



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E  
INFORMÁTICA INDUSTRIAL

GIOVANNI ALFREDO GUARNERI

**IDENTIFICAÇÃO DE DESCONTINUIDADES EM PEÇAS  
METÁLICAS UTILIZANDO SINAIS ULTRASSÔNICOS E TÉCNICAS  
DE PROBLEMAS INVERSOS**

TESE DE DOUTORADO

CURITIBA

2015

GIOVANNI ALFREDO GUARNERI

**IDENTIFICAÇÃO DE DESCONTINUIDADES EM PEÇAS  
METÁLICAS UTILIZANDO SINAIS ULTRASSÔNICOS E TÉCNICAS  
DE PROBLEMAS INVERSOS**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Doutor em Ciências” – Área de Concentração: Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Neves Junior

Co-orientador: Prof. Dr. Daniel Rodrigues Pipa

**CURITIBA**

**2015**

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

---

G916i      Guarneri, Giovanni Alfredo  
2015      Identificação de descontinuidades em peças metálicas  
            utilizando sinais ultrassônicos e técnicas de problemas  
            inversos / Giovanni Alfredo Guarneri.-- 2015.  
            157 f.: il.; 30 cm

            Texto em português, com resumo em inglês  
            Tese (Doutorado) - Universidade Tecnológica Federal  
            do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia  
            Elétrica e Informática Industrial, Curitiba, 2015.  
            Bibliografia: f. 133-140.

            1. Processamento de sinais - Modelos matemáticos.  
            2. Ultrassom. 3. Algoritmos. 4. Testes não-destrutivos.  
            5. Problemas inversos (Equações diferenciais). 6.  
            Convoluções (Matemática). 7. Reconstrução de imagens.  
            8. Identificação de sistemas. 9. Métodos de simulação.  
            10. Engenharia elétrica - Teses. I. Neves Junior, Flávio,  
            orient. II. Pipa, Daniel Rodrigues, coorient. III.  
            Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa  
            de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática  
            Industrial. IV. Título.

CDD 22 -- 621.3

---

**Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba**

Título da Tese Nº. \_\_\_\_\_

# **Identificação de Descontinuidades em Peças Metálicas Utilizando Sinais Ultrassônicos e Técnicas de Problemas Inversos.**

por

## **Giovanni Alfredo Guarneri**

**Orientador: Prof. Dr. Flávio Neves Junior**  
**Coorientador: Prof. Dr. Daniel Rodrigues Pipa**

Esta tese foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de DOUTOR EM CIÊNCIAS – Área de Concentração: **Engenharia de Automação e Sistemas**, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial – CPGEI – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, às **9:00h** do dia **17 de julho de 2015**. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

---

Prof. Dr. Flávio Neves Junior  
(Presidente – UTFPR)

---

Prof. Dr. João Marcos Alcoforado Rebello  
(UFRJ)

---

Prof. Dr. Sergio Damasceno Soares  
(PETROBRAS)

---

Profa. Dra. Lúcia Valéria Ramos de Arruda  
(UTFPR)

---

Prof. Dr. Marcelo Victor Wüst Zibetti  
(UTFPR)

Visto da Coordenação:

---

Prof. Dr. Emilio Carlos Gomes Wille  
(Coordenador do CPGEI)

Dedico este trabalho a minha esposa Silvana e minhas filhas Marcella e Marianna que, com muito apoio, paciência e amor, foram a minha grande fonte de inspiração.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou e protegeu o meu caminho durante esta caminhada, principalmente nos momentos difíceis e nas longas viagens entre Pato Branco e Curitiba.

Ao meu orientador e amigo Flávio Neves Junior por me aceitar como seu orientado e pelo apoio e orientações dados ao longo do curso. Também agradeço ao meu co-orientador Daniel Rodrigues Pipa pelas diversas discussões que contribuíram em muito no meu trabalho. A ele também agradeço pela amizade e companheirismo.

Ao Grupo de Pesquisas em Reconstrução de Imagens e seus membros pelas nossas reuniões semanais que me ajudaram muito na compreensão dos fundamentos da reconstrução de imagens.

Aos estágios Guilherme Massaharu Omi, Mariane Mayumi Tominaga e Paula Iumi Ohashi por me auxiliarem no desenvolvimento do sistema de medição e aquisição de sinais *A-scan*.

Aos companheiros do Laboratório de Automação e Sistemas de Controle Avançado (LASCA), César Ofuchi, Geraldo Trabaquini e Rafael Daciuk, pelas discussões sobre técnicas de ultrassom e pelo auxílio no uso dos equipamentos do LASCA. E aos demais colegas do LASCA pela amizade.

À professora Dra. Lúcia Valéria Ramos de Arruda e ao professor Dr. João Marcos Alcoforado Rebello por participarem, além da banca examinadora, também da banca de qualificação. Os seus comentários e sugestões na qualificação contribuíram muito no resultado final do trabalho. Agradeço também ao engenheiro Dr. Sergio Damasceno Soares e ao professor Dr. Marcelo Victor Wüst Zibetti pela participação na banca examinadora e por suas valiosas contribuições.

Ao engenheiro Gustavo Pinto Pires, da Petrobras, que mesmo participando como convidado na qualificação e na defesa da tese, me apresentou diversos comentários e sugestões extremamente úteis.

À Agência Nacional do Petróleo (ANP) e à Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), através do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás – PRH-

ANP/PFRH-PETROBRAS-PRH10/UTFPR, pelo suporte financeiro ao LASCA, possibilitando esta pesquisa.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por também fornecer suporte financeiro ao LASCA e a esta pesquisa.

À Fundação Araucária pelo apoio financeiro na compra do equipamento PXI, fundamental na execução desse trabalho.

Ao Departamento de Elétrica da UTFPR câmpus Pato Branco por me conceder o afastamento total durante o período do doutorado.

Aos meus cunhados Célia e João Carlos (Zymbha), pelos jantares e carona para a rodoviária todas às quintas-feiras.

A meus pais que me acolheram em sua casa durante todo o período que permaneci em Curitiba. E também aos meus sogros que acolhem a minha família em Pato Branco.

E finalmente a minha esposa Silvana e minhas filhas Marcella e Marianna, por tudo o que representam na minha vida.

## RESUMO

GUARNERI, Giovanni Alfredo. IDENTIFICAÇÃO DE DESCONTINUIDADES EM PEÇAS METÁLICAS UTILIZANDO SINAIS ULTRASSÔNICOS E TÉCNICAS DE PROBLEMAS INVERSOS. 157 f. Tese de Doutorado – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Este trabalho propõe um algoritmo para identificar descontinuidades internas em uma peça metálica a partir de sinais *A-scan* provenientes de um ensaio não-destrutivo por ultrassom. As descontinuidades são identificadas por seu formato, dimensões, orientação e localização. Esse algoritmo é baseado na resolução de problemas inversos. O problema da identificação de descontinuidades é modelado utilizando uma abordagem inédita, em que a descontinuidade é caracterizada por dois elementos distintos: a sua amplitude de espalhamento e a localização de seu centro. Com essa nova forma de representação, o problema de identificação da descontinuidade passa a ser dividido em dois subproblemas. O primeiro é o problema de reconstrução para encontrar a localização do centro da descontinuidade e o segundo é o problema de caracterização para estimar os parâmetros geométricos da descontinuidade. Os ensaios realizados comprovam que o problema de localização é resolvido de forma satisfatória utilizando o algoritmo de reconstrução de imagens esparsas UTSR (*ultrasonic sparse reconstruction*). A caracterização da descontinuidade é realizada por um algoritmo baseado no método dos mínimos quadrados não-lineares, com a inclusão de um termo de regularização não-quadrático utilizando norma  $l_1$ . Os resultados obtidos tanto com dados simulados como com dados experimentais mostram que esse algoritmo estima as descontinuidades de forma satisfatória.

**Palavras-chave:** Identificação de descontinuidades, Inspeção Não-Destrutiva por Ultrassom, Problemas Inversos, Deconvolução Cega, Representações Esparsas



## ABSTRACT

GUARNERI, Giovanni Alfredo. DISCONTINUITIES IDENTIFICATION IN METAL PARTS USING ULTRASONIC SIGNALS AND INVERSE PROBLEMS TECHNIQUES. 157 f. Tese de Doutorado – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

The present work proposes an algorithm to identify internal discontinuities in metallic specimen from *A-scan* ultrasonic signals. Discontinuities are identified by their shape, size, orientation and location. This algorithm is based on inverse problems. The identification of discontinuities is modeled using a novel approach. The discontinuity is modeled by two distinct elements: its scattering amplitude and its center location. Through this approach, the identification problem is split into two sub problems. The first is a reconstruction problem to find the location of the discontinuity. The second is a model identification problem to estimate geometric parameters of the discontinuity. Simulations and experimental validation show that the localization problem is satisfactorily solved using the UTSR (ultrasonic sparse reconstruction) algorithm. The characterization of discontinuities is carried out by an algorithm based on non-linear least squares with  $l_1$  norm regularization. The results obtained with simulated data as well with experimental data show a fine estimation of discontinuities.

**Keywords:** Discontinuities Identification, Ultrasonic Non-destructive Testing, Inverse Problems, Blind Deconvolution, Sparse Representation

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1	– Diagrama de blocos de um sistema END por ultrassom .....	23
FIGURA 2	– Exemplo de sinal <i>A-scan</i> .....	23
FIGURA 3	– Configurações para inspeção por contato .....	24
FIGURA 4	– Configuração do arranjo <i>pitch-catch</i> .....	25
FIGURA 5	– Ondas diretas e de borda .....	34
FIGURA 6	– Campo de onda emitido por um transdutor circular .....	36
FIGURA 7	– Incidência de ondas sobre uma descontinuidade .....	37
FIGURA 8	– Descontinuidade planar como volumétrica .....	37
FIGURA 9	– Incidência segundo a aproximação de Kirchhoff .....	39
QUADRO 1	– Equações aproximadas de Kirchhoff .....	42
FIGURA 10	– Representação simplificada de um sistema real .....	46
QUADRO 2	– Métodos diretos de regularização .....	51
FIGURA 11	– Algoritmo IRLS .....	54
FIGURA 12	– Diagrama do sistema de inspeção implementado .....	59
FIGURA 13	– Foto do sistema mecânico implementado .....	60
FIGURA 14	– Aquisição <i>A-scan</i> .....	61
FIGURA 15	– Varredura lateral e a delimitação da ROI .....	62
FIGURA 16	– Resposta elétrica conjunta do transdutor .....	63
FIGURA 17	– Resposta total do sistema de medição .....	64
FIGURA 18	– Comparação entre sinais <i>A-scan</i> simulado e medido .....	65
FIGURA 19	– Mapeamento de domínio na transformação de Stolt .....	72
FIGURA 20	– Algoritmo do operador linear do modelo .....	74
FIGURA 21	– Algoritmo do operador adjunto do modelo .....	74
FIGURA 22	– Pseudocódigo do algoritmo UTSR baseado no IRLS .....	76
FIGURA 23	– Imagens reconstruídas de um refletor pontual com dados simulados .....	78
FIGURA 24	– Geometria do primeiro objeto inspecionado .....	80
FIGURA 25	– Imagens reconstruídas de um refletor pontual com dados medidos .....	81
FIGURA 26	– Gráficos de perfil lateral e de profundidade .....	82
FIGURA 27	– Geometria do segundo objeto inspecionado .....	83
FIGURA 28	– Imagens reconstruídas de quatro refletores pontuais com dados medidos ..	84
FIGURA 29	– Inspeção END de uma descontinuidade .....	87
FIGURA 30	– Pseudocódigo do algoritmo de reconstrução LS .....	89
FIGURA 31	– Pseudocódigo do algoritmo de reconstrução RLS .....	90
FIGURA 32	– Imagem da solução ideal de $f(x, z)$ .....	91
FIGURA 33	– Imagem da reconstrução por mínimos quadrados .....	92
FIGURA 34	– Imagem da reconstrução por RLS .....	93
FIGURA 35	– Imagem da reconstrução por RLS com $\lambda$ aumentado .....	93
FIGURA 36	– Imagem da reconstrução por UTSR .....	94
FIGURA 37	– Imagens da reconstrução por mínimos quadrados .....	95
FIGURA 38	– Imagens da reconstrução por RLS .....	96
FIGURA 39	– Imagens da reconstrução por UTSR .....	97
FIGURA 40	– Imagens da reconstrução por RLS com $\lambda$ aumentado .....	98

FIGURA 41	–	Imagens da reconstrução por UTSR com $\lambda$ aumentado	99
QUADRO 3	–	Descrição dos modelos de descontinuidades	102
FIGURA 42	–	Reconstruções pelo modelo <i>POINT</i>	104
FIGURA 43	–	Reconstruções pelo modelo <i>FBH-1mm</i>	105
FIGURA 44	–	Reconstruções pelo modelo <i>FBH-4mm</i>	106
FIGURA 45	–	Reconstruções pelo modelo <i>SPH-1mm</i>	107
FIGURA 46	–	Reconstruções pelo modelo <i>SPH-4mm</i>	108
FIGURA 47	–	Reconstruções pelo modelo <i>SDH-1mm</i>	109
FIGURA 48	–	Reconstruções pelo modelo <i>SDH-4mm</i>	110
FIGURA 49	–	Peça metálica com furo lateral passante de 10 mm	111
FIGURA 50	–	Reconstruções para SDH com 1 mm de diâmetro	113
FIGURA 51	–	Reconstruções para SDH com 10 mm de diâmetro	114
FIGURA 52	–	Pseudocódigo do algoritmo de caracterização da descontinuidade	119
FIGURA 53	–	Resultados para vazios esféricos com dados simulados	121
FIGURA 54	–	Resultados para furos de base plana com dados simulados	122
FIGURA 55	–	Resultados para furos laterais passantes com dados simulados	123
FIGURA 56	–	Detalhe do gráfico da função custo para SDH com 10 mm de diâmetro	124
FIGURA 57	–	Peça metálica com furo lateral passante de 5 mm	125
FIGURA 58	–	Resultados para furos laterais passantes com dados experimentais	127
FIGURA 59	–	Reflexão e transmissão de ondas incidentes normais	142
FIGURA 60	–	Reflexão e transmissão em 2D	144
FIGURA 61	–	Representação em 3D da reflexão e transmissão	145
FIGURA 62	–	Transdutor circular do tipo pistão	148
FIGURA 63	–	Amplitude do campo sobre o eixo	149
FIGURA 64	–	Amplitude do campo fora do eixo	150
FIGURA 65	–	Transdutor de contato normal	151

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Valores API — dados simulados .....	79
TABELA 2	– Valores API — dados experimentais .....	82
TABELA 3	– Tempos de execução das reconstrução .....	100
TABELA 4	– Erros quadráticos médios com dados simulados .....	103
TABELA 5	– Erros quadráticos médios com dados medidos .....	112
TABELA 6	– Validação experimental do algoritmo para caracterização de descontinuidades .....	125

## LISTA DE SIGLAS

END	ensaio não-destrutivo
<i>A-scan</i>	do original <i>amplitude scanning</i>
SAFT	do original <i>synthetic aperture focusing technique</i>
SVM	do original <i>support vector machine</i>
LIT	linear invariante no tempo
LS	do original <i>least squares</i>
MN	do original <i>minimum norm</i>
SVD	do original <i>singular value decomposition</i>
MAP	máximo <i>a posteriori</i>
RLS	do original <i>regularized least square</i>
CG	gradiente conjugado
IRLS	do original <i>iteratively reweighted least squares</i>
TV	do original <i>total variation</i>
ROI	do original <i>region of interest</i>
SA	do original <i>synthetic aperture</i>
GPU	do original <i>graphics processing unit</i>
FMC	do original <i>full matrix capture</i>
TFM	do original <i>total focusing method</i>
IWEX	do original <i>inverse wave field extrapolation</i>
UTSR	do original <i>ultrasonic sparse reconstruction</i>
API	do original <i>array performance indicator</i>
SDH	do original <i>side-drilled hole</i>
FBH	do original <i>flat-bottom hole</i>
MSE	do original <i>mean square error</i>
ML	do original <i>maximum likelihood</i>
MMSE	do original <i>minimum mean squared error</i>
ARMA	do original <i>autoregressive moving average</i>
AM	do original <i>alternating minimization</i>
SESOP	do original <i>sequential subspace optimization</i>
FISTA	do original <i>fast iterative shrinkage-thresholding algorithm</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Delta u$	Período de amostragem espacial
$t$	Tempo
$f$	Frequência temporal
$\omega$	Frequência angular
$k$	Frequência espacial
$k_p$	Frequência espacial das ondas longitudinais
$k_s$	Frequência espacial das ondas transversais
$\rho_0$	Densidade de um material
$R_p$	Coefficiente de reflexão da descontinuidade
$\Delta t$	Diferença de tempo entre a emissão e recepção de pulsos ultrassônicos
$x, z$	Coordenadas da ROI dentro de uma peça
$\vec{x}, \vec{y}, \vec{r}, \vec{u}$	Posições de pontos no espaço
$c$	Velocidade de propagação do som em um meio físico
$c_p$	Velocidade das ondas longitudinais
$c_s$	Velocidade das ondas transversais
$v_i(t)$	Sinal elétrico de controle para o disparo do pulsador
$v_o(t)$	Sinal elétrico na saída do amplificador do transdutor de recepção
$h(t)$	Resposta ao impulso de um sistema
$V_i(\omega)$	Representação de $v_i(t)$ no domínio da frequência
$V_o(\omega)$	Representação de $v_o(t)$ no domínio da frequência
$H(\omega)$	Função de transferência de um sistema
$H_{et}(\omega)$	Resposta eletro-acústica de transmissão
$H_{er}(\omega)$	Resposta eletro-acústica de recepção
$H_e(\omega)$	Resposta elétrica conjunta
$P(\omega)$	Resposta da propagação de ondas
$M(\omega)$	Resposta da atenuação pela propagação
$C_T(\omega)$	Fator de correção da difração na transmissão
$C_R(\omega)$	Fator de correção da difração na recepção
$T_1(\omega)$	Resposta da propagação através de interface fluido-sólido
$T_2(\omega)$	Resposta da propagação através de interface sólido-fluido
$A(\omega, \Theta)$	Amplitude do espalhamento
$\Theta$	Parâmetros físicos de uma descontinuidade
$\Re\{\cdot\}$	Parte real
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Transformada de Fourier
$\mathcal{S}\{\cdot\}$	Modelagem de Stolt
$\delta$	Impulso unitário (delta de Dirac)
$\nabla$	Operador gradiente
$\nabla \times$	Operador rotacional
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$\vec{n}$	Vetor unitário normal a uma superfície
$\vec{d}^p$	Vetor unitário de polarização das ondas longitudinais

$\vec{\mathbf{d}}^s$	Vetor unitário de polarização das ondas transversais
$\vec{\mathbf{e}}_i$	Vetor unitário na direção das ondas incidentes
$\vec{\mathbf{e}}_r$	Vetor unitário na direção das ondas refletidas
$\vec{\mathbf{e}}_t$	Vetor unitário na direção das ondas transmitidas por uma interface
$\vec{\mathbf{e}}_s$	Vetor unitário na direção de observação das ondas espalhadas
$a$	Raio do transdutor
$R$	Distância entre o centro do transdutor e um ponto de observação
$\theta$	Ângulo entre o eixo central do transdutor e um ponto de observação
$S$	Superfície ativa do transdutor
$\mathbf{f}$	Vetor de dados da entrada de um sistema linear
$\mathbf{v}$	Vetor de dados da saída de um sistema linear
$\mathbf{H}$	Matriz do modelo de um sistema linear
$\eta$	Vetor de ruído
$L, M, N$	Variáveis indicadoras de quantidade de elementos em vetores e matrizes
$i, j, l$	Variáveis de índices
$[\cdot]^T$	Transposto de vetores e matrizes
$[\cdot]^{-1}$	Inverso de matriz
$\cdot^\dagger$	Operador adjunto
$\cdot^*$	Conjugado complexo
$\ \cdot\ _p$	Norma $l_p$ de um vetor
$\hat{\cdot}$	Valor estimado
$\lambda, \lambda_1$	Parâmetros de regularização
$[\mathbf{L}\mathbf{f}]_i$	$i$ -ésimo elemento do vetor resultante da operação de multiplicação matriz-vetor $\mathbf{L}\mathbf{f}$
$\mathbf{D}$	Operador de derivadas direcionais
$\sigma^2$	Variância
$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$	Distribuição normal com média 0 e variância $\sigma^2$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>INSPEÇÃO NÃO-DESTRUTIVA POR ULTRASSOM</b>	<b>22</b>
2.1	SISTEMA DE INSPEÇÃO END POR ULTRASSOM	22
2.2	MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO	25
2.3	FUNDAMENTOS DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS	27
2.3.1	Equação da onda	27
2.3.2	Propagação de ondas acústicas e elásticas	28
2.3.3	Equação da onda com uma fonte pontual	31
2.3.4	Função de transferência da propagação de ondas	31
2.3.5	Atenuação durante a propagação	32
2.3.6	Propagação através de interfaces	33
2.4	DIFRAÇÃO NA TRANSMISSÃO DE ONDAS ULTRASSÔNICAS	33
2.5	AMPLITUDE DO ESPALHAMENTO	36
2.5.1	Aproximação de Kirchhoff	38
2.6	DIFRAÇÃO NA RECEPÇÃO DE ONDAS ULTRASSÔNICAS	43
2.7	CONCLUSÕES	44
<b>3</b>	<b>PROBLEMAS INVERSOS</b>	<b>45</b>
3.1	DEFINIÇÃO DE PROBLEMA INVERSO	45
3.2	SOLUÇÕES DOS MÍNIMOS QUADRADOS	48
3.3	REGULARIZAÇÃO	49
3.3.1	Métodos de regularização quadráticos	50
3.3.2	Métodos de regularização não-quadráticos	52
3.4	ALGORITMO IRLS	53
3.5	ESCOLHA DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO	55
3.6	CONCLUSÕES	56
<b>4</b>	<b>MODELAGEM DO SISTEMA DE MEDIÇÃO CONSTRUÍDO</b>	<b>58</b>
4.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO	58
4.2	PROCESSO DE AQUISIÇÃO	60
4.3	MODELAGEM ANALÍTICA DA RESPOSTA DO SISTEMA DE MEDIÇÃO	62
4.4	CONCLUSÕES	66
<b>5</b>	<b>RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS ESPARSAS</b>	<b>67</b>
5.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	69
5.1.1	Limitação do problema a duas dimensões	70
5.1.2	Migração e modelagem de Stolt	71
5.1.3	Modelagem matricial	72
5.1.4	Implementação dos operadores	73
5.2	ALGORITMO PARA RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS ESPARSAS	74
5.2.1	Implementação do algoritmo	75
5.3	SIMULAÇÕES	76
5.4	VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL	79
5.4.1	Imagens reconstruídas do primeiro objeto	79



5.4.2	Imagens reconstruídas do segundo objeto .....	80
5.5	CONCLUSÕES .....	85
<b>6</b>	<b>PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO DE DESCONTINUIDADES .....</b>	<b>86</b>
6.1	PROBLEMA DA LOCALIZAÇÃO DE UMA DESCONTINUIDADE .....	87
6.1.1	Modelagem analítica do problema .....	88
6.2	ALGORITMOS PARA LOCALIZAÇÃO DA DESCONTINUIDADE .....	89
6.3	ENSAIOS PARA LOCALIZAÇÃO DE DESCONTINUIDADES .....	90
6.3.1	Descrição do objeto inspecionado .....	90
6.3.2	Ensaio com dados simulados .....	91
6.3.3	Validação experimental .....	93
6.4	PROBLEMA DA CARACTERIZAÇÃO DE UMA DESCONTINUIDADE .....	100
6.5	ENSAIOS PARA CARACTERIZAÇÃO DE DESCONTINUIDADES .....	101
6.5.1	Modelos de descontinuidades utilizados nos ensaios .....	102
6.5.2	Ensaio com dados simulados .....	103
6.5.3	Validação experimental .....	111
6.6	ALGORITMO PARA CARACTERIZAÇÃO DE DESCONTINUIDADES .....	115
6.6.1	Descrição do algoritmo .....	116
6.6.2	Implementação do algoritmo .....	119
6.7	ENSAIOS PARA VALIDAÇÃO DO ALGORITMO DE CARACTERIZAÇÃO .....	120
6.7.1	Ensaio com dados simulados .....	120
6.7.2	Validação experimental .....	124
6.8	CONCLUSÕES .....	128
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES .....</b>	<b>129</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>133</b>
	<b>Apêndice A – REFLEXÃO E TRANSMISSÃO DE ONDAS ATRAVÉS DE INTER-</b>	
	<b>FACES .....</b>	<b>141</b>
A.1	ONDA INCIDENTE NORMAL À INTERFACE .....	141
A.2	ONDA INCIDENTE OBLÍQUA À INTERFACE .....	143
A.3	REFLEXÃO E TRANSMISSÃO EM TRÊS DIMENSÕES .....	145
	<b>Apêndice B – CAMPOS DE ONDAS EMITIDOS POR TRANSDUTORES CIRCU-</b>	
	<b>LARES .....</b>	<b>147</b>
B.1	INTEGRAL DE RAYLEIGH-SOMMERFELD .....	147
B.2	CAMPO DE ONDA DE PRESSÃO PARA TRANSDUTORES CIRCULARES EM	
	FLUIDOS .....	148
B.3	CAMPO DE ONDA DE TENSÃO MECÂNICA PARA TRANSDUTORES CIRCU-	
	LARES DE CONTATO .....	151
	<b>Apêndice C – IMPLEMENTAÇÃO DOS OPERADORES MATRICIAIS .....</b>	<b>153</b>
	<b>Anexo A – DOCUMENTAÇÃO DO TRANSDUTOR VIDEOSCAN V110-RM .....</b>	<b>157</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A qualidade de produtos e serviços é um fator primordial para o sucesso de qualquer empreendimento. Dessa forma, é comum que empresas, em qualquer ramo de atividade, busquem métodos que auxiliem no controle de qualidade de seus produtos ou serviços. Um desses métodos, amplamente utilizado nas indústrias dos setores de petroquímico, siderúrgico, naval, aeroespacial, eletromecânico e outros, é o *ensaio não-destrutivo* (END) (ABENDI, 2014).

Hellier (2003) define END como um exame, teste ou avaliação realizada em qualquer tipo de objeto, sem que haja sobre ele nenhuma forma de alteração. O objetivo do END é determinar a presença de condições que possam ter um efeito negativo sobre a usabilidade desse objeto. Mas, para que esse objetivo seja atingido, são necessárias: (I) definição de procedimentos de medição adequados para a detecção das condições de falha; (II) projeto e construção da instrumentação utilizada para fazer as medições e; (III) o desenvolvimento de técnicas para análise das medidas obtidas. Isso indica que os ENDs pertencem a uma área de estudo multidisciplinar (THOMPSON; THOMPSON, 1985).

Existem diversas técnicas usadas para ENDs, cada uma com vantagens e desvantagens, sendo que a escolha da técnica mais adequada depende das condições de falha procuradas e do objeto inspecionado. As principais técnicas, citadas pela ABENDI (2014) são:

- ensaio visual;
- radiografia, radioscopia e gamagrafia;
- líquidos penetrantes;
- ultrassom;
- correntes parasitas e
- emissão acústica.

Entre essas técnicas de END, o END por ultrassom é uma das mais utilizadas. Thompson e Thompson (1985) justificam essa ampla utilização do ultrassom por três razões: (I) a

facilidade na geração e recepção dos sinais ultrassônicos, que simplifica o desenvolvimento dos instrumentos de medição; (II) a característica de penetração profunda das ondas de ultrassom no interior das peças, sem que haja atenuação excessiva e; (III) a capacidade dos sinais de retorno (ecos) carregarem informações relacionadas com as características do material e de descontinuidades encontradas. Com base nisso, a técnica de END por ultrassom é aplicada quando se deseja não somente encontrar descontinuidades no interior de peças, mas também classificá-las e caracterizá-las por seus tamanhos, formas, orientação e localização.

Os instrumentos de medição utilizados no END por ultrassom emitem ondas ultrassônicas no objeto inspecionado e, em seguida, recebem os eventuais sinais refletidos por descontinuidades internas ao objeto. Então, esses sinais de eco são digitalizados por um sistema de aquisição e disponibilizados para análise. Tais sinais são chamados de *sinais de varredura em amplitude (A-scan* — do original *amplitude scanning*) (SCHMERR, 1998, p. 11). Inspetores treinados e qualificados são capazes de analisar tais sinais e obter as informações necessárias para a caracterização das descontinuidades encontradas.

Contudo, a interpretação de sinais *A-scan* sem processamento (brutos) é muito difícil de ser feita. Os ecos das descontinuidades podem estar contaminados por ruídos de medição. Ou ainda, eles podem estar sobrepostos a ecos indesejados, provenientes de reflexões múltiplas de outras descontinuidades ou das faces do objeto inspecionado. Desta forma, mesmo inspetores devidamente treinados podem fornecer resultados não confiáveis (DOCTOR et al., 1986). Portanto, o uso de métodos que auxiliem os inspetores na análise desses sinais é essencial para melhorar a confiabilidade dos resultados da inspeção. De acordo com Müller et al. (1986), no caso da detecção de descontinuidades durante um procedimento de inspeção, esses métodos de análise devem ser capazes de:

- diferir ecos refletidos por descontinuidades dos ecos oriundos das paredes da peça inspecionada;
- indicar suas posições;
- identificar seus tipos e
- medir suas dimensões.

Nesse sentido, Chiao e Thomas (1994) classificam os métodos de análise em dois grandes grupos: métodos não-paramétricos, ou baseados em imagens, e os métodos paramétricos, baseados em modelos. As técnicas do primeiro grupo se caracterizam pela análise de imagens formadas por um conjunto de sinais *A-scan*. No segundo grupo, estão as técnicas em que a

resposta acústica característica de uma descontinuidade é modelada por equações, cujos parâmetros estão relacionados diretamente com as características físicas da descontinuidade. Assim, um ou mais sinais *A-scan* medidos são comparados com as respostas desses modelos para determinar, não só a presença de uma descontinuidade, como também as suas características físicas.

Existem diversos trabalhos publicados em que são descritos métodos de cada um desses grupos. Como destaque, no grupo de métodos não-paramétricos, está a técnica de focalização por abertura sintética (SAFT — do original *synthetic aperture focusing technique*), que foi introduzida na década de 1970 com os trabalhos de Prine (1972), Burckhardt et al. (1974), Frederick et al. (1976), Corl et al. (1978) e Kino et al. (1980). A partir desses trabalhos, uma série de outros estudos se seguiram, tais como Kramer (1989), em que a técnica SAFT é utilizada para detectar o tamanho de defeitos em soldas. Uma descrição detalhada da SAFT pode ser encontrada em Seydel (1982). Entretanto, um aprimoramento dessa técnica, publicado em Mayer et al. (1990) e chamada de FT-SAFT, passou a ser o método não-paramétrico mais utilizado pela comunidade de ENDS, devido a sua eficiência computacional.

Entre os métodos paramétricos, algumas técnicas são baseadas na medição de características de amplitude, tempo e frequência dos sinais *A-scan* (DOYLE; SCALA, 1978; ARAKAWA et al., 1985). Uma abordagem que apresenta uma grande quantidade de trabalhos publicados é a da análise dos sinais *A-scan* por sistemas “inteligentes”, treinados a partir de sinais de amostras padronizadas ou gerados por simuladores. Esses sistemas podem ser implementados por redes neurais (CASE; WAAG, 1996; POLIKAR et al., 1998; MARGRAVE et al., 1999; SONG et al., 2002; BETTAYEB et al., 2004; PITA et al., 2004; VEIGA et al., 2005; SAMBATH et al., 2011; GUARNERI et al., 2013), lógica *fuzzy* (RAMUHALLI et al., 2002; LIAO, 2003; RAVANBOD, 2005; QIDWAI; BETTAYEB, 2009), máquinas de vetor de suporte (SVM — do original *support vector machine*) (KHELIL et al., 2005; GAO et al., 2006; MIAO et al., 2008), classificadores lineares (MOURA et al., 2004) e outros tipos de classificadores (VIEIRA et al., 2008; NUNES et al., 2012). Também fazem parte dos métodos paramétricos aqueles que procuram estimar modelos para as descontinuidades. Entre eles estão os trabalhos que utilizam técnicas de deconvolução dos sinais *A-scan* (DEMIRLI; SANIIE, 2001b; KIM et al., 2004; YAMANI, 2007; SHAKIBI et al., 2012; CHEN et al., 2013).

Nos últimos anos, pesquisadores têm abordado o problema de extrair informações sobre descontinuidades a partir de sinais *A-scan* de uma forma diferente, tratando-o com um *problema inverso*. Por essa abordagem é possível criar tanto métodos não-paramétricos como paramétricos de análise para sinais *A-scan*. Como exemplo de trabalhos publicados sobre métodos não-paramétricos pode-se citar Lingvall et al. (2003), Lingvall e Olofsson (2005), Wennerstrom

et al. (2006), Olofsson e Wennerstrom (2007), Satyanarayan et al. (2010), Shieh et al. (2012), Tuysuzoglu et al. (2012), Bazulin (2013) e Guarneri et al. (2015). Em todos eles, um conjunto de sinais *A-scan* é utilizado para reconstruir uma “imagem” representando a intensidade da refletividade acústica dos pontos referentes a uma região interna da peça inspecionada.

Entretanto, são poucos os trabalhos publicados que tratam de métodos paramétricos para análise de sinais *A-scan* utilizando a abordagem dos problemas inversos. Como exemplo tem-se Schmerr et al. (2002) e Narduzzi (2005). Diante desse cenário, o desenvolvimento desses métodos mostra-se uma área de pesquisa bastante promissora e, portanto, servindo de motivação para este trabalho de pesquisa.

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo que possa, a partir de um conjunto de sinais *A-scan* obtidos durante um END de uma peça, identificar uma descontinuidade interna à peça. No escopo deste trabalho, identificar significa caracterizar a descontinuidade em relação a sua forma, orientação dentro da peça e dimensões. Além disso, também entra nessa definição, localizar a descontinuidade dentro da peça, pela indicação do seu ponto geométrico central. Para atingir esse objetivo principal foi preciso cumprir os seguintes objetivos específicos:

- Construir um sistema de medição e aquisição de sinais *A-scan*. Esse sistema deve ter capacidade para movimentar um transdutor ultrassônico sobre uma peça, em sincronia com o processo de aquisição de dados.
- Desenvolver um modelo do problema de identificação de descontinuidades no formato apropriado de um problema inverso, de forma a permitir o uso das ferramentas disponíveis para a sua resolução.
- Desenvolver e implementar um algoritmo de reconstrução de imagens apropriado para imagens esparsas (com poucos pontos não nulos), de tal modo que possa ser utilizado na localização do ponto geométrico central de uma descontinuidade.
- Desenvolver e implementar um algoritmo para caracterização da descontinuidade em relação a sua forma e dimensões.

O sistema de medição e aquisição foi construído, de forma que foi possível realizar ensaios práticos em peças contendo descontinuidades internas. Foram realizadas inspeções com diversos tipos diferentes de peças, e os dados obtidos serviram na validação do modelo do sistema e dos algoritmos implementados.

O modelo desenvolvido, baseado em um modelo linearizado do sistema de medição proposto por Schmerr (1998), adota uma maneira inédita de representar a descontinuidade no problema inverso. Na abordagem clássica, adotada pelos métodos não-paramétricos de análise de sinais *A-scan* pela resolução de problemas inversos, procura-se reconstruir a imagem da refletividade acústica da descontinuidade a partir dos sinais *A-scan* e do modelo do sistema de medição. Neste trabalho, a descontinuidade é representada por dois termos independentes. O primeiro representa a amplitude do espalhamento de onda causado pela descontinuidade e é incorporado ao modelo do sistema de medição. O segundo termo, que representa a posição do centro geométrico da descontinuidade dentro da ROI, é a “imagem” a ser reconstruída pelo problema inverso. Nessa situação, a solução procurada é *esparsa*. Essa característica de esparsidade permite algumas simplificações nos algoritmos para resolução de problemas de reconstrução. Os ensaios realizados mostram que essa abordagem pode ser utilizada com sucesso.

Com essa nova abordagem, o problema inverso de identificação de descontinuidades passa a ser tratado como dois subproblemas: um problema de reconstrução para encontrar o centro geométrico da descontinuidade e um problema de caracterização da descontinuidade. Dessa forma, para cumprir o terceiro objetivo específico foi preciso implementar um algoritmo que resolva o problema de reconstrução esparsa. Esse algoritmo foi implementado, testado e comparado com outros algoritmos tradicionais de reconstrução, tanto com dados simulados como com dados medidos em peças reais. Os resultados obtidos nos ensaios demonstram o melhor desempenho desse algoritmo em reconstruir imagens esparsas em relação aos métodos tradicionais.

O último objetivo específico foi atingido com a implementação e validação do algoritmo de caracterização de descontinuidades baseado em uma versão regularizada do método de mínimos quadrados não-lineares. O método de regularização utilizado é não-quadrático, usando a norma  $l_1$ .

Este trabalho está dividido em sete capítulos, três apêndices e um anexo. A relação desses capítulos e os seus conteúdos são descritos a seguir:

- Capítulo 2: apresenta a fundamentação teórica sobre o processo dos END por ultrassom, tratando-o como um sistema linear invariante. Essa fundamentação é essencial para o modelagem do problema de identificação de descontinuidades.
- Capítulo 3: traz a fundamentação teórica sobre os problemas inversos e os algoritmos para a resolução de problemas de reconstrução.

- Capítulo 4: descreve o sistema de medição e aquisição implementado. Também nele é apresentada a modelagem analítica do sistema, baseada na fundamentação do Capítulo 2.
- Capítulo 5: apresenta a modelagem, o desenvolvimento e a implementação do algoritmo para reconstrução de imagens esparsas. A validação do método é realizada por ensaios com dados simulados e experimentais. O desempenho do algoritmo é comparado com outros algoritmos de reconstrução tradicionais.
- Capítulo 6: apresenta o problema de identificação de descontinuidades, dividindo-o em dois subproblemas. No primeiro, a localização da descontinuidade é modelada como uma imagem esparsa e o problema é resolvido utilizando o método descrito no Capítulo 5 e outros dois algoritmos tradicionais. Os resultados de dois ensaios são apresentados, mostrando as soluções obtidas pelos três algoritmos. Em seguida é descrito o segundo subproblema e levantada uma hipótese sobre sua resolução. Os resultados dos ensaios para a verificação da hipótese são apresentados e discutidos. Finalmente, é desenvolvido e implementado um método para a resolução desse problema e são mostrados e discutidos os resultados dos ensaios para sua validação.
- Capítulo 7: apresenta as principais conclusões do trabalho e as perspectivas futuras para a continuação da pesquisa.

## 2 INSPEÇÃO NÃO-DESTRUTIVA POR ULTRASSOM

O END de peças mecânicas por ultrassom está baseado no princípio da propagação e reflexão de ondas sonoras de alta frequência em um meio sólido. Com os sinais de eco recebidos após a emissão de pulsos ultrassônicos, é possível obter informações sobre a localização, tamanho e orientação de descontinuidades existentes no material inspecionado (KRAUT, 1976; ADLER; LEWIS, 1976; SILK; LIDINGTON, 1977; DOYLE; SCALA, 1978).

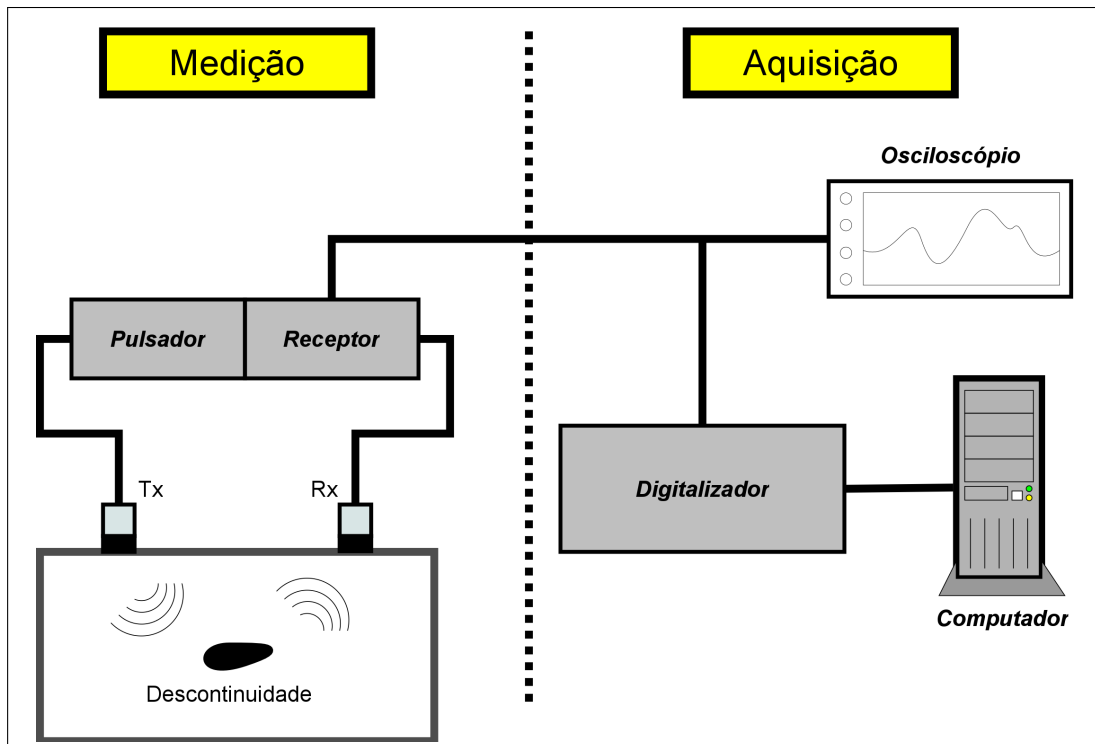
### 2.1 SISTEMA DE INSPEÇÃO END POR ULTRASSOM

A realização de um END por ultrassom necessita de um sistema de medição e aquisição apropriado. A Figura 1 apresenta o diagrama em blocos básico de um sistema de inspeção desse tipo. O sistema de inspeção pode ser dividido em duas partes: sistema de medição e sistema de aquisição. O sistema de medição é responsável pela geração e transmissão das ondas ultrassônicas que incidem na peça inspecionada, a recepção dos ecos emitidos pelas descontinuidades encontradas na peça e a sua conversão em sinais elétricos. O sistema de aquisição tem a função de digitalizar os sinais elétricos dos ecos recebidos e disponibilizar esses dados para computadores, onde são realizados os processamentos necessários para a análise posterior dos sinais.

Dentro do sistema de medição, o pulsador é o elemento responsável por gerar pulsos elétricos de curta duração ( $\approx 0,1 \mu s$ ) e amplitude na ordem de centenas de volts (SCHMERR, 1998). Esses pulsos excitam um transdutor piezoelétrico, que emite ondas sonoras de alta frequência (ultrassom). Como o transdutor está em contato com a peça inspecionada, essas ondas sonoras se propagam pelo material da peça.

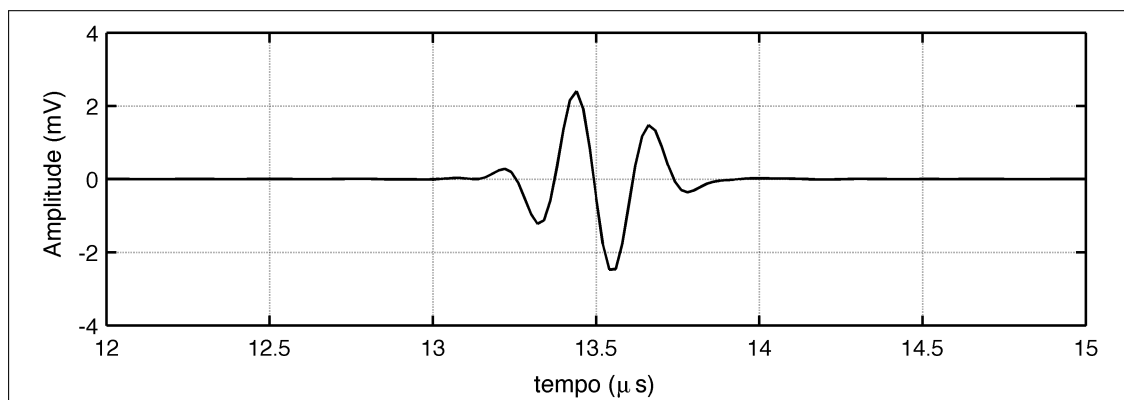
Ao atingir alguma descontinuidade dentro da peça, as ondas sonoras incidentes interagem com a mesma. Essa interação causa um espalhamento das ondas incidentes, de modo que elas são refletidas como ecos em diversas direções (BABOROVSKY et al., 1973; KINO, 1979). As ondas refletidas podem ser recebidas por um transdutor piezoelétrico receptor e convertidas em sinais elétricos. Esses sinais elétricos, após amplificados, representam em sua amplitude a





**Figura 1 – Diagrama de blocos de um sistema END por ultrassom**  
 Fonte: Adaptado de Schmerr (1998, p. 1).

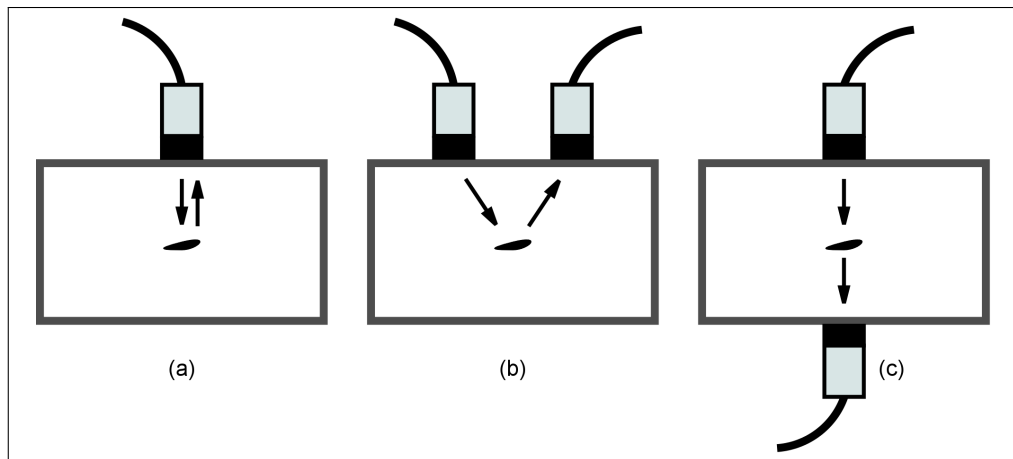
energia instantânea dos ecos recebidos (na posição do transdutor de recepção) em função do tempo. Tais sinais recebem a denominação de *A-scan* (SCHMERR, 1998, p. 11). Um exemplo de sinal *A-scan* é apresentado na Figura 2.



**Figura 2 – Exemplo de sinal *A-scan* capturado por um sistema de inspeção**  
 Fonte: Autoria própria.

Segundo Schmerr (1998, p. 10), existem três configurações diferentes para inspeção por contato utilizando ultrassom: pulso-eco, *pitch-catch* e transparência (*through-transmission*). Essas configurações são mostradas na Figura 3.

Na configuração pulso-eco é utilizado o mesmo transdutor para emitir o pulso ultrassônico e receber a resposta refletida de alguma descontinuidade existente na peça. Nessa configuração, o transdutor fica em contato somente com uma das superfícies da peça inspecionada,



**Figura 3 – Configurações para inspeção por contato com ultrassom: (a) pulso-eco, (b) *pitch-catch* e (c) transparência**  
**Fonte: Autoria própria.**

permitindo a inspeção mesmo em peças que apresentem alguma superfície de acesso difícil (p. ex. a superfície interna de tanques de armazenamento de óleo e derivados). Além de ser possível a detecção de descontinuidades internas a peça, a configuração pulso-eco permite também a medição da espessura da peça, com a detecção do eco produzido pela reflexão do pulso emitido na superfície oposta (ANDREUCCI, 2011, p. 35).

Quando são utilizados dois transdutores diferentes para a emissão do pulso e a recepção do eco, mas ambos em contato com a mesma superfície da peça, tem-se a configuração chamada *pitch-catch* ou *tandem* (MAYER et al., 1990; SPIES et al., 2012). Com essa configuração é possível detectar, de forma mais apropriada, alguns tipos de descontinuidades existentes no interior da peça, aproveitando a reflexão especular e também a difração dessas descontinuidades (RAILLON et al., 2005).

Já a configuração de transparência não é adequada para identificar ou localizar descontinuidades. Ela é indicada somente para detectar a existência de descontinuidades ou para a medição da espessura de chapas ou barras (ANDREUCCI, 2011, p. 32).

Um sinal *A-scan* contém informações sobre a descontinuidade que gerou o sinal de eco. Com o atraso no tempo entre o pulso elétrico emitido pelo pulsador e o pulso observado no sinal de eco, é possível determinar a distância percorrida pelas ondas sonoras, desde o ponto de sua emissão até o ponto de sua recepção. No caso de inspeções com a configuração pulso-eco, esse atraso é dado por  $\Delta t = 2z/c$ , em que  $z$  é a distância da superfície inspecionada até a descontinuidade e  $c$  é a velocidade de propagação do som no material inspecionado. Já a amplitude do sinal *A-scan* depende do tipo de descontinuidade e de seu tamanho (KINO, 1979; DOYLE; SCALA, 1978).

## 2.2 MODELO MATEMÁTICO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO

O sistema de medição apresentado na Figura 1 é modelado em Schmerr (1998, p. 21) como um sistema linear invariante no tempo (LIT), em que o sinal de entrada  $v_i(t)$  é o sinal elétrico de controle para o disparo do pulsador. O sinal  $v_o(t)$  é o sinal elétrico na saída do amplificador do transdutor de recepção. Schmerr (1998) considera que o sistema de medição está na configuração *pitch-catch*, sendo feita a inspeção de uma peça imersa em água (Figura 4). Essa configuração é considerada “genérica” para as aplicações de END. Isso porque os transdutores emissor e receptor são tratados como elementos independentes. Além disso, a propagação das ondas sonoras ocorre em dois meios distintos, água e material da peça. Qualquer outra configuração pode ser considerada como um caso especial dessa.

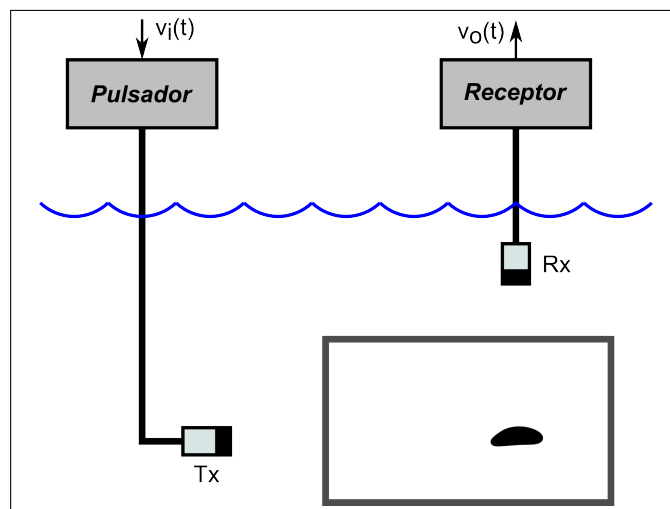
Como em todo sistema LIT, o sinal de saída  $v_o(t)$  está relacionado com o sinal de entrada  $v_i(t)$  pela equação integral de convolução da resposta ao impulso do sistema  $h(t)$  (OPPENHEIM, 2010, p. 57):

$$v_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot v_i(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

Convertendo a Eq. (1) para o domínio da frequência, pela propriedade da convolução na Transformada de Fourier (OPPENHEIM, 2010, p. 182), tem-se:

$$V_o(\omega) = H(\omega)V_i(\omega) \quad (2)$$

em que  $H(\omega)$  é a *função de transferência* do sistema.



**Figura 4 – Configuração de END por imersão com arranjo *pitch-catch***

**Fonte: Autoria própria.**

De acordo com Schmerr (1998, p. 23), a função de transferência  $H(\omega)$  é a combinação dos efeitos provocados pelos seguintes elementos do sistema de medição:

- circuitos e cabos do pulsador;
- conversão de energia elétrica em mecânica no transdutor de transmissão;
- propagação das ondas sonoras do transmissor até a descontinuidade e depois até o receptor;
- atenuação das ondas sonoras na água e no material da peça inspecionada;
- efeitos da difração das ondas sonoras emitidas pelo transmissor e que incidem na descontinuidade;
- transferência das ondas sonoras incidentes na interface água-peça;
- espalhamento devido a interação das ondas sonoras incidentes com a descontinuidade;
- transferência das ondas sonoras espalhadas na interface peça-água;
- efeitos da difração na recepção das ondas sonoras espalhadas pela descontinuidade;
- conversão de energia mecânica em elétrica no transdutor de recepção e
- amplificação, filtragem e cabos do receptor.

Apesar dos efeitos de alguns desses elementos não serem lineares, é possível a linearização quando são assumidas algumas condições (SCHMERR, 1998, p. 21). Essas condições são descritas ao longo das seções deste capítulo.

Além da linearização, é possível combinar alguns elementos, simplificando assim a função de transferência geral do sistema de medição. Os efeitos dos circuitos e cabos do pulsador, combinados com a conversão elétrica-mecânica do transdutor de transmissão formam a *resposta eletro-acústica de transmissão*  $H_{et}(\omega)$ . Os efeitos dos circuitos de amplificação, filtragem e cabos do receptor, combinados com a conversão mecânica-elétrica no transdutor de recepção, formam a *resposta eletro-acústica de recepção*  $H_{er}(\omega)$ . Por fim, ao combinar as respostas eletro-acústicas de transmissão e recepção com o sinal de entrada  $V_i(\omega)$ , tem-se a *resposta elétrica conjunta* (STEPINSKI, 2007)

$$H_e(\omega) = H_{et}(\omega)H_{er}(\omega)V_i(\omega) \quad (3)$$

também denominada como *fator de eficiência do sistema* (SCHMERR, 1998, p. 23).

