

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

CARLOS ANTONIO DEPIZOLI

**MATEMÁTICA E MÚSICA E O ENSINO DE FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2015

CARLOS ANTONIO DEPIZOLI

**MATEMÁTICA E MÚSICA E O ENSINO DE FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientadora: Prof^a. Dra. Olga Harumi Saito

CURITIBA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

D419m Depizoli, Carlos Antonio
2015 Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas
/ Carlos Antonio Depizoli.-- 2015.
86 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal
do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional, Curitiba, 2015.
Bibliografia: f. 83-86.

1. Funções trigonométricas. 2. Trigonometria - Estudo e
ensino (Ensino médio). 3. Fourier, Séries de. 4. Música -
Acústica e física. 5. Sintetizador (Instrumento musical). 6.
Música - Matemática. 7. Abordagem interdisciplinar do
conhecimento na educação. 8. Matemática - Dissertações.
I. Saito, Olga Harumi, orient. II. Universidade Tecnológica
Federal do Paraná - Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Título da Dissertação No. 26

“Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas”

por

Carlos Antonio Depizoli

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 15h do dia 10 de julho de 2015. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Olga Harumi Saito, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Vitor José Petry, Dr.
(UFFS)

Prof. Rudimar Luiz Nós, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Marcio Rostirolla Adames, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

AGRADECIMENTOS

- Aos meus colegas de turma, por terem trilhado o mesmo caminho e juntos compartilhado muitos conhecimentos.
- À minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Olga Harumi Saito, pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta dissertação.
- A todos os professores com quem tive aula durante o mestrado.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

DEPIZOLI, Carlos Antonio. MATEMÁTICA E MÚSICA E O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS. 87 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Utilizando-se da relação entre a Matemática e a Física e tendo a música como fonte de recursos associados a conceitos matemáticos, este trabalho objetiva contribuir com o desenvolvimento de habilidades nos estudantes na aprendizagem de conteúdos matemáticos como as funções trigonométricas. Conceitos importantes relacionados à acústica são apresentados, mostrando a importância da Série de Fourier Contínua no desenvolvimento de sintetizadores analógicos aditivos e seu uso no ensino de trigonometria.

Palavras-chave: Funções trigonométricas, Série de Fourier Contínua, trigonometria, sintetizadores analógicos aditivos.

ABSTRACT

DEPIZOLI, Carlos Antonio. DISSERTATION TITLE. 87 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Using the relationship between Mathematics and Physics and having music as a source of features associated with mathematical concepts, this work aims to contribute to the development of skills in students who are learning mathematical subjects such as trigonometric functions. Important concepts related to acoustics are presented, showing the importance of Continuous Fourier Series (CFS) in the development of Additive Synthesizer and its use in trigonometry.

Keywords: Trigonometric functions, Continuous Fourier Series, trigonometry, additive synthesizer.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Flauta de osso de urso.	15
FIGURA 2	– Flauta de marfim de mamute.	16
FIGURA 3	– Flauta de osso de pássaro.	16
FIGURA 4	– Pitágoras e o registro da música.	17
FIGURA 5	– Monocórdio de Pitágoras.	17
FIGURA 6	– Relações entre o tencionamento de uma corda e os intervalos harmônicos.	18
FIGURA 7	– Relação das frequências de uma nota.	19
FIGURA 8	– Arquitas de Tarento.	20
FIGURA 9	– Escrito sagrado em latim a São João Batista.	22
FIGURA 10	– Modelo de pré-sintetizador: E Theremin for IOS.	23
FIGURA 11	– Max Mathews.	24
FIGURA 12	– Sintetizador MOOG.	24
FIGURA 13	– Sintetizador Digital.	25
FIGURA 14	– Representação de ondas: (a) transversais; (b) ondas longitudinais.	26
FIGURA 15	– Crista e depressão (vale) de uma onda.	28
FIGURA 16	– Gráfico representando uma onda senoidal progressiva.	29
FIGURA 17	– Som grave (baixa frequência) e som agudo (alta frequência).	30
FIGURA 18	– Som forte (grande amplitude) e som fraco (baixa amplitude).	31
FIGURA 19	– Escala com o nível de pressão sonora.	32
FIGURA 20	– Composição de uma nota: superposição de múltiplos sons.	34
FIGURA 21	– Representação do timbre de vários instrumentos sonoros.	34
FIGURA 22	– Representação das porções de uma corda de um monocórdio.	35
FIGURA 23	– Frequências das notas.	37
FIGURA 24	– Representação do coma pitagórico.	38
FIGURA 25	– Jean-Baptiste Joseph Fourier.	42
FIGURA 26	– Gráfico da função f	50
FIGURA 27	– Onda triangular.	51
FIGURA 28	– Gráfico da função $f(x)$	54
FIGURA 29	– Gráfico da função $S_1 = \frac{4}{x} \sin[x]$	55
FIGURA 30	– Gráfico da função $S_3 = \frac{4}{x} \left[\sin[x] + \frac{\sin[3x]}{3} \right]$	56
FIGURA 31	– Gráfico da função $S_5 = \frac{4}{x} \left[\sin[x] + \frac{\sin[3x]}{3} + \frac{\sin[5x]}{5} \right]$	56
FIGURA 32	– Gráfico da função $S_{15} = \frac{4}{x} \left[\sin[x] + \dots + \frac{\sin[15x]}{15} \right]$	56
FIGURA 33	– Gráfico da função $f_1(x) = \sin(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, um ciclo completo.	58
FIGURA 34	– Gráfico da função $f_3(x) = 0.33 \sin(3x)$, três ciclos completos.	59
FIGURA 35	– Gráfico da função $f_5(x) = 0.20 \sin(5x)$, cinco ciclos completos.	59
FIGURA 36	– Gráfico da função $f_7(x) = 0.14 \sin(7x)$, sete ciclos completos.	60
FIGURA 37	– Gráfico da função $f_9(x) = 0.11 \sin(9x)$, nove ciclos completos.	60
FIGURA 38	– Gráfico da função $f(x) = \sin(x)$ ou $f(x) = f_1(x)$, em vermelho, superposição do primeiro harmônico, que corresponde a ele mesmo.	61
FIGURA 39	– Gráfico da função $f(x) = \sin(x) + 0.33 \sin(3x)$ ou $f(x) = f_1(x) + f_3(x)$,	

	em vermelho, que corresponde à soma do primeiro e do terceiro harmônicos.	61
FIGURA 40	– Gráfico da função $f(x) = \sin(x) + 0.33 \sin(3x) + 0.20 \sin(5x)$ ou $f(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x)$, em vermelho, que corresponde à soma dos três primeiros harmônicos.	62
FIGURA 41	– Gráfico da função $f(x) = \sin(x) + 0.33 \sin(3x) + 0.20 \sin(5x) + 0.14 \sin(7x)$ ou $f(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x)$, em vermelho, que corresponde à soma do primeiro, do terceiro, do quinto e do sétimo harmônicos.	62
FIGURA 42	– Gráfico da função $f(x) = \sin(x) + 0.33 \sin(3x) + 0.20 \sin(5x) + 0.14 \sin(7x) + 0.11 \sin(9x)$ ou $f(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) + f_9(x)$, em vermelho, que corresponde à soma do primeiro, do terceiro, do quinto, do sétimo e do nono harmônicos.	63
FIGURA 43	– Exemplos de sinais de tempo contínuo e discreto.	64
FIGURA 44	– Frequência de amostragem menor que duas vezes a frequência máxima do sinal.	64
FIGURA 45	– Comparação de sinais: (a) Trecho de 1,0 segundo da Quinta Sinfonia de Beethoven, correspondente a 21.495 amostras; (b) Trecho inicial do sinal original (N=128 amostras).	65
FIGURA 46	– Gráfico da função $f(x) = 0 + 1 \cdot \sin(1 \cdot x + 0)$	68
FIGURA 47	– Gráfico da função $f(x) = 2 + 1 \cdot \sin(1 \cdot x + 0)$	69
FIGURA 48	– Gráfico da função $f(x) = 2 + 3 \cdot \sin(1 \cdot x + 0)$	69
FIGURA 49	– Gráfico da função $f(x) = 2 + 3 \cdot \sin(4 \cdot x + 0)$	70
FIGURA 50	– Gráfico da função $f(x) = 2 + 3 \cdot \sin(4 \cdot x + 3 \cdot 14)$	70
FIGURA 51	– Fluxograma da Oficina 1.	71
FIGURA 52	– Gráfico da função f	73
FIGURA 53	– Fluxograma da Oficina 2.	73
FIGURA 54	– Tela inicial do aplicativo Som.	74
FIGURA 55	– Onda periódica propagando-se na água.	76
FIGURA 56	– Fluxograma da Oficina 3.	77
FIGURA 57	– Representação gráfica da amplitude sonora.	77
FIGURA 58	– Representação gráfica da frequência sonora.	78
FIGURA 59	– Superposição de 3 sons musicais simples (<i>lá3</i> , <i>lá4</i> e <i>lá5</i>) resultando num som composto.	78
FIGURA 60	– Tela do “Jogo das Ondas”.	83

