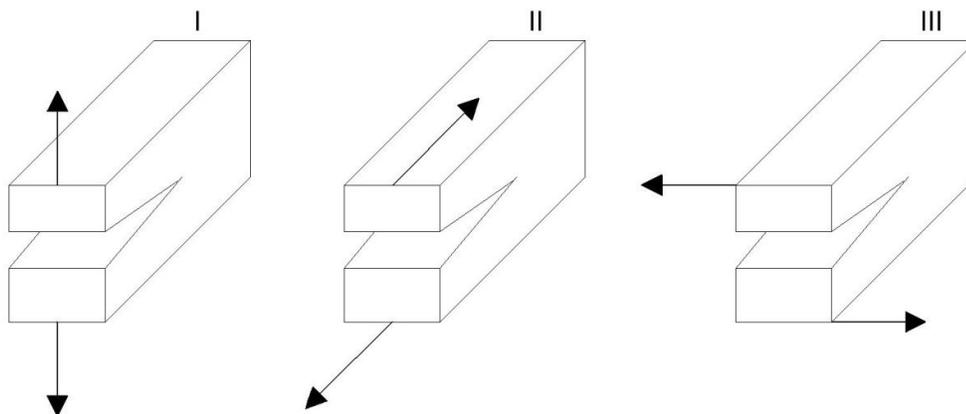


Fonte: Van Mier (1985)

A propagação de fissuras no concreto ocorre de três modos distintos, conforme o carregamento aplicado (figura 10). O modo I ocorre para esforços de tração uniaxial, onde o desenvolvimento da fissura se dá num plano perpendicular ao do carregamento. No modo II ocorre cisalhamento, com deslocamento em plano paralelo ao carregamento. O modo III é

representado pelo rasgamento, caracterizado pelo escorregamento entre as faces da fissura, entretanto com deslocamento perpendicular à fissura (GUELLO, 2002).

Figura 10 - Modos de formação de fissura

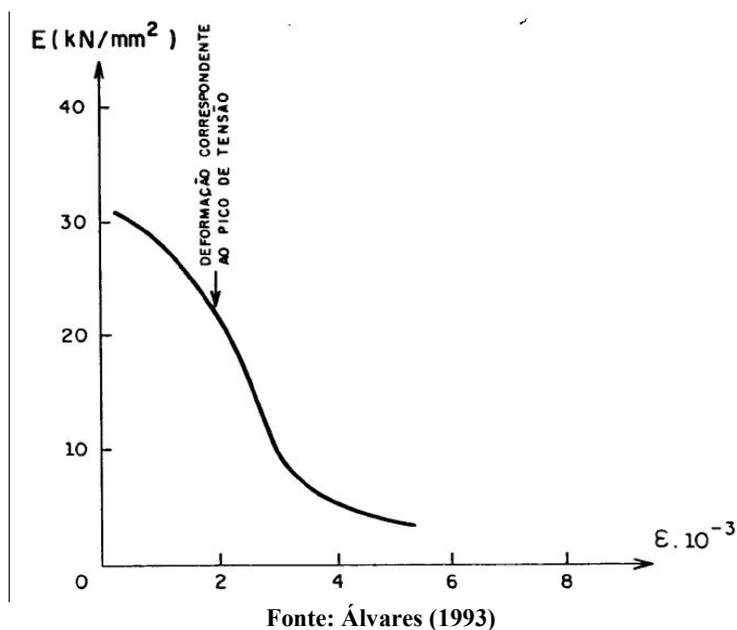


Fonte: Autoras (2014).

Sob condições normais de cura, há uma fase inicial onde as deformações são consideradas elásticas, pois são oriundas de movimentos quase reversíveis dos átomos, nessa fase as fissuras permanecem estáveis (MEHTA E MONTEIRO, 1994). À medida que a tensão aumenta, as microfissuras progridem, resultando em deformações permanentes. Em estágios mais avançados, essas microfissuras passam a colaborar nos mecanismos de deformação irreversível e ruptura, representados pelo ramo descendente (“softening”) do diagrama tensão vs. deformação (DRIEMEIER, 1995).

O módulo de elasticidade é fortemente influenciado pelas deformações. Conforme se observa na figura 11, à medida que as tensões são aplicadas e as deformações aumentam, há redução no módulo de elasticidade, e a taxa de redução torna-se considerável após o concreto ter atingido a tensão máxima.

Figura 11 – Redução no módulo de elasticidade vs. deformação

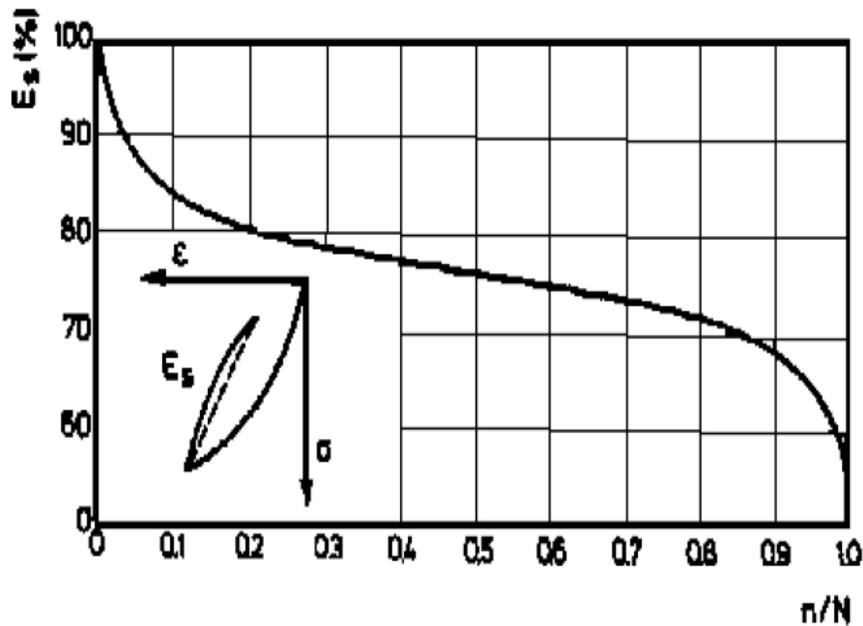


2.2 FADIGA

A resistência de um material pode ser entendida como a capacidade de suportar tensões a ele aplicadas sem se romper. Como visto anteriormente, o concreto apresenta microfissuras iniciais na zona de transição que são determinantes no comportamento do material sob os vários estados de tensão ao qual pode ser submetido. Quando submetido a carregamentos cíclicos, há uma propagação dessas fissuras de acordo com o número de ciclos, de forma que o concreto pode ter sua resistência reduzida rompendo por fadiga (MEHTA e MONTEIRO, 1994).

Em ensaios realizados por Hordijk (1991) observou-se que o módulo de elasticidade secante do concreto apresenta uma redução acentuada nos ciclos iniciais e finais, apresentando um comportamento aproximadamente constante nos ciclos intermediários, conforme pode ser observado na figura 12.

Figura 12 - Variação do módulo de elasticidade secante do concreto vs. ciclos de cargas

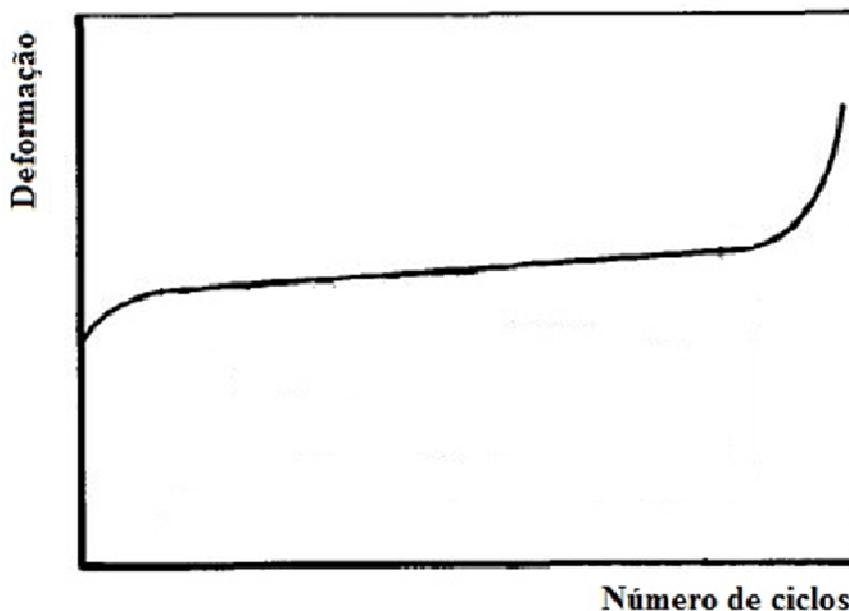


Fonte: Adaptado de Hordijk (1991)

Na figura 13 descreve a evolução da deformação do concreto conforme o número de ciclos. Observa-se que o comportamento apresenta três fases distintas. Inicialmente, ocorre um rápido avanço das deformações por ciclo, seguido por um ramo de deformações praticamente constantes e somente próximo à ruptura é que as deformações por ciclo apresentam um avanço significativo (HORDIJK, 1991).

Enquanto em carregamentos estáticos faz-se distinção entre os diversos tipos de carga, nos carregamentos cíclicos notam-se qualitativamente mais ou menos os mesmos resultados para diferentes tipos de carga. Nas figuras 12 e 13 são descritos comportamentos de um concreto submetido à compressão uniaxial, entretanto os mesmos resultados podem ser obtidos para diferentes tipos de carregamento (HORDIJK, 1991).

Figura 13 - Variação da deformação do concreto em função dos ciclos de cargas



Fonte: Adaptado de Hordijk (1991)

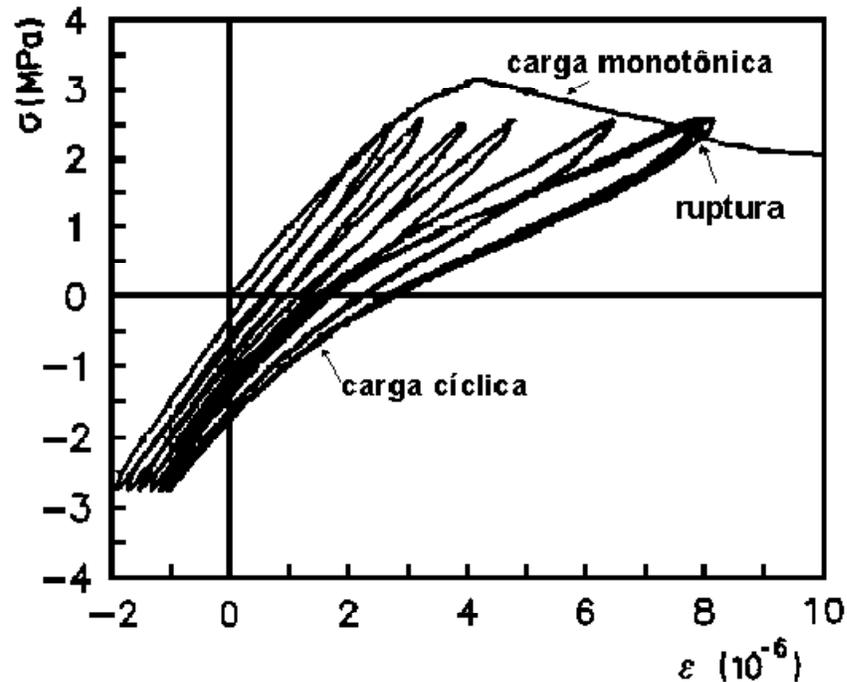
O concreto, quando submetido a cargas cíclicas, apresenta deformações progressivas e permanentes que geram um dano acumulativo. Conforme o número de ciclos aumenta, essas deformações provocam o aumento e propagação das microfissuras iniciais do concreto, levando à formação de microfissuras. Com a redução da seção transversal devido às fissuras pode ocorrer a ruptura frágil do material (MEHTA e MONTEIRO, 1994; SUBRAMANIAM e SHAH, 2003).

