

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

VLADMIR APARECIDO FREIRE JUNIOR

CONTROLE QUANTIZADO H_∞ VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2014

VLADEMIR APARECIDO FREIRE JUNIOR

CONTROLE QUANTIZADO H_∞ VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Mestre em Engenharia Elétrica”.

Orientador: Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas

Co-orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

- F866 Freire Junior, Vlademir Aparecido
Controle quantizado H_{∞} via realimentação de estados / Vlademir Aparecido Freire Junior. – 2014.
59 f. : il. ; 30 cm
- Orientador: Alessandro do Nascimento Vargas.
Co-orientador: Cristiano Marcos Agulhari
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica. Cornélio Procópio, 2014.
Referências: p. 56-58.
1. Controle robusto. 2. Desigualdades matriciais. 3. Sistemas lineares invariantes no tempo. 4. Sistemas de controle por realimentação. 5. Engenharia elétrica – Dissertações. I. Vargas, Alessandro do Nascimento, orient. II. Agulhari, Cristiano Marcos, co-orient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD (22. ed.) 621.3



TERMO DE APROVAÇÃO

Controle quantizado \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados

por

Vlademir Aparecido Freire Junior

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Elétrica” e aprovado em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Cornélio Procópio, 23/05/2014.

Paulo Rogério Scalassara, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Alessandro do Nascimento Vargas, Prof. Dr.
Orientador

Cristiano Marcos Agulhari, Prof. Dr.
Co-orientador

João Yoshiyuki Ishihara, Prof. Dr.
Universidade de Brasília

Rodrigo Rodrigues Sumar, Prof. Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dedico esse trabalho a todos meus familiares, em especial a Renata Mascari pelo apoio, dedicação e a todos meus amigos que me acompanharam nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar ao meu lado me proporcionando saúde e disposição para alcançar meus objetivos.

Ao meu pai Vlademir Aparecido Freire, minha mãe Anny Loise Siqueira Alves Freire e minha irmã Beatriz Siqueira Alves Freire por sempre acreditarem que esse momento seria possível.

À Renata Mascari, pelo incentivo, ajuda e companheirismo demonstrado durante essa caminhada.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas, pela oportunidade, conselhos importantes e direcionamento para o término do mesmo.

Ao Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari meu co-orientador pela dedicação, disponibilidade, suporte e ensinamentos valiosos que contribuíram imensamente para conclusão deste trabalho.

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio, por disponibilizar um ambiente e ferramentas adequadas tornando possível a realização deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE), da UTFPR-CP.

A CAPES, pelo apoio financeiro expresso através de bolsa de estudo de demanda social.

E a todos colegas de turma e do CIPECA, em especial Paulo Broneira, Diony Almeida, Arthur Hirata, Lyvia Biagi, João Paulo de Almeida, Thiago Tonon, Victor Malvezzi, Clayton Graciola e Elmer Lévanho.

"A persistência é o menor caminho do êxito."

(Charles Chaplin)

RESUMO

FREIRE, Vlademir. **Controle quantizado \mathcal{H}_∞ via realimentação de estados**. 2014. 59 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

O objetivo desta dissertação é propor uma técnica para a síntese via realimentação de estados para sistemas lineares e invariantes no tempo, considerando que os estados realimentados são previamente quantizados. Para tanto, o erro de quantização é inicialmente modelado como um ruído externo. Assim, o problema de obter os ganhos de realimentação de estados, se torna um problema de projetar os ganhos que minimizem a norma \mathcal{H}_∞ do sistema controlado. Os ganhos de realimentação são calculados pela solução de um conjunto de condições descritas na forma de desigualdades matriciais lineares. A técnica é ilustrada pela aplicação da realimentação de estados quantizada em um servomecanismo.

Palavras-chave: Controle Quantizado. Norma \mathcal{H}_∞ . LMIs. Controle Robusto.

ABSTRACT

FREIRE, Vlademir. **Quantized \mathcal{H}_∞ control state feedback.** 2014. 59 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

The main objective of this dissertation is to propose a technique for synthesis by state-feedback for linear time-invariant systems, considering that the states are quantized before the feedback. To tackle such problem, the quantization error is initially modeled as an external noise. Therefore, the problem of getting the state-feedback gains, becomes a problem of designing the gains that minimize the \mathcal{H}_∞ norm of the system. The state-feedback gains are calculated by solving a set of conditions described in the form of linear matrix inequalities. The technique is illustrated by applying the of feedback of quantized states to a servo-mechanism.

Keywords: Quantized Control. \mathcal{H}_∞ Norm. LMIs. Robust Control.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Diagrama de blocos de um sistema com perturbação externa	21
FIGURA 2	– Representação de um quantizador em diagrama de blocos.	22
FIGURA 3	– Tipos de quantizadores. (a) Meio-piso. (b) Meio-degrau.	23
FIGURA 4	– Representação em blocos do teorema do pequeno ganho.	24
FIGURA 5	– Módulo Datapool Servo-Mecanismo.	31
FIGURA 6	– Diagrama funcional de controle do módulo servo-mecanismo.	32
FIGURA 7	– Sinais de malha aberta. (a) Velocidade angular. (b) Corrente do motor.	33
FIGURA 8	– Validação do modelo obtido	34
FIGURA 9	– Curva de identificação - Velocidade Angular.	35
FIGURA 10	– Curva de identificação - Corrente do motor.	35
FIGURA 11	– Diagrama de blocos do sistema com integrador.	36
FIGURA 12	– Placa de aquisição de sinais.	37
FIGURA 13	– Disposição dos autovalores do sistema inicial.	39
FIGURA 14	– Disposição dos autovalores de \tilde{A}_{cl} considerando σ .	40
FIGURA 15	– Curva de resposta da técnica proposta (Teorema 3.2), quantizada em 12-bits.	41
FIGURA 16	– Técnica proposta (Teorema 3.2), quantizada em 12-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.	41
FIGURA 17	– Curva de resposta da técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizada em 12-bits.	42
FIGURA 18	– Técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizada em 12-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.	42
FIGURA 19	– Curva de resposta do controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 10-bits.	43
FIGURA 20	– Controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 10-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.	43
FIGURA 21	– Curva de resposta do controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 10-bits.	44
FIGURA 22	– Controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 10-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.	44
FIGURA 23	– Curva de resposta do controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 8-bits.	45
FIGURA 24	– Controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 8-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.	45
FIGURA 25	– Curva de resposta do controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 8-bits.	46
FIGURA 26	– Controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 8-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.	46
FIGURA 27	– Curva de resposta do controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 6-bits.	47
FIGURA 28	– Controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 6-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.	47
FIGURA 29	– Curva de resposta do controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 6-bits.	48

FIGURA 30 – Controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 6-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.	48
FIGURA 31 – Controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 3-bits.	49
FIGURA 32 – Curva de resposta do controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 2-bits.	50
FIGURA 33 – Média e desvio padrão da técnica proposta para 100 realizações, quantizada em 12-bits.	51
FIGURA 34 – Média e desvio padrão da técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013) para 100 realizações, quantizada em 12-bits.	51
FIGURA 35 – Média e desvio padrão da técnica proposta para 100 realizações, quantizada em 6-bits.	52
FIGURA 36 – Média e desvio padrão da técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013) para 100 realizações, quantizada em 6-bits.	52

LISTA DE SIGLAS

LMI	<i>Linear Matrix Inequalities.</i>
LTI	<i>Linear Time-Invariant.</i>
NCS	<i>Networked Control Systems.</i>
SSEST	<i>Estimate State-Space Model.</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{G}	Planta do sistema
\star	Bloco simétrico nas LMIs
$\ A\ $	Norma de uma matriz A
A'	($'$), pós-posto de vetor ou de uma matriz, indica operação de transposição
$M < 0$	Matrizes definidas negativas
$M > 0$	Matrizes definidas positivas
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbf{I}	Matriz identidade de dimensão apropriada
ω	Velocidade angular
i	Corrente do motor
Δ	Tamanho do degrau de quantização
q	Quantizador artificial
L	Níveis de representação de um quantizador
N	Número de bits de um quantizador
w	Ruído externo
η	Bloco integrador
σ	Valor do deslocamento em relação ao eixo imaginário do plano complexo \mathbb{C}
z^*	Complexo conjugado da variável z
$\lambda_i(A)$	Autovalor de índice i de uma matriz A

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 OBJETIVOS	15
1.1.1 Objetivo Geral	15
1.1.2 Objetivos Específicos	15
1.2 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	15
2 CONCEITOS PRELIMINARES E DEFINIÇÕES	17
2.1 INTRODUÇÃO	17
2.2 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS EM ESPAÇO DE ESTADOS	17
2.3 ESTABILIDADE	17
2.4 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	20
2.5 NORMA H_∞	20
2.6 PROCESSO DE QUANTIZAÇÃO	22
2.6.1 Ruído de Quantização	23
2.7 TEOREMA DO PEQUENO GANHO	24
3 CONTROLE H_∞ ROBUSTO QUANTIZADO	25
3.1 INTRODUÇÃO	25
3.2 PRELIMINARES	25
3.3 RESULTADOS PRINCIPAIS	27
4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS	31
4.1 INTRODUÇÃO	31
4.2 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA	31
4.2.1 Descrição do Sistema	31
4.2.2 Identificação do Servo-Mecanismo	32
4.3 CONTROLE DO SERVO-MECANISMO	35
5 COMENTÁRIOS FINAIS	53
REFERÊNCIAS	55
APÊNDICE A – ALGORITMO MÉTODO DA BISSECÇÃO	58

1 INTRODUÇÃO

O projeto de controladores para um sistema de controle, em geral, consiste basicamente na síntese de um controlador e na avaliação de seu desempenho. Entre os possíveis objetivos na síntese de controladores, está a estabilização do sistema analisado de forma a satisfazer um conjunto de critérios de desempenho estabelecidos. Um dos critérios comumente considerados é garantir que o sistema seja robusto a ruídos externos; tal robustez pode ser medida, por exemplo, a partir da norma \mathcal{H}_∞ do sistema (OLIVEIRA, 2006; ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996).

Todo projeto de controle baseado na norma \mathcal{H}_∞ necessita de um modelo adotado pelo projetista. Um dos principais problemas que ocorrem na modelagem é falta de conhecimento dos valores de certas variáveis e parâmetros do sistema, ou mesmo de certos comportamentos que podem ser muito complexos para serem descritos de forma precisa (AGULHARI, 2013). Tais elementos são as incertezas dos sistemas, que podem ser classificadas como estruturadas, não estruturadas, paramétricas ou não paramétricas. Todo processo está sujeito a incertezas, como por exemplo: ruídos de sensores, rajadas de ventos, ondas ou correntezas. É de suma importância que as incertezas sejam levadas em conta na análise e projeto de controladores para sistemas. O problema de controle envolvendo a presença de incertezas, é classificado como Controle Robusto, e projetos que obtêm sucesso nessas questões dentro de certas especificações são chamados de robustos (GREEN; LIMEBEER, 2012; COLANERI; GEROMEL; LOCATELLI, 1997).

A robustez é um assunto que se faz muito presente em diversas áreas do conhecimento, como ciências físicas e engenharia, e há tempos é considerada um requisito indispensável em qualquer projeto de controladores de sistemas dinâmicos. A análise robusta e a síntese de controladores para sistemas lineares que dependem de parâmetros incertos são problemas importantes na teoria de controle, e têm atraído grande atenção por parte de pesquisadores da área (OLIVEIRA, 2006). Dentre as técnicas propostas para abordar tais problemas, é importante destacar a Teoria de Lyapunov, que pode certificar a estabilidade em todo o domínio de incertezas. Tal ferramenta é vastamente utilizada na análise de desempenho e síntese de controladores robustos, por permitir que o problema seja tratado de forma convexa, utilizando, por exemplo, Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* (LMIs)) (BOYD et al., 1994). Pode-se dizer que modelar um problema na forma de LMIs equivale a resolver o problema se o mesmo for factível, graças aos resolvidores de convergência global disponíveis livremente como, por exemplo, o SeDuMi (STURM, 1999) juntamente com interpretador Yalmip (LÖFBERG, 2004).

Uma aplicação prática que apresenta problemas com incertezas, são os sistemas de controle via redes (em inglês, *Networked Control Systems (NCS)*), que são sistemas cujos sensores e atuadores se comunicam com os controladores por meio de uma conexão de rede. Em geral, os sistemas a serem controlados são analógicos e deseja-se implementar estratégias digitais, então as informações adquiridas pelo controlador devem ser digitalizadas antes de serem processadas. Um passo necessário para o processo de digitalização é a etapa de quantização, que restringe um conjunto de valores reais para um conjunto discreto e finito de representação (FRANKLIN; POWELL; WORKMAN, 1998). Há, portanto, uma diferença entre o valor de uma grandeza de um sistema e seu valor de quantização considerado pelo controlador. Caso essa diferença, chamada de erro de quantização, seja muito significativa, o desempenho do sistema pode ser consideravelmente prejudicado, podendo até mesmo tornar o sistema instável (OPPENHEIM; SCHAFER, 2010). Vários estudos na literatura especializada apresentam resultados que buscam a taxa mínima de bits necessária para garantir a estabilidade de sistemas, envolvendo os atrasos de comunicação e erros de quantização (WONG; BROCKETT, 1999; LING; LEMMON, 2005; HESPANHA; NAGHSHTABRIZI; XU, 2007; ELIA; MITTER, 2001; ZHANG; BRANICKY; PHILLIPS, 2001; ZHANG; ZHONG; WEI, 2008).

Já Liu, Wang e Ni (2013) apresentam um técnica de controle baseada em LMIs considerando os efeitos de quantização a partir de um quantizador do tipo uniforme, com objetivo de minimizar os efeitos da quantização no controle. Tal técnica, no entanto, não conta com nenhum procedimento de otimização para garantir o desempenho do sistema, garantindo somente a estabilidade interna do mesmo. Em Hsieh (2003) e Tao, Joshi e Ma (2001) técnicas são apresentadas para manter a estabilidade e o desempenho de sistemas em malha fechada. No entanto, a quantização dos sinais de controle muitas vezes é ignorado no projeto de controladores, resultando em relativamente poucos trabalhos que consideram realmente os efeitos da quantização em sistemas de controle. Por outro lado, grande parte dos resultados sobre realimentação quantizada limitam-se a problemas de estabilização, enquanto a performance do controle não é abordada (FU; XIE, 2005; GAO; CHEN; LAM, 2008). Em Wen e Yang (2009), Zhu e Yang (2009), Zhao e Ye (2011) são apresentadas técnicas utilizando desigualdades matriciais lineares com a minimização da norma \mathcal{H}_∞ para minimizar os efeitos causados pela quantização, porém, propõem LMIs que apresentam condições com grande quantidade de variáveis para solução do problema.

O método proposto neste trabalho sintetiza um controlador robusto a partir da realimentação de estados quantizados, utilizando técnicas baseadas em LMIs. Em primeiro lugar, o efeito causado pela utilização dos estados quantizados no controlador é modelado pela inserção de um ruído externo no sistema. Em segundo lugar, é proposta uma técnica,

utilizando controle \mathcal{H}_∞ e baseado em LMIs, que minimiza os efeitos da quantização no controle com realimentação de estados. Experimentos em um sistema prático ilustram as vantagens da técnica de controle proposta.