Portanto, o modelo matemático do sistema de medição, considerando como lineares (ou linearizados) todos os elementos que influenciam na função de transferência  $H(\omega)$ , é

$$V_o(\omega) = H_e(\omega)P(\omega)M(\omega)C_T(\omega)T_1(\omega)T_2(\omega)C_R(\omega)A(\omega, \Theta) \quad (4)$$

em que  $P(\omega)$  é a resposta referente a propagação das ondas entre o transmissor, a descontinuidade e o receptor;  $M(\omega)$  é a atenuação das ondas causada pelos materiais durante a propagação;  $C_T(\omega)$  e  $C_R(\omega)$  são os efeitos da difração nas ondas devido a geometria dos transdutores de emissão e recepção;  $T_1(\omega)$  e  $T_2(\omega)$  são os efeitos das interfaces água-peça e peça-água (somente nos ensaios de imersão) e  $A(\omega, \Theta)$  é o espalhamento causado pela interação das ondas sonoras incidentes com a descontinuidade, caracterizada pelos parâmetros  $\Theta$ . Nas próximas seções são descritos com detalhes cada um desses elementos.

## 2.3 FUNDAMENTOS DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Conforme descrito na Seção 2.2, a propagação das ondas sonoras através de meios fluidos e sólidos é um dos componentes presente no modelo matemático do sistema de medição para END por ultrassom. Ela é representada por  $P(\omega)$  na Eq. (4). Portanto, é fundamental conhecer o processo de propagação das ondas sonoras, tanto em meios fluidos como em sólidos, para se modelar de forma correta o sistema de medição.

### 2.3.1 EQUAÇÃO DA ONDA

De acordo com Ersoy (2007, p. 26), uma onda pode ser considerada um distúrbio qualquer (eletromagnético, térmico, mecânico, acústico e outros) em um meio físico, que se propaga de um ponto a outro com uma velocidade. Assumindo que  $u(\vec{\mathbf{r}}, t)$  é a amplitude da onda no ponto  $\vec{\mathbf{r}}$  e no instante de tempo  $t$ . Considerando também que a onda se propaga em um meio homogêneo com velocidade constante  $c$ , a propagação pode ser representada matematicamente pela seguinte equação diferencial, chamada de *equação da onda* (ERSOY, 2007, p. 27):

$$\nabla^2 u(\vec{\mathbf{r}}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

em que  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  é o operador *Laplaciano*.

Se for considerado que a amplitude da onda varia de forma harmônica, em uma única frequência  $f$  (onda monocromática), ela é definida pela equação

$$u(\vec{\mathbf{r}}, t) = \text{Amp}(\vec{\mathbf{r}}) \cos[\omega t + \Phi(\vec{\mathbf{r}})] \quad (6)$$

em que  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular,  $Amp(\vec{r})$  e  $\Phi(\vec{r})$  são, respectivamente, amplitude e fase da onda na posição  $\vec{r}$ . Essa equação pode ser rescrita na forma complexa como

$$u(\vec{r}, t) = \Re \{ U(\vec{r}) \exp(i\omega t) \} \quad (7)$$

em que  $U(\vec{r}) = Amp(\vec{r}) \exp[i\Phi(\vec{r})]$  e  $\Re \{ \cdot \}$  representa a parte real de uma grandeza complexa. Então, substituindo a Eq. (7) na equação de onda (5) obtém-se a *Equação de Helmholtz*:

$$(\nabla^2 + k^2) U(\vec{r}) = 0 \quad (8)$$

em que  $k = \omega/c$  é chamado *número de onda* e representa a frequência espacial da onda.

A equação de Helmholtz é válida para todas as ondas que satisfazem a Eq. (5) (GOODMAN, 1996, p. 39). No caso de ondas policromáticas, que são compostas por uma combinação linear de ondas monocromáticas, a equação de Helmholtz também é válida, já que a mesma é linear (GOODMAN, 1996, p. 53).

A amplitude de  $U(\vec{r})$  ao longo das diferentes posições  $\vec{r}$  é definida como o *campo de onda*. O campo de onda pode ser *escalar*, quando a amplitude da onda é representada somente por um valor, ou *vetorial*, quando a amplitude é representada por um vetor. A propagação da onda pode ser tratada como a variação do campo de onda no espaço ao longo do tempo. As ondas ultrassônicas que se propagam em fluidos são as variações de um campo escalar de pressão, enquanto a propagação em sólidos são as variações de um campo vetorial de tensão mecânica<sup>1</sup>.

### 2.3.2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS E ELÁSTICAS

De acordo com Schmerr (1998, p. 29), nos ENDS por ultrassom estão envolvidos fenômenos associados com a geração, propagação e dispersão de dois tipos de onda: ondas acústicas e ondas elásticas.

As ondas acústicas se propagam nos fluidos compressíveis ideais pela variação no campo de pressão  $p(\vec{r}, t)$ . Se essas ondas são observadas em um ponto  $\vec{r}$  muito distante do ponto de origem do distúrbio na pressão, a variação no campo de pressão segue a seguinte equação diferencial (SCHMERR, 1998, p. 32):

$$\nabla^2 p(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

<sup>1</sup>A tensão mecânica nos sólidos é equivalente a pressão nos fluidos. Ela é definida como a distribuição de forças por unidade de área em torno de um ponto material, dentro de um corpo material ou meio contínuo (KINO, 1987, p. 3). Ela é representada por um tensor de segunda ordem.

Essa equação é idêntica a equação de onda (5) e, portanto, satisfaz a equação de Helmholtz. Uma solução particular para a equação de Helmholtz é uma *onda plana harmônica tridimensional*, cuja equação é (SCHMERR, 1998, p. 52):

$$p(\vec{r}, \omega) = p_0 \exp [ik(\vec{r} \cdot \vec{n})] \quad (10)$$

em que  $p_0$  é a amplitude máxima da pressão e  $\vec{n}$  é o vetor unitário que indica a direção de propagação da onda.

Por sua vez, as ondas elásticas se propagam em sólidos elásticos isotrópicos pela variação no campo de tensão mecânica. Essas variações causam deformações elásticas no sólido, representadas pelo vetor deslocamento  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ . Se for aplicado um distúrbio  $\vec{q}(\vec{r}, t)$  em um sólido isotrópico, o vetor deslocamento segue a seguinte equação diferencial (SCHMERR, 1998, p. 37):

$$\mu_L \nabla^2 \vec{u}(\vec{r}, t) + (\lambda_L + \mu_L) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)) + \vec{q}(\vec{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (11)$$

em que  $\lambda_L$  e  $\mu_L$  são as constantes de Lamé e  $\rho_0$  é a densidade do material sólido, todas características físicas do meio de propagação. Essa equação é chamada *equação de Navier*.

Apesar da equação de Navier não ser uma equação de onda para o vetor deslocamento, ela apresenta um comportamento implícito associado a duas equações de onda (SCHMERR, 1998, p. 39). O vetor deslocamento pode ser decomposto em um potencial escalar  $\phi(\vec{r}, t)$  e um potencial vetorial  $\psi(\vec{r}, t)$  como:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \nabla \phi(\vec{r}, t) + \nabla \times \psi(\vec{r}, t) \quad (12)$$

em que  $\nabla$  e  $\nabla \times$  são os operadores gradiente e rotacional, respectivamente.

Utilizando a decomposição da Eq. (12), zerando o termo  $\vec{q}(\vec{r}, t)$  na Eq. (11)<sup>2</sup> e usando o fato que o gradiente do rotacional de um vetor é 0, tem-se (SCHMERR, 1998, p. 39):

$$\nabla \left[ (\lambda_L + 2\mu_L) \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) - \rho_0 \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left[ \mu_L \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \rho_0 \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \right] = \vec{0} \quad (13)$$

que somente pode ser satisfeita se

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

<sup>2</sup>Com isso considera-se que a fonte do distúrbio está distante dos pontos de observação.

em que  $c_p = \sqrt{(\lambda_L + 2\mu_L)/\rho_0}$  e  $c_s = \sqrt{\mu_L/\rho_0}$  são as velocidades do som no material sólido para as ondas longitudinais e transversais, respectivamente.

Baseado nisso, Schmerr (1998, p. 39, tradução minha) afirma:

Em um sólido elástico, distúrbios associados com o potencial escalar  $\phi$  se propagam com a velocidade de onda  $c_p$ . Esses distúrbios são chamados ondas-P, ondas compressionais, ondas primárias, ondas dilatacionais, ondas longitudinais ou ondas irrotacionais. Em contraste, distúrbios associados com o potencial vetorial  $\psi$  se propagam com velocidade de onda  $c_s$ ; essas ondas são chamadas ondas-S, ondas transversais, ondas secundárias, ondas tangenciais, ondas distorcionais, ondas equivolúmetricas ou ondas rotacionais.

Da mesma forma que para os fluidos, as equações dos potenciais  $\phi(\vec{r}, t)$  e  $\psi(\vec{r}, t)$  satisfazem a equação de Helmholtz e têm como soluções particulares as equações de ondas planas harmônicas tridimensionais (SCHMERR, 1998, p. 55):

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, \omega) &= \Phi_0 \exp[ik_p(\vec{r} \cdot \vec{n})] \\ \psi(\vec{r}, \omega) &= \Psi_0 \vec{d}^s \exp[ik_s(\vec{r} \cdot \vec{n})]\end{aligned}\tag{15}$$

em que  $\Phi_0$  e  $\Psi_0$  são as amplitudes máximas dos potenciais,  $\vec{n}$  é o vetor unitário que indica a direção de propagação das ondas,  $\vec{d}^s$  é um vetor normal a  $\vec{n}$  e indica a polarização das ondas transversais e, finalmente,  $k_p$  e  $k_s$  são as frequências espaciais das ondas longitudinais e transversais, respectivamente.

Diferente dos fluidos, em que o campo de onda representa a variação da pressão ao longo do espaço, os campos de onda dos potenciais são proporcionais à energia mecânica da onda. Dessa forma, a relação entre os potenciais e a tensão mecânica é direta (SCHMERR, 1998, p. 55-56). Nas ondas longitudinais, a tensão mecânica na direção de propagação da onda é

$$\tau_{nn}(\vec{r}, \omega) = -\rho_0 \omega^2 \Phi_0 \exp[ik_p(\vec{r} \cdot \vec{n})]\tag{16}$$

e a tensão mecânica perpendicular a direção de propagação da onda é

$$\tau_{ns}(\vec{r}, \omega) = -\rho_0 \omega^2 \Psi_0 \exp[ik_s(\vec{r} \cdot \vec{n})]\tag{17}$$

As equações (10), (16) e (17), que descrevem o campo de onda de pressão em fluidos e os campos de ondas de tensões mecânicas em sólidos, apresentam o mesmo formato. Todas elas têm um termo de *amplitude* e um termo de *fase*. O termo de amplitude indica o valor máximo que a grandeza física associada a onda (pressão ou tensão) pode atingir. Já o termo de fase modela a propagação da onda pelo meio físico na direção  $\vec{n}$ .



### 2.3.3 EQUAÇÃO DA ONDA COM UMA FONTE PONTUAL

A Eq. (5) é a equação de onda considerando que não existe nenhuma fonte de energia que cria um distúrbio no meio de propagação. Assim, a Eq. (5) expressa somente a propagação da onda em um meio homogêneo. Entretanto, é conveniente modelar a situação em que exista uma fonte de energia pontual que cria o distúrbio no meio de propagação e produz a onda.

Se for considerado que a fonte pontual de distúrbio é um impulso unitário no tempo e no espaço, ela pode ser representada por  $\delta(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ , em que  $\vec{r}_0$  é a posição espacial da fonte. Pelo princípio da conservação de energia, essa fonte é inserida diretamente na equação de onda

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\delta(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (18)$$

A equação de onda (18) também satisfaz a equação de Helmholtz, de tal forma que

$$(\nabla^2 + k^2) U(\vec{r}) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (19)$$

cuja solução, demonstrada em Schmerr (1998, p.57-59), é

$$U(\vec{r}) = G(\vec{r} - \vec{r}_0, \omega) = \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}_0|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (20)$$

Essa equação é a *função de Green* para um meio infinito (NORTON; LINZER, 1981). Ela também representa a equação de uma *onda esférica harmônica tridimensional* (SCHMERR, 1998, p. 59). De acordo com Kino (1987, p. 156), a equação de Green é válida tanto para os fluidos como para sólidos, contanto que sejam consideradas somente as ondas longitudinais e que o sólido seja homogêneo e isotrópico.

### 2.3.4 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Ao se analisar as equações (10), (16), (17) e (20), percebe-se que todos os termos de fase das exponenciais complexas relacionam uma distância  $r$  percorrida pela onda com a frequência espacial  $k$ , na forma  $kr$  ou  $\omega r/c$ .

Assim, o efeito causado pela propagação de uma onda em um meio físico, independente da onda ser plana ou esférica, é somente uma mudança de fase, diretamente proporcional a distância percorrida e a frequência espacial. Portanto, a função de transferência para a propagação de ondas é:

$$P(\omega, r, c) = \exp(ikr) = \exp(i\omega r/c) \quad (21)$$

em que  $r = \vec{n} \cdot \vec{r}$  para as ondas planas que se propagam na direção  $\vec{n}$  e  $r = |\vec{r} - \vec{r}_0|$  para as ondas esféricas.

É importante observar que na equação de propagação das ondas esféricas (Eq. (20)), a amplitude decai com o aumento da distância ( $P(\omega) \propto 1/r$ ), o que não ocorre nas ondas planas. Esse efeito não permite que a propagação seja modelada como um sistema linear invariante ao espaço. Entretanto, isso pode ser contornado tratando esse termo junto com a função de transferência que modela a atenuação das ondas durante a propagação.

### 2.3.5 ATENUAÇÃO DURANTE A PROPAGAÇÃO

Durante a propagação de uma onda ultrassônica por um meio físico há uma diminuição da sua amplitude máxima em função da distância. Essa “perda” na amplitude máxima é a *atenuação*. As causas da atenuação são diversas, tais como o espalhamento granular do material e a absorção das ondas pelo material (SCHMERR, 1998, p. 284).

Independente da causa, a atenuação geralmente é modelada como

$$A = A_{max} \exp[-\alpha(\omega)d] \quad (22)$$

em que  $A_{max}$  é a amplitude máxima inicial,  $d$  é a distância percorrida pela onda propagada e  $\alpha(\omega)$  é um coeficiente de atenuação dependente da frequência.

O coeficiente de atenuação descreve os efeitos da atenuação no material. No caso da água, à temperatura ambiente,  $\alpha(\omega) = 25,3 \times 10^{-3} \omega^2 / 4\pi^2$ . Para os metais, atenuação é causada principalmente por sua estrutura cristalina e o coeficiente de atenuação varia em função da frequência elevada a quarta potência ( $\alpha(\omega) \propto \omega^4$ ) e do volume médio dos grãos cristalinos (SCHMERR, 1998, p. 284). Geralmente, não são disponíveis valores tabelados desses coeficientes, sendo necessária a sua medição (SCHMERR; SONG, 2007, p. 526).

Em geral os sistemas de medição para END por ultrassom apresentam circuitos eletrônicos com a função de compensar essa atenuação (amplificadores de ganho variável com o tempo) (STEPINSKI, 2007). O ajuste desses amplificadores é feito por procedimentos de calibração, realizados antes dos ensaios. Se o sistema de medição não tiver esse recurso, a atenuação pode ser compensada aplicando um pré-processamento nos sinais *A-scan* digitalizados (SCHMERR; SONG, 2007). Por esse motivo, a atenuação não é levada em consideração no modelo matemático do sistema de medição, ou seja,  $M(\omega) = 1$  na Eq. (4).

### 2.3.6 PROPAGAÇÃO ATRAVÉS DE INTERFACES

Os termos  $T_{1,2}(\omega)$  da Eq. (4) referem-se aos efeitos das ondas sonoras quando se propagam através de interfaces entre materiais diferentes. Esses efeitos variam em função das características físicas dos materiais e do ângulo com que as ondas incidem sobre a interface. Além disso, dependem também da configuração do END.

Na configuração de END por imersão, esses termos têm grande influência na função de transferência do sistema de medição. As ondas ultrassônicas incidentes devem atravessar uma interface água/sólido e as ondas espalhadas pela descontinuidade atravessam uma interface sólido/água.

Nos ENDs por contato, a interface entre os transdutores e a peça é feita por uma fina camada de material fluido, para garantir um bom acoplamento entre os transdutores e o sólido (SCHMERR; SONG, 2007, p. 154). Entretanto, como a espessura da camada de acoplante é muito pequena quando comparada ao comprimento de onda no acoplante, os efeitos dessa interface são mínimos. Portanto, os termos  $T_1(\omega)$  e  $T_2(\omega)$  somente influenciam na função de transferência do sistema de medição se o ângulo de incidência das ondas sobre o sólido não for normal à superfície da peça inspecionada.

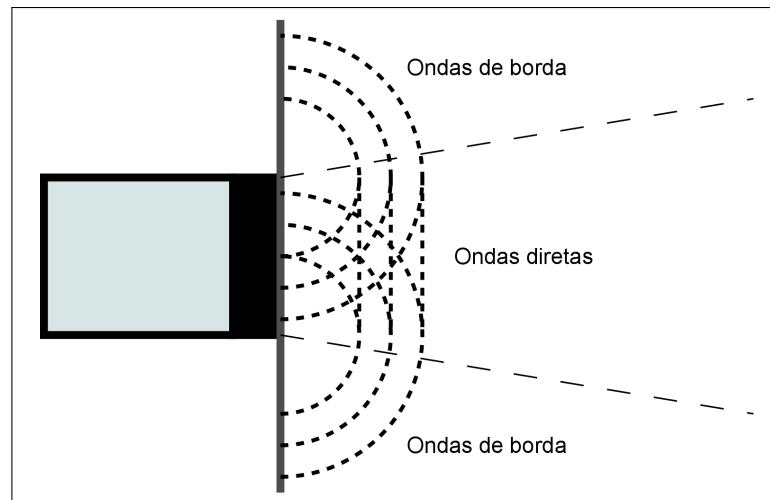
Como neste trabalho somente é considerado o caso de ENDs por contato, com as ondas incidindo de forma normal à superfície da peça inspecionada, esses termos não são levados em consideração no modelo da Eq. (4), de forma que  $T_1(\omega) = 1$  e  $T_2(\omega) = 1$ . Apesar disso, o Apêndice A apresenta uma descrição sobre os efeitos que as interfaces causam na propagação das ondas sonoras.

## 2.4 DIFRAÇÃO NA TRANSMISSÃO DE ONDAS ULTRASSÔNICAS

Na Seção 2.3 são descritos os fundamentos da propagação de ondas sonoras tanto em fluidos como em sólidos e os efeitos que tal propagação causa no campo de ondas de pressão e de tensões mecânicas. Também são analisadas e discutidas duas situações ideais, a equação de onda sem fontes de distúrbio e a equação de onda com uma fonte de distúrbio pontual. Entretanto, tais situações dificilmente ocorrem de forma prática nos procedimentos reais dos ENDs por ultrassom.

Em sistemas reais de inspeção END por ultrassom, a fonte de ondas sônicas é um transdutor que tem uma face ativa. Dessa forma, as ondas sonoras que atingem as descontinuidades não são nem ondas planas ou esféricas. Os transdutores reais emitem, na prática, dois tipos de

ondas (SCHMERR, 1998, p. 160-161): as *ondas diretas* e as *ondas de borda*. As ondas diretas são ondas planas geradas diretamente pela superfície ativa do transdutor. As ondas de borda são ondas curvadas que se propagam a partir da borda do transdutor e, portanto, seguem o formato da superfície ativa do transdutor (Figura 5).



**Figura 5 – Ondas diretas e de borda emitidas por um transdutor real**

Fonte: Adaptado de Schmerr e Song (2007, p. 155).

Schmerr (1998, p. 164) afirma que, apesar das ondas diretas e de borda serem emitidas em tempos diferentes, elas tendem a se unir a partir de uma distância não muito próxima da superfície ativa do transdutor. Isso porque o transdutor tem uma resposta com largura de banda limitada e o pulso de excitação tem uma duração finita. Dessa forma, é conveniente considerar que a onda emitida pelo transdutor é plana e modificada por um *fator de correção da difração*, dependente da frequência de operação e do formato da superfície ativa do transdutor (SCHMERR, 1998, p. 164). Esse fator de correção da difração é o elemento  $C_T(\omega)$  na função de transferência do modelo do sistema de medição.

Partindo dessa consideração, é preciso conhecer o campo de ondas emitido pelo transdutor para determinar o fator de correção da difração. Uma maneira de modelar tal campo é pela *equação integral de Rayleigh-Sommerfeld*<sup>3</sup> (SCHMERR, 1998, p. 159).

A equação integral de Rayleigh-Sommerfeld permite calcular o campo de onda de pressão, no *campo distante*<sup>4</sup> do transdutor, emitido por um transdutor que tenha a superfície ativa com qualquer formato geométrico. Contudo, os transdutores comerciais utilizados em ENDS por ultrassom, em geral, apresentam formatos retangulares ou circulares. Para esses formatos, é possível obter soluções analíticas aproximadas da integral de Rayleigh-Sommerfeld.

<sup>3</sup>Essa equação está definida no Apêndice B como Eq. (116).

<sup>4</sup>Região distante do transdutor, onde o campo de onda de pressão se aproxima a uma onda esférica (SCHMERR, 1998, p. 163).

No Apêndice B é apresentada a dedução para a solução aproximada da equação integral de Rayleigh-Sommerfeld, considerando transdutores circulares do tipo pistão<sup>5</sup>. Para facilitar a leitura, essa solução é repetida aqui

$$p(\vec{x}, \omega) = -ik\rho_0cv_0a^2 \frac{\exp(ikR)}{R} \text{jinc}(ka \sin \theta) \quad (23)$$

em que  $\rho_0$  e  $c$  são a densidade e a velocidade do som no meio de propagação,  $v_0$  é a velocidade de deslocamento da superfície ativa do transdutor,  $a$  é o raio do transdutor,  $R$  é a distância entre o centro do transdutor e o ponto  $\vec{x}$ ,  $\theta$  é o ângulo entre o eixo central do transdutor e o vetor  $\vec{x}$  (conforme a Figura 64),  $\text{jinc}(\alpha) = J_1(\alpha)/\alpha$  e  $J_1(\cdot)$  é a função de Bessel de primeira espécie de ordem 1. Essa equação é válida também para um transdutor de contato sobre um material sólido, conforme descrito no Apêndice B.

Na seção 2.3, a equação de propagação de uma onda plana é definida como  $P(\omega, r, c) = \exp(ikr)$ . Assim, é possível rescrever a Eq. (23) da seguinte maneira

$$p(\vec{x}, \omega) = \underbrace{\rho_0cv_0P(\omega, |\vec{x}|, c)}_{\text{Propagação}} \underbrace{\frac{-ika^2}{|\vec{x}|} \text{jinc}(ka \sin \theta)}_{\text{Fator de correção da difração}} \quad (24)$$

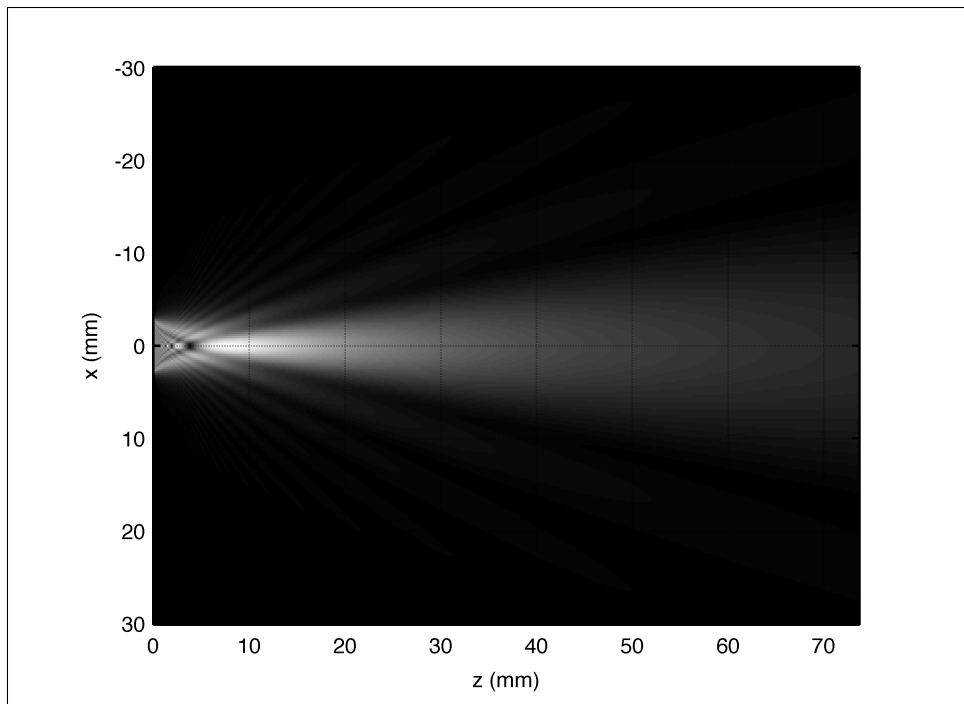
considerando que a origem do sistema de coordenadas está exatamente no centro da superfície ativa do transdutor.

A Eq. (24) é composta por dois termos. O primeiro representa a função de propagação de uma onda plana. O segundo termo é o fator de correção da difração devido a geometria do transdutor de transmissão. Portanto,

$$C_T(\omega, R, \theta, a, c) = \frac{-ika^2}{R} \text{jinc}(ka \sin \theta) \quad (25)$$

Os efeitos mais evidentes que a difração causa no campo de onda emitido são os lóbulos laterais e o espalhamento da onda durante a propagação, como pode ser observado na Figura 6. A explicação desses dois efeitos está na Eq. (24). Os lóbulos laterais surgem devido a estrutura da função  $\text{jinc}(\cdot)$ , que apresenta um lóbulo principal (central) e uma série de lóbulos laterais, de menor amplitude. O lóbulo central é delimitado pelo valor do primeiro zero da função  $\text{jinc}(\cdot)$ , que ocorre quando  $ka \sin \theta \approx 3,83$  (SCHMERR, 1998, p. 166). Como o tamanho do lóbulo central fica mais largo a medida que a distância  $z$  aumenta, ocorre uma divergência no campo de ondas emitido, que é chamada de espalhamento do feixe (SCHMERR; SONG, 2007, p. 146).

<sup>5</sup>Transdutor em que a velocidade de deslocamento da superfície ativa ( $v_0$ ) é constante em toda a sua área (SCHMERR, 1998, p. 158).



**Figura 6 – Campo de onda de tensão mecânica emitido no aço-carbono por um transdutor circular com raio de 6 mm e frequência de 5 MHz**  
**Fonte: Autoria própria.**

## 2.5 AMPLITUDE DO ESPALHAMENTO

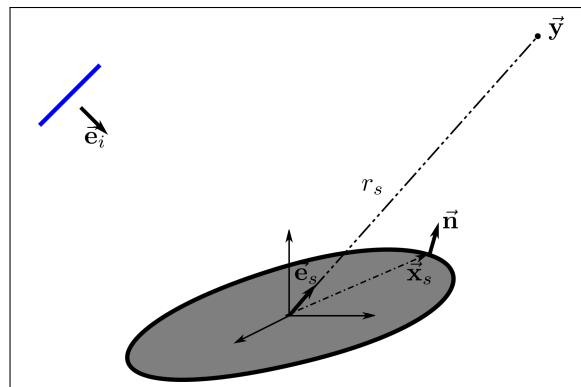
Quando uma onda ultrassônica incide sobre uma descontinuidade existente no meio de propagação, ocorre uma interação de forma que a onda incidente é espalhada em todas as direções, inclusive com a geração de ondas de tipos diferentes da onda incidente. A intensidade e a distribuição dessas ondas espalhadas dependem das características físicas da descontinuidade, tal como a sua geometria e as propriedades do material da descontinuidade.

Uma forma de caracterizar o campo de ondas espalhadas por uma descontinuidade é pela *amplitude do espalhamento*. Segundo Schmerr (1998, p. 306), a amplitude de espalhamento é um coeficiente, dependente da frequência, da área da descontinuidade e dos ângulos de incidência da onda e de observação do espalhamento, que descreve completamente o campo de onda espalhado.

Schmerr (1998, p. 305-306) deduz, a partir da geometria mostrada na Figura 7, a equação do campo de onda de pressão espalhado por uma descontinuidade volumétrica genérica<sup>6</sup>. Essa dedução resulta na seguinte equação:

$$p^{scatt}(\vec{y}, \omega) = p^{inc} A(\vec{e}_i; \vec{e}_s) \frac{\exp(ikr_s)}{r_s} \quad (26)$$

<sup>6</sup>Pode ter qualquer formato e ser de qualquer material.



**Figura 7 – Incidência de ondas sonoras sobre uma descontinuidade**

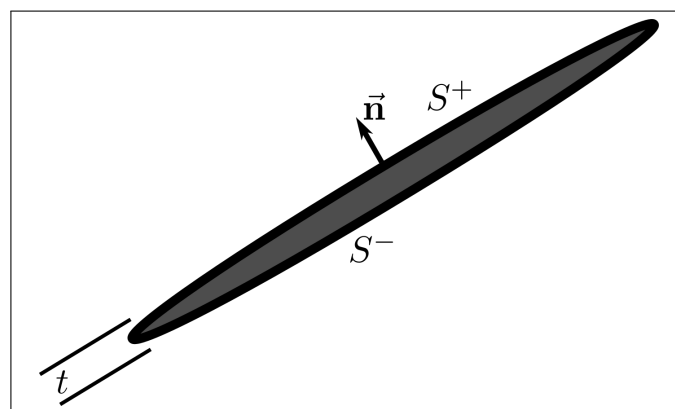
Fonte: Adaptado de Schmerr (1998, p. 307).

em que  $p^{inc}$  é o campo de onda de pressão incidente na descontinuidade,  $\vec{e}_i$  é o vetor unitário que indica a direção do campo de ondas incidente,  $\vec{e}_s$  é o vetor unitário que indica a direção de observação do campo de ondas espalhado,  $A(\vec{e}_i; \vec{e}_s)$  é a amplitude do espalhamento e  $r_s$  é a distância entre o centro da descontinuidade e o ponto de observação ( $\vec{y}$ ) do campo de onda de pressão espalhado.

Na mesma dedução, Schmerr (1998, p. 306) define a amplitude do espalhamento como:

$$A(\vec{e}_i; \vec{e}_s) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{\partial \check{p}}{\partial n} + ik(\vec{e}_s \cdot \vec{n})\check{p} \right] \exp[-ik(\vec{x}_s \cdot \vec{e}_s)] dS \quad (27)$$

em que  $\check{p} = p/p^{inc}$  é a pressão total normalizada em relação a pressão incidente e  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal a superfície  $S$  no ponto  $\vec{x}_s$ .



**Figura 8 – Aproximação de descontinuidades planares como volumétricas**

Fonte: Adaptado de Schmerr e Song (2007, p. 240)

As descontinuidades do tipo trincas, que são planares, podem ser tratadas como descontinuidades volumétricas com uma superfície  $S$ . Essa superfície é dividida em uma parte

superior  $S^+$  e uma inferior  $S^-$ . Elas são separadas por uma distância infinitesimal  $t \rightarrow 0$ , conforme a Figura 8. Com essa geometria tem-se (SCHMERR, 1998, p. 76)

$$\Delta p(\vec{\mathbf{x}}_s, \omega) = p(\vec{\mathbf{x}}_s^+, \omega) - p(\vec{\mathbf{x}}_s^-, \omega)$$

$$\Delta \left[ \frac{\partial p(\vec{\mathbf{x}}_s, \omega)}{\partial n(\vec{\mathbf{x}}_s)} \right] = \frac{\partial p(\vec{\mathbf{x}}_s^+, \omega)}{\partial n^+(\vec{\mathbf{x}}_s^+)} - \frac{\partial p(\vec{\mathbf{x}}_s^-, \omega)}{\partial n^+(\vec{\mathbf{x}}_s^-)}$$

em que  $p(\vec{\mathbf{x}}_s^+, \omega)$  e  $p(\vec{\mathbf{x}}_s^-, \omega)$  são as pressões sobre as superfícies  $S^+$  e  $S^-$ . Assim, a equação da amplitude do espalhamento para descontinuidades planares é:

$$A(\vec{\mathbf{e}}_i; \vec{\mathbf{e}}_s) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \Delta \left( \frac{\partial \check{p}}{\partial n} \right) + ik(\vec{\mathbf{e}}_s \cdot \vec{\mathbf{n}}) \Delta \check{p} \right] \exp[-ik(\vec{\mathbf{x}}_s \cdot \vec{\mathbf{e}}_s)] dS \quad (28)$$

O espalhamento das ondas incidentes provocado por descontinuidades em materiais sólidos é mais complexo do que em fluidos. Mas, a grandes distâncias da descontinuidade (campo distante), o espalhamento é composto pela combinação de ondas esféricas longitudinais e transversais, modificadas por termos de amplitude de espalhamento específicos para cada tipo de onda. A equação do campo de ondas de deslocamento espalhado pela descontinuidade devido a incidência de ondas longitudinais em um sólido é (SCHMERR, 1998, p. 308):

$$u_\eta^{scatt}(\vec{\mathbf{y}}, \omega) = U_0 A_\eta^p(\vec{\mathbf{e}}_i^p; \vec{\mathbf{e}}_s^p) \frac{\exp(ik_p r_s)}{r_s} + U_0 A_\eta^s(\vec{\mathbf{e}}_i^p; \vec{\mathbf{e}}_s^s) \frac{\exp(ik_s r_s)}{r_s} \quad (29)$$

em que  $A_\eta^p(\vec{\mathbf{e}}_i^p; \vec{\mathbf{e}}_s^p)$  e  $A_\eta^s(\vec{\mathbf{e}}_i^p; \vec{\mathbf{e}}_s^s)$  são os termos de amplitude de espalhamento de ondas longitudinais e transversais, a partir da incidência de ondas longitudinais. Esses termos são integrais como as equações (27) e (28), e estão definidas em Schmerr e Song (2007, p. 237-240).

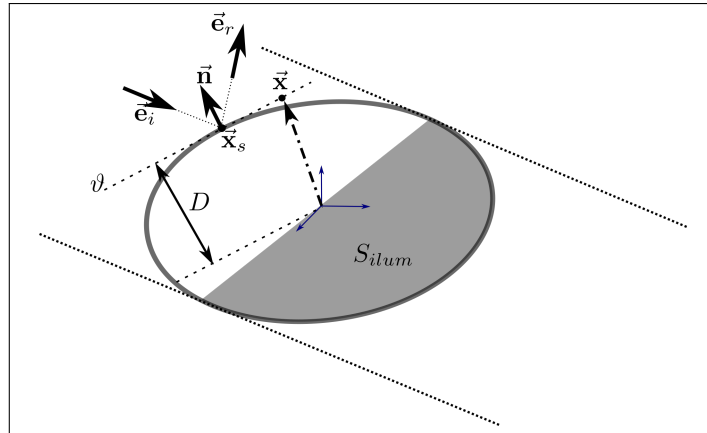
### 2.5.1 APROXIMAÇÃO DE KIRCHHOFF

O cálculo da amplitude de espalhamento provocado por uma descontinuidade, conforme as equações (27) e (28), requer solucionar uma integral de superfície. No caso de descontinuidades com geometrias complexas, são precisos métodos numéricos para calcular tal integral. Entretanto, para descontinuidades com formas geométricas mais simples, e assumindo algumas condições, é possível obter soluções analíticas aproximadas para a equação da amplitude de espalhamento (SCHMERR; SONG, 2007, p. 235).

Uma aproximação muito usual no cálculo da amplitude de espalhamento de descontinuidades volumétricas e planares é a *aproximação de Kirchhoff* (SCHMERR; SONG, 2007, p. 241). Nela, considera-se que a superfície da descontinuidade é dividida em duas partes. A



primeira parte é “iluminada” por ondas planas do campo incidente, enquanto a outra parte está na “sombra” do campo incidente, como mostrado na Figura 9.



**Figura 9 – Incidência de ondas sobre uma descontinuidade segundo a aproximação de Kirchhoff**

Fonte: Adaptado de Schmerr e Song (2007, p. 241).

As ondas planas, incidentes sobre cada ponto  $\vec{x}_s$  da superfície iluminada, são refletidas como se existisse uma superfície plana coincidente com uma região infinitesimal ao redor de  $\vec{x}_s$ , cuja normal é  $\vec{n}$ . Esse plano está representado na Figura 9 como  $\vartheta$ . Essas condições, sobre a superfície  $S_{illum}$ , podem ser reunidas nas seguintes equações (SCHMERR, 1998, p. 312-313):

$$\begin{aligned}
 p &= p^{inc} + p^{refl} \\
 \frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{\partial p^{inc}}{\partial n} + \frac{\partial p^{refl}}{\partial n} \\
 p^{inc} &= \exp[ik(\vec{e}_i \cdot \vec{x})] \\
 \frac{\partial p^{inc}}{\partial n} &= ik(\vec{e}_i \cdot \vec{x}) \exp[ik(\vec{e}_i \cdot \vec{x})] \\
 p^{refl} &= R_P \exp[ik(\vec{e}_r \cdot \vec{x}) + 2ikD(\vec{e}_i \cdot \vec{n})] \\
 \frac{\partial p^{refl}}{\partial n} &= -ik(\vec{e}_i \cdot \vec{n})R_P \exp[ik(\vec{e}_r \cdot \vec{x}) + 2ikD(\vec{e}_i \cdot \vec{n})]
 \end{aligned} \tag{30}$$

em que  $D = \vec{x} \cdot \vec{n}$  é a distância entre o plano  $\vartheta$  e o centro da descontinuidade. Essa distância  $D$  representa uma dimensão que caracteriza a descontinuidade.

No restante da superfície da descontinuidade, assume-se que o sombreamento é perfeito, com  $p = 0$  e  $\partial p / \partial n = 0$ . Considerando essas condições e que  $\vec{e}_r = \vec{e}_i - 2(\vec{e}_i \cdot \vec{n})\vec{n}$ , a

equação da amplitude de espalhamento, pela aproximação de Kirchhoff, para descontinuidades volumétricas é

$$A(\vec{\mathbf{e}}_i; \vec{\mathbf{e}}_s) = -\frac{ik}{4\pi} \int_{S_{ilum}} [(\vec{\mathbf{e}}_i + \vec{\mathbf{e}}_s) \cdot \vec{\mathbf{n}} + R_P(\vec{\mathbf{e}}_s - \vec{\mathbf{e}}_i) \cdot \vec{\mathbf{n}}] \exp[ik(\vec{\mathbf{e}}_i - \vec{\mathbf{e}}_s) \cdot \vec{\mathbf{x}}_s] dS(\vec{\mathbf{x}}_s) \quad (31)$$

em que  $R_P$  é o coeficiente de reflexão da descontinuidade, conforme o Apêndice A. No caso especial da configuração pulso-eco, em que  $\vec{\mathbf{e}}_s = -\vec{\mathbf{e}}_i$

$$A(\vec{\mathbf{e}}_i; -\vec{\mathbf{e}}_i) = \frac{ikR_P}{2\pi} \int_{S_{ilum}} (\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{n}}) \exp[i2k(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_s)] dS(\vec{\mathbf{x}}_s) \quad (32)$$

A Eq. (31) é para descontinuidades existentes em fluidos. Entretanto, Schmerr e Song (2007, p. 241-243) deduzem a amplitude de espalhamento para descontinuidades em sólidos. Para o caso particular de uma configuração pulso-eco (Eq. 32), com a descontinuidade sendo um vazio ( $R_P = -1$ ) e a onda refletida sendo do mesmo tipo da onda incidente, Schmerr e Song (2007) afirmam que a aproximação de Kirchhoff da amplitude do espalhamento em sólidos é idêntica a dos fluidos.

A aproximação de Kirchhoff para descontinuidades planares é deduzida a partir da Eq. (28). Considerando que a descontinuidade é livre de tensão,  $\Delta p = 0$  e  $R_P = -1$ , e assumindo as mesmas condições das descontinuidades volumétricas (Eq. 30), com  $\Delta(\partial \tilde{p} / \partial n) = \partial p / \partial n$ , a Eq. (28) fica:

$$A(\vec{\mathbf{e}}_i; \vec{\mathbf{e}}_s) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{S_{ilum}} (\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{n}}) \exp[ik(\vec{\mathbf{e}}_i - \vec{\mathbf{e}}_s) \cdot \vec{\mathbf{x}}_s] dS(\vec{\mathbf{x}}_s) \quad (33)$$

Na configuração pulso-eco, em que  $\vec{\mathbf{e}}_s = -\vec{\mathbf{e}}_i$

$$A(\vec{\mathbf{e}}_i; -\vec{\mathbf{e}}_i) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{S_{ilum}} (\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{n}}) \exp[2ik(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_s)] dS(\vec{\mathbf{x}}_s) \quad (34)$$

que é idêntica a Eq. (32).

As equações integrais (32) e (34) são resolvidas em Schmerr (1998) e Schmerr e Song (2007), para descontinuidades com geometrias simples. O elipsoide é uma descontinuidade volumétrica que pode aproximar pequenos defeitos existentes em soldas, tais como porosidades e falta de fusão. O furo lateral passante é uma descontinuidade volumétrica que também aproxima defeitos como falta de fusão. A trinca elíptica é uma descontinuidade planar com formato elíptico. O ângulo formado entre o vetor normal à trinca e a superfície de inspeção caracteriza se a descontinuidade é normal ou oblíqua. O furo de base plana é o elemento usinável em uma peça que mais se aproxima desse tipo de descontinuidade. As equações com as aproximações

de Kirchhoff para as amplitudes de espalhamento dessas descontinuidades são apresentadas no Quadro 1 e assumem essas definições:

- $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são as dimensões da elipsoide (ou elipse, se  $a_3 = 0$ ) nas direções de seus eixos principais  $\vec{\mathbf{u}}_1$ ,  $\vec{\mathbf{u}}_2$  e  $\vec{\mathbf{u}}_3$ ;
- $r_e = \sqrt{a_1^2(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{u}}_1)^2 + a_2^2(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{u}}_2)^2 + a_3^2(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{u}}_3)^2}$  é o *raio equivalente* da descontinuidade, definido como a distância entre o plano, normal a direção de incidência, que toca a descontinuidade em um único ponto, até o centro da mesma (SCHMERR, 1998, p. 316);
- $b$  é o raio da esfera, furo lateral passante ou trinca circular;
- $L$  é o comprimento do furo lateral passante;
- $\theta$  é o ângulo formado entre a direção de incidência e o vetor normal à superfície da trinca;
- $J_1(\cdot)$  e  $S_1(\cdot)$  são as funções de *Bessel* e *Struve* de primeira ordem (SCHMERR; SONG, 2007, p. 270);
- e, finalmente,  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

Uma característica das descontinuidades volumétricas, com geometria convexa, é que a sua amplitude de espalhamento é dominada por um impulso, quando representada no domínio do tempo. Esse impulso, chamado de *resposta da borda de ataque*, vem da forte reflexão do ponto na superfície da descontinuidade, onde a frente de onda incidente toca por primeiro a superfície da descontinuidade (SCHMERR, 1998, p. 318). Esse ponto é onde a direção da onda refletida coincide com a direção de observação, sendo chamado *ponto de fase estacionária* ( $\vec{\mathbf{x}}_{stat}$ ) (SCHMERR; SONG, 2007, p. 248). Segundo Schmerr e Song (2007, p. 250), descontinuidades convexas têm somente um ponto de fase estacionária. Entretanto, em uma configuração *pitch-catch*, dependendo das direções de incidência e observação, esse ponto pode não existir. Em descontinuidades não-convexas, podem existir diversos pontos de fase estacionária.

Schmerr (1998, p. 320-321) deduz a equação da amplitude de espalhamento, devido somente a resposta da borda de ataque, para uma descontinuidade puramente convexa. Considerando somente a configuração pulso-eco, a equação é:

$$A(\vec{\mathbf{e}}_i; -\vec{\mathbf{e}}_i) = \frac{R_p \sqrt{R_1 R_2}}{2} \exp[-2ik(\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_{stat})] \quad (35)$$

<b>Geometria da descontinuidade</b>	<b>Amplitude do espalhamento <math>A(\vec{e}_i; -\vec{e}_i)</math></b>	<b>Observações</b>
Elipsoide	$-\frac{a_1 a_2 a_3}{2r_e^2} \exp(-ikr_e) [\exp(-ikr_e) - \text{sinc}(kr_e)]$	Para esfera, $a_1 = a_2 = a_3 = b$ $r_e = b$
Furo lateral passante	$\frac{kbL}{2} [J_1(2kb) - iS_1(2kb)] + \frac{ikbL}{\pi}$	
Trinca elíptica oblíqua	$ika_1 a_2 \cos \theta \text{jinc}(2kr_e)$	$\cos \theta = -\vec{e}_i \cdot \vec{n}$ para trinca circular, $a_1 = a_2 = b$ $r_e = b \sin \theta$
Trinca elíptica normal	$\frac{ika_1 a_2}{2}$	$\cos \theta = 1$ $r_e = 0$ para trinca circular, $a_1 = a_2 = b$
Ponto refletor infinitesimal	1	

**Quadro 1 – Equações da amplitude de espalhamento pela aproximação de Kirchhoff para descontinuidades com geometria simples**

Fonte: Autoria própria.

em que  $R_1$  e  $R_2$  são os raios principais de curvatura do ponto de fase estacionária. Para o caso especial de uma descontinuidade com formato elipsoidal,  $\sqrt{R_1 R_2} = a_1 a_2 a_3 / r_e^2$  e  $(\vec{n} \cdot \vec{x}_{stat}) = r_e$ . Para uma esfera,  $\sqrt{R_1 R_2} = b$  e  $(\vec{n} \cdot \vec{x}_{stat}) = b$  (SCHMERR, 1998, p. 321).

## 2.6 DIFRAÇÃO NA RECEPÇÃO DE ONDAS ULTRASSÔNICAS

Na seção 2.5 foram apresentadas as equações dos campos de ondas de pressão (Eq. (26)) e de deslocamento (Eq. (29)) espalhados pelo meio de propagação, a partir da interação de um campo incidente sobre uma descontinuidade. Assim, se um transdutor de recepção for colocado em um ponto  $\vec{y}$ , a resposta medida por ele será proporcional a pressão (ou tensão mecânica) média recebida por toda a superfície ativa do transdutor (SCHMERR, 1998, p. 386), ou seja

$$p_{media}(\omega) = \frac{p_0}{S_R} \int_{S_R} A(\vec{e}_i; \vec{e}_s) \frac{\exp(ikr_s)}{r_s} dS(\vec{y}) \quad (36)$$

em que  $S_R$  é a área da superfície ativa do transdutor de recepção.

Mas se for considerado que a amplitude do espalhamento  $A(\vec{e}_i; \vec{e}_s)$  varia pouco sobre a superfície do transdutor em relação a uma direção de espalhamento  $\vec{e}_s$  específica (SCHMERR, 1998, p. 386), ela pode ser retirada da integral:

$$p_{media}(\omega) = \frac{p_0 A(\vec{e}_i; \vec{e}_s)}{S_R} \int_{S_R} \frac{\exp(ikr_s)}{r_s} dS(\vec{y}) \quad (37)$$

Como o termo  $p_0$  da Eq. (37) é a pressão incidente, considerando a equação integral de Rayleigh-Sommerfeld, (24) e (25), tem-se que

$$p_0 = \frac{-i\omega\rho_0 v_0}{2\pi} \int_{S_T} \frac{\exp(ikr_i)}{r_i} dS = \rho_0 c v_0 \exp(ikR_T) C_T(\omega, R_T, \theta_T, a_T, c)$$

e, conseqüentemente

$$\int_{S_T} \frac{\exp(ikr_i)}{r_i} dS = \frac{2\pi}{-ik} \exp(ikR_T) C_T(\omega, R_T, \theta_T, a_T, c)$$

em que  $r_i$  é a distância entre um ponto sobre a superfície ativa do transdutor de transmissão e um ponto sobre a superfície da descontinuidade;  $R_T$  é a distância do centro do transdutor ao centro da descontinuidade. Como a propagação das ondas espalhadas é idêntica a das ondas incidentes, é possível afirmar que:

$$\int_{S_R} \frac{\exp(ikr_s)}{r_s} dS = \frac{2\pi}{-ik} \exp(ikR_R) C_T(\omega, R_R, \theta_R, a_R, c) \quad (38)$$

em que  $R_R$  é a distância entre o centro da descontinuidade e o centro do transdutor de recepção.

Ao substituir a Eq (38) na Eq. (37), tem-se:

$$p_{media}(\omega) = p_0 A(\vec{e}_i; \vec{e}_s) \exp(ikR_R) C_R(\omega, R_R, \theta_R, a_R, c) \quad (39)$$

em que

$$C_R(\omega, R_R, \theta_R, a_R, c) = \frac{2\pi}{-ikS_R} C_T(\omega, R_R, \theta_R, a_R, c) \quad (40)$$

é o fator de correção da difração na recepção das ondas ultrassônicas. O fator de correção da difração na recepção  $C_R(\cdot)$  é válido tanto nos fluidos como nos sólidos isotrópicos, assim como ocorre para o fator de correção da difração na transmissão.

A Eq. (40) é válida para qualquer configuração de inspeção por ultrassom. Entretanto, quando é utilizada a configuração pulso-eco, em que é utilizado um único transdutor como transmissor e receptor, tem-se que  $a_T = a_R = a$ ,  $R_T = R_R = R$ ,  $\theta_T = \theta_R = \theta$ ,  $S_T = S_R = S$  e  $\vec{e}_s = -\vec{e}_i$ . Conseqüentemente,

$$p_{media}(\omega, R, \theta) = p_0 A(\vec{e}_i; -\vec{e}_i) \exp(ikR) C_T(\omega, R, \theta, a, c) \frac{2\pi}{-ikS} \quad (41)$$

## 2.7 CONCLUSÕES

Este capítulo descreve, de forma resumida, a arquitetura básica dos sistemas de inspeção END por ultrassom, além de apresentar algumas definições amplamente utilizadas, como sinais *A-scan*, inspeção por contato, circuito pulsador/receptor e configuração pulso-eco.

Em seguida, é apresentada uma modelagem matemática de um sistema de medição por ultrassom como um sistema linear invariante no tempo. Nessa modelagem, a função de transferência  $H(\omega)$  desse sistema linear é tratada como a combinação em cascata dos efeitos de diversos elementos do sistema de medição. Entre esses efeitos, são descritos de forma mais detalhada a propagação e atenuação das ondas ultrassônicas através de um meio material; os efeitos da difração das ondas causados pela geometria dos transdutores ultrassônicos, tanto na transmissão como na recepção; e o efeito do espalhamento que as descontinuidades presentes no meio físico causam nas ondas ultrassônicas incidentes.

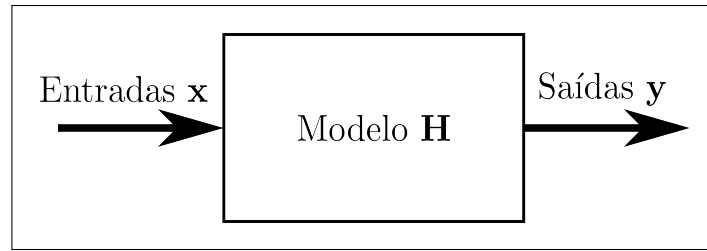
### 3 PROBLEMAS INVERSOS

Este capítulo é dedicado a apresentar a fundamentação teórica sobre problemas inversos e formas para a sua resolução. A Seção 3.1 é dedicada a definição dos problemas inversos, separando-os em problemas de reconstrução e de identificação. Na Seção 3.2 são apresentadas duas variações do algoritmo de mínimos quadrados para buscar soluções do problema de reconstrução. A Seção 3.3 define o conceito de regularização e apresenta algoritmos que a incluem na solução de mínimos quadrados. Na Seção 3.4 é apresentado um método de resolução para algoritmos de reconstrução que utilizam normas diferentes da  $l_2$ , tanto no termo de fidelidade de dados como no termo de regularização. Finalmente, na Seção 3.5 são discutidas formas de escolher o parâmetro de regularização em algoritmos que utilizam esse recurso.

#### 3.1 DEFINIÇÃO DE PROBLEMA INVERSO

A maioria de sistemas reais encontrados na ciência e indústria podem ser modelados, de forma simples, conforme o diagrama da Figura 10. Pela análise desse diagrama, percebe-se que os sistemas têm três elementos essenciais: as entradas, o modelo e as saídas. Cezaro e Cezaro (2012, p. 12) definem como *problema direto* quando, a partir do conhecimento das entradas e do modelo, determinam-se as saídas. Já o *problema inverso* ocorre em uma das seguintes situações:

- a partir do conhecimento do modelo e saídas, determinam-se as entradas, sendo chamado *problema de reconstrução* e;
- a partir do conhecimento das entradas e saídas, determina-se o modelo, sendo chamado *problema de identificação*.



**Figura 10 – Representação simplificada de um sistema real**  
**Fonte: Autoria própria.**

Se o sistema da Figura 10 é linear e contínuo, a relação entre suas entradas e saídas é através de uma *equação integral de Fredholm* de primeiro tipo (KARL, 2000). Para um sistema em que entrada e saída são funções da variável  $x$ , a equação de Fredholm é:

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x; x') f(x') dx' \quad (42)$$

em que  $f(x)$  é a entrada do sistema,  $v(x)$  é a saída e  $h(x; x')$  é a função que modela o sistema, também chamada de *kernel* ou função de resposta do sistema. Se o sistema for invariante a variável  $x$ ,  $h(x; x') = h(x - x')$  e a Eq. (42) torna-se uma integral de convolução.