Em análises experimentais, Hordijk e Reinhardt (1993) observaram que a ruptura do concreto quando submetido a solicitações cíclicas ocorre quando a curva tensão-deformação das cargas cíclicas intercepta a curva para cargas monotônicas, conforme figura 14.

As fissuras de fadiga no concreto não apresentam um padrão definido, ao contrário do que acontece com o aço, tornando-se difícil identificar o fenômeno de fadiga nas peças de concreto (DANTAS, 2010).

Testes comprovam que a resistência à fadiga pode ser aumentada pelo alívio dos níveis de tensão ou por períodos em que a estrutura não está sujeita a carregamentos cíclicos (DRIEMEIER, 1995). Quanto maior for o tempo de descanso, melhor é a redistribuição das tensões na ponta da fissura, resultando em uma maior vida útil a fadiga (DANTAS, 2010).

Figura 14 - Relação tensão-deformação do concreto solicitada à carga monotônica e cíclica



Fonte: Adaptado de Hordijk e Reinhard (1993)

2.2.1 Concreto em compressão uniaxial

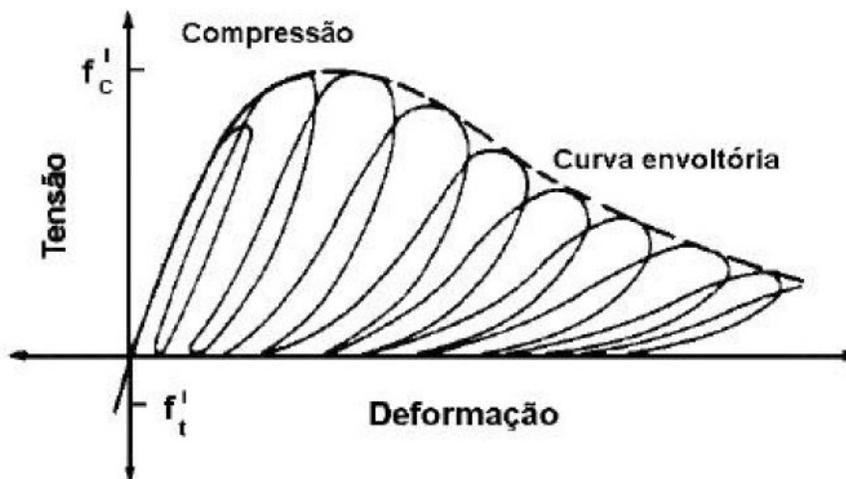
O concreto submetido a carregamentos cíclicos sofre degradação gradual tanto no módulo de deformação como na resistência à compressão quando submetido a tensões entre 50 e 75% da tensão última. Conforme o número de ciclos aumenta, as curvas de descarga vão assumindo comportamento não-linear, formando uma curva característica de histerese na recarga. Em níveis acima de 75% nas curvas de carga e descarga a não linearidade é acentuada, pois as propriedades elásticas do material já estão consideravelmente deterioradas (GONÇALVES, 2003). Na figura 15 é apresentado o comportamento típico de um concreto submetido a carregamentos repetidos, onde a curva envoltória representa o comportamento do concreto submetido a carregamento monotônico de compressão.

Nota-se na figura 15 que, a cada carregamento é adicionada uma parcela de deformação plástica ao concreto e que a deformação elástica aumenta. Isso é consequência da recuperação por deformação lenta do concreto (MEHTA e MONTEIRO, 1994).

Um aspecto importante é a comparação da resposta do material às deformações após cada etapa de carregamento. Durante o processo, a abertura de fissuras é proporcional à

tensão transmitida, ocorrendo redução de rigidez do elemento estrutural devido à redução na área efetiva do material (GONÇALVES, 2003).

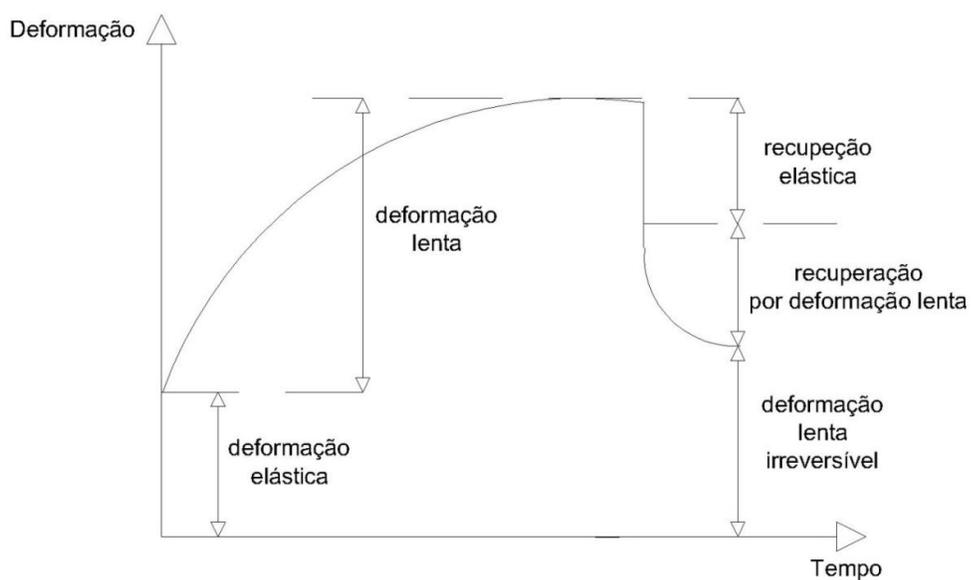
Figura 15 - Comportamento do concreto ao carregamento cíclico de compressão



Fonte: Mehta e Monteiro (1994)

Na figura 16 pode-se observar o comportamento do concreto frente ao fenômeno de reversibilidade.

Figura 16 - Reversibilidade das deformações no concreto



Fonte: Autoras (2014)

Durante o carregamento de uma estrutura submetida a tensões constantes o concreto apresenta uma deformação lenta, ou seja, para uma mesma carga a deformação aumenta com o tempo. No entanto, quando há o descarregamento uma parte da deformação é reduzida instantaneamente (recuperação elástica) e outra parte apresenta uma recuperação mais lenta (recuperação por deformação lenta), que apesar de ser mais rápida que a deformação lenta, não é totalmente reversível. Uma das causas dessa recuperação seria a deformação elástica retardada do agregado. (DRIEMEIER, 1995).

2.2.2 Concreto em tração uniaxial

Devido à facilidade de propagação de fissuras quando submetido à tração, o concreto apresenta um baixo desempenho, estando entre 7% e 11% da resistência à compressão (MEHTA e MONTEIRO, 1994).

A figura 17 apresenta o comportamento do concreto quando submetido a carregamentos cíclicos de tração. Notam-se três fases distintas. Inicialmente apresenta-se um comportamento elástico. A segunda fase é caracterizada pelo regime inelástico, onde as deformações são maiores e ocorre a degradação do material e, conseqüentemente a capacidade resistiva é reduzida com o início do aparecimento de fissuras. Por fim, a terceira fase, que é livre de esforços com a fissura já formada, e, portanto, só são transmitidos esforços de compressão (AGUADO et al., 1900 apud GONÇALVES, 2003).

Figura 17 - Comportamento do concreto ao carregamento cíclico de tração



Fonte: Hordijk (1991)

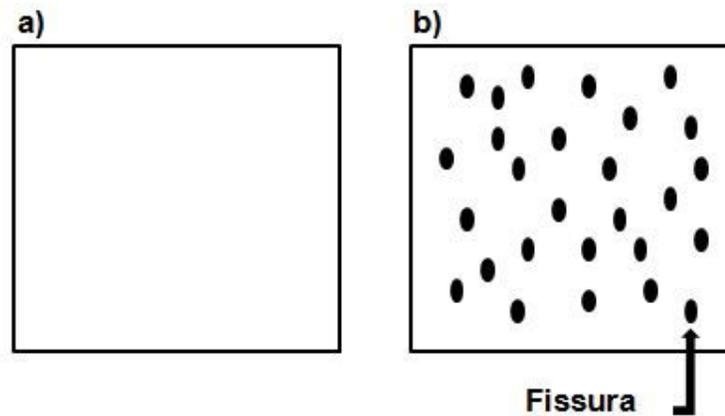
3 MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO APLICADA AO CONCRETO

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O modelo constitutivo utilizado neste estudo foi desenvolvido por Lemaitre (1984) e tem sua base na termodinâmica dos processos irreversíveis.

A fim de representar o dano, considera-se um elemento de volume representativo grande a ponto de conter uma quantidade representativa de defeitos e pequeno o suficiente para ser considerado como um ponto material da mecânica do contínuo. Dentre os vários planos inscritos neste elemento, identifica-se o mais danificado, sendo definida sua área (A) e sua área degradada (A_d), conforme figura 18.

Figura 18 - Área (a) nominal e (b) degradada



Fonte: Autoras (2014)

No modelo de dano isotrópico, o comportamento mecânico das falhas em qualquer direção é regido pela mesma variável escalar, denominada variável de dano (d). A evolução desta variável pode ser definida em termos da vida útil remanescente ou usando conceitos de tensão efetiva (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990). Neste estudo, será utilizada a segunda hipótese, na qual a variável do dano considera a redução da área resistente devido à intersecção com os defeitos.

Para um elemento submetido a um carregamento uniaxial, a variável do dano é dada pela equação (2):

$$d = \frac{A_d}{A}, \quad (2)$$

onde A_d representa a área degradada e A a área inicial sem defeitos.