O presente trabalho apresenta uma condição que atenda o controle de velocidade de um servo-mecanismo com menor nível de complexidade que mantenha o sistema robusto aos efeitos causados pela quantização. A vantagem imediata desta técnica é sua relativa facilidade de aplicação, e a norma \mathcal{H}_∞ pode ser diretamente relacionada com o número de bits de quantização que podem ser usados garantindo a estabilidade do sistema.

1.1 OBJETIVOS

Os principais objetivos desta dissertação são apresentados a seguir:

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho consiste em desenvolver uma técnica baseada em LMIs para sintetizar leis de controle por realimentação de estados quantizados para sistemas lineares e invariantes no tempo. A técnica é ilustrada em um módulo servo-mecanismo.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos se dividem na seguinte forma:

- Variar os valores da quantização dos sinais do sistema;
- Modelar o erro de quantização como um ruído externo do sistema em malha fechada;
- Gerar condições LMIs que realizem a síntese de ganhos estabilizantes de realimentação de estados quantizados;
- Obter os ganhos robustos de realimentação de estados do sistema quantizado;
- Ilustrar o controle proposto em um módulo didático servo-mecanismo.

1.2 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 2:** é apresentada uma revisão de conceitos e definições relevantes, como a representação de um sistema em espaço de estados, estabilidade, desigualdades

matriciais lineares, norma \mathcal{H}_∞ , quantização, erro de quantização e teorema do pequeno ganho.

- **Capítulo 3:** é apresentada a função que modela o quantizador, e são descritas as condições de síntese propostas do controlador com realimentação de estados, robusto ao ruído de quantização;
- **Capítulo 4:** descreve o procedimento de identificação do módulo servo-mecanismo considerando como variáveis de estados a velocidade angular e a corrente de armadura do motor, bem como, experimentos para ilustrar o desempenho da técnica proposta comparada com a técnica de controle apresentada em (LIU; WANG; NI, 2013).
- **Capítulo 5:** são apresentadas as discussões finais referentes ao trabalho.

2 CONCEITOS PRELIMINARES E DEFINIÇÕES

2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é dedicado à apresentação de conceitos e definições essenciais relativos à estabilidade de sistemas lineares, desigualdades matriciais lineares, índice de desempenho dado pela norma \mathcal{H}_∞ , processo de quantização e teorema do pequeno ganho, os quais são fundamentais para o desenvolvimento do presente trabalho.

2.2 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS EM ESPAÇO DE ESTADOS

Um modelo linear típico em espaço de estados para sistemas lineares e invariantes no tempo (em inglês, *Linear Time-Invariant* (LTI)), de ordem n , com p sinais de entrada e q sinais de saída, tem a seguinte forma (CHEN, 2009):

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (2)$$

Nas equações de estados (1) e (2), tem-se:

$x(t)$ - Vetor de estados ($n \times 1$);

$u(t)$ - Vetor de sinais de entrada ($p \times 1$);

$y(t)$ - Vetor de sinais de saída ($q \times 1$);

A - Matriz de dinâmica ($n \times n$);

B - Matriz de entrada ($n \times p$);

C - Matriz de saída ($q \times n$);

D - Matriz de transmissão direta ($q \times p$), (em muitos casos a matriz D é nula);

2.3 ESTABILIDADE

Esta seção apresenta os critérios para análise de estabilidade no sentido de Lyapunov para sistemas LTI, apresentando inicialmente conceitos sobre pontos de equilíbrio e estabilidade assintótica (KHALIL, 2002). Considere o sistema representado por

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3)$$

A seguir, será apresentada a definição de estabilidade no sentido de Lyapunov.

Definição 2.1 *A resposta à entrada nula de (3) é marginalmente estável ou estável no sentido de Lyapunov se, a resposta é limitada para toda possível condição inicial x_0 finita, e é assintoticamente estável se, para toda possível condição inicial finita, a resposta é limitada e tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.*

Teorema 2.1 (CHEN, 2009)

1. *O sistema (3) é marginalmente estável ou estável no sentido de Lyapunov se e somente se todos os autovalores de A têm parte real igual a zero ou negativa, e se aqueles que têm parte real igual a zero são raízes de multiplicidade 1 do polinômio mínimo de A .*
2. *A equação (3) é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A têm parte real negativa.*

Outra forma de verificar a estabilidade de sistemas dinâmicos consiste em utilizar o teorema de Lyapunov, que avalia a estabilidade de sistemas por meio de funções conhecidas como funções de Lyapunov (SASTRY, 2010; VIDYASAGAR, 1993).

Proposição 2.1 (KHALIL, 2002) *Para todo sistema LTI assintoticamente estável existe uma função de Lyapunov que satisfaz as seguintes condições:*

$$v(x(t)) > 0, \quad \forall x(t) \neq 0, \quad (4)$$

$$\frac{dv}{dt}(x(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq 0. \quad (5)$$

Assim, a determinação da estabilidade de um sistema pode ser modelada como a busca de uma função que satisfaça as condições (4) e (5).

Proposição 2.2 (BOYD et al., 1994) *A estabilidade de sistemas LTI pode ser verificada por meio de uma função de Lyapunov quadrática comum, isto é, existe uma função dada por*

$$v(x(t)) = x(t)'Px(t), \quad P = P', \quad (6)$$

tal que as condições (4) e (5) são satisfeitas.

Utilizando o Teorema 2.2, as condições (4) e (5) da Proposição 2.1 se tornam, respectivamente, em

$$x(t)'Px(t) > 0, \quad \forall x(t) \neq 0, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

$$x(t)'(A'P + PA)x(t) < 0. \quad (8)$$

A condição (7) equivale verificar se a matriz P é definida positiva, ou seja, se $P > 0$. Com isso, tem-se o teorema a seguir.

Proposição 2.3 (BOYD et al., 1994) *O sistema LTI (3), é assintoticamente estável se, e somente se, existir $P = P' > 0$ tal que*

$$A'P + PA < 0. \quad (9)$$

A condição(9) é uma desigualdade matricial linear, cujas principais características são descritas a seguir.

o seguinte corolário apresenta uma condição para determinar a região na qual deseja-se alocar os autovalores da matriz A no semiplano esquerdo do plano complexo \mathbb{C} .

Corolário 2.1 (BOYD et al., 1994) *Seja $\sigma > 0$ um escalar predefinido. Se existir uma matriz, $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida tal que*

$$(A + \sigma \mathbf{I})'P + P(A + \sigma \mathbf{I}) < 0. \quad (10)$$

então a parte real de todos autovalores da matriz A são menores que $-\sigma$.

Demonstração: Sendo $\sigma > 0$ um escalar predefinido, tal que

$$\text{Re}\{\lambda_i(A + \sigma)\} < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

temos que

$$\text{Re}\{\lambda_i(A)\} < -\sigma, \quad (12)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\lambda_i(A + \sigma)\} < 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \Downarrow \\ \exists P = P' > 0 : (A + \sigma \mathbf{I})'P + P(A + \sigma \mathbf{I}) < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Garantindo que a parte real de todos autovalores da matriz A serão menores que $-\sigma$.

■

2.4 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

As desigualdades matriciais lineares (LMIs) têm sido muito utilizadas nas últimas décadas na solução de uma grande variedade de problemas de otimização, que surgem na teoria de sistemas e controle. A convexidade das LMIs permitem o uso de uma grande variedade de ferramentas computacionais de otimização convexa, que a cada dia são mais eficientes (STURM, 1999; LÖFBERG, 2004), o que justifica o grande interesse e crescimento na sua utilização (BOYD et al., 1994; GHAOUJ; NICULESCU, 2000).

Genericamente, toda LMI pode ser escrita na forma (BOYD et al., 1994)

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0, \quad (14)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ as variáveis do problema e $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes conhecidas. A LMI (14) é uma condição convexa em x , ou seja, o conjunto $\{x | F(x) > 0\}$ é convexo. A desigualdade (14) pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em x , tais como desigualdades lineares, desigualdades quadráticas, desigualdades na forma matricial e restrições utilizadas em teoria de controle. Maiores detalhes podem ser obtidos em Oliveira e Peres (2007), Gahinet, Apkarian e Chilali (1996), Dullerud e Paganini (2010).

A seguir é apresentado o complemento de *Schur*, utilizado na presente dissertação para manipulação das LMIs.

Lema 2.1 (*Complemento de Schur*) (OSTERTAG, 2011) *Sejam três matrizes Q , R e S com dimensões apropriadas, sendo $Q = Q'$ e $R = R'$. A condição*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0, \quad (15)$$

é equivalente a

$$\begin{cases} R > 0, \\ Q - SR^{-1}S' > 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} Q > 0, \\ R - S'Q^{-1}S > 0. \end{cases} \quad (16)$$

2.5 NORMA \mathcal{H}_∞

Um dos propósitos mais importantes da teoria de controle é a busca por atender certas especificações de desempenho e a norma \mathcal{H}_∞ surge como uma solução para tais problemas. A norma \mathcal{H}_∞ alcançou um grande nível de importância dentro da teoria de controle robusto principalmente em função do sucesso de sua aplicabilidade como um índice de desempenho na presença de incertezas para a análise e síntese de controle



Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema de controle com perturbação externa.

Fonte: Adaptado de (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

sistemas lineares invariantes no tempo (OLIVEIRA, 2006; DOYLE et al., 1989). A Figura 1 ilustra um sistema \mathcal{G} sob a ação de uma perturbação externa.

Considere que o sistema que descreve a Figura 1 é dado por

$$\mathcal{G}(t) = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + B_w w(t), \\ z(t) = Cx(t) + D_w w(t), \end{cases} \quad (17)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ a entrada exógena e $z(t) \in \mathbb{R}^d$ a saída controlada.

Definição 2.2 (KHALIL, 2002) $L_2[0, \infty)$ é um espaço Hilbert de uma função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L_2} = \int_0^{\infty} u(t)' v(t) dt, \quad (18)$$

no qual a norma $L_2[0, \infty)$ é dada por

$$\|u\|_{L_2} = \left(\int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Definição 2.3 (Norma \mathcal{H}_∞) A norma \mathcal{H}_∞ do sistema (17) é o valor supremo da relação entre a energia dos sinais de saída $z(t)$ e de entrada $w(t)$, para todo $w(t)$ de energia limitada, ou seja

$$\|\mathcal{G}(t)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}. \quad (20)$$

O seguinte lema, conhecido por *Bounded Real Lemma*, apresenta uma condição para o cálculo do limitante da norma \mathcal{H}_∞ para um dado sistema.

Lema 2.2 (*Bounded Real Lemma*) (BOYD et al., 1994): O sistema (17) é assintoticamente estável e a norma \mathcal{H}_∞ é menor que um escalar $\gamma > 0$ se, e somente se, existir uma matriz

$P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB_w + C'D_w \\ B_w'P + D_w'C & D_w'D_w - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

Aplicando o Lema 2.1, obtém-se o seguinte resultado equivalente,

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB_w & C' \\ * & -\gamma^2 I & D_w' \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

2.6 PROCESSO DE QUANTIZAÇÃO

O processo de conversão de um sinal no tempo contínuo para um sinal digital, expressando cada amostra utilizando uma quantidade finita de dígitos, é chamado de quantização (PROAKIS; MANOLAKIS, 2007). De acordo com Haykin e Moher (2011), um sinal contínuo pode ser aproximado por um sinal construído com amplitudes discretas, selecionadas de um conjunto disponível, com base em um critério de erro mínimo.

Um quantizador é um processo não-linear e não-reversível que transforma uma sequência de entrada $x[n]$, com um intervalo contínuo de amplitudes, em uma sequência $\hat{x}[n]$, sendo que cada valor pertence a um conjunto finito de possíveis níveis (OPPENHEIM; SCHAFER, 2010). Essa operação é apresentada como

$$\hat{x}[n] = q[x[n]], \quad (23)$$

sendo $\hat{x}[n]$ a sequência quantizada. O processo de quantização, representado em diagrama de blocos, é ilustrado por meio da Figura 2.

Os quantizadores podem ser do tipo uniforme (linear), em que a distância entre todos os níveis de reconstrução do sinal são iguais, e não-uniforme (não-linear). Conforme Sayood (2012), o tipo mais simples de quantizador é o quantizador uniforme, o qual é utilizado neste trabalho. Os quantizadores uniformes podem ser do tipo meio-piso (do inglês *midtread*), que recebe este nome pois a origem está no meio do degrau, ou meio-degrau (do inglês *midrise*), em que a origem está no meio da subida do degrau.

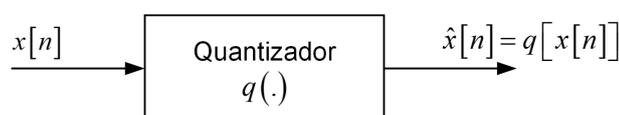


Figura 2 – Representação de um quantizador em diagrama de blocos.
Fonte: (OPPENHEIM; SCHAFER, 2010)

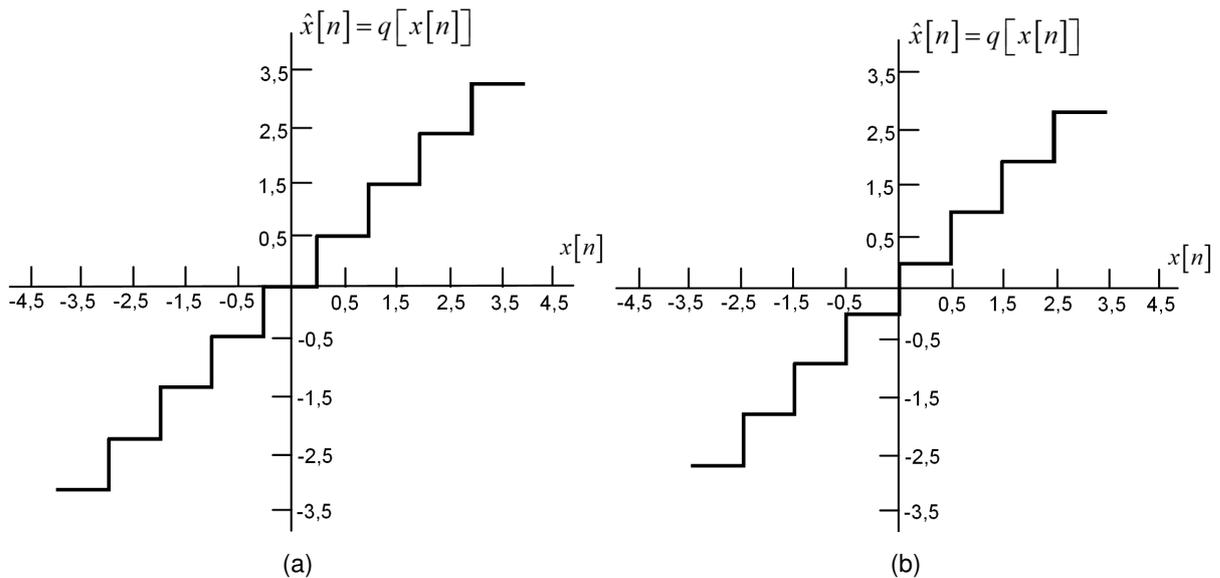


Figura 3 – Tipos de quantizadores. (a) Meio-piso. (b) Meio-degrau.
Fonte: Adaptado de Sayood (2012).