A função de entrada  $f(x)$  pode ser representada pela combinação linear de um conjunto finito de *funções-base*  $\Phi = \{\phi_j(x) \mid 1 \leq j \leq N\}$  (HANSON; WECKSUNG, 1985; KARL, 2000). Portanto,

$$f(x) = \sum_{j=1}^N f_j \phi_j(x) \quad (43)$$

A Eq. (43) indica que a função de entrada  $f(x)$ , apesar de ser contínua, é definida por um conjunto finito de coeficientes  $f_j$ . Esses coeficientes podem ser arranjados em um vetor  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$ .

As funções-base devem ter como característica básica valor não-nulo somente nos pontos correspondentes aos seus centros, ou seja,  $\phi_j(0) \neq 0$  e  $\phi_j(x) = 0 \forall x \neq 0$  (HANSON; WECKSUNG, 1985). Além disso, Hanson e Wecksung (1985) listam outras propriedades desejadas em um conjunto de funções-base, tais como forte independência linear, insensibilidade ao deslocamento e fidelidade à aparência visual.

Representar funções contínuas como conjuntos finitos de coeficientes é útil na discretização de sistemas. Se for considerado que  $\Phi = \{\phi_j(x) = \delta(x - x_j) \mid 1 \leq j \leq N\}$ , os coeficientes  $f_j$  da Eq. (43) representam diretamente os valores da função  $f(x)$  para  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . Assim, ao discretizar o sistema modelado pela Eq. (42), a entrada é representada pelo vetor



$\mathbf{f} = [f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_N)]^T$  e a saída pelo o vetor  $\mathbf{v} = [v(x_1)v(x_2)\cdots v(x_M)]^T$ . A integral da equação de Fredholm passa a ser um somatório,

$$v_i = \sum_{j=1}^N H_{ij}f_j \quad , 1 \leq i \leq M \quad (44)$$

que pode ser representado na forma de uma operação matriz-vetor:

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{f} \quad (45)$$

A matriz  $\mathbf{H} = H_{ij}$  da Eq. (45), cujo tamanho é  $M \times N$ , é o *kernel*  $h(x; x')$  discretizado, em que cada elemento da matriz é calculado por (KARL, 2000):

$$H_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(x')\phi_j(x')dx' \quad , 1 \leq i \leq M \text{ e } 1 \leq j \leq N \quad (46)$$

em que  $h_i(x') = h(x_i - x')$ .

Entretanto, a Eq. (45) não representa na prática o sistema, pois é inevitável que os elementos do vetor de saída apresentem valores corrompidos por perturbações e ruídos (KARL, 2000). Da mesma forma, podem ocorrer erros de aproximação no cálculo dos elementos na matriz de modelagem  $\mathbf{H}$ . Assim, a melhor forma de representar o sistema deve ser:

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta} \quad (47)$$

em que  $\boldsymbol{\eta}$  é um vetor com as perturbações ou ruídos para cada amostra de  $\mathbf{v}$ .

A partir da Eq. (47) é aparentemente simples resolver um problema inverso. Se o ruído  $\boldsymbol{\eta}$  for desprezado e a matriz  $\mathbf{H}$  for quadrada e inversível, o vetor de entrada  $\mathbf{f}$  pode ser calculado por:

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{v} \quad (48)$$

Mas, na maioria dos sistemas reais, ocorre alguma das seguintes situações:

- não existe nenhum vetor de entrada  $\mathbf{f}$  que gere o vetor de saída  $\mathbf{v}$ , devido ao ruído ou quando a quantidade de elementos no vetor de saída for maior que o número de elementos no vetor de entrada ( $M > N$ ), ou seja, o sistema de equações lineares é sobredeterminado;
- existem infinitos vetores  $\mathbf{f}$  que geram a saída  $\mathbf{v}$ , quando a quantidade de elementos no vetor de saída for menor que o número de elementos no vetor de entrada ( $M < N$ ), ou seja, o sistema de equações lineares é subdeterminado;

- a solução é instável, ou seja, quaisquer variações mínimas no ruído levam a soluções da Eq. (48) completamente diferentes, devido a matriz  $\mathbf{H}$  ser mal-condicionada.

Essas três situações são conhecidas como *condições de Hadamard*. Quando alguma delas ocorre, é dito que o problema é *mal-posto* (KARL, 2000), sendo impossível resolvê-lo pela Eq. (48). A seguir são apresentadas maneiras de resolver problemas mal-postos, corrigindo cada uma das três condições de Hadamard.

### 3.2 SOLUÇÕES DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Para contornar a primeira condição de Hadamard, parte-se do princípio que não existe uma solução exata para o sistemas de equações (45), mas existe uma solução “próxima” da exata. Aqui o termo “próximo” significa o quanto um vetor é semelhante a outro vetor. A maneira convencional de se medir a “proximidade”  $d$  entre dois vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  é  $d = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_p$ , em que  $\|\cdot\|_p$  representa a norma  $l_p$  de um vetor, que é definida por (BARRETT; MYERS, 2003, p. 4)

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left[ \sum_{j=1}^N |v_j|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (49)$$

Portanto, procurar a solução mais “próxima” passa a ser um problema de minimização, em que se procura o vetor  $\hat{\mathbf{f}}$  para o qual  $d$  é mínimo. Este problema é descrito como:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_p^p \quad (50)$$

em que  $\|\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_p^p$  é chamada de *função custo* do problema.

O problema de minimização da Eq. (50) considera a função custo como uma norma  $l_p$  genérica. Entretanto, a forma mais usual de se definir a função custo é utilizando a norma  $l_2$ . Neste caso, a solução encontrada é chamada de *solução dos mínimos quadrados* (LS — do original *least squares*) e tem a seguinte solução fechada (BARRETT; MYERS, 2003, p. 49):

$$\hat{\mathbf{f}}_{LS} = \left( \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v} \quad (51)$$

em que  $\mathbf{H}^\dagger$  representa o operador adjunto da matriz  $\mathbf{H}$ .

Um operador adjunto pode ser definido como o operador que realiza a projeção contrária, ou “retroprojeção”, feita anteriormente por um operador de projeção linear (CLAERBOUT, 2004, p. 102), no caso, a matriz  $\mathbf{H}$ . Para matrizes complexas, o operador adjunto é obtido ao se

tomar o complexo conjugado da matriz transposta, ou seja,  $\mathbf{H}^\dagger = [\mathbf{H}^T]^*$ . Para matrizes reais, o operador adjunto e matriz transposta são sinônimos (BARRETT; MYERS, 2003, p. 18).

A solução dos mínimos quadrados definida na Eq. (51) é bastante adequada para contornar a primeira condição de Hadamard. Contudo, se o sistema de equações for subdeterminado, significa que o posto( $\mathbf{H}$ )  $< N$  e, portanto, podem existir diversas soluções de mínimos quadrados (BARRETT; MYERS, 2003, p. 50). Assim, para contornar a segunda condição de Hadamard é preciso selecionar uma única solução entre o conjunto de soluções de mínimos quadrados.

O método típico utilizado nessa seleção é tomar a solução de mínimos quadrados que apresente a menor norma. Isso é feito modificando o problema de minimização sem restrições da Eq. (50) para um problema de minimização com restrições (BOYD; VANDENBERGHE, 2009, p. 304)

$$\hat{\mathbf{f}}_{MN} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{f}\|_2^2, \text{ sujeito a } \mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{v} \quad (52)$$

A solução desse novo problema é chamada de *solução de norma mínima* de um sistema linear (MN — do original *minimum norm*) (BARRETT; MYERS, 2003, p. 51) ou *solução generalizada* (KARL, 2000). Essa solução é calculada por (BOYD; VANDENBERGHE, 2009, p. 304)

$$\hat{\mathbf{f}}_{MN} = \mathbf{H}^\dagger \left( \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger \right)^{-1} \mathbf{v} \quad (53)$$

### 3.3 REGULARIZAÇÃO

Apesar da solução generalizada contornar as duas primeiras condições de Hadamard, se a matriz  $\mathbf{H}$  for mal-condicionada a solução generalizada é instável na presença de ruídos. Uma matriz é mal-condicionada quando a relação entre o maior e o menor valor singular da matriz for muito grande ( $> 10^4$ ) (HANSEN, 1998, p. 2). Os valores singulares de uma matriz são obtidos pela *decomposição em valores singulares* (SVD — do original *singular value decomposition*). A SVD é descrita com detalhes em Hansen (1998, cap. 2).

De acordo com Karl (2000), os valores singulares muito próximos a 0 de uma matriz  $\mathbf{H}$  mal-condicionada causam a amplificação do ruído nos componentes cujos valores singulares são pequenos. Geralmente, os valores singulares pequenos estão relacionados aos componentes de alta frequência do vetor de entrada reconstruído  $\hat{\mathbf{f}}$ . A maneira de contornar este problema é pela *regularização*, que corresponde a incluir alguma informação prévia sobre a solução dese-

jada, de modo a estabilizar o problema e se obter uma solução útil e estável (HANSEN, 1998, p. 10).

Conforme afirma Hansen (1998, p. 10), embora existam diversas formas de aplicar a regularização, as estratégias dominantes são as que permitem algum resíduo na solução regularizada. Sendo  $Q_1(\mathbf{f}) \triangleq \|\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_q^q$  uma medida da “distância” entre os dados do vetor de saída e a sua predição baseados em uma estimativa  $\hat{\mathbf{f}}$ , e  $Q_2(\mathbf{f}) \triangleq \|\mathbf{f}\|_p^p$  uma medida do “tamanho” da solução, os seguintes esquemas de regularização são possíveis:

- minimizar  $Q_1(\mathbf{f})$  sujeito a restrição que  $\mathbf{f}$  pertence a um determinado subconjunto de soluções;
- minimizar  $Q_1(\mathbf{f})$  sujeito a restrição que  $Q_2(\mathbf{f}) \leq \zeta$ ;
- minimizar  $Q_2(\mathbf{f})$  sujeito a restrição que  $Q_1(\mathbf{f}) \leq \gamma$ , e
- minimizar uma combinação linear de  $Q_1(\mathbf{f})$  e  $Q_2(\mathbf{f})$ , como:

$$\hat{\mathbf{f}}(\lambda) = \arg \min_{\mathbf{f}} \{Q_1(\mathbf{f}) + \lambda Q_2(\mathbf{f})\} \quad (54)$$

em que  $\zeta$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$  são conhecidos como *parâmetros de regularização*.

No esquema da Eq. (54), que é a forma mais genérica de regularização, a função custo é composta por dois termos. O termo  $Q_1(\mathbf{f})$  assegura a fidelidade da resposta com os dados de saída medidos, enquanto o termo  $Q_2(\mathbf{f})$ , é chamado de *regularizador*, insere informação prévia para a estabilização da resposta. O parâmetro de regularização  $\lambda$  controla o equilíbrio entre os dois termos (HANSEN, 1998, p. 100).

Em Karl (2000) são apresentados diversos métodos diretos de regularização. Quase todos esses métodos são baseados na Eq. (54), variando os termos  $Q_1(\mathbf{f})$  e  $Q_2(\mathbf{f})$ . O Quadro 2 apresenta esses métodos, com a definição de seus termos de fidelidade de dados e regularizador.

### 3.3.1 MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO QUADRÁTICOS

Os métodos de regularização quadráticos são aqueles em que o termo regularizador da função custo é calculado a partir da norma  $l_2$  de um vetor que envolve a solução procurada  $\mathbf{f}$ . Entre os métodos de regularização mostrados no Quadro 2, somente os métodos de Tikhonov e máximo *a posteriori* (MAP) para densidades de probabilidade gaussianas são quadráticos.

Método	Termo de fidelidade dos dados	Termo regularizador
Tikhonov <sup>a</sup>	$\ \mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\ _2^2$	$\ \mathbf{L}\mathbf{f}\ _2^2 = \sum_{i=1}^M  [\mathbf{L}\mathbf{f}]_i ^2$
<i>Total Variation</i> <sup>b</sup>	$\ \mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\ _2^2$	$\ \mathbf{D}\mathbf{f}\ _1 = \sum_{i=1}^M  [\mathbf{D}\mathbf{f}]_i $
Não-quadrática de norma $l_p$ - $l_q$	$\ \mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\ _p^p$	$\ \mathbf{f}\ _q^q = \sum_{i=1}^M  f_i ^q$
Máximo <i>a posteriori</i> gaussiano <sup>c</sup>	$\ln p(\mathbf{v} \mathbf{f}) \propto -\frac{1}{2}\ \mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\ _2^2$	$\ln p(\mathbf{f}) \propto -\frac{1}{2}\ \mathbf{f}\ _2^2$

**Quadro 2 – Métodos diretos de regularização com seus respectivos termos de fidelidade de dados e regularizador**

Fonte: Autoria própria.

<sup>a</sup>A representação  $[\mathbf{L}\mathbf{f}]_i$  significa o  $i$ -ésimo elemento do vetor resultante da operação de multiplicação matriz-vetor  $\mathbf{L}\mathbf{f}$ .

<sup>b</sup> $\mathbf{D}$  é a aproximação discreta para o operador derivadas direcionais (KARL, 2000).

<sup>c</sup>Considerando que  $\mathbf{f}$  apresenta uma distribuição gaussiana com média 0 e variância  $\sigma_f^2$ . Além disso, as medidas  $\mathbf{v}$  contém um ruído aditivo  $\eta$ , também de distribuição gaussiana com média 0 e variância  $\sigma_\eta^2$ . Neste caso,  $\lambda = \sigma_\eta^2/\sigma_f^2$  (KARL, 2000).

O método de Tikhonov é talvez o mais referenciado entre todos os métodos de regularização, segundo Karl (2000). Ele insere informação prévia sobre a solução desejada  $\mathbf{f}$ , no problema original de mínimos quadrados, pelo termo de regularização  $\|\mathbf{L}\mathbf{f}\|_2^2$ . Em geral, a matriz  $\mathbf{L}$  é escolhida como um operador derivativo ou gradiente, de forma que o termo de regularização indica uma medida da variabilidade ou “rugosidade” da entrada  $\mathbf{f}$  (KARL, 2000).

O método de regularização de Tikhonov também é conhecido como *solução dos mínimos quadrados regularizados* (RLS — do original *regularized least square*). Assim como a solução dos mínimos quadrados, a solução RLS também tem uma forma fechada (KARL, 2000):

$$\hat{\mathbf{f}}_{RLS} = \left( \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \lambda \mathbf{L}^\dagger \mathbf{L} \right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v} \quad (55)$$

O método de regularização *máximo a posteriori* é baseado em uma abordagem estatística da teoria de regularização. No estimador MAP se procura estimar os valores do vetor  $\mathbf{f}$  que maximizem a função de densidade de probabilidade  $p(\mathbf{f}|\mathbf{v})$ . Utilizando o teorema de Bayes

e a propriedade de monotonicidade da função  $\ln(\cdot)$ , a estimativa  $\hat{\mathbf{f}}_{MAP}$  é calculada por (KARL, 2000):

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{f}} p(\mathbf{f}|\mathbf{v}) \quad (56)$$

Mas, se for considerado que  $\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$  e  $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2)$ ,

$$\hat{\mathbf{f}}_{MAP} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{ \|\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_2^2 \} \quad (57)$$

em que  $\lambda = \sigma_\eta^2 / \sigma_f^2$  (KARL, 2000). A Eq. (57) é exatamente igual a regularização de Tikhonov com  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ .

Tanto o método de Tikhonov como o MAP apresentam o termo de fidelidade aos dados quadrático. Essa característica faz com que o problema de otimização seja quadrático, com a solução fechada dada pela Eq. (55) (KARL, 2000). Tal solução pode ser calculada, mesmo para sistemas com um grande número de incógnitas, por métodos com eficiência computacional razoável, como o método do *gradiente conjugado* (CG) (VOGEL, 2002, p. 31).

### 3.3.2 MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO NÃO-QUADRÁTICOS

Quando o termo de regularização não é calculado a partir de uma norma  $l_2$ , ele é classificado como um método não-quadrático. Em geral, esses métodos procuram utilizar normas  $l_p$  com  $1 \leq p < 2$ , que não penalizam de forma tão acentuada valores altos nos elementos do vetor  $\mathbf{f}$  e continuam a ser funções convexas (KARL, 2000).

Em especial, o uso da norma  $l_1$  é bastante estudado nas aplicações em que a solução  $\mathbf{f}$  procurada seja esparsa, ou seja, com poucos elementos contendo valores diferentes de 0. Em Elad (2010, p. 6-8) há uma explicação detalhada sobre a tendência de se obter soluções esparsas com a minimização por norma  $l_1$ .

Também é possível utilizar normas diferentes de  $l_2$  no termo de fidelidade de dados. Essa medida possibilita encontrar soluções mais estáveis quando existe incerteza no modelo do sistema ou os dados estão corrompidos por medidas espúrias, cujos valores não correspondem ao modelo do sistema. Tal abordagem está relacionada com o conceito de *estimação robusta* (KARL, 2000).

Em geral, existe uma boa quantidade de métodos disponíveis para calcular problemas de minimização com norma  $l_2$  (BJÖRCK, 1996, p. 172). Entretanto, o mesmo não é válido para problemas com normas diferentes. Em Björck (1996) são citados alguns algoritmos específicos para minimização por normas  $l_1$  e  $l_\infty$ . Entre todos esses algoritmos, um que é largamente utili-

zado para resolver problemas de minimização com normas  $l_p$  para  $1 \leq p < 2$  é o algoritmo dos *mínimos quadrados iterativamente reponderados* (IRLS — do original *iteratively reweighted least squares*).

### 3.4 ALGORITMO IRLS

O algoritmo IRLS é um método iterativo de se resolver problemas de minimização com normas  $l_p$  para  $1 \leq p < 2$ . Ele é baseado na conversão do problema com norma  $l_p$  em uma sequência de problemas de mínimos quadrados ponderados, cuja solução pode ser encontrada por inúmeros métodos e *softwares* disponíveis (BJÖRCK, 1996, p. 173). A seguir é apresentada uma descrição resumida do algoritmo IRLS, específica para problemas que utilizam norma  $l_1$ . Em Björck (1996, p. 173-175) há uma descrição completa do algoritmo IRLS, para problemas com normas  $l_p$  em que  $1 \leq p < 2$ .

O algoritmo IRLS assume que o cálculo da norma  $l_1$  de um vetor  $\mathbf{x}$  pode ser definida como a soma ponderada do quadrado dos elementos do vetor:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| = \sum_{i=1}^N \frac{1}{|x_i|} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^N w_i |x_i|^2 \quad (58)$$

em que  $w_i = 1/|x_i|$  são os pesos que ponderam cada elemento do vetor  $\mathbf{x}$ . Escrevendo a Eq. (58) no formato matricial tem-se:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{x} = \|\mathbf{W}^{1/2} \mathbf{x}\|_2^2 \quad (59)$$

em que  $\mathbf{W} = \text{diag}(1/|x_i|)$  e  $\mathbf{W}^{1/2} = \text{diag}(1/\sqrt{|x_i|})$ . O operador  $\text{diag}(\cdot)$  representa a operação que cria uma matriz quadrada diagonal, com os elementos em sua diagonal principal igual aos valores dos elementos o vetor<sup>1</sup> passado como argumento.

A partir dessa definição, o problema de minimização com norma  $l_1$  passa a ser um problema de mínimos quadrados ponderados:

$$\hat{\mathbf{f}}_{l_1} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_1 = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{W}^{1/2} (\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f})\|_2^2 \quad (60)$$

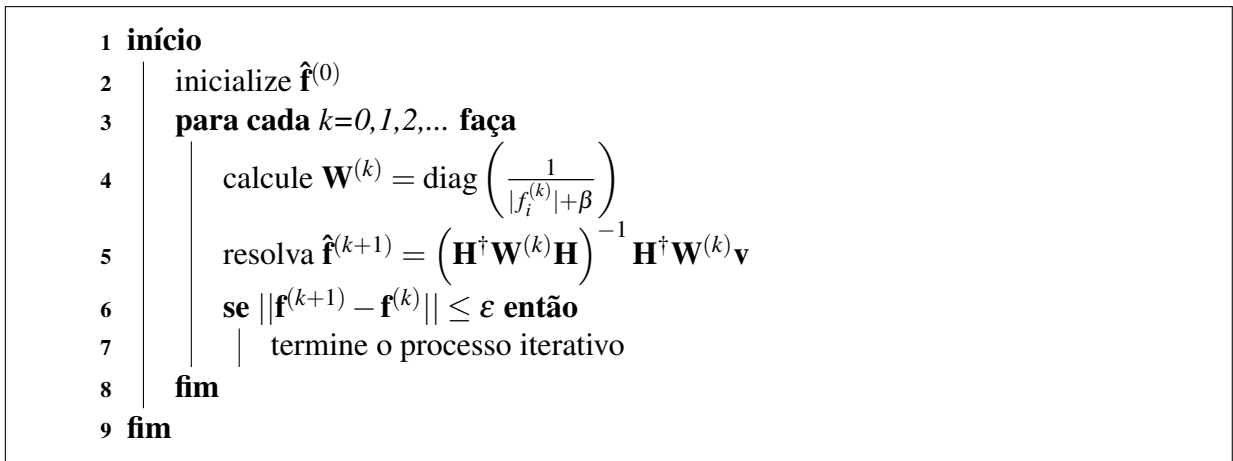
cuja solução fechada é

$$\hat{\mathbf{f}}_{l_1} = \left( \mathbf{H}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{v} \quad (61)$$

A solução da Eq. (61) apresenta dois problemas. O primeiro refere-se ao fato que  $\mathbf{W}$  depende do valor de  $\mathbf{f}$ , que é desconhecido. O segundo problema é que, pela definição da matriz  $\mathbf{W}$ , se  $|v_i - [\mathbf{H}\mathbf{f}]_i| = 0$  então  $w_i = \infty$ .

<sup>1</sup>Se o argumento for uma matriz, ela é “vetorizada” pelo empilhamento de suas colunas.

Para resolver o primeiro problema, sugere-se utilizar um método iterativo. Considerando uma estimativa inicial  $\hat{\mathbf{f}}^{(0)}$ , calcula-se a matriz  $\mathbf{W}^{(0)}$ , a qual é utilizada para encontrar uma nova estimativa  $\hat{\mathbf{f}}^{(1)}$  resolvendo-se a Eq. (61). O processo é repetido até que a diferença entre duas estimativas seja menor que uma tolerância  $\varepsilon$ . Em resumo, o algoritmo IRLS é mostrado na Figura 11.



**Figura 11 – Algoritmo IRLS**

**Fonte: Autoria própria.**

A resolução do problema de mínimos quadrados ponderados, em cada iteração do algoritmo IRLS (linha 5 da Figura 11), pode ser feita pelo método do gradiente conjugado.

O segundo problema é resolvido simplesmente modificando a forma de calcular a matriz  $\mathbf{W}$ . Ao acrescentar um pequeno valor positivo  $\beta$  ao módulo de cada elemento do vetor  $\mathbf{f}$ , evita-se que a operação de inversão leve a um valor  $\infty$ . Assim, fazendo  $\mathbf{W} = \text{diag}(1/(|x_i| + \beta))$ , com um valor suficientemente pequeno em  $\beta$ , não se alteram significativamente os valores dos pesos  $w_i$ , o que poderia causar erro no cálculo da norma  $l_1$ , e limita-se o maior valor possível para os elementos de  $\mathbf{W}$  em  $1/\beta$ . Valores típicos de  $\beta$  estão na ordem de  $10^{-7}$ .

Apesar do algoritmo IRLS ter sido definido para resolver um problema de minimização cuja função custo é puramente o cálculo de uma norma  $l_p$ , ele também pode ser utilizado quando a função custo é uma combinação linear de vários termos com normas diferentes. Esse é o caso das regularizações *Total Variation* (TV) e *não-quadrática* do Quadro 2. Nessas situações, é preciso calcular uma matriz de pesos  $\mathbf{W}$  para cada termo da função custo que não utiliza a norma  $l_2$ .



No caso da regularização não-quadrática  $l_2-l_1$ , em que o termo de fidelidade de dados utiliza norma  $l_2$  e o termo regulador utiliza a norma  $l_1$ , somente é preciso calcular a matriz de pesos  $\mathbf{W}_R^{(k)} = \text{diag}(1/(|[\mathbf{L}\mathbf{f}^{(k)}]_i| + \beta))$  para o termo regulador. E, em cada iteração, resolve-se:

$$\hat{\mathbf{f}}^{(k+1)} = \left( \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \lambda \mathbf{L}^\dagger \mathbf{W}_R^{(k)} \mathbf{L} \right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v} \quad (62)$$

Já se for utilizada a norma  $l_1$  também para o termo de fidelidade de dados, calcula-se uma segunda matriz de pesos,  $\mathbf{W}_D^{(k)} = \text{diag}(1/(|[\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}^{(k)}]_i| + \beta))$  e, resolve-se a cada iteração:

$$\hat{\mathbf{f}}^{(k+1)} = \left( \mathbf{H}^\dagger \mathbf{W}_D^{(k)} \mathbf{H} + \lambda \mathbf{L}^\dagger \mathbf{W}_R^{(k)} \mathbf{L} \right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{W}_D^{(k)} \mathbf{v} \quad (63)$$

### 3.5 ESCOLHA DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO

Como mencionado anteriormente, o parâmetro de regularização controla o equilíbrio entre o termo de fidelidade dos dados e o termo de regularização. A escolha de um valor adequado para esse parâmetro é importante para a reconstrução correta do vetor de entrada  $\mathbf{f}$  (KARL, 2000). Um valor muito baixo faz com que a solução se aproxime da solução de mínimos quadrados, que pode ser instável. Já um valor muito alto, faz a solução ser mais influenciada pela informação prévia inserida pelo termo de regularização do que pelos dados medidos. O efeito disso, geralmente, é a tendência da solução ser mais “suave”, pois os componentes de alta frequência da solução são eliminados como se fossem ruído.

Em Karl (2000) são apresentados cinco métodos para a escolha do parâmetro de regularização:

- inspeção visual;
- o princípio da discrepância;
- a curva-L;
- validação cruzada generalizada e
- abordagens estatísticas.

Em geral, não se utiliza somente um dos métodos citados, mas um conjunto deles. Pode-se utilizar a inspeção visual ou uma abordagem estatística para se obter uma estimativa grosseira de valores adequados para o parâmetro. Então, aplica-se a técnica da curva-L para encontrar uma estimativa mais refinada.

Em Zibetti et al. (2008), é proposto um novo método de escolha do parâmetro de regularização, similar ao método da curva-L (REGIŃSKA, 1996). Entretanto, os dois métodos diferem nas escalas dos eixos das abcissas e ordenadas no traçado da curva. No método da curva-L são utilizadas escalas logarítmicas em ambos os eixos. Já nesse método novo, são utilizadas escalas de raiz quadrada. Essa modificação faz com que a curva seja convexa, tornando a escolha do parâmetro de regularização mais fácil. Os resultados obtidos por Zibetti et al. (2008) com o novo método são similares aos fornecidos pelos métodos tradicionais.

Já nas abordagens estatísticas, o problema da escolha do parâmetro de regularização é tratado como um problema de *modelagem estatística* (KARL, 2000, p. 159), a partir do conhecimento das funções de densidade de probabilidade  $p(\mathbf{v}|\mathbf{f})$  e  $p(\mathbf{f})$ . Entretanto, nem sempre é fácil conhecer tais funções, mas em diversas situações, uma aproximação pode ser feita. Assim, se for aproximado que tanto  $\mathbf{f}$  como o ruído  $\eta$  forem variáveis aleatórias seguindo uma distribuição de probabilidade gaussiana, com média 0 e variâncias  $\sigma_f^2$  e  $\sigma_\eta^2$  (como foi considerado na explicação do método MAP de regularização), o parâmetro de regularização é  $\lambda = \sigma_\eta^2 / \sigma_f^2$  (KARL, 2000, p. 159).

### 3.6 CONCLUSÕES

Neste capítulo é definido o conceito de *problemas inversos* e descrita uma abordagem em que eles são tratados como problemas de otimização. São descritas as soluções pelo método dos mínimos quadrados e de norma mínima, mas que não são adequadas quando a matriz  $\mathbf{H}$ , que modela o problema, é mal-condicionada e a solução torna-se instável na presença de ruídos. Nessas situações é preciso utilizar a regularização.

Os métodos de regularização estabilizam o problema na presença de ruídos pela inclusão de alguma informação prévia sobre a solução. Existem diversas técnicas de regularização, como as de Tikhonov e MAP. Tais técnicas são bastante populares por possuírem a característica de serem quadráticas e apresentarem uma solução fechada, além de existir uma boa quantidade de algoritmos disponível para sua resolução.

Entretanto, quando a solução procurada é esparsa, os métodos de regularização não-quadráticos, principalmente os que utilizam norma  $l_1$ , são os mais indicados. Contudo, existe uma quantidade menor de algoritmos para resolver problemas com regularização não-quadrática. Entre eles, um bastante utilizado é o IRLS.

Além da escolha do algoritmo para resolução do problema de otimização regularizado, outro aspecto importante é a escolha do parâmetro de regularização. Um valor adequado é

importante para a resolução correta do problema inverso. Existem diversas técnicas para determinar um valor adequado nesse parâmetros. Entretanto, em geral, o valor do parâmetro de regularização está relacionado com a relação sinal-ruído existente nos dados medidos.

## 4 MODELAGEM DO SISTEMA DE MEDIÇÃO CONSTRUÍDO

Para se desenvolver um método para localização e caracterização de descontinuidades a partir da análise de sinais *A-scan* baseado na resolução de problemas inversos, é preciso inicialmente determinar o problema direto. Mas, conforme descrito na Seção 3.1, o modelo do sistema é um elemento essencial na definição desse problema.

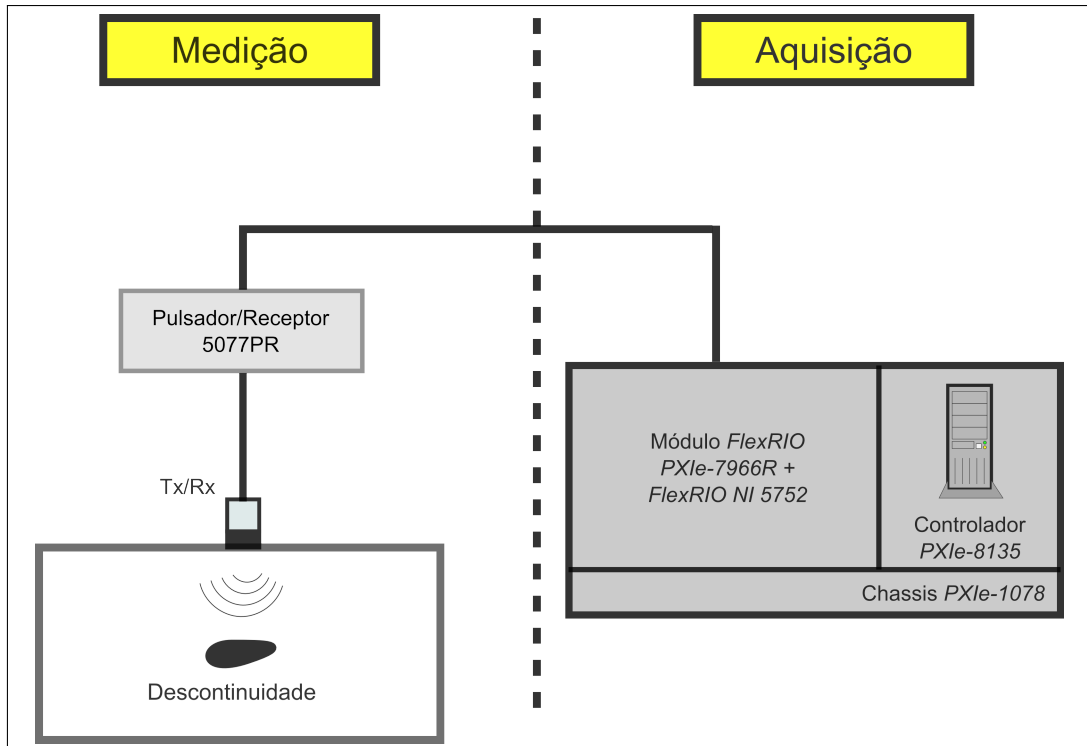
Na Seção 2.2 é apresentado um modelo matemático LIT de um sistema de medição genérico para inspeções END por ultrassom. Nesse modelo, representado pela Eq. (4), são identificados diversos elementos do sistema de medição e os efeitos que tais elementos causam no sinal *A-scan* medido em sua saída. Cada um desses elementos é representado por uma função de transferência própria, com parâmetros específicos em função das características físicas do sistema de medição. Portanto, para a utilização prática desse modelo em um sistema de medição real, é preciso identificar tais parâmetros para cada elemento da Eq. (4).

Neste capítulo, a Seção 4.1 apresenta a descrição completa do sistema de medição e aquisição implementado durante a execução desse trabalho. Em seguida, na Seção 4.2 é descrito o processo como o sistema de inspeção faz a aquisição dos sinais *A-scan*. Por fim, na Seção 4.3 é apresentada a modelagem analítica do sistema de medição, baseada no modelo genérico da Eq. (4) e nas características físicas reais do sistema implementado. Para a validação do modelo é feita uma comparação entre dois sinais *A-scan*, o primeiro simulado pelo modelo e o segundo medido pelo sistema de inspeção.

### 4.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO

O sistema de medição para inspeção END por ultrassom utilizado nesse trabalho está representado, na forma de diagrama de blocos, pela Figura 12. Ele é composto por um equipamento pulsador/receptor de ultrassom modelo 5077PR da *Panametrics*. Esse pulsador/receptor excita um transdutor de contato modelo *VIDEOSCAN V110-RM* da *Olympus*. O transdutor tem um elemento ativo, no formato circular, com diâmetro de 6 mm e frequência nominal de 5 MHz

(OLYMPUS, 2013). A documentação das características específicas do transdutor, fornecida pelo fabricante, está no Anexo A.

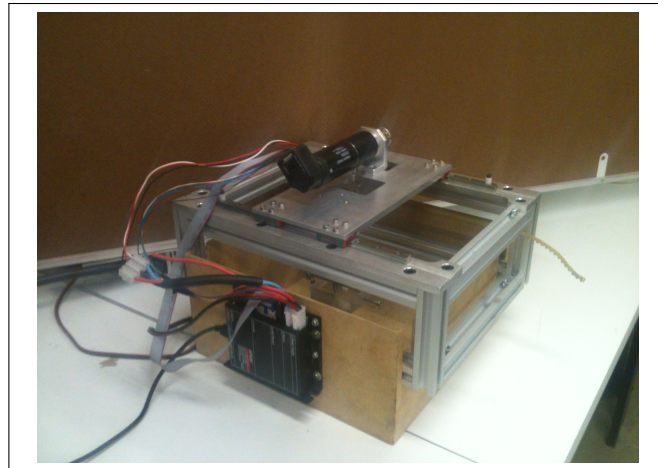


**Figura 12 – Diagrama em blocos do sistema de inspeção END construído**  
**Fonte: Autoria própria.**

A configuração de inspeção utilizada é a pulso-eco e o transdutor é colocado em contato direto com a peça inspecionada, em um ângulo normal com a superfície de inspeção. Para que haja a transferência das ondas de ultrassom do transdutor para a peça é utilizada glicerina líquida como material acoplante.

O sinal *A-scan* recebido pelo transdutor é amplificado no pulsador/receptor e digitalizado por um sistema de aquisição da *National Instruments*. Esse sistema de aquisição é composto por um chassis *PXIe-1078*, um controlador *PXIe-8135* e um módulo controlador *FlexRIO PXIe-7966R* com módulo adaptador *FlexRIO NI 5752*.

O transdutor é deslocado lateralmente ao longo da superfície de inspeção da peça por um sistema mecânico, cujo elemento ativo é um servomotor modelo 302865 da *Maxon*. Esse motor é acionado por um controlador *EPOS2*, também da *Maxon*. A Figura 13 mostra uma foto desse sistema mecânico.



**Figura 13 – Sistema mecânico implementado para deslocamento lateral do transdutor de ultrassom**  
**Fonte: Autoria própria.**

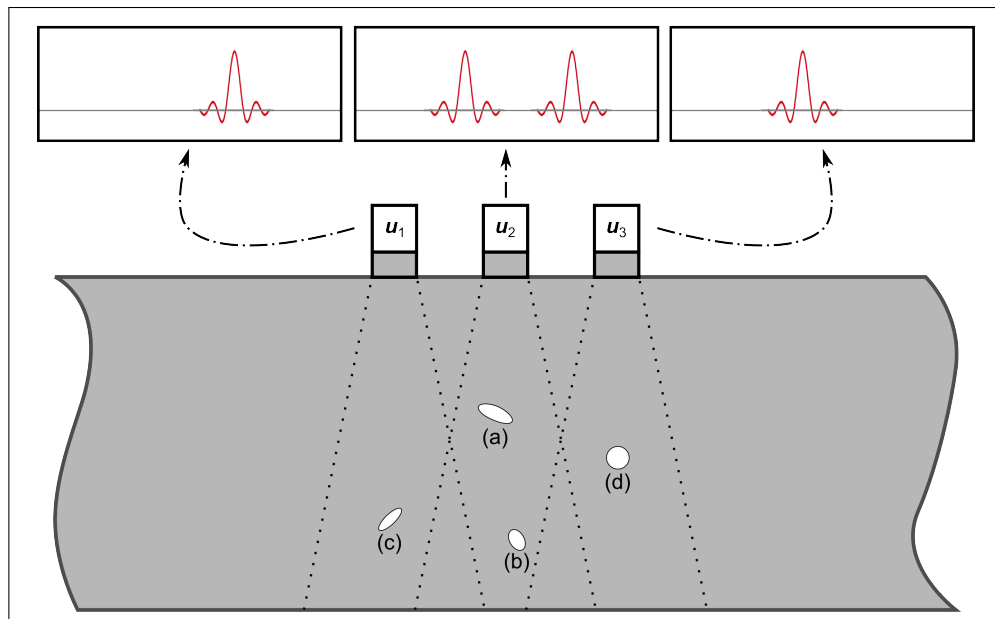
## 4.2 PROCESSO DE AQUISIÇÃO

O processo de aquisição de dados no sistema de inspeção inicia-se quando o pulsador envia um pulso elétrico para o transdutor. Ao mesmo tempo, o sistema de aquisição é habilitado para digitalizar o sinal elétrico analógico existente na saída do receptor. O sistema de aquisição captura amostras desse sinal analógico em intervalos de  $0,02 \mu s$ .

A captura das amostras de um único sinal *A-scan* ocorre durante um período de tempo chamado *janela de amostragem*. O tamanho da janela de amostragem é escolhido com base no tempo necessário para que um pulso de ultrassom se propague do transdutor até a maior distância que se pretende inspecionar na peça, e retorne ao transdutor. Dessa forma, um sinal *A-scan* tem um número finito de amostras, representado por  $N$ . Essa quantidade define a profundidade máxima, a partir da superfície de inspeção, das discontinuidades que poderão ser detectadas pelo sistema.

Um sinal *A-scan* contém somente os ecos refletidos por discontinuidades existentes na região sob o transdutor, iluminada pelo lóbulo principal do campo de ondas incidentes. A incidência dos lóbulos laterais sobre as discontinuidades não contribuem de forma significativa no sinal *A-scan* recebido e, portanto, pode ser desprezada. A Figura 14 demonstra essa situação.

Somente os ecos das discontinuidades (a) e (b) estão presentes no sinal *A-scan* adquirido no transdutor quando ele encontra-se na posição  $u_2$ . Para se detectar os ecos das discontinuidades (c) e (d) é necessário mover o transdutor para as posições  $u_1$  e  $u_3$ , respectivamente, e efetuar uma nova aquisição de sinal *A-scan* em cada posição.

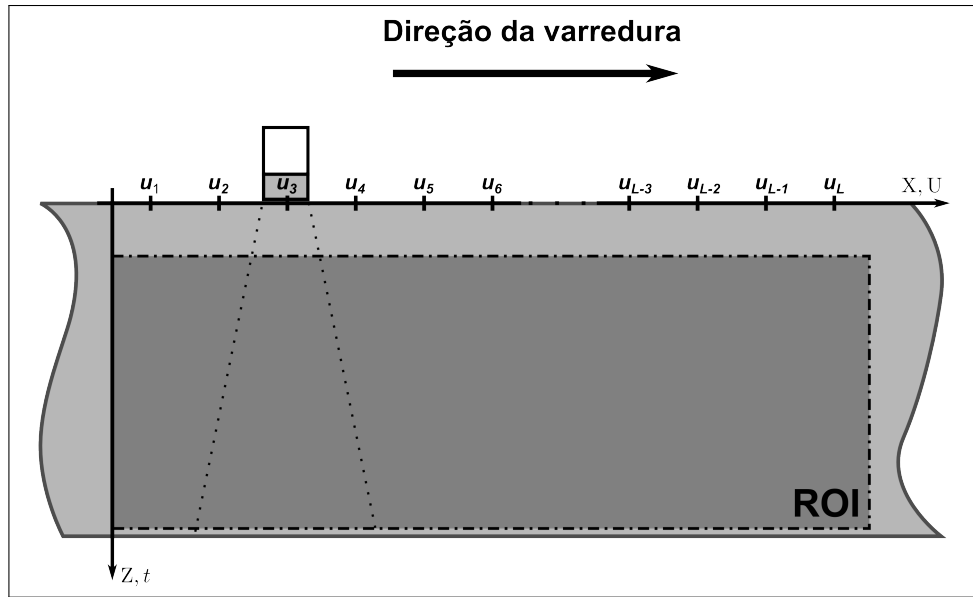


**Figura 14 – Aquisição A-scan em uma peça com diversas descontinuidades**  
**Fonte: Autoria própria.**

Assim, se o transdutor for colocado em um conjunto diferente de posições ao longo de uma mesma direção ( $u_1$  até  $u_L$ ) e, em cada posição for emitido um pulso de ultrassom e adquirido seu eco, ao final do procedimento se tem  $L$  sinais de A-scan diferentes. Esse procedimento é chamado de *varredura lateral*. A distância entre as posições de varredura deve ser constante e é chamada de *período de amostragem espacial* ( $\Delta u$ ).

Esse conjunto de  $L$  sinais formam os dados coletados e pode ser utilizado para analisar possíveis descontinuidades por métodos paramétricos ou não paramétricos. Como os dados estão limitados a uma região da peça, a análise é limitada a descontinuidades existentes nessa região. Essa região varrida pelas ondas de ultrassom é chamada de *região de interesse* (ROI — do original *region of interest*). A Figura 15 mostra uma varredura lateral e a delimitação da ROI.

Em geral, a quantidade de pontos discretos na ROI é igual a quantidade de dados coletados durante o processo de aquisição na varredura lateral. Assim, se forem digitalizados  $L$  sinais de A-scan, cada um com  $N$  amostras temporais, a ROI terá  $L$  pontos discretos na horizontal e  $N$  pontos discretos na vertical.



**Figura 15 – Varredura lateral e a delimitação da ROI em uma peça**  
**Fonte: Autoria própria.**

#### 4.3 MODELAGEM ANALÍTICA DA RESPOSTA DO SISTEMA DE MEDIÇÃO

Com base nas especificações do sistema de medição construído e nas deduções de cada um dos termos da Eq. (4) feitas no capítulo 2, é possível obter um modelo analítico para o sistema de medição desenvolvido. Esse modelo determina, a partir de um impulso elétrico aplicado ao transdutor, o sinal *A-scan* recebido pelo sistema de aquisição, no domínio da frequência. Para facilitar, a Eq. (4) é repetida aqui:

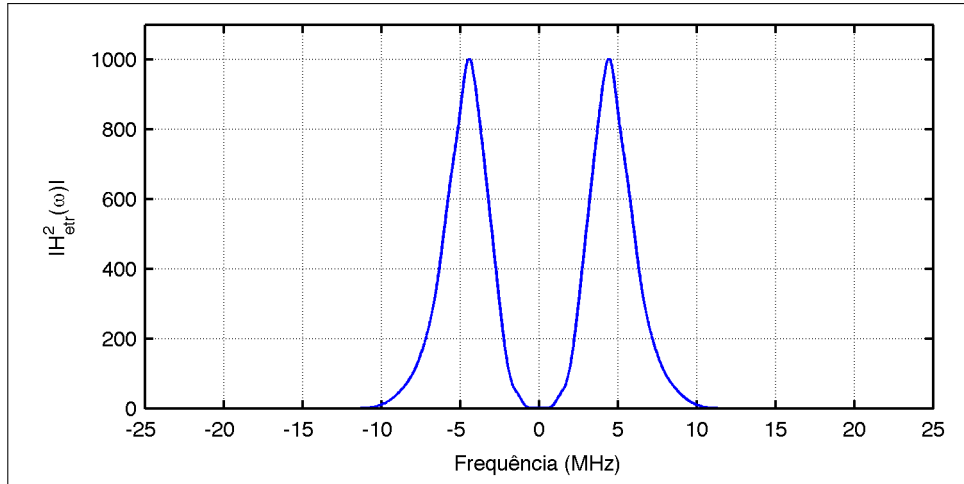
$$V_o(\omega) = H_e(\omega)P(\omega)M(\omega)C_T(\omega)T_1(\omega)T_2(\omega)C_R(\omega)A(\omega, \Theta)$$

O primeiro termo da Eq. (4) é a resposta elétrica conjunta, que conforme a Eq. (3) é  $H_e(\omega) = H_{et}(\omega)H_{er}(\omega)V_i(\omega)$ , sendo composta pelas respostas eletro-acústicas do transdutor na transmissão e recepção e pelo espectro do sinal elétrico de tensão aplicado pelo pulsador no transdutor. No sistema implementado, o sinal de entrada do pulsador é um pulso de alta tensão com largura estreita, que pode ser aproximado a um impulso unitário, então,  $V_i(\omega) \approx 1$ . As respostas eletro-acústicas de transmissão e recepção serão consideradas iguais, uma vez que está sendo utilizada a configuração pulso-eco. A resposta em frequência do transdutor está disponível em sua documentação e passa a ser denominada aqui como  $H_{etr}(\omega)$ . Portanto, a resposta elétrica conjunta é:

$$H_e(\omega) = H_{etr}^2(\omega) \quad (64)$$



A Figura 16 mostra a resposta elétrica conjunta para o transdutor *VIDEOSCAN V110-RM* utilizado no sistema de medição implementado. Essa resposta é obtida a partir da documentação técnica fornecida pelo fabricante do transdutor.



**Figura 16 – Resposta elétrica conjunta do transdutor *VIDEOSCAN V110-RM* utilizado no sistema de medição. Apesar da resposta elétrica conjunta ter como parâmetro a frequência angular  $\omega$ , aqui é utilizada a frequência temporal em MHz. Isso para evidenciar a frequência de operação do transdutor de  $\approx 5$  MHz**  
**Fonte: Autoria própria.**

Com relação ao termo de propagação, é preciso considerar as distâncias percorridas pelas ondas incidentes e refletidas. Para a configuração pulso-eco, essas distâncias são iguais e correspondem a distância entre o centro do transdutor e um ponto de interesse  $\vec{r}$ . Assim, pela Eq. (21)

$$P(\omega, |\vec{r} - \vec{u}| + |\vec{u} - \vec{r}|, c) = \exp\left(i\frac{\omega}{c}2|\vec{r} - \vec{u}|\right) = \exp(i2k|\vec{r} - \vec{u}|) \quad (65)$$

em que  $\vec{u}$  é o ponto central da superfície ativa do transdutor.

Como o transdutor utilizado é circular, os fatores de correção da difração na transmissão e recepção são os apresentados nas equações (25) e (40), respectivamente. Ao se agrupar os dois termos tem-se:

$$\begin{aligned} C(\omega, |\vec{r} - \vec{u}|, \theta_{\vec{r};\vec{u}}, a, c) &= C_T(\omega, |\vec{r} - \vec{u}|, \theta_{\vec{r};\vec{u}}, a, c)C_R(\omega, |\vec{r} - \vec{u}|, \theta_{\vec{r};\vec{u}}, a, c) \\ &= -2ika^2 \text{jinc}^2(ka \sin \theta_{\vec{r};\vec{u}}) \end{aligned} \quad (66)$$

em que  $a$  é o raio do transdutor e  $\theta_{\vec{r};\vec{u}}$  é o ângulo entre o eixo normal a superfície do transdutor e o vetor  $\vec{r} - \vec{u}$ .

O termo referente a atenuação, conforme já foi discutido na Seção 2.3, é desconsiderado, já que é feita a compensação da atenuação pelo sistema de aquisição. Os termos  $T_{1,2}(\omega)$ , referentes aos efeitos das interfaces água-metal e metal-água também são desconsiderados, pois

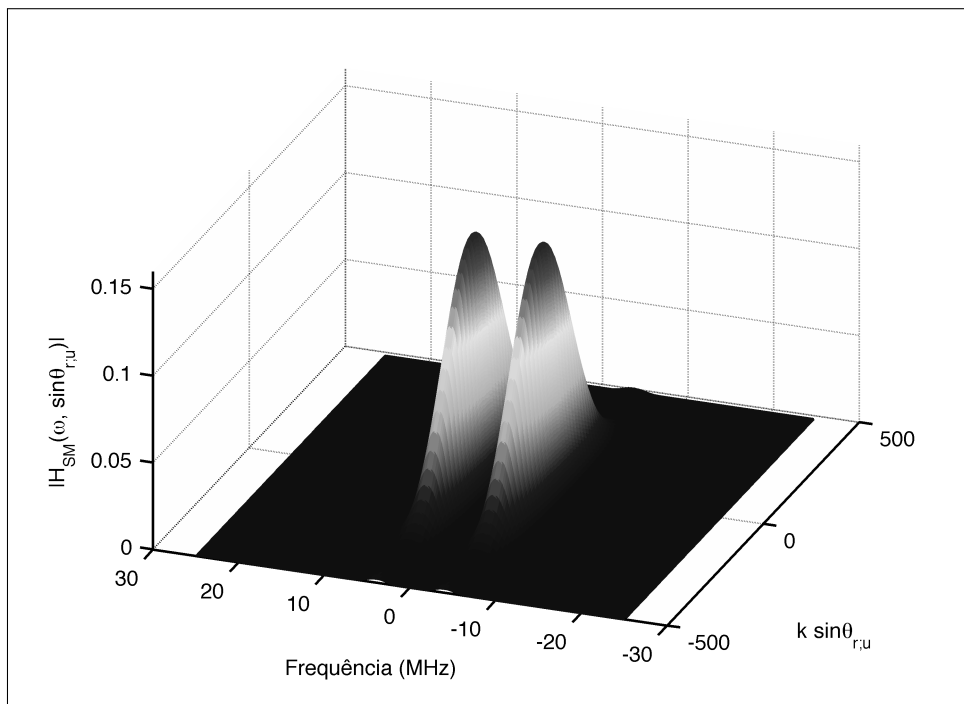
é um sistema de inspeção por contato e não por imersão. Assim, a Eq. (4) pode ser simplificada para

$$V_o(\omega) = H_e(\omega)C_T(\omega)C_R(\omega)P(\omega)A(\omega, \Theta) \quad (67)$$

Os três primeiros termos da Eq. (67) estão relacionados exclusivamente com o sistema de medição, independente das características da peça inspecionada. Assim, eles podem ser agrupados em um único termo  $H_{SM}(\omega)$  que representa a *resposta total do sistema de medição*. Para o sistema de medição construído, a resposta total do sistema de medição é

$$H_{SM}(\omega, \theta_{\vec{r};\vec{u}}, a) = H_e(\omega)C_T(\omega)C_R(\omega) = -2ika^2H_{etr}^2(\omega)\text{jinc}^2(ka \sin \theta_{\vec{r};\vec{u}}) \quad (68)$$

Na Figura 17 é traçado o gráfico do valor absoluto da resposta total do sistema de medição, considerando que o transdutor utilizado é circular, com 6 mm de diâmetro e operando na frequência aproximada de 5 MHz. Os dados utilizados para traçar esse gráfico foram simulados a partir da Eq. (68).



**Figura 17 – Resposta total do sistema de medição para um transdutor de contato circular com 6 mm de diâmetro, operando em 5 MHz sobre uma peça de aço-carbono. O formato dessa resposta indica que o sistema de medição age como um filtro passa-faixa de duas dimensões. A primeira dimensão é a frequência temporal, diretamente relacionada com a frequência de operação do transdutor. Somente os sinais com frequências próximas a frequência central do transdutor são medidas. A segunda dimensão,  $ka \sin \theta_{\vec{r};\vec{u}}$ , está relacionada com o efeito da difração no transdutor. Somente são medidos os ecos oriundos de discontinuidades dentro do lóbulo principal, em que  $ka \sin \theta_{\vec{r};\vec{u}} \approx 0$**

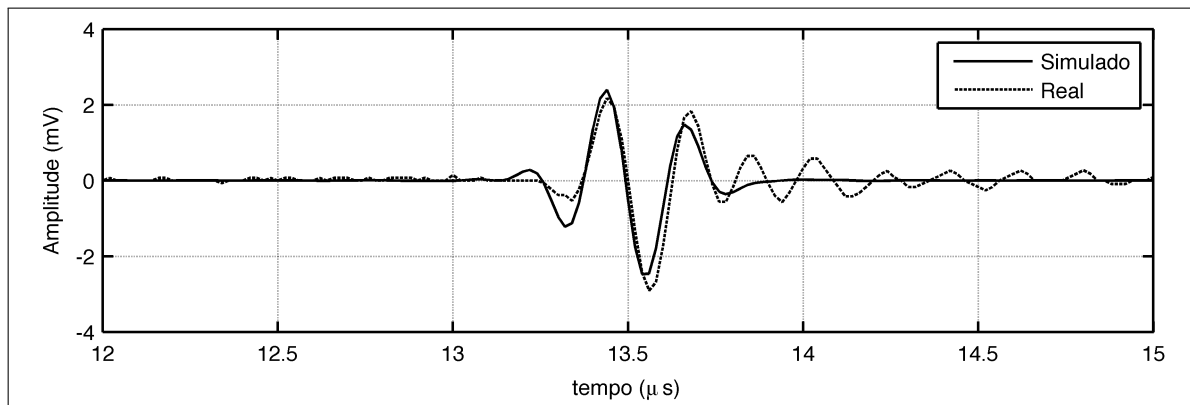
**Fonte: Autoria própria.**

Dessa forma, substituindo as equações (65) e (68) na Eq. (67), tem-se

$$V_o(\vec{u}, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) \text{jinc}^2(ka \sin \theta_{\vec{r}; \vec{u}}) \exp(i2k|\vec{r} - \vec{u}|) A(\omega, \Theta) \quad (69)$$

em que  $A(\omega, \Theta)$  é a amplitude de espalhamento da descontinuidade com centro geométrico no ponto  $\vec{r}$ .