O parâmetro de dano pertence ao intervalo $0 \leq d \leq 1$, onde $d = 0$ corresponde ao estado íntegro do material ($A_d = 0$) e $d = 1$ representa o estado totalmente degradado do material ($A_d = A$)

Desta forma, a área efetivamente resistente (\bar{A}) pode ser definida pela equação (3):

$$\bar{A} = A - A_d. \quad (3)$$

Há duas formas de tensão associada a um elemento unidimensional submetido à ação de uma força axial F . A tensão nominal (σ) associada à área total da seção, e a tensão efetiva ($\bar{\sigma}$) relacionada à seção livre de dano, conforme se observa nas equações:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4)$$

e

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}}. \quad (5)$$

A área efetiva ainda pode ser expressa em função da variável do dano, substituindo-se a equação (2) na equação (3), obtendo-se:

$$\bar{A} = A(1 - d). \quad (6)$$

Igualando as equações (4) e (5), e levando-se em consideração a equação (6), a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ pode ser representada por:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d}. \quad (7)$$

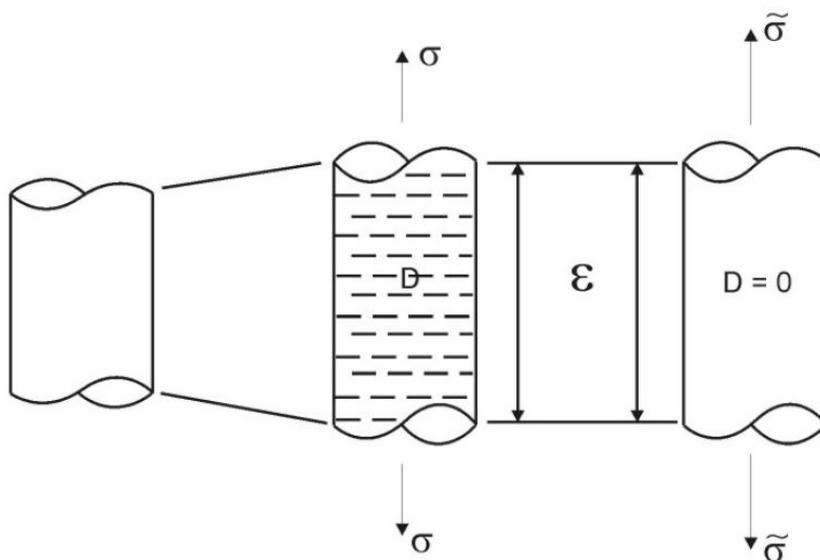
Generalizando para um caso tridimensional, tem-se que:

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{1-d}, \quad (8)$$

onde \mathbf{T} representa o tensor de tensões nominais de Cauchy e $\bar{\mathbf{T}}$ o tensor de tensões efetivas de Cauchy.

As equações (7) e (8) são válidas devido à hipótese de equivalência de deformações, onde a deformação associada a um estado danificado, quando submetido à tensão aplicada, é equivalente à deformação associada ao estado inalterado, quando submetido à tensão efetiva, como mostra a figura 19. Essa hipótese foi desenvolvida por Lemaitre (1984) a fim de obter um modelo coerente com a hipótese do meio contínuo, assumindo que todas as características do material são afetadas da mesma forma pela densidade dos defeitos de dano.

Figura 19 - Deformação equivalente



Fonte: Lemaitre e Chaboche (1990)

Com tais hipóteses, os modelos de dano ficam adequados para utilização no Método dos Elementos Finitos (MEF) baseado em deslocamento.

Conforme ilustrado na figura 19, considerando um material elástico linear, podem-se escrever as relações tensão-deformação:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_d} \quad (9)$$

e

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E}. \quad (10)$$

sendo ε a deformação, E_d o módulo de elasticidade degradado e E o módulo de elasticidade do material integro.

Igualando-se as equações (9) e (10), obtém-se:

$$E_d = (1-d)E. \quad (11)$$

A partir das equações (9) e (11) é possível escrever a relação constitutiva total:

$$\sigma = E_d \varepsilon, \quad (12)$$

ou,

$$\sigma = (1-d)E\varepsilon. \quad (13)$$

Comparando a equação (13) com a equação (7) nota-se que

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon. \quad (14)$$

Generalizando para mais dimensões, tem-se:

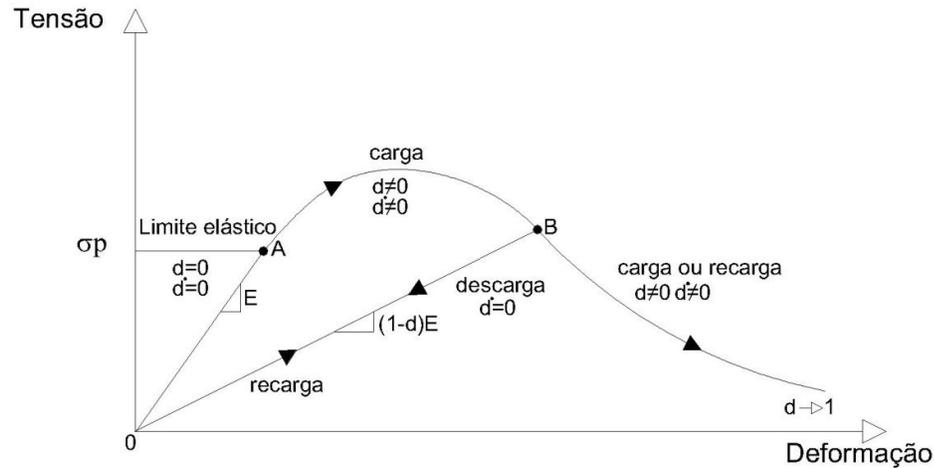
$$\mathbf{T} = (1-d)\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{T}}(1-d), \quad (15)$$

onde \mathbf{D} representa o tensor de constantes elásticas e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o pseudo tensor de deformações de engenharia.

As equações acima demonstram a conservação da isotropia do modelo, uma vez que a rigidez é afetada apenas pelo fator escalar $(1-d)$. A perda de rigidez devido à evolução do

parâmetro de dano pode ser visualizada na figura 20. Nota-se que $(1-d)$ é o fator de redução da rigidez secante do material.

Figura 20 - Diagrama de tensão vs. deformação uniaxial



Fonte: Autoras (2014)

Observa-se na figura 20 que no trecho elástico linear não há evolução do dano ($\dot{d} = 0$) o que ocorre nos trechos \overline{OA} , \overline{OB} e \overline{BO} . Já no trecho anelástico \overline{AB} nota-se a evolução do dano $\dot{d} \neq 0$.

Neste estudo são tratados problemas que independem do tempo, onde a variável t indica um pseudo-tempo associado ao processo de carga e descarga, e a derivada em relação ao tempo (representada por um ponto sobre a variável) indica a taxa de variação ao longo do processo de carga.

3.2 MODELO CONSTITUTIVO DE DANO ISOTRÓPICO PARA CARGAS MONOTÔNICAS

3.2.1 Critério de Dano

Com o objetivo de determinar o domínio elástico e o início do crescimento da degradação, Simó e Ju (1987) apresentam um critério de dano (C), dado em função da tensão efetiva equivalente τ e do valor limite de dano r , conforme apresentado na equação (16):

$$C(\tau, r) = \tau(\bar{\mathbf{T}}) - r \leq 0. \quad (16)$$

A tensão equivalente $\tau(\bar{\mathbf{T}})$ é definida como uma forma de representar quantitativamente e de modo unidimensional o estado de tensão de um ponto para compará-lo com as tensões limites (FERNANDES, 2010).

A tensão equivalente é obtida pela seguinte norma energética (OLIVER et al., 1990):

$$\tau = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (17)$$

Conforme Gonçalves (2003) a variável interna r estabelece o limite de dano corrente e controla a dimensão do domínio elástico. Atribui-se, desta forma, para o material antes de receber o carregamento um valor inicial r_0 , relacionado com sua resistência elástica a tração, dado por:

$$r_0 = \frac{f_t}{\sqrt{E}}, \quad (18)$$

em que f_t representa a resistência elástica ao carregamento.

De acordo com Gonçalves (2003) pode-se escrever ainda o critério do dano no espaço das tensões multiplicando-se a equação (16) por $(1-d)$. Desta forma, tem-se:

$$G(\tau, q) = \tau(\mathbf{T}) - q \leq 0, \quad (19)$$

onde G é uma função do critério do dano no espaço de tensões e q uma variável interna tipo tensão, sendo q dado por:

$$q = (1-d)r. \quad (20)$$

Para o modelo isotrópico, define-se a evolução do dano (d), através de um parâmetro de consistência λ (SIMÓ E JU, 1987), dado pela relação:

$$\dot{r} = \lambda. \quad (21)$$

Este parâmetro define as condições de carregamento/descarregamento de acordo com as relações de Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned} \lambda &\geq 0, \\ C(\tau(\bar{\mathbf{T}}), r) &\leq 0, \\ \lambda C(\tau(\bar{\mathbf{T}}), r) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Assim, com base na variação de C , é possível estabelecer o quadro 1:

Quadro 1– Relação entre o critério de dano e o parâmetro de consistência

• $C < 0$	$\rightarrow \lambda = 0$	\rightarrow	Não há dano
• $C = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \dot{C} < 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \text{Descarregamento} \\ \dot{C} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \rightarrow \text{Carregamento Neutro} \\ \lambda > 0 \rightarrow \text{Carregamento Plástico} \end{array} \right. \end{array} \right.$		

Fonte: Autoras (2014)

Logo, a variável interna r em função do tempo t é dada pela expressão:

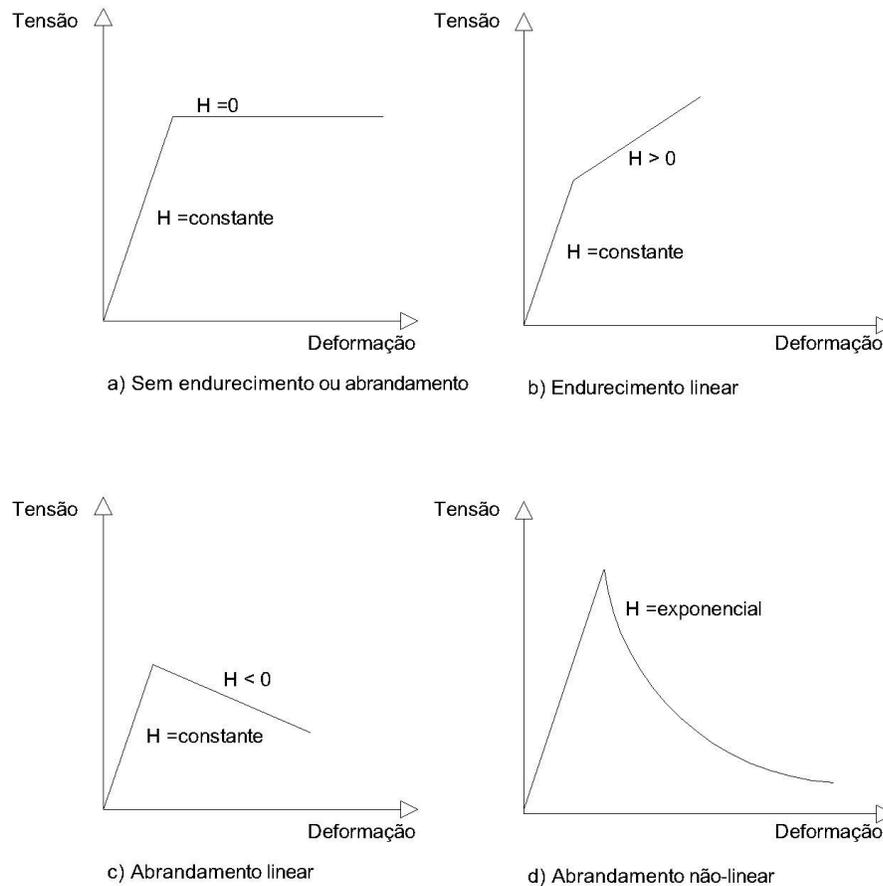
$$r_t = \text{máx} \{ r_0, \text{máx} \tau(\bar{\mathbf{T}})_s \} \quad s \in \{-\infty, t\}. \quad (23)$$

Observa-se que r , após o material ter atingido o domínio plástico, assumirá o maior valor da função $\tau(\bar{\mathbf{T}})$ ao longo do processo de carregamento.

3.2.2 Lei da evolução do dano

A evolução do dano após o limite de elasticidade do material, para materiais com características diferentes, resulta em distintos comportamentos (RODRIGUES, 2011), conforme pode ser observado na figura 21.