Note que os dois tipos de quantizadores uniformes, ilustrados na Figura 3, são simétricos com relação à origem (HAYKIN; MOHER, 2007).

Se a entrada do quantizador for limitada por

$$|x[n]| \leq X_{\max}, \quad (24)$$

sendo X_{\max} o maior valor de representação do sinal de entrada, então a resolução Δ do quantizador é calculada por, (HAYES, 2006)

$$\Delta = \frac{X_{\max}}{2^N}, \quad (25)$$

sendo N o número de bits por amostra utilizado na construção do código binário. Portanto, o número total de níveis de representação de um quantizador é dado por

$$L = 2^N. \quad (26)$$

2.6.1 Ruído de Quantização

A utilização da quantização introduz um erro $e[n]$, chamado de erro de quantização, definido pela diferença entre o valor atual do sinal de entrada e o valor quantizado, e dado por

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n], \quad (27)$$

note que o erro de quantização é limitado por

$$-\frac{\Delta}{2} < e[n] < \frac{\Delta}{2}. \quad (28)$$

2.7 TEOREMA DO PEQUENO GANHO

O teorema do pequeno ganho desempenha um papel importante na teoria de controle robusto, para sistemas afetados por ruídos e limitações externas, pois determina condições que a energia do ruído externo deve satisfazer para que a estabilidade de um certo sistema não seja afetada.

Teorema 2.2 (*Teorema do Pequeno Ganho*) (GREEN; LIMBEER, 2012) *Considere o sistema \mathcal{G} e o ruído externo δ ilustrados na Figura 4, supondo que \mathcal{G} é internamente estável, conforme Teorema 2.1, se as normas de \mathcal{G} e δ são, tais que*

$$\|\delta\|_{\infty} \|\mathcal{G}\|_{\infty} < 1, \quad (29)$$

então o sistema \mathcal{G} permanece estável mesmo com a presença do ruído externo δ .

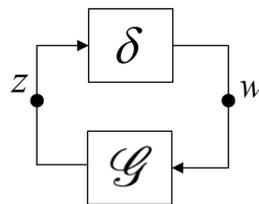


Figura 4 – Representação em blocos do teorema do pequeno ganho.

Fonte: Adaptado de (GREEN; LIMBEER, 2012)

3 CONTROLE \mathcal{H}_∞ ROBUSTO QUANTIZADO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a função que modela o quantizador (23) e que possibilita a análise dos efeitos das variações dos níveis de quantização. São também apresentadas as condições de síntese propostas do controlador com realimentação de estados, robusto ao ruído de quantização. Para a síntese, propõe-se uma estratégia baseada em LMIs, na qual o ruído de quantização é modelado como um ruído externo ao sistema, e o controlador projetado deve ser capaz de estabilizar o sistema independentemente do nível de ruído aplicado. Como o ruído é limitado em amplitude, tal problema pode ser resolvido pela minimização da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada.

3.2 PRELIMINARES

A principal contribuição deste trabalho consiste na estabilização do sistema (1) garantido seu desempenho a partir de critérios pré-estabelecidos, bem como, obter o menor número de bits o qual mantenha-o estável usando uma ação de controle com realimentação de estados quantizados. Deseja-se portanto, calcular os ganhos de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que a ação de controle

$$u(t) = K\Delta q(x(t)), \quad (30)$$

estabilize assintoticamente o sistema, sendo Δ o tamanho do degrau de quantização uniforme do quantizador $q(x(t))$, definido como

$$q(x(t)) = \begin{cases} 0, & \text{se } \left\lfloor \frac{x(t)}{\Delta} \right\rfloor < 1 \\ \Delta \left(\left\lfloor \frac{x(t)}{\Delta} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (31)$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota o maior inteiro, menor que $x(t)/\Delta$.

A aplicação da ação de controle $u(t)$ no sistema (1) resulta em

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + BK\Delta q(x(t)). \quad (32)$$

Considerando o erro de quantização $w(x(t))$ dado por

$$w(x(t)) = x(t) - \Delta q(x(t)), \quad (33)$$

o sistema pode ser reescrito como

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{(A + BK)}_{A_{cl}} x(t) - \underbrace{BK}_{B_{cl}} w(x(t)). \quad (34)$$

A seguir será demonstrado que o ruído externo do sistema $w(x(t))$ pertence ao espaço L_2 conforme a Definição 2.2, garantindo a existência da norma \mathcal{H}_∞ . Como hipótese, suponha que o sistema (34) seja internamente estável conforme apresentado no Teorema 2.1, ou seja,

$$\operatorname{Re} \{ \lambda_i(A_{cl}) \} < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (35)$$

Dessa forma, os estados de sistema possuem uma taxa de decaimento exponencial, ou seja,

$$|x(t)|^2 \leq \beta_1 e^{-\lambda_1 t}. \quad (36)$$

Como $q(x(t))$ consiste na operação de quantização dos estados $x(t)$, então

$$q(x(t)) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x(t) \rightarrow 0 \quad \forall t > 0, \quad (37)$$

Portanto,

$$|w(x(t))|^2 = |x - q|^2 \leq |x|^2 + |q|^2 \leq \beta_2 e^{-\lambda_2 t} + \beta_3 e^{-\lambda_3 t}, \quad (38)$$

sendo os valores de β_i e λ_i constantes definidas positivas.

Note que $|w(x(t))| \leq \Delta/2$ para todo $x(t)$. Assim, o sistema em malha fechada (34) pode ser visto como um LTI afetado por um ruído externo $w(x(t))$ limitado em norma. Considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_{cl}x(t) - B_{cl}w(x(t)) \\ z(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (39)$$

sendo $z(t) \in \mathbb{R}^d$ a saída controlada e $C \in \mathbb{R}^{d \times n}$ a matriz de observação. Segundo Boyd et al. (1994), a estabilidade de (39) torna-se robusta ao ruído externo $w(x(t))$ se a norma \mathcal{H}_∞ do sistema for minimizada. Como $|w(x(t))| < \Delta/2$, isto significa que a redução da norma \mathcal{H}_∞ garante a estabilidade do sistema para maiores valores de Δ , permitindo, portanto, que se utilize um menor número de bits na quantização.

O cálculo de um limitante superior γ da norma \mathcal{H}_∞ de (39), pode ser realizado pela

utilização de (39) na condição LMI apresentada no Lema 2.2, que resulta na condição

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB_w & C' \\ * & -\gamma^2 I & D'_w \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (40)$$

O valor mínimo para γ pode ser calculado resolvendo o seguinte problema de otimização

$$\gamma^* = \min \gamma \text{ s.a. (40)}. \quad (41)$$

Nos problemas de síntese \mathcal{H}_∞ com realimentação de estados sem quantização, apenas a matriz A_{cl} é dependente do ganho de realimentação de estados K , e simples manipulações utilizando as LMIs podem ser feitas para derivar a condição convexa que possibilita sua obtenção. Entretanto, pelo sistema (34), é possível ver que, ao utilizar estados quantizados na realimentação, ambas as matrizes A_{cl} e B_{cl} dependem do ganho K , assim a condição (40) se torna uma condição não-convexa devido o surgimento de multiplicações entre variáveis, o que dificulta a resolução de (41).

3.3 RESULTADOS PRINCIPAIS

O seguinte teorema apresenta uma condição suficiente para o cálculo dos ganhos de realimentação de estados para o sistema (39), tal que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada seja limitada por um escalar γ predefinido.

Teorema 3.1 *Se existir uma matriz $W = W' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um escalar $\gamma > 0$ tal que a LMI*

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B' + BZ & -BZ & WC' \\ * & I - 2\gamma W & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (42)$$

é verificada, então a ação de controle $u(t) = K\Delta q(x(t))$, com $K = ZW^{-1}$, estabiliza o sistema (39) com uma norma \mathcal{H}_∞ limitada por γ .

Demonstração: Aplicando as matrizes de malha fechada do sistema (39) na condição (40), e depois aplicando o Lema 2.1, tem-se

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + K'B'P + PBK & -PBK & C' \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (43)$$

Multiplicando (43) à esquerda por T e à direita pela sua transposta, sendo

$$T = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B' + BZ & -BZ & WC' \\ * & -\gamma^2 W^2 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (45)$$

com $W = P^{-1}$.

Com intuito de linearizar a desigualdade (45), note que

$$(\mathbf{I} - \gamma W)' (\mathbf{I} - \gamma W) \geq 0, \quad (46)$$

o que implica que

$$-\gamma^2 W^2 \leq \mathbf{I} - 2\gamma W. \quad (47)$$

Portanto, a matriz em (45) é limitada superiormente por

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B' + BZ & -BZ & WC' \\ * & \mathbf{I} - 2\gamma W & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Consequentemente, se (48) for definida negativa, então a condição (45) é satisfeita, garantindo a verificação da desigualdade (40). Segundo o Lema 2.2, isto significa que o sistema em malha fechada com $u(t) = K\Delta q(x(t))$ é assintoticamente estável e possui norma \mathcal{H}_∞ menor que γ . ■

Note que a condição (48) não é convexa, devido a multiplicação de γ e W , as quais são variáveis da condição presentes no bloco 2×2 da mesma. Porém, se γ for um valor escalar predefinido, então a condição torna-se convexa. Entranto, pode-se obter o valor ótimo de γ através de métodos de otimização não-convexos, como o método da bissecção utilizado neste trabalho (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 2013; BURDEN; FAIRES, 2011). O algoritmo utilizado para tal minimização é apresentado no Apêndice A.

Portanto, se é desejado que o sistema em malha fechada, resultante da aplicação dos ganhos de realimentação de estados obtido através do Teorema 3.1, tenham os auto-

valores com parte real menor que um valor predefinido, pode-se usar o seguinte teorema.

Teorema 3.2 Para um dado escalar $\sigma > 0$, se existir uma matriz $W = W' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um escalar $\gamma > 0$ tal que a LMI

$$\begin{bmatrix} W(A + \sigma \mathbf{I})' + (A + \sigma \mathbf{I})W + Z'B' + BZ & -BZ & WC' \\ * & \mathbf{I} - 2\gamma W & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (49)$$

é verificada, então a ação de controle $u(t) = K\Delta q(x(t))$, com $K = ZW^{-1}$, estabiliza o sistema (39) com uma norma \mathcal{H}_∞ limitada por γ e com a parte real dos autovalores da matriz A de malha fechada menores que $-\sigma$.

Demonstração: A condição é obtida pela aplicação das mesmas manipulações matemáticas aplicadas no Teorema 3.1, utilizando o Corolário 2.1 considerando σ como uma restrição da condição (49). ■

O seguinte corolário apresenta uma condição para o cálculo do menor valor de bits de quantização que garantam a estabilidade do sistema (39).

Corolário 3.1 Se o número N de bits do quantizador (31) for tal que

$$N > \log_2 \left(\frac{V_{\max} \gamma}{2} \right) \quad (50)$$

sendo V_{\max} o valor máximo de saída do quantizador, então o sistema em malha fechada (39), juntamente com os ganhos de realimentação de estados do Teorema 2.2, permanece estável se (50) for satisfeita.

Demonstração: Substituindo δ e \mathcal{G} em (29) por, respectivamente, w e γ , tem-se

$$\|w\| \gamma < 1 \quad (51)$$

sendo $\|w\| < \Delta/2$, conforme (28), temos

$$\frac{\Delta}{2} \gamma < 1 \Rightarrow \Delta < \frac{2}{\gamma}. \quad (52)$$

O valor de Δ é calculado por

$$\Delta = \frac{V_{\max}}{2^N}. \quad (53)$$

Substituindo (53) em (52), chega-se na seguinte condição

$$N > \log_2 \left(\frac{V_{\max} \gamma}{2} \right). \quad (54)$$

Tornando possível obter o menor valor de bits o qual garanta a estabilidade do sistema. ■

O seguinte teorema apresenta a técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013) para obtenção dos ganhos de estabilização do sistema, a qual foi utilizada para comparação com a técnica proposta na presente dissertação, aplicando o Corolário 2.1 considerando σ como uma restrição da condição (55).

Teorema 3.3 (LIU; WANG; NI, 2013) *O sistema (39) é internamente estável se, existirem matrizes $X > 0$ e Y e uma constante $\varepsilon > 0$ tal que a seguinte LMI é satisfeita:*

$$\begin{bmatrix} X^T(A + \sigma\mathbf{I})^T + (A + \sigma\mathbf{I})X + Y^T B^T + BY & \varepsilon^{-1}\mathbf{I} & 0 \\ * & -\varepsilon^{-1}\mathbf{I} & 0 \\ * & * & -\varepsilon^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (55)$$

A demonstração pode ser encontrada em (LIU; WANG; NI, 2013). Note que, é possível reescrever (55) como

$$\begin{bmatrix} X^T(A + \sigma\mathbf{I})^T + (A + \sigma\mathbf{I})X + Y^T B^T + BY & \varepsilon^{-1}\mathbf{I} \\ * & -\varepsilon^{-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (56)$$

através da resolução de (56) obtém-se os ganhos de realimentação de estados.

Conforme o Lema 1 apresentado em (LIU; WANG; NI, 2013), o sistema é estável se a seguinte condição for satisfeita

$$W > (3 + e^{\|A\|T_s})\Delta, \quad (57)$$

onde W é um valor real positivo e T_s o período amostral. Para utilização da condição (57) no presente trabalho foi necessário uma adaptação que resultou em

$$V_{\max} > (3 + e^{\|A\|T_s}) \frac{V_{\max}}{2^N}, \quad (58)$$

que resulta em

$$N > \log_2(3 + e^{\|A\|T_s}), \quad (59)$$

e assim, é possível obter o menor número de bits para o qual o sistema se mantenha estável.

4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

4.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar a utilização dos resultados teóricos obtidos no Capítulo 3 aplicado em um sistema prático, que é um módulo didático servomecanismo. Inicialmente, é apresentado o procedimento de identificação do sistema para obtenção do modelo na representação por espaços de estados, que, por sua vez, possibilita a utilização da técnica proposta. São apresentados também os experimentos práticos realizados com diferentes níveis de quantização, juntamente com menor valor de bits o qual o mesmo mantenha-se estável, comparando a técnica proposta com a técnica apresentada por (LIU; WANG; NI, 2013). Por fim, é realizada uma análise de desempenho através da média e desvio padrão de ambas as técnicas.

4.2 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

Na identificação de sistemas, propõe-se a obtenção de um modelo matemático que represente o sistema de interesse, pelo menos em parte e de forma aproximada, a relação de causa e efeito presente nos dados extraídos da dinâmica do sistema. Define-se que um modelo é a relação em que as variáveis de interesse de um processo se relacionam entre si e que a complexidade de um modelo depende de sua utilização (AGUIRRE, 2007).

4.2.1 Descrição do Sistema

O sistema utilizado no presente trabalho é um módulo servo-mecanismo desenvolvido pela Datapool Eletrônica Ltda, modelo 2208, conforme ilustrado na Figura 5.