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– As notas musicais da escala temperada.	39
----------	-----------------------------------------------	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	A ESCOLHA DO TEMA	11
1.2	OBJETIVOS	11
1.2.1	Objetivo geral	11
1.2.2	Objetivos Específicos	12
1.3	JUSTIFICATIVA	12
1.4	ESTRUTURA DE TRABALHO	14
2	HISTÓRIA DA MÚSICA: DA PRÉ-HISTÓRIA AOS DIAS ATUAIS	15
2.1	A MÚSICA PRÉ-PITAGÓRICA	15
2.2	A ESCOLA PITAGÓRICA E O EXPERIMENTO DO MONOCÓRDIO	16
2.3	OS PRIMÓRDIOS DO SOM COMO ONDA	20
2.4	A MÚSICA NA IDADE MÉDIA	21
2.5	O DESENVOLVIMENTO DA MÚSICA A PARTIR DO RENASCIMENTO	22
3	MATEMÁTICA E FÍSICA: MÚSICA E SOM	26
3.1	SOM	26
3.2	ONDAS SONORAS E O MOVIMENTO ONDULATÓRIO	26
3.2.1	Propagação do Som	27
3.2.2	Ondas Senoidais	28
3.2.3	Qualidades fisiológicas do som	30
3.3	ESCALAS MUSICAIS	35
3.3.1	A Escala Pitagórica	35
3.3.2	A Escala Temperada igual	39
4	FOURIER E A MÚSICA	42
4.1	JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER	42
4.2	A SÉRIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER	43
4.2.1	Funções Ortogonais	43
4.2.2	A Série de Fourier Generalizada	46
4.2.3	Séries de Fourier	48
4.2.4	Série de Fourier de Cossenos e de Senos	52
4.2.5	Sintetizadores Eletrônicos e a série de Fourier	57
5	A MÚSICA E AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO	66
5.1	OFICINA 1: COEFICIENTES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	66
5.1.1	Lista de Questões Aplicadas	72
5.2	OFICINA 2: RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A MÚSICA	73
5.2.1	Lista de Questões Aplicadas	75
5.3	OFICINA 3: COEFICIENTES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	77
5.3.1	Lista de Questões Aplicadas	79
5.4	OFICINA 4: CAMPEONATO “JOGO DAS ONDAS”	82
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
	REFERÊNCIAS	85

1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade a matemática e a música fazem parte da vida do ser humano. No início a música constituía apenas da emissão de sons através da voz ou batidas entre objetos e, com o passar do tempo, foram desenvolvidos instrumentos que emitiam diversos sons, mas ainda não existia uma relação harmoniosa entre eles.

Segundo (ABDOUNUR, 2006), por volta do século V a.C. Pitágoras percebeu uma relação entre a matemática e a música e como os diferentes sons emitidos simultaneamente podiam se tornar agradáveis ao ouvido humano. No Renascimento houve um aumento substancial na complexidade musical, e a escala pitagórica já não era mais capaz de atender às necessidades dos músicos da época. Foi então necessário o temperamento da escala musical, baseada em números irracionais, que culminou com a escala temperada.

Muitos matemáticos desenvolveram estudos procurando a plena compreensão do som e as relações existentes. Com os estudos de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) tornou-se possível a compreensão do som e do timbre que faz com que diferentes instrumentos tocando uma mesma nota possam ser distinguidos pelo ouvinte.

1.1 A ESCOLHA DO TEMA

A grande maioria das pessoas aprecia a música, mas muitas vezes não se percebe que por trás dos sons e de suas combinações existe uma teoria matemática que define regras para uma relação harmoniosa, ou seja, uma música agradável para quem ouve. Diante disso escolheu-se esse assunto que envolve a Matemática, a Física e a Arte interdisciplinarmente para este trabalho.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Apresentar o conceito de som e suas principais propriedades físicas na relação entre a matemática e a música.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar a história da música e sua relação com a matemática.
- Descrever as propriedades físicas dos sons através de conceitos matemáticos.
- Apresentar as principais escalas musicais e descrever como elas são construídas.
- Descrever a Série de Fourier Contínua (CFS) e o seu uso em sintetizadores analógicos aditivos.
- Propor oficinas didáticas visando contribuir para o ensino de funções trigonométricas.

1.3 JUSTIFICATIVA

Todo professor de matemática já deve ter passado pela situação em que seu aluno pergunta: “Para que serve isso?”. A pergunta é natural pois quando se aprende algo novo espera-se que isso tenha alguma utilidade. A música pode ser usada com este intuito já que muitos alunos gostam dela mas poucos sabem que a mesma se desenvolveu tendo como base conceitos matemáticos.

Mesmo entre os professores de matemática há aqueles que desconhecem a relação entre a Matemática, a Física e a Música, relação que pode trazer muitas idéias para enriquecer as aulas de matemática e despertar o interesse dos alunos.

Atualmente existe uma quantidade considerável de trabalhos que associam a Matemática, a Física e a Música, mas poucos se utilizam da Série de Fourier. Por esse motivo este trabalho tem como um dos focos o estudo da Série de Fourier Contínua no ensino de funções trigonométricas.

A interdisciplinaridade está cada vez mais presente em nossas escolas, ainda que de uma forma tímida. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) destacam a construção de um projeto curricular interdisciplinar para a melhoria do ensino e a música pode ser o instrumento a contribuir para este fim.

Assentados sobre a base ético-política do projeto escolar, e sobre o princípio da interdisciplinaridade, acredita-se que o currículo, como dimensão especificamente epistemológica e metodológica deste projeto, pode mobilizar intensamente os alunos, assim como os diversos recursos didáticos disponíveis e/ou construídos coletivamente. (MEC, 2010)

Fatos do cotidiano das pessoas não podem ser compreendidos com base em um único domínio do conhecimento, então é necessário que exista um diálogo entre as diversas disciplinas para que os estudantes tenham uma visão clara dos acontecimentos que os cercam.

O diálogo interdisciplinar entre a Matemática e a Física tendo como elo a música, permite ensinar conteúdos matemáticos de forma lúdica, podendo despertar o interesse dos alunos no aprendizado da Matemática.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (LDB, 2008), a música utilizada na prática interdisciplinar promove a facilitação da aprendizagem e a socialização:

Inúmeros estudos e pesquisas apontam para a relevância da música para o desenvolvimento das habilidades cognitivas, psicomotoras, emocionais, afetivas de crianças, jovens e adultos. Como atividade desenvolvida essencialmente em grupo nas escolas, a música possui um apelo irresistível à socialização. Além disso, se conduzido por professores qualificados, o ensino de música é um convite à interdisciplinariedade (p. 5).

Ainda, sobre a música, a mesma lei cita:

É possível estudar os elementos musicais (timbre, dinâmica, tempo, ritmo, forma) nas peças escutadas, inclusive seu contexto histórico e cultural, sem menosprezar as emoções e as impressões provocadas nos estudantes (p. 5).

Assim, a Matemática pode ser empregada no estudo dos elementos que definem o som através de conteúdos como frações, progressões geométricas, logaritmos e funções trigonométricas.

Sabe-se que a interdisciplinariedade não é fácil de ser definida. Para (FAZENDA, 1993),

o pensar interdisciplinar parte do princípio de que nenhuma forma de conhecimento é em si mesma racional. Tenta, pois, o diálogo com outras formas de conhecimento, deixando-se interpenetrar por elas. Assim, por exemplo, aceita o conhecimento do senso comum como válido, pois é através do cotidiano que damos sentido às nossas vidas. Ampliado através do diálogo com o conhecimento científico, tende a ser uma dimensão utópica e libertadora, pois permite enriquecer nossa relação com o outro e com o mundo (p.15).

Ainda, é de suma importância que as várias disciplinas ministradas em nossas Escolas mantenham um diálogo permanente, pois é preciso que o ensino abra a visão dos aprendizes e transforme estes em seres pensantes e capazes de atuar em nossa sociedade de forma ativa.