Figura 21 - Comportamentos distintos de abrandamento e endurecimento



Fonte: Autoras (2014)

A função que rege o endurecimento ou abrandamento dos materiais, conforme figura 21, é denominada H .

A lei de evolução da variável de dano em função do módulo de endurecimento/abrandamento e da variável de dano, para carregamentos monotônicos, é dada por (MANZOLI, 1998 apud RODRIGUES, 2011):

$$\dot{d} = \left(\frac{1}{1+H} - d \right) \frac{\dot{r}}{r}. \quad (24)$$

Considerando que H é função de r , pode-se obter uma expressão fechada da variável de dano:

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r}, \quad (25)$$

em que:

$$q(r) = \int \frac{H(r)}{1+H(r)} dr, \quad q|_{r=r_0} = r_0. \quad (26)$$

Pode-se considerar que a evolução do dano no concreto se dá através de uma função exponencial de abrandamento tal que (OLIVER et al., 1999):

$$H(r) = \frac{1}{1 + \eta e^{\eta \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}} - 1, \quad (27)$$

$$d = 1 - \frac{r}{r_0} e^{\eta \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}, \quad (28)$$

em que η é um parâmetro relacionado com a energia de fratura do material.

A variável η é obtida pela relação entre a energia total dissipada em um processo de tração unidimensional e a energia de fratura do concreto, G_f (MANZOLI, 1994 apud FERNANDES, 2010). Assim, tem-se:

$$\eta = \left(\frac{G_f E}{l(f_i)^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1}, \quad (29)$$

onde l é o tamanho do elemento finito.

Um algoritmo baseado no modelo constitutivo de dano isotrópico para cargas monotônicas pode ser visualizado no quadro 2, o qual esquematiza os passos para a determinação do tensor das tensões em cada passo do tempo de carga $t_{(n+1)}$.

Quadro 2 - Algoritmo do modelo constitutivo do dano isotrópico para cargas monotônicas

Entrada: $r_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$
Dados do Material: $\mathbf{D}, d(r), r_0$
1º passo - Calcular o tensor de tensões efetivas: $\bar{\mathbf{T}}_{n+1} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$
2º passo - Calcular tensão efetiva equivalente: $\tau_{n+1} = \tau(\bar{\mathbf{T}}_{n+1})$
3º passo - Verificar se $\tau(\bar{\mathbf{T}}_{n+1}) > r_n$ Se VERDADEIRO $\tau(\bar{\mathbf{T}}_{n+1}) = r_{n+1}$ Se FALSO $r_n = r_{n+1}$
4º passo - Atualizar a variável de dano, de acordo com d(r): $d = 1 - \frac{r}{r_0} e^{\eta \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}$
5º passo - Determinar o Tensor de tensões finais: $\mathbf{T}_{n+1} = (1 - d) \bar{\mathbf{T}}_{n+1}$
Saída: $r_{n+1}, \mathbf{T}_{n+1}$

3.3 MODELO CONSTITUTIVO DE DANO ISOTRÓPICO PARA CARGAS CÍCLICAS

O modelo de dano apresentado na equação (24) não pode ser generalizado para carregamentos cíclicos, pois, segundo este modelo, somente haverá aumento na degradação quando ocorrer a variação do parâmetro r . Para ações repetidas de amplitude constante, por exemplo, ocorrerá acréscimo do dano apenas no primeiro ciclo de carregamento.

Papa et al. (1991) definiram a seguinte lei da evolução do dano para cargas cíclicas:

$$\dot{d} = \left(\frac{1}{1+H} - d \right) \frac{\langle \dot{\tau} \rangle}{\tau} \Psi \left(\frac{\tau}{r}, d \right), \quad (30)$$

Ψ é uma função crescente, em que $\Psi(0,d)=0$ e $\Psi(1,d)=1, \forall d \in [0,1]$; $\langle x \rangle$ representa os parênteses de Macaulay ($\langle x \rangle = x$ se $x \geq 0$ e $\langle x \rangle = 0$ se $x < 0$) e r é definido pela equação (23).

A equação (30) não pode ser integrada analiticamente. Através de uma integração numérica aplicando-se diferenças finitas, tem-se:

$$d_{n+1} - d_n = \left(\frac{1}{1+H_\alpha} - d_\alpha \right) \frac{\langle \tau_{n+1} - \tau_n \rangle}{\tau_\alpha} \Psi \left(\frac{\tau}{r}, d \right). \quad (31)$$

As variáveis H_α , r_α , τ_α e d_α são calculados através de uma combinação no início e no fim do incremento destas variáveis:

$$H_\alpha = (1-\alpha)H_n + \alpha H_{n+1}, \quad (32)$$

$$r_\alpha = (1-\alpha)r_n + \alpha r_{n+1}, \quad (33)$$

$$\tau_\alpha = (1-\alpha)\tau_n + \alpha \tau_{n+1}, \quad (34)$$

$$d_\alpha = (1-\alpha)d_n + \alpha d_{n+1}. \quad (35)$$

Em que $0 < \alpha < 1$. Para $\alpha = 0$, a equação (31) equivale ao método de diferenças finitas adiantadas, quando $\alpha = 1$ têm-se o método das diferenças finitas atrasadas, e $\alpha = 0,5$ corresponde a uma diferença finita central.

Nos casos em que H é função de r , tem-se:

$$H_\alpha = H(r_\alpha). \quad (36)$$

A fim de se representar o comportamento do concreto submetido à tração cíclica, emprega-se a função Ψ dada por uma lei exponencial de abrandamento que procura representar o comportamento do módulo de elasticidade secante do concreto (ver GONÇALVES, 2003):

$$\Psi = \left(\frac{\tau_\alpha}{r_\alpha} \right)^{Bp[1-(1-d_\alpha)^{Ep}] + Gp}, \quad (37)$$

onde Bp , Ep e Gp são parâmetros do modelo de concreto obtidos experimentalmente.

No modelo adotado, a solução é obtida através da combinação das equações (24) e (30). Utilizando-se a regra dos pontos centrais ($\alpha=0,5$) e as equações (32) a (35), obtém-se:

$$\begin{cases} R_1(r_\alpha, d_\alpha) = d_n - d_\alpha + \left(\frac{1}{1+H_\alpha} - d_\alpha \right) \frac{r_\alpha - r_n}{r_\alpha} = 0 \\ R_2(r_\alpha, d_\alpha) = d_n - d_\alpha + \left(\frac{1}{1+H_\alpha} - d_\alpha \right) \frac{\langle \tau_\alpha - \tau_n \rangle}{\tau_\alpha} \psi \left(\frac{\tau_\alpha}{r_\alpha}, d_\alpha \right) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

As equações acima são um sistema de equações não lineares em função de r_α e d_α . Neste estudo adotou-se o método iterativo de Newton-Rhapson, expresso na forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (39)$$

onde n é a iteração, x é a solução procurada, f e f' são respectivamente o sistema de equações e seu jacobiano. Para o sistema em questão, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} r_\alpha^{i+1} \\ d_\alpha^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_\alpha^i \\ d_\alpha^i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial r_\alpha} & \frac{\partial R_1}{\partial d_\alpha} \\ \frac{\partial R_2}{\partial r_\alpha} & \frac{\partial R_2}{\partial d_\alpha} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} R_1(r_\alpha^i, d_\alpha^i) \\ R_2(r_\alpha^i, d_\alpha^i) \end{Bmatrix}. \quad (40)$$

O processo inicia-se com $i=0$, sendo que $r_\alpha = r_n$ e $d_\alpha = d_n$, e termina quando um critério de convergência é atingido. Neste estudo, adotou-se o critério apresentado na equação (41):

$$x_{i+1} - x_i \leq \text{Erro}. \quad (41)$$

Em seguida, atualizam-se os valores das equações (33) e (35) no tempo t_{n+1} . Conforme equação (42):

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= d_n + \frac{d_\alpha - d_n}{\alpha}, \\
 r_{n+1} &= r_n + \frac{r_\alpha - r_n}{\alpha}.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

O quadro 3 esquematiza os passos para a determinação do tensor das tensões em cada passo de tempo de carga t_{n+1} para estrutura solicitada por carregamento cíclico.

Quadro 3 - Algoritmo do modelo constitutivo do dano isotrópico para cargas cíclicas

Entrada: τ_n, r_n, d_n
Dados do Material: $\mathbf{D}, H(r), d_0 = 0, r_0$
1º passo - Calcular o tensor de tensões efetivas: $\bar{\mathbf{T}}_{n+1} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$
2º passo - Calcular tensão efetiva equivalente: $\tau_{n+1} = \tau(\bar{\mathbf{T}}_{n+1})$
3º passo – Calcular τ_α a partir da equação (34) e H_α através da equação (36)
4º passo – Realizar a primeira iteração para determinar r_α e d_α através do sistema não-linear apresentado na equação (40)
5º passo – Realizar os procedimentos dos passos 3 e 4 até se atingir a norma de convergência.
6º passo – Atualizar os valores r_{n+1} e d_{n+1} através da equação (42)
7º passo - Determinar o tensor de tensões finais: $\mathbf{T}_{n+1} = (1 - d_{n+1})\bar{\mathbf{T}}_{n+1}$
Saída: $r_{n+1}, d_{n+1}, \tau_{n+1}, \mathbf{T}_{n+1}$

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste estudo é essencial descrever os campos de tensões e deformações em qualquer ponto da estrutura para uma dada condição de carregamento e vínculos. Dessa forma, os problemas de mecânica dos sólidos apresentados nesse trabalho são resolvidos com auxílio do método aproximado variacional de Ritz.

4.1 MÉTODO DE RITZ

A metodologia apresentada nesse item para a obtenção do funcional de energia potencial total e sua minimização é baseada nas descrições de Assan (2003) e Zienkiewicz e Taylor (2000).

Ao sofrer deformações, um sólido acumula energia de deformação. Esta energia de deformação, ou energia potencial elástica, é equivalente ao trabalho realizado pelas forças internas.

Sendo o tensor das tensões de Cauchy (\mathbf{T}) dado por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (43)$$

e o pseudo tensor das deformações de engenharia ($\boldsymbol{\varepsilon}$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (44)$$

em que $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ são as deformações nos eixos principais e $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ as distorções no plano, então a energia de deformação elástica de um corpo é escrita então da seguinte maneira:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (45)$$

em que U_e é a energia de deformação elástica, $:$ representa o produto interno de tensores, e Ω é o domínio do sólido.

Observa-se que \mathbf{T} e $\boldsymbol{\varepsilon}$ estão relacionados pela lei constitutiva do material, geralmente pela Lei de Hooke.