A Figura 18 mostra uma comparação entre dois sinais *A-scan*. O primeiro sinal é simulado a partir da Eq. (69), utilizando os mesmos parâmetros do sistema de medição. A equação utilizada para a amplitude de espalhamento é a aproximação de Kirchoff para furos laterais passantes, mostrada no Quadro 1. O segundo é um sinal medido pelo sistema de medição descrito na Seção 4.1, em uma peça de aço-carbono com um furo lateral passante de 1 mm de diâmetro na profundidade de 40 mm.



**Figura 18 – Comparação entre sinais *A-scan* simulado pelo modelo da Eq. (69) e medido pelo sistema de medição descrito na Seção 4.1. A descontinuidade é um furo lateral passante com 1 mm de diâmetro**  
**Fonte: Autoria própria.**

As diferenças dos dois sinais, principalmente a oscilação após  $13,7 \mu\text{s}$ , ocorrem devido a dois fatores: (I) o uso da aproximação de Kirchoff no modelo da amplitude de espalhamento e; (II) oscilações causadas pelo subamortecimento no pulso transmitido, oriundo de um efeito no transdutor chamado *transducer ringing* (HUNTER et al., 2008).

Apesar da ausência dessas oscilações no sinal simulado, as respostas da borda de ataque dos dois sinais são coincidentes. Como o sinal da resposta da borda de ataque geralmente é o elemento mais significativo na amplitude de espalhamento (SCHMERR; SONG, 2007, p.247), ele é o mais importante para a análise da descontinuidade.

#### 4.4 CONCLUSÕES

Esse capítulo descreveu o sistema de inspeção END por ultrassom implementado para a realização do trabalho. O sistema de medição foi modelado como um sistema linear invariante no tempo a partir das equações apresentadas no Capítulo 2. Para a validação do modelo foi realizada uma comparação entre dois sinais *A-scan*, o primeiro simulado pelo modelo e o segundo coletado pelo sistema de inspeção.

## 5 RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS ESPARSAS

Entre todos os métodos para análise de sinais ultrassônicos disponíveis, as técnicas baseadas em imagens são sem dúvida as mais utilizadas. Diversos autores, tais como Doctor et al. (1986), Müller et al. (1986), Bernus et al. (1993), Chiao e Thomas (1994), Ditchburn et al. (1996), Spies et al. (2012), indicam que a apresentação de uma imagem melhora o desempenho dos inspetores na interpretação dos dados de inspeção por ultrassom. Assim, o problema em questão é como criar a imagem de uma descontinuidade, a princípio desconhecida, a partir de um conjunto de sinais *A-scan* medidos pelo sistema de medição e possivelmente distorcidos por ruído. Em Bovik (2000, p. 141), esse tipo de problema é definido como *reconstrução de imagens*.

As imagens fornecidas por um sistema de inspeção por ultrassom representam a refletividade acústica dentro de um objeto (BERNUS et al., 1993). Elas são criadas a partir da aplicação de um algoritmo de reconstrução apropriado sobre um conjunto de sinais *A-scan*. Existem diversos algoritmos para a reconstrução de imagens em END por ultrassom. O algoritmo mais simples, conhecido como *B-scan*, monta uma imagem como uma matriz de pontos. Nela, cada coluna representa a posição espacial do transdutor e cada linha corresponde ao tempo de propagação das ondas ultrassônicas, desde o transdutor até uma posição dentro do objeto inspecionado. A intensidade de cada ponto da imagem é proporcional a amplitude do sinal *A-scan* relacionado à posição do transdutor e ao tempo de propagação. Uma imagem *B-scan* mostra a representação de perfil (corte lateral) do objeto inspecionado. Embora o algoritmo *B-scan* seja simples e rápido na reconstrução de imagens, ele apresenta uma baixa resolução lateral. Além disso, o diâmetro do transdutor e a profundidade da descontinuidade afetam a qualidade da imagem reconstruída (SHIEH et al., 2012; SCHMITZ et al., 2000), devido aos efeitos da difração e do espalhamento de feixe (KINO, 1987).

No início dos anos 1970, a técnica de focalização por abertura sintética (SAFT) (PRINE, 1972; BURCKHARDT et al., 1974; SEYDEL, 1982) foi desenvolvida para melhorar a resolução lateral das imagens reconstruídas. Essa técnica foi inspirada nos conceitos de abertura sintética (SA — do original *synthetic aperture*) utilizados em sistemas de mapeamento por radar

aerotransportado (SHERWIN et al., 1962). Em geral, o SAFT é implementado por operações de soma e deslocamento diretamente nos sinais *A-scan* (FREDERICK et al., 1976; CORL et al., 1978; KINO et al., 1980). Entretanto, ele também pode ser implementado de outras formas, tais como: multiplicação matriz-vetor (LINGVALL et al., 2003); migração de Stolt (STOLT, 1978) aplicada nos sinais *A-scan* no domínio da frequência (algoritmo  $\omega$ - $k$ ) (MAYER et al., 1990; GOUGH; HAWKINS, 1997; CHANG; CHERN, 2000; STEPINSKI, 2007); e utilizando processamento distribuído em unidades de processamento gráfico (GPU — do original *graphics processing unit*) (MARTÍN-ARGUEDAS et al., 2012).

Os algoritmos *B-scan* e SAFT foram desenvolvidos inicialmente para sistemas de medição contendo transdutores monoestáticos (com um único elemento ativo) na configuração pulso-eco. Recentemente, entretanto, houve um aumento significativo nos sistemas de medição que utilizam transdutores com múltiplos elementos ativos, os chamados transdutores *arrays* (HOLMES et al., 2005). Com esses transdutores, os sistemas de medição podem controlar, de forma eletrônica, a abertura, a direção e o foco do feixe de ultrassom sobre as descontinuidades (DRINKWATER; WILCOX, 2006). Eles também podem emular o comportamento de um transdutor monoestático, disparando sequencialmente cada elemento do arranjo. Isso proporciona duas vantagens: (I) evita a movimentação física do transdutor para varrer a região de interesse; e (II) permite a aquisição de sinais *A-scan* para todas as combinações de elementos transmissores e receptores. Esse modo de aquisição de sinais é chamado de *captura de matriz completa* (FMC — do original *full matrix capture*) (HOLMES et al., 2005). O FMC permite a reconstrução de imagens por outros algoritmos, tais como: método de focalização total (TFM — do original *total focusing method*) (HOLMES et al., 2005); extrapolação do campo de onda inverso (IWEX — do original *inverse wave field extrapolation*) (PORTZGEN et al., 2007); uma versão do algoritmo  $\omega$ - $k$  SAFT para FMC (HUNTER et al., 2008), um algoritmo de retropropagação inversível (VELICHKO; WILCOX, 2009) e um algoritmo de *beamforming* adaptativo (LI; HAYWARD, 2011). Em todos esses algoritmos, a resolução da imagem de um refletor pontual é melhorada quando comparada com o *B-scan* e com o SAFT (HOLMES et al., 2005; VELICHKO; WILCOX, 2010; LI; HAYWARD, 2011). Apesar das vantagens dos transdutores *array*, sistemas de medição com transdutores monoestáticos ainda são amplamente utilizados, especialmente em sistemas portáteis e embarcados.

Neste capítulo é apresentado um novo algoritmo para reconstrução de imagens em END por ultrassom. A imagem é reconstruída a partir de sinais *A-scan* coletados pelo sistema de medição descrito no Capítulo 4, com um único transdutor monoestático, na configuração pulso-eco. A resolução da imagem de um refletor pontual, reconstruída por esse algoritmo, é melhor que das imagens reconstruídas pelos algoritmos tradicionais e também pelo algoritmo

TFM. No algoritmo proposto, a reconstrução das imagens é feita resolvendo um problema de mínimos quadrados regularizados, utilizando a norma  $l_1$  no termo de regularização. Essa abordagem favorece a reconstrução de imagens constituídas por poucos pontos refletoras (imagens esparsas) (LAVARELLO et al., 2006). Esse problema de otimização é resolvido por um algoritmo composto pela combinação do IRLS com o gradiente conjugado. Embora essa abordagem já tenha sido utilizada em outras aplicações, tais como *deblurring* de imagens, tomografia computadorizada e *compressed sensing* (ZIBULEVSKY; ELAD, 2010), até onde se tem conhecimento, este é o primeiro trabalho que utiliza essas técnicas no contexto da reconstrução de imagens em END por ultrassom. O conteúdo deste capítulo foi publicado como um artigo de pesquisa na revista *Sensors* em 21 de abril de 2015 (GUARNERI et al., 2015).

## 5.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

De acordo com a Seção 4.3, os sinais *A-scan* coletados pelo sistema de medição são modelados pela Eq. (69), reproduzida aqui para facilitar a leitura

$$V_o(\vec{\mathbf{u}}, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) \text{jinc}^2(ka \sin \theta_{\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{u}}}) \exp(i2k|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{u}}|) A(\omega, \Theta)$$

em que  $A(\omega, \Theta)$  é o termo da amplitude de espalhamento para uma descontinuidade com centro geométrico no ponto  $\vec{\mathbf{r}}$ . Entretanto, como a amplitude de espalhamento para um refletor pontual é constante pela aproximação de Kirchhoff (SCHMERR; SONG, 2007), o termo  $A(\omega, \Theta)$  é substituído pela constante unitária.

Pela Eq. (69), somente uma descontinuidade presente no ponto  $\vec{\mathbf{r}}$  contribui para a formação dos sinais *A-scan*, sendo que a contribuição dos demais pontos da ROI é nula. Como o sistema é linear, é possível rescrever a Eq. (69), incluindo todos os pontos da ROI como

$$V_o(\vec{\mathbf{u}}, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) \int_{\vec{\mathbf{r}} \in \text{ROI}} \text{jinc}^2[ka \sin \theta_{\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{u}}}] \exp(i2k|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{u}}|) f(\vec{\mathbf{r}}) d\vec{\mathbf{r}} \quad (70)$$

em que  $f(\vec{\mathbf{r}})$  é uma função que representa a “imagem” da refletividade acústica. A definição da função  $f(\vec{\mathbf{r}})$  não indica se ela é contínua ou discreta. Isso depende da definição da ROI. Nesse trabalho, tanto a ROI como  $f(\vec{\mathbf{r}})$  são discretas, então, a integral da Eq. (70) é substituída por um somatório

$$V_o(\vec{\mathbf{u}}, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) \sum_{\vec{\mathbf{r}} \in \text{ROI}} \text{jinc}^2[ka \sin \theta_{\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{u}}}] \exp(i2k|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{u}}|) f(\vec{\mathbf{r}}) \quad (71)$$

### 5.1.1 LIMITAÇÃO DO PROBLEMA A DUAS DIMENSÕES

A Eq. (71) está definida para aquisições tomadas sobre um plano de inspeção coincidente com o plano X-Y, em um sistema de coordenadas cartesianas, e a ROI é definida como um paralelepípedo retangular sob esse plano de aquisição. Porém, se a aquisição for feita por uma varredura lateral, ela estará limitada a uma linha<sup>1</sup>  $(u, 0, 0)$ , sobre o eixo X nos planos  $Y = 0$  e  $Z = 0$ , sendo que  $u \in \{u_l \mid l = 1, 2, \dots, L\}$ .

Nesse caso, a ROI é uma seção de corte do paralelepípedo no plano X-Z, formando uma região retangular com  $\vec{r} = (x, 0, z)$ . Os pontos de grade da ROI no eixo X coincidem com os pontos do eixo de aquisição, portanto,  $x \in \{x_l \mid l = 1, 2, \dots, L\}$  e  $\{x_l\} = \{u_l\}$ . Os pontos de grade da ROI no eixo Z são definidos como  $z \in \{z_n \mid n = 1, 2, \dots, N\}$ . Considerando estas limitações da aquisição e da ROI, a Eq. (71) fica

$$V_o(u_l, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) \times \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \text{jinc}^2 [ka \sin \theta_{(x_l, z_n); u_l}] \exp \left( i2k \sqrt{(x_l - u_l)^2 + z_n^2} \right) f(x_l, z_n) \quad (72)$$

Segundo Gough e Hawkins (1997), a frequência espacial na direção do eixo de aquisição U é  $k_u = 2k \sin \theta$ . Assim, substituindo essa igualdade na Eq. (72) e aplicando a transformada de Fourier em relação a variável  $u$ , tem-se

$$\mathcal{F}_u \{V_o(u_l, \omega)\} = V_o(k_u, \omega) = B(k_u, \omega) \times \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \mathcal{F}_u \left\{ \exp \left( i2k \sqrt{(x_l - u_l)^2 + z_n^2} \right) \right\} f(x_l, z_n) \quad (73)$$

em que

$$B(k_u, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) \text{jinc}^2(k_u a / 2) \quad (74)$$

Mas, ainda segundo Gough e Hawkins (1997),

$$\mathcal{F}_u \left\{ \exp \left( i2k \sqrt{(x - u)^2 + z^2} \right) \right\} = \exp \left( ixk_u + iz \sqrt{4k^2 - k_u^2} \right) \quad (75)$$

Então, substituindo a Eq. (75) na Eq. (73), tem-se

$$V_o(k_u, \omega) = B(k_u, \omega) \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \exp \left( ix_l k_u + iz_n \sqrt{4k^2 - k_u^2} \right) f(x_l, z_n) \quad (76)$$

<sup>1</sup>É utilizada a variável  $u$  como posição do transdutor no eixo de aquisição, mesmo com este eixo coincidindo com o eixo X. A variável  $x$  é utilizada para indicar uma posição da ROI na direção do eixo X.



### 5.1.2 MIGRAÇÃO E MODELAGEM DE STOLT

O somatório da Eq. (76) assemelha-se a definição da transformada discreta 2D de Fourier da função  $f(x, z)$  nas dimensões  $x$  e  $z$  (LIM, 1990, p. 137),

$$\mathcal{F}_{x,z} \{f(x, z)\} = F(k_x, k_z) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \exp(ix_l k_x + iz_n k_z) f(x_l, z_n) \quad (77)$$

As únicas diferenças existentes entre o somatório da Eq. (76) e a Eq. (77) são as variáveis correspondentes as frequências espaciais  $k_x$  e  $k_z$ . Entretanto, ser for definida a seguinte troca de variáveis nos termos do somatório da Eq. (76)

$$\begin{aligned} k_x &\equiv k_u \\ k_z &\equiv \sqrt{4k^2 - k_u^2} \end{aligned} \quad (78)$$

tem-se

$$V_o(k_u, \omega) = B(k_u, \omega) \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \exp(ix_l k_x + iz_n k_z) f(x_l, z_n) \quad (79)$$

de forma que o somatório passa a ser exatamente a transformada discreta 2D de Fourier da função  $f(x, z)$ .

A mudança de variáveis definida na Eq. (78) é chamada de *transformação* ou *migração de Stolt* e foi utilizada inicialmente no processamento de sinais sísmicos (STOLT, 1978). Essa transformação, representada por  $\mathcal{S} \{ \cdot \}$ , faz o mapeamento de dados que estão no domínio  $(k_u, \omega)$  para o domínio  $(k_x, k_z)$  (GOUGH; HAWKINS, 1997). O mapeamento no sentido inverso existe e é chamado por Claerbout (2004, p. 128) como *modelagem de Stolt*. De acordo com Claerbout (2004), a migração e a modelagem de Stolt são operadores lineares adjuntos entre si. Portanto, a modelagem de Stolt é representada por  $\mathcal{S}^\dagger \{ \cdot \}$ .

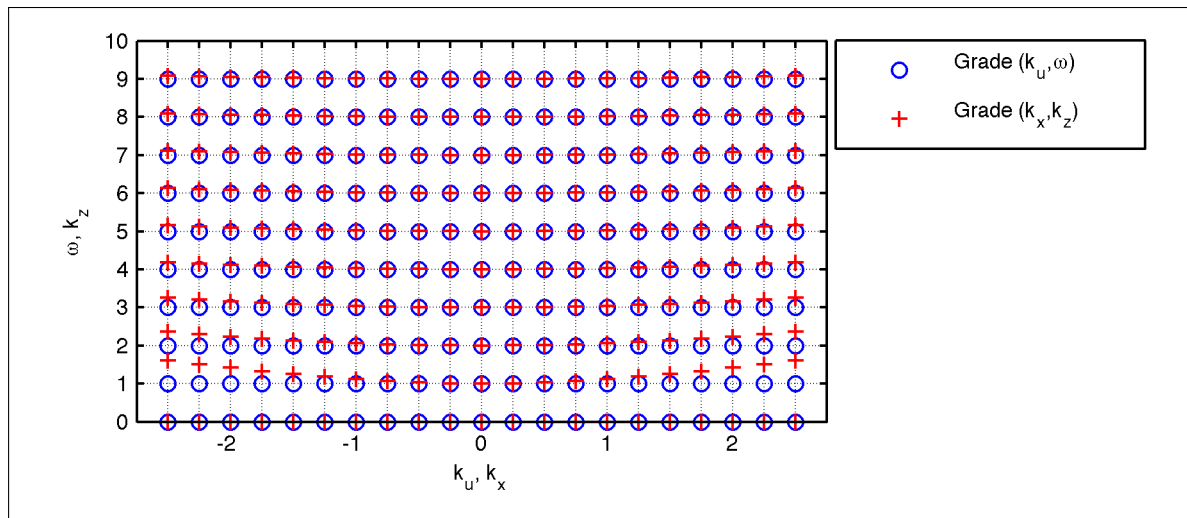
Segundo Margrave (2003, p. 151), a transformação de Stolt é geralmente feita por uma interpolação dos pontos espectrais que estão no domínio  $(k_u, \omega)$ , que formam uma grade linear, para o domínio  $(k_x, k_z)$ , cuja grade é não-linear. Essas duas grades são mostradas na Figura 19.

Portanto, a equação que modela o sistema de medição para inspeção END por ultrassom, no domínio das frequências temporal e espacial é

$$V_o(k_u, \omega) = B(k_u, \omega) \mathcal{S}^\dagger \{F(k_x, k_z)\} \quad (80)$$

e no domínio do tempo e espaço

$$v_o(u_l, t_n) = \mathcal{F}_{u,t}^{-1} \left\{ B(k_u, \omega) \mathcal{S}^\dagger (\mathcal{F}_{x,z} [f(x_l, z_n)]) \right\} \quad (81)$$



**Figura 19 – Mapeamento de domínio da transformação de Stolt: os pontos da grade do domínio  $(k_u, \omega)$  estão assinalados pelos círculos, enquanto os pontos da grade do domínio  $(k_x, k_z)$  estão assinalados pelas cruzes**

**Fonte: Autoria própria.**

### 5.1.3 MODELAGEM MATRICIAL

A Eq. (81) descreve um modelo que efetua operações lineares em uma matriz de entrada  $f(x_l, z_n)$  para obter uma matriz de saída  $v_o(u_l, t_n)$ . Ela é equivalente ao modelo matricial do problema direto linear, apresentado na Eq. (45). Para isso, basta rearranjar as matrizes  $f(x_l, z_n)$  e  $v_o(u_l, t_n)$  como vetores coluna de forma que as colunas das matrizes são empilhadas, ou seja,  $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_{x_1}^T \mathbf{f}_{x_2}^T \dots \mathbf{f}_{x_L}^T]^T$  e  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_{u_1}^T \mathbf{v}_{u_2}^T \dots \mathbf{v}_{u_L}^T]^T$ .

Para completar a representação da Eq. (45), a matriz  $\mathbf{H}$  que modela o sistema é definida como

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{F} \quad (82)$$

em que  $\mathbf{F}$  representa a operação da transformada discreta 2D de Fourier<sup>2</sup>,  $\mathbf{S}^\dagger$  é a operação da modelagem de Stolt e  $\mathbf{B} = \text{diag}[B(k_u, \omega)]$ .

Dessa forma, o modelo direto do sistema de medição é representado, no formato matricial como

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta} \quad (83)$$

em que  $\boldsymbol{\eta}$  é o vetor com os ruídos inseridos nas medições pelo processo de aquisição de dados. Esse vetor é suposto conter valores aleatórios, seguindo uma distribuição de probabilidade Gaussiana, com média 0 e variância proporcional à relação sinal-ruído do sistema de medição.

<sup>2</sup>As transformadas direta e inversa de Fourier são operadores adjuntos, assim  $\mathbf{F}^\dagger \equiv \mathbf{F}^{-1}$  (CLAERBOUT, 2004, p. 128).

Para reconstruir uma imagem da refletividade acústica do objeto inspecionado é preciso encontrar o vetor  $\mathbf{f}$  da Eq. (83). Portanto, trata-se de um problema inverso e a sua resolução é feita pelos métodos descritos no Capítulo 3. Para utilizar tais métodos é preciso conhecer o operador adjunto do *kernel* do sistema, definido pela Eq. (82). Aplicando a propriedades dos operadores adjuntos (BARRETT; MYERS, 2003, p. 17) na Eq. (82) tem-se

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{B}^\dagger \mathbf{F} \quad (84)$$

e o vetor de retroprojeção para um conjunto específico de medidas  $\mathbf{v}_a$  é calculado por

$$\hat{\mathbf{f}}_a^{(BP)} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{B}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{v}_a \quad (85)$$

#### 5.1.4 IMPLEMENTAÇÃO DOS OPERADORES

Apesar das representações matriciais do *kernel* do sistema de medição e de seu operador adjunto (equações 83 e 84) serem simples, elas não são adequadas para a implementação em algoritmos computacionais de resolução de problemas inversos, principalmente pelas grandes dimensões das matrizes envolvidas. Para um sistema que faça a aquisição de 30 sinais *A-scan*, em que cada um tenha 1000 amostras, as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}^\dagger$  teriam dimensões  $30.000 \times 30.000$ .

Para evitar o uso de matrizes grandes, é usual implementar as operações lineares envolvidas em  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}^\dagger$  como funções ou sub-rotinas em linguagens de programação, que realizam as operações  $\mathbf{H}\mathbf{f}$  e  $\mathbf{H}^\dagger\mathbf{v}$  (CLAERBOUT, 2004, p. 110). No caso da operação  $\mathbf{H}\mathbf{f}$ , a Eq. (81) já está em um formato apropriado para essa abordagem. E para adequar a operação  $\mathbf{H}^\dagger\mathbf{v}$ , basta rescrevê-la no mesmo formato de Eq. (81)

$$\hat{f}^{(BP)}(x_l, z_n) = \mathcal{F}_{x,z}^{-1} \{ \mathcal{S} [ \mathbf{B}^*(k_u, \omega) \mathcal{F}_{u,\omega} \{ v_o(u_l, t_n) \} ] \} \quad (86)$$

em que  $\mathbf{B}^*(k_u, \omega)$  representa o complexo conjugado da matriz  $\mathbf{B}(k_u, \omega)$ .

Uma das contribuições deste trabalho é essa forma de implementação dos operadores lineares para o sistema de medição. Em outros trabalhos na área de END por ultrassom que utilizam técnicas de problemas inversos (LINGVALL et al., 2003; LINGVALL; OLOFSSON, 2005; WENNERSTROM et al., 2006; OLOFSSON; WENNERSTROM, 2007; SATYANARAYAN et al., 2010; BAZULIN, 2013), o *kernel* do sistema é implementado como uma matriz verdadeira.

As Figuras 20 e 21 mostram os algoritmos com as operações necessárias para implementar a equações (81) e (86) como sub-rotinas em qualquer linguagem de programação. Neste

trabalho, esses algoritmos foram implementados como funções no *MATLAB*<sup>®</sup>. No Apêndice C estão listados os códigos-fonte dessas funções.

```

1 início
2   monte as grades dos domínios  $(k_u, \omega)$  e  $(k_x, k_z)$ 
3   calcule  $F(k_x, k_z) = \mathcal{F}_{x,z} \{f(x_l, z_n)\}$ 
4   aplique a migração de Stolt  $F(k_u, \omega) = \mathcal{S}^\dagger \{F(k_x, k_z)\}$ 
5   multiplique  $B(k_u, \omega)$  com  $F(k_u, \omega)$  ponto a ponto para obter  $V_o(k_u, \omega)$ 
6   calcule  $v_o(u_l, t_n) = \mathcal{F}_{k_u, \omega}^{-1} \{V_o(k_u, \omega)\}$ 
7 fim

```

**Figura 20** – Algoritmo da função que implementa o operador linear do modelo para o sistema de medição construído

Fonte: Autoria própria.

```

1 início
2   monte as grades dos domínios  $(k_u, \omega)$  e  $(k_x, k_z)$ 
3   calcule  $V_o(k_u, \omega) = \mathcal{F}_{u,t} \{v_o(u_l, t_n)\}$ 
4   multiplique  $B^*(k_u, \omega)$  com  $V_o(k_u, \omega)$  ponto a ponto para obter  $F(k_u, \omega)$ 
5   aplique a modelagem de Stolt  $F(k_x, k_z) = \mathcal{S} \{F(k_u, \omega)\}$ 
6   calcule  $f(x_l, z_n) = \mathcal{F}_{k_x, k_z}^{-1} \{F(k_x, k_z)\}$ 
7 fim

```

**Figura 21** – Algoritmo da função que implementa o operador linear adjunto do modelo para o sistema de medição construído

Fonte: Autoria própria.

## 5.2 ALGORITMO PARA RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS ESPARSAS

Os problemas de reconstrução de imagem em geral são mal-postos, principalmente devido a presença de ruído nas medições (KARL, 2000). Como já mencionado no Capítulo 3, uma forma adequada de resolver problemas inversos mal-postos é utilizando a solução generalizada com regularização. Em geral, o termo de regularização é calculado utilizando a  $l_2$ , nesse caso diz-se que a regularização é *quadrática*.

Entretanto, recentemente, o uso de métodos de regularização não-quadrática tem sido bastante utilizados. Alguns desses são o da máxima entropia (BAZULIN, 2013), *Total Variation* (RUDIN et al., 1992) e normas não-quadráticas (LAVARELLO et al., 2006; TUYSUZOGLU et al., 2012). Esses últimos usam normas  $l_q$ , com  $q < 2$ , as quais não penalizam valores grandes em seus argumentos e ainda continuam sendo funções convexas (KARL, 2000).

Em Lavarello et al. (2006) é apresentado um método de regularização de Tikhonov generalizado, no qual a norma do regularizador é  $l_q$ , com  $q \leq 1$ . Entretanto, quando a solução

$\mathbf{f}$  procurada tem poucos elementos não nulos (solução esparsa), a norma  $l_1$  é a mais adequada (DONOHO, 2006; ELAD, 2010). Neste trabalho é utilizado o mesmo método de regularização usado por Lavarello et al. (2006), com norma  $l_1$  no termo de regularização e  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ . Assim, o problema de otimização do algoritmo de reconstrução é definido como

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{ \|\mathbf{v} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_1 \} \quad (87)$$

A escolha da norma  $l_1$  no termo de regularização é devido a informação prévia que a solução  $\hat{\mathbf{f}}$  deve ser esparsa, uma vez que as discontinuidades dentro do objeto são muito pequenas, próximas a pontos refletores. A imagem desejada deve ter a menor quantidade possível de elementos não nulos. Apesar da norma  $l_0$  contar a quantidade de elementos não nulos em um vetor, ela não é convexa (ELAD, 2010). Entretanto, a norma  $l_1$  é em certo sentido, um relaxamento convexo da norma  $l_0$  (DONOHO, 2006), mantendo a convexidade da Eq. (87). A escolha da matriz  $\mathbf{L}$  também está relacionada com a esparsidade da solução desejada. Quando  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ , o termo de regularização simplesmente força o resultado ser esparsos. Quando  $\mathbf{L}$  é o operador gradiente (regularização TV), os contornos são acentuados e a imagem tende a ser constante por partes, com os contornos esparsos (RUDIN et al., 1992). Como se está procurando refletores pontuais, a escolha de  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$  é mais razoável. A partir de agora, esse método de reconstrução de imagens passa a ser chamado como algoritmo UTSR (*ultrasonic sparse reconstruction*) (GUARNERI et al., 2015).

### 5.2.1 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

Existem vários algoritmos para resolver problemas quadráticos (BJÖRCK, 1996). Entretanto, só recentemente que os problemas com normas mistas atraíram a atenção dos pesquisadores (CETIN; KARL, 2001; LAVARELLO et al., 2006). Um algoritmo amplamente utilizado para resolver problemas de minimização com normas  $l_q$  para  $1 \leq q < 2$  é o IRLS, como visto na Seção 3.4. O pseudocódigo do algoritmo UTSR, baseado no IRLS é mostrado na Figura 22.

```

1  UTSR( $v(u,t)$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ )
2  início
3  |  $\mathbf{v} \leftarrow \text{vec}[v(u,t)]$ 
4  |  $\mathbf{f}^{(0)} \leftarrow \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}$ 
5  | para cada  $j=0,1,2,\dots$  faça
6  | |  $\mathbf{W}_R^{(j)} = \text{diag}\left(\frac{1}{|f_m^{(j)}|+\beta}\right)$ 
7  | |  $\mathbf{f}^{(j+1)} \leftarrow \text{pcg}\left(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \lambda \mathbf{W}_R^{(j)}, \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}\right)$ 
8  | | se  $\|\mathbf{f}^{(j+1)} - \mathbf{f}^{(j)}\| \leq \varepsilon$  então
9  | | |  $\mathbf{f}_{\text{UTSR}} \leftarrow \mathbf{f}^{(j+1)}$ 
10 | | fim
11 | fim
12 fim

```

**Figura 22** – Pseudocódigo do algoritmo UTSR baseado no IRLS  
**Fonte:** Autoria própria.

Os parâmetros  $\beta$  e  $\varepsilon$  são, respectivamente, uma pequena constante para evitar divisões por zero e uma tolerância de atualização usada como critério de parada. Para resolver os problema de mínimos quadrados ponderados em cada iteração do IRLS (linha 7 da Figura 22), foi utilizado o método do *gradiente conjugado* (VOGEL, 2002).

A escolha do parâmetro  $\lambda$  é crítica para uma boa reconstrução (KARL, 2000). Enquanto pequenos valores fazem com que a solução encontrada se aproxime da solução de mínimos quadrados (que pode ser instável na presença de ruído), valores grandes podem suavizar a solução devido a regularização excessiva. Entre os diversos métodos descritos na Seção 3.5, foi escolhido o método descrito em Zibetti et al. (2008). O valor de  $\lambda$  obtido e utilizado foi  $4,4944 \times 10^{-4}$ .

### 5.3 SIMULAÇÕES

O algoritmo UTSR foi implementado no *MATLAB*<sup>®</sup>, sendo testado e comparado com outros quatro algoritmos tradicionais: *B-scan*, SAFT (LINGVALL et al., 2003),  $\omega$ -*k* SAFT (STEPINSKI, 2007) e RLS (Eq. 55, com  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ ). Para isso, uma imagem de um ponto refletor é reconstruída a partir de sinais *A-scan* simulados pela Eq. (81). Os parâmetros usados no modelo seguem exatamente as especificações do sistema de medição descrito no Capítulo 4. Os sinais *A-scan* são criados com se fossem sinais coletados pelo sistema de medição, com amostragem

espacial de 1 mm. Um ruído branco gaussiano com relação sinal-ruído de 20 dB é adicionado aos sinais *A-scan*. A simulação considera que o ponto refletor está dentro de um bloco de aço-carbono ( $c = 5860$  m/s). Esse ponto está localizado em  $x = 30$  mm e  $z = 40$  mm. A ROI está definida entre  $15 \text{ mm} \leq x \leq 45 \text{ mm}$  e  $18 \text{ mm} \leq z \leq 58 \text{ mm}$ . Tanto o algoritmo RLS como o UTSR utilizam  $\lambda = 4,4944 \times 10^{-4}$ .

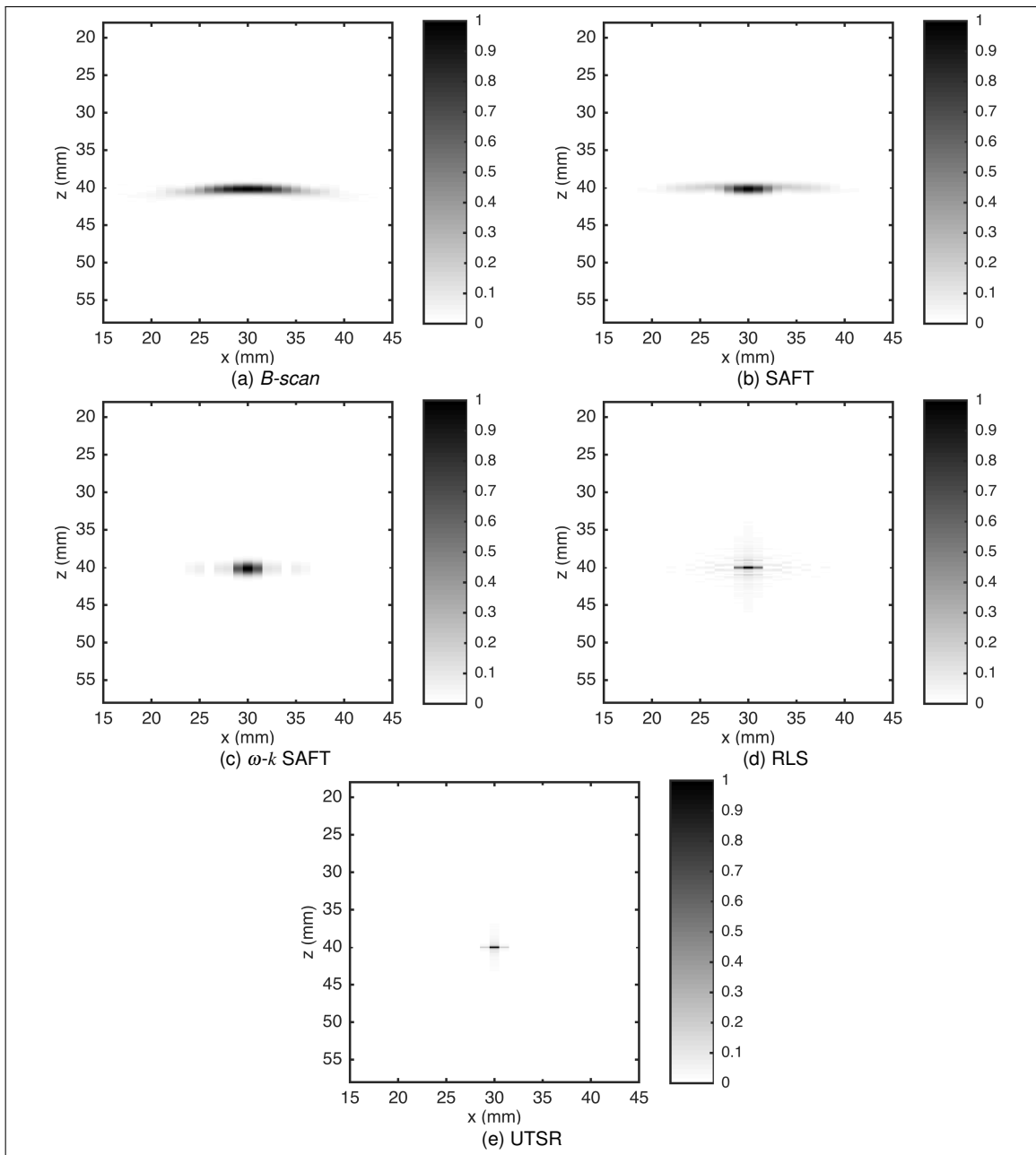
A Figura 23 mostra as imagens reconstruídas pelos cinco algoritmos. O ponto refletor aparece na posição correta da ROI em todas as imagens. Entretanto, o espalhamento lateral, devido ao efeito da difração, é nitidamente diferente nos cinco algoritmos. O maior espalhamento ocorre no algoritmo *B-scan*, pois ele não tem nenhum mecanismo para compensar os efeitos da difração. No SAFT, o processo de soma e deslocamento realiza uma compensação parcial nos efeitos da difração, resultando em uma redução no espalhamento lateral. Esse espalhamento é diminuído no algoritmo  $\omega$ -*k* SAFT pela inclusão de um filtro de Wiener para compensar a difração (STEPINSKI, 2007). Entretanto, nenhum desses algoritmos apresentou uma diminuição significativa no espalhamento vertical. Isso ocorre porque nenhum deles têm qualquer compensação para a resposta em frequência limitada do transdutor.

O espalhamento causado pelo algoritmo RLS foi menor que o do  $\omega$ -*k* SAFT. Entretanto, essa redução ocorreu somente na direção vertical. A inclusão da resposta em frequência do transdutor no modelo do sistema de medição, utilizado pelo algoritmo RLS, causou uma compensação para a banda limitada do transdutor. Na direção lateral, a compensação da difração no algoritmo RLS é equivalente ao filtro de Wiener (KARL, 2000). O algoritmo UTSR também utiliza o modelo do sistema de medição. Entretanto, o espalhamento é menor, tanto lateralmente quanto verticalmente, pois a norma  $l_1$  tem a tendência de levar a soluções esparsas (DONOHO, 2006; ELAD, 2010).

Uma maneira de mensurar a qualidade das imagens reconstruídas é pelo *indicador de desempenho do arranjo* (API — do original *array performance indicator*) (HOLMES et al., 2005). O API é uma medida adimensional que indica o quanto um ponto se espalhou em uma imagem reconstruída. Ele é definido por Holmes et al. (2005) como

$$\text{API} = \frac{A_{50\%}}{\lambda_l^2} \quad (88)$$

em que  $A_{50\%}$  é a área dentro da qual a intensidade de um ponto é maior que metade da intensidade máxima da imagem e  $\lambda_l$  é o comprimento de onda. A Tabela 1 apresenta os valores API calculados para as imagens reconstruídas por cada algoritmo. Para comparação, o valor do API para a imagem reconstruída pelo algoritmo TFM, obtida por Holmes et al. (2005), utilizando dados simulados, está incluído na Tabela 1.



**Figura 23 – Imagens reconstruídas de um ponto refletor a partir de dados simulados. Os algoritmos utilizados nas reconstruções são: (a) *B-scan*; (b) SAFT; (c)  $\omega$ -*k* SAFT; (d) RLS e (e) UTSR. A escala de amplitude está normalizada para o maior valor absoluto de cada imagem**  
**Fonte: Autoria própria.**

Se a imagem *B-scan* é tomada como referência, o API foi reduzido em 90,2% na imagem RLS e em 95,6% na imagem UTSR. Além disso, o API da imagem UTSR foi reduzido quando comparado com o API para a imagem TFM.



**Tabela 1 – Valores API para imagens reconstruídas a partir de dados simulados. Ponto refletor em  $z = 40$  mm**

Fonte: autoria própria.

<i>Algoritmo</i>	<i>API</i>	<i>Diferença para B-scan</i>
<i>B-scan</i>	4,08	0%
SAFT	2,09	−48,8%
$\omega$ - <i>k</i> SAFT	1,81	−55,6%
RLS	0,40	−90,2%
UTSR (proposto)	0,18	−95,6%
TFM (HOLMES et al., 2005)	0,46	−88,7%

#### 5.4 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

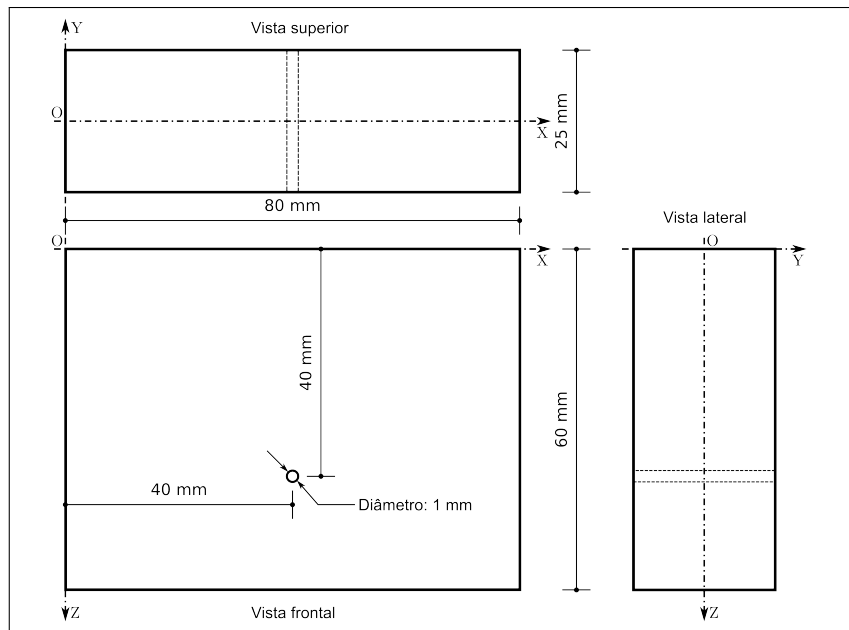
A validação experimental do algoritmo UTSR foi realizada pela reconstrução de imagens a partir de sinais *A-scan* coletados pelo sistema de medição descrito no Capítulo 4. O sistema de medição fez uma varredura linear, movendo o transdutor de contato sobre a superfície dos espécimes (plano X-Y) ao longo do eixo X. O período de amostragem espacial foi 1 mm. Os sinais *A-scan* foram coletados de dois objetos diferentes: (I) um bloco de aço-carbono com um único furo lateral passante (SDH — do original *side-drilled hole*) e (II) um bloco de aço-carbono com quatro furos laterais passantes em diferentes profundidades.

##### 5.4.1 IMAGENS RECONSTRUÍDAS DO PRIMEIRO OBJETO

O primeiro objeto inspecionado foi um bloco de aço-carbono cujas dimensões são mostradas na Figura 24. A descontinuidade nesse objeto é um SDH com 1 mm de diâmetro, centrado na posição  $x = 40$  mm e  $z = 40$  mm. A ROI está definida entre  $25 \text{ mm} \leq x \leq 55 \text{ mm}$  e  $18 \text{ mm} \leq z \leq 58 \text{ mm}$ . Tanto o algoritmo RLS como o UTSR utilizam  $\lambda = 4,4944 \times 10^{-4}$ .

A Figura 25 apresenta as imagens reconstruídas pelos cinco algoritmos a partir dos sinais *A-scan* coletados pelo sistema de medição. Essas imagens demonstram uma consistência entre os dados simulados e o dados medidos. Isso demonstra que o modelo do sistema de medição é válido. É possível notar algum ruído nas imagens reconstruídas da Figura 25. Visualmente, os algoritmos  $\omega$ -*k* SAFT e UTSR reconstruíram imagens com relação sinal-ruído maiores que os outros.

A Figura 26 apresenta os gráficos de perfil lateral (eixo X) e de profundidade (eixo Z), mostrando as maiores amplitudes (em dB) para cada imagem. O gráfico de perfil lateral (Figura 26a) mostra que as imagens reconstruídas pelos algoritmos *B-scan*, SAFT e RLS têm relação sinal-ruído em torno de 7 dB. A imagem reconstruída pelo algoritmo  $\omega$ -*k* SAFT tem



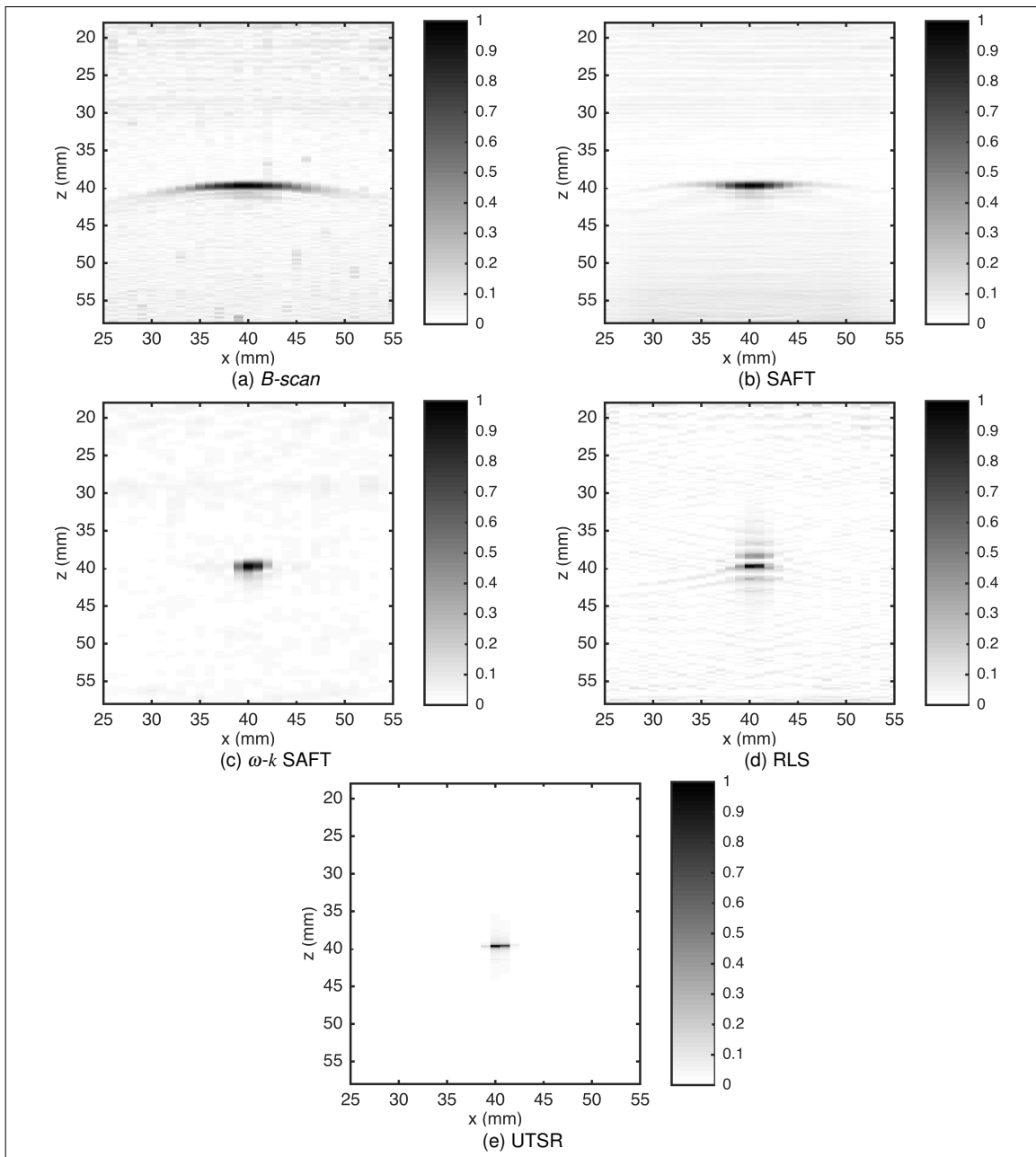
**Figura 24 – Geometria do primeiro objeto inspecionado. Ele foi fabricado em aço-carbono e tem um SDH com 1 mm de diâmetro, centrado em  $x = 40$  mm e  $z = 40$  mm**  
**Fonte: autoria própria.**

relação sinal-ruído em torno de 12 dB e na imagem reconstruída pelo algoritmo UTSR ela é em torno de 19 dB. Essa redução no nível de ruído é promovida pela norma de regularização  $l_1$ . A solução esparsa tem poucos valores não nulos, portanto, o ruído da imagem é notado somente ao redor do SDH. O gráfico de perfil de profundidade (Figura 26b) mostra como é mais estreito o espalhamento do ponto no algoritmo UTSR.

A Tabela 2 mostra os valores API calculados para as imagens da Figura 25, além do API para a imagem reconstruída pelo algoritmo TFM, obtida por Holmes et al. (2005) com dados medidos. Embora o refletor utilizado por Holmes et al. (2005) seja diferente em relação ao desse trabalho, as reflexões causadas por ambos são similares, possibilitando a comparação. Como é possível observar, os valores API das imagens obtidas experimentalmente são superiores aos valores simulados. Isso é devido a dois fatores: (I) as diferenças entre a banda de passagem dos transdutores para os dados simulados e reais, causadas pelas aproximações no modelo do sistema de medição; e (II) o desalinhamento entre a grade de aquisição e a ROI. Apesar disso, o valor API obtido para o algoritmo UTSR foi melhor que o valor API para o algoritmo TFM com dados coletados pelo método FMC (HOLMES et al., 2005).

#### 5.4.2 IMAGENS RECONSTRUÍDAS DO SEGUNDO OBJETO

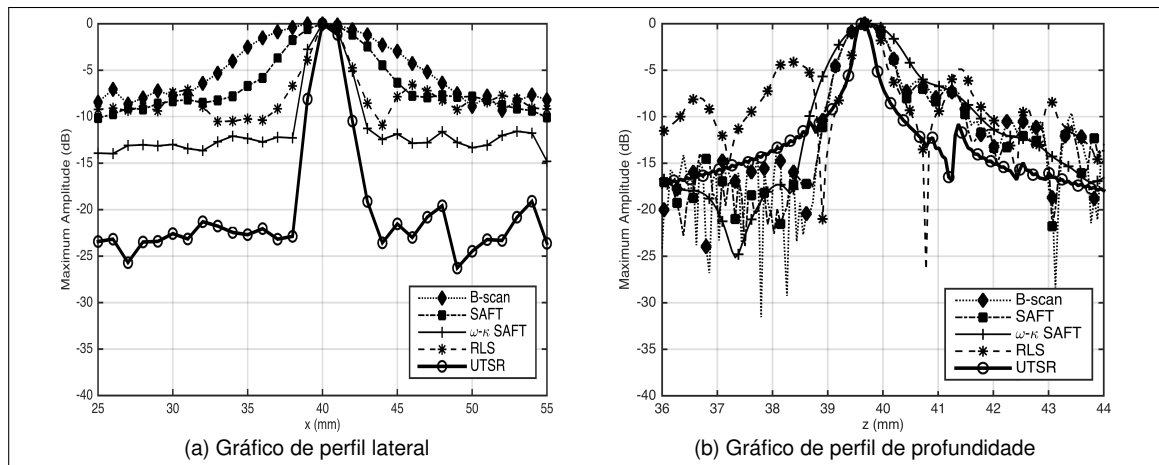
O segundo objeto inspecionado também é um bloco de aço-carbono, cujas dimensões são mostradas na Figura 27. Esse objeto tem quatro SDHs, cada um com diâmetro de 1 mm,



**Figura 25 – Imagens reconstruídas de um SDH com 1 mm de diâmetro a partir de dados coletados pelo sistema de medição. Os algoritmos usados nessas reconstruções são: (a) *B-scan*; (b) SAFT; (c)  $\omega$ - $k$  SAFT; (d) RLS e (e) UTSR. A escala de amplitude está normalizada para o maior valor de amplitude de cada imagem  
Fonte: Autoria própria.**

centrados nas posições  $x = \{16, 32, 48, 64\}$  mm e  $z = \{20, 30, 40, 50\}$  mm, respectivamente. A ROI está definida entre  $3 \text{ mm} \leq x \leq 77 \text{ mm}$  e  $18 \text{ mm} \leq z \leq 58 \text{ mm}$ . Os algoritmos RLS e UTSR utilizam  $\lambda = 4,4944 \times 10^{-4}$ .