De forma complementar, tem-se a seguinte definição de interdisciplinaridade (FERREIRA, 1993):

Apesar de não possuir definição estanque, a interdisciplinaridade precisa ser compreendida para não haver desvio na sua prática. A ideia é norteada por eixos básicos como: a intenção, a humildade, a totalidade, o respeito pelo outro etc. O que se caracteriza uma prática interdisciplinar é o sentimento intencional que ela carrega. Não há interdisciplinaridade se não há intenção consciente, clara e objetiva por parte daqueles que a praticam. Não havendo intenção de um projeto, podemos dialogar, inter-relacionar e integrar sem, no entanto, estarmos trabalhando interdisciplinarmente (p. 33).

É importante que exista respeito entre as disciplinas de um projeto interdisciplinar e para o sucesso dessa prática não pode haver uma hierarquia entre elas.

1.4 ESTRUTURA DE TRABALHO

No Capítulo 1 fez-se uma pesquisa bibliográfica em livros, artigos científicos, dissertações e sites que apresentavam informações relevantes sobre o assunto definido.

No Capítulo 2 é apresentada a evolução da música desde a pré-história, passando pelos tempos de Pitágoras com o seu estudo do monocórdio e a descoberta da relação matemática nos sons harmoniosos, até os tempos atuais como o emprego da Série de Fourier Contínua.

O Capítulo 3 traz uma introdução à acústica, que é o estudo da física do som, e a Matemática envolvida no desenvolvimento dessa ciência.

No Capítulo 4 é apresentado o desenvolvimento da Série de Fourier Contínua e sua aplicação no desenvolvimento de sintetizadores analógicos aditivos.

O Capítulo 5 apresenta uma sequência de oficinas que os professores podem usar como ferramenta auxiliar no ensino de funções trigonométricas. Ainda oficinas que promovam a interdisciplinaridade com a Física e a História através de atividades relacionadas ao assunto.

E, por fim, tem-se no Capítulo 6 as Considerações Finais.

2 HISTÓRIA DA MÚSICA: DA PRÉ-HISTÓRIA AOS DIAS ATUAIS

Este capítulo apresenta a história da evolução da música desde os tempos mais remotos até os dias atuais, destacando a criação do monocórdio de Pitágoras.

2.1 A MÚSICA PRÉ-PITAGÓRICA

Segundo (BURNS, 1974), conhecer o desenvolvimento da música é o mesmo que conhecer a evolução do homem na Terra. Mesmo antes da criação dos primeiros instrumentos musicais, já se fazia música imitando os sons da natureza.

Existem indícios de que, mesmo antes do período Neolítico, a música era usada em cerimônias. No começo eram usados apenas a voz e os sons do corpo; com a evolução, foi-se construindo instrumentos para acompanhar as músicas e as danças, tornando-as mais ricas.

Segundo (ABDOUNUR, 2006), desde os tempos mais remotos é possível observar a relação existente entre a matemática e a música. Em 1995, foi encontrado nos Alpes da Eslováquia um osso de urso, Figura 1, com idade entre 43000 e 82000 anos e que possuía uma configuração de buracos capaz de produzir os elementos das notas musicais da escala diatônica moderna. Devido à distância em que os furos foram feitos é possível constatar matemática na construção do instrumento.



Figura 1: Flauta de osso de urso.
(RIBAS, 2013)

Em (PRIMORDIOS, 2012) destaca-se a descoberta de duas flautas em uma caverna no sul da Alemanha, uma feita de presa de marfim de mamute, Figura 2, e a outra feita com osso de pássaro, Figura 3.



Figura 2: Flauta de marfim de mamute.
(WIKINOTICIA, 2012)



Figura 3: Flauta de osso de pássaro.
(ELDORADO, 2009)

Burns (BURNS, 1974) relata que na antiga civilização egípcia, 3200 a.C. a 32 a.C., foram encontradas evidências de música em vários aspectos da vida cotidiana e também em todas as classes sociais. O canto e a música eram atividades de elevado nível e havia escolas especializadas para o ensino de música.

Para (ABDOUNUR, 2006) a organização das escalas musicais apresentou distintas formas em cada civilização, mas com elementos em comum: os gregos desenvolveram primeiro a escala com quatro tons e depois com sete; na China desenvolveu as sequências pentatônicas; os árabes fizeram escalas com 17 notas e os indus com 22 ou 27 notas musicais.

2.2 A ESCOLA PITAGÓRICA E O EXPERIMENTO DO MONOCÓRDIO

No século VI a.C. surgem os primeiros registros da relação entre matemática e música, o experimento do monocórdio realizado por Pitágoras, Figura 4.



Figura 4: Pitágoras e o registro da música.
(QUEIROZ, 2012)

Os seguidores de Pitágoras, conhecidos como *pitagóricos*, foram os primeiros a fundamentar cientificamente a música e acredita-se que o monocórdio tenha sido criado por Pitágoras para o estudo das notas musicais. O monocórdio é composto de uma corda esticada entre dois cavaletes, que pode ter o seu tamanho variado através de um anteparo, Figura 5.



Figura 5: Monocórdio de Pitágoras.
(R.CAMARGOS, 2010)

De acordo com a visão da escola pitagórica era possível notar uma relação entre as notas musicais e o tamanho da corda ligada à razão entre inteiros que emitia determinada nota. Essa lei descoberta por Pitágoras é a primeira lei empírica que se tem notícia na história da ciência.

Pitágoras notou que ao reduzir a corda a $\frac{3}{4}$ do tamanho original e pressioná-la, o som emitido pela corda era uma quarta acima do som emitido pela corda inteira; ao reduzir o tamanho da corda para $\frac{2}{3}$ do tamanho original e pressioná-la, o som emitido pela corda era uma quinta acima do som emitido pela corda inteira; para $\frac{1}{2}$ do tamanho original, o som percebido estava uma oitava acima. Tais intervalos, Figura 6, ficaram conhecidos como *consonâncias pitagóricas*. Considerando como 12 o tamanho da corda original e reduzindo o seu tamanho para 9, 8 e 6, ouve-se a quarta, a quinta e a oitava respectivamente.

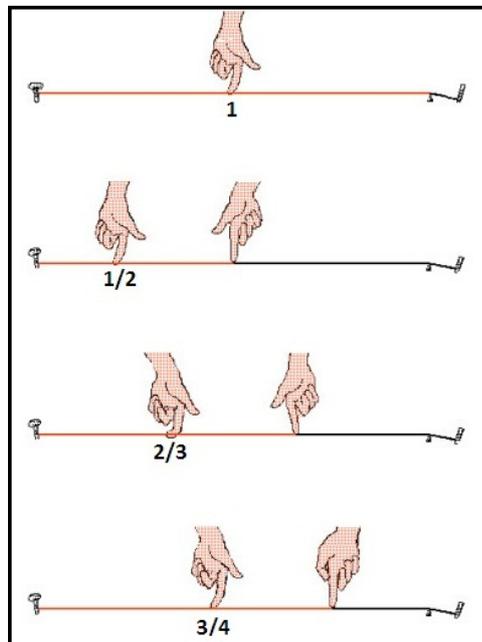


Figura 6: Relações entre o tencionamento de uma corda e os intervalos harmônicos.
(COMUNE, 2014)

A justificativa encontrada para as razões de pequenos números inteiros 1, 2, 3 e 4 deve-se ao fato de acreditarem que eles geravam toda a perfeição.

Através do experimento do monocórdio, ocorre a criação de um sistema musical baseado na relação simples de números inteiros. Os intervalos musicais obtidos através dessas relações eram considerados consonantes porque eles soavam agradáveis para quem os ouvisse.

Os pitagóricos consideravam a oitava como sendo o intervalo fundamental. Assim a tomaram como universo de escala, porém era necessário determinar todas as notas possíveis existentes em cada intervalo fundamental.

A partir do conceito de oitava é possível definir notas equivalentes como sendo notas que possuem um intervalo entre elas igual a um número inteiro de oitavas. Dessa forma, oitavas distintas se reduziriam a apenas uma única. Como exemplo de construção de uma escala pitagórica, pode-se ver em (ABDOUNUR, 2006):

Para efeito da análise em questão, quando se atinge uma nota qualquer na construção de escalas, seu significado é a sua posição relativa à nota mais grave (no caso, o do) da oitava em que se encontra. Portanto, começando, por exemplo, em um fá, após uma quinta, obtém-se um do, que por sua vez acrescido de uma quinta torna-se um sol, depois ré (oitava acima), seguido de lá, mi (oitava acima) e si. Portanto, forma-se a sequência fá-do-sol-ré-lá-mi-si, que remanejada à oitava inicial, apresenta-se como dó-ré-mi-fá-sol-lá-si-dó. Tal sequência construída por quintas puras – relação de comprimentos $2/3$ – denomina-se gama pitagórica (p.9).