Para esse mesmo sólido, considerando-se \mathbf{b} como o vetor das forças externas distribuídas, \mathbf{f} o vetor das forças atuando sobre a porção de contorno Γ_N e \mathbf{P} os vetores de força concentrada, o incremento do trabalho das forças internas W_f quando ocorre um incremento de deslocamento no campo dos deslocamentos caracterizado por: $\delta\mathbf{u}=(\delta_{u1}, \delta_{u2}, \delta_{u3})^T=(\delta_{ux}, \delta_{uy}, \delta_{uz})^T$ é de:

$$\delta W_f = \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}^T \delta\mathbf{u} d\Gamma_N + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \delta\mathbf{u}_i. \quad (46)$$

Pela primeira lei da termodinâmica, tem-se que a energia potencial das forças externas é dada por:

$$U_f = -W_f. \quad (47)$$

Considerando-se que as forças sejam conservativas, e que na configuração A o campo de deslocamentos seja nulo, ao passo que na configuração B os deslocamentos sejam dados por \mathbf{u} , a energia potencial externa é dada por:

$$U_f = -\int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Gamma_N - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \mathbf{u}_i. \quad (48)$$

A energia potencial total de um sólido elástico $\Pi(u)$ é definida pela soma da energia de deformação elástica e energia potencial das forças externas. Esta nova equação é um funcional da função que define o campo de deslocamentos, uma vez que as tensões e as deformações estão relacionadas pelas leis constitutivas:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Gamma_N - \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \mathbf{u}_i. \quad (49)$$

A primeira variação deste funcional igualada à zero representa a condição de equilíbrio (teorema variacional) e um ponto de mínima energia potencial. Desta forma, a resolução do problema variacional consiste em encontrar uma função $u(x)$ que minimize o funcional $\Pi(u)$ e obedeça as condições de contorno essenciais.

O método de Ritz consiste em escolher uma função aproximada $\tilde{u}(x)$ que contem n parâmetros ajustáveis α_i , os quais são escolhidos de forma a minimizar e atender as condições de contorno de Dirichlet do funcional.

A função que define $\tilde{u}(x)$ pode ser convenientemente escrita como combinação linear de outras n funções ϕ_i :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x). \quad (50)$$

Substituindo a função aproximadora que atende as condições de contorno essenciais no funcional, este passa a ser função dos α_i 's.

A condição de mínimo do funcional implica:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (51)$$

A equação (46) representa um sistema de n equações.

É desejável que haja convergência para a solução exata à medida que o número de parâmetros aumenta. Para isso, as funções ϕ_i devem individualmente satisfazer as condições de contorno, o conjunto de funções ϕ_i deve ser completo sobre o domínio do problema e devem ser contínuas de ordem $(m-1)$, onde m é a ordem da maior derivada do funcional.

4.2 A TÉCNICA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

O Método dos Elementos Finitos pode ser entendido como uma técnica para gerar as funções aproximadoras dos problemas variacionais e surgiu como uma possibilidade para resolver problemas mecânicos, superando dificuldades encontradas em outros métodos

aproximados, como por exemplo, a dificuldade do método de Ritz clássico de encontrar funções aproximadoras que satisfazem as condições de contorno irregulares e saber se elas se aproximam da função exata (ASSAN, 2003).

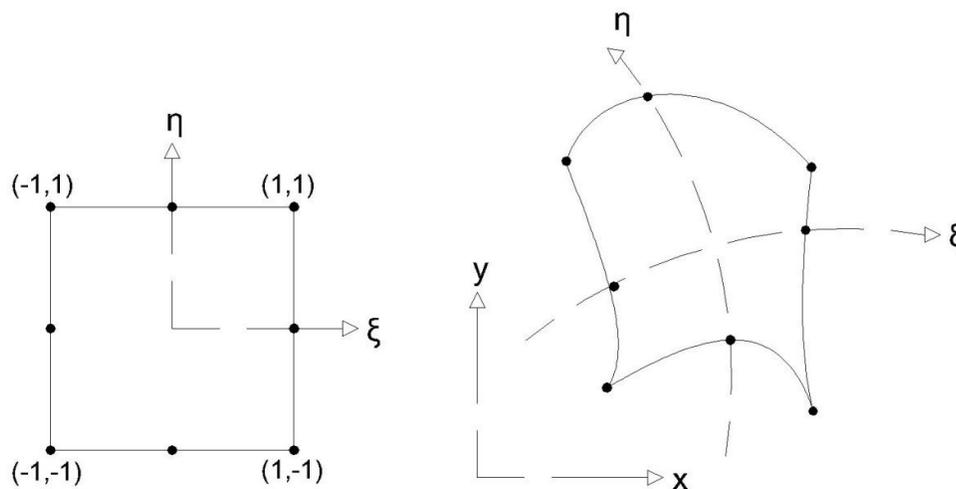
Assan (2003) descreve que ao invés de se buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo domínio, no Método dos Elementos Finitos as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento. Assim, para cada elemento, a solução tentativa é formada pela combinação linear de funções de forma associadas aos nós ponderadas pelas variáveis referidas aos nós do elemento.

A necessidade de descrever contornos irregulares levou a formulação de elementos finitos isoparamétricos. A capacidade desse elemento em representar elementos com lados curvos tornou possível a redução de erros de aproximação (ÁLVARES, 1993).

Na figura 22 é apresentado o exemplo de um elemento quadrangular e um elemento isoparamétrico.

A formulação consiste em criar um elemento com bordas curvas, onde os pontos possam ser mapeados através das funções de forma ϕ_i do elemento inicial (ASSAN, 2003).

Figura 22 – Elemento quadrangular e elemento isoparamétrico



Fonte: Autoras (2014)

As transformações de coordenadas em geral são dadas de acordo com a equação (52):

$$\begin{aligned}
 x &= x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m x_i \phi_i(\xi, \eta), \\
 y &= y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m y_i \phi_i(\xi, \eta),
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

onde x_i e y_i são as coordenadas dos m pontos do elemento finito e ϕ_i são as funções de interpolação geométrica. O elemento finito é dito isoparamétrico se os m pontos coincidem com os nós do elemento e as funções ϕ_i com as funções de forma empregadas na modelagem do campo de deslocamentos (ÁLVARES, 1993).

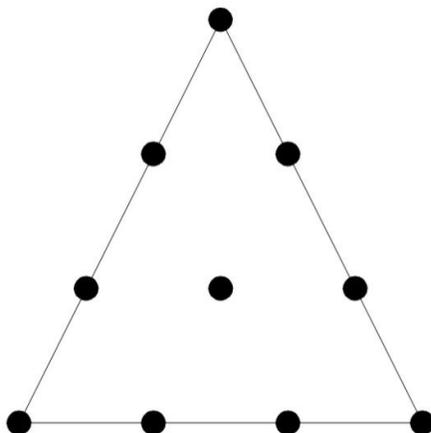
Os elementos isoparamétricos podem ter nós apenas nos lados (*serendipity*), ou ter nós internos nas posições $\xi=0$ e $\eta=0$. Esse último é mais preciso e é denominado *Lagrangeano* (ASSAN, 2003).

As condições de compatibilidade de deslocamentos entre elementos são asseguradas, portanto, apresentam uma representação correta dos movimentos de corpo rígido e as condições de deformações constantes (ASSAN, 2003).

Para o programa desenvolvido foi utilizado um elemento finito triangular isoparamétrico com 10 nós (figura 23). Este elemento é definido por funções de forma cúbicas do tipo polinômios de Lagrange, o qual apresenta um erro reduzido devido a sua capacidade de se adaptar a qualquer geometria imposta. A fim de simplificar a sistematização do cálculo de integrais este elemento apresenta a característica de ser isoparamétrico.

Devido à complexidade das funções que devem ser integradas para obter a matriz de rigidez, utiliza-se a integração numérica. Neste trabalho utilizou-se a integração numérica definida como quadratura de Hammer. Maiores informações sobre esta forma de integração podem ser encontradas em Assan (2003).

Figura 23 - Elemento finito triangular com 10 nós



Fonte: Autoras (2014)

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS E VALIDAÇÃO

Neste capítulo são apresentadas aplicações numéricas do código computacional gerado para o estudo do comportamento do concreto submetido a carregamentos cíclicos, denominado DAMAGE2D. A fim de verificar o modelo sugerido, os resultados obtidos são comparados com resultados disponíveis na literatura.

5.1 TRAÇÃO PURA COM CONTROLE DE CARGA

A fim de verificar o algoritmo desenvolvido, partiu-se de um problema bastante simples, o qual consiste na simulação de carregamentos cíclicos de tração uniaxial em uma barra de 10 x 10 x 100 cm. A geometria foi discretizada em uma malha composta por 2 elementos e 16 nós, conforme figura 24.



Fonte: Autoras (2014)

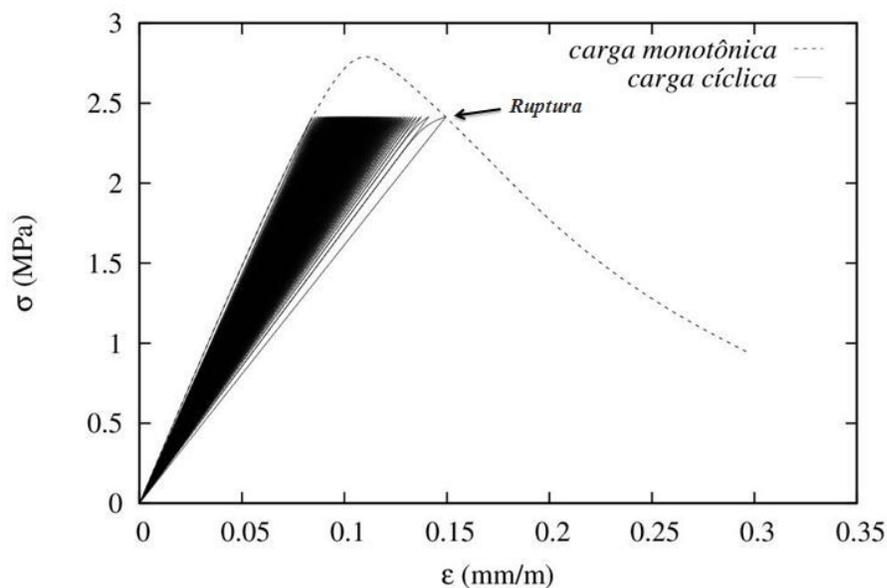
Os parâmetros de entrada fornecidos ao programa são: módulo de elasticidade do concreto ($E = 30000$ MPa), resistência a tração uniaxial ($f_t = 3,0$ MPa), parâmetros da relação constitutiva do material ($\eta = 0,45$; $B_p = 40$; $E_p = 4,0$; $G_p = 4,0$), e amplitude constante de tensão aplicada (q) em 80% da resistência a tração para carregamentos monotônicos ($\sigma_t = 2,4$ MPa).

A figura 25 apresenta as curvas tensão vs. deformação obtidas para carregamento cíclico e monotônico pelo DAMAGE2D. Conforme pode ser observado na figura 25, o dano é caracterizado pela redução do módulo de elasticidade. Além disso, em conformidade com as pesquisas de Hordijk e Reinhardt (1993), pode-se observar nessa figura o momento de ruptura do material, que ocorre quando a curva de carregamentos cíclicos intercepta a curva de carregamentos monotônicos.

A figura 26 apresenta as curvas tensão vs. deformação obtidas por Gonçalves (2003).

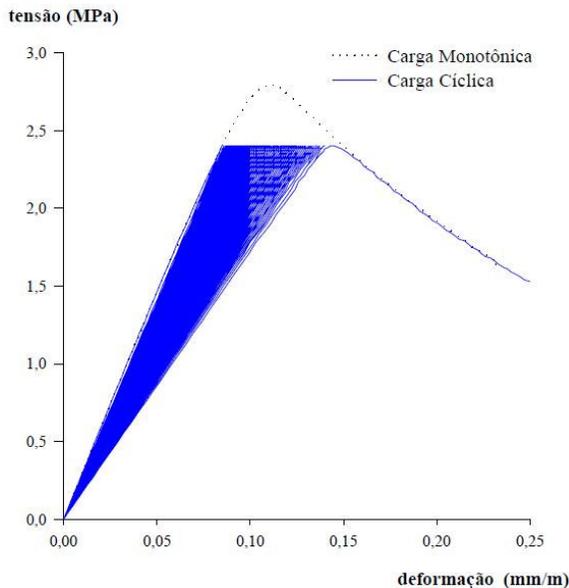
Comparando os gráficos apresentados nas figuras 25 e 26 percebe-se que a ruptura por fadiga para um carregamento de 80% da resistência a ruptura para carregamentos monotônicos ocorreu para uma deformação de aproximadamente 0,15 mm/m. Portanto, os dados gerados pelo DAMAGE2D apresentam o mesmo comportamento que os do exemplo de referência (GONÇALVES, 2003).