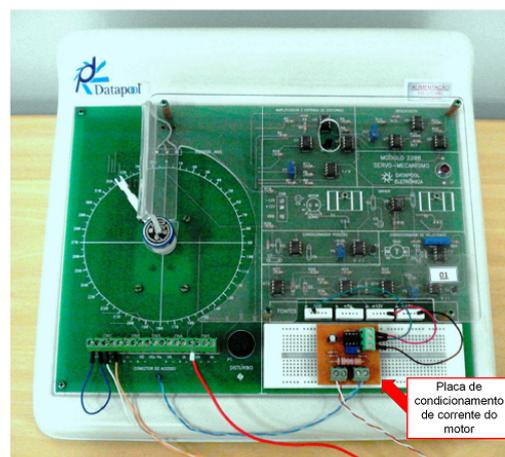


Figura 5 – Módulo Datapool Servo-Mecanismo.

Fonte: Autoria própria.

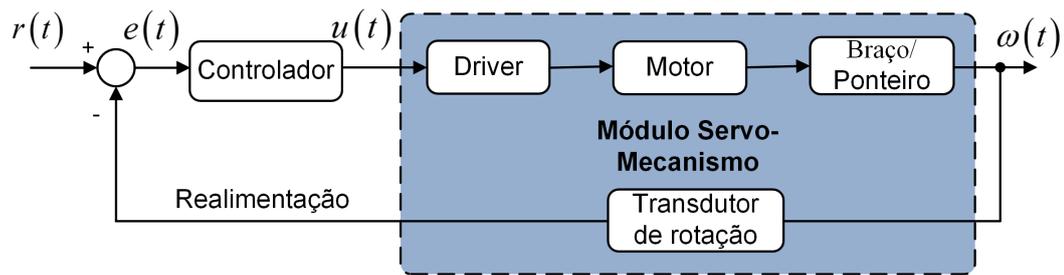


Figura 6 – Diagrama funcional de controle do módulo servo-mecanismo.

Fonte: Autoria própria.

O módulo é constituído por um servo-potenciômetro como transdutor de deslocamento angular. Para a aferição da rotação utiliza-se um tacômetro, que fornece um sinal de tensão proporcional à velocidade angular (rad/s). O mesmo possui também um servomotor de corrente contínua de imã permanente acoplado a um conjunto mecânico, que aciona o conjunto braço/ponteiro do sistema de rotação. A tensão de armadura é alterada por um driver de acionamento linear. A Figura 6 ilustra através de blocos um diagrama funcional de controle do módulo servo-mecanismo. Onde, $r(t)$ a referência de entrada, $e(t)$ o erro, $u(t)$ a ação de controle e $\omega(t)$ a saída de velocidade.

Para a leitura da corrente de armadura do motor (A), foi necessário o desenvolvimento de um circuito de condicionamento de sinal. O circuito é introduzido em série com o motor DC e é composto de um resistor *shunt* conectado a um amplificador operacional. A leitura da corrente de armadura do motor é necessária neste trabalho para que, em conjunto com a leitura da velocidade angular, seja possível utilizar as duas grandezas como variáveis de estados.

4.2.2 Identificação do Servo-Mecanismo

De acordo com o fabricante, o sistema é linear e de segunda ordem. Assim, a identificação do sistema, tendo como variáveis de estado a velocidade angular $\omega(t)$ e a corrente no motor $i(t)$, é feita a partir de um ensaio a malha aberta. Neste trabalho, foi utilizado como sinal de entrada uma senóide com frequência variável (*chirp*), pois este sinal é capaz de excitar todos modos próprios do sistema (OGATA, 2000). O sinal *chirp* aplicado na entrada $u(t)$ possui como características: frequência inicial de 0,2Hz, frequência final de 5Hz, *offset* de 0,5rad e uma amplitude variando entre 0,1 e 0,9rad/s.

Os experimentos desta identificação são realizados com um período de amostragem igual a 30ms. A aplicação do sinal *chirp* no servo-mecanismo resultou nas seguintes curvas conforme visto na Figura7.

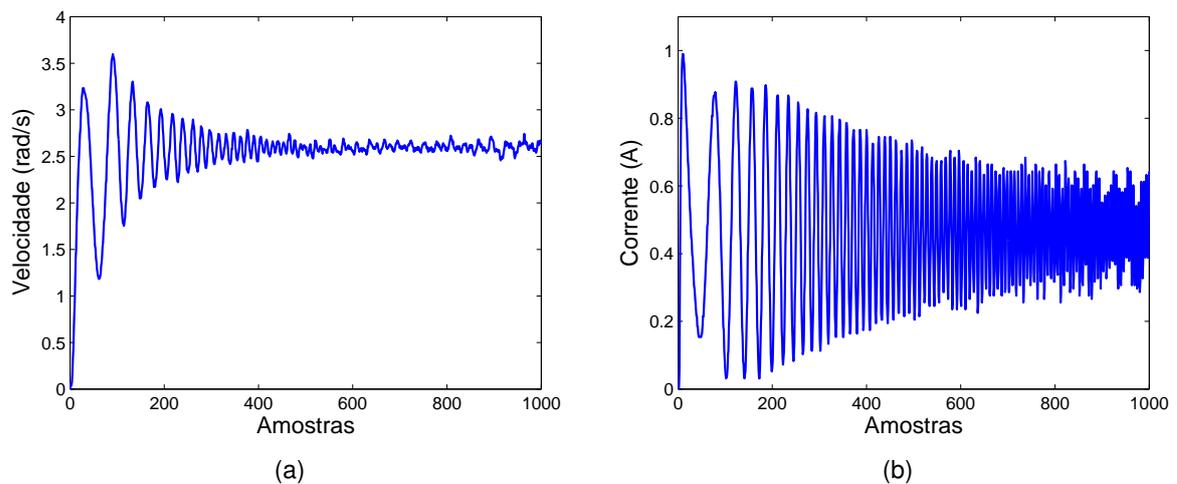


Figura 7 – Sinais de malha aberta. (a) Velocidade angular. (b) Corrente do motor.

Fonte: Autoria própria.

Considerando a entrada de controle $u(t)$ e a saída $y(t)$ do módulo, o sistema linear pode ser escrito na forma:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (60)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (61)$$

Para obter o modelo de representação por espaço de estados que descreve o comportamento do sistema em malha aberta, utilizou-se a função *Estimate State-Space Model* (SSEST) do *software* Matlab, resultando nas matrizes A , B e C dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -0,2773 & 1,4813 \\ -9,4764 & -7,3194 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,6988 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 27,6731 & -0,2538 \\ 3,8170 & 5,9671 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

A Figura 8 apresenta uma comparação entre a curva experimental do sistema e as curvas resultantes pela simulação da aplicação do *chirp* no sistema (60)- (61), considerando as matrizes (62).

Para que, o vetor de saída $y(t)$ seja composto pelos estados $\omega(t)$ e $i(t)$, é necessário que a matriz C seja uma identidade. Dessa forma, aplicada uma transformação de equivalência (CHEN, 2009). Determinando uma matriz de equivalência $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular, tal que $x = Z\bar{x}$, uma nova representação do sistema pode ser verificada por

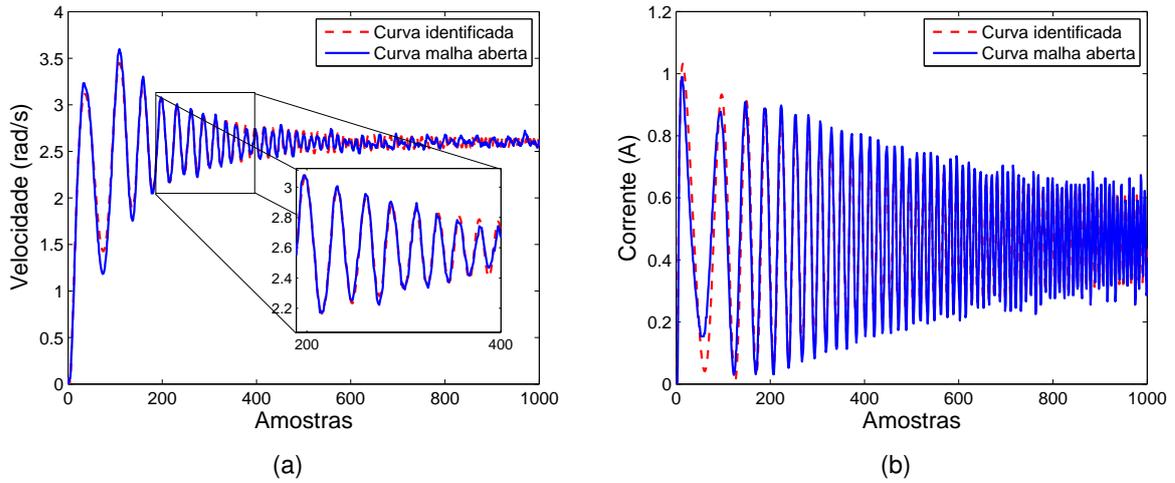


Figura 8 – Validação do modelo SSEST. (a) Velocidade angular. (b) Corrente do motor.

Fonte: Autoria própria.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \underbrace{ZAZ^{-1}}_{\bar{A}} \bar{x}(t) + \underbrace{ZB}_{\bar{B}} u(t) \quad (63)$$

$$y(t) = \underbrace{CZ^{-1}}_{\bar{C}} \bar{x}(t) \quad (64)$$

Considerando a matriz de equivalência Z igual à matriz C , pode-se obter as equações de estados

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\omega}(t) \\ \bar{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,9315 & 6,8974 \\ -1,4293 & -6,6652 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\omega}(t) \\ \bar{i}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10,1463 \end{bmatrix} u(t) \quad (65)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\omega}(t) \\ \bar{i}(t) \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Para validar a identificação, os resultados experimentais foram comparados com as soluções $\omega(t)$ e $i(t)$ do sistema (65)-(66). As soluções foram obtidas pelo *software* Matlab, considerando como $u(t)$ o sinal *chirp* idêntico aquele usado na identificação. Os dados apresentam um ajuste de 83.18% para velocidade angular e 62.05% para corrente ¹. As curvas são apresentadas respectivamente nas Figuras 9 e 10.

¹A porcentagem de ajuste corresponde à porcentagem da energia do erro de predição em relação à energia do sinal experimental

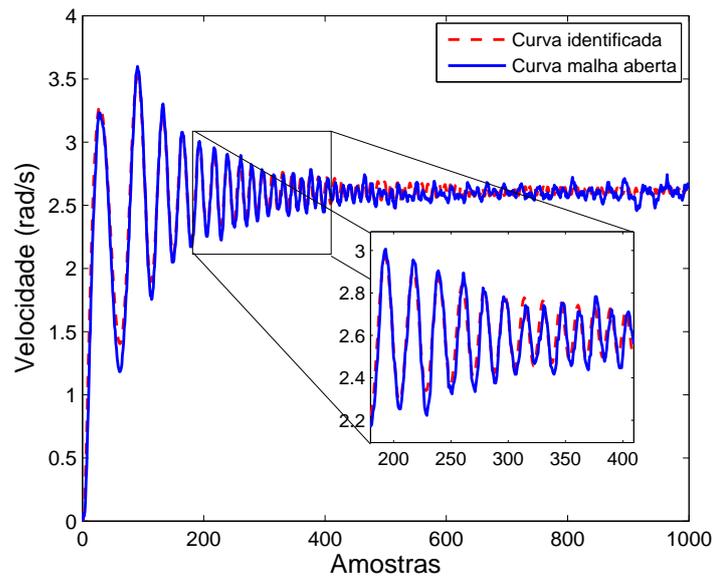


Figura 9 – Curva de identificação - Velocidade Angular.

Fonte: Autoria própria.

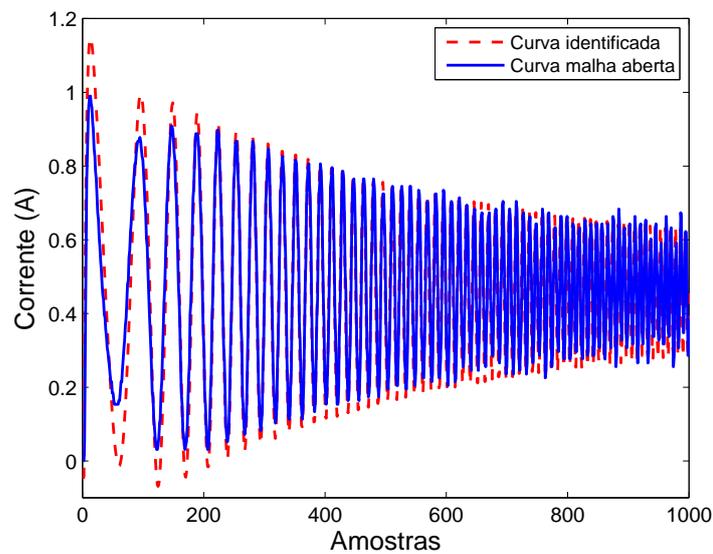


Figura 10 – Curva de identificação - Corrente do motor.

Fonte: Autoria própria.

4.3 CONTROLE DO SERVO-MECANISMO

Com intuito de ilustrar a técnica proposta, experimentos práticos são realizados a partir de um controle de velocidade aplicado no módulo servo-mecanismo apresentado na Figura 5. As LMIs consideradas são resolvidas usando SeDuMi (STURM, 1999) e YALMIP (LÖFBERG, 2004).

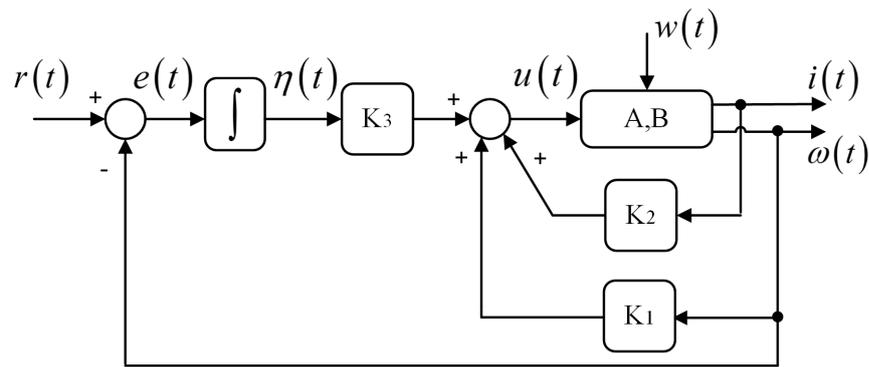


Figura 11 – Diagrama de blocos do sistema com integrador.

Fonte: Autoria própria.

sendo:

$r(t)$ a referência;

$e(t)$ o erro;

$\eta(t)$ saída do integrador;

$u(t)$ a ação de controle;

$\omega(t), i(t)$ são as variáveis de estado;

$K = [K_1 \ K_2 \ K_3]$ são os ganhos de realimentação.

O objetivo do sistema é seguir o sinal de referência de velocidade angular. Para garantir um menor erro de regime estacionário, foi introduzida a ação integral no circuito de controle ((ALBERTOS; SALA, 2004) pág. 170).

O sistema é realimentado a partir dois estados, $\omega(t)$ e $i(t)$, considerando a ação de controle integral $\eta(t)$, o circuito em malha fechada já modelado com o ruído externo $w(t)$, ou seja

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \quad (67)$$

representado em diagrama de blocos conforme Figura 11.