O processo descrito anteriormente para se obter a escala diatônica é chamado de percurso das quintas. A escala assim obtida possuía intervalos estáveis e tornou-se progressivamente a escala de referência da música ocidental.

A relação entre as frequências construídas pelos pitagóricos tinha como base a proporção de números inteiros. Tomando-se como 1 o comprimento da corda de um monocórdio (que emite como nota fundamental a nota Dó) e fazendo o percurso das quintas obtém-se as notas Ré, com comprimento $8/9$, Mi com $64/81$, Fá com $3/4$, Sol com $2/3$, Lá com $16/27$, Si com $128/243$ e Dó uma oitava acima com $1/2$, como apresentado na Figura 7. A partir desta é possível constatar que a relação das frequências de uma nota com a anterior é respectivamente $9/8$, $9/8$, $256/243$, $9/8$, $9/8$, $9/8$ e $256/243$, o que corresponde aproximadamente no atual sistema temperado: um tom, um tom, um semitom, um tom, um tom, um tom e um semitom.

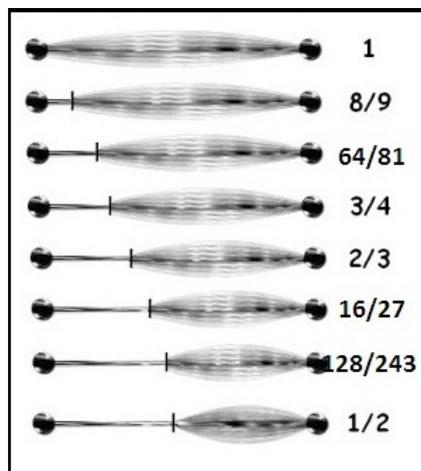


Figura 7: Relação das frequências de uma nota.
(WIKIPEDIA2, 2015)

Um fato interessante e que foi o principal motivo para a criação da *escala temperada igual* na Idade Média, é que após percorrer-se n quintas puras tem-se uma nota com uma frequência que será multiplicada por $(3/2)^n$. Porém não existe um inteiro m tal que quando percorre-se m oitavas puras, tem-se a igualdade $(3/2)^n = 2^m$. Tal desajuste é conhecido por *coma pitagórica*.

2.3 OS PRIMÓDIOS DO SOM COMO ONDA

Arquitas de Tarento (430 - 360 a.C.), Figura 8, que no período clássico grego foi um dos mais importantes teóricos musicais, teve grande importância no desenvolvimento da música e no desenvolvimento de suas bases racionais. Seus trabalhos científicos estavam ligados, em sua maioria, ao estudo das proporções musicais. Segundo (ABDOUNUR, 2006), acredita-se que possivelmente tenha sido Arquitas quem trocou a denominação de média subcontrária para média harmônica.

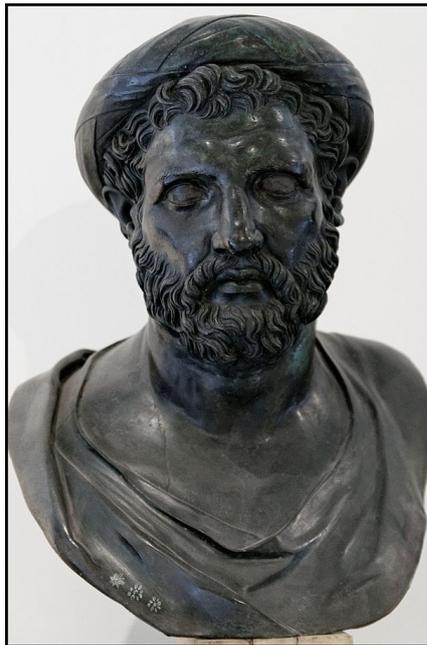


Figura 8: Arquitas de Tarento.
(WIKIPEDIA2, 2015)

Para Arquitas, a harmonia entre dois ou mais sons ocorria quando havia a fusão desses sons e os mesmos eram ouvidos como se fossem um único. Provavelmente tenha sido o primeiro a assinalar que o som era produzido devido a pulsações de ar: pulsações rápidas de ar produziriam um som agudo e pulsações lentas um som grave. Esses são os primeiros indícios da relação da frequência com a altura musical e dessa forma, a compreensão do som como onda que se propaga no ar passa a ser o elemento básico de estudo da acústica.

Enquanto Pitágoras obtinha suas notas musicais apenas utilizando o percurso das quintas, Arquitas usava como recurso na geração de suas notas musicais as médias aritméticas e harmônicas. Com seu método Arquitas obteve frações diferentes, tal como $4/5$ era associado por Pitágoras ao intervalo $64/81$.

Durante os processos utilizados por Arquitas ocorre o aparecimento de razões que tendem a razões irracionais, o que é um prenúncio do *temperamento igual*¹, que irá aparecer somente na Idade Média.

2.4 A MÚSICA NA IDADE MÉDIA

Segundo (BERGONOSO, 2013), para o cidadão romano e escritor Boécio (480-524 d.C.), que tinha suas ideias apoiadas fortemente na doutrina pitagórica das consonâncias, a música era sinônimo de harmonia e uma relação adequada entre números. Dividiu-a em três tipos distintos: música cósmica, música humana e música instrumental.

- **Música cósmica ou mundana** é a harmonia que ocorre nos corpos celestes, nos elementos naturais em combinação e o que decorre dessas variações.
- **Música humana** é a harmonia que ocorre no homem, entre o seu corpo e a sua alma.
- **Música instrumental** é aquela produzida por instrumentos que acompanham determinadas canções.

Em (ABDOUNUR, 2006) tem-se que durante a Idade Média, de aproximadamente 800 d.C. até o início do Renascimento, a música ocidental passa por profundas mudanças, passando de um caráter exclusivamente melódico para uma percepção harmônica. Durante os séculos VI e IX a forma musical utilizada era o *cantochão*, que se constituía de uma única melodia limitada pelo intervalo de uma oitava.

As primeiras músicas polifônicas começaram a aparecer por volta do século IX. Conhecidas como *Organum Paralelo*, consistiam basicamente na duplicação de um *cantochão*. Entre os séculos IX e XI d.C. o canto evolui para o *organum livre*, forma que se liberta da trajetória paralela permitindo movimento de notas contrárias, oblíquas e diretas. Destaca-se nesse período D'Arezzo (955-1055), que constitui a atual teoria musical e também nomeou as notas

¹O temperamento igual é um sistema de afinação musical encontrado atualmente no ocidente, em que a oitava é dividida em 12 semitons exatamente iguais, ou seja, cada semitom corresponde a um intervalo de $2^{\frac{1}{12}}$. Neste método de afinação, apenas as oitavas são perfeitamente afinadas; cada quinta é reduzida de uma mesma quantidade de forma a espalhar de maneira uniforme o coma pitagórica.

musicais conhecidas até hoje baseado em um escrito sagrado em latim a São João Batista, Figura 9. A tradução desse escrito é: “Para que teus grandes servos possam ressoar claramente a maravilha dos teus feitos, limpe nossos lábios impuros, ó São João.”

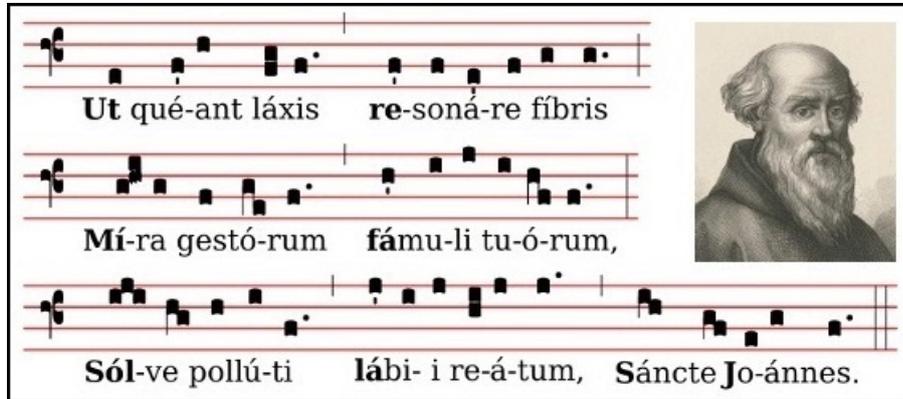


Figura 9: Escrito sagrado em latim a São João Batista.
 (ARTESEMPRE, 2012)

O *Organum Livre* se mantém dominante até o século XII, quando é substituído pelo *Organum Melismático*. Este traz uma maior diversificação rítmica para a música com a presença de uma voz principal chamada *tenor*.