Figura 25 - Tensão vs. Deformação no eixo X para tensão cíclica



Fonte: Autoras (2014)

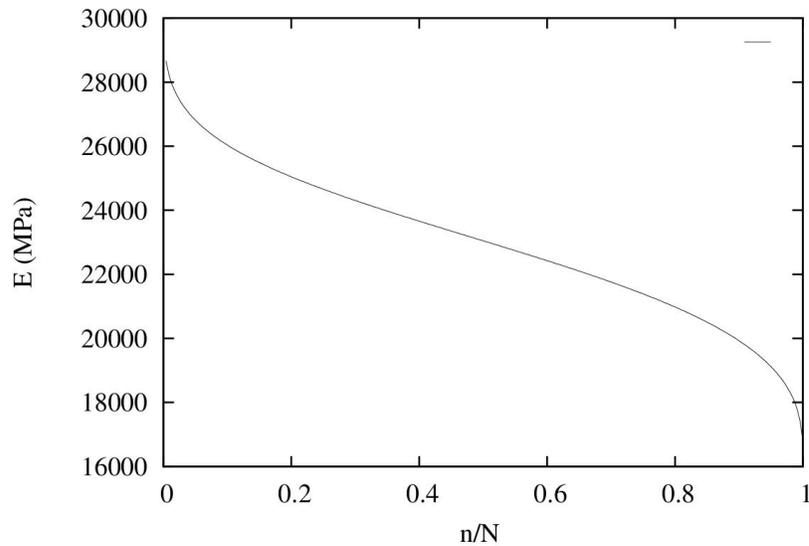
Figura 26- Tensão vs. Deformação no eixo X para tensão cíclica



Fonte: Gonçalves (2003)

Observa-se na figura 27 a redução do módulo de elasticidade conforme o número de ciclos. Nota-se que esse comportamento está de acordo com o apresentado por Hordijk (1991).

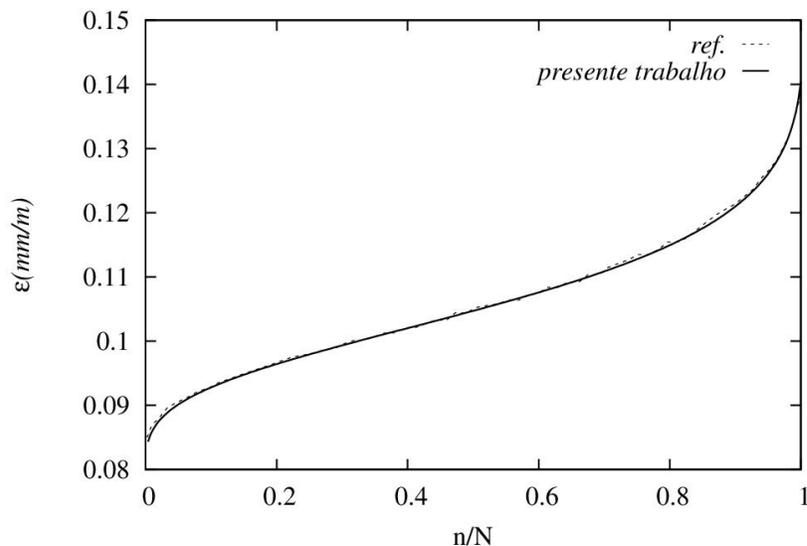
Figura 27- Redução do módulo de elasticidade secante conforme número de ciclos



Fontes: Autoras (2014)

A figura 28 apresenta as curvas da evolução da deformação conforme o número de ciclos desenvolvidas nesse presente trabalho e a de Gonçalves (2003), onde n/N representa a relação entre o número do ciclo e o número total de ciclos. Nota-se nessa figura que as curvas apresentam três ramos, no primeiro e no último ramo, correspondentes ao início do carregamento e ao trecho que precede a ruptura do material respectivamente, ocorrem maiores deformações que no segundo ramo, correspondente ao trecho intermediário da curva. É possível ainda notar a semelhança entre a curva gerada pelo DAMAGE2D e a curva de referência.

Figura 28- Evolução da deformação no eixo X conforme número de ciclos



Fontes: Presente trabalho - Autoras (2014), Ref. - Gonçalves (2003)

Nas figuras 29 e 30 são apresentados os deslocamentos para um ciclo intermediário e um ciclo próximo a carga de ruptura. Para ambos os ciclos são apresentados diagramas para um carregamento próximo da carga máxima e um descarregamento próximo a carga mínima.

Figura 29- Deslocamento no eixo X para ciclo intermediário a) carregamento e b) descarregamento



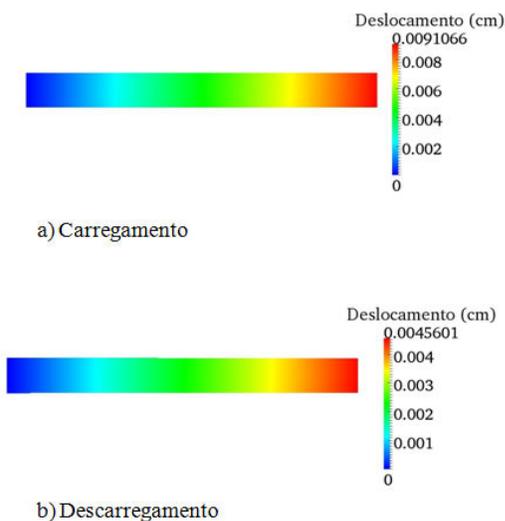
a) Carregamento



b) Descarregamento

Fonte: Autoras (2014)

Figura 30- Deslocamento no eixo X para ciclo próximo da ruptura a) carregamento e b) descarregamento



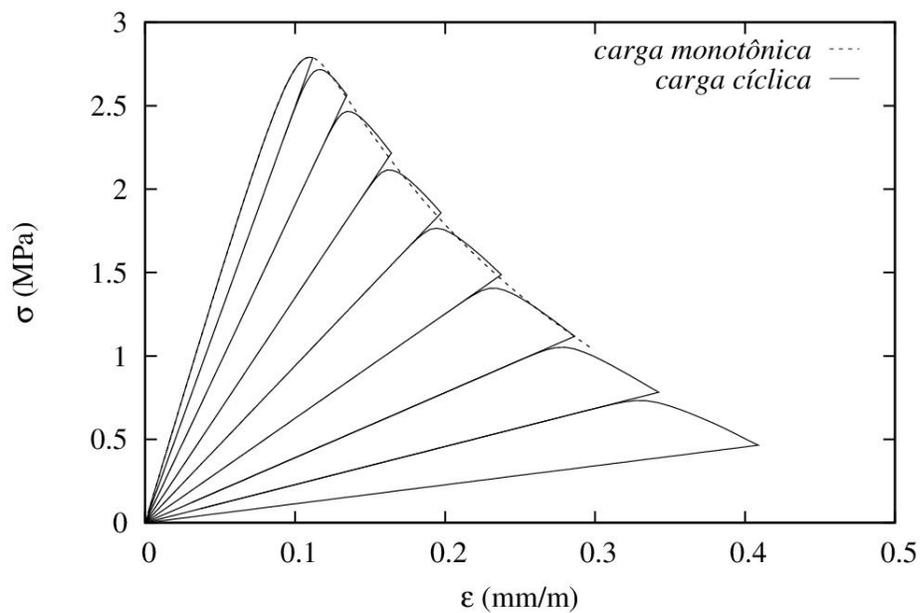
Fonte: Autoras (2014)

5.2 TRAÇÃO PURA COM CONTROLE DE DESLOCAMENTOS

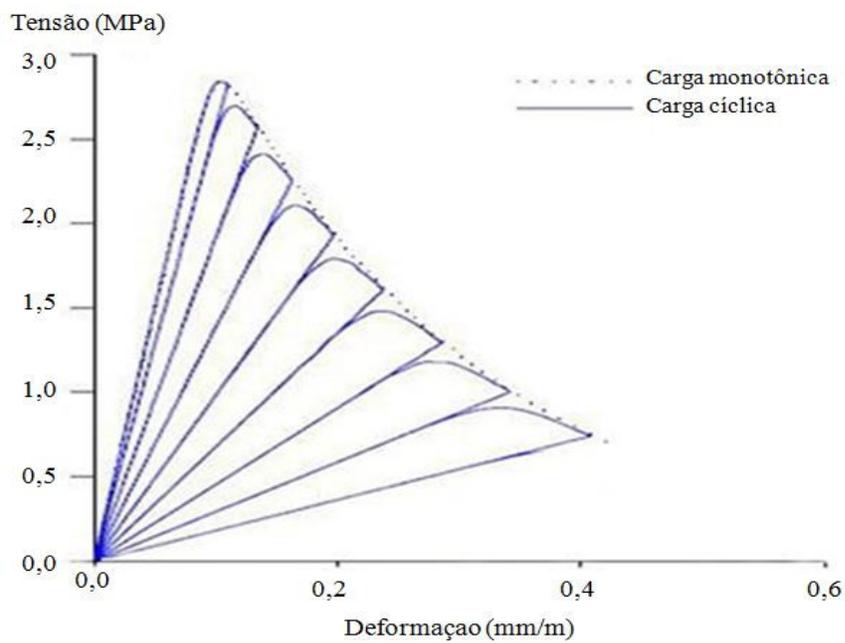
Utilizando-se o mesmo exemplo apresentado no item 5.1, substituindo-se a aplicação de carregamentos por deslocamentos prescritos, obteve-se as curvas tensão vs. deformação para carregamento cíclico e monotônico, apresentadas na figura 31. Na figura 32 tem-se a curva do exemplo apresentado por Gonçalves (2003).

Conforme pode ser observado na figura 31, o programa desenvolvido é capaz de representar adequadamente o envoltório da carga cíclica pela carga monotônica, que é o comportamento esperado de acordo com as literaturas apresentadas nesse estudo.

A validade do modelo ainda é dada pela comparação com os resultados obtidos no exemplo de Gonçalves (2003), devido a coerência entre os valores plotados nos gráficos das figuras 31 e 32.