A representação em espaço de estados do sistema aumentado em malha fechada, considerando $\eta(t)$ como um estado adicional, é dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} & B \begin{bmatrix} K_3 \end{bmatrix} \\ \hline -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} -B \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \\ \hline 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t), \end{aligned} \quad (68)$$

sendo A_{cl} e B_{cl} , apresentadas em (39), as respectivas matrizes do sistema em malha fechada, dadas por

$$A_{cl} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B[K_1 & K_2] & B[K_3] \\ \hline -C & & 0 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} -B[K_1 & K_2] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

sendo possível obter as matrizes aumentadas \hat{A} e \hat{B} através de manipulações matemáticas, dadas por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

A aplicação proposta necessitou de uma interface de comunicação entre o elemento a ser controlado e o controlador, provida por uma placa de aquisição NI USB-6008 da *National Instruments*, os sinais oriundos do servo-mecanismo são obtidos pela placa e processadas no Matlab. A comunicação é feita via USB, e foi utilizado na dissertação as seguintes características da placa de aquisição, mostrada na Figura 12.

- 2 entradas análogicas de 12 bits, até 10KS/s;
- 1 saídas análogicas de 12 bits.

Os efeitos da quantização são introduzidos artificialmente usando (31), e os números de bits considerados nos experimentos são 12, 10, 8 e 6 bits.



Figura 12 – Placa de aquisição de sinais.

Fonte: Autoria própria.

O valor máximo de tensão aplicado no módulo servo-mecanismo é $V_{\max} = 5V_{cc}$, e o valor de Δ é calculado por

$$\Delta = \frac{V_{\max}}{2^N} = \begin{cases} 0,0012 & \text{com } N = 12 \\ 0,0049 & \text{com } N = 10 \\ 0,0195 & \text{com } N = 8 \\ 0,0781 & \text{com } N = 6, \end{cases}$$

sendo N o número de bits do quantizador.

Os valores dos ganhos sub-ótimos de realimentação de estados foram obtidos através da minimização de γ sujeito a (42), que resultou em

$$K = [-0,0055 \ 0,0053 \ 0,0001], \text{ com } \gamma^* = 0,22. \quad (72)$$

A utilização dos valores dos ganhos sub-ótimos torna o sistema robusto à quantização, porém resulta em uma resposta lenta (aproximadamente 4 minutos até atingir o valor de referência de entrada) caracterizando um problema de desempenho do sistema. De fato, substituindo as matrizes A e B apresentadas em (65) juntamente com (72) em (69) resultam nas seguintes matrizes dinâmicas do módulo servo-mecanismo em malha fechada,

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} -0,9315 & 6,8974 & 0 \\ -1,4851 & -6,6114 & 0,0010 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,0558 & -0,0538 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

A Figura 13 representa a disposição dos autovalores de A_{cl} no plano complexo, dados por,

$$\begin{aligned} & -3,7712 + 1,4753i \\ & -3,7712 - 1,4753i \\ & -0,0004. \end{aligned} \quad (74)$$

Nota-se à presença de um dos autovalores da matriz A_{cl} muito próximo ao eixo imaginário, justificando a lenta resposta do sistema. Para solução do problema de desempenho do sistema utilizou-se os resultados apresentados no Corolário 2.1, juntamente com Teorema 3.2.

Na obtenção do valor de σ que irá delimitar a região onde os autovalores da matriz A_{cl} podem ser alocados, estabeleceu-se, como critério, que a velocidade angular alcance

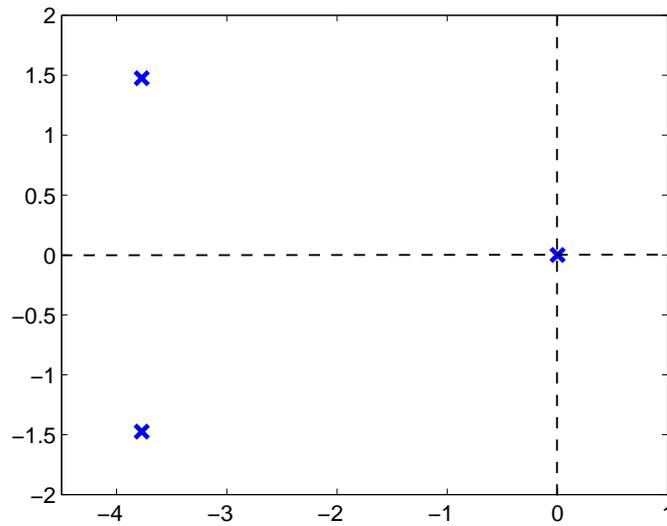


Figura 13 – Disposição dos autovalores do sistema inicial.

Fonte: Autoria própria.

um valor maior ou igual a 90% do valor da referência de entrada após t_a segundos, ou seja

$$1 - e^{\lambda_{max} t_a} \geq 0,9V_{ref}, \quad (75)$$

sendo V_{ref} o valor da referência de entrada.

Considerando como critério de projeto $V_{ref} = 1$ rad/s e $t_a = 4$ segundos obtém-se facilmente de (75) que

$$\lambda_{max} \leq -0,5756. \quad (76)$$

A partir do Teorema 3.2, considerando $\sigma = 0,5756$ como restrição do sistema, foram obtidos os valores dos ganhos de realimentação de estados que resultou em

$$K = [-0,1838 \quad -0,0694 \quad 0,3485], \text{ com } \gamma^* = 1,8. \quad (77)$$

Substituindo as matrizes A e B apresentadas em (65) juntamente com (77) em (69), resultam nas novas matrizes dinâmicas do módulo servo-mecanismo em malha fechada

$$\tilde{A}_{cl} = \begin{bmatrix} -0,9315 & 6,8974 & 0 \\ -3,2938 & -7,3691 & 3,5362 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{B}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,8645 & 0,7039 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

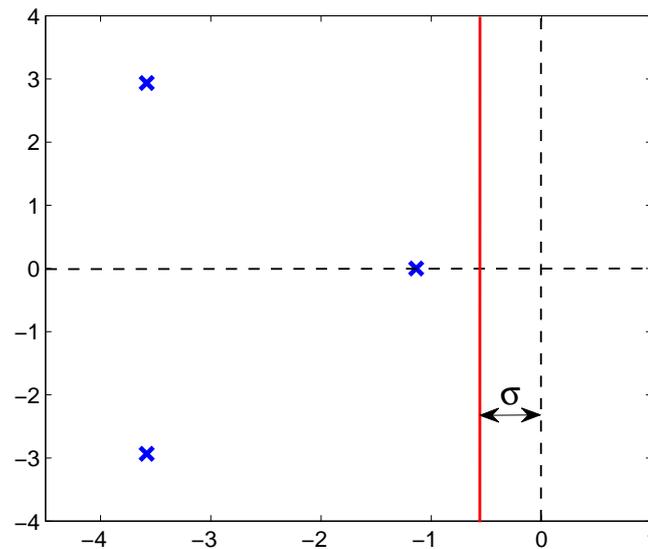


Figura 14 – Disposição dos autovalores de \tilde{A}_{cl} considerando σ .
Fonte: Autoria própria.

Através da Figura 14 é possível verificar a disposição dos autovalores de \tilde{A}_{cl} , dados por,

$$\begin{aligned} & -3,5813 + 2,9337i \\ & -3,5813 - 2,9337i \\ & -1,1381. \end{aligned} \quad (79)$$

Os resultados obtidos experimentalmente foram comparados com a técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013), para obtenção dos ganhos de estabilização do sistema. Originalmente, a técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013) considera a presença de uma perturbação não-linear, que foi desconsiderada nesta comparação. Tomando as matrizes aumentadas \hat{A} e \hat{B} apresentadas em (70), a partir da resolução de (56) foram obtidos os valores dos ganhos de realimentação de estados

$$K_c = [-0,7335 \ 0,3485 \ 0,9076]. \quad (80)$$

A seguir, são apresentados diferentes experimentos para ilustrar o comportamento da técnica proposta. Nestes experimentos são considerados diferentes pontos de operação e mudanças de referência. É aplicado um sinal referência variável com distúrbios de 1 rad/s inserido a cada 27 segundos e analisados as respostas da velocidade angular, corrente do motor e ação de controle. Inicialmente a referência é de 1 rad/s, depois alterada para 2 rad/s e 3 rad/s, retornando para 2 rad/s e finalizando em 1 rad/s. As respostas do sis-

tema, utilizando as quantizações de 12-bits, são mostradas nas Figuras 15, 16 e 17, 18, considerando a técnica proposta e a técnica apresentada em (LIU; WANG; NI, 2013), respectivamente.

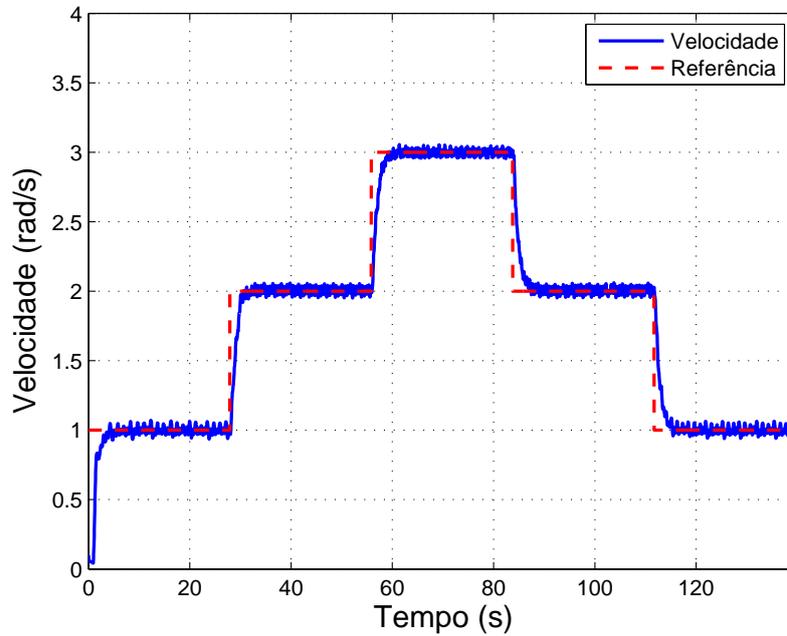


Figura 15 – Curva de resposta da técnica proposta (Teorema 3.2), quantizada em 12-bits.

Fonte: Autoria própria.

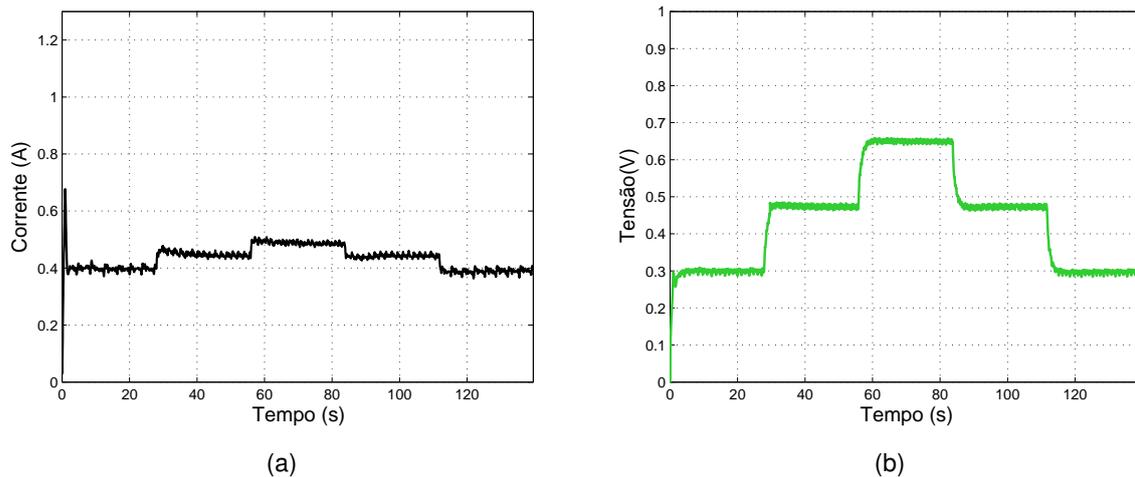


Figura 16 – Técnica proposta (Teorema 3.2), quantizada em 12-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.

Fonte: Autoria própria.

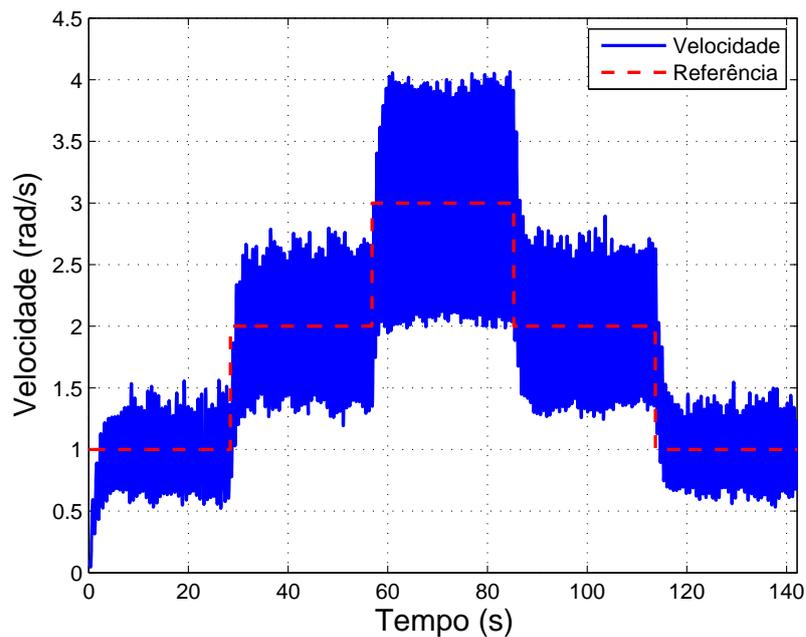


Figura 17 – Curva de resposta da técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizada em 12-bits.
Fonte: Autoria própria.

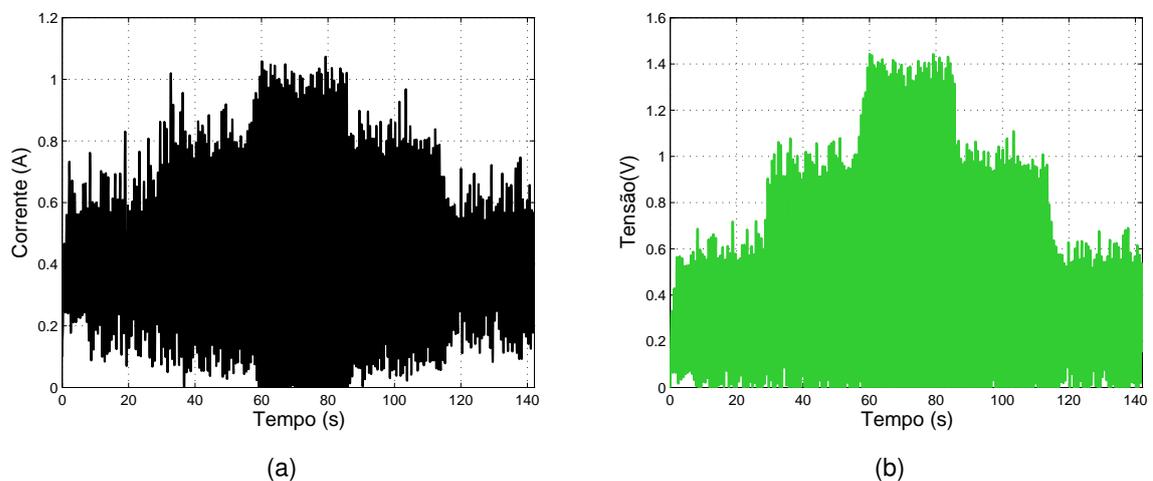


Figura 18 – Técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizada em 12-bits. (a) Corrente do motor.
(b) Ação de controle.