Vários exemplos de melismas são encontrados no Período Barroco, principalmente nas músicas de Bach.

2.5 O DESENVOLVIMENTO DA MÚSICA A PARTIR DO RENASCIMENTO

O Renascimento foi um período marcado por intenso processo de matematização, experimentação e mecanização; os processos naturais deveriam ser explicados através de fórmulas e teorias matemáticas. Neste novo ambiente, a ciência matemática-música passa a buscar explicações racionais para seus fenômenos.

A partir de então se tem o início da física da música como é conhecida atualmente, a busca pela compreensão dos harmônicos musicais e consequente explicação quantitativa de timbre. É o início da acústica musical e do surgimento de uma dúvida quanto aos harmônicos do som: como poderia um mesmo comprimento de corda produzir mais de uma altura ao mesmo tempo?

Outros estudiosos que se destacaram nessa época: Taylor (1685-1731), Jean-Pilippe Rameau (1683-1764), Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond d’Alembert (1717-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782).

No século XVIII, um dos principais objetivos era calcular uma altura fundamental e seus harmônicos. D'Alembert afirmou que um som não era puro, mas a superposição de diversos harmônicos, ou seja, a vibração de um corpo sonoro poderia ser observada como superposição de seus modos simples com distintas amplitudes. Para demonstrar teoricamente suas afirmações, D'Alembert utilizou o Teorema de Fourier, que se transformou no fundamento para análise de harmônicos, consonância/dissonância, batimentos dissonantes, além de outros conceitos musicais aparentemente dissociados da matemática. O Teorema de Fourier ficou conhecido como a Lei de Ohm da Acústica, servindo como ferramenta fundamental para os estudos do cientista alemão Hermann Helmholtz (1819-1880) sobre sons parciais.

Em 1849 foi registrada com relativa precisão a vibração de uma onda sonora pelo cientista Guillaume Wertheim e em 1908 Dayton C. Miller verificou que o som está associado a movimentos periódicos. Atualmente, a natureza do som pode ser verificada através de recursos mais elaborados como o osciloscópio.

Segundo (IAZZETA, 2009), os avanços tecnológicos, como o gramofone inventado por Emil Berliner em 1887 e o telefone inventado por Alexander Graham Bell em 1876, fizeram com que a relação do homem com o som sofresse profundas mudanças. A partir de 1900 foram criados os primeiros pré-sintetizadores como o Theremin, Figura 10, o Trautonium e o Ondes Martenot, utilizados na produção de efeitos sonoros.



Figura 10: Modelo de pré-sintetizador: E Theremin for IOS.
(KIRN, 2013)

No período de 1948 a 1959 uma nova arte sônica chamada de música eletroacústica começou a ser desenvolvida. Esta só podia ser produzida através de meios eletrônicos. O primeiro programa de computador para síntese sonora, criado por Max Mathews (1926-2011), Figura 11, era de alto custo e seu uso estava restrito a estúdios de rádios, universidades e centros de pesquisas.



Figura 11: Max Mathews.
(HAVEN, 2011)

Em 1963 foi criado o BUCHLA primeiro sintetizador comercial e em 1964 os sintetizadores Moog, Figura 12. Assim a música eletrônica começou a ser divulgada para o mundo através de álbuns gravados com sintetizadores. Na década de 70, o sintetizador tornou-se um dos principais instrumentos a ser utilizado para apresentações multimídia com grandes platéias e surge a indústria dos instrumentos eletrônicos com a criação de sintetizadores portáteis analógicos.



Figura 12: Sintetizador MOOG.
(WIKIPEDIA3, 2015)

Na década de 80 são criados os primeiros sintetizadores digitais, Figura 13. Estes passam a ser polifônicos (até então eram monofônicos) e sensíveis ao toque e tornam-se muito utilizados em publicidades e trilhas sonoras de cinemas. Na década de 90 são desenvolvidos os sintetizadores comerciais com novas técnicas de síntese que simulam instrumentos acústicos. Já no século XXI, com os sintetizadores virtuais e os computadores, todo o processo de criação das músicas eletrônicas pode ser feito através de softwares.



Figura 13: Sintetizador Digital.
(WIKIPEDIA4, 2015)

Através da criação dos sintetizadores e da música eletrônica a relação que existia entre a música e a matemática desde a época de Pitágoras se torna ainda mais forte.

3 MATEMÁTICA E FÍSICA: MÚSICA E SOM

Como a música é a sobreposição harmoniosa de sons e o som é um ente físico cujo estudo é realizado através da matemática, este capítulo será dedicado ao estudo do som, dos elementos envolvidos em sua produção e a integração que ocorre entre a matemática e a física.

3.1 SOM

Para (NUSSENZVEIG, 2011), o som faz parte do cotidiano das pessoas e para que ele possa atingir os ouvidos é necessário um meio material para a sua propagação.

O som é definido como a propagação tridimensional em meios materiais (sólidos, líquidos, gases) de uma frente de compressão mecânica ou onda longitudinal.

3.2 ONDAS SONORAS E O MOVIMENTO ONDULATÓRIO

Em (RAMALHO et al., 2014), as ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais associadas a uma variação de pressão ou seja compressões e rarefações, Figura 14. Elas se originam a partir de vibrações do ar que são detectadas pelo tímpano com frequência e amplitude definidas. Por exemplo, quando uma bomba explode em um determinado ponto, as moléculas que estão no local são comprimidas e vão se propagando ao longo dos meios materiais, originando uma onda sonora que atinge o ouvido. Este converte em estímulo nervoso e ao alcançar o cérebro produz a sensação auditiva, o som.

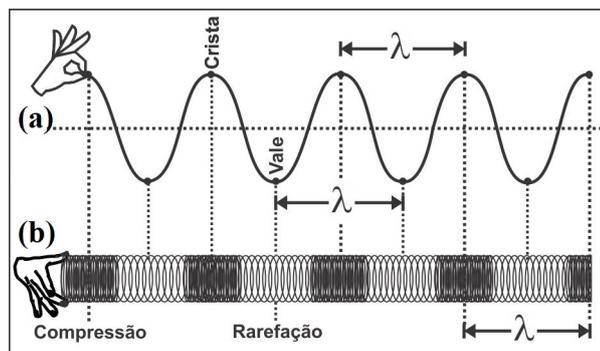


Figura 14: Representação de ondas: (a) transversais; (b) ondas longitudinais.
(BORGES, 2013)

A frequência sonora é medida em hertz (Hz), que é o número de oscilações completas no intervalo de tempo de um segundo. As ondas que possuem frequência inferior a 20 hertz (20 Hz) são denominadas *infrassom*, já as que possuem frequência superior a 20 kilohertz (20 kHz) são chamadas de *ultrassom*. Ambas são imperceptíveis ao ouvido humano.

3.2.1 PROPAGAÇÃO DO SOM

As ondas são perturbações que se propagam em vários meios: materiais, caso da onda sonora; as ondas eletromagnéticas, que não precisam de um meio material para se propagarem, caso da luz e do Raio-X.

Para (WISNIK, 2014), o fato do som ser uma onda significa que ele é periódico, ou seja, há uma frequência que se repete por um determinado intervalo de tempo. A frequência nesse caso é o número de compressões e rarefações ocorridas com o passar de um intervalo de tempo de um segundo.

As ondas mecânicas podem ser classificadas, de acordo com a direção da vibração, em transversais e longitudinais. As ondas transversais são aquelas em que o meio de propagação tem movimento perpendicular à propagação da onda, Figura 14(a); nas ondas longitudinais, o meio de propagação tem movimento na mesma direção do deslocamento da onda, como na Figura 14(b).

As ondas possuem certas características como:

- frequência (f): representa o grau de oscilação dos pontos do meio no qual a onda se propaga, ou seja, o número de oscilações completas por segundo. A frequência de uma onda é medida em hertz (Hz). Se a frequência é de 75 Hz, isto significa que a onda oscila 75 vezes por segundo;
- período (T): é o tempo mínimo que a fonte precisa pra gerar uma onda completa, relacionando a frequência (f) com o período (T):

$$T = \frac{1}{f};$$

- comprimento da onda (λ): é o tamanho da onda e esse comprimento pode ser medido de crista a crista (parte mais alta da onda), ou de vale a vale (parte mais baixa da onda);
- velocidade (v): é a velocidade de propagação da onda conhecida por velocidade de fase:

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda; \quad (1)$$

- amplitude (A): é a metade da distância entre a parte mais baixa (vale) e a parte mais alta (crista) da onda, ou seja, é a “altura” da onda.