A Figura 28 apresenta as cinco imagens reconstruídas. Como notado por Schmitz et al. (2000), pode-se observar na Figura 28a que o espalhamento dos pontos torna-se maior a medida que a profundidade aumenta. Em todos os outros algoritmos de reconstrução esse pro-



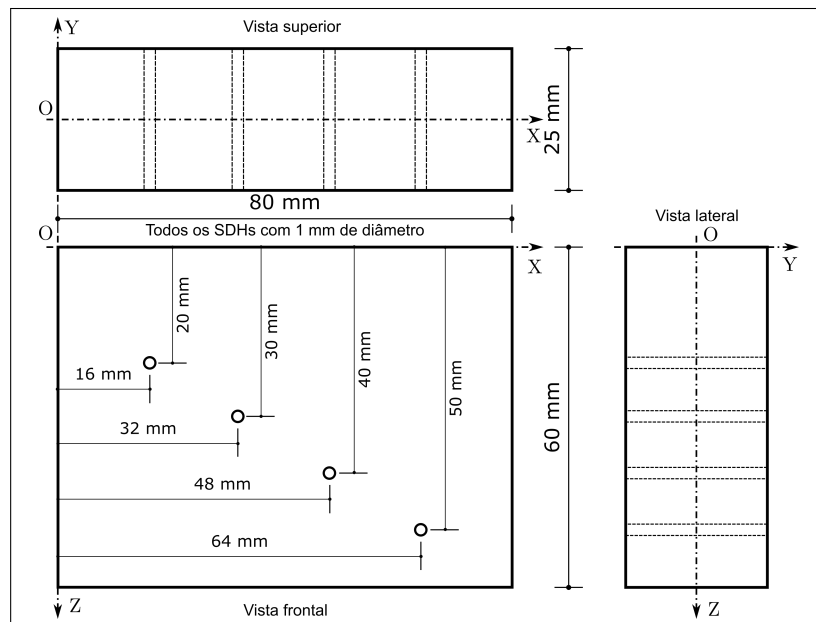
**Figura 26 – Gráficos de perfil (a) lateral e (b) de profundidade, comparando as amplitudes máximas (em dB) das imagens reconstruídas para cada posição nos eixos X e Z. Esses gráficos mostram a relação sinal-ruído das imagens reconstruídas pelos algoritmos *B-scan*, SAFT,  $\omega$ -*k* SAFT, RLS e UTSR**  
**Fonte: autoria própria.**

**Tabela 2 – Valores API para imagens reconstruídas a partir de dados experimentais. SDH com centro geométrico em  $z = 40$  mm.**  
**Fonte: autoria própria.**

<i>Algoritmo</i>	<i>API</i>	<i>Diferença para B-scan</i>
<i>B-scan</i>	5,38	0%
SAFT	3,16	−41,3%
$\omega$ - <i>k</i> SAFT	1,92	−64,3%
RLS	0,81	−84,9%
UTSR (proposto)	0,47	−91,3%
TFM (HOLMES et al., 2005)	0,77	−85,7%

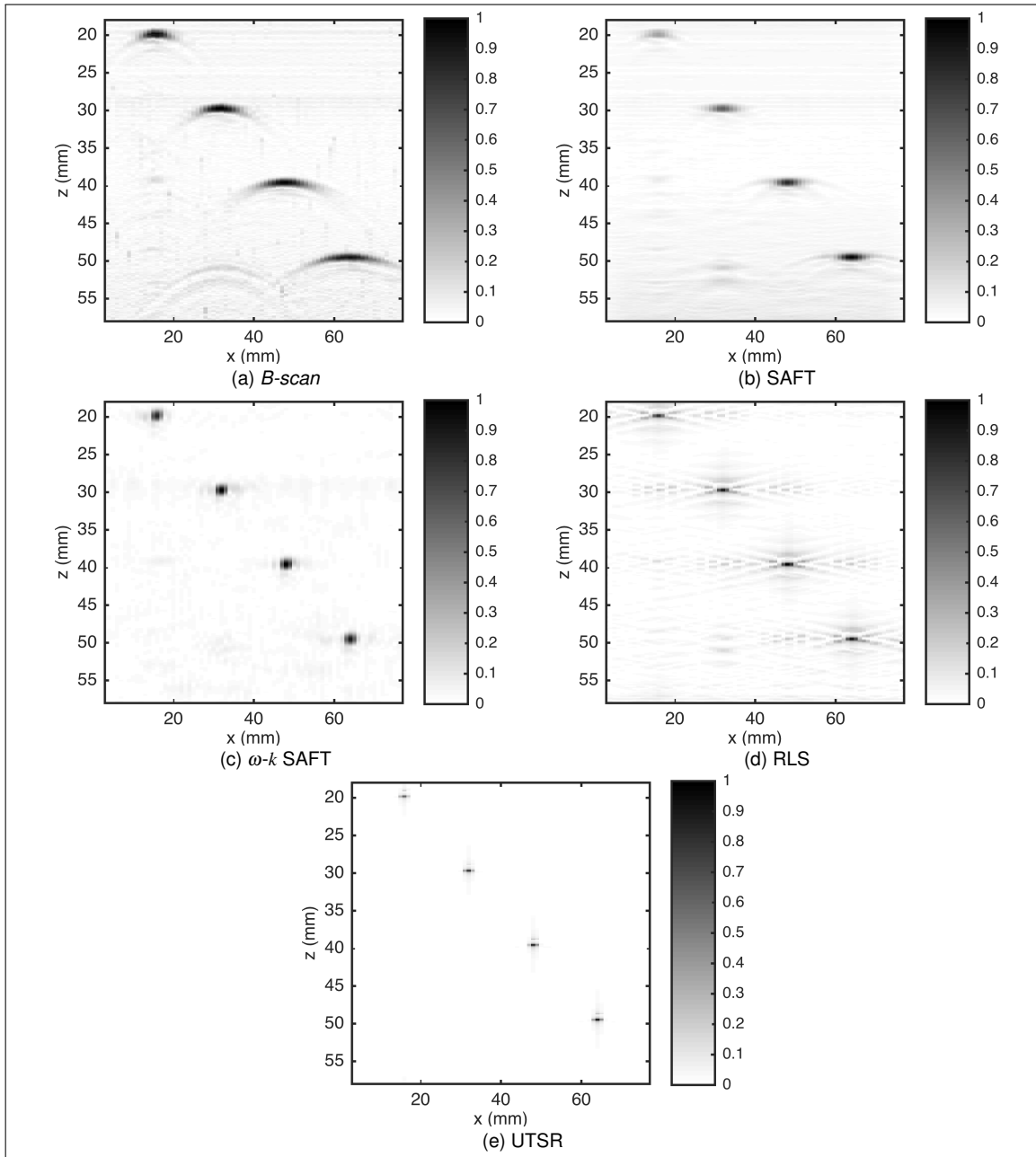
blema é corrigido. Também é visível nas Figuras 28a–d a ocorrência de “artefatos” devido a: (I) múltiplas reflexões das discontinuidades nas profundidades mais rasas (20 mm) e (II) reflexões de ondas transversais geradas nas discontinuidades pela *conversão de modo* em um meio sólido (SCHMERR, 1998). Entretanto, devido ao uso de uma norma que promove a esparsidade no termo de regularização, esses “artefatos” são eliminados na reconstrução realizada pelo algoritmo UTSR.

Entre as imagens da Figura 28, a reconstruída pelo algoritmo  $\omega$ -*k* SAFT (Figure 28c) é visualmente mais “parecida” com o objeto inspecionado. Entretanto, este resultado é ilusório. Somente as ondas incidentes que refletem sobre uma pequena área na superfície do SDH retornam ao transdutor. Em um corte lateral, essa área aproxima-se a um ponto. Portanto, a imagem reconstruída pelo algoritmo UTSR (Figura 28e) representa melhor a refletividade acústica dos SDHs no segundo objeto. Na imagem reconstruída pelo algoritmo  $\omega$ -*k* SAFT, o espalhamento desses pontos é maior, dando a impressão que estão representando os SDHs.



**Figura 27 – Geometria do segundo objeto inspecionado. Ele foi fabricado em aço-carbono e tem quatro SDHs, todos com 1 mm de diâmetro. Os SDHs estão centrados nas posições  $x = \{16, 32, 48, 64\}$  mm e  $z = \{20, 30, 40, 50\}$  mm**

**Fonte: autoria própria.**



**Figura 28 – Imagens reconstruídas de um bloco de aço-carbono com quatro SDHs, cada um com 1 mm de diâmetro, a partir de dados experimentais coletados pelo sistema de medição. Os algoritmos utilizados na reconstrução são: (a) *B-scan*; (b) SAFT; (c)  $\omega$ -*k* SAFT; (d) RLS e (e) UTSR. A escala de amplitudes está normalizada para o maior valor absoluto de cada imagem**

**Fonte: Autoria própria.**

## 5.5 CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou um novo algoritmo de reconstrução de imagens para END por ultrassom. Os sinais *A-scan* são coletados por um sistema de medição com um único transdutor monoestático, na configuração pulso-eco. O método proposto, denominado como algoritmo UTSR é baseado na resolução de um problema de mínimos quadrados regularizados, usando norma  $l_1$  no termo regularizador e  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ . Esse problema é resolvido com os algoritmos IRSL e GC.

Com a utilização do índice API como medida de qualidade foi possível avaliar a habilidade do algoritmo em reconstruir a imagem de um ponto refletor. A qualidade da reconstrução do algoritmo UTSR foi testada utilizando tanto dados simulados como dados experimentais. Os mesmos sinais de entrada foram usados com quatro algoritmos tradicionais para reconstrução de imagens em END por ultrassom: *B-scan*, SAFT,  $\omega$ -*k* SAFT e RLS. Os dados simulados foram gerados por um modelo analítico do sistema de medição. Esse modelo também foi usado nos algoritmos RLS e UTSR. A validação experimental foi realizada usando a reflexão de um SDH com 1 mm de diâmetro (primeiro objeto) e de quatro SDHs, todos com 1 mm de diâmetro, em profundidades diferentes (segundo objeto).

O algoritmo UTSR proposto demonstrou uma melhora significativa na qualidade da reconstrução, quando comparado com os algoritmos tradicionais. Se o algoritmo *B-scan* for considerado como referência, o API foi reduzido de 4,8 para 0,18, com os dados simulados, e de 5,38 para 0,47 com os dados experimentais. Esses valores de API também são melhores que os apresentados por Holmes et al. (2005) com o algoritmo TFM utilizando dados coletados pelo método FMC (com transdutores *array*). O algoritmo UTSR apresentou também uma melhora na relação sinal-ruído das imagens reconstruídas. Isso se deve a (I) compensações nos efeitos da difração e banda limitada do transdutor que são incluídas no algoritmo pelo modelo do sistema de medição; e (II) a norma  $l_1$  utilizada no termo de regularização, que faz o algoritmo tender a encontrar soluções esparsas.

O algoritmo UTSR mostrou um grande potencial em encontrar defeitos pequenos, principalmente pela melhora na resolução e na relação sinal-ruído das imagens reconstruídas. Uma vantagem no uso desse algoritmo é que ele pode ser aplicado em sinais *A-scan* coletados por sistemas de medição convencionais, sem a necessidade do uso de transdutores *array*. Entretanto, sua extensão para sistemas de medição com *array* é direta, bastando modificar o modelo do sistema de medição.

## 6 PROBLEMA DA IDENTIFICAÇÃO DE DESCONTINUIDADES

A identificação de descontinuidades em peças pela inspeção não-destrutiva com ultrassom consiste em encontrar parâmetros que caracterizam tal descontinuidade, como seu formato, dimensões, orientação e posição. Entre todos os elementos que compõem o modelo da Eq. (4), o único elemento que está relacionado com as propriedades físicas e geométricas de eventuais descontinuidades existentes na peça inspecionada é o termo referente a amplitude do espalhamento, representado por  $A(\omega, \Theta)$ . Portanto, é possível obter a amplitude do espalhamento provocada pela descontinuidade a partir de um sinal *A-scan* medido (SCHMERR, 1998, p. 403).

Mas, segundo Schmerr (1998), extrair a amplitude do espalhamento de um conjunto de sinais *A-scan* é somente o primeiro passo no processo de identificação da descontinuidade. Isso porque, para caracterizar uma descontinuidade, é preciso descobrir, além de qual expressão é a mais adequada para representar a amplitude de espalhamento, também os valores dos parâmetros da expressão. O conjunto formado pela expressão e pelos seus parâmetros permite a correta identificação da descontinuidade.

Este trabalho divide o problema da identificação de descontinuidades em dois sub-problemas. O primeiro refere-se a localização do centro geométrico da descontinuidade, considerando que se conhece o seu formato, dimensões e orientação. O segundo problema é a caracterização da descontinuidade, que busca descobrir seu formato, dimensões e orientação. Ambos podem ser considerados problemas inversos, sendo o primeiro um problema inverso de reconstrução e o segundo de identificação.

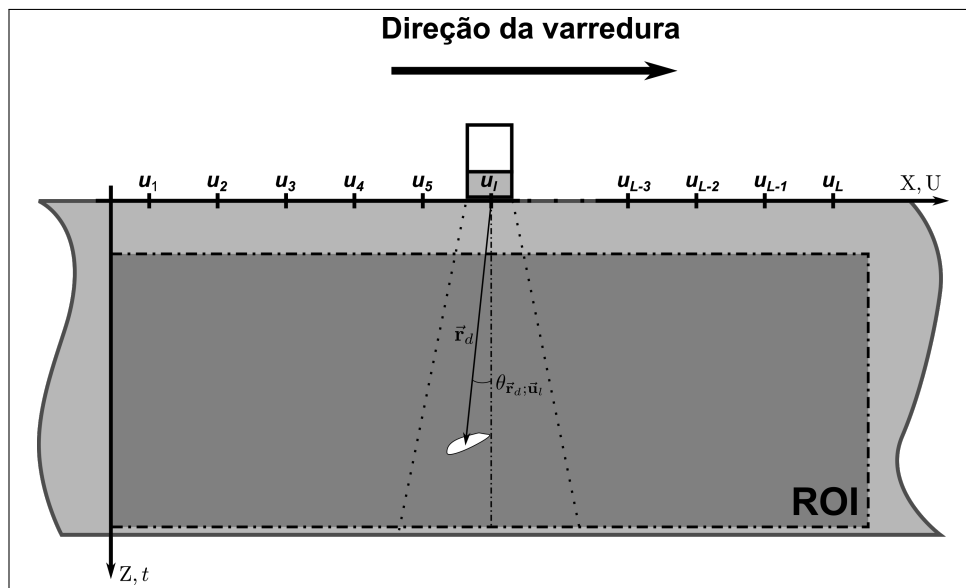
As primeiras três seções deste capítulo tratam do problema da localização do centro de descontinuidades. Na Seção 6.1 é feita a sua descrição e a modelagem apropriada, no formato de problemas inversos como visto no Capítulo 3. Na Seção 6.2 são apresentados os algoritmos utilizados na resolução do problema. E na Seção 6.3 são mostrados e discutidos os resultados de dois ensaios realizados com o objetivo de validar o método de resolução do problema.



O restante do capítulo é destinado para o tratamento do problema de caracterização da descontinuidade. A Seção 6.4 descreve o problema e é formulada uma hipótese para buscar a sua solução. Os resultados dos ensaios realizados para a verificação da hipótese são apresentados e discutidos na Seção 6.5. Na Seção 6.6 é descrito o algoritmo desenvolvido para resolver o problema de caracterização da descontinuidades e na Seção 6.7 são mostrados os ensaios, resultados e discussões da aplicação do algoritmo tanto em dados simulados como em dados experimentais.

### 6.1 PROBLEMA DA LOCALIZAÇÃO DE UMA DESCONTINUIDADE

Considere que o sistema de medição descrito na Seção 4.1 realiza uma varredura lateral em uma peça. No interior dessa peça existe uma única descontinuidade<sup>1</sup>. O tipo e as dimensões da descontinuidade são, a princípio, conhecidas, mas não se conhece a localização de seu centro geométrico. Durante esse procedimento são capturados  $L$  sinais de *A-scan*, cada um com  $N$  amostras. Essa situação é mostrada na Figura 29.



**Figura 29 – Varredura lateral para a inspeção END de uma peça com uma descontinuidade**

**Fonte: Autoria própria.**

<sup>1</sup>Essa condição é facilmente obtida em situações práticas, pois o inspetor pode selecionar a região da varredura lateral e também a janela de amostragem para identificar uma descontinuidade específica.

### 6.1.1 MODELAGEM ANALÍTICA DO PROBLEMA

Os  $L$  sinais *A-scan* obtidos durante a varredura lateral são representados, no domínio da frequência, pela Eq. (69), repetida aqui

$$V_o(\vec{\mathbf{u}}_l, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) \text{jinc}^2(ka \sin \theta_{\vec{\mathbf{r}}_d, \vec{\mathbf{u}}_l}) \exp(i2k|\vec{\mathbf{r}}_d - \vec{\mathbf{u}}_l|) A(\omega, \Theta)$$

em que  $A(\omega, \Theta)$  é a amplitude de espalhamento da descontinuidade,  $\vec{\mathbf{r}}_d$  é o ponto de seu centro geométrico e  $\Theta$  são seus parâmetros, tais como dimensões e orientações. No problema de reconstrução de imagens esparsas (Seção 5.1) foi utilizada a mesma equação. Entretanto, agora o termo da amplitude de espalhamento não é mais aproximado pela constante unitária.

A Eq. (69) modela somente a contribuição, nos sinais *A-scan*, da descontinuidade centrada no ponto  $\vec{\mathbf{r}}_d$ , sendo que a contribuição dos demais pontos da ROI é nula. Dessa forma, é possível rescrever a Eq. (69), incluindo todos os pontos da ROI como

$$V_o(\vec{\mathbf{u}}_l, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) A(\omega, \Theta) \int_{\vec{\mathbf{r}} \in \text{ROI}} \text{jinc}^2[ka \sin \theta_{\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{u}}_l}] \exp(i2k|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{u}}_l|) f(\vec{\mathbf{r}}) d\vec{\mathbf{r}} \quad (89)$$

em que

$$f(\vec{\mathbf{r}}) = \begin{cases} 1 & \text{para } \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_d \\ 0 & \text{para os outros pontos da ROI} \end{cases} \quad (90)$$

é uma função que indica a posição do centro geométrico da descontinuidade e cujo domínio são os pontos pertencentes a ROI. O termo da amplitude de espalhamento foi retirado da integral pois ele é definido para uma descontinuidade com centro geométrico na origem do sistema de coordenadas e é invariante ao espaço.

Ao se comparar as equações (70) e (89), verifica-se que elas são semelhantes, exceto pelas definições das funções  $f(\vec{\mathbf{r}})$ . Na Eq. (70), a função  $f(\vec{\mathbf{r}})$  representa uma “imagem” da refletividade acústica do interior do objeto inspecionado. Já na Eq. (89), a função  $f(\vec{\mathbf{r}})$  representa uma “imagem” indicando a localização do centro geométrico da descontinuidade modelada por  $A(\omega, \Theta)$ . Entretanto, como ambas as funções são discretas, pois a ROI é discreta, o modelo do problema de localização da descontinuidade é similar ao desenvolvido na Seção 5.1. Assim, discretizando a Eq. (89), limitando-a a duas dimensões e aplicando a transformação de Stolt, tem-se

$$V_o(k_u, \omega) = B_A(k_u, \omega) \mathcal{S}^\dagger \{F(k_x, k_z)\} \quad (91)$$

em que  $F(k_x, k_z)$  é a transformada discreta 2D de Fourier da função  $f(x_l, z_n)$  e

$$B_A(k_u, \omega) = (-2a^2 ik) H_{etr}^2(\omega) \text{jinc}^2(k_u a / 2) A(\omega, \Theta) \quad (92)$$

A Eq. (92) também pode ser representada no domínio do tempo e espaço. Nessa forma, o modelo pode ser implementado com maior facilidade, conforme já explicado na Seção 5.1.4

$$v_o(u_l, t_n) = \mathcal{F}_{u,t}^{-1} \left\{ B_A(k_u, \omega) \mathcal{S}^\dagger (\mathcal{F}_{x,z} [f(x_l, z_n)]) \right\} \quad (93)$$

Essa equação também pode ser escrita no formato matricial, de forma a facilitar a representação do modelo nos algoritmos de resolução de problemas inversos

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{F}^\dagger \mathbf{B}_A \mathbf{S}^\dagger \mathbf{F}}_{\mathbf{H}} \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta} \quad (94)$$

em que  $\mathbf{F}$  representa a operação da transformada discreta 2D de Fourier,  $\mathbf{S}^\dagger$  é a operação da modelagem de Stolt,  $\mathbf{B}_A = \text{diag}[B_A(k_u, \omega)]$  e  $\boldsymbol{\eta}$  é o vetor com os ruídos inseridos nas medições pelo processo de aquisição de dados.

## 6.2 ALGORITMOS PARA LOCALIZAÇÃO DA DESCONTINUIDADE

O problema de localização da descontinuidade, conforme definido na Seção 6.1, também é um problema inverso, pois procura-se encontrar  $\mathbf{f}$  a partir dos dados medidos  $\mathbf{v}$  e do modelo  $\mathbf{H}$ . Como  $\mathbf{f}$  é esparsa por definição, conforme a Eq. (90), o algoritmo UTSR pode ser utilizado na busca do centro geométrico da descontinuidade.

A fim de avaliar o desempenho do algoritmo UTSR na localização da descontinuidade, também foram implementados dois algoritmos tradicionalmente utilizados da resolução de problemas inversos: (I) o algoritmo dos mínimos quadrados; e (II) o algoritmo dos mínimos quadrados regularizados.

O algoritmo dos mínimos quadrados (LS), definido pela Eq. (51), mas repetido aqui para facilitar a leitura

$$\hat{\mathbf{f}}_{LS} = \left( \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}$$

foi implementado no *MATLAB*<sup>®</sup> a partir do pseudocódigo apresentado na Figura 30.

```

1 LeastSquare(v(u,t), H)
2 início
3   v ← vec[v(u,t)] // "vetoriza" a matriz
4   fLS ← pcg(H†H, H†v) // calcula o sistema de equações
5 fim

```

Figura 30 – Pseudocódigo do algoritmo de reconstrução dos mínimos quadrados

Fonte: Autoria própria.

O algoritmo dos mínimos quadrados regularizados (RLS) tem a solução fechada definida pela Eq. (55), repetida aqui

$$\hat{\mathbf{f}}_{RLS} = \left( \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \lambda \mathbf{L}^\dagger \mathbf{L} \right)^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}$$

em que  $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ . O algoritmo RLS implementado no *MATLAB*<sup>®</sup> é baseado no pseudocódigo mostrado na Figura 31.

```

1 RLS(v(u,t), H, λ)
2 início
3   v ← vec[v(u,t)] // "vetoriza" a matriz
4   f_RLS ← pcg(H†H + λI, H†v) // calcula o sistema de equações
5 fim

```

**Figura 31 – Pseudocódigo do algoritmo de reconstrução dos mínimos quadrados regularizados**  
**Fonte: Autoria própria.**

Os algoritmos RLS e UTSR necessitam de um valor para o parâmetro de regularização  $\lambda$ . Nos ensaios, esse valor foi obtido pelo método proposto por Zibetti et al. (2008). Para a imagem  $\mathbf{f}$  desejada e o nível de ruído aplicado, o valor calculado para  $\lambda$  é  $6,828 \times 10^{-6}$ .

### 6.3 ENSAIOS PARA LOCALIZAÇÃO DE DESCONTINUIDADES

Os ensaios descritos a seguir são utilizados para verificar a validade do método de localização de descontinuidades em peças metálicas por resolução de problemas inversos. O primeiro ensaio, realizado com dados simulados pelo modelo da Eq. (93), tem o objetivo de demonstrar a qualidade das reconstruções de  $\mathbf{f}$  efetuadas por algoritmos diferentes. O segundo ensaio tem por objetivo demonstrar a aplicabilidade do modelo e dos algoritmos de reconstrução em dados medidos pelo sistema de inspeção.

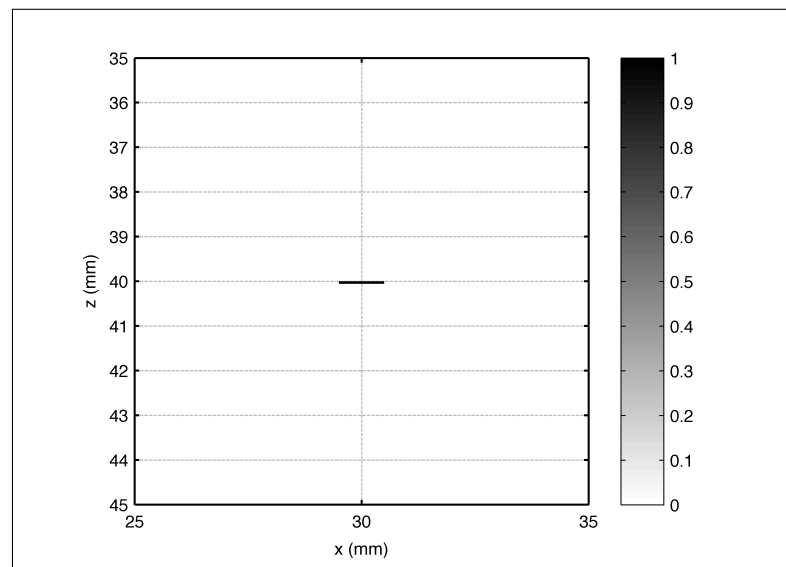
#### 6.3.1 DESCRIÇÃO DO OBJETO INSPECIONADO

Os ensaios foram realizados no mesmo objeto metálico utilizado na validação experimental do algoritmo UTSR, descrito na Seção 5.4.1 e apresentado no desenho da Figura 24. O sistema de inspeção efetua um procedimento de varredura lateral, movendo o transdutor de contato sobre a superfície superior da peça (plano X-Y), ao longo do eixo X. A amostragem espacial ( $\Delta u$ ) é 1 mm, com  $u$  variando da posição 25 mm até a posição 55 mm, em relação a origem do sistema de coordenadas, representada na Figura 24 por O.

Os sinais *A-scan* são digitalizados, em cada posição  $u$ , com o período de amostragem de  $0,02 \mu\text{s}$  e em uma janela de amostragem de 0 a  $25 \mu\text{s}$ . Com essa janela é possível capturar ecos em peças de aço-carbono com profundidades de aproximadamente 74 mm. Entretanto, a ROI é limitada verticalmente entre as profundidades de 18 mm e 58 mm.

### 6.3.2 ENSAIO COM DADOS SIMULADOS

Nesse primeiro ensaio, as medidas dos sinais *A-scan* são simuladas com o modelo definido pela Eq. (93). A função  $f(x, z)$  é definida como uma matriz com as dimensões da ROI. Essa matriz tem todos os elementos com valor 0, exceto o elemento correspondente ao ponto do centro da descontinuidade,  $x = 30 \text{ mm}$  e  $z = 40 \text{ mm}$ , que tem o valor 1. Essa função está representada, na forma de imagem, pela Figura 32. Para facilitar a visualização, nessa imagem aparece somente a região da ROI próxima ao ponto do centro geométrico da descontinuidade.

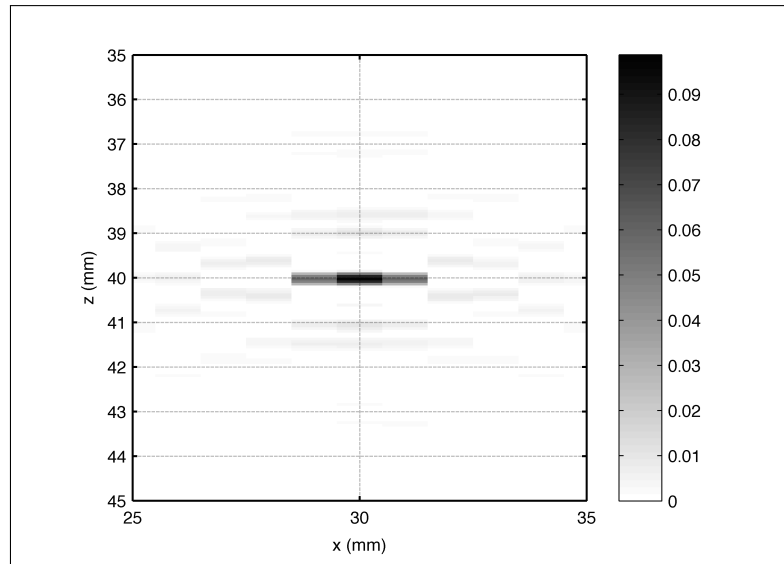


**Figura 32 – Representação como imagem da solução ideal de  $f(x, z)$**   
**Fonte: Autoria própria.**

A função  $B_A(k_u, \omega)$  da Eq. (93) é computada como uma matriz. Essa matriz e  $f(x, z)$  são passadas para a função do *MATLAB*<sup>®</sup> que implementa a operação **Hf**, a qual retorna a matriz  $v_o(u, t)$  com sinais *A-scan* simulados. Então, são adicionados a esses sinais um ruído gaussiano, representando os erros de medição. A relação sinal-ruído utilizada no ensaio é de 20 dB.

Os resultados obtidos pela execução dos algoritmos de reconstrução estão apresentados, na forma de imagens, pelas Figuras 33, 34, 35 e 36. Novamente, para facilitar a visualização, essas imagens mostram somente a região da ROI próxima ao ponto do centro geométrico da descontinuidade.

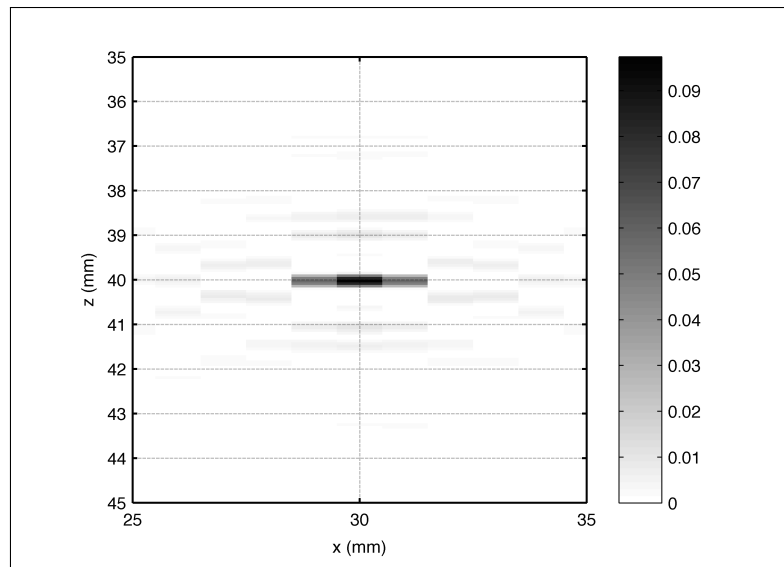
É possível observar que nenhum dos algoritmos encontra uma solução idêntica ao resultado ideal mostrado na Figura 32. Mas, em todas, o ponto da ROI com maior intensidade corresponde ao ponto central da descontinuidade, indicando que todos os algoritmos conseguem estimar o centro geométrico.



**Figura 33 – Representação como imagem da reconstrução pelo algoritmo dos mínimos quadrados**  
**Fonte: Autoria própria.**

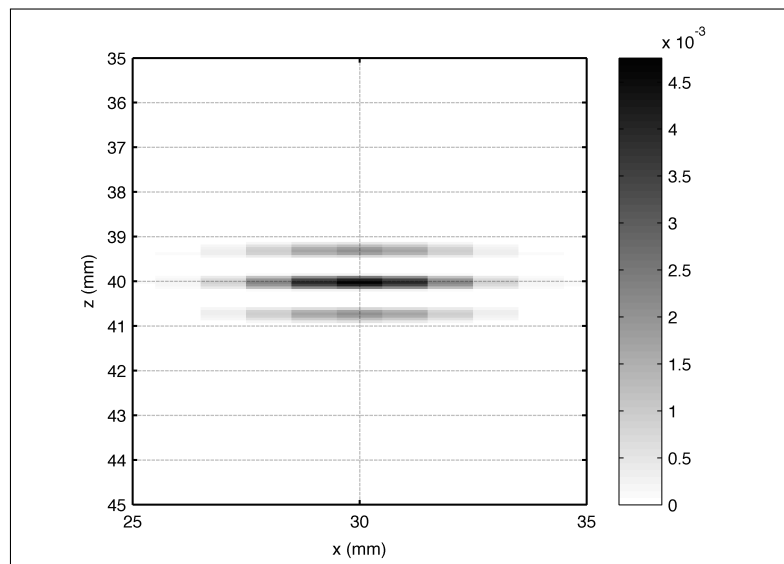
Tanto na solução por mínimos quadrados quanto na solução por RLS é possível observar uma série de “artefatos” nas imagens. Esses artefatos são causados pelo ruído existente nos sinais medidos e deveriam ser diminuídos pela regularização. A semelhança entre as soluções por mínimos quadrados e a RLS indica que o parâmetro de regularização está com um valor baixo. A Figura 35 mostra a solução obtida pelo algoritmo RLS com  $\lambda = 6,828 \times 10^{-2}$ . Os artefatos diminuíram em quantidade, indicando que a solução foi “suavizada”, com a eliminação dos componentes de alta frequência (ruído). Entretanto, houve um aumento na intensidade dos artefatos próximos ao ponto da solução ideal, como efeito do uso da norma  $l_2$  no termo regularizador.

A solução obtida pelo algoritmo UTSR é a que mais se aproxima da solução ideal. Apesar de também existirem artefatos nessa solução, eles são poucos e estão restritos em pontos ao redor do centro geométrico da descontinuidade. Esse algoritmo apresenta duas características que justificam tal resultado. A norma  $l_1$  utilizada no termo regularizador favorece encontrar soluções esparsas, que é o caso da solução procurada nesse problema. Além disso, o uso de um método iterativo para resolver o problema (algoritmo IRLS) melhora a regularização. Isso porque, segundo Karl (2000, p. 154), os métodos iterativos de reconstrução apresentam uma regularização implícita, tendendo a “suavizar” as soluções à medida que convergem.



**Figura 34 – Representação como imagem da reconstrução pelo algoritmo RLS**

**Fonte: Autoria própria.**



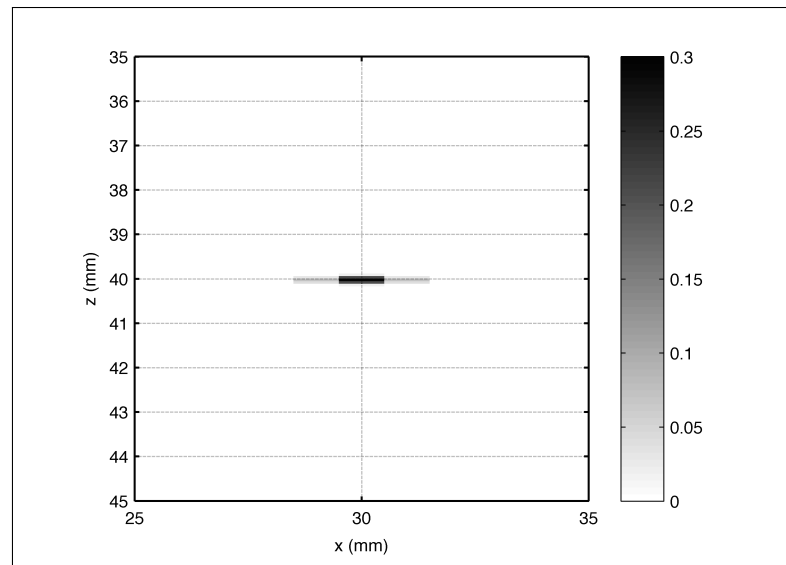
**Figura 35 – Representação como imagem da reconstrução pelo algoritmo RLS com  $\lambda$  aumentado 10.000 vezes**

**Fonte: Autoria própria.**

### 6.3.3 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

No segundo ensaio, os mesmos algoritmos de reconstrução testados no ensaio anterior são utilizados para reconstruir a função  $f(x, z)$  a partir de sinais *A-scan* digitalizados diretamente pelo sistema de inspeção. O parâmetro de regularização necessário nos algoritmos RLS e UTSR foi mantido em  $6,828 \times 10^{-6}$ .

As figuras 37a, 38a e 39a mostram as soluções encontradas pelos três algoritmos como imagens de toda a ROI, enquanto as figuras 37b, 38b e 39b são imagens da região próxima



**Figura 36 – Representação como imagem da reconstrução pelo algoritmo UTSR**

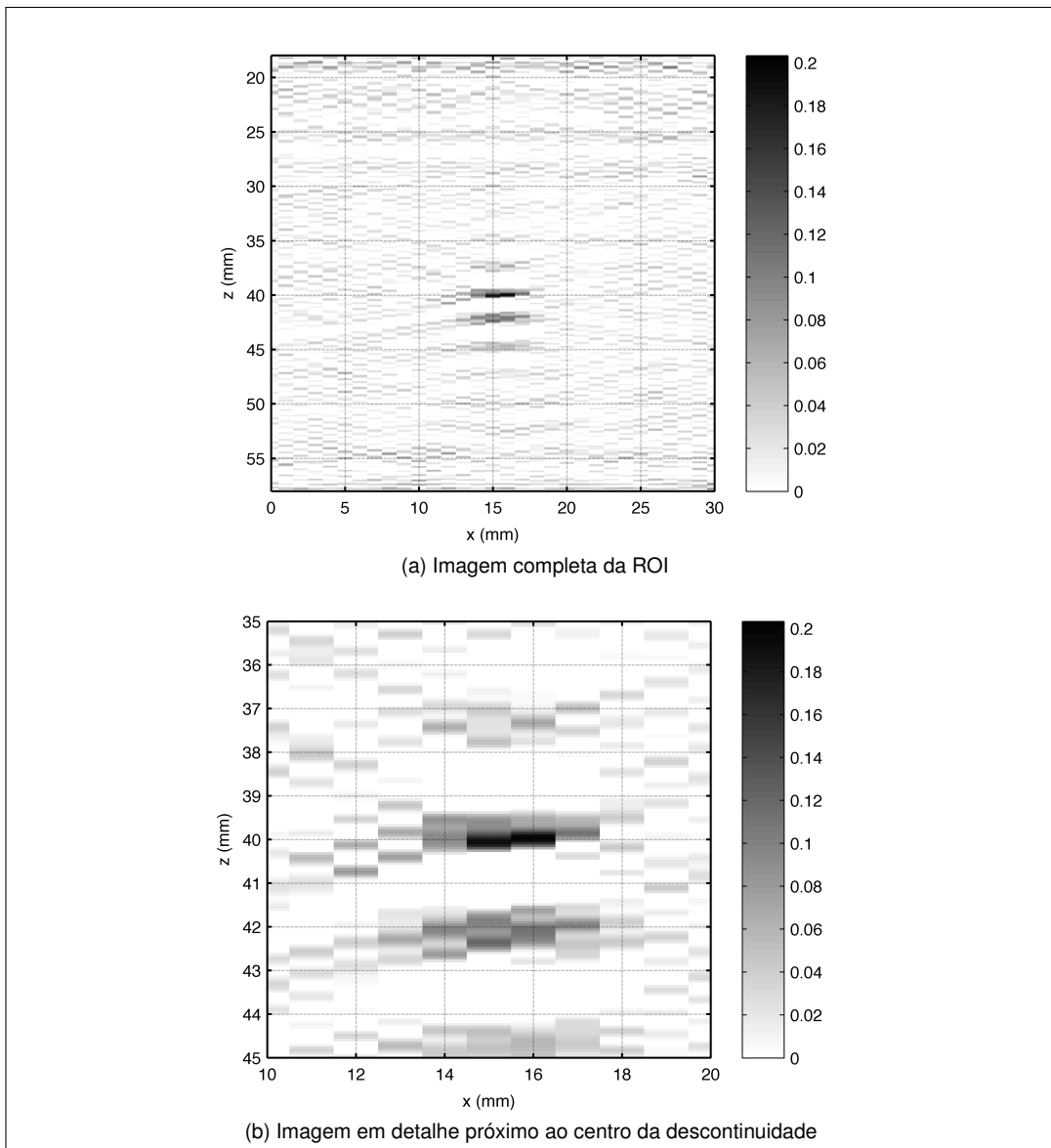
**Fonte: Autoria própria.**

ao centro geométrico da descontinuidade. Pelas figuras 37a, 38a e 39a nota-se que, devido ao ruído ser mais significativo nos dados medidos, existem mais “artefatos” nas reconstruções. Entretanto, o algoritmo UTSR consegue eliminar praticamente todo o ruído.

De um modo geral, observando as figuras 37b, 38b e 39b, todas as reconstruções indicam, como centro geométrico da descontinuidade, pontos da ROI próximos a posição correta. Contudo, a reconstrução por mínimos quadrados indica que o centro geométrico da descontinuidade pode estar tanto em  $x = 15$  mm como em  $x = 16$  mm. Essa indicação também aparece na reconstrução por RLS. Isso ocorre porque o centro geométrico da descontinuidade não deve estar posicionado exatamente sobre a grade de aquisição. Esse problema é comum na prática, e uma maneira de contorná-lo é aumentar a frequência de amostragem espacial, aumentando a grade de aquisição. Entretanto, é possível observar que na reconstrução UTSR, esse problema é minimizado. Isso porque a solução tende a ser esparsa pelo uso da norma  $l_1$  no termo de regularização. Nas soluções esparsas, são poucos os componentes do vetor de resposta com valores não nulos.

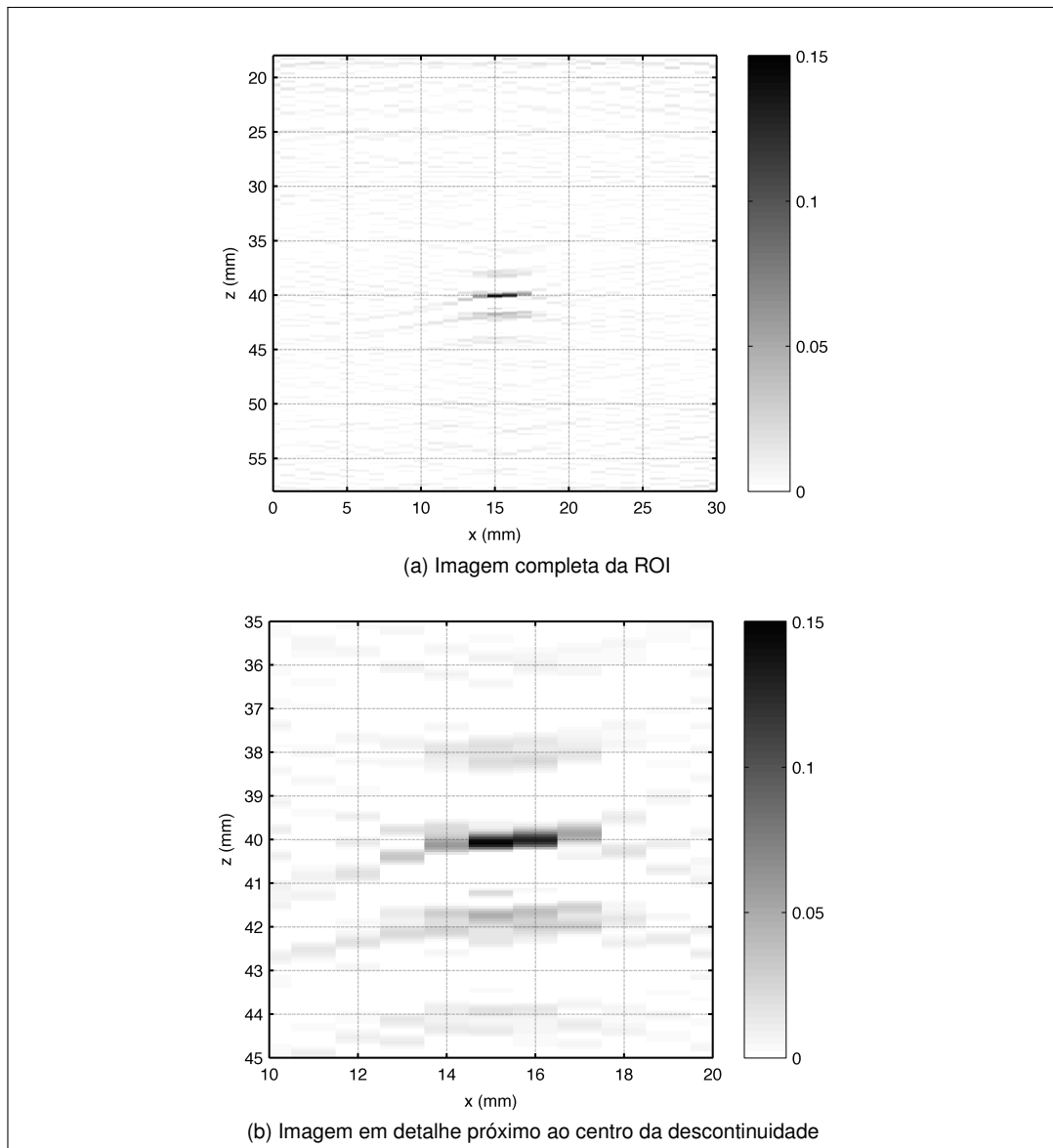
Com relação a coordenada vertical (profundidade) do ponto central da descontinuidade, os algoritmos forneceram soluções muito próximas da posição exata de 40 mm. Na reconstrução por mínimos quadrados, a profundidade indicada pela solução é 39,97 mm e nas reconstruções RLS e UTSR é de 40,08 mm. Como a aquisição dos sinais *A-scan* é feita a cada  $0,02 \mu s$  e a velocidade das ondas ultrassônicas no material é de 5860 m/s, o valor da coordenada vertical na grade de aquisição que mais se aproxima da posição exata é 40,02 mm. Desta forma, os valores obtidos diferem do valor exato em somente uma amostra.



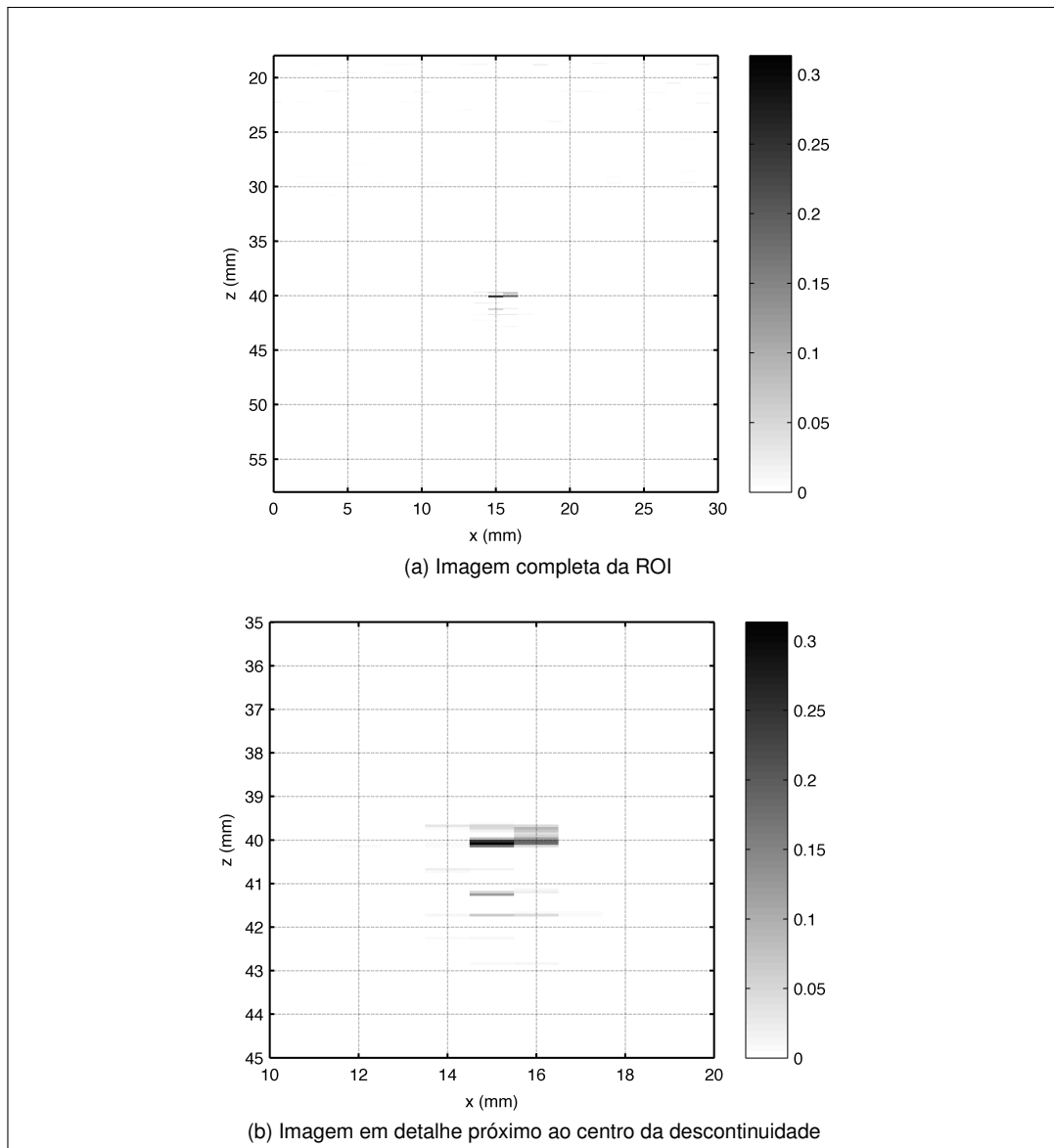


**Figura 37 – Representações como imagens da reconstrução pelo algoritmo dos mínimos quadrados**

**Fonte: Autoria própria.**

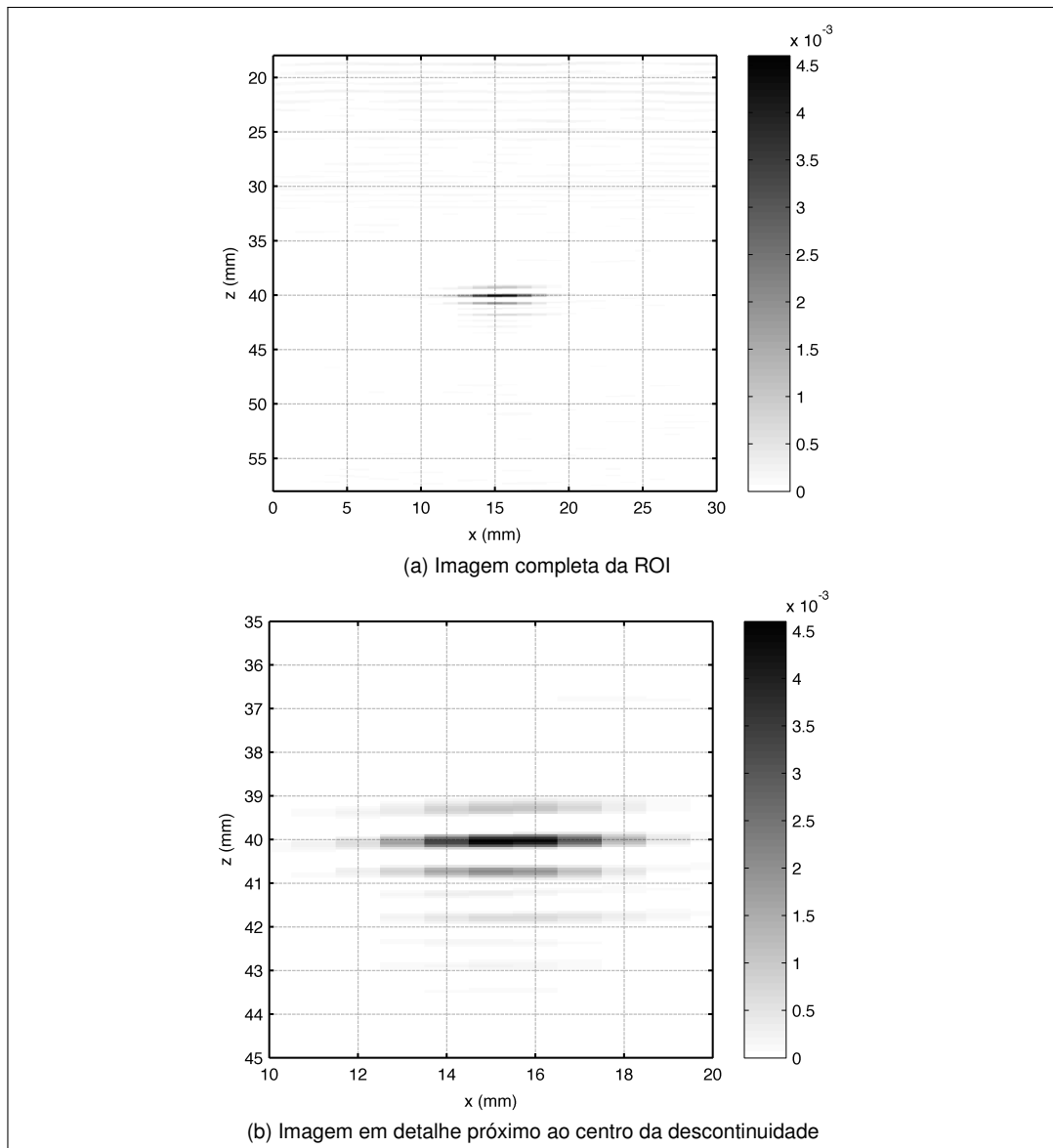


**Figura 38 – Representações como imagens da reconstrução pelo algoritmo RLS**  
**Fonte: Autoria própria.**



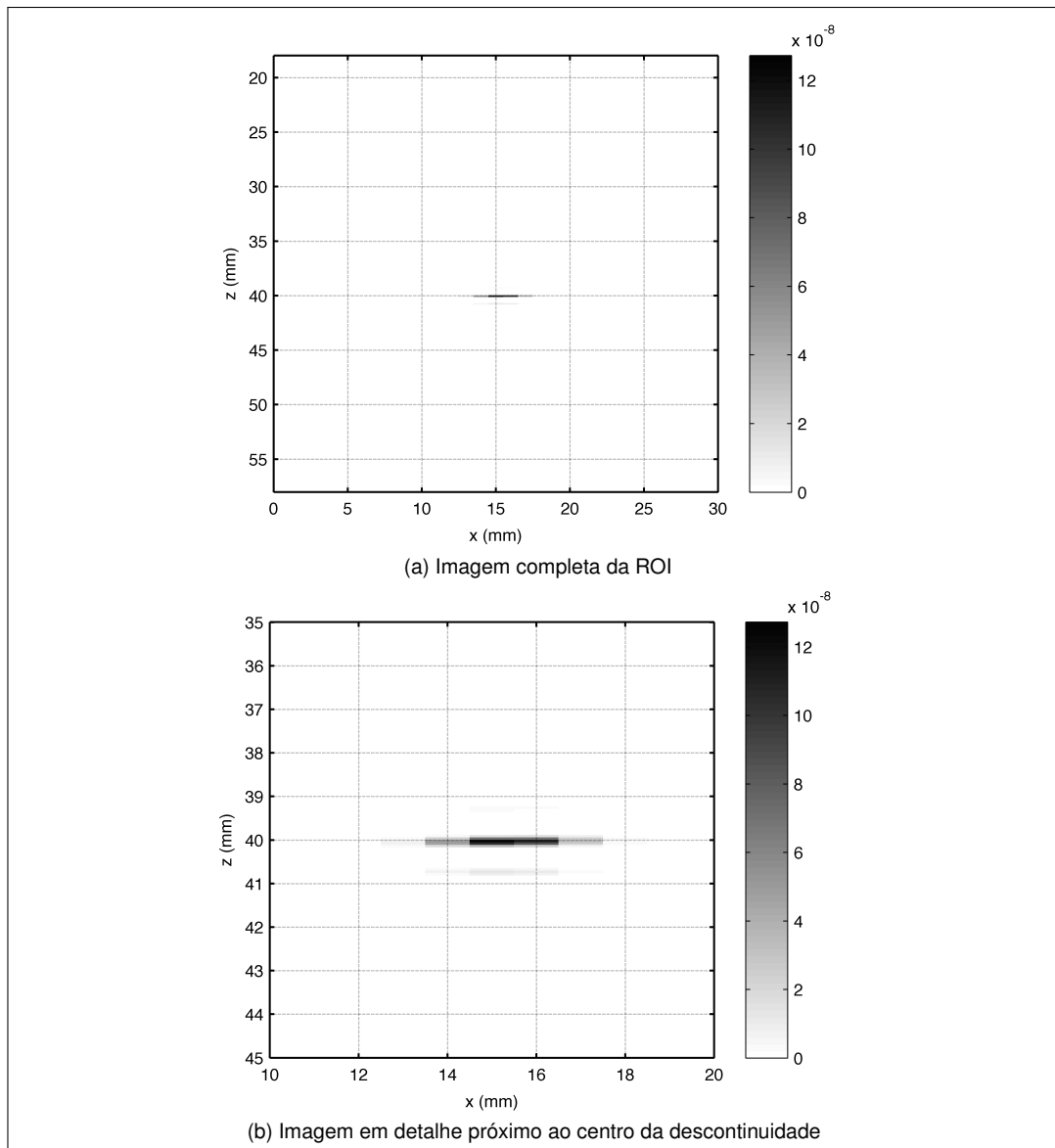
**Figura 39 – Representações como imagens da reconstrução pelo algoritmo UTSR**  
**Fonte: Autoria própria.**

As figuras 40 e 41 mostram o resultado da aplicação dos algoritmos RLS e UTSR nos mesmos dados experimentais, mas com o parâmetro de regularização aumentado 10.000 vezes ( $\lambda = 6,828 \times 10^{-2}$ ). É possível verificar uma redução visual significativa nos artefatos na reconstrução por RLS, o que não ocorre na solução do algoritmo UTSR. Contudo, em ambas as soluções, a identificação da coordenada horizontal do ponto central da descontinuidade fica prejudicada, pois a amplitude dos pontos reconstruídos nas coordenadas  $x = 15$  mm e  $x = 16$  mm estão com valores muito próximos.