Fonte: Autoria própria.

A partir de tais figuras, é possível verificar que a técnica proposta (Teorema 3.2) demonstrou um melhor desempenho em relação a técnica apresentada em (LIU; WANG; NI, 2013), resultando um sinal de resposta que não apresenta sobressinal, que atinge o valor de referência e que apresenta uma pequena variação na corrente do motor e na ação de controle.

Nas Figuras 19, 20 e 21, 22, são apresentadas as respostas para uma quantização de 10-bits. Novamente, comparando com as Figuras 21 e 22, verifica-se que ambos os controladores atingem os valores de referência.

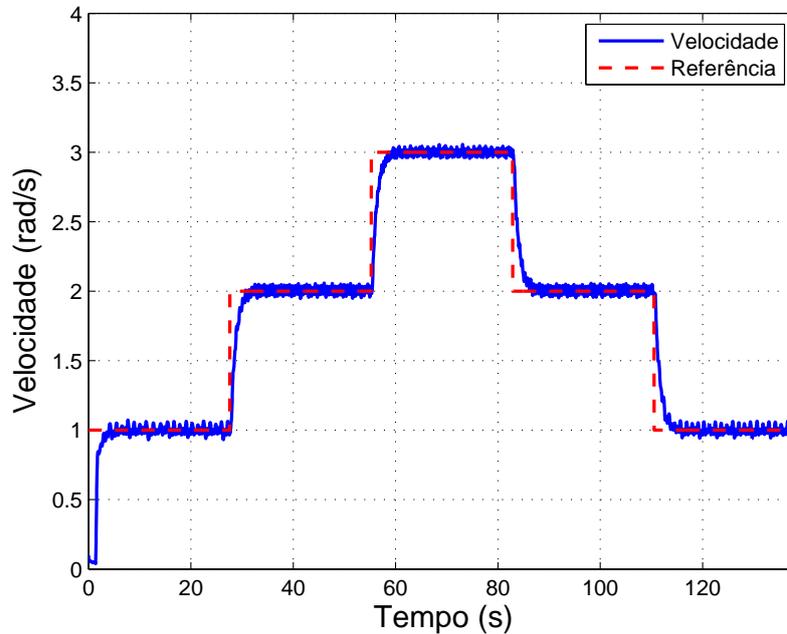


Figura 19 – Curva de resposta do controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 10-bits.
Fonte: Autoria própria.

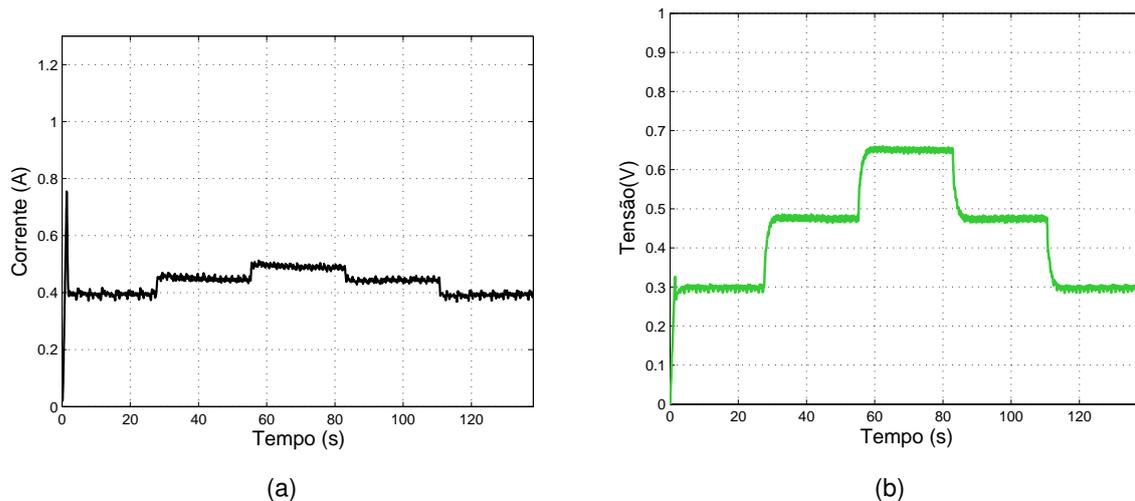


Figura 20 – Controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 10-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.
Fonte: Autoria própria.

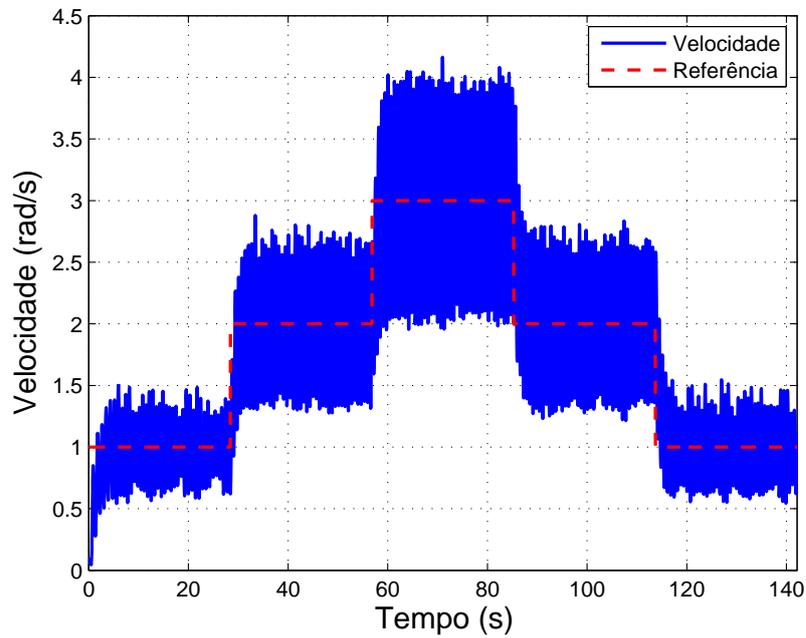


Figura 21 – Curva de resposta do controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 10-bits.

Fonte: Autoria própria.

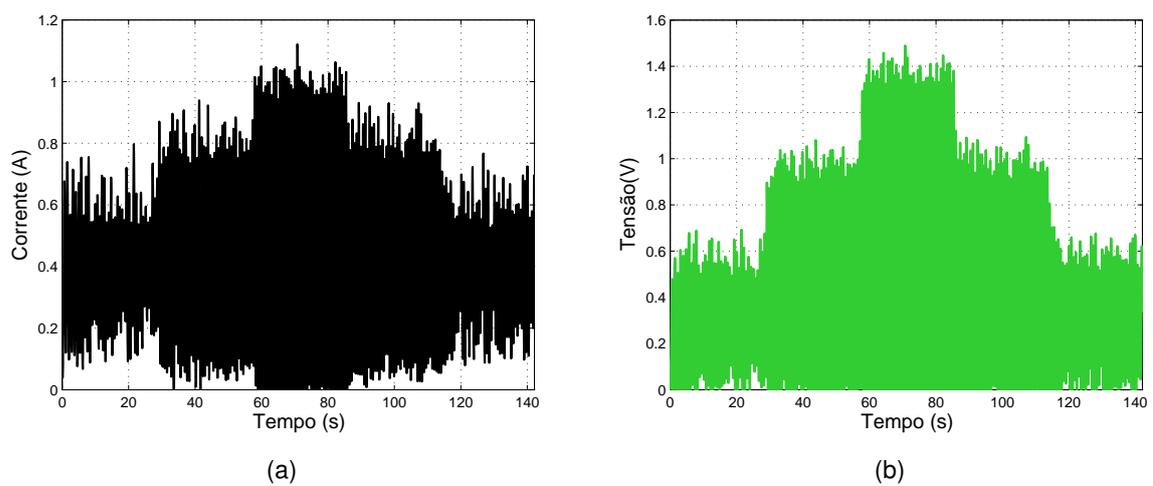


Figura 22 – Controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 10-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.

Fonte: Autoria própria.

Para a terceira comparação os sinais de controle são quantizados em 8-bits, como ilustrado nas Figuras 23 , 24 e 25 , 26, para a técnica proposta e para técnica demonstrada em (LIU; WANG; NI, 2013), respectivamente.

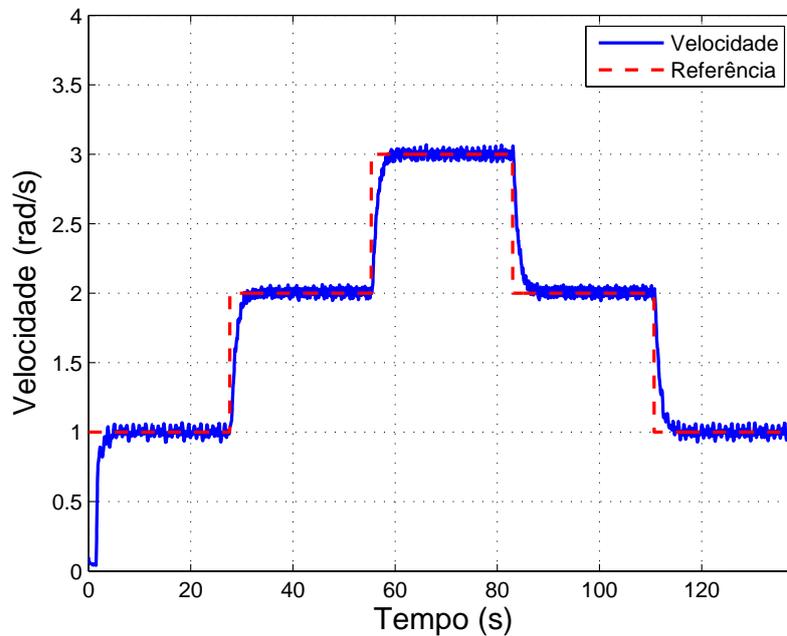


Figura 23 – Curva de resposta do controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 8-bits.
Fonte: Autoria própria.

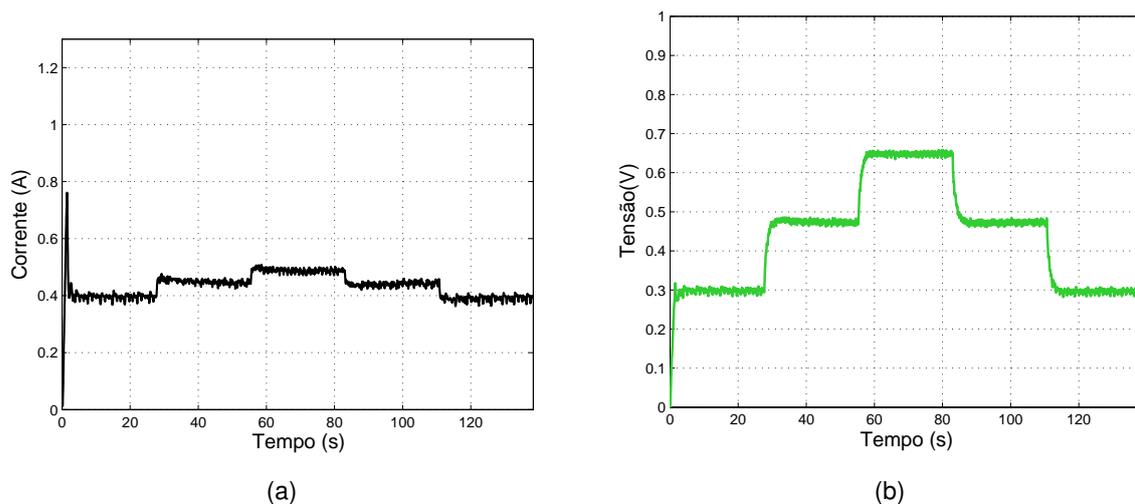


Figura 24 – Controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 8-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.
Fonte: Autoria própria.

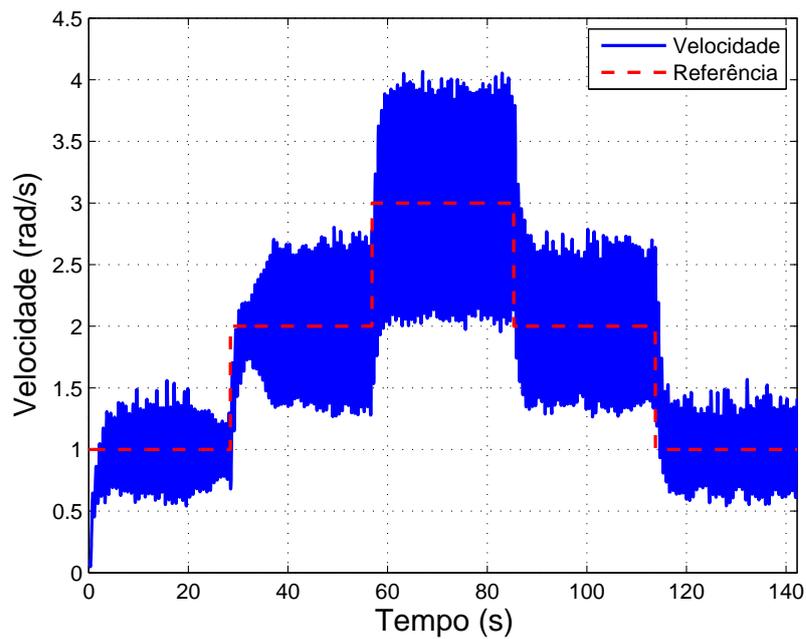


Figura 25 – Curva de resposta do controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 8-bits.

Fonte: Autoria própria.

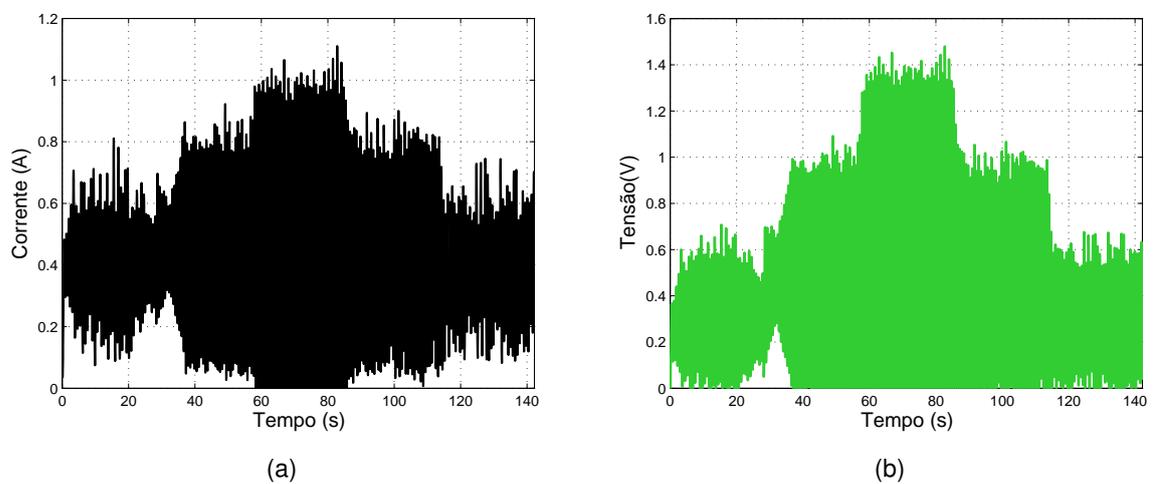


Figura 26 – Controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 8-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.