As ondas ainda podem ser classificadas em relação à direção de propagação em unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais.

Para (SERWAY; JEWETT, 2004) uma onda pode ser formada agitando-se a extremidade de uma corda, Figura 15, construída no Winplot (PARRIS, 2009). Esta ainda é chamada de senoidal e nela destacam-se o comprimento de onda, a frequência e o período.

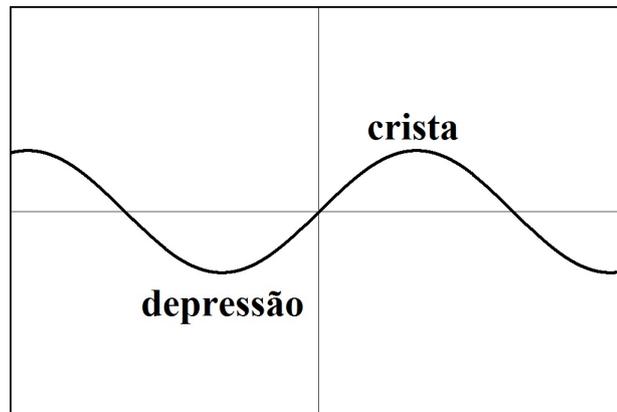


Figura 15: Crista e depressão (vale) de uma onda.

3.2.2 ONDAS SENOIDAIS

As ondas senoidais, Figura 16, são produzidas por uma fonte que oscila em movimento harmônico simples (MHS) que é o movimento oscilatório ocorrido quando a aceleração e a força resultante são proporcionais e opõem ao deslocamento. A função é uma senoidal simples e a equação da curva é dada por

$$y = A \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right),$$

onde y é o deslocamento em uma posição qualquer x , A é a amplitude da curva e $\frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda.

Se a curva que representa a onda no instante t é deslocada para trás da distância $-vt$, ela irá coincidir com a do instante zero. Assim, a equação da curva no instante t é

$$y = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right). \quad (2)$$

Como o período T é o tempo que a onda leva para se deslocar à distância de um comprimento de onda e o período e a velocidade são relacionados na equação (1), pode-se

reescrever (2), como

$$y = A \sin \left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right). \quad (3)$$

Através da equação (3) é possível constatar a natureza periódica de y no espaço.

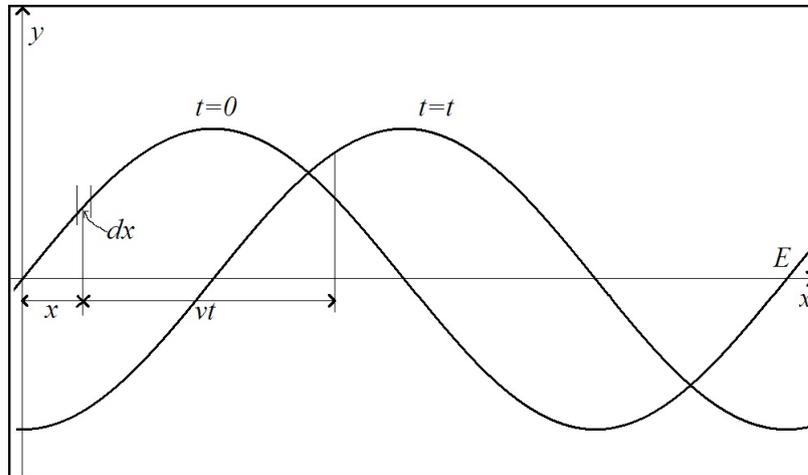


Figura 16: Gráfico representando uma onda senoidal progressiva.

Exemplo 3.1. (RESNICK et al., 2003) Uma onda senoidal transversal é gerada em uma das extremidades de uma longa corda horizontal através de uma barra, cuja extremidade é movimentada para cima e para baixo dentro de um percurso de 1,30 cm. O movimento é contínuo e repetido regularmente 125 vezes por segundo.

(a) Se a distância observada entre duas cristas de onda adjacentes é de 15,6 cm, encontre a amplitude, a frequência, a velocidade e o comprimento de onda do movimento ondulatório.

(b) Admitindo-se que a onda se mova no sentido positivo de x e que, em $t = 0$, o elemento da corda em $x = 0$ está na posição de equilíbrio $y = 0$ e se movendo para baixo, encontre a equação de onda.

Solução:

(a) Quando a barra se move 1,30 cm, a extremidade da corda se move de $1,30/2 = 0,65$ cm para fora do ponto de equilíbrio, primeiro para cima e depois para baixo. Logo, a amplitude é de 0,65 cm.

O movimento completo é repetido 125 vezes a cada segundo, ou seja, a frequência é de 125 Hz. A distância entre duas cristas de onda adjacentes, que é dada como 15,6 cm, é o próprio comprimento de onda. Assim $\lambda = 15,6 \text{ cm} = 0,156 \text{ m}$.

A velocidade da onda é dada pela equação (1):

$$v = \lambda \cdot f = (0,156)(125) = 19,5 \text{ m/s. (b) Substituindo os dados em (2), obtém-se:}$$

$$y = (0,65) \sin \left[\frac{2\pi}{0,156} (x - 19,5t) \right],$$

$$y = (0,65) \sin \left[\frac{2\pi}{0,156} x - \frac{2\pi 19,5t}{0,156} \right],$$

$$y = (0,65) \sin \left[\frac{500}{39} \pi x - 250\pi t \right].$$

Assim, a equação que define a função onda é dada por:

$$y = (0,65) \sin \left[\frac{500}{39} \pi (x - 19,5t) \right].$$

3.2.3 QUALIDADES FISIOLÓGICAS DO SOM

A altura sonora está relacionada com a frequência da onda: quanto maior a frequência, mais alto será o som (mais agudo); quanto menor a frequência, mais baixo será o som (mais grave), Figura 17.

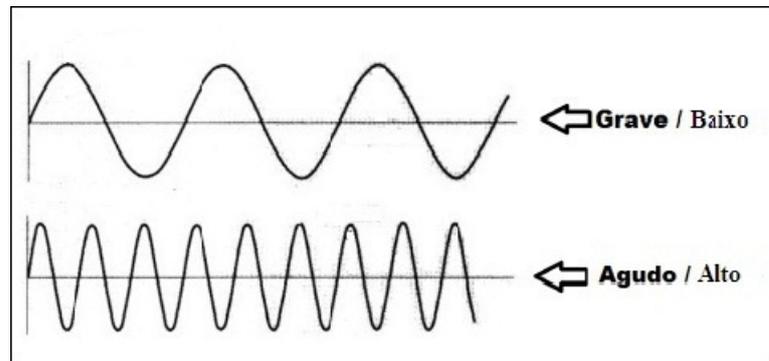


Figura 17: Som grave (baixa frequência) e som agudo (alta frequência).
(SANTOS, 2013)

Para (FERENCE, 1971), a altura é a principal característica que diferencia sons musicais da mistura heterogênea chamada ruído.

A intensidade é a qualidade sonora que permite a distinção entre sons fortes e fracos e este fenômeno está ligado à amplitude da onda: quanto maior a amplitude do som, mais forte ele é; quanto menor a amplitude do som, mais fraco ele é, Figura 18.

Quando ocorre a produção simultânea de vários sons com diferentes frequências, diz-se que é produzido um som de amplitude variável periodicamente. Este fenômeno é denominado batimento.

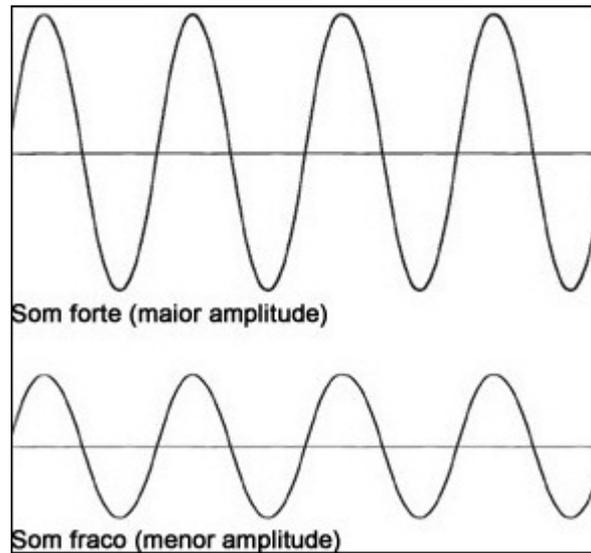


Figura 18: Som forte (grande amplitude) e som fraco (baixa amplitude).
(SANTOS, 2013)

A intensidade (I) do som é a quantidade de energia que atravessa uma unidade de área em um segundo, ou seja, é a potência sonora (P) por unidade de área (A):

$$I = \frac{P}{A}. \quad (4)$$

Sabendo que a potência é definida pela relação entre energia (E) e unidade de tempo (Δt), tem-se que

$$P = \frac{E}{\Delta t}. \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4), obtém-se:

$$I = \frac{E}{A\Delta t}.$$

As unidades de medidas mais comumente utilizadas para a intensidade do som são (J/m^2) e (w/m^2), ou seja, utilizando as unidades Joule e Watts, respectivamente.