**Figura 40 – Representações como imagens da reconstrução pelo algoritmo RLS com  $\lambda$  aumentado 10.000 vezes**

**Fonte: Autoria própria.**



**Figura 41 – Representações como imagens da reconstrução pelo algoritmo UTSR com  $\lambda$  aumentado 10.000 vezes**

**Fonte: Autoria própria.**

Assim, pode-se concluir que o algoritmo UTSR é, entre os algoritmos testados, o mais adequado para resolver o problema de localização do centro geométrico de descontinuidades a partir de sinais *A-scan*. Esse algoritmo mostra-se eficiente na localização correta do ponto central da descontinuidade, tanto com sinais *A-scan* simulados como medidos pelo sistema de inspeção. Além disso, o algoritmo UTSR foi robusto em relação ao problema do desalinhamento da grade de aquisição e as aproximações assumidas na modelagem do sistema de medição.

Por fim, apesar do algoritmo UTSR apresentar resultados melhores na solução do problema inverso de localização do centro de descontinuidades no interior de peças metálicas, não se pode dizer o mesmo com relação a sua eficiência computacional. Durante a realização dos

ensaios foram levantadas informações que permitem avaliar, de forma superficial, a eficiência computacional dos três algoritmos. Entre essas informações está o tempo de execução gasto por cada algoritmo para encontrar a solução estimada. A Tabela 3 mostra a comparação no tempo de execução entre os três algoritmos nos ensaios com dados simulados e experimentais. Todos os ensaios foram realizados em um computador pessoal com processador *Intel® Core 2 Duo* de 2,4 GHz e 8 Gb de memória.

**Tabela 3 – Tempos de execução dos algoritmos de reconstrução dos mínimos quadrados, RLS e UTSR**

Fonte: Autoria própria.

<i>Ensaio</i>	<i>Mínimos quadrados</i>	<i>RLS</i>	<i>Algoritmo UTSR</i>
Dados simulados	5,2 s	6,0 s	81,8 s
Dados medidos	48,4 s	18,0 s	156,2 s

Pelos valores apresentados na Tabela 3, é evidente que o algoritmo UTSR efetua muito mais operações que os algoritmos dos mínimos quadrados e o RLS. Isso se deve, principalmente, pelo fato do algoritmo UTSR utilizar o método IRLS, que é iterativo, enquanto os outros dois são algoritmos de passo único. Esse elevado tempo de execução pode ser um complicador no caso de se implementar esse algoritmo em um sistema embarcado, para operação em tempo real.

Entretanto, existem outros métodos que resolvem problemas de minimização com normas  $l_1$  com melhor eficiência computacional que o IRLS. Entre esses estão os algoritmos da família *iterative shrinkage*, como os descritos em Zibulevsky e Elad (2010). Portanto, um estudo futuro desses novos algoritmos pode melhorar significativamente o tempo de execução na busca da solução do problema de localização do centro geométrico da descontinuidade.

A Tabela 3 também mostra que a execução dos três algoritmos foi mais rápida com os dados simulados. Esse comportamento é explicado pelo fato dos dados experimentais apresentarem um nível de ruído superior ao adicionado nos dados simulados. Com isso, o método do gradiente conjugado precisa executar mais iterações para resolver os sistemas de equações em cada um dos algoritmos.

#### 6.4 PROBLEMA DA CARACTERIZAÇÃO DE UMA DESCONTINUIDADE

Na descrição do problema de localização do centro geométrico de uma descontinuidade é assumida a condição que o seu tipo e suas dimensões são conhecidas, e a sua amplitude

de espalhamento é representada por  $A(\omega, \Theta)$ . A partir dessa condição, deduz-se que os sinais *A-scan* medidos na saída do sistema de medição seguem o modelo da Eq. (93).

Agora, se for retirada a condição de conhecimento prévio do tipo e dimensões da descontinuidade, os sinais *A-scan* medidos passam a seguir o seguinte modelo:

$$v_o(u_l, t_n) = \mathcal{F}_{u,t}^{-1} \left\{ B(k_u, \omega) A(\omega, \Theta) \mathcal{S}^\dagger (\mathcal{F}_{x,z} [f(x_l, z_n)]) \right\} \quad (95)$$

em que  $f(x, z)$  continua a indicar o centro geométrico da descontinuidade dentro da ROI. Assim, o problema inverso de reconstrução para localizar o centro geométrico da descontinuidade passa a ser também um problema inverso de identificação, pois é necessário encontrar o termo  $A(\omega, \Theta)$ , que faz parte do modelo. Nesse novo formato, o problema inverso não pode ser resolvido pelos algoritmos descritos no Capítulo 3, pois eles exigem que o modelo do sistema seja conhecido.

Mas, se for considerado que a posição do centro geométrico da descontinuidade é a princípio conhecida e denominada  $f(x_d, z_d)$ , ou em notação vetorial  $\mathbf{f}_d$  e, aplicando o algoritmo UTSR aos dados medidos com o modelo da Eq. (95), com  $A(\omega, \Theta)$  ajustado para o tipo de descontinuidade e dimensões corretas, a solução  $\hat{\mathbf{f}}_{UTSR}$  é muito próxima a  $\mathbf{f}_d$ . Isso indica que o ponto central da descontinuidade, encontrado pelo algoritmo UTSR é muito próximo ao seu centro real. Essa situação foi comprovada nos ensaios apresentados na Seção 6.3.

Por outro lado, se o termo  $A(\omega, \Theta)$  não corresponder ao tipo de descontinuidade, ou as dimensões estiverem incorretas, há uma expectativa que a solução  $\hat{\mathbf{f}}_{UTSR}$  não se aproxime de  $\mathbf{f}_d$ . Dessa maneira, o algoritmo UTSR está encontrando um ponto central “falso” para a descontinuidade, já que o modelo não condiz com a realidade. Entretanto, essa hipótese precisa ser testada.

## 6.5 ENSAIOS PARA CARACTERIZAÇÃO DE DESCONTINUIDADES

Nessa seção são apresentados os resultados dos ensaios realizados com o objetivo de verificar a hipótese levantada na Seção 6.4. No primeiro ensaio são gerados dados simulados com modelos de 7 descontinuidades diferentes. Cada conjunto de dados simulados é reconstruído pelo algoritmo UTSR com os 7 modelos. Então são verificadas, entre as soluções encontradas, a mais próxima da solução ideal. O objetivo desse ensaio é comprovar se a hipótese está correta. No segundo ensaio, os dados obtidos na inspeção real de uma peça com a descontinuidade conhecida são reconstruídos pelo algoritmo UTSR, utilizando o mesmo conjunto de 7 modelos. Com esse ensaio procura-se verificar a validade da hipótese em uma situação real.

### 6.5.1 MODELOS DE DESCONTINUIDADES UTILIZADOS NOS ENSAIOS

Os modelos das descontinuidades utilizados nesses ensaios estão definidos no Quadro 3. O furo de base plana (FBH — do original *flat-bottom hole*) e o furo lateral passante são elementos usinados com facilidade em peças metálicas e representam de maneira satisfatória descontinuidades planares e volumétricas, respectivamente. Esses elementos são tradicionalmente utilizados pela comunidade de END nos procedimentos de calibração. O vazio esférico é um tipo de descontinuidade volumétrica que se aproxima com defeitos comuns em soldas como porosidades e falta de fusão. Além desses, o modelo **POINT** está incluído nessa relação por ser utilizado pelos métodos tradicionais de reconstrução de imagens em END por ultrassom (SAFT e  $\omega$ -k SAFT) e também pelo algoritmo UTSR.

<i>Modelo</i>	<i>Tipo de descontinuidade</i>	<i>Dimensão característica<sup>a</sup></i>
<b>POINT</b>	Ponto refletor infinitesimal	n.a.
<b>FBH-1mm</b>	Furo de base plana	1 mm
<b>FBH-4mm</b>	Furo de base plana	4 mm
<b>SPH-1mm</b>	Vazio esférico	1 mm
<b>SPH-4mm</b>	Vazio esférico	4 mm
<b>SDH-1mm</b>	Furo lateral passante	1 mm
<b>SDH-4mm</b>	Furo lateral passante	4 mm

**Quadro 3 – Descrição dos modelos utilizados nos ensaios para caracterização de descontinuidades**  
**Fonte: Autoria própria.**

<sup>a</sup>Nesses tipos de descontinuidades a dimensão característica é o diâmetro, com exceção do ponto refletor infinitesimal, em que ela não se aplica.



### 6.5.2 ENSAIO COM DADOS SIMULADOS

Nesse ensaio, são gerados dados simulados para cada modelo do Quadro 3, considerando que todas as descontinuidades têm seu centro localizado no ponto da ROI  $x = 30$  mm e  $z = 40$  mm. Também são adicionados a esses sinais *A-scan* um ruído gaussiano representando os erros de medição. A relação sinal-ruído é ajustada em 20 dB. O parâmetro de regularização  $\lambda$  exigido pelo algoritmo UTSR, calculado com o método descrito em Zibetti et al. (2008), é  $16,81 \times 10^{-6}$ .

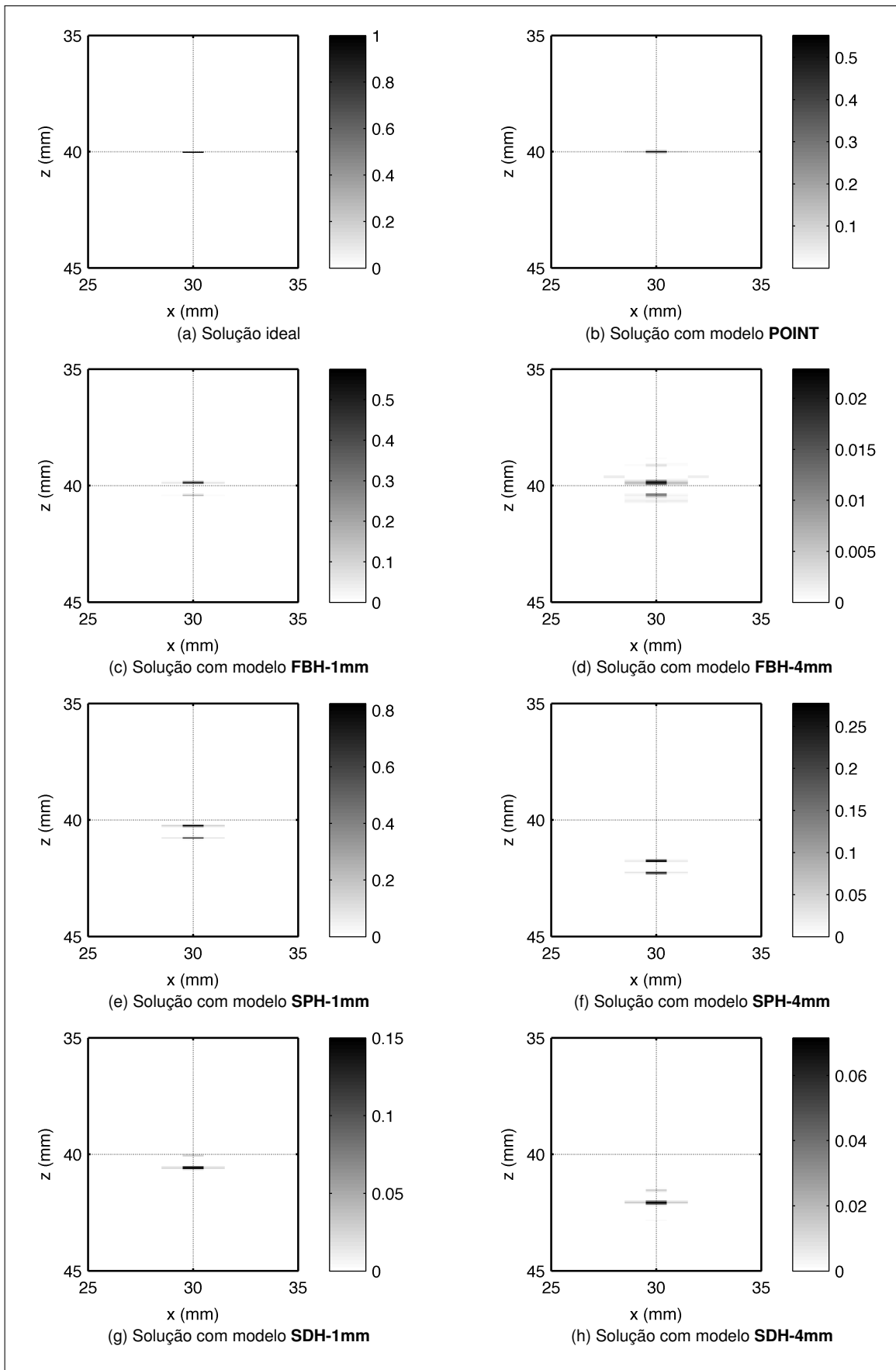
Os resultados numéricos obtidos pelo cálculo da “proximidade” entre as soluções encontradas pelo algoritmo UTSR e a solução ideal estão na Tabela 4. Essa “proximidade” é medida pelo valor do erro quadrático médio (MSE — do original *mean square error*), definido como  $MSE = \|\hat{\mathbf{f}}_{UTSR} - \mathbf{f}_d\|^2 / M$ , em que  $M$  é a quantidade de elementos no vetor  $\mathbf{f}_d$ .

**Tabela 4 – Erros quadráticos médios entre as soluções do algoritmo UTSR e a solução ideal, utilizando dados simulados. A escala dos valores é  $10^{-6}$ . Os valores em destaque são os menores dentro do conjunto de dados simulados**  
Fonte: Autoria própria.

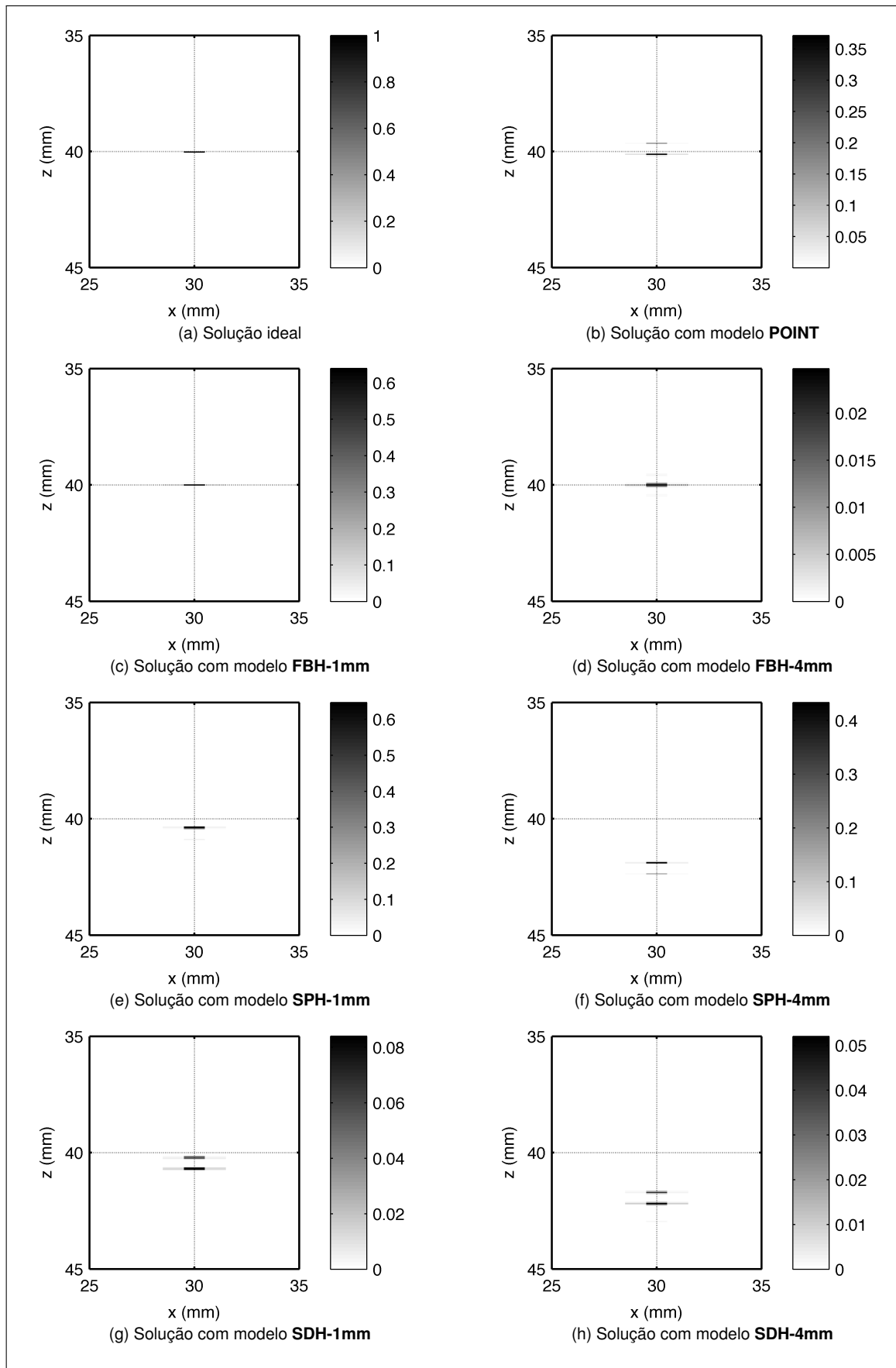
<i>Dados simulados</i>	<i>Modelo de reconstrução</i>						
	POINT	FBH-1mm	FBH-4mm	SPH-1mm	SPH-4mm	SDH-1mm	SDH-4mm
POINT	10,8	55,3	1583,6	47,6	55,6	128,3	321,6
FBH-1mm	67,4	6,5	2590,4	47,6	70,9	177,8	500,9
FBH-4mm	47,5	45,1	34,4	47,4	47,5	47,4	49,1
SPH-1mm	102,4	74,9	28651,2	45,9	148,5	1185,4	3922,9
SPH-4mm	56,7	57,3	1609,5	47,7	11,2	115,9	306,9
SDH-1mm	48,5	48,3	265,1	47,5	48,8	23,5	101,4
SDH-4mm	47,9	47,7	95,5	47,5	47,8	50,9	22,8

Ao se analisar a Tabela 4 verifica-se que as soluções reconstruídas com os modelos corretos são as que apresentam o menor MSE. Isso é uma evidência que a hipótese pode estar correta.

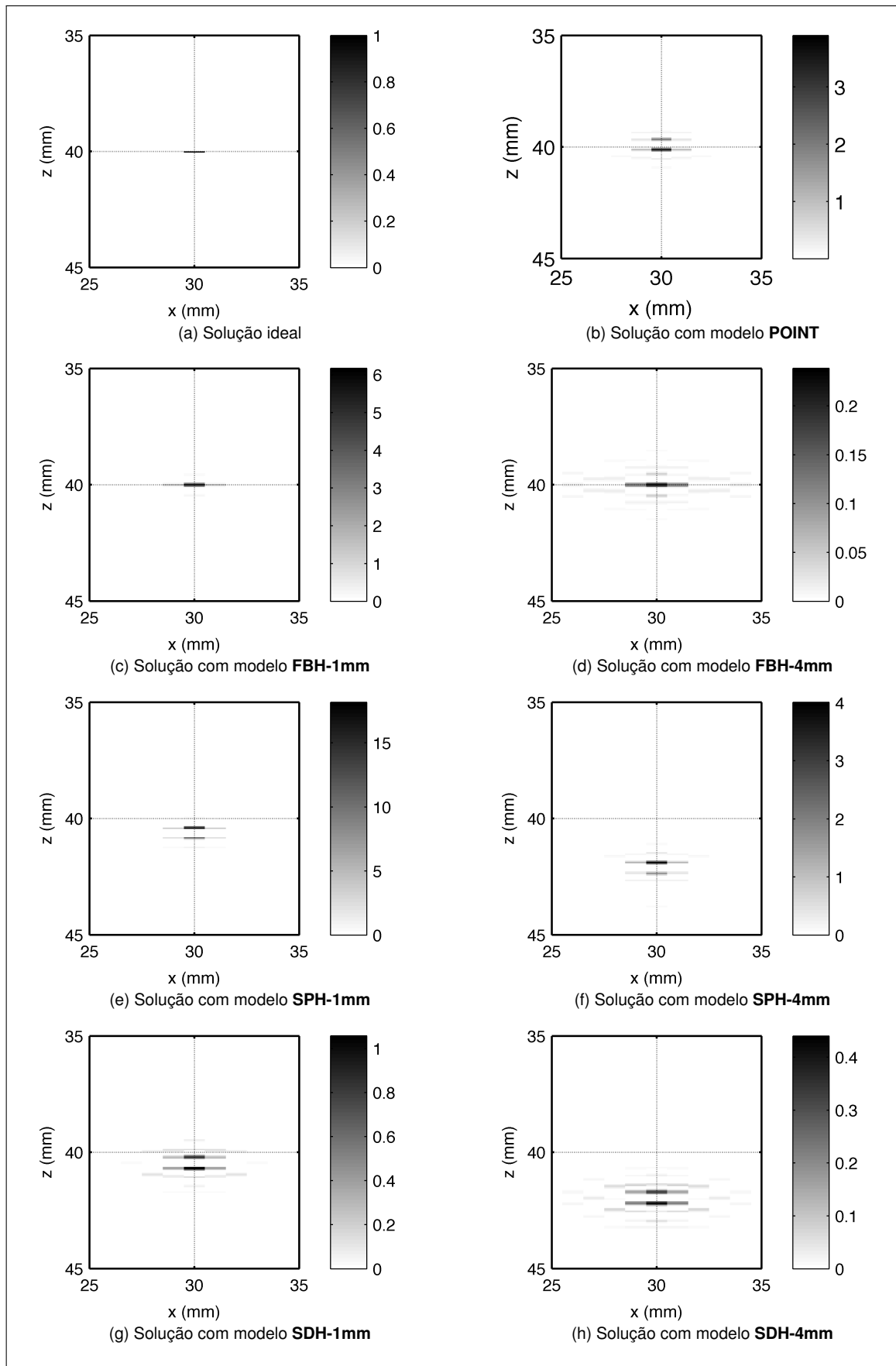
Para reforçar essa evidência, as reconstruções da função  $f(x, z)$  são mostradas no formato de imagens, agrupadas de acordo com os dados utilizados na reconstrução. Dessa forma, é possível visualizar e comparar os resultados obtidos pela reconstrução dos mesmos sinais *A-scan* por diferentes modelos. Essas imagens estão nas figuras 42 até 48.



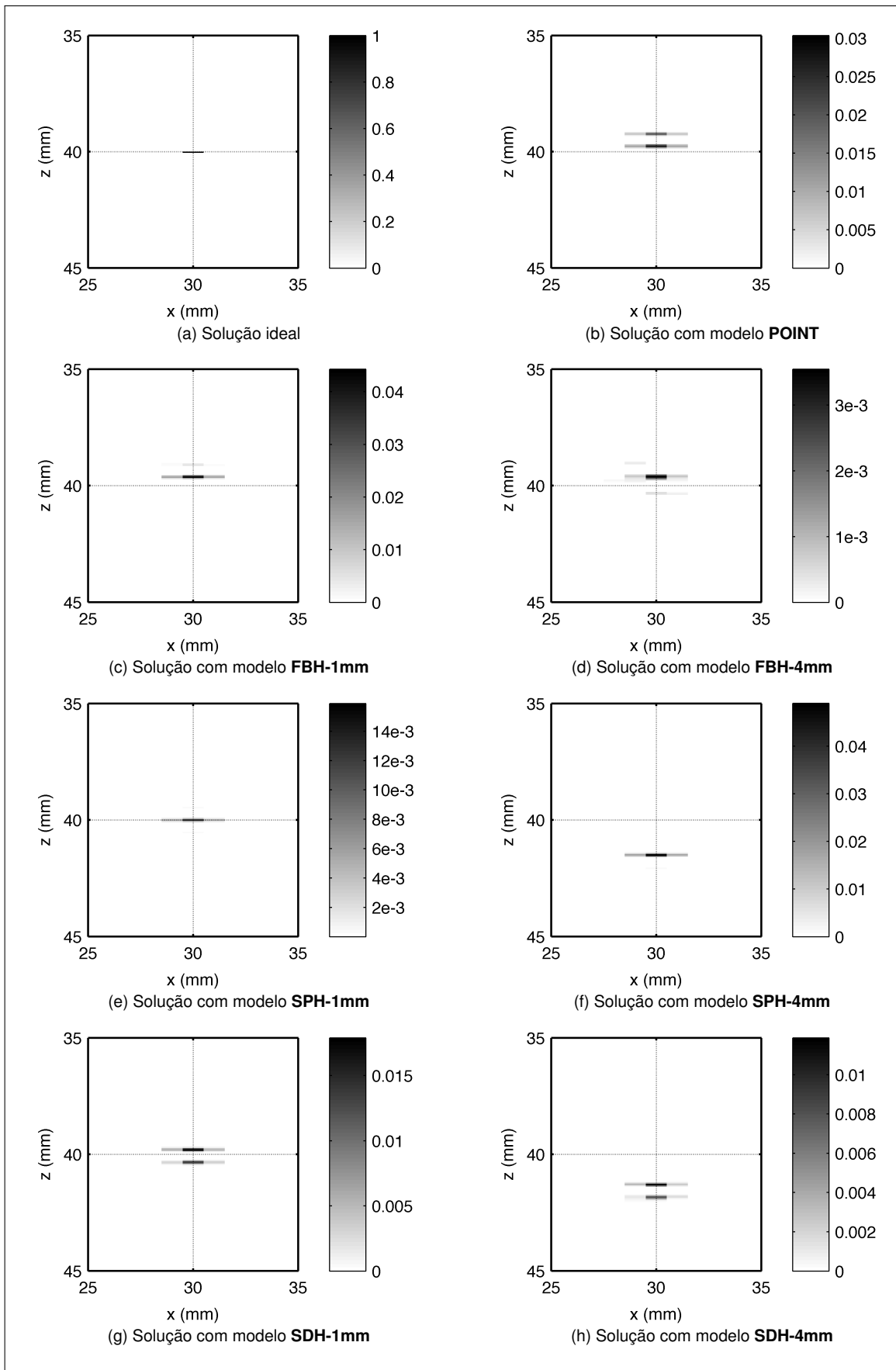
**Figura 42 – Reconstruções obtidas a partir dos dados simulados pelo modelo *POINT***  
**Fonte: Autoria própria.**



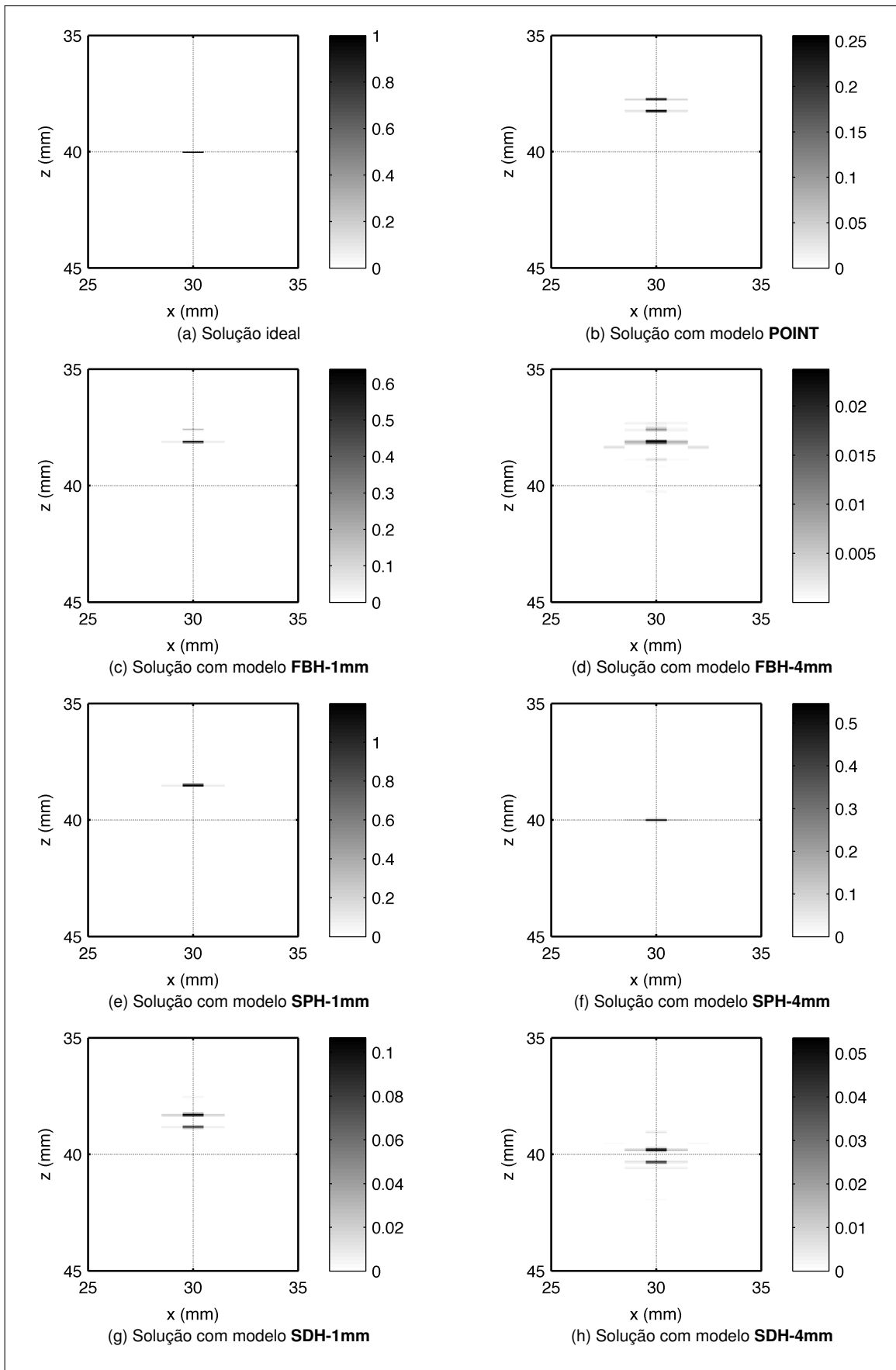
**Figura 43 – Reconstruções obtidas a partir dos dados simulados pelo modelo *FBH-1mm***  
**Fonte: Autoria própria.**



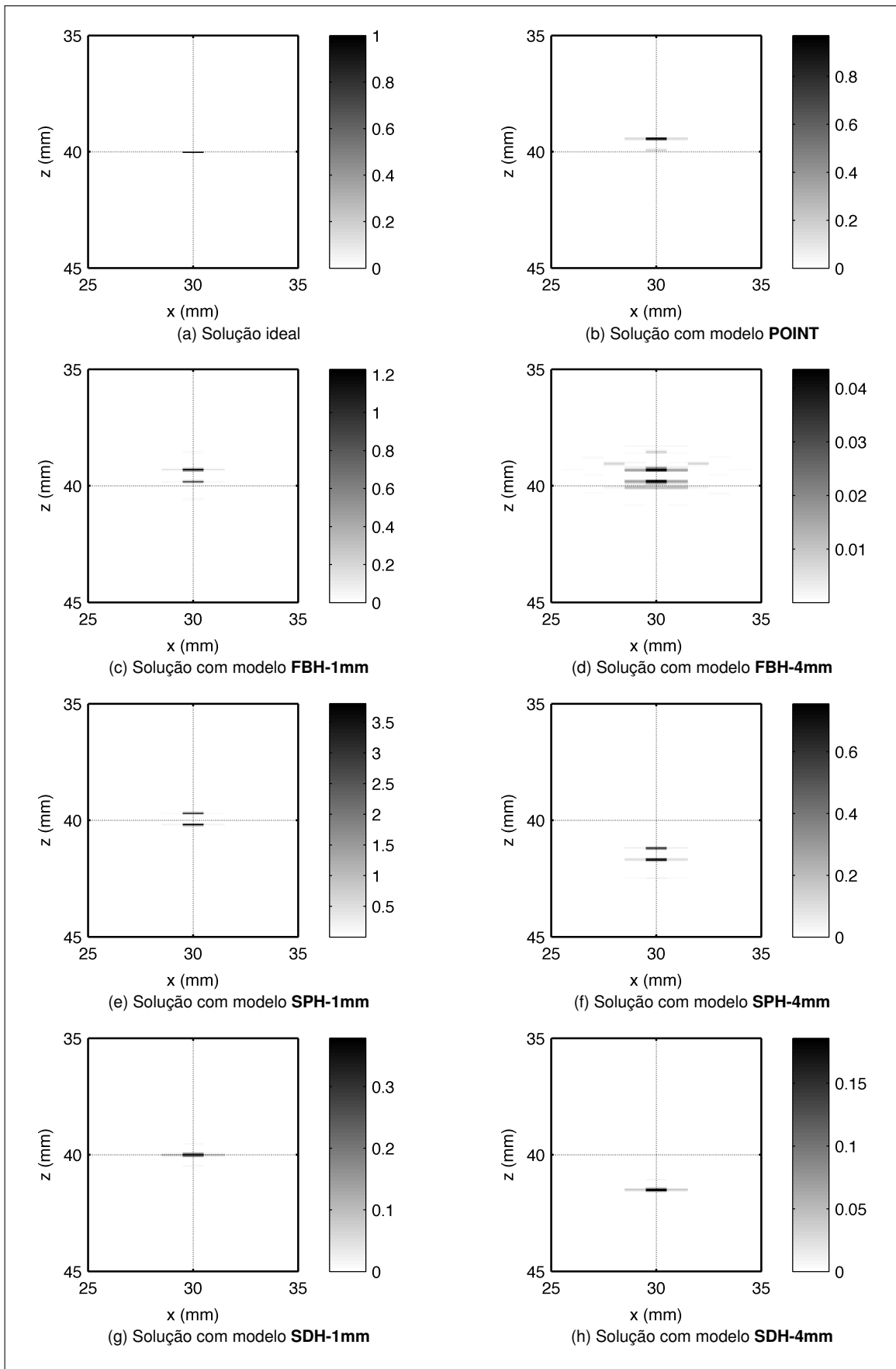
**Figura 44 – Reconstruções obtidas a partir dos dados simulados pelo modelo *FBH-4mm***  
**Fonte: Autoria própria.**



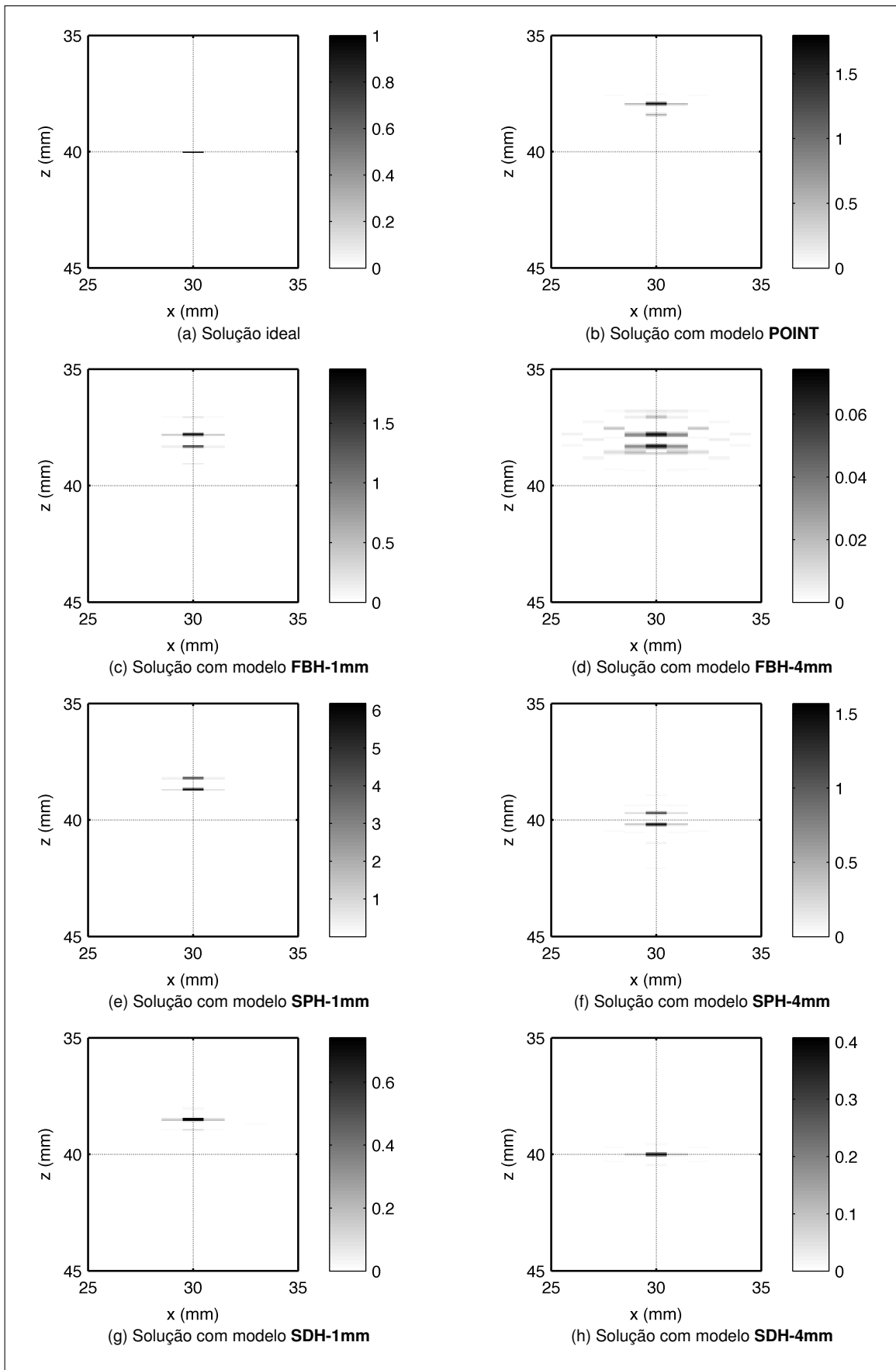
**Figura 45 – Reconstruções obtidas a partir dos dados simulados pelo modelo *SPH-1mm***  
**Fonte: Autoria própria.**



**Figura 46 – Reconstruções obtidas a partir dos dados simulados pelo modelo *SPH-4mm***  
**Fonte: Autoria própria.**



**Figura 47 – Reconstruções obtidas a partir dos dados simulados pelo modelo *SDH-1mm***  
**Fonte: Autoria própria.**



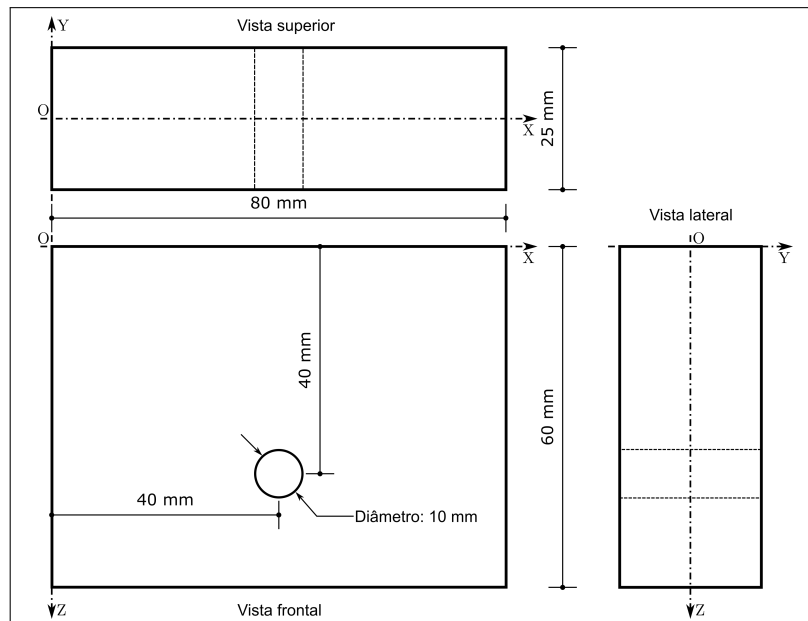
**Figura 48 – Reconstruções obtidas a partir dos dados simulados pelo modelo *SDH-4mm***  
**Fonte: Autoria própria.**



A observação das figuras 42 até 48 demonstra que a hipótese levantada na Seção 6.4 deve estar correta. Todas as imagens das reconstruções feitas com o modelo correto indicam a posição correta do centro da descontinuidade. Nas reconstruções feitas com modelos errados, a imagem indica que o centro da descontinuidade está em uma profundidade diferente ou são indicados dois pontos centrais. Entretanto, em alguns casos, as imagens reconstruídas com modelos errados também indicam a posição correta do centro da descontinuidade, como nas imagens 43c, 43d, 44c e 44d. Essa situação ocorre pois as descontinuidades desses ensaios são planares e, portanto, as posições dos centros geométricos são idênticas. Porém, as amplitudes máximas das imagens reconstruídas são diferentes, indicando que uma diferença na amplitude dos ecos capturados. Pela modelagem do problema, a imagem que apresenta a amplitude máxima mais próxima do valor 1 é a que utiliza o modelo correto. Isso pode ser observado nas imagens 43c, 43d, 44c e 44d.

### 6.5.3 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

Para verificar se a hipótese da Seção 6.4 é válida em situações reais de inspeções END é realizado um outro ensaio. Nele, a função  $f(x, z)$  é reconstruída utilizando os mesmos modelos do ensaio anterior, com exceção do modelo ***SDH-4mm***, que é substituído pelo modelo ***SDH-10mm***.



**Figura 49 – Geometria da peça metálica com furo lateral passante de 10 mm de diâmetro**

**Fonte: Autoria própria.**

Os dados para a reconstrução são medidos pelo sistema de inspeção em duas peças diferentes de aço-carbono. A primeira peça tem a geometria descrita na Figura 24, enquanto a geometria da segunda peça segue a Figura 49. O parâmetro de regularização do algoritmo UTSR foi ajustado em  $6,828 \times 10^{-6}$ .

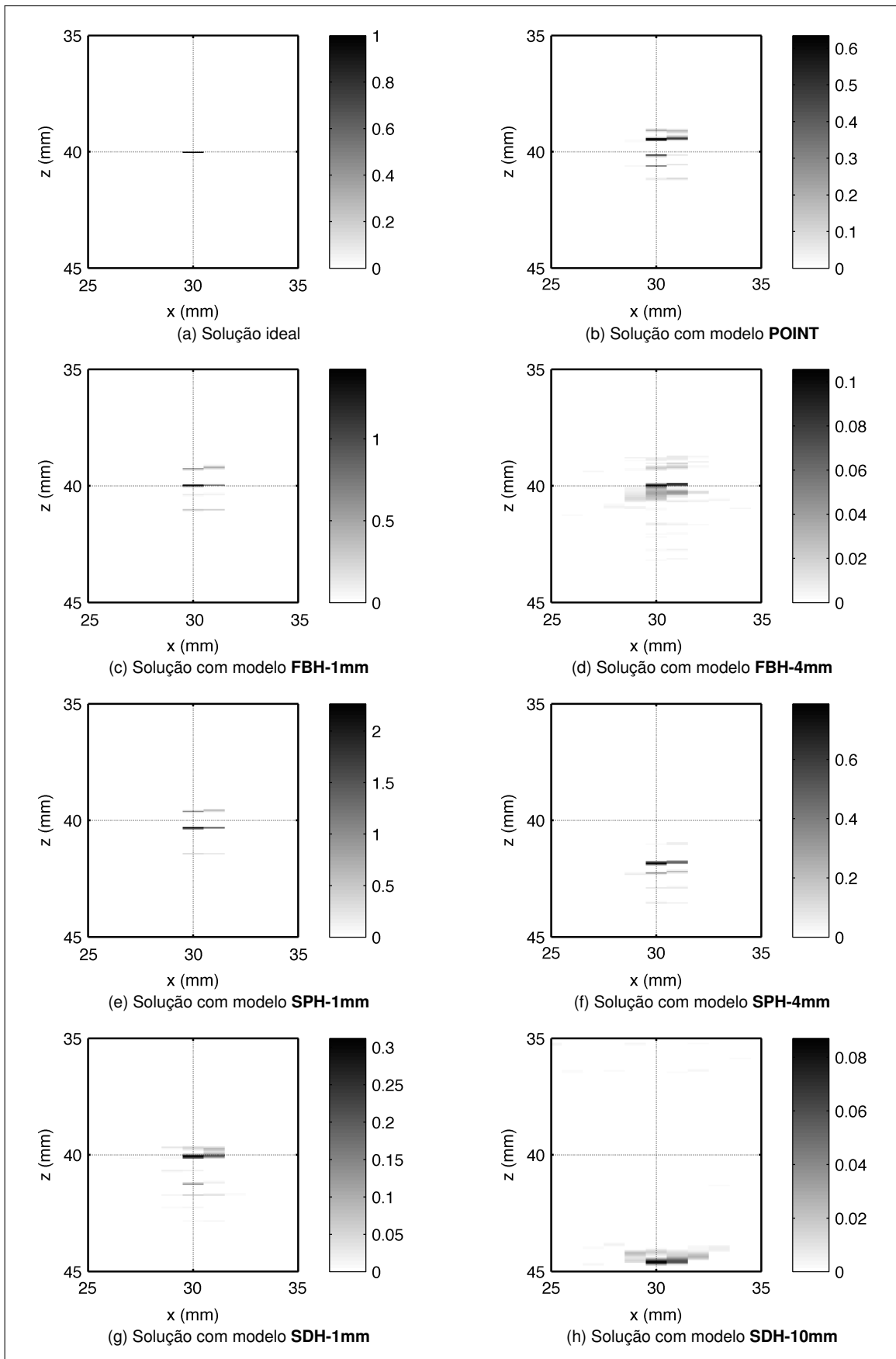
As medidas do MSE entre as soluções obtidas na reconstrução com cada modelo e a solução ideal estão na Tabela 5. Novamente, as soluções das reconstruções com os modelos corretos apresentam o menor MSE. Analisando também as soluções como imagens, conforme as figuras 50 e 51, os pontos centrais indicados pelas soluções com os modelos corretos (*SDH-1mm* e *SDH-10mm*) correspondem aos centros reais das descontinuidades.

**Tabela 5 – Erros quadráticos médios entre as soluções do algoritmo UTSR e a solução ideal, utilizando dados medidos. A escala dos valores é  $10^{-6}$ . Os valores em destaque são os menores dentro do conjunto de dados medidos**

Fonte: Autoria própria.

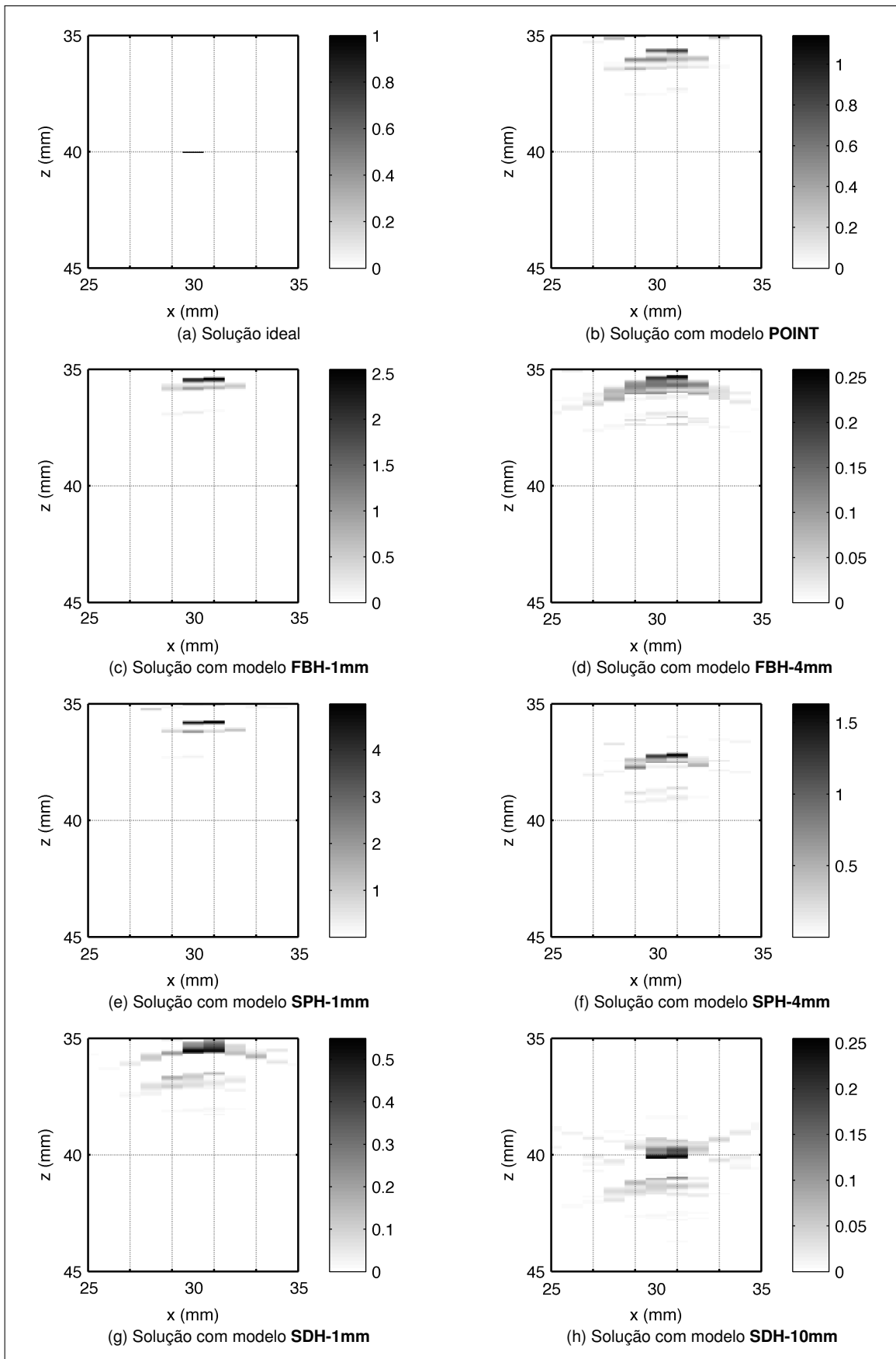
<i>Dados medidos</i>	<i>Modelo de reconstrução</i>						
	POINT	FBH-1mm	FBH-4mm	SPH-1mm	SPH-4mm	SDH-1mm	SDH-10mm
SDH-1mm	129,1	162,0	43,0	504,0	129,3	40,0	49,2
SDH-10mm	1389,7	4688,8	164,2	11502,6	1690,3	401,6	112,1

Esses resultados indicam que a hipótese levantada na Seção 6.4 deve estar correta. Portanto, se for criado um algoritmo para a resolução do problema inverso definido pela Eq. (95), em que a expressão da amplitude de espalhamento  $A(\omega, \Theta)$  possa ser modificada dinamicamente, é possível caracterizar e localizar essa descontinuidade a partir da análise de  $\hat{\mathbf{f}}$  e dos parâmetros  $\Theta$  obtidos para  $A(\omega, \Theta)$ .



**Figura 50 – Reconstruções obtidas a partir dos dados medidos em uma peça com SDH de 1 mm de diâmetro**

**Fonte: Autoria própria.**



**Figura 51 – Reconstruções obtidas a partir dos dados medidos em uma peça com SDH de 10 mm de diâmetro**

**Fonte: Autoria própria.**

## 6.6 ALGORITMO PARA CARACTERIZAÇÃO DE DESCONTINUIDADES

Como foi visto na Seção 3.1, os problemas inversos são divididos em problemas de reconstrução e de identificação. Entretanto, o problema da identificação de descontinuidades, como definido neste trabalho, é uma combinação dos dois tipos, pois tanto a entrada como o modelo precisam ser estimados. Essa categoria de problema inverso é chamada por Kundur e Hatzinakos (1996) de *deconvolução cega*.

Em um problema de deconvolução cega, tanto as entradas como o modelo podem ser totalmente desconhecidos ou conhecidos parcialmente. Portanto, para se obter uma solução a partir dos dados de saída, é necessário algum tipo de informação prévia sobre as entradas ou sobre o modelo, tais como características físicas ou informações estatísticas (KUNDUR; HATZINAKOS, 1996).