Fonte: Autoria própria.

Observando-se as Figuras 25 e 26 fica evidente que a técnica proposta apresenta melhor desempenho que a técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013).

Também é considerada a quantização dos sinais de controle para 6-bits, visto nas Figuras 27, 28 e 29, 30 para ambas as técnicas apresentadas.

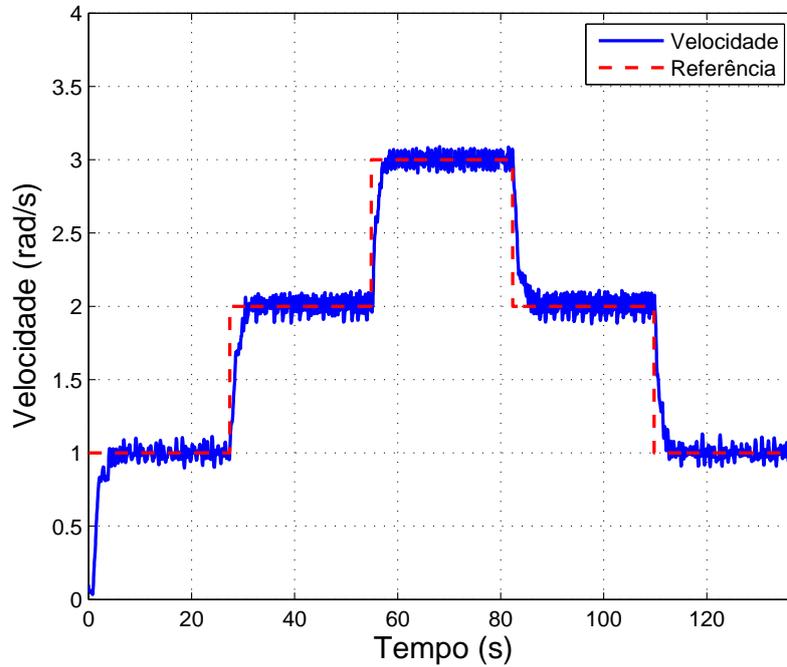


Figura 27 – Curva de resposta do controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 6-bits.
Fonte: Autoria própria.

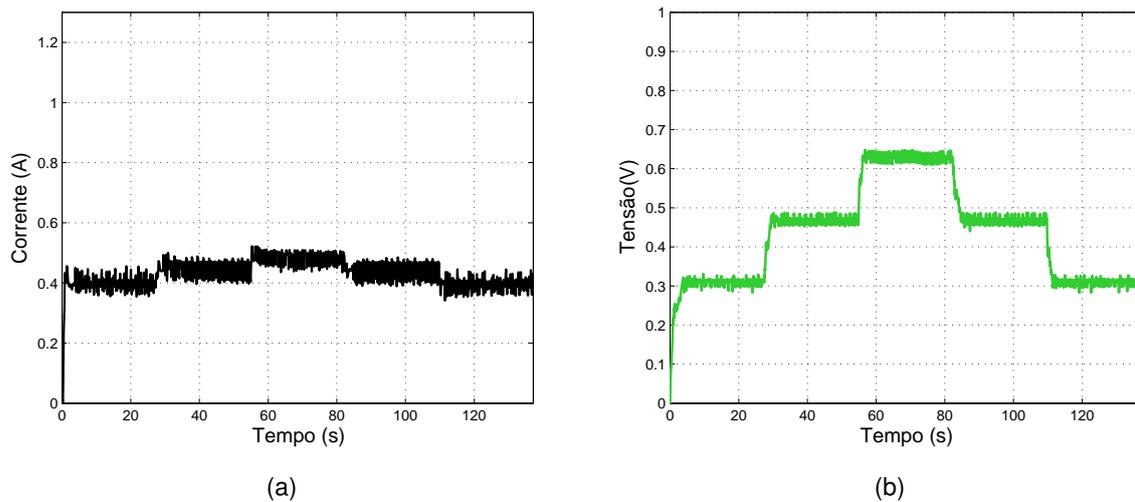


Figura 28 – Controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 6-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.

Fonte: Autoria própria.

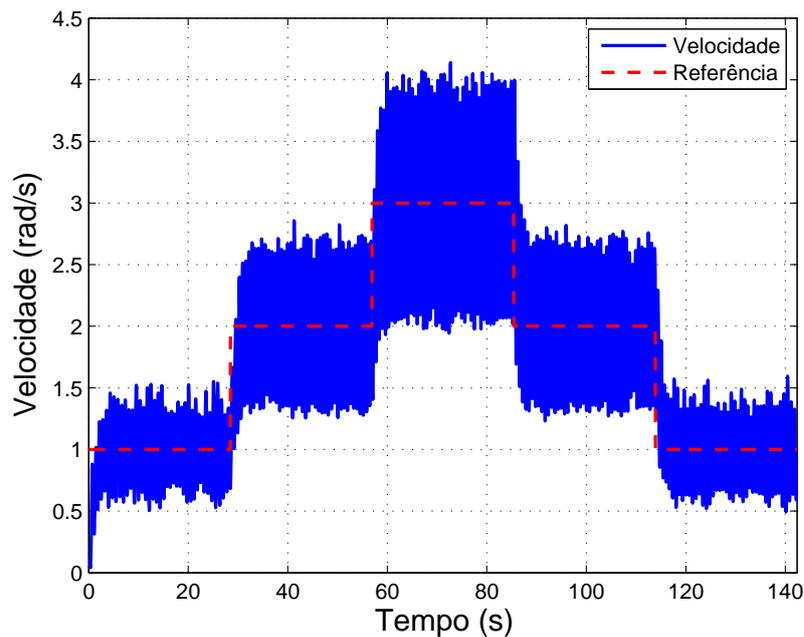


Figura 29 – Curva de resposta do controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 6-bits.

Fonte: Autoria própria.

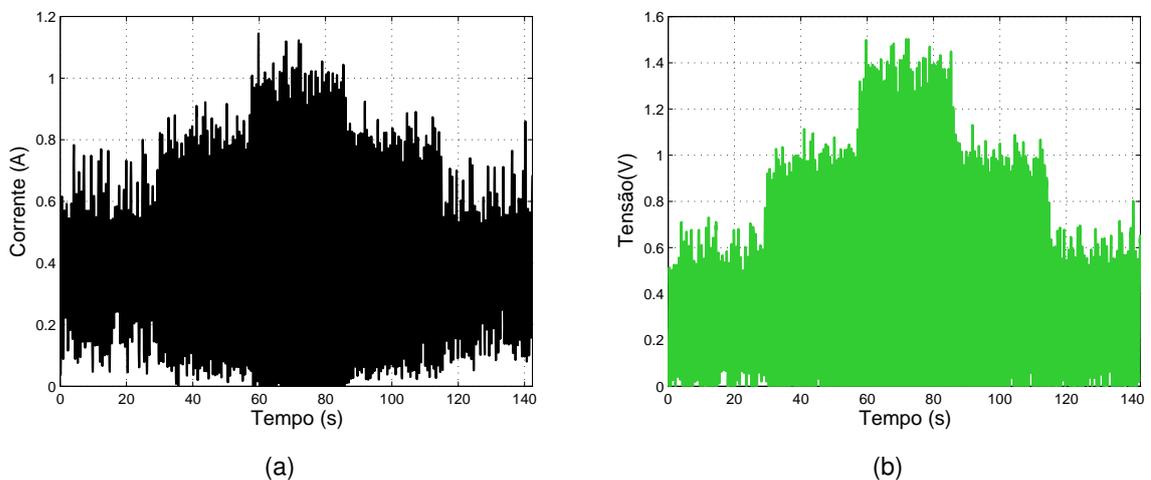


Figura 30 – Controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 6-bits. (a) Corrente do motor. (b) Ação de controle.

Fonte: Autoria própria.

É possível perceber que, conforme o número de bits diminui, aumenta-se a intensidade do ruído de resposta do sistema.

A técnica proposta na dissertação é novamente melhor que a técnica apresentado em (LIU; WANG; NI, 2013), não demonstrando máximo sobressinal na velocidade angular, apresentando ainda menor variação na corrente do motor e menor esforço de controle apli-

cado no sistema. Considerando a técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013), todos os experimentos realizados apresentaram resultados similares entre si, demonstrando grande oscilação em torno da referência de entrada. Já a técnica proposta que considera a quantização como uma restrição na condição para obtenção dos ganhos de realimentação de estados apresentada no Teorema 3.2, demonstrou-se robusto aos efeitos da quantização.

Verifica-se em Krishnan (2001), que o torque eletromagnético do motor DC é diretamente proporcional a corrente de armadura do mesmo, conforme

$$T_e = K_b i_a, \quad (81)$$

onde, T_e é o torque eletromagnético, K_b é a constante de torque e i_a a corrente de armadura do motor. Sendo assim, a variação da corrente do motor apresentada nos experimentos considerando a técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013), influencia diretamente no torque do motor podendo causar problemas em mancais, acoplamentos e rolamentos.

De acordo com o Corolário 3.1, o menor número de bits de tal forma que os ganhos de realimentação estados do sistema quantizado (72), utilizando a técnica proposta nesta dissertação garantam a estabilidade do sistema em malha fechada é $N = 3$ bits. Na verdade, o ganhos de realimentação de estados garante a estabilidade para $N > 3$ bits, mas nada pode ser concluído para $N < 3$. A Figura 31 ilustra a técnica proposta quantizada em 3-bits.

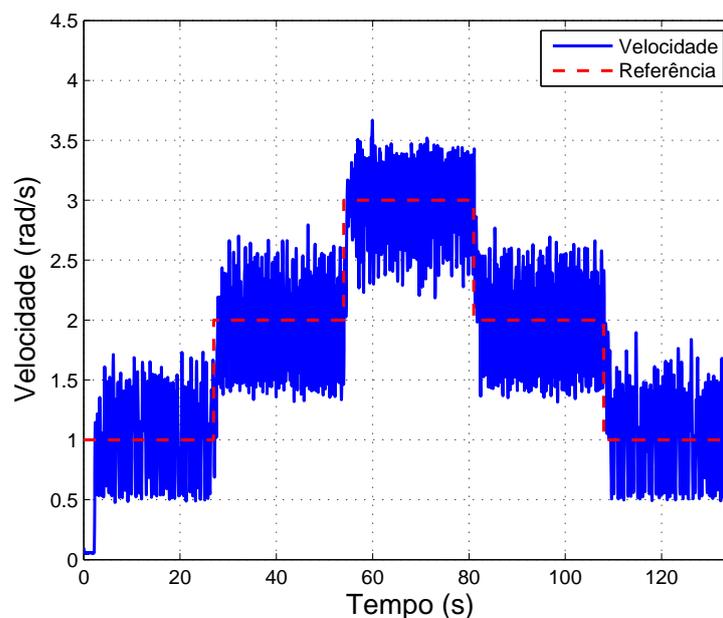


Figura 31 – Controlador proposto (Teorema 3.2), quantizado em 3-bits.

Fonte: Autoria própria.

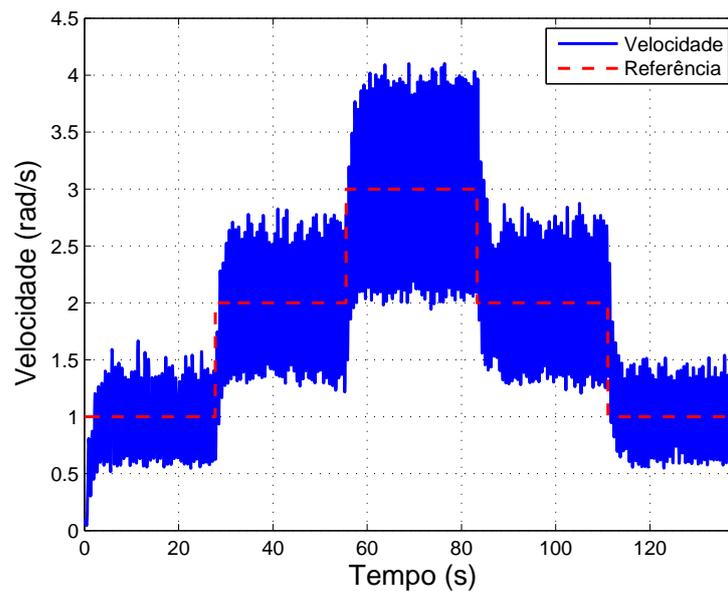


Figura 32 – Curva de resposta do controlador proposto por (LIU; WANG; NI, 2013), quantizado em 2-bits.

Fonte: Autoria própria.

Já para técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013), a partir de (59), considerando a matriz \hat{A} aumentada apresentada em (70) e T_s igual a 0, obtém-se $N > 2$, evidenciando um melhor resultado em relação a técnica proposta no presente trabalho. A Figura 32 ilustra a técnica de (LIU; WANG; NI, 2013) quantizada em 2-bits. Experimentos sugerem que, quando se utilizam 3 bits para a técnica proposta no trabalho, e 2 bits para técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013) para quantização na ação de controle, o sinal de velocidade de saída não instabiliza de fato, porém apresenta uma grande oscilação em torno da referência de entrada, sendo portanto, inadequada para aplicações práticas.

Para evidenciar o desempenho dos resultados obtidos foi calculado a média e o desvio padrão para as velocidades de 12-bits e 6-bits. Foram obtidas 100 realizações para os diferentes níveis de quantização, com o intuito de minimizar variações nas simulações ocasionados por possíveis interferências externas. As Figuras 33, 34 e 35, 36 ilustram a média e o desvio padrão, para a técnica proposta e para a técnica apresentada em (LIU; WANG; NI, 2013).

Analisando as Figuras 33, 34 e 35, 36 é possível verificar que o controle utilizando a técnica proposta demonstrou menor dispersão da velocidade quantizada em relação a média da mesma tanto para 12-bits quanto para 6-bits. Portanto, baseado nos resultados obtidos pelo cálculo da média e do desvio padrão, considera-se que a técnica apresentada nesta dissertação demonstrou melhor desempenho para um motor DC, quando comparada com a técnica apresentada em (LIU; WANG; NI, 2013).