O menor valor para a intensidade sonora em que ainda é possível ouvir o som é denominado limiar de audibilidade, sendo seu valor $I_0 = 10^{-12} w/m^2$; o maior valor para a intensidade sonora que é suportável para o ser humano é denominado de limiar de dor e seu valor é $I_{máx} = 1 w/m^2$.

É possível notar que ao se afastar de uma fonte sonora ocorre uma diminuição lo-

garítmica da intensidade sonora e o nível sonoro (N) é calculado por:

$$N = 10 \log \frac{I}{I_0}. \quad (6)$$

Em (NUSSENZVEIG, 2011), a unidade de nível sonoro é o bel, sendo que dois sons diferem de 1 bel quando a intensidade de um é 10 vezes maior que a do outro. Por praticidade adotou-se como unidade padrão o decibel.

A Figura 19 apresenta alguns sons que fazem parte do cotidiano e suas respectivas intensidades em decibéis (dB).



Figura 19: Escala com o nível de pressão sonora.
(SILVEIRA, 2010)

Exemplo 3.2. (SOFISICA, 2015) A legislação brasileira proíbe o uso de buzinas em regiões próximas a hospitais, escolas e dentro de túneis. Se um motorista buzinar dentro de um túnel com um nível de intensidade sonora igual a 90 dB, considerando que a intensidade padrão do túnel é o Limiar da Sensação Audível (LSA). Se 10 motoristas buzinares dentro de um túnel, simultaneamente, com a mesma intensidade sonora, qual será o nível de intensidade sonora dentro do túnel?

Solução: Para resolver este problema deve-se considerar a equação (6) que descreve a intensidade do nível sonoro.

Sendo que a intensidade sonora equivalente ao limiar da sensação audível (LSA) é igual a $I_0 = 10^{-12} \text{ w/m}^2$, calcula-se a intensidade sonora de cada buzina:

$$90 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}},$$

$$\frac{90}{10} = \log \frac{I}{10^{-12}},$$

$$\log \frac{I}{10^{-12}} = 9,$$

$$10^{\log \frac{I}{10^{-12}}} = 10^9,$$

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^9$$

$$I = 10^9 \cdot 10^{-12},$$

$$I = 10^{-3} \text{ w/m}^2.$$

Conhecendo a intensidade de cada buzina é possível descobrir a intensidade resultante das 10 buzinas funcionando simultaneamente:

$$I = 10^{-3} \cdot 10,$$

$$I = 10^{-2} \text{ w/m}^2.$$

Calculando o nível da intensidade sonora para as 10 buzinas, tem-se:

$$N = 10 \log \frac{10^{-2}}{10^{-12}},$$

$$N = 10 \log 10^{10},$$

$$N = 10 \cdot 10,$$

$$N = 100 \text{ dB}.$$

O timbre é o que permite distinguir uma mesma nota emitida por instrumentos diferentes; é a composição das frequências que constituem uma onda sonora. Um som será agradável se as frequências que constituem o som são múltiplas uma das outras; caso contrário, o som é considerado desagradável.

Ao se tocar um determinado instrumento, segundo (RAMALHO et al., 2014), uma

nota é emitida e ela é composta da superposição de múltiplos sons de frequências diferentes. O som de menor frequência é o som fundamental; os outros, que são múltiplos do fundamental, são os harmônicos, Figura 20. O segundo harmônico tem frequência duas vezes maior que o fundamental e o terceiro harmônico três vezes maior que o fundamental e assim sucessivamente.

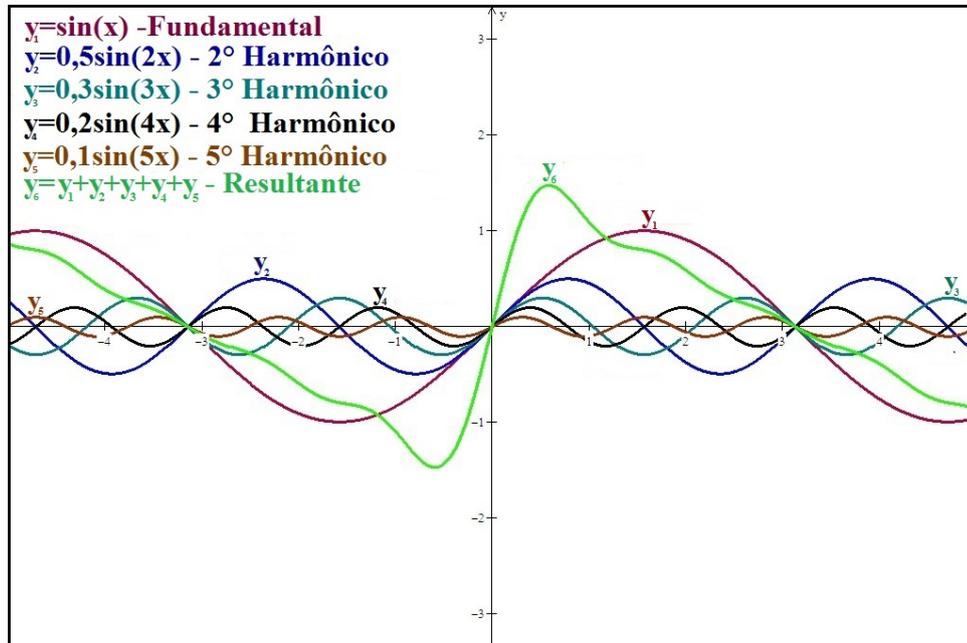


Figura 20: Composição de uma nota: superposição de múltiplos sons.

A frequência do som emitido é determinada pelo som fundamental (primeiro harmônico) e os harmônicos que acompanham o som fundamental variam de um instrumento para outro. A representação da forma da onda resultante em um aparelho como um osciloscópio será diferente apesar dos sons terem uma mesma frequência, como é apresentado na Figura 21.

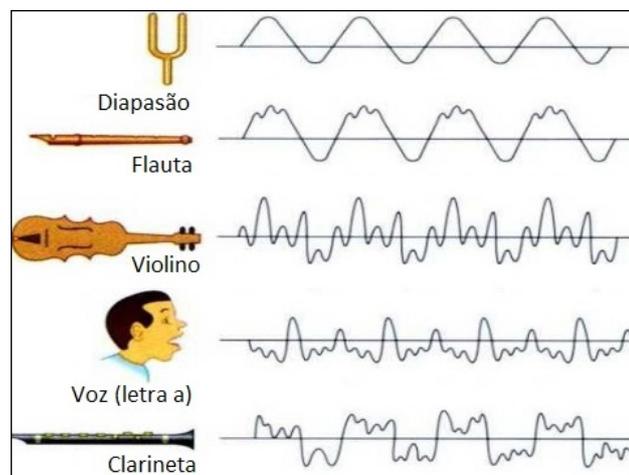


Figura 21: Representação do timbre de vários instrumentos sonoros.
(COSTA, 2013)

Em (FERENCE, 1971), nota-se que é possível criar tons musicais através de instrumentos eletrônicos denominados sintetizadores: um tom complexo pode ser decomposto em tons fundamentais; da mesma forma um tom complexo pode ser criado a partir de certo número de tons simples, mas é necessário que as amplitudes e as frequências dos tons parciais sejam as mesmas existentes no som original.

3.3 ESCALAS MUSICAIS

No Capítulo 2 foi exposta uma breve descrição da escala pitagórica e a escala temperada igual que agora será descrita em detalhes. Em (ACADEMIAMUSICAL, 2012), define-se escala musical como:

Uma escala musical é um conjunto de notas musicais ordenadas em sequência da nota mais grave para a mais aguda. Cada escala musical tem a sua própria sonoridade característica. Quando se compõe uma música, após escolher uma escala musical, utilizam-se as notas que pertencem a essa escala, se tocar uma nota fora da escala notará um som “desafinado”.