De acordo com Bishop et al. (2007, p. 5) existem duas categorias de abordagens para a resolução de problemas de deconvolução cega. Na primeira, o problema é resolvido em duas etapas distintas. A identificação do modelo é feita na etapa inicial, de forma independente da reconstrução das entradas. Então, na etapa final, as entradas são reconstruídas pelos métodos convencionais de reconstrução. Ela é chamada de identificação do modelo *a priori*. As técnicas para resolução de problemas de deconvolução cega baseadas nessa abordagem são as mais simples de serem implementadas e apresentam baixo custo computacional (KUNDUR; HATZINAKOS, 1996). O sucesso na aplicação das técnicas de identificação do modelo *a priori* em um problema de deconvolução cega, segundo Kundur e Hatzinakos (1996), depende da existência de uma das seguintes condições: (I) a solução ideal (dados de entrada) deve conter alguma característica especial previamente conhecida; e (II) o modelo deve estar em uma forma paramétrica conhecida.

Nos métodos pertencentes à segunda categoria, chamada de identificação de modelo *conjunta*, tanto a reconstrução das entradas como a identificação do modelo são realizadas simultaneamente, incorporadas em um mesmo algoritmo. Bishop et al. (2007) descrevem uma série de métodos baseados nessa abordagem. Uma parte deles estão fundamentados na teoria da inferência estatística, tais como o da máxima verossimilhança (ML — do original *maximum likelihood*), do máximo *a posteriori* (MAP), do erro médio quadrático mínimo (MMSE — do original *minimum mean squared error*) e outros. A outra parte utiliza outros fundamentos, tais como estimação paramétrica de modelos ARMA (*autoregressive moving average*), algoritmos de restrições determinísticas não-paramétricas e outros. Todos esses métodos apresentam limitações e particularidades com relação às características do problema que tentam resolver.

Assim, a escolha de quais métodos são adequados para a caracterização de descontinuidades, como um problema de deconvolução cega, depende essencialmente de suas características específicas. A partir da descrição do problema de identificação, feita no início deste capítulo, é possível listar algumas dessas características, bem como as restrições que elas impõem com relação a escolha dos métodos.

No problema de identificação de descontinuidades, a solução ideal  $\mathbf{f}$  é desconhecida, pois não se sabe a localização do centro da descontinuidade na ROI. Entretanto, a princípio, sabe-se que a solução é esparsa, tendo somente um único ponto da ROI com amplitude unitária e os pontos restantes com valor nulo. Essa é uma restrição da solução que pode ser utilizada como informação prévia. Além disso, as expressões para  $A(\omega, \Theta)$  dependem do tipo de descontinuidade. Entretanto, independente do tipo, todas elas são definidas com expressões paramétricas, em que os parâmetros estão relacionados com as dimensões e a orientação da descontinuidade. Como o objetivo da resolução do problema é identificar a descontinuidade, o método de identificação deve ser capaz de estimar esses parâmetros. Considerando essas características particulares do problema de identificação de descontinuidades, a escolha da abordagem de identificação do modelo *a priori* mostra-se mais adequada. Também não se sabe, a princípio, o tipo da descontinuidade. Assim, a escolha da expressão  $A(\omega, \Theta)$  que melhor representa a descontinuidade faz parte do processo de identificação.

### 6.6.1 DESCRIÇÃO DO ALGORITMO

O algoritmo para caracterização de descontinuidades foi desenvolvido a partir da equação analítica que modela o problema de localização da descontinuidade. Essa equação, representada na forma matricial pela Eq. (94), é repetida aqui, mas com a indicação explícita de que o modelo  $\mathbf{H}$  do sistema de medição depende de um conjunto  $\Theta$  de parâmetros da descontinuidade

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{F}^\dagger \mathbf{B}_A(\Theta) \mathbf{S}^\dagger \mathbf{F}}_{\mathbf{H}(\Theta)} \mathbf{f} + \eta \quad (96)$$

Como apresentado na Seção 2.5, as equações da amplitude de espalhamento são não-lineares em relação aos parâmetros  $\Theta$ . Uma técnica tradicional para estimar os parâmetros  $\Theta$  nessa situação é pelo método dos *mínimos quadrados não-lineares* (KAY, 1993). Essa técnica é utilizada para encontrar as dimensões e orientações de trincas circulares em Sedov e Schmerr (1986); na deconvolução de sinais ultrassônicos para estimar parâmetros dos ecos recebidos, tais como amplitude, fase, frequência central, banda de passagem e tempo de chegada (DE-

MIRLI; SANIIE, 2001a); e para determinar propriedades físicas e mecânicas em camadas finas de materiais laminados (CHEN et al., 2013).

O método dos mínimos quadrados não-lineares consiste em encontrar os parâmetros  $\Theta$  que minimizam o MSE entre os valores medidos e os calculados pelo modelo (KAY, 1993). Esse problema de otimização é definido como

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta} \|\mathbf{v} - \mathbf{H}(\Theta)\mathbf{f}\|_2^2 \quad (97)$$

As vantagens existentes no uso da técnica dos mínimos quadrados não-lineares são (KAY, 1993): ela não exige a caracterização estatística precisa dos dados medidos; a sua utilização é válida independente das características do ruído que contamina os dados medidos  $\mathbf{v}$ ; quando esse ruído é gaussiano e estacionário, o estimador de mínimos quadrados é também o estimador de máxima verossimilhança. Os problemas de mínimos quadrados não-lineares podem ser resolvidos por um procedimento de busca dos parâmetros em grade (*grid search*) ou por métodos iterativos como Gauss-Newton ou Levenberg-Marquardt (MADSEN et al., 2004).

Os métodos iterativos em geral são mais rápidos que a busca em grade para encontrar uma solução, principalmente se a quantidade de parâmetros é grande. Entretanto, os métodos iterativos necessitam do cálculo do gradiente e da matriz jacobiana de  $\mathbf{H}(\Theta)\mathbf{f}$  (MADSEN et al., 2004). Na busca em grade somente é preciso avaliar  $\mathbf{H}(\Theta)\mathbf{f}$  para um conjunto pré-definido de parâmetros  $\Theta$ . Um problema dos métodos iterativos é que eles não garantem a convergência do MSE para um ponto mínimo global. Dependendo dos valores iniciais dos parâmetros adotados, o algoritmo pode convergir para um mínimo local. Isso leva a um erro na estimativa dos parâmetros. O método de busca em grade pode ser imune a esse problema se não houverem múltiplos mínimos globais no intervalo da grade pesquisada.

Entretanto, existe ainda um obstáculo para se utilizar os algoritmos citados na solução do problema da Eq. (97) na busca dos parâmetros das discontinuidades. Não se conhece o vetor  $\mathbf{f}$ , que indica a posição do centro geométrico da discontinuidade. Assim, o problema da caracterização de discontinuidades não pode ser representado diretamente pela Eq. (97). A definição correta do problema é

$$\{\hat{\mathbf{f}}, \hat{\Theta}\} = \arg \min_{\mathbf{f}, \Theta} \|\mathbf{v} - \mathbf{H}(\Theta)\mathbf{f}\|_2^2 \quad (98)$$

A Eq. (98) já poderia ser utilizada no desenvolvimento de um algoritmo para a caracterização de discontinuidades. Entretanto, nela não está incorporada a informação prévia de que

$\mathbf{f}$  é esparsa. Tal informação pode ser tratada no problema como uma restrição, e incluída como um termo de regularização (BISHOP et al., 2007; BOYD; VANDENBERGHE, 2009):

$$\{\hat{\mathbf{f}}, \hat{\Theta}\} = \arg \min_{\mathbf{f}, \Theta} \{ \|\mathbf{v} - \mathbf{H}(\Theta)\mathbf{f}\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{f}\|_1 \} \quad (99)$$

em que  $\lambda_1$  é o termo regularizador associado a restrição de que  $\mathbf{f}$  deve ser esparsa. A justificativa para o uso a norma  $l_1$  é a mesma que no algoritmo UTSR. A norma  $l_1$  é um relaxamento convexo da norma  $l_0$ , mantendo a convexidade da Eq. (99).

A maior dificuldade na resolução do problema da Eq. (99) está em estimar duas variáveis distintas,  $\mathbf{f}$  e  $\Theta$ . Segundo Bishop et al. (2007), uma abordagem muito utilizada na resolução desse tipo de problema é a *minimização alternada* (AM — do original *alternating minimization*). Nessa estratégia, resolve-se o problema em relação a uma variável enquanto a outra é mantida constante. O processo é repetido, trocando a variável mantida constante, até que haja a convergência nas soluções encontradas.

Para utilizar esse método na resolução do problema descrito pela Eq. (99), inicia-se com a escolha de valores iniciais apropriados nos parâmetros  $\Theta$ , e então calcula-se  $\mathbf{H}(\Theta)$ . Conhecendo-se  $\mathbf{H}(\Theta)$ , a Eq. (99) pode ser resolvida por diversos métodos já descritos, inclusive pelo algoritmo UTSR. Com o valor  $\hat{\mathbf{f}}$  estimado, ele é fixado na Eq. (99) e ela é resolvida para encontrar  $\hat{\Theta}$ . O processo é repetido até a convergência. Se não houver convergência o processo deve ser interrompido e reiniciado com outros valores iniciais.

Contudo, a aplicação desse método no problema da caracterização de descontinuidades apresenta algumas dificuldades: (I) é preciso uma estratégia para a escolha de valores iniciais nos parâmetros  $\Theta$ , uma escolha não apropriada pode fazer o algoritmo convergir para valores errados ou até mesmo divergir; (II) a cada iteração é preciso fazer uma reconstrução de  $\mathbf{f}$ , que pode ser bastante custoso computacionalmente se for utilizado o algoritmo UTSR, conforme a Seção 6.3.3; (III) é necessário definir um critério de convergência que leve em consideração as estimativas  $\hat{\mathbf{f}}$  e  $\hat{\Theta}$  calculadas a cada iteração. Para evitar essas dificuldades, a solução adotada é uma forma simplificada do método AM.

A quantidade de iterações do método é limitada a somente uma. Com isso, o algoritmo de reconstrução é executado uma única vez, acelerando o processo. Além disso, não é utilizado o algoritmo UTSR na reconstrução de  $\mathbf{f}$  a cada avaliação da função custo. Ele foi substituído pelo algoritmo de retroprojeção

$$\hat{\mathbf{f}}^{(0)} = \mathbf{H}^\dagger(\Theta)\mathbf{v} \quad (100)$$



Apesar de  $\hat{\mathbf{f}}^{(0)}$  não ser tão precisa como  $\hat{\mathbf{f}}_{UTSR}$ , ela pode ser utilizada para a estimação dos parâmetros  $\Theta$ .

A estratégia para se escolher valores iniciais nos parâmetros  $\Theta$  foi substituída pela definição de uma grade pré-definida de valores dos parâmetros. Desta forma, a função custo da Eq. (99), escrita na Eq. (101), deve ser avaliada para todos os valores de  $\Theta$  contidos na grade.

$$Q(\Theta) = \|\mathbf{v} - \mathbf{H}(\Theta)\hat{\mathbf{f}}^{(0)}\|_2^2 + \lambda_1 \|\hat{\mathbf{f}}^{(0)}\|_1 \quad (101)$$

Como não há iterações, não é preciso definir nenhum critério para testar a convergência. Para determinar quais valores de  $\Theta$  são os mais adequados com os dados medidos, é preciso somente analisar que conjunto de parâmetros fornece o menor valor de  $Q(\Theta)$  na Eq. (101)

### 6.6.2 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

Na implementação do algoritmo para caracterização de descontinuidades da Eq. (99) foi escolhido o procedimento de busca em grade ao invés de algum método iterativo devido a quantidade pequena de parâmetros nas descontinuidades ensaiadas. Foram ensaiados três tipos diferentes de descontinuidades e cada uma tinha somente um parâmetro a ser estimado. Na Figura 52 é mostrado o pseudocódigo do algoritmo proposto.

```

1 CaracterizaDescontinuidade( $v(u,t)$ ,  $\lambda_1$ ,  $dimMin$ ,  $dimMax$ ,  $deltaDim$ )
2 início
3    $\mathbf{v} \leftarrow \text{vec}[v(u,t)]$ 
4   para cada  $j = \{ 'SDH', 'SPH', 'FBH' \}$  faça
5     para cada  $\Theta_i = \{ dimMin:deltaDim:dimMax \}$  faça
6        $\mathbf{H} \leftarrow \text{diag}[B(k_u, \omega)A_j(\omega, \Theta_i)]$ 
7        $\hat{\mathbf{f}}^{(0)} \leftarrow \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}$ 
8        $Q(\Theta_i, j) = \|\mathbf{v} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{f}}^{(0)}\|_2^2 + \lambda_1 \|\hat{\mathbf{f}}^{(0)}\|_1$ 
9     fim
10  fim
11   $\hat{\Theta} \leftarrow \{ \Theta_i | \min [Q(\Theta_i, j)] \}$ 
12  tipo de descontinuidade  $\leftarrow \{ j | \min [Q(\Theta_i, j)] \}$ 
13 fim

```

Figura 52 – Pseudocódigo do algoritmo de caracterização da descontinuidade baseado no método de mínimos quadrados não-lineares com restrição

Fonte: Autoria própria.

Os parâmetros  $dimMin$ ,  $dimMax$  e  $deltaDim$  definem a grade de busca das dimensões das descontinuidades.

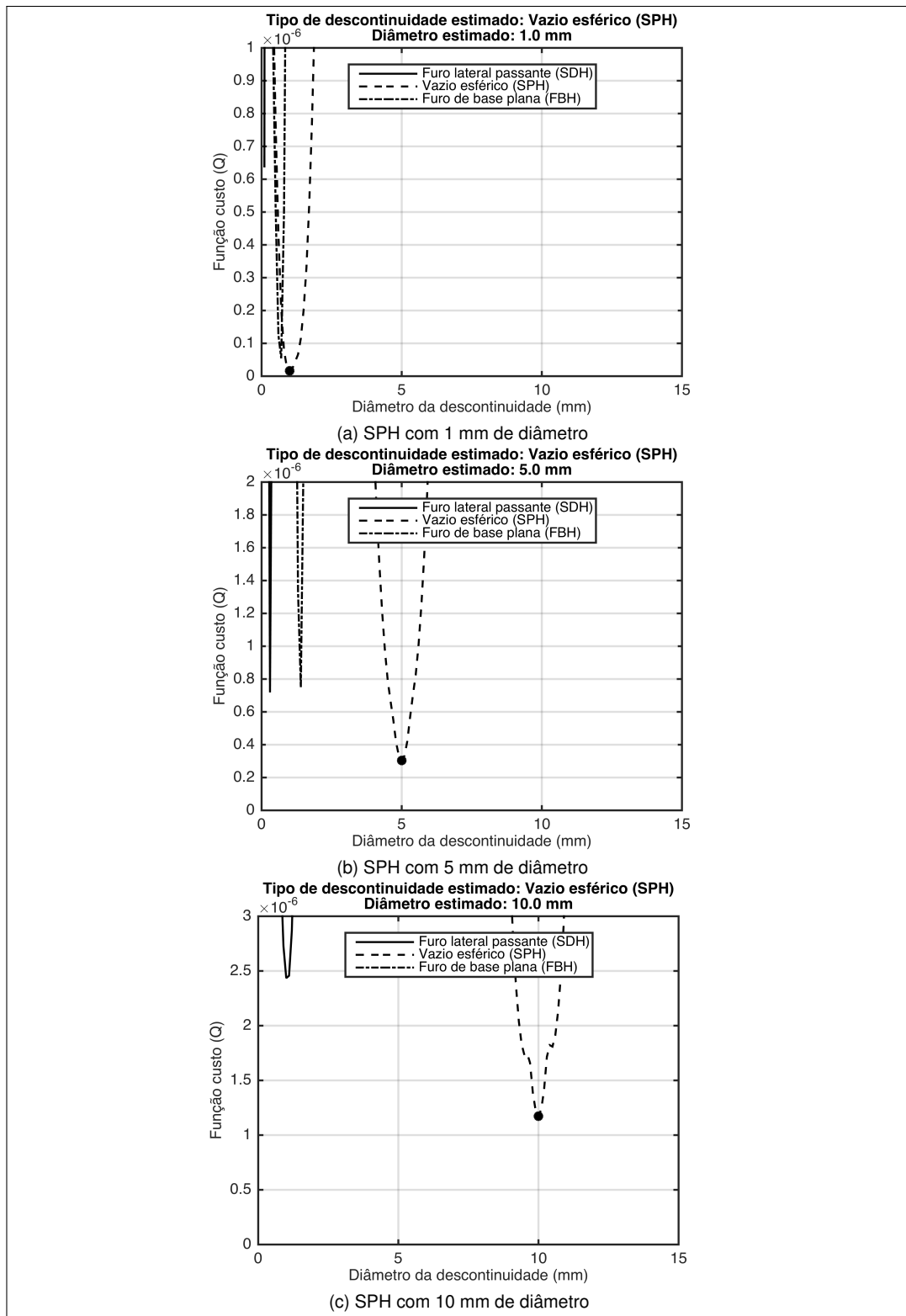
## 6.7 ENSAIOS PARA VALIDAÇÃO DO ALGORITMO DE CARACTERIZAÇÃO

O algoritmo da Figura 52 foi implementado no *MATLAB*<sup>®</sup>, e para avaliar o seu desempenho em caracterizar descontinuidades foram realizados dois tipos de ensaios. O primeiro ensaio tem o objetivo de avaliar o desempenho do algoritmo na caracterização de descontinuidades com tipos e dimensões diferentes. Nesse ensaio foram utilizados sinais *A-scan* simulados pela Eq. (95). O segundo ensaio visa a validação experimental do algoritmo, e faz a caracterização de descontinuidades existentes em três objetos metálicos diferentes.

### 6.7.1 ENSAIO COM DADOS SIMULADOS

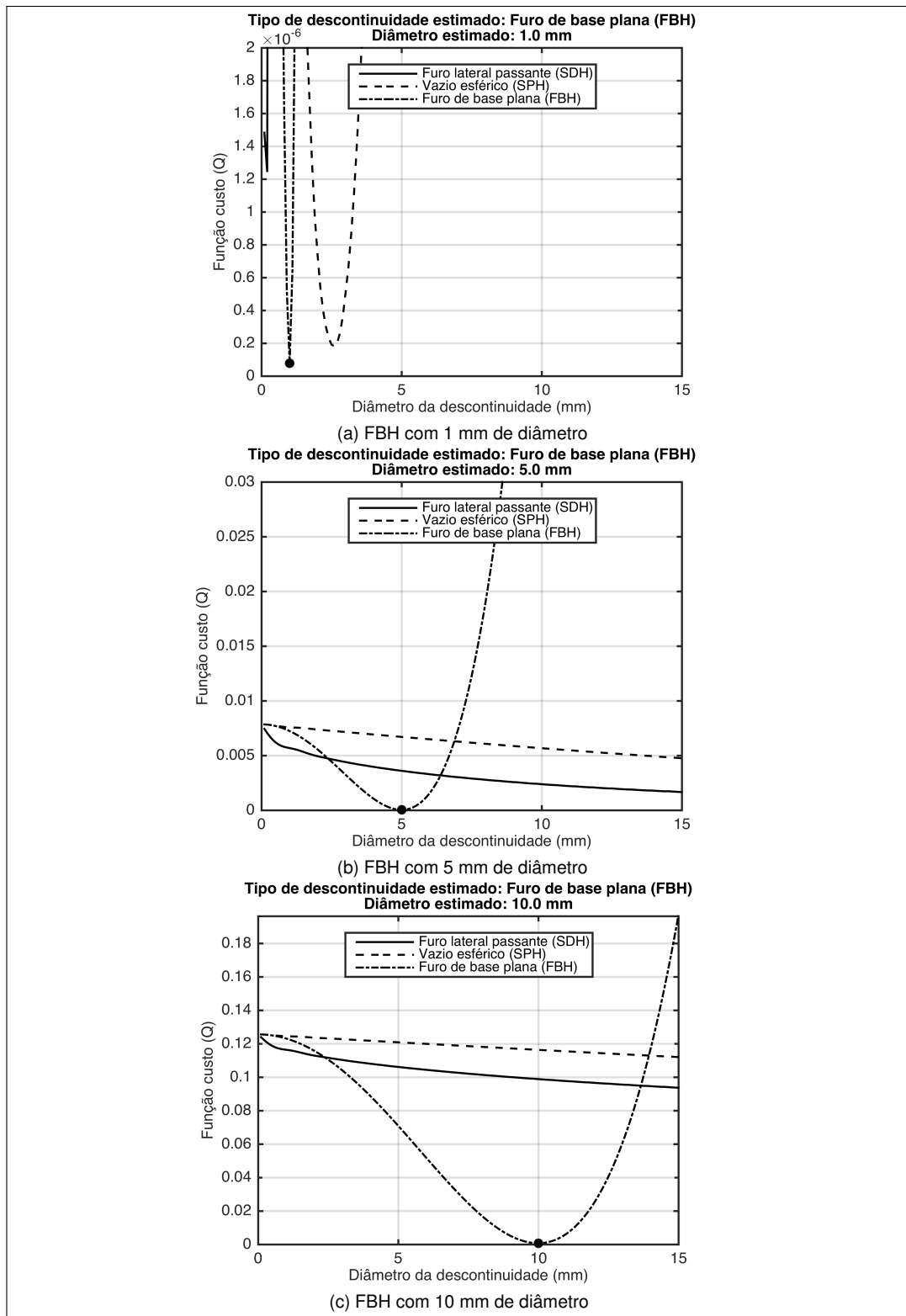
Nesse ensaio, o algoritmo para caracterização de descontinuidades foi testado com uma coleção de sinais *A-scan* gerados por simulação. Os tipos de descontinuidades utilizados nos testes foram vazio esférico, furo de base plana e furo lateral passante. Nos resultados apresentados, essas descontinuidades são identificadas, respectivamente por SPH, FBH e SDH. As equações que representam a amplitude de espalhamento dessas descontinuidades estão definidas na Seção 2.5. Em todas elas, o parâmetro que caracteriza a descontinuidade é o diâmetro. Para cada tipo de descontinuidade foram gerados dados simulados com três diâmetros diferentes: 1 mm, 5 mm e 10 mm. Os limites para o procedimento da busca em grade do diâmetro foram entre 0,1 mm e 15 mm, com passo de 0,1 mm. Um ruído branco gaussiano com relação sinal-ruído de 20 dB foi adicionado aos sinais *A-scan*. O valor do termo regularizador  $\lambda_1$  foi ajustado em  $1 \times 10^{-4}$ .

As Figuras 53, 54 e 55 mostram os resultados do ensaio de aplicação do algoritmo com dados simulados. Os resultados são apresentados na forma de gráficos, com o valor da função custo da Eq. (99) no eixo das ordenadas e o diâmetro das descontinuidades (parâmetro  $\Theta$ ) no eixo das abscissas. Como o algoritmo avalia três tipos de descontinuidades, todos os gráficos contém três curvas, identificadas por linhas de formatos diferentes. O ponto em destaque de cada gráfico indica o ponto de menor valor da função custo. Esse ponto indica o tipo de descontinuidade identificado e o valor estimado do diâmetro. Em todas as situações simuladas o algoritmo caracterizou as descontinuidades de forma correta.



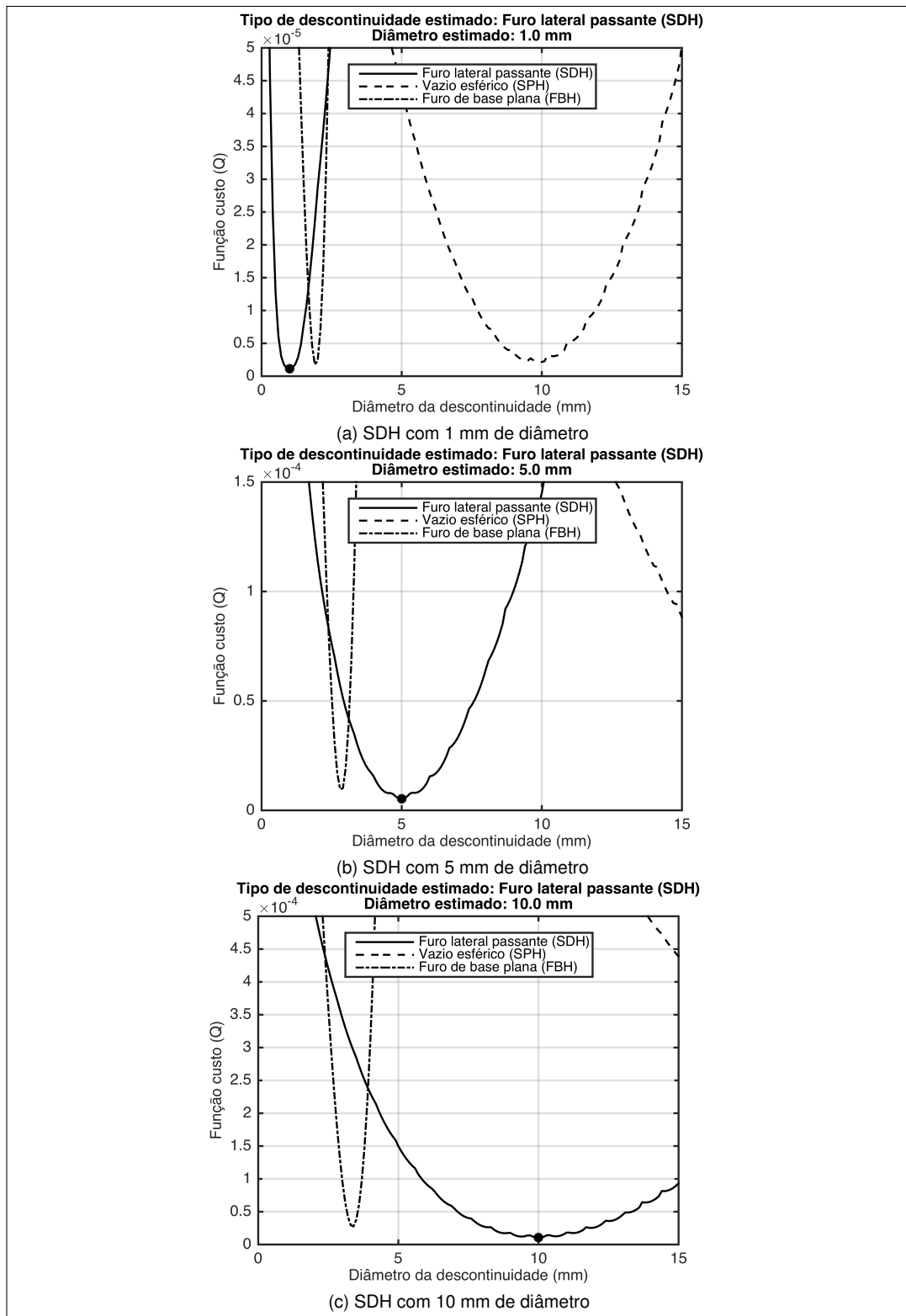
**Figura 53 – Gráficos com os resultados da aplicação do algoritmo para caracterização de descontinuidades aos dados simulados de vazios esféricos, com diâmetros de (a) 1 mm, (b) 5 mm e (c) 10 mm. O ponto em destaque indica o menor valor da função custo da Eq. (99). A curva a que pertence esse ponto indica o tipo de descontinuidade identificado e o valor no eixo das abscissas indica o diâmetro estimado.**

**Fonte: Autoria própria.**



**Figura 54 – Gráficos com os resultados da aplicação do algoritmo para caracterização de descontinuidades aos dados simulados de furos de base plana, com diâmetros de (a) 1 mm, (b) 5 mm e (c) 10 mm. O ponto em destaque indica o menor valor da função custo da Eq. (99). A curva a que pertence esse ponto indica o tipo de descontinuidade identificado e o valor no eixo das abscissas indica o diâmetro estimado.**

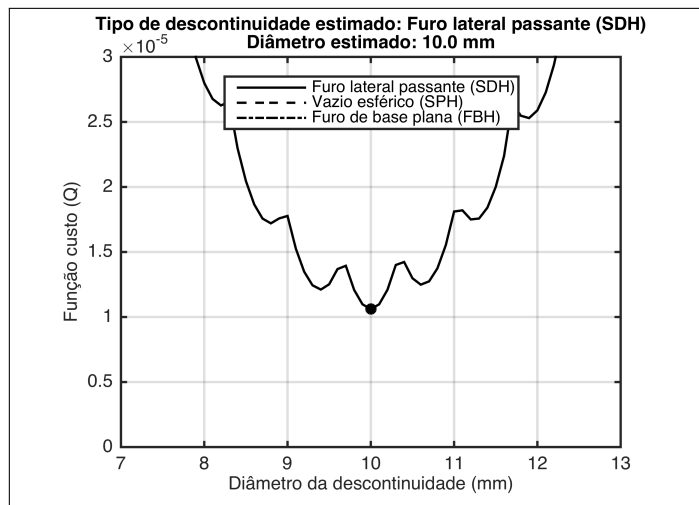
**Fonte: Autoria própria.**



**Figura 55 – Gráficos com os resultados da aplicação do algoritmo para caracterização de descontinuidades aos dados simulados de furos laterais passantes, com diâmetros de (a) 1 mm, (b) 5 mm e (c) 10 mm. O ponto em destaque indica o menor valor da função custo da Eq. (99). A curva a que pertence esse ponto indica o tipo de descontinuidade identificado e o valor no eixo das abscissas indica o diâmetro estimado.**

**Fonte: Autoria própria.**

A escolha do método de busca em grade, ao invés de métodos iterativos, para resolver o problema de mínimos quadrados não-lineares no algoritmo foi fundamental na obtenção desses resultados. A observação em detalhe do gráfico da função custo para um SDH com 10 mm de diâmetro, apresentado na Figura 56, mostra a existência de diversos pontos de mínimos locais. Se um método iterativo fosse utilizado, um valor inicial não apropriado do diâmetro da descontinuidade poderia fazer o algoritmo convergir para um desses mínimos locais, causando uma estimativa errada do parâmetro. Com a busca em grade, esse problema não ocorre.

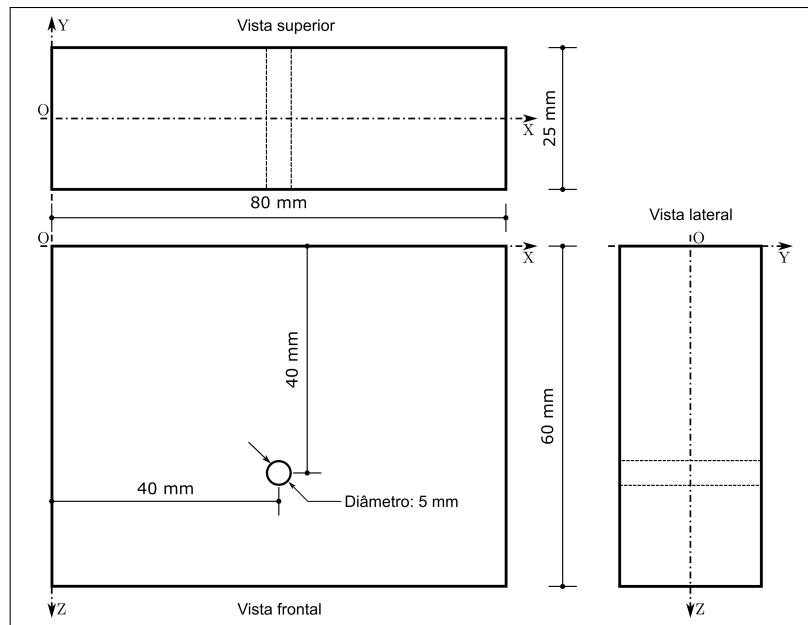


**Figura 56 – Detalhe do gráfico da função custo da Eq. (99) para uma descontinuidade do tipo furo lateral passante com 10 mm de diâmetro.**

**Fonte: autoria própria.**

### 6.7.2 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

A validação experimental do algoritmo foi realizada com os dados experimentais coletados durante a inspeção de três objetos metálicos, cada um contendo um furo lateral passante com dimensões diferentes. Os diâmetros dos furos laterais passantes em cada objeto são, respectivamente, 1 mm, 5 mm e 10 mm. As geometrias dos três objetos estão representadas pelas Figuras 24, 49 e 57.



**Figura 57 – Geometria da peça metálica com furo lateral passante de 5 mm de diâmetro**  
**Fonte: Autoria própria.**

Nesse ensaio, os limites para a busca em grade do diâmetro também foram ajustados entre 0,1 mm e 15 mm, com passo de 0,1 mm. Entretanto, houve uma modificação no procedimento para esses ensaios em relação ao ensaio com dados simulados. Não foi escolhido um valor único para o termo regularizador  $\lambda_1$ . O algoritmo foi aplicado diversas vezes nos mesmos dados medidos, mas com valores de  $\lambda_1$  distintos. Os resultados obtidos nesse procedimento são apresentados na Tabela 6. Cada célula da tabela indica o tipo de descontinuidade identificado pelo algoritmo e o valor do diâmetro estimado.

**Tabela 6 – Resultados obtidos na aplicação do algoritmo para caracterização de descontinuidades nos três objetos inspecionados durante o ensaio de validação experimental do algoritmo, variando o termo regularizador  $\lambda_1$ . Cada célula da tabela indica o tipo de descontinuidade identificado pelo algoritmo e o valor do diâmetro estimado.**

**Fonte: autoria própria.**

$\lambda_1$ ( $\times 10^{-3}$ )	<i>Objeto inspecionado</i>		
	<b>Objeto 1</b>	<b>Objeto 2</b>	<b>Objeto 3</b>
0	SPH, $\Theta = 10,3$ mm	SDH, $\Theta = 5,8$ mm	SDH, $\Theta = 11,6$ mm
0,1	SPH, $\Theta = 10,3$ mm	SDH, $\Theta = 5,8$ mm	SDH, $\Theta = 11,6$ mm
0,2	SPH, $\Theta = 10,3$ mm	SDH, $\Theta = 5,8$ mm	SDH, $\Theta = 11,6$ mm
0,5	SPH, $\Theta = 10,2$ mm	SDH, $\Theta = 5,1$ mm	SDH, $\Theta = 11,6$ mm
1	SDH, $\Theta = 1,0$ mm	SDH, $\Theta = 5,1$ mm	SDH, $\Theta = 10,9$ mm
2	SDH, $\Theta = 0,9$ mm	SDH, $\Theta = 5,1$ mm	SDH, $\Theta = 10,9$ mm
5	FBH, $\Theta = 1,8$ mm	SDH, $\Theta = 4,4$ mm	SDH, $\Theta = 8,8$ mm
10	FBH, $\Theta = 1,5$ mm	FBH, $\Theta = 2,6$ mm	SDH, $\Theta = 7,4$ mm
20	FBH, $\Theta = 0,9$ mm	FBH, $\Theta = 2,2$ mm	FBH, $\Theta = 2,7$ mm
50	FBH, $\Theta = 0,1$ mm	FBH, $\Theta = 0,1$ mm	FBH, $\Theta = 0,8$ mm

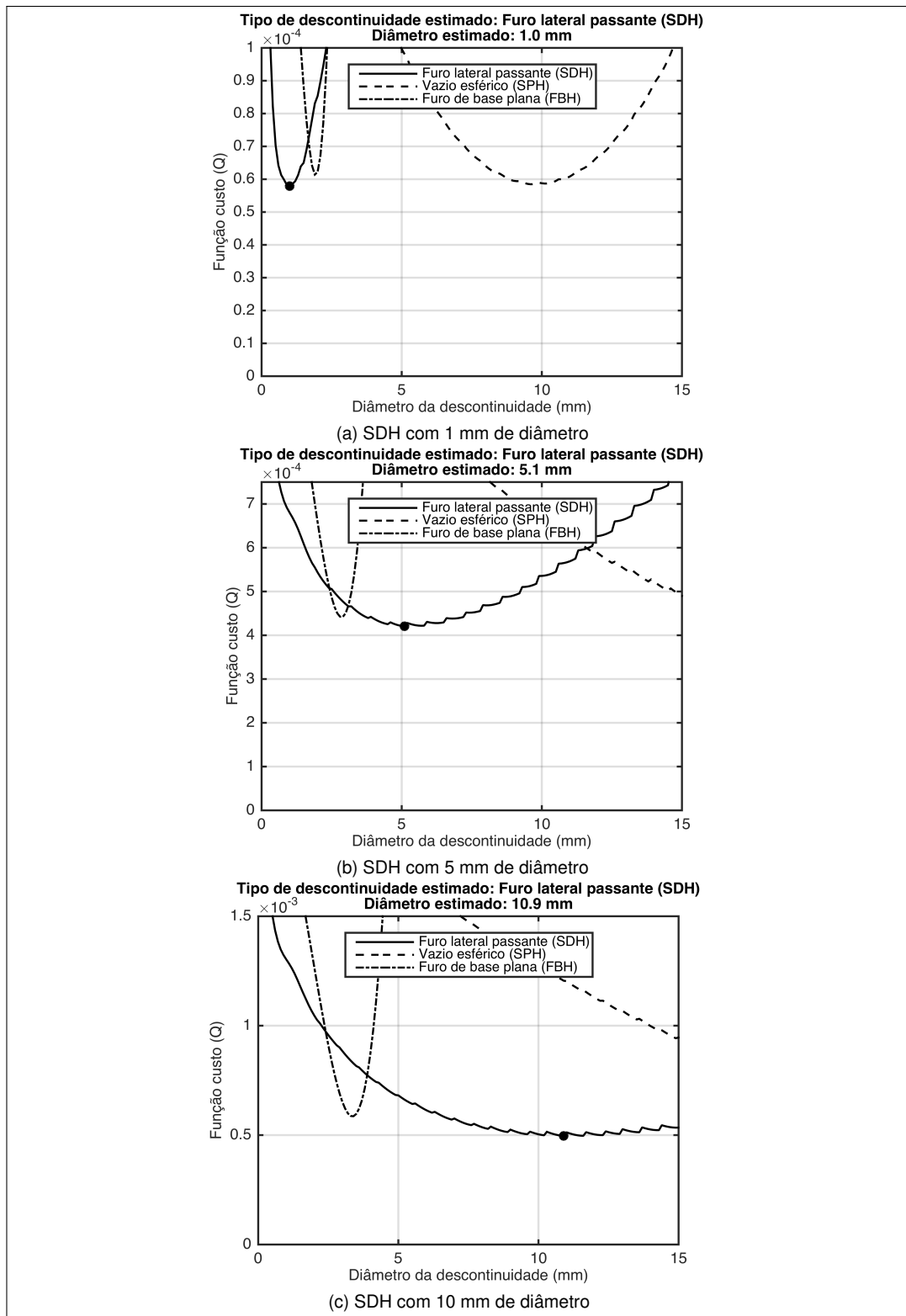
Analisando a primeira linha da Tabela 6, com  $\lambda_1 = 0$ , é possível perceber que, se a restrição de esparsidade da reconstrução não fosse inserida no problema de mínimos quadrados não-lineares, a caracterização de descontinuidades pequenas (objeto 1) seria errada. A medida que o valor de  $\lambda_1$  aumenta, a informação sobre a esparsidade torna-se mais significativa no cálculo da função custo da Eq. (99), fazendo com que o algoritmo consiga estimar corretamente tanto o tipo da descontinuidade como a sua dimensão. Entretanto, quando  $\lambda_1$  torna-se muito grande, o valor da função custo passa a indicar somente a medida da esparsidade da reconstrução, e o algoritmo passa a falhar em suas estimativas.

O algoritmo apresentou o melhor resultado em estimar as descontinuidades com  $\lambda_1 = 1 \times 10^{-3}$ , conforme indica a linha em destaque na Tabela 6. Esse parâmetro é, conforme a definição da Seção 3.3, um parâmetro de regularização do algoritmo. Sendo assim, a influência do valor para  $\lambda_1$  no algoritmo é similar a encontrada com o parâmetro de regularização  $\lambda$  no algoritmo UTSR. Portanto, a escolha de  $\lambda_1 = 1 \times 10^{-3}$  está relacionada com a relação sinal-ruído dos sinais *A-scan* coletados pelo sistema de medição.

A Figura 58 apresenta os resultados da aplicação do algoritmo nos dados experimentais das três peças inspecionadas, com  $\lambda_1 = 1 \times 10^{-3}$ . Os resultados estão no mesmo formato dos resultados apresentados para os ensaios com dados simulados. Comparando os gráficos das Figuras 55 e 58 percebe-se que todos eles são similares, indicando a validade tanto do modelo como do algoritmo.

Da mesma forma que no ensaio com dados simulados, o gráfico da função custo para os SDHs com 5 e 10 mm de diâmetro apresentam diversos pontos de mínimos locais. Esses pontos podem levar a problemas de convergência se for utilizado algum método iterativo para resolver o problema de mínimos quadrados não-linear.





**Figura 58 – Gráficos com os resultados da aplicação do algoritmo para caracterização de descontinuidades aos dados experimentais de furos laterais passantes, com diâmetros de (a) 1 mm, (b) 5 mm e (c) 10 mm. O ponto em destaque indica o menor valor da função custo da Eq. (99). A curva a que pertence esse ponto indica o tipo de descontinuidade identificado e o valor no eixo das abscissas indica o diâmetro estimado.**

**Fonte: Autoria própria.**

## 6.8 CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou uma abordagem nova para o problema de identificar descontinuidades dentro de objetos metálicos a partir de sinais *A-scan*. Por essa abordagem, o problema de identificação de descontinuidades é dividido em dois subproblemas: (I) localização do centro geométrico da descontinuidade e (II) caracterização com relação ao formato, dimensões e orientação.

Nessa abordagem, a localização do centro geométrico da descontinuidade é definida na forma de uma função  $f(\vec{\mathbf{r}})$ , cujo domínio são os pontos pertencentes a ROI do objeto. A função  $f(\vec{\mathbf{r}})$  é esparsa por definição, pois seu valor é 1 no ponto da ROI do centro da descontinuidade e 0 para os demais pontos. Assim, o algoritmo UTSR pode ser utilizado para resolver o problema de localização da descontinuidade. Entretanto, para que isso seja possível, o termo da amplitude de espalhamento  $A(\omega, \Theta)$ , que contém as características da descontinuidade, é incluído no modelo  $\mathbf{H}$  do sistema. Isso leva a necessidade de se conhecer as características da descontinuidade antes de se localizar seu centro.

Os ensaios com dados simulados, bem como a validação experimental, mostraram que o algoritmo UTSR consegue localizar de forma adequada a posição do centro geométrico de descontinuidades. Entretanto, isso somente ocorre quando a descontinuidade está corretamente caracterizada no modelo  $\mathbf{H}$  pela inclusão do termo  $A(\omega, \Theta)$  correto. Mas, encontrar o termo  $A(\omega, \Theta)$  adequado é o segundo subproblema. Então, a identificação de descontinuidades, por essa abordagem, pode ser classificada como um problema de *deconvolução cega*, pois é necessário encontrar tanto  $\mathbf{H}$  quanto  $f(\vec{\mathbf{r}})$  a partir de um conjunto de medidas  $v(u, t)$ .

Para resolver o segundo subproblema, optou-se pela estratégia de identificação do modelo  $\mathbf{H}$  *a priori*. Essa escolha foi baseada em duas características existentes no problema: (I) sabe-se que a solução ideal para  $f(\vec{\mathbf{r}})$  é esparsa e (II) o modelo  $\mathbf{H}$  está modelado em formas paramétricas conhecidas. Com base nessas características, foi desenvolvido um algoritmo para caracterização de descontinuidades a partir do método dos mínimos quadrados não-lineares. Esse algoritmo incorpora a informação prévia da esparsidade de  $f(\vec{\mathbf{r}})$  com um termo regulador que utiliza a norma  $l_1$ . O algoritmo foi implementado no *MATLAB*<sup>®</sup> e apresentou resultados satisfatórios, tanto nos ensaios com dados simulados como na validação experimental.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo que possa identificar uma descontinuidade interna em uma peça a partir dos sinais *A-scan* obtidos durante um END. A identificação da descontinuidade corresponde a caracterizá-la em relação a sua forma geométrica, orientação dentro da peça, dimensionamento e localização. A proposta apresentada neste trabalho para o desenvolvimento desse algoritmo é baseada na resolução de problemas inversos, sendo que a modelagem do problema de identificação utiliza uma abordagem inédita. Nessa nova abordagem, o problema de identificação é subdividido em dois subproblemas. O primeiro é o problema de localização do centro da descontinuidade, que é tratado como um problema inverso de reconstrução de imagens esparsas. O segundo é o problema de caracterização da descontinuidade, tratado como um problema inverso de identificação de modelo. Com a análise dos resultados obtidos em quatro ensaios verificou-se que essa abordagem é válida.

Para que o objetivo principal do trabalho seja atingido foram definidos objetivos secundários. Todos esses objetivos foram implementados, testados e validados. Assim, a seguir são listadas as conclusões obtidas a partir da análise dos resultados dos ensaios de validação dos objetivos cumpridos e as perspectivas nas futuras pesquisas que podem dar prosseguimento a este trabalho.

A construção do sistema de medição e aquisição para END por ultrassom foi bem sucedida. Com o sistema construído foi possível efetuar procedimentos de varredura lateral em peças metálicas, com a aquisição sincronizada dos sinais *A-scan* em uma janela de aquisição de 25  $\mu$ s e período de amostragem de 0,02  $\mu$ s. O sistema de movimentação atende de forma satisfatória o requisito de posicionar o transdutor em intervalos de 1 mm. No futuro pretende-se realizar ensaios com períodos menores de amostragem espacial, tal como 0,5 mm. Com isso espera-se diminuir o problema do centro da descontinuidade não coincidir com a grade de aquisição, o que pode levar a soluções do problema de localização com indicações duvidosas.

A modelagem do problema de identificação no formato de um problema inverso foi separada em duas partes: o modelo do sistema de medição e o modelo da descontinuidade. O sistema de medição é modelado, de maneira analítica, como um sistema linear invariante no tempo. Apesar dessa abordagem ser uma aproximação, já que alguns dos elementos do sistema de medição são linearizados, ela mostrou-se adequada. Isso foi comprovado pela comparação feita entre um sinal *A-scan* simulado pelo modelo e um sinal medido. A diferença encontrada entre eles não chegou a afetar os resultados obtidos pelos algoritmos que utilizaram esse modelo. Uma vantagem obtida pelo uso do modelo analítico é a possibilidade de implementar a resposta do sistema de medição como um operador, na forma de função e não como matriz. Isso permite a implementação mais eficiente dos algoritmos de reconstrução no *MATLAB*<sup>®</sup>. Com relação ao modelo das descontinuidades, o uso das equações aproximadas de Kirchhoff para a amplitude de espalhamento auxiliam na definição dos parâmetros que devem ser estimados na resolução do problema de caracterização, já que os parâmetros estão diretamente relacionados com as características físicas desejadas, orientação e dimensões.

O algoritmo UTSR proposto demonstrou ter um desempenho em reconstruir imagens esparsas muito melhor se comparado com os algoritmos tradicionais. Essa característica indica que ele é um método adequado para resolver o problema de localização da descontinuidade. Isso foi comprovado pelos resultados dos ensaios da Seção 6.3. Além disso, a análise dos ensaios realizados com o algoritmo UTSR nas Seções 5.3, 5.4 e 6.3 possibilitou concluir que:

- a implementação dos operadores direto e adjunto da resposta do sistema de medição, combinada com a amplitude de espalhamento da descontinuidade, como funções funciona de forma adequada;
- a escolha do parâmetro de regularização utilizando a abordagem descrita em Zibetti et al. (2008) foi bem sucedida;
- apesar do bom desempenho obtido nas soluções fornecidas pelo algoritmo UTSR, uma pesquisa futura sobre outros métodos de resolução desse algoritmo, diferentes do IRLS, pode levar a resultados melhores com relação a eficiência computacional.

Com a análise dos resultados apresentados nas Seções 6.5, observou-se que a alteração na expressão da amplitude de espalhamento no modelo do problema de reconstrução causa mudanças nas soluções obtidas por um mesmo conjunto de medições. Os modelos “errados” levam a soluções “erradas”. O mesmo ocorre quando é utilizada a expressão da amplitude de espalhamento correta mas com parâmetros físicos da descontinuidade incorretos. Com isso é

possível concluir como verdadeira a hipótese de que a utilização de um termo  $A(\omega, \Theta)$  incorreto faz com que o algoritmo UTSR encontre um ponto central “falso” para a descontinuidade.

A opção por incluir no modelo do sistema de medição a expressão da amplitude de espalhamento permite tratar o problema de identificação da descontinuidade como um problema de *deconvolução cega* e, devido as características específicas do problema, pode ser resolvido com a estratégia de identificação do modelo *a priori*. Essa abordagem permite a utilização de algoritmos mais simples para caracterização da descontinuidade. Assim, foi escolhido o método de mínimos quadrados não-lineares com regularização não quadrática para caracterizar a descontinuidade. A escolha dessa técnica foi adequada, conforme demonstram os resultados dos ensaios apresentados na Seção 6.7.

De forma geral, é possível concluir que as técnicas de resolução de problemas inversos podem ser utilizadas com sucesso, tanto no aprimoramento como na criação de métodos para análise de sinais *A-scan* nos END por ultrassom. Para isso é necessária a modelagem correta do sistema de inspeção por ultrassom e a definição apropriada do problema a ser resolvido. Nesse aspecto, o conhecimento de algumas características das soluções procuradas é importante, pois isso permite que esse conhecimento seja incluído na definição do problema. A inclusão desses conhecimentos prévios podem auxiliar os algoritmos de resolução do problema em diversos aspectos, tais como a simplificação na implementação ou a aceleração na execução.

Apesar dos objetivos do trabalho terem sido atingidos e os resultados obtidos serem satisfatórios, é possível continuar essa pesquisa para buscar melhorias em diversos pontos. A seguir são listados alguns desses pontos:

- O modelo do sistema de medição apresenta diversas aproximações, tais como os efeitos da atenuação e de dispersão das ondas ultrassônicas durante a propagação. Esses efeitos podem ser incluídos no modelo do sistema de medição utilizando a abordagem descrita em Carcreff et al. (2014).
- A melhora no desempenho computacional do algoritmo UTSR. Isso pode ser conseguido pela substituição do método IRLS para resolver o problema de regularização não-quadrática. Em Zibulevsky e Elad (2010) são apresentados outros métodos para a resolução de problemas de otimização regularizados com normas não-quadráticas e também técnicas para aceleração desses algoritmos, tais como o *line search*, o *sequential subspace optimization* (SESOP) e *fast iterative shrinkage-thresholding algorithm* (FISTA).
- O algoritmo para caracterização de descontinuidades deve ser testado com dados experimentais para descontinuidades do tipo FBH e vazios esféricos.

- O procedimento de busca em grade, adotado no algoritmo de caracterização de descontinuidades, pode ser substituído por algum método iterativo. Entretanto, essa modificação deve ser bem estudada devido a existência de diversos pontos de mínimos locais verificados na função custo para as descontinuidades do tipo SDH.

## REFERÊNCIAS

- ABENDI. **Ensaio Não Destrutivos e Inspeção**. Setembro 2014. Disponível em: <<http://www.abendi.org.br/abendi/default.aspx?mn=709&c=17&s=&friendly=>>.
- ADLER, L.; LEWIS, D. Scattering of a broadband ultrasonic pulse by discontinuities. **Sonics and Ultrasonics, IEEE Transactions on**, v. 23, n. 5, p. 351–355, 1976. ISSN 0018-9537.
- ANDREUCCI, R. **Ensaio por Ultrassom**. São Paulo: Associação Brasileira de Ensaio Não Destrutivos e Inspeção — ABENDI, 2011.
- ARAKAWA, T.; HIROSE, S.; SENDA, T. The detection of weld cracks using ultrasonic testing. **NDT International**, v. 18, n. 1, p. 9 – 16, 1985. ISSN 0308-9126.
- BABOROVSKY, V.; MARSH, D.; SLATER, E. Schlieren and computer studies of the interaction of ultrasound with defects. **Non-Destructive Testing**, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 200–207, 1973.
- BARRETT, H. H.; MYERS, K. J. Foundations of image science. **Foundations of Image Science**, by Harrison H. Barrett, Kyle J. Myers, pp. 1584. ISBN 0-471-15300-1. **Wiley-VCH, October 2003.**, v. 1, 2003.
- BAZULIN, E. Reconstruction of the images of reflectors from ultrasonic echo signals using the maximum-entropy method. **Russian Journal of Nondestructive Testing**, Springer, v. 49, n. 1, p. 26–48, 2013.
- BERNUS, L. von; MOHR, F.; SCHMEIDL, T. Sizing and characterization of ultrasonic indications using imaging techniques. **Nuclear engineering and design**, Elsevier, v. 144, n. 1, p. 177–198, 1993.
- BETTAYEB, F.; RACHEDI, T.; BENBARTAOUI, H. An improved automated ultrasonic nde system by wavelet and neuron networks. **Ultrasonics**, Elsevier, v. 42, n. 1, p. 853–858, 2004.
- BISHOP, T. et al. Blind image deconvolution: problem formulation and existing approaches. In: CAMPISI, P.; EGIAZARIAN, K. (Ed.). **Blind image deconvolution: theory and applications**. Boca Raton: Boca Raton, FL: CRC Press, 2007. cap. 1, p. 1–41.
- BJÖRCK, A. **Numerical methods for least squares problems**. Philadelphia, PA, USA: Siam, 1996.
- BOVIK, A. C. (Ed.). **Handbook of Image and Video Processing**. 1a. ed. Orlando, FL, USA: Academic Press, Inc., 2000.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2009.
- BURCKHARDT, C.; GRANDCHAMP, P.-A.; HOFFMANN, H. Methods for increasing the lateral resolution of b-scan. In: **Acoustical holography**. [S.l.]: Springer, 1974. p. 391–413.

CARCREFF, E. et al. A linear model approach for ultrasonic inverse problems with attenuation and dispersion. **Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 61, n. 7, p. 1191–1203, July 2014. ISSN 0885-3010.

CASE, T.; WAAG, R. Flaw identification from time and frequency features of ultrasonic waveforms. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 43, n. 4, p. 592–600, July 1996. ISSN 0885-3010.

CETIN, M.; KARL, W. Feature-enhanced synthetic aperture radar image formation based on nonquadratic regularization. **Image Processing, IEEE Transactions on**, v. 10, n. 4, p. 623–631, Apr 2001. ISSN 1057-7149.

CEZARO, A. D.; CEZARO, F. T. D. **Problemas Inversos em Tomografias**. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computação — SBMAC, 2012. (Notas em Matemática Aplicada, v. 59).