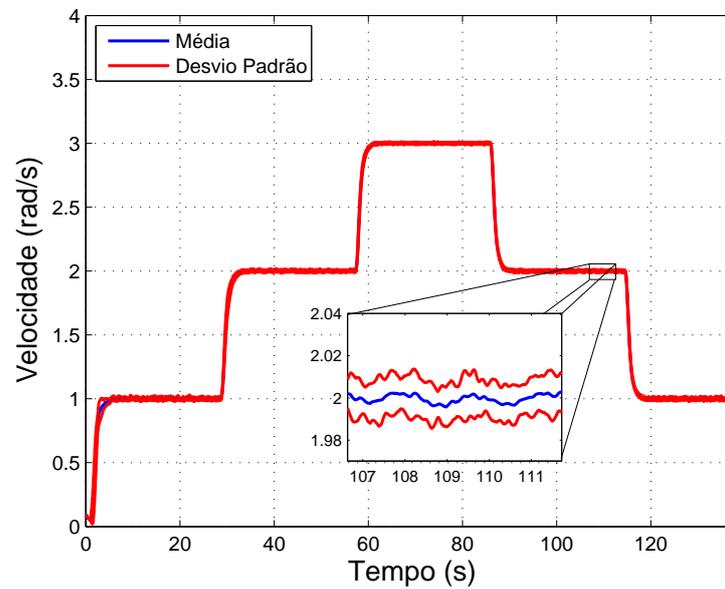


Figura 33 – Média e desvio padrão da técnica proposta para 100 realizações, quantizada em 12-bits.
Fonte: Autoria própria.

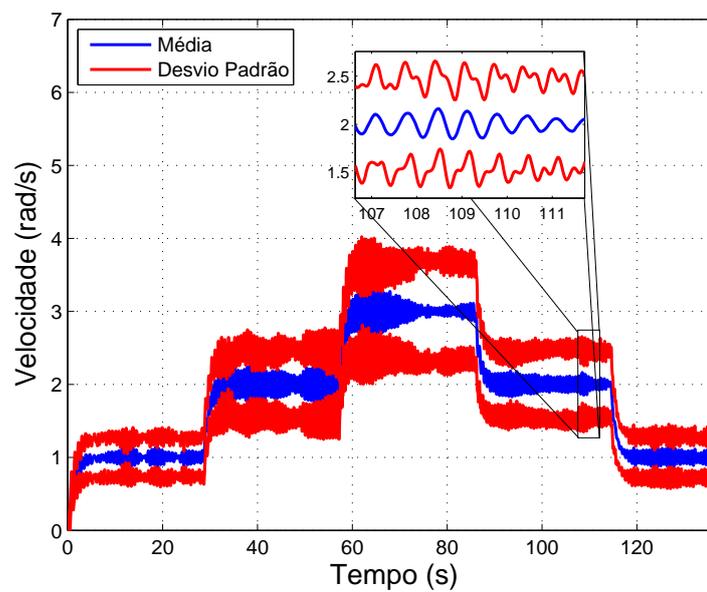


Figura 34 – Média e desvio padrão da técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013) para 100 realizações, quantizada em 12-bits.
Fonte: Autoria própria.

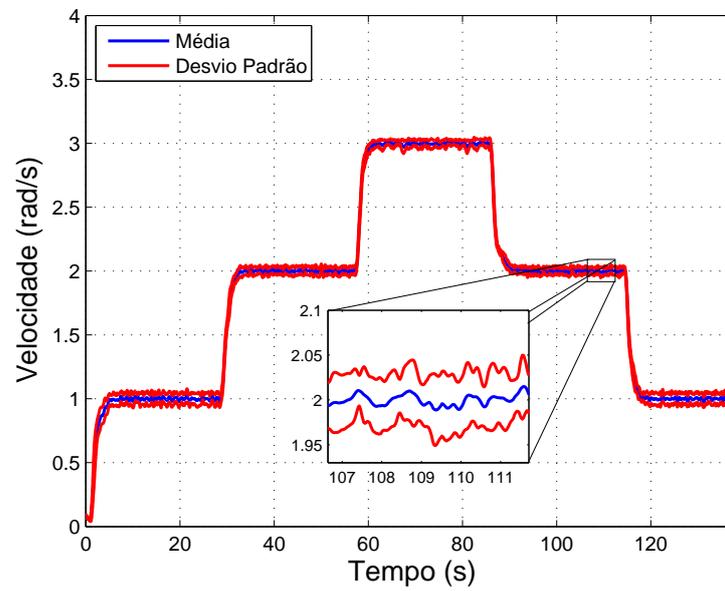


Figura 35 – Média e desvio padrão da técnica proposta para 100 realizações, quantizada em 6-bits.
Fonte: Autoria própria.

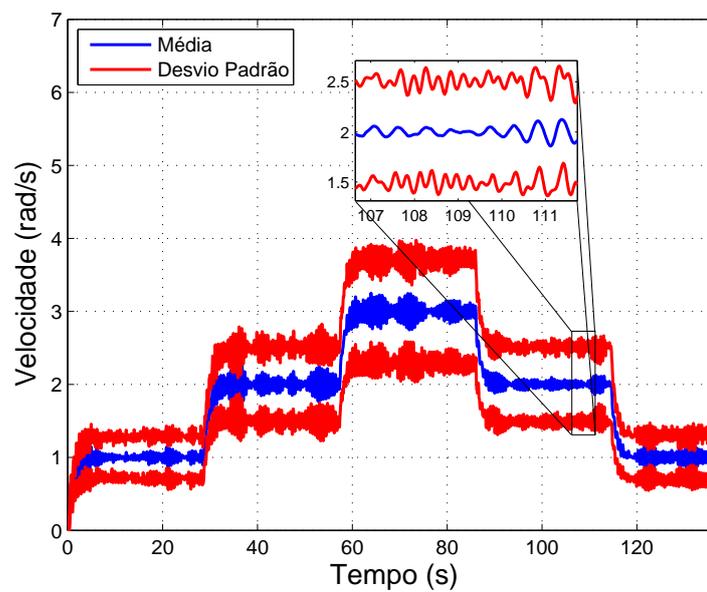


Figura 36 – Média e desvio padrão da técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013) para 100 realizações, quantizada em 6-bits.
Fonte: Autoria própria.

5 COMENTÁRIOS FINAIS

O presente trabalho apresentou uma técnica para sintetizar ganhos de realimentação de estados robustos a efeitos de quantização uniforme, inseridos artificialmente nos estados do sistema. Para o sistema em malha fechada realimentado com estados quantizados, o problema pode ser modelado como um sistema linear invariante no tempo afetado por um ruído externo. Com isso, pode-se tratar o problema pela síntese de ganhos de realimentação de estados que minimizem o limitante da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada.

Para a quantização foi considerado um quantizador do tipo uniforme (passos fixos), que possibilitou a inserção artificialmente dos ruídos de quantização, permitindo validar a técnica para vários níveis de quantização. Primeiramente, foi modelado o erro de quantização como um ruído externo do sistema em malha fechada, resultando em um sistema LTI, tal que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema seja limitado por um escalar γ , com isso, foi obtida uma condição suficiente para a obtenção dos ganhos de realimentação de estados que estabilizam o sistema. Nesta etapa, devido o surgimento de uma bilinearidade na condição para obtenção dos ganhos, o valor de γ foi considerado um escalar definido positivo, minimizado pelo método da bissecção. Os ganhos obtidos inicialmente, apresentaram valores muito pequenos o que evidenciou um tempo de resposta muito lenta caracterizando um problema de desempenho do sistema.

Para solucionar tal problema, foi proposta uma outra condição para garantir que a parte real dos autovalores do sistema em malha fechada fossem menores do que um certo valor predefinido. Com isso, é possível garantir que a saída do sistema possua a taxa de convergência desejada, eliminando a lentidão observada na resposta. A fim de considerar o menor número de bits no qual o sistema se mantenha estável, utilizou-se o Teorema do Pequeno Ganho, que possibilita obter o menor valor de uma determinada incerteza que garanta a estabilidade do sistema.

Na validação da técnica proposta realizou-se uma comparação com a técnica proposta em (LIU; WANG; NI, 2013). Resultados experimentais ilustram a eficácia da técnica proposta. Na análise da quantidade mínima de bits requerida para que o sistema mantenha-se estável, a técnica proposta no presente trabalho chegou valor de 3 bits, já a técnica proposta por (LIU; WANG; NI, 2013) obteve um valor de 2 bits evidenciando um melhor resultado, contudo, graficamente pode-se verificar que ambas as técnicas apresentaram grande oscilação em torno da referência de entrada, sendo portanto, inadequadas para aplicações práticas. Mesmo para baixos números de bits de quantização, o controle proposto apresentou resultados consideráveis, tanto quantitativos (Média e Desvio Padrão)

quanto qualitativos, atingindo a velocidade de referência em todas as análises, não apresentando máximo sobressinal, evidenciando menor esforço do motor DC e pouca oscilação na ação de controle. Já o controle proposto por (LIU; WANG; NI, 2013) atingiu o valor de referência de velocidade, porém com muita variação, evidenciando-se assim um maior esforço do motor DC proporcionado pela grande variação da corrente e apresentando uma ação de controle muito oscilante.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas**. 3. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007.
- AGULHARI, C. **Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares e Variantes no Tempo com Parâmetros Incertos**. Tese (Doutorado) — Universidade de Campinas, Campinas, SP, 2013.
- ALBERTOS, P.; SALA, A. **Multivariable control systems: an engineering approach**. 1. ed. London: Springer-Verlag, 2004.
- BAZARAA, M.; SHERALI, H.; SHETTY, C. **Nonlinear programming: theory and algorithms**. 3. ed. Hoboken, N.J.: Wiley, 2013.
- BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. **Análise numérica**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- CHEN, C. **Linear system theory and design, Third Edition, International Edition**. 3. ed. New York: OUP USA, 2009.
- COLANERI, P.; GEROMEL, J.; LOCATELLI, A. **Control Theory and Design: An RH_2 and RH_∞ Viewpoint**. San Diego: Elsevier Science, 1997.
- DOYLE, J.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P.; FRANCIS, B. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 34, n. 8, p. 831–847, Aug 1989.
- DULLERUD, G.; PAGANINI, F. **A course in robust control theory: a convex approach**. [S.l.]: Springer, 2010.
- ELIA, N.; MITTER, S. Stabilization of linear systems with limited information. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 46, n. 9, p. 1384–1400, 2001.
- FRANKLIN, G.; POWELL, J.; WORKMAN, M. **Digital control of dynamic systems**. 3. ed. Half Moon Bay: Addison-Wesley Longman, Incorporated, 1998.
- FU, M.; XIE, L. The sector bound approach to quantized feedback control. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 50, n. 11, p. 1698–1711, Nov 2005.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P.; CHILALI, M. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 41, n. 3, p. 436–442, 1996.
- GAO, H.; CHEN, T.; LAM, J. A new delay system approach to network-based control. **Automatica**, v. 44, n. 1, p. 39 – 52, 2008.

- GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S. (Ed.). **Advances in linear matrix inequality methods in control: advances in design and control**. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- GREEN, M.; LIMEBEER, D. **Linear robust control**. Englewood Cliffs, NJ: Dover Publications, Incorporated, 2012.
- HAYES, M. **Teoria e probabilidade de processamento digital de sinais**. Porto Alegre: Bookman, 2006.
- HAYKIN, S.; MOHER, M. **Introdução aos sistemas de comunicação**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- HAYKIN, S.; MOHER, M. **Sistemas de comunicação**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.
- HESPANHA, J.; NAGHSHTABRIZI, P.; XU, Y. A survey of recent results in networked control systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 95, n. 1, p. 138–162, 2007.
- HSIEH, C.-S. Reliable control design using a two-stage linear quadratic reliable control. **Control Theory and Applications, IEE Proceedings -**, v. 150, n. 1, p. 77–82, Jan 2003.
- KHALIL, H. **Nonlinear systems**. 3. ed. Upper Saddle River.: Prentice Hall PTR, 2002.
- KRISHNAN, R. **Electric motor drives: modeling, analysis, and control**. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall PTR, 2001.
- LING, Q.; LEMMON, M. Stability of quantized control systems under dynamic bit assignment. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 50, n. 5, p. 734–740, 2005.
- LIU, W.; WANG, Z.; NI, M. Quantized feedback stabilization for a class of linear systems with nonlinear disturbances. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 8, n. 0, p. 48–56, 2013.
- LÖFBERG, J. **YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB**. September 2004. 284–289 p. Disponível em: <<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>>
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- OLIVEIRA, R. **Estudo de Robustez em Sistemas Lineares por Meio de Relaxações em Termos de Desigualdades Matriciais Lineares**. Tese (Doutorado) — Universidade de Campinas, Campinas, SP, 2006.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, 2007.
- OPPENHEIM, A.; SCHAFER, R. **Discrete-time signal processing**. New Jersey.: Prentice Hall, 2010. (Prentice-Hall signal processing series).
- OSTERTAG, E. **Mono-and multivariable control and estimation: linear, quadratic and LMI methods**. New York: Springer, 2011.
- PROAKIS, J.; MANOLAKIS, D. **Digital signal processing**. 4. ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, 2007.

- SASTRY, S. **Nonlinear systems: analysis, stability and control**. New York.: Springer, 2010.
- SAYOOD, K. **Introduction to data compression**. 3. ed. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 2012.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable feedback control: analysis and design**. 2. ed. England: John Wiley, 2005.
- STURM, J. F. **Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones**. 1999. 1112:625653 p. Disponível em: <<http://sedumi.mcmaster.ca/>>
- TAO, G.; JOSHI, S.; MA, X. Adaptive state feedback and tracking control of systems with actuator failures. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 46, n. 1, p. 78–95, Jan 2001.
- VIDYASAGAR, M. **Nonlinear systems analysis**. 2. ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1993.
- WEN, D.-L.; YANG, G.-H. Quantized H_∞ control for networked control systems with random delays. In: **Control and Decision Conference, 2009. CCDC '09. Chinese**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 588–592.
- WONG, W. S.; BROCKETT, R. Systems with finite communication bandwidth constraints. ii. stabilization with limited information feedback. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, v. 44, n. 5, p. 1049–1053, 1999.
- ZHANG, W.; BRANICKY, M.; PHILLIPS, S. Stability of networked control systems. **Control Systems, IEEE**, v. 21, n. 1, p. 84–99, 2001.
- ZHANG, Y.; ZHONG, Q.; WEI, L. Stability of networked control systems with communication constraints. In: **Control and Decision Conference, 2008. CCDC 2008. Chinese**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 335–339.
- ZHAO, X.; YE, D. Adaptive reliable H_∞ controller design for linear systems with quantized state feedback. In: **Control and Decision Conference (CCDC), 2011. Chinese**. [S.l.: s.n.], 2011. p. 2868–2873.
- ZHOU, K.; DOYLE, J.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall PTR, 1996.
- ZHU, X.-L.; YANG, G.-H. New H_∞ controller design method for networked control systems with quantized state feedback. In: **American Control Conference, 2009. ACC '09**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 5103–5108.

APÊNDICE A – ALGORITMO MÉTODO DA BISSECÇÃO

Esta seção apresenta o algoritmo utilizado para minimização de γ na obtenção do valor de γ^* através do método da bissecção.

```
%% ALGORITMO METODO BISSECCAO

gama_min= 0;
gama_max= 100;

if (gama_min == infactivel && gama_max == factivel)

    a= 1;
    b= -1;
end

if a*b < 0

    gama= (gama_min + gama_max)/2;

end

while gama > 0.01

    if gama == infactivel

        gama_min= gama;

    else

        gama_max= gama;

        gama= (gama_min + gama_max)/2;

    end

end

disp('O valor do gama ótimo é', gama)
```