Figura 31- Tensão vs deformação no eixo X para deformação cíclica

Fonte: Autoras (2014)

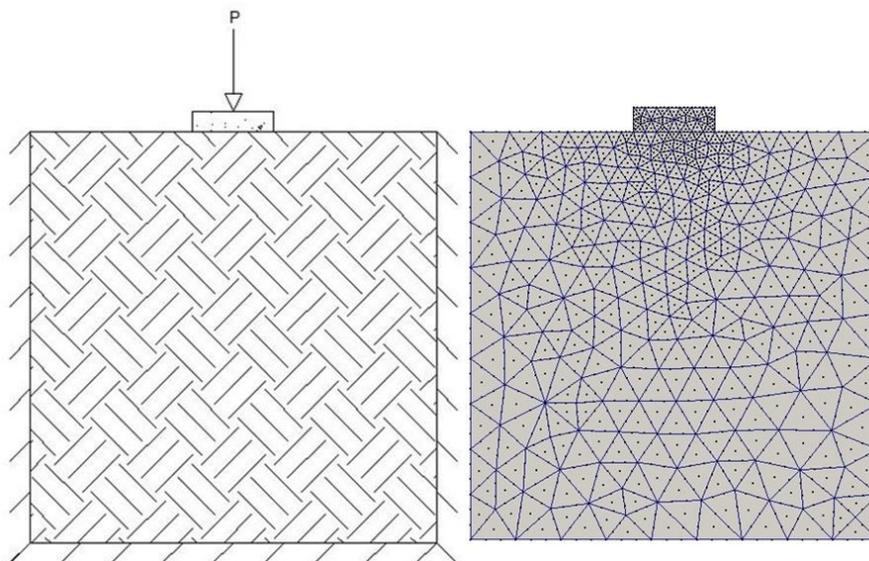
Figura 32- Tensão vs. deformação para deformação cíclica

Fonte: Gonçalves (2003)

5.3 FLEXÃO NORMAL SIMPLES COM CONTROLE DE CARREGAMENTO

Após a validação do modelo desenvolvido efetuou-se a modelagem de um bloco de concreto intertravado de dimensões 20x10x6 cm, assentado no solo, recebendo uma carga pontual que variava de 0 kfg a 72 kfg no meio da seção. A geometria do paver e do solo foi discretizada em uma malha composta por 492 elementos e 2293 nós, conforme figura 33.

Figura 33 – Elemento de paver e malha utilizada

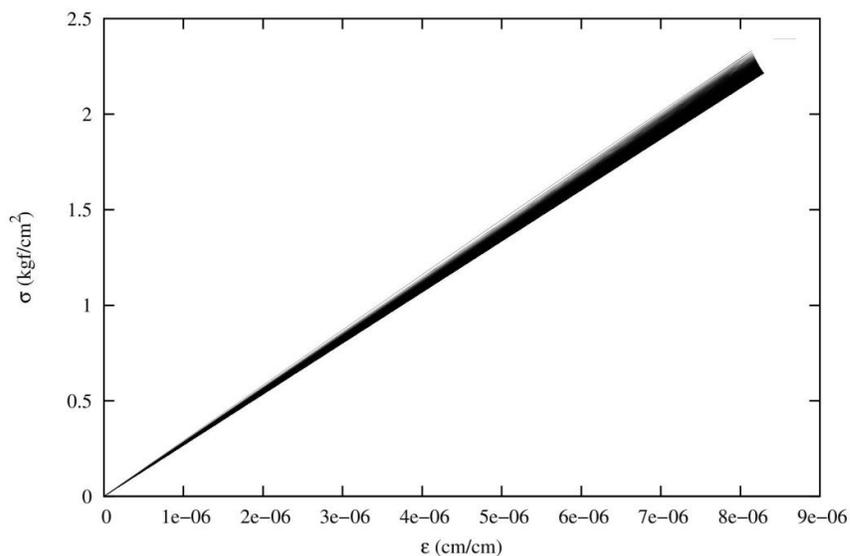


Fonte: Autoras (2014)

Os parâmetros de entrada fornecidos ao programa foram: módulo de elasticidade do concreto ($E_{\text{concreto}} = 300000 \text{ kgf/cm}^2$), módulo de elasticidade do solo ($E_{\text{solo}} = 67,5 \text{ kgf/cm}^2$) resistência a tração uniaxial do concreto ($f_t = 30,0 \text{ kgf/cm}^2$), parâmetros do concreto ($\eta = 0,45$; $B_p = 40,0$ $E_p = 4,0$; $G_p = 4,0$).

Na figura 34 é apresentada a curva tensão vs. deformação para tensão cíclica. Conforme pode ser observado, apesar do número de ciclos elevados (1500 ciclos), a deformação é pequena. Isso porque a tensão atingida está na ordem de 10% da tensão resistente. Desta forma, seria necessário um grande número de ciclos para a ruptura do material.

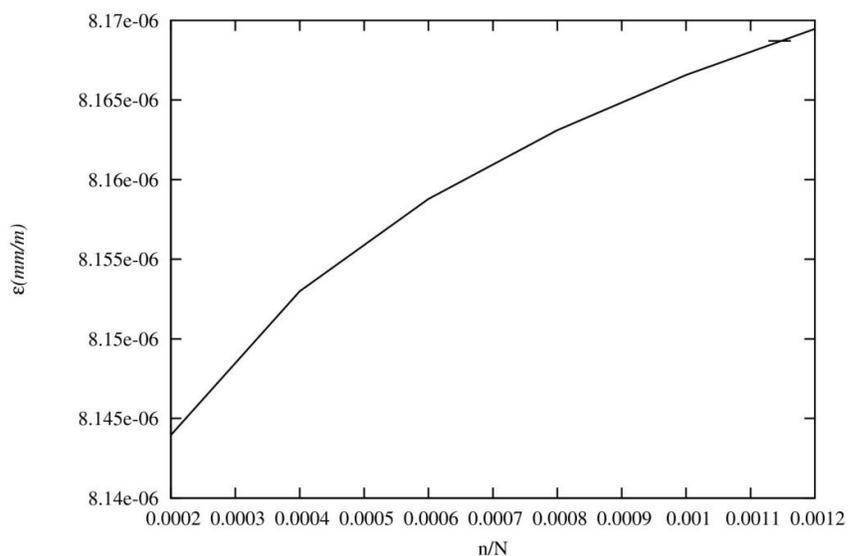
Figura 34 - Tensão vs. Deformação no eixo X para tensão cíclica



Fonte: Autoras (2014)

Na figura 35 é apresentada a evolução da deformação no eixo X conforme o número de ciclos. No gráfico são representados apenas os primeiros ciclos de carregamento, pois como o concreto não atingiu a ruptura, logo após o aumento de deformações nos primeiros ciclos ocorre a estabilização das deformações.

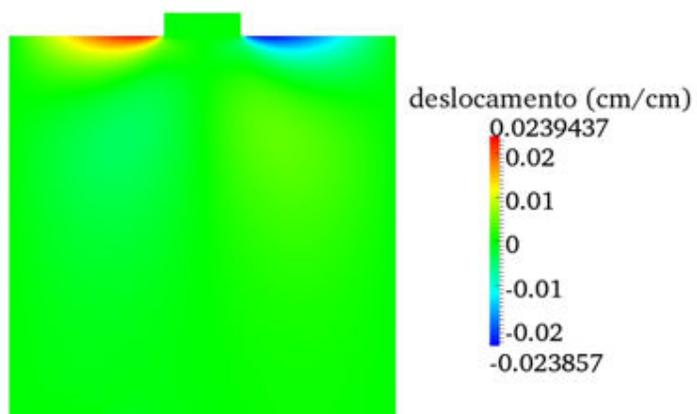
Figura 35- Evolução da deformação no eixo X conforme número de ciclos



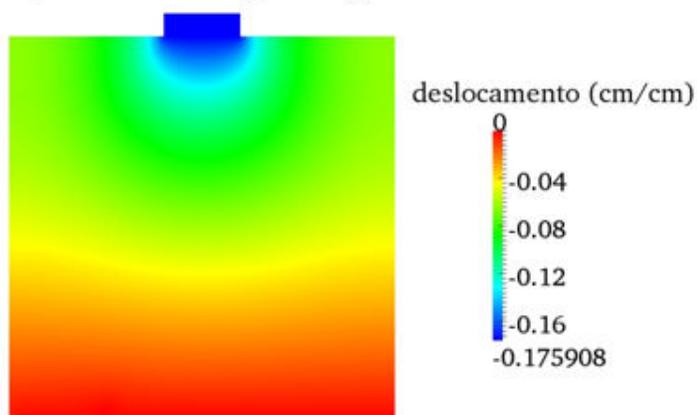
Fonte: Autoras (2014)

Na figura 36 são apresentados os deslocamentos no eixo X e Y.

Figura 36- Deslocamentos para carga máxima



a) Deslocamento para carga máxima no eixo X

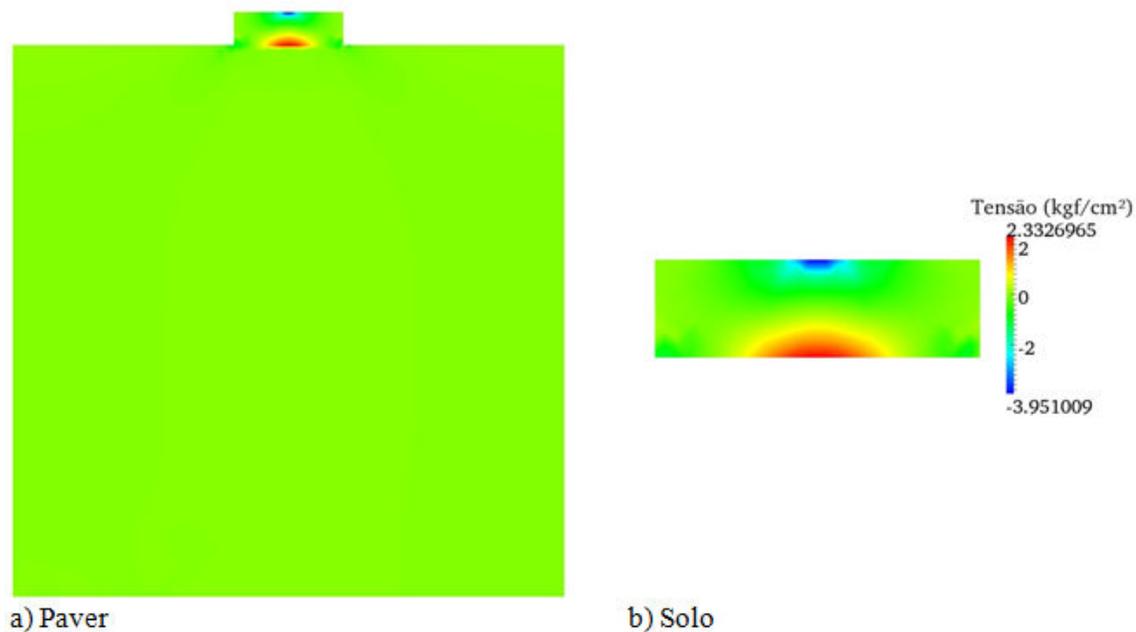


b) Deslocamento para carga máxima no eixo Y

Fonte: Autoras (2014)

Na figura 37 é apresentada a distribuição de tensão normal no eixo X para o paver e o solo.