CHANG, Y.-F.; CHERN, C.-C. Frequency-wavenumber migration of ultrasonic data. **Journal of nondestructive evaluation**, Springer, v. 19, n. 1, p. 1–10, 2000.

CHEN, J. et al. An ultrasonic methodology for determining the mechanical and geometrical properties of a thin layer using a deconvolution technique. **Ultrasonics**, Elsevier, v. 53, n. 7, p. 1377–1383, 2013.

CHIAO, R. Y.; THOMAS, L. J. Analytic evaluation of sampled aperture ultrasonic imaging techniques for nde. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 41, n. 4, p. 484–493, 1994.

CLAERBOUT, J. F. **Earth soundings analysis: Processing versus inversion**. [S.l.]: Blackwell Scientific Publications Cambridge, Massachusetts, USA, 2004.

CORL, P. D.; GRANT, P. M.; KINO, G. A digital synthetic focus acoustic imaging system for nde. In: **1978 Ultrasonics Symposium**. [S.l.: s.n.], 1978. p. 263–268.

DEMIRLI, R.; SANIIE, J. Model-based estimation of ultrasonic echoes. part i: Analysis and algorithms. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 48, n. 3, p. 787–802, 2001.

DEMIRLI, R.; SANIIE, J. Model-based estimation of ultrasonic echoes. part ii: Nondestructive evaluation applications. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 48, n. 3, p. 803–811, 2001.

DITCHBURN, R.; BURKE, S.; SCALA, C. Ndt of welds: state of the art. **NDT & E International**, v. 29, n. 2, p. 111 – 117, 1996. ISSN 0963-8695.

DOCTOR, S.; HALL, T.; REID, L. Saft — the evolution of a signal processing technology for ultrasonic testing. **NDT International**, v. 19, n. 3, p. 163 – 167, 1986. ISSN 0308-9126.

DONOHO, D. L. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal  $l_1$ -norm solution is also the sparsest solution. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 59, n. 6, p. 797–829, 2006. ISSN 1097-0312.



DOYLE, P.; SCALA, C. Crack depth measurement by ultrasonics: a review. **Ultrasonics**, Elsevier, v. 16, n. 4, p. 164–170, 1978.

DRINKWATER, B. W.; WILCOX, P. D. Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review. **NDT & E International**, v. 39, n. 7, p. 525 – 541, 2006. ISSN 0963-8695.

ELAD, M. **Sparse and redundant representations: from theory to applications in signal and image processing**. New York, NY, USA: Springer, 2010.

ERSOY, O. K. **Diffraction, fourier optics and imaging**. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2007.

FREDERICK, J.; SEYDEL, J.; FAIRCHILD, R. Improved ultrasonic nondestructive testing of pressure vessels first annual report. **Nuclear Regulatory Commission Report NUREG-O007**, v. 1, 1976.

GAO, D.; LIU, Y. xiang; ZHANG, X. guang. Binary-tree multi-classifier for welding defects and its application based on svm. In: **Intelligent Control and Automation, 2006. WCICA 2006. The Sixth World Congress on**. [S.l.: s.n.], 2006. v. 2, p. 8509 –8513.

GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier optics**. New York, NY, USA: The McGraw-Hill Companies, 1996.

GOUGH, P. T.; HAWKINS, D. W. Unified framework for modern synthetic aperture imaging algorithms. **International journal of imaging systems and technology**, New York: John Wiley & Sons, c1989-, v. 8, n. 4, p. 343–358, 1997.

GUARNERI, G. A.; JUNIOR, F. N.; ARRUDA, L. V. R. de. Comparative evaluation of artificial neural networks models to classify weld flaws using pulse-echo ultrasonic signals. In: **22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)**. [S.l.]: ABCM, 2013. p. 2126 — 2134.

GUARNERI, G. A. et al. A sparse reconstruction algorithm for ultrasonic images in nondestructive testing. **Sensors**, v. 15, n. 4, p. 9324–9343, 2015. ISSN 1424-8220. Disponível em: <<http://www.mdpi.com/1424-8220/15/4/9324>>.

HANSEN, P. C. **Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion**. Philadelphia, PA, USA: Siam, 1998.

HANSON, K. M.; WECKSUNG, G. W. Local basis-function approach to computed tomography. **Appl. Opt.**, OSA, v. 24, n. 23, p. 4028–4039, Dec 1985.

HELLIER, C. **Handbook of Nondestructive Evaluation**. New York, NY, USA: McGraw-hill, 2003. (McGraw-Hill handbooks). ISBN 9780070281219.

HOLMES, C.; DRINKWATER, B. W.; WILCOX, P. D. Post-processing of the full matrix of ultrasonic transmit–receive array data for non-destructive evaluation. **NDT & E International**, Elsevier, v. 38, n. 8, p. 701–711, 2005.

HUNTER, A. J.; DRINKWATER, B. W.; WILCOX, P. D. The wavenumber algorithm for full-matrix imaging using an ultrasonic array. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 55, n. 11, p. 2450–2462, 2008.

- KARL, W. C. Regularization in image restoration and reconstruction. In: BOVIK, A. C. (Ed.). **Handbook of Image and Video Processing**. Orlando, FL, USA: Academic Press, 2000. cap. 3.6, p. 141–160.
- KAY, S. M. **Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory**. [S.l.]: Prentice Hall, 1993.
- KHELIL, M. et al. Classification of defects by the svm method and the principal component analysis (pca). **World Acad. Sci. Eng. Technol**, v. 9, p. 226–231, 2005.
- KIM, Y. H.; SONG, S.-J.; KIM, J. Y. A new technique for the identification of ultrasonic flaw signals using deconvolution. **Ultrasonics**, Elsevier, v. 41, n. 10, p. 799–804, 2004.
- KINO, G. et al. Real time synthetic aperture imaging system. In: **1980 Ultrasonics Symposium**. [S.l.: s.n.], 1980. p. 722 – 731.
- KINO, G. S. Acoustic imaging for nondestructive evaluation. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 67, n. 4, p. 510–525, 1979.
- KINO, G. S. **Acoustic waves: devices, imaging, and analog signal processing**. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- KRAMER, S. Ultrasonic weld defect sizing using the synthetic aperture focusing technique. In: **Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation**. [S.l.]: Springer, 1989. p. 1995–2002.
- KRAUT, E. Review of theories of scattering of elastic waves by cracks. **Sonics and Ultrasonics, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 23, n. 3, p. 162–167, 1976.
- KUNDUR, D.; HATZINAKOS, D. Blind image deconvolution. **Signal Processing Magazine, IEEE**, v. 13, n. 3, p. 43–64, May 1996. ISSN 1053-5888.
- LAVARELLO, R.; KAMALABADI, F.; O'BRIEN, W. D. A regularized inverse approach to ultrasonic pulse-echo imaging. **Medical Imaging, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 25, n. 6, p. 712–722, 2006.
- LI, M.; HAYWARD, G. Ultrasound nondestructive evaluation (nde) imaging with transducer arrays and adaptive processing. **Sensors**, Molecular Diversity Preservation International, v. 12, n. 1, p. 42–54, 2011.
- LIAO, T. Classification of welding flaw types with fuzzy expert systems. **Expert Systems with Applications**, v. 25, n. 1, p. 101 – 111, 2003. ISSN 0957-4174.
- LIM, J. S. **Two-dimensional Signal and Image Processing**. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1990. ISBN 0-13-935322-4.
- LINGVALL, F.; OLOFSSON, T. High resolution ultrasonic array imaging using positivity constraints on the scattering amplitudes. In: **Ultrasonics Symposium, 2005 IEEE**. [S.l.: s.n.], 2005. v. 1, p. 548–551. ISSN 1051-0117.
- LINGVALL, F.; OLOFSSON, T.; STEPINSKI, T. Synthetic aperture imaging using sources with finite aperture: Deconvolution of the spatial impulse response. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 114, p. 225, 2003.

- MADSEN, K.; NIELSEN, H. B.; TINGLEFF, O. **Methods for Non-Linear Least Squares Problems**. 2004.
- MARGRAVE, F. et al. The use of neural networks in ultrasonic flaw detection. **Measurement**, Elsevier, v. 25, n. 2, p. 143–154, 1999.
- MARGRAVE, G. F. Numerical methods of exploration seismology with algorithms in matlab. **The University of Calgary Publ**, 2003.
- MARTÍN-ARGUEDAS, C. et al. An ultrasonic imaging system based on a new soft approach and a gpu beamformer. **Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 59, n. 7, p. 1402–1412, July 2012. ISSN 0885-3010.
- MAYER, K. et al. Three-dimensional imaging system based on fourier transform synthetic aperture focusing technique. **Ultrasonics**, Elsevier, v. 28, n. 4, p. 241–255, 1990.
- MIAO, C. et al. A svm classifier combined with pca for ultrasonic crack size classification. In: **Electrical and Computer Engineering, 2008. CCECE 2008. Canadian Conference on**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 001627 –001630. ISSN 0840-7789.
- MOURA, E. P. et al. Pattern recognition of weld defects in preprocessed tofd signals using linear classifiers. **Journal of Nondestructive Evaluation**, Springer Netherlands, v. 23, p. 163–172, 2004. ISSN 0195-9298.
- MÜLLER, W.; SCHMITZ, V.; SCHÄFER, G. Reconstruction by the synthetic aperture focussing technique (saft). **Nuclear Engineering and Design**, Elsevier, v. 94, n. 3, p. 393–404, 1986.
- NARDUZZI, C. Inverse filtering with signal-adaptive constraints. **IEEE transactions on instrumentation and measurement**, Institute of Electrical and Electronics Engineers, v. 54, n. 4, p. 1553–1559, 2005.
- NORTON, S. J.; LINZER, M. Ultrasonic reflectivity imaging in three dimensions: exact inverse scattering solutions for plane, cylindrical, and spherical apertures. **Biomedical Engineering, IEEE Transactions on**, IEEE, n. 2, p. 202–220, 1981.
- NUNES, T. M. et al. Automatic microstructural characterization and classification using artificial intelligence techniques on ultrasound signals. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, 2012.
- OLOFSSON, T.; WENNERSTROM, E. Sparse deconvolution of b-scan images. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 54, n. 8, p. 1634–1641, August 2007. ISSN 0885-3010.
- OLYMPUS. **Panametrics — NDT Ultrasonic Transducers for Nondestructive Testing**. 2013. [http://www.olympus-ims.com/pt/.downloads/download/?file=285213009&fl=en\\_US](http://www.olympus-ims.com/pt/.downloads/download/?file=285213009&fl=en_US).
- OPPENHEIM, A. V. **Sinais e sistemas**. São Paulo, SP, Brasil: Pearson, 2010.
- PITA, R. G. et al. Ultrasonic flaw detection using radial basis function networks (rbfns). **Ultrasonics**, Elsevier, v. 42, n. 1, p. 361–365, 2004.

- POLIKAR, R. et al. Frequency invariant classification of ultrasonic weld inspection signals. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 45, n. 3, p. 614–625, may 1998. ISSN 0885-3010.
- PORTZGEN, N.; GISOLF, D.; BLACQUIERE, G. Inverse wave field extrapolation: A different ndi approach to imaging defects. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 54, n. 1, p. 118–127, 2007.
- PRINE, D. Synthetic aperture ultrasonic imaging. In: **Proceedings of the engineering applications of holography symposium**. [S.l.: s.n.], 1972. v. 287.
- QIDWAI, U.; BETTAYEB, M. Fuzzy time-frequency defect classifier for ndt applications. In: **Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 2009 IEEE International Symposium on**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 303–309.
- RAILLON, R. et al. Application of tandem techniques with contact mono-elements or phased array probes: Simulation and experiments. In: **AIP Conference Proceedings**. [S.l.: s.n.], 2005. v. 760, p. 914.
- RAMUHALLI, P. et al. Multichannel signal processing methods for ultrasonic nondestructive evaluation. In: **Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop Proceedings, 2002**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 229–233.
- RAVANBOD, H. Application of neuro-fuzzy techniques in oil pipeline ultrasonic nondestructive testing. **NDT & E International**, v. 38, n. 8, p. 643–653, 2005. ISSN 0963-8695.
- REGIŃSKA, T. A regularization parameter in discrete ill-posed problems. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 17, n. 3, p. 740–749, 1996.
- RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 60, n. 1, p. 259–268, 1992.
- SAMBATH, S.; NAGARAJ, P.; SELVAKUMAR, N. Automatic defect classification in ultrasonic NDT using artificial intelligence. **Journal of Nondestructive Evaluation**, v. 30, p. 20–28, 2011.
- SATYANARAYAN, L. et al. Application of a matched filter approach for finite aperture transducers for the synthetic aperture imaging of defects. **Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 57, n. 6, p. 1368–1382, June 2010. ISSN 0885-3010.
- SCHMERR, L. W. **Fundamentals of ultrasonic nondestructive evaluation: a modeling approach**. New York, NY, USA: Plenum Press, 1998.
- SCHMERR, L. W.; SONG, S.-J. **Ultrasonic nondestructive evaluation systems: models and measurements**. New York, NY, USA: Springer, 2007.
- SCHMERR, L. W.; SONG, S.-J.; SEDOV, A. Ultrasonic flaw sizing inverse problems. **Inverse problems**, IOP Publishing, v. 18, n. 6, p. 1775, 2002.
- SCHMITZ, V.; CHAKHLOV, S.; MÜLLER, W. Experiences with synthetic aperture focusing technique in the field. **Ultrasonics**, Elsevier, v. 38, n. 1, p. 731–738, 2000.

- SEDOV, A.; SCHMERR, L. W. The time domain elastodynamic kirchhoff approximation for cracks: The inverse problem. **Wave Motion**, Elsevier Science, v. 8, 1986.
- SEYDEL, J. Ultrasonic synthetic-aperture focusing techniques in ndt. **Research techniques in nondestructive testing.**, v. 6, p. 1–47, 1982.
- SHAKIBI, B. et al. Resolution enhancement of ultrasonic defect signals for crack sizing. **NDT & E International**, 2012. ISSN 09638695.
- SHERWIN, C. W.; RUINA, J. P.; RAWCLIFFE, R. D. Some early developments in synthetic aperture radar systems. **Military Electronics, IRE Transactions on**, MIL-6, n. 2, p. 111–115, April 1962. ISSN 0096-2511.
- SHIEH, H. M. et al. Resolution enhancement of nondestructive testing from b-scans. **International Journal of Imaging Systems and Technology**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 22, n. 3, p. 185–193, 2012. ISSN 1098-1098.
- SILK, M.; LIDINGTON, B. An evaluation of single probe bulk-wave time-delay techniques in sizing cracks in steel. **NDT International**, Elsevier, v. 10, n. 3, p. 129–134, 1977.
- SONG, S.-J.; KIM, H.-J.; CHO, H. Development of an intelligent system for ultrasonic flaw classification in weldments. **Nuclear Engineering and Design**, v. 212, n. 1-3, p. 307 – 320, 2002. ISSN 0029-5493.
- SPIES, M. et al. Synthetic aperture focusing and time-of-flight diffraction ultrasonic imaging—past and present. **Journal of Nondestructive Evaluation**, p. 1–14, 2012. ISSN 0195-9298.
- STEPINSKI, T. An implementation of synthetic aperture focusing technique in frequency domain. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 54, n. 7, p. 1399–1408, 2007.
- STOLT, R. Migration by fourier transform. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 43, n. 1, p. 23–48, 1978.
- THOMPSON, R.; THOMPSON, D. Ultrasonics in nondestructive evaluation. **Proceedings of the IEEE**, v. 73, n. 12, p. 1716–1755, Dec 1985. ISSN 0018-9219.
- TUYSUZOGLU, A. et al. Sparsity driven ultrasound imaging. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 131, n. 2, p. 1271–1281, 2012.
- VEIGA, J. L. B. C. et al. The use of artificial neural network in the classification of pulse-echo and TOFD ultra-sonic signals. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, scielo, v. 27, p. 394 – 398, 12 2005. ISSN 1678-5878.
- VELICHKO, A.; WILCOX, P. Reversible back-propagation imaging algorithm for postprocessing of ultrasonic array data. **Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 56, n. 11, p. 2492–2503, November 2009. ISSN 0885-3010.
- VELICHKO, A.; WILCOX, P. D. An analytical comparison of ultrasonic array imaging algorithms. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 127, p. 2377, 2010.

- VIEIRA, A. et al. Characterization of welding defects by fractal analysis of ultrasonic signals. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 38, n. 3, p. 748 – 754, 2008. ISSN 0960-0779.
- VOGEL, C. R. **Computational methods for inverse problems**. Philadelphia, PA, USA: Siam, 2002.
- WENNERSTROM, E.; STEPINSKI, T.; OLOFSSON, T. An iterative synthetic aperture imaging algorithm with correction of diffraction effects. **Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on**, v. 53, n. 5, p. 1008–1017, May 2006. ISSN 0885-3010.
- YAMANI, A. Flaw impulse response estimation in ultrasonic non-destructive evaluation using bi-cepstra. **NDT & E International**, v. 40, n. 1, p. 57 – 61, 2007. ISSN 0963-8695.
- ZIBETTI, M. V.; BAZÁN, F. S.; MAYER, J. Determining the regularization parameters for super-resolution problems. **Signal Processing, Elsevier**, v. 88, n. 12, p. 2890–2901, 2008.
- ZIBULEVSKY, M.; ELAD, M. L1-l2 optimization in signal and image processing. **Signal Processing Magazine, IEEE**, v. 27, n. 3, p. 76–88, May 2010. ISSN 1053-5888.

## APÊNDICE A – REFLEXÃO E TRANSMISSÃO DE ONDAS ATRAVÉS DE INTERFACES

As ondas sonoras se propagam de forma direta através de fluidos e sólidos. Entretanto, quando elas encontram alterações no meio de propagação, tal como a interface entre dois materiais diferentes, elas interagem com essa interface de modo que parte das ondas é transmitida através dela e parte é refletida. A forma como essa interação ocorre depende dos seguintes fatores:

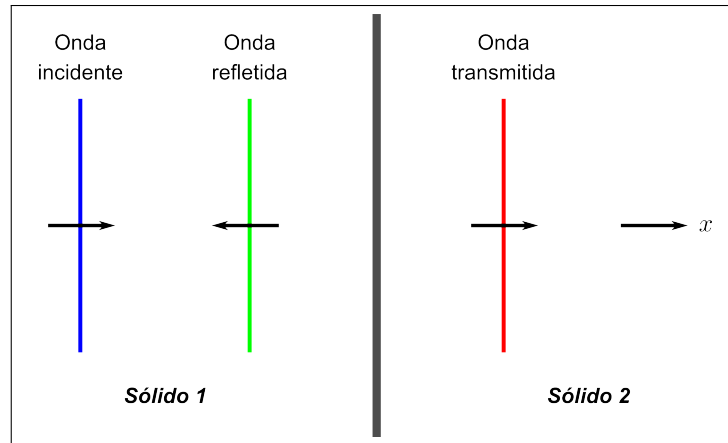
- as propriedades acústicas dos materiais (densidade e velocidade do som);
- o tipo de onda incidente;
- o ângulo de incidência da onda sobre a interface.

### A.1 ONDA INCIDENTE NORMAL À INTERFACE

A situação mais simples para ser analisada é quando uma onda plana atinge uma interface plana entre dois materiais com um ângulo de incidência normal à interface, conforme a Figura 59. Na situação ilustrada, os materiais são ambos sólidos e a onda incidente é longitudinal, mas a análise é válida para qualquer combinação entre sólidos e fluidos e também para ondas transversais (SCHMERR; SONG, 2007, p. 506).

As ondas incidente, refletida e transmitida são ondas planas se propagando na direção  $x$ . Portanto, as equações do deslocamento provocado por cada onda, na direção da propagação são:

$$\begin{aligned}
 u_i &= U_i \exp(ik_1x) \\
 u_r &= U_r \exp(-ik_1x) \\
 u_t &= U_t \exp(ik_2x)
 \end{aligned}
 \tag{102}$$



**Figura 59 – Representação da reflexão e transmissão de ondas sonoras incidentes normais a uma interface**  
**Fonte: Adaptado de Schmerr (1998, p. 92).**

em que  $k_1$  e  $k_2$  são os números de onda para os meios 1 e 2, e  $U_i$ ,  $U_r$  e  $U_t$  são as amplitudes das ondas incidente, refletida e transmitida<sup>1</sup>. Como na interface ( $x = 0$ ) os deslocamentos e as tensões mecânicas são contínuas, tem-se:

$$\begin{aligned} U_i - U_r &= U_t \\ \rho_1 c_{p1} U_i + \rho_1 c_{p1} U_r &= \rho_2 c_{p2} U_t \end{aligned} \quad (103)$$

Solucionando o sistema de equações (103) tem-se:

$$\frac{U_r}{U_i} = R_u = \frac{\rho_2 c_{p2} - \rho_1 c_{p1}}{\rho_1 c_{p1} + \rho_2 c_{p2}} \quad (104a)$$

$$\frac{U_t}{U_i} = T_u = \frac{2\rho_1 c_{p1}}{\rho_1 c_{p1} + \rho_2 c_{p2}} \quad (104b)$$

em que  $R_u$  e  $T_u$  são os coeficientes de reflexão e transmissão, baseados na razão dos deslocamentos (SCHMERR; SONG, 2007, p. 505). Esses coeficientes indicam as parcelas da onda incidente que são refletida e transmitida através da interface. Com as devidas substituições nos valores das velocidades de propagação do som no meio, as equações (104) são válidas para interfaces planas entre materiais quaisquer (sólidos ou fluidos) e também para ondas transversais, contanto que a incidência da onda seja normal ao plano da interface. A identificação do tipo de onda na definição do coeficiente é feita pelo sobrescrito. Assim,  $R^p$  e  $T^p$  representam os coeficientes para ondas longitudinais e  $R^s$  e  $T^s$  são os coeficientes para ondas transversais.

Os coeficientes de reflexão e transmissão das equações (104) são definidos pela razão entre os deslocamentos. Entretanto, eles podem ser definidos pela razão entre outras grandezas

<sup>1</sup>O sinal negativo no expoente da equação da onda refletida representa que ela se propaga no sentido contrário das outras ondas (SCHMERR; SONG, 2007, p. 504).



envolvidas na propagação de ondas sonoras<sup>2</sup>, tais como velocidade do deslocamento, pressão e tensão mecânica. Para isso basta utilizar as relações existentes entre as amplitudes dessas grandezas (SCHMERR, 1998, p. 56). Assim, da relação entre deslocamento e tensão mecânica tem-se:

$$\begin{aligned} R_{\tau}^{\alpha} &= \frac{T_{n_r}}{T_{n_i}} = \frac{ik_{\alpha_1}\rho_1c_{\alpha_1}^2U_r}{ik_{\alpha_1}\rho_1c_{\alpha_1}^2U_i} = \frac{U_r}{U_i} = R_u^{\alpha} = \frac{\rho_2c_{\alpha_2} - \rho_1c_{\alpha_1}}{\rho_1c_{\alpha_1} + \rho_2c_{\alpha_2}} \\ T_{\tau}^{\alpha} &= \frac{T_{n_t}}{T_{n_i}} = \frac{ik_{\alpha_2}\rho_2c_{\alpha_2}^2U_t}{ik_{\alpha_1}\rho_1c_{\alpha_1}^2U_i} = \frac{\rho_2c_{\alpha_2}}{\rho_1c_{\alpha_1}}T_u^{\alpha} = \frac{2\rho_2c_{\alpha_2}}{\rho_1c_{\alpha_1} + \rho_2c_{\alpha_2}} \end{aligned} \quad (107)$$

em que  $\alpha$  indica o tipo de onda ( $p$  — longitudinal e  $s$  — transversal). Como a relação entre amplitudes do deslocamento e pressão é igual a relação entre amplitudes do deslocamento e tensão mecânica,  $R_p^{\alpha} = R_{\tau}^{\alpha}$  e  $T_p^{\alpha} = T_{\tau}^{\alpha}$ .

Quando o ângulo da onda incidente é normal a interface, os coeficientes de reflexão e transmissão dependem somente das propriedades acústicas dos materiais. O produto  $Z^{\alpha} = \rho c_{\alpha}$  é definido como a *impedância acústica específica* do material (SCHMERR, 1998, p. 93). Com os valores das impedâncias acústicas específicas dos materiais da interface é possível determinar o comportamento de uma onda incidente sobre a interface:

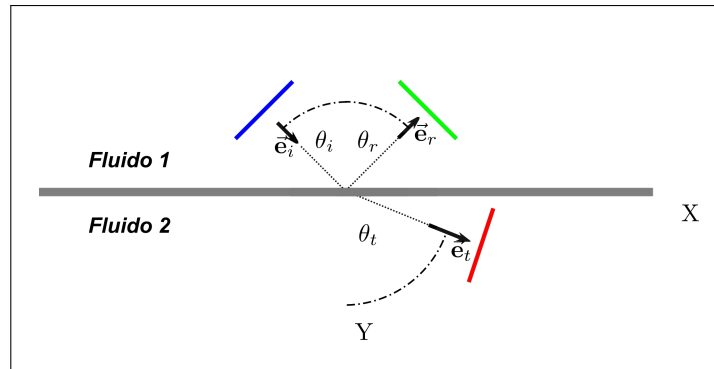
- se  $Z_1^{\alpha} < Z_2^{\alpha}$ , ambos os coeficientes são positivos e, tanto a onda refletida como a onda transmitida tem o mesmo sinal da onda incidente;
- se  $Z_1^{\alpha} \ll Z_2^{\alpha}$ , equivale a se ter uma interface rígida (sem deformação) e  $R_{\tau}^{\alpha} \rightarrow 1$ ;
- se  $Z_1^{\alpha} > Z_2^{\alpha}$ , o coeficiente de reflexão é negativo, e a onda refletida tem fase oposta a onda incidente;
- se  $Z_1^{\alpha} \gg Z_2^{\alpha}$ , equivale a se ter uma interface livre de tensão e  $R_{\tau}^{\alpha} \rightarrow -1$ ;
- e se  $Z_1^{\alpha} = Z_2^{\alpha}$ , a onda incide sobre a interface e é transmitida totalmente ( $T_{\tau}^{\alpha} = 1$ ), não ocorrendo reflexão ( $R_{\tau}^{\alpha} = 0$ ).

## A.2 ONDA INCIDENTE OBLÍQUA À INTERFACE

Quando a direção de propagação da onda incidente não coincide com a direção normal do plano da interface, a interação entre a onda incidente e a interface é mais complexa. A Figura 60 mostra a situação em que existe uma interface entre dois fluidos diferentes. Essa interface coincide com o plano X-Y e uma onda incide sobre a mesma. Na Figura 60, as ondas

<sup>2</sup>A identificação da grandeza utilizada na definição dos coeficientes é feita pelo subscrito do coeficiente.

incidente, refletida e transmitida se propagam nas direções  $\vec{e}_i$ ,  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_t$ , formando os ângulos  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  e  $\theta_t$  em relação ao eixo normal da interface.



**Figura 60 – Representação em duas dimensões da reflexão e transmissão de ondas sonoras incidentes sobre um plano**  
**Fonte: Adaptado de Schmerr (1998, p. 97)**

A partir das equações de pressão incidente, refletida e transmitida, da relação  $\partial p / \partial y = -i\omega\rho v_y$  e das condições de continuidade na interface ( $p_1 = p_2$  e  $v_{y1} = v_{y2}$ ), Schmerr e Song (2007) deduzem as equações dos coeficientes de reflexão e transmissão baseados na relação de pressões:

$$\frac{P_r}{P_i} = R_p^p = \frac{\rho_2 c_{p2} \cos \theta_i - \rho_1 c_{p1} \cos \theta_t}{\rho_1 c_{p1} \cos \theta_t + \rho_2 c_{p2} \cos \theta_i} \quad (108a)$$

$$\frac{P_t}{P_i} = T_p^p = \frac{2\rho_2 c_{p2} \cos \theta_i}{\rho_1 c_{p1} \cos \theta_t + \rho_2 c_{p2} \cos \theta_i} \quad (108b)$$

Pelas condições de continuidade, também é deduzido que  $\theta_i = \theta_r$  e  $\sin \theta_i / c_{p1} = \sin \theta_t / c_{p2}$ . Essa última relação, conhecida como *Lei de Snell*, indica que a onda transmitida sofre refração ao cruzar a interface.

Nas equações (108) existe a dependência, além das propriedades acústicas dos materiais, também do cosseno dos ângulos de incidência e transmissão. Mas, pela relação da lei de Snell

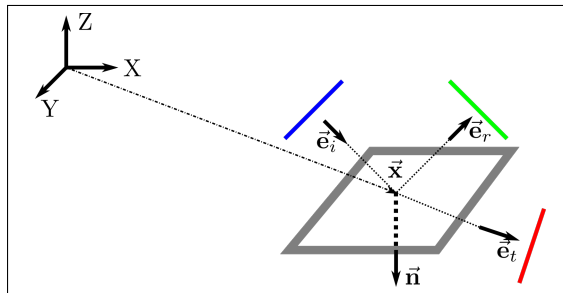
$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} = \sqrt{1 - \frac{c_{p2}^2}{c_{p1}^2} \sin^2 \theta_i} \quad (111)$$

De acordo com a Eq. (111), se  $c_{p1}/c_{p2} \geq \sin \theta_i$  os coeficientes de reflexão e transmissão terão sempre valores reais e haverá a propagação normal das ondas refletida e transmitida. Entretanto, se  $\sin \theta_i > c_{p1}/c_{p2}$ , além dos coeficientes terem valores complexos, o termo  $\cos \theta_t$  complexo faz com que a onda transmitida seja *evanescente*, com sua amplitude decaindo exponencialmente com a profundidade (SCHMERR, 1998, p. 99).

No caso de algum (ou ambos) dos materiais que formam a interface seja sólido, o comportamento das ondas refletida e transmitida é o mesmo. Uma exceção existe quando a interface é entre fluido e sólido<sup>3</sup>. Nessa situação, ocorre o fenômeno chamado *conversão de modo*, em que a incidência de uma onda longitudinal produz ondas transmitidas do tipo longitudinal e transversal (SCHMERR, 1998, p. 115). Devido a esse fenômeno, quando  $0 \leq \sin \theta_i \leq c_{p1}/c_{p2}$ , os dois tipos de ondas são transmitidas. Quando  $c_{p1}/c_{p2} < \sin \theta_i \leq c_{p1}/c_{s2}$ , há somente a propagação de ondas transmitidas transversais e para  $\sin \theta_i > c_{p1}/c_{s2}$ , não há nenhuma onda transmitida, somente onda refletida. Portanto, as equações (108) não são válidas. Em Schmerr (1998, p. 115-119) são deduzidas as equações desses coeficientes para essa situação.

### A.3 REFLEXÃO E TRANSMISSÃO EM TRÊS DIMENSÕES

As análises das seções anteriores foram feitas considerando uma geometria em duas dimensões. Entretanto, nas aplicações de NDT é importante conhecer os valores da pressão (ou tensão mecânica) das ondas refletidas e transmitidas em pontos de uma superfície, a partir de uma onda incidente, em uma geometria com três dimensões.



**Figura 61 – Representação em três dimensões da reflexão e transmissão de ondas sonoras incidentes sobre um plano**

Fonte: Adaptado de Schmerr (1998, p. 109).

Assim sendo, baseado na geometria mostrada na Figura 61, Schmerr (1998, p. 108-112) deduz as equações das pressões refletida e transmitida em qualquer ponto  $\vec{x}$  sobre uma interface fluido-fluido:

$$p_r(\vec{x}) = R_p^p P_i \exp [ik_1(\vec{x} \cdot \vec{e}_r) + 2ik_1(\vec{x} \cdot \vec{n})(\vec{e}_i \cdot \vec{n})] \quad (112a)$$

$$p_t(\vec{x}) = T_p^p P_i \exp [ik_2(\vec{x} \cdot \vec{e}_t) + ik_1(\vec{x} \cdot \vec{n})(\vec{e}_i \cdot \vec{n}) - ik_2(\vec{x} \cdot \vec{n})(\vec{e}_i \cdot \vec{n})] \quad (112b)$$

<sup>3</sup>Esta configuração ocorre em ensaios de imersão, onde a peça inspecionada é imersa em um tanque com água. A exceção é devido ao fato da velocidade das ondas longitudinais nos líquidos ser geralmente menor que nos sólidos.

em que  $R_p^p$  e  $T_p^p$  são os coeficientes de reflexão e transmissão (relativos a pressão);  $\vec{e}_i$ ,  $\vec{e}_r$  e  $\vec{e}_t$  são as direções de propagação das ondas incidente, refletida e transmitida e  $\vec{n}$  é o vetor normal à interface.

Cabe lembrar que as equações (112) são válidas também para as interfaces sólido-fluido e sólido-sólido, bastando substituir a pressão pela tensão mecânica. Para as interfaces fluido-sólido, valem as considerações feitas na seção anterior.

## APÊNDICE B – CAMPOS DE ONDAS EMITIDOS POR TRANSDUTORES CIRCULARES

Na descrição sobre a propagação de ondas sonoras feita na Seção 2.3, são apresentadas as equações de ondas planas e esféricas. Na equação de ondas planas, a fonte geradora é considerada tão distante do ponto de observação que seus efeitos são nulos. Para as ondas esféricas, a fonte geradora é considerada pontual no espaço. Entretanto, nos procedimentos reais dos NDTs por ultrassom, as fontes geradoras das ondas ultrassônicas são os transdutores, que têm superfícies ativas de formatos regulares e dimensões finitas. Assim, as ondas emitidas por esses transdutores não podem ser consideradas nem planas ou esféricas.

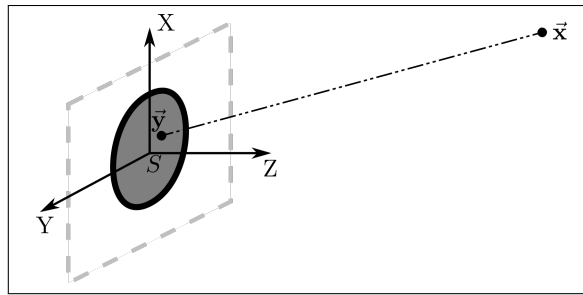
A equação do campo de ondas emitido por um transdutor depende basicamente do seu formato e dimensões. Assim, neste apêndice é apresentada inicialmente a dedução para a equação do campo de ondas de pressão, em um fluido homogêneo, emitido por um transdutor plano do tipo pistão e de superfície ativa com formato genérico. Em seguida, é deduzida equação do campo de ondas de pressão emitido um transdutor circular em fluidos. Também é mostrada a equação do campo de ondas de tensão mecânica em um transdutor circular de contato com ondas longitudinais.

### B.1 INTEGRAL DE RAYLEIGH-SOMMERFELD

O problema para modelar o campo de pressão emitido por um transdutor plano do tipo pistão está representado na Figura 62. Deseja-se deduzir uma equação que represente o valor da pressão em qualquer ponto  $\vec{x}$  no semiespaço  $z \geq 0$ . O semiespaço  $z \geq 0$  é preenchido com um fluido de densidade  $\rho_0$  e com velocidade do som  $c$ . A superfície ativa do transdutor, onde a velocidade de deslocamento é constante e igual a  $v_0$ , é representada pela área  $S$ .

Para se deduzir a equação do campo de pressão é preciso utilizar o teorema da reciprocidade, descrito em detalhes em Schmerr (1998, cap. 5). Por esse teorema, tem-se que

$$p(\vec{x}, \omega) = \int_S \left[ G(\vec{x} - \vec{y}, \omega) \frac{\partial p(\vec{y}, \omega)}{\partial n(\vec{y})} - p(\vec{y}, \omega) \frac{\partial G(\vec{x} - \vec{y}, \omega)}{\partial n(\vec{y})} \right] dS(\vec{y}) \quad (115)$$



**Figura 62 – Representação de um transdutor circular do tipo pistão**

Fonte: Adaptado de Schmerr (1998, p. 157).

A resolução da integral na Eq. (115) não é direta, pois é preciso conhecer o valor da pressão e de sua derivada normal ao plano X-Y. Entretanto, pelo método descrito em Schmerr (1998, p. 158-159), que utiliza além do ponto  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , a sua imagem  $\vec{x}' = (x_1, x_2, -x_3)$  espelhada no plano X-Y, tem-se que

$$p(\vec{x}, \omega) = \frac{-i\omega\rho_0 v_0}{2\pi} \int_S \frac{\exp(ikr)}{r} dS \quad (116)$$

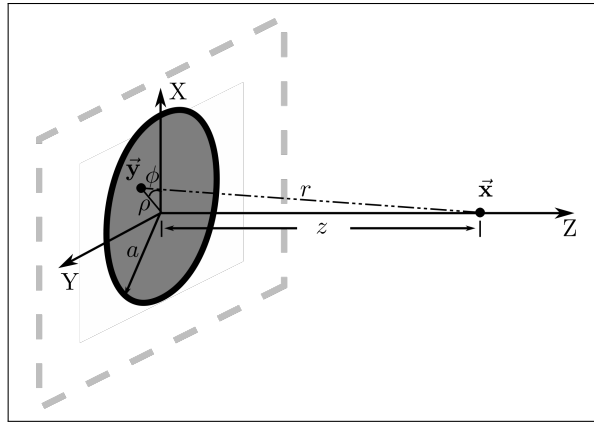
em que  $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ .

A Eq. (116) é chamada de *integral de Rayleigh-Sommerfeld*. Analisando essa equação é possível afirmar que o campo de onda de pressão é uma sobreposição de ondas esféricas emitidas por fontes pontuais elementares sobre a superfície ativa do transdutor (SCHMERR, 1998, p. 160).

## B.2 CAMPO DE ONDA DE PRESSÃO PARA TRANSDUTORES CIRCULARES EM FLUIDOS

Quando se utiliza um transdutor com superfície ativa circular de raio  $a$ , a integral de Rayleigh-Sommerfeld tem resolução analítica exata, no domínio da frequência, para os pontos  $\vec{x}$  contidos sobre o eixo central do transdutor. Entretanto, para pontos fora do eixo central, somente é possível uma solução analítica aproximada, quando o ponto  $\vec{x}$  está no *campo distante* do transdutor.

A solução exata da Eq. (116), para pontos sobre o eixo de um transdutor circular de raio  $a$ , é possível devido a simetria existente na geometria do transdutor. Como a área de integração  $S$  é circular, os pontos  $\vec{y}$  podem ser representados por coordenadas polares  $\rho$  e  $\phi$ , conforme mostrado na Figura 63.



**Figura 63 – Representação geométrica de um transdutor circular para cálculo da amplitude do campo de onda no eixo normal**

Fonte: Adaptado de Schmerr (1998, p. 160).

Fazendo  $\vec{x} = z$ ,  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  e  $dS = 2\pi\rho d\rho = 2\pi r dr$ , a integral de Rayleigh-Sommerfeld fica (SCHMERR, 1998, p. 160):

$$p(z, \omega) = -i\omega\rho_0 v_0 \int_{r=z}^{r=\sqrt{z^2+a^2}} \exp(ikr) dr \quad (117)$$

que resulta em

$$p(z, \omega) = \rho_0 c v_0 \left[ \exp(ikr) - \exp\left(ik\sqrt{z^2+a^2}\right) \right] \quad (118)$$

que pode ser rescrita, expandindo as exponenciais complexas na forma de senos e cossenos como

$$p(z, \omega) = -i2\rho_0 c v_0 \exp\left[\frac{ik(\sqrt{z^2+a^2}+z)}{2}\right] \sin\left[\frac{k(\sqrt{z^2+a^2}-z)}{2}\right] \quad (119)$$

Quando o ponto  $\vec{x}$  está no campo distante  $z \gg a$ , o que leva a  $\sqrt{z^2+a^2} - z \approx a^2/2z$  e  $\sqrt{z^2+a^2} + z \approx 2z$ .

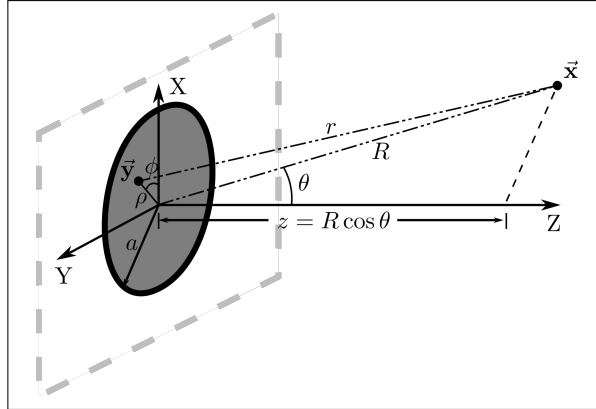
Substituindo essas aproximações na Eq. (119), tem-se:

$$p(z, \omega) = \frac{-ik\rho_0 c v_0 a^2 \exp(ikz)}{2z} \quad (120)$$

que é a equação do campo de onda de pressão emitido por um transdutor circular, para os pontos sobre o eixo do transdutor, no campo distante. É possível observar que o transdutor circular comporta-se como uma fonte pontual no campo distante, devido ao termo  $\exp(ikz)/z$  (SCHMERR, 1998, p. 163).

A Figura 64 mostra a geometria do problema para calcular a amplitude do campo de onda de pressão em um ponto  $\vec{x}$  que está fora do eixo do transdutor circular. Uma solução

analítica aproximada da integral de Rayleigh-Sommerfeld para esse problema é possível. Para isso considera-se que  $r \approx R - \rho \sin \theta \cos \phi$ . Essa aproximação é verdadeira quando  $R \gg \rho$ , ou seja, quando  $\vec{x}$  está no campo distante (SCHMERR, 1998, p. 165).



**Figura 64 – Representação geométrica de um transdutor circular para cálculo da amplitude do campo de onda fora do eixo normal**

Fonte: Adaptado de Schmerr (1998, p. 165).

Inserindo a aproximação de  $r$  na Eq. (116) tem-se

$$p(\vec{x}, \omega) = \frac{-i\omega\rho_0 v_0 \exp(ikR)}{2\pi R} \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp(-ik\rho \sin \theta \cos \phi) d\phi \rho d\rho \quad (121)$$

mas como (SCHMERR, 1998, p. 165)

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\rho \sin \theta \cos \phi} d\phi = 2\pi J_0(k\rho \sin \theta) \text{ e}$$

$$\int_0^a J_0(\alpha\rho) \rho d\rho = \frac{a J_1(\alpha a)}{\alpha}$$

em que  $J_0(\cdot)$  e  $J_1(\cdot)$  são as funções de Bessel de ordem 0 e 1, respectivamente. A solução analítica da Eq. (121) é

$$p(\vec{x}, \omega) = -ik\rho_0 c v_0 a^2 \frac{\exp(ikR)}{R} \text{jinc}(ka \sin \theta) \quad (122)$$

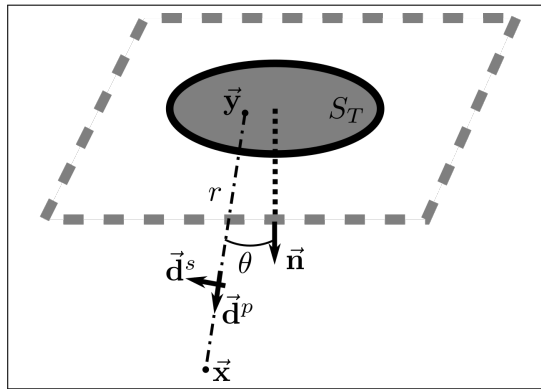
em que  $\text{jinc}(\alpha) = J_1(\alpha)/\alpha$ .

É importante observar que a Eq. (122) é válida também para os pontos  $\vec{x}$  sobre o eixo central. Nessa situação,  $\vec{x} = R = z$ ,  $\sin \theta = 0$ ,  $\text{jinc}(0) \equiv 1/2$  e, portanto, a Eq. (122) fica exatamente igual a Eq. (120).



### B.3 CAMPO DE ONDA DE TENSÃO MECÂNICA PARA TRANSDUTORES CIRCULARES DE CONTATO

Um transdutor de contato apresenta uma superfície ativa que é colocada sobre a superfície da peça a ser inspecionada. Em geral, é colocada uma fina camada de material acoplante entre o transdutor e o material sólido. Esse acoplante tem a função de melhorar a transferência das ondas sonoras pela interface transdutor-peça (SCHMERR; SONG, 2007, p. 154). O acoplante é um fluido, sendo os mais utilizados água, óleo ou glicerina. Devido a essa fina camada de fluido, é conveniente modelar esse tipo de transdutor como uma pressão uniforme  $p_0$ , agindo sobre uma área  $S_T$  do sólido, conforme a Figura 65.



**Figura 65 – Representação geométrica para um transdutor de contato normal a uma superfície**

**Fonte: Adaptado de Schmerr e Song (2007, p. 156).**

Um transdutor de contato, assim como o transdutor de imersão, emite ondas diretas e de bordas. Entretanto, existe uma diferença entre eles. Nos transdutores de imersão, tanto as ondas diretas como as ondas de borda são longitudinais. Já em um transdutor de contato, mesmo que ele seja construído para emitir somente ondas longitudinais, existe a emissão significativa de ondas de borda longitudinais e transversais (SCHMERR; SONG, 2007, p. 155). Assim, a dedução da equação do campo de ondas de tensão mecânica, por se tratar de um meio sólido, é mais complexa.

Em Schmerr (1998, p. 260-267) existe a dedução completa da equação do campo de ondas de deslocamento emitido por um transdutor circular de contato em um meio sólido. Essa dedução é baseada na geometria mostrada na Figura 65 e tem como resultado final a seguinte equação integral

$$\vec{u}(\vec{x}, \omega) = \frac{p_0}{2\pi\rho_0 c_p^2} \int_{S_T} \kappa_p(\Theta) \vec{d}^p \frac{\exp(ik_p r)}{r} dS + \frac{p_0}{2\pi\rho_0 c_s^2} \int_{S_T} \kappa_s(\Theta) \vec{d}^s \frac{\exp(ik_s r)}{r} dS \quad (123)$$

em que  $r = |\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}|$ ,  $\rho_0$  é a densidade do sólido,  $c_p$  e  $c_s$  são as velocidades das ondas longitudinais e transversais no sólido,  $\vec{\mathbf{d}}^p$  e  $\vec{\mathbf{d}}^s$  são os vetores de polarização das ondas longitudinais e transversais e, por fim,  $\kappa_p(\Theta)$  e  $\kappa_s(\Theta)$  são funções de diretividade das ondas longitudinais e transversais. Essas funções de diretividade estão definidas em Schmerr (1998, p. 264 e 265).

A Eq. (123) demonstra que o campo de ondas de deslocamento, em um meio sólido, é a sobreposição de ondas esféricas longitudinais e transversais emitidas por toda a superfície ativa do transdutor. Essa equação é muito similar a integral de Rayleigh-Sommerfeld, divergindo somente com a presença das funções de diretividade e dos vetores de polarização. Entretanto, nos transdutores de contato disponíveis comercialmente, a divergência das ondas é pequena e por consequência, o ângulo  $\Theta$  é pequeno. Nesse caso,  $\kappa_p \approx 1$ ,  $\kappa_s \approx 0$  e  $\vec{\mathbf{d}}^p = \vec{\mathbf{n}}$ , o que simplifica a Eq. (123) para

$$\vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{x}}, \omega) = \frac{p_0 \vec{\mathbf{n}}}{2\pi \rho_0 c_p^2} \int_{S_T} \frac{\exp(ik_p r)}{r} dS \quad (124)$$

Para que a Eq. (124) seja do campo de ondas de tensão mecânica na direção  $\vec{\mathbf{n}}$ , normal a superfície ativa do transdutor, basta utilizar as relações  $\tau_n(\vec{\mathbf{x}}, \omega) = ik_p \rho_0 c_p^2 \vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{x}}, \omega) \cdot \vec{\mathbf{n}}$  e  $p_0 = -\rho_0 c v_0$  (SCHMERR, 1998, p. 56). Assim, a equação integral que descreve o campo de ondas de tensão mecânica normal a superfície do transdutor é

$$\tau_n(\vec{\mathbf{x}}, \omega) = \frac{-i\omega \rho_0 v_0}{2\pi} \int_{S_T} \frac{\exp(ik_p r)}{r} dS \quad (125)$$

que é exatamente igual a integral de Rayleigh-Sommerfeld. Portanto, pode-se concluir que as ondas longitudinais emitidas por um transdutor do tipo pistão se comportam de forma idêntica tanto em fluidos como em sólidos homogêneos. Dessa forma, a Eq. (122) também é válida para modelar o campo de onda de tensão mecânica de um transdutor circular de contato.

## APÊNDICE C – IMPLEMENTAÇÃO DOS OPERADORES MATRICIAIS

A Eq. (81) é implementada no *MATLAB*<sup>®</sup> pela função `ModS2()`, mostrada na Listagem C.1. Esta função recebe a matriz  $f(x,z)$  como o parâmetro `image` e a matriz  $B(k_u, \omega)$  como o parâmetro `ModTransd` e retorna a matriz  $v_o(u,t)$ . Os demais parâmetros são necessários pela modelagem de Stolt.

### Código-fonte C.1 – Implementação do operador linear do *kernel* do sistema de medição

---

```
function [ varargout ] = ModS2(image, dt, du, ERMv, tau0, ModTransd)
%Modelo direto de um sistema de inspecao por ultrassom
% Esta funcao gera os dados simulados na saida de um sistema de medicao
% por ultrassom (pulso-eco), a partir da imagem referente ao ponto central
% de uma descontinuidade no interior de uma peca metalica. Alem da imagem,
% sao necessarios alguns parametros do modelo de medicao como argumentos.

% Zero-padding
[nt0,nu0] = size(image);
[nt,nu] = size(ModTransd);
if nt < nt0
    nt = 2^(nextpow2(nt0) + 1);
end
if nu < nu0;
    nu = 2*nu0;
end

% Grid dos dados e da imagem
f = (-nt/2:nt/2-1)/dt/nt;
ku = (-nu/2:nu/2-1)/du/nu;
[ku,f] = meshgrid(ku,f);
fkz = ERMv*sign(f).*(sqrt(ku.^2 + f.^2/ERMv^2));
```

```

% Converte a imagem para o dominio da frequencia
ftimage = fftshift(fft2(image, nt, nu));

% Gera espectro dos dados (por adjunto da interpolacao linear)
ftdata = linterpAdj(f(:,1), fkz, ftimage);
if tau0 ~= 0
    ftdata = ftdata.* exp(1i*2*pi*(fkz - f)*tau0);
end

% Insere modelo do transdutor (se existir)
if(exist('ModTransd', 'var') && (ismatrix(ModTransd) || isscalar(ModTransd)))
    if(isscalar(ModTransd) || isequal(size(ModTransd),size(ftdata)))
        ftdata = ftdata .* ModTransd;
    else
        rowShift = floor((nt - size(ModTransd, 1))/2);
        colShift = floor((nu - size(ModTransd, 2))/2);
        ModTransd(nt, nu) = 0;
        ModTransd = circshift(ModTransd, [rowShift colShift]);
        ftdata = ftdata .* ModTransd;
    end
end

% Converte os dados para o dominio do tempo
data = (ifft2(ifftshift(ftdata), 'symmetric'));
data = data(1:nt0,1:nu0);

% Calcula o ganho
enImage = norm(image(:));
enData = norm(data(:));
ganho = enData / enImage;

varargout{1} = data;
if nargout > 1
    varargout{2} = ganho;
end
end

```

---

A função `ModS2T()` da Listagem C.2 é a implementação da Eq. (86). Os parâmetros principais da função são `data` e `Filter`, que representam as matrizes  $v_o(u,t)$  e  $B^*(k_u, \omega)$ , respectivamente. Os demais parâmetros são utilizados pela migração de Stolt. Como resultado, esta função retorna uma matriz que representa o vetor de retroprojeção  $\hat{f}^{(BP)}$  para os dados  $v_o(u,t)$ .

#### **Código-fonte C.2 – Implementação do operador linear adjunto do *kernel* do sistema de medição**

---

```
function [ varargout ] = ModS2T(data, dt, du, ERMv, tau0, Filter)
%Modelo do adjunto de um sistema de inspecao por ultrassom
% Esta funcao gera uma imagem do centro de uma descontinuidade no
% interior de uma peca metalica, a partir dos dados obtidos por um sistema
% de medicao por ultrassom (pulso-eco). Alem dos dados coletados, sao
% necessarios alguns parametros do modelo de medicao como argumentos.

% Zero-padding
[nt0,nu0] = size(data);
[nt,nu] = size(Filter);
if nt < nt0
    nt = 2^(nextpow2(nt0) + 1);
end
if nu < nu0;
    nu = 2*nu0;
end

% Grid dos dados e da imagem
f = (-nt/2:nt/2-1)/dt/nt;
ku = (-nu/2:nu/2-1)/du/nu;
[ku,f] = meshgrid(ku,f);
fkz = ERMv*sign(f).*(sqrt(ku.^2 + f.^2/ERMv^2));

% Converte os dados para o dominio da frequencia
ftdata = fftshift(fft2(data, nt, nu));
if tau0 ~= 0
    ftdata = ftdata.* exp(-1i*2*pi*(fkz - f)*tau0);
end
```

```

% Aplica o filtro (se existir)
if(exist('Filter', 'var') && (ismatrix(Filter) || isscalar(Filter)))
    if(isscalar(Filter) || isequal(size(Filter), size(ftdata)))
        ftdata = ftdata .* Filter;
    else
        rowShift = floor((nt - size(Filter, 1))/2);
        colShift = floor((nu - size(Filter, 2))/2);
        Filter(nt, nu) = 0;
        Filter = circshift(Filter, [rowShift colShift]);
        ftdata = ftdata .* Filter;
    end
end

% Gera espectro da imagem (por interpolacao linear)
ftimage = linterp(f(:,1), ftdata, fkz);

% Converte a imagem para o dominio do espaco
image = (ifft2(ifftshift(ftimage), 'symmetric'));
image = image(1:nt0,1:nu0);

% Calcula o ganho
enImage = norm(image(:))^2;
enData = norm(data(:))^2;
ganho = sqrt(enImage / enData);

varargout{1} = image;
if nargout > 1
    varargout{2} = ganho;
end
end

```

---