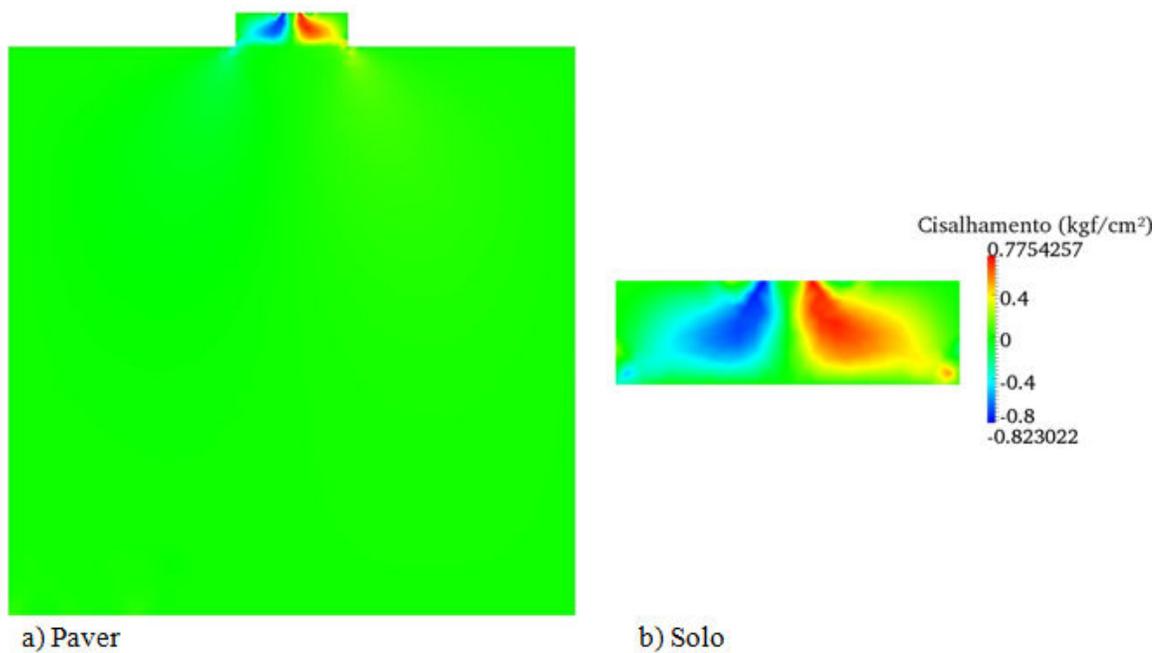
Figura 37- Tensões normal no eixo X



Fonte: Autoras (2014)

Na figura 38 é apresentada a distribuição de tensão de cisalhamento para o paver e o solo.

Figura 38- Tensões de cisalhamento



Fonte: Autoras (2014)

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo principal o desenvolvimento de um programa para análise de elementos de concreto submetidos a carregamentos cíclicos com tensão de tração baseado no Método dos Elementos Finitos. O programa desenvolvido inicialmente resolve o problema elástico em passos de acréscimo de carga e, ao atingir o comportamento anelástico passa a resolver o problema utilizando a variável do dano, reduzindo o módulo de elasticidade até a ruptura do material.

O trabalho é motivado por problemas de estruturas submetidas a carregamentos cíclicos como estruturas marítimas, pontes e viadutos, onde se mostra necessária a consideração da fadiga, considerando-se ainda que, com tendência atual por estruturas mais resistentes e esbeltas, é de grande importância a disponibilidade de códigos computacionais que sejam capazes de representar de maneira eficiente o comportamento mecânico do concreto nas mais diversas situações de carregamento.

Este estudo iniciou-se pelo estudo teórico do fenômeno de fadiga, tipos de estruturas sujeitas a fadiga e ações que a causam. Apresentou-se também o método das curvas S-N visto que este é o método mais utilizado para determinar a vida útil à fadiga de estruturas em geral.

A fim de compreender o comportamento do concreto perante a fadiga, são abordados os aspectos fundamentais da microestrutura do concreto e da formação de fissuras. Posteriormente, foi estudado o comportamento macroscópico do concreto submetido a carregamentos cíclicos.

Em seguida, foi realizado um estudo sobre a mecânica do dano contínuo, apresentando os principais conceitos e a formulação do modelo de dano isotrópico para carregamentos monotônicos e cíclicos empregada no presente trabalho.

Dedicou-se um capítulo à descrição do Método dos Elementos Finitos, formulação do método de Ritz e descrição de elementos finitos isoparamétricos. Por se tratar de um assunto vasto e com diversas abordagens, este estudo limitou-se a apresentar aspectos relevantes ao código computacional desenvolvido (DAMAGE2D).

O programa DAMAGE2D foi testado através de exemplos numéricos, e os resultados apresentados se mostraram coerentes com o comportamento citado na literatura.

Através dos exemplos apresentados, o programa DAMAGE2D demonstrou ser uma ferramenta eficiente para descrever o comportamento do concreto a carregamentos cíclicos sujeito a tensão de tração, apresentando ainda como vantagem a versatilidade na aplicação tanto de força quanto de deformações.

Entretanto, devido a complexidade do material concreto, o programa apresenta limitações quanto aos tipos de carregamentos aplicados, resposta perante microfissuras e ainda não pode ser aplicado em estruturas de concreto armado. Assim algumas sugestões são apresentadas para a continuidade desta pesquisa.

Dando continuidade ao estudo do concreto simples pode-se incorporar uma subrotina destinada a descrever o comportamento do concreto após abertura de fissuras, através da utilização da mecânica da fratura.

É possível adaptar o código para aplicação de carregamentos que gerem tensão compressão. Pode-se ainda aplicar carregamentos com inversão de sinal (tração e compressão), atentando para o ganho de rigidez com o fechamento de fissuras durante a inversão da sollicitação.

Outra sugestão é a implementação de um código para representar o comportamento do aço submetido a carregamentos cíclicos a fim de estudar o comportamento do concreto armado. Para tal, é importante além do comportamento de cada material, levar-se em consideração a interação entre concreto e armadura.

REFERÊNCIAS

AGUADO, A.; HEREI, A.; MARI, A. R.; OLIVEIRA, M.O.F & ROSELL, J.J. **El Comportamiento a Fatiga de Estructuras de Hormigon em Masa, Armado y Pretensado**. Escola Tècnica Superior D' Enginyers de Camins, Canal i Ports, Barcelona, 1990.

ALLICHE, A. Damage model for fatigue loading of concrete. **International Journal of Fatigue**, v. 25, p. 915-921, 2004.

ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica, e aplicação com emprego do método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. Energy Theorems and Structural Analysis. **Aircraft Engineering**, 1954-55, Reprinted by Butterworths, London, 1960.

ASSAN, A E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2007.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2003**. 3. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2012.

COMITE EURO-INTERNACIONAL DU BETON. Fatigue of Concrete Structures. **Bulletin D'Information**, n.188,1988.

DANTAS, J. P. R. **Investigação experimental da fadiga em lajes de pontes armadas com barras ou telas soldadas**. 151 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

DRIEMEIER, L. **Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitações cíclicas**. 166 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

FERNANDES, H. H. F. **Aplicação de um modelo de dano isotrópico escalar na análise de vigas parede de concreto armado**. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas e Construção Civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de São Brasília, Brasília, 2010.

GONÇALVES, R. **Análise de propagação de fissura por fadiga em concreto pelo MEF mediante a mecânica do dano contínuo**. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

GUELLO, G. A. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano**. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

HORDIJK, D. A. **Local approach to fatigue of concrete**. 216 f. Tese (Doutorado) – Technische Universiteit Delft, Delft, 1991.

HORDIJK, D. A.; REINHARDT, H. W. Numerical and Experimental Investigation into the Fatigue Behavior of Plain Concrete. **Experimental Mechanics**, Bethel, v. 33, p. 278-285, 1993.

LEMAITRE, J. How to use Damage Mechanics. **Nuclear Engineering and Design, Amsterdam**, v. 80, p.233-245, 1984.

LEMAITRE, J; CHABOCHE, J. **Mechanics of solids materials**. Cambridge: Cambridge University, 1990.

MANZOLI, O. L. Rate dependent effects in an isotropic damage constitutive model for concrete. **In: Internacional Center for Numerical Methods in Engineering – CIMNE**, Technical Report N° 126, Barcelona, 1994.

MANZOLI, O. L. **Um Modelo Analítico y Numérico para La Simulación de Discontinuidades Fuertes em la Mecánica de Sólidos**. Tese de Doutorado, Escola Tècnica Superior D'Enginyers de Camins, Canal i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.

MARIGO, J. J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoid. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 21, n.4, p. 861- 874, 1985.

MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure**. 288 f. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1984.

MAZO, J. C. **Proceedings of the Seventh International Congress on the Chemistry of Cements**, Vol 1, Editions Septima, Paris, 1980.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: estrutura, propriedades e materiais**. São Paulo: PINI, 1994.

MONTEZUMA, M. **Modelagem computacional da propagação de trincas**. 196 f. Dissertação (Mestrado) – Pós Graduação em Engenharia e Ciência dos Materiais, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2002.

NEVILLE, A. M. **Propriedades do concreto**. Tradução: Salvador E. Giammusso. 2. ed. São Paulo: PINI, 1997.

OLIVER, J.; CERVERA, M.; OLLER, S.; LUBLINER, J. **Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete**. In N. B. et. al., editor, SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Swansea, 1990.

ORTIZ, M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. **Mechanics of Materials**, North-Holland, v.4, n.4, p. 67-93, 1985.

PAPA, E.; MAIER, G. ; PROENÇA, S. P. B. **Meccanica del Danneggiamento di Materiali e Strutture: Applicazioni al Calcestruzzo**. Milano, Politecnico di Milano, 1991.

PITUBA, J. J. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. 151 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

RESENDE, L. **Constitutive Modelling and Finite Element Analysis in Geomechanics**. 1984, 444 f. PhD Thesis, University of Cape Town, Cape Town, 1984.

RODRIGUES, A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis**. 111 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2011.

SIMÓ, J.C.; JU, J. W. Strain and Stress-Based Continuum Damage Models – I. Formulation. **Int. J. Solid Structures**, Great Britain, v.23, n.7, p.821-840, 1987.

SUBRAMANIAM, K. V.; SHAH, S. P. Biaxial tension fatigue response of concrete. **Cement and concrete composites**. New York, v. 25, 2003, p. 617-623, 2003.

TEIXEIRA, R. **Metodologia de análise de fadiga em componentes estruturais de aço baseada na mecânica da fratura**. 106 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

TEPFERS, R. & KUTTI, T. Fatigue Strength of Plain, Ordinary and Lightweight Concrete. **ACI Journal**, p.635-652, Maio, 1979.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, J. L. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **J. Aeron. Sci.**, vol. 23, nº 9, pp. 805-823, 1956.

VAN MIER, J. G. M. **Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions**. 359 f. PhD Thesis, Eindhoven Technische University, Eindhoven, 1985.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method, v1: The Basis**. 5. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

ANEXOS

ANEXO A – Funções de forma para elemento finito QST

As funções de forma utilizadas neste estudo, para um elemento finito QST com 10 nós, descritas por Assan (2003), são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi_i (3\xi_i - 1)(3\xi_i - 2)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \xi_j (3\xi_j - 1)(3\xi_j - 2)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} \xi_k (3\xi_k - 1)(3\xi_k - 2)$$

$$\phi_4 = \frac{9}{2} \xi_i \xi_j (3\xi_i - 1)$$

$$\phi_5 = \frac{9}{2} \xi_i \xi_j (3\xi_j - 1)$$

$$\phi_6 = \frac{9}{2} \xi_j \xi_k (3\xi_j - 1)$$

$$\phi_7 = \frac{9}{2} \xi_j \xi_k (3\xi_k - 1)$$

$$\phi_8 = \frac{9}{2} \xi_k \xi_i (3\xi_k - 1)$$

$$\phi_9 = \frac{9}{2} \xi_k \xi_i (3\xi_i - 1)$$

$$\phi_{10} = 27 \xi_i \xi_j \xi_k$$