3.3.1 A ESCALA PITAGÓRICA

De acordo com (MENEZES, 2014), com a divisão da corda de um monocórdio, Pitágoras concluiu que as combinações “consonantes” eram o que se denomina hoje por oitava, quinta, quarta e unísono, Figura 22, que estão nas respectivas proporções $2 : 1$, $3 : 2$, $4 : 3$, $1 : 1$.

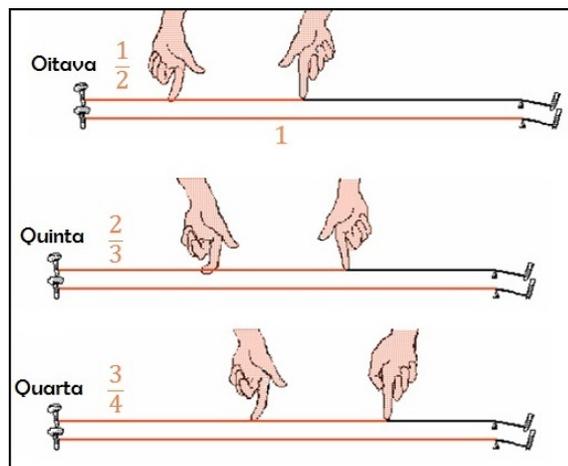


Figura 22: Representação das porções de uma corda de um monocórdio.
(LIMA, 2014)

A construção da escala pitagórica tem como base a oitava e a quinta e através da indução de suas proporções obtém-se os intervalos consonantes.

Existem duas definições distintas para o intervalo entre duas notas: uma musical que é definida, por exemplo, pelo espaço entre os dois pontos de um teclado e a outra física, dada pela razão entre as frequências.

Utilizando a definição física de intervalo musical, ou seja, somar dois intervalos musicais corresponde fisicamente a multiplicar suas razões, ao se considerar quatro notas de frequências $f_1 = 50 \text{ Hz}$, $f_2 = 25 \text{ Hz}$, $f_3 = 5000 \text{ Hz}$ e $f_4 = 2500 \text{ Hz}$, calculando a distância entre f_1 e f_2 tem-se $50 \text{ Hz}/25 \text{ Hz} = 2/1$ e entre f_3 e f_4 tem-se $5000 \text{ Hz}/2500 \text{ Hz} = 2/1$, assim a distância entre f_1 e f_2 é igual a distância entre f_3 e f_4 .

Diferente do estudo de frações conhecido na matemática, quando se calcula a distância entre duas notas obtém-se como resultado uma razão em que as ordens do numerador e do denominador são irrelevantes, ou seja, uma quinta pode ser expressa tanto pela razão $3 : 2$ quanto pela razão $2 : 3$. Dessa forma, para se obter uma quinta acima (uma frequência maior) multiplica-se a frequência por $3 : 2$ e para se obter uma quinta abaixo (uma frequência menor) multiplica-se por $2 : 3$; para se obter uma quarta acima multiplica-se f por $4 : 3$ e para se obter uma quarta abaixo multiplica-se por $3 : 4$; para se obter uma oitava acima multiplica-se por $2 : 1$ e para obter-se uma oitava abaixo multiplica-se por $1 : 2$. Ao considerar uma frequência f e obter uma quinta acima, ou seja, $(3 : 2)f$ e logo após obter uma quarta acima $(4 : 3)f$ da nota resultante, tem-se $(4 : 3)(3 : 2)f = 2f$, isto é, uma oitava acima de f . Neste caso, os intervalos da quinta e da quarta são uma *inversão* da outra.

Nas escalas musicais, somar dois intervalos corresponde a multiplicar suas razões. Logo, somar uma quinta com uma quarta resulta em uma oitava:

$$\text{quarta} + \text{quinta} = \text{oitava} \Leftrightarrow (4 : 3) \cdot (3 : 2) = 12/6 = 2.$$

A partir disso, Pitágoras foi capaz de construir a sua escala diatônica através dos seguintes passos:

1. da frequência f (*Dó*), tem-se a oitava acima (*Dó2*);
2. da quinta abaixo de $2f$ (ou da quarta acima de f), tem-se *Fá*, ou $(4/3)f$;
3. da quinta acima de f (*Dó*), tem-se $(3/2)f$ (= *Sol*);
4. da quarta abaixo de *Sol*, tem-se *Ré*, na razão $(3/4) \cdot (3/2)f = (9/8)f$;

5. da quinta acima de *Ré*, tem-se *Lá*, na razão $(3/2) \cdot (9/8)f = (27/16)f$;
6. da quarta abaixo de *Lá*, tem-se *Mi*, na razão $(3/4) \cdot (27/16)f = 81/64f$;
7. da quinta acima de *Mi*, tem-se *Si*, na razão $(3/2) \cdot (81/64)f = 243/128f$.

Considerando $f = 264 \text{ Hz}$ a frequência da nota *Dó*, tem-se a razão entre as frequências em uma oitava da escala musical, a razão entre as notas e a fundamental, e o intervalo entre cada nota e a anterior, na escala do *Dó* maior, Figura 23.

Nota	Frequência	Razão	Intervalo
<i>Dó</i>	264	$1f$	$9/8$
<i>Ré</i>	297	$9f/8$	$9/8$
<i>Mi</i>	334,1	$81f/64$	$256/243$
<i>Fá</i>	352	$4f/3$	$9/8$
<i>Sol</i>	396	$3f/2$	$9/8$
<i>Lá</i>	445,5	$27f/16$	$9/8$
<i>Si</i>	501,2	$243f/128$	$256/243$
<i>Dó</i>	528	$2f$	

Figura 23: Frequências das notas.
(LIMA, 2014)

Ainda, as razões entre duas notas consecutivas foram obtidas pela razão entre a fração maior e a menor. Por exemplo, a razão entre a nota *Ré* ($9/8$) e a nota *Mi* ($81/64$) é $(81/64) : (9/8) = 9/8$; o mesmo ocorre entre as notas *Dó* e *Ré*, *Sol* e *Lá* e *Lá* e *Si*. A razão entre a nota *Mi* ($81/64$) e a nota *Fá* ($4/3$) é $(4/3) : (81/64) = 256/243$; o mesmo ocorre entre as notas *Si* e *Dó*. Logo, existem duas razões de intervalos:

- $9/8 = 1,125$ (tom inteiro pitagórico);
- $256/243 = 1,05349794238$ (semitom diatônico pitagórico).

Continuando com a propagação de quartas e quintas pode-se concluir a escala pitagórica com base no menor intervalo até então encontrado (o semitom pitagórico). Fazendo uma quarta abaixo de *Si* ($243/128$) obtém-se $(3/4) \cdot (243/128) = 729/512$ que é o *Fá#* (*Fá* sustenido). O intervalo entre a nota *Fá#* ($729/512$) e a nota *Sol* ($3/2$) será $(3/2) : (729/512) = 256/243$, que corresponde exatamente a um semitom diatônico pitagórico. Mas quando se calcula o intervalo entre a nota *Fá* ($4/3$) e a nota *Fá#* ($729/512$), obtém-se $(729/512) : (4/3) = 2187/2048$ que é outro resultado para o semitom chamado de semitom cromático pitagórico.

Prosseguindo com os cálculos utilizando o tom-inteiro pitagórico ($9/8$), obtém-se a nota $Si\#$, enarmônica¹ de $Dó$ uma oitava acima, através dos seguintes passos:

- o intervalo entre as notas $Dó$ (1) e $Ré$ ($9/8$) é $(9/8) : (1) = 9/8$;
- o intervalo entre as notas $Ré$ ($9/8$) e Mi ($81/64$) é $(81/64) : (9/8) = 9/8$;
- o intervalo entre as notas $Dó$ (1) e Mi ($81/64$) é $(9/8) \cdot (9/8) = (81/64) = (9/8)^2$;
- o intervalo entre as notas $Dó$ (1) e $Fá\#$ ($729/512$) é $(9/8) \cdot (9/8) \cdot (9/8) = 729/512 = (9/8)^3$;
- prosseguir até que o intervalo entre as notas $Dó$ (1) e $Si\#$ ($531441/262144$) seja $(9/8)^6/2 = (531441/262144)/2 = 531441/524288 = 1,01364326477$.

Logo, o resultado não será um como esperado, pois as notas $Si\#$ e $Dó2$ (uma oitava acima) deveriam ser a mesma nota, o que não ocorre. Essa pequena diferença, mostrada na Figura 24, é chamada de *coma pitagórica* e é a mesma que ocorre entre os semitons cromáticos e diatônicos pitagóricos, ou seja, $(2187/2048) : (256/243) = 531441/524288$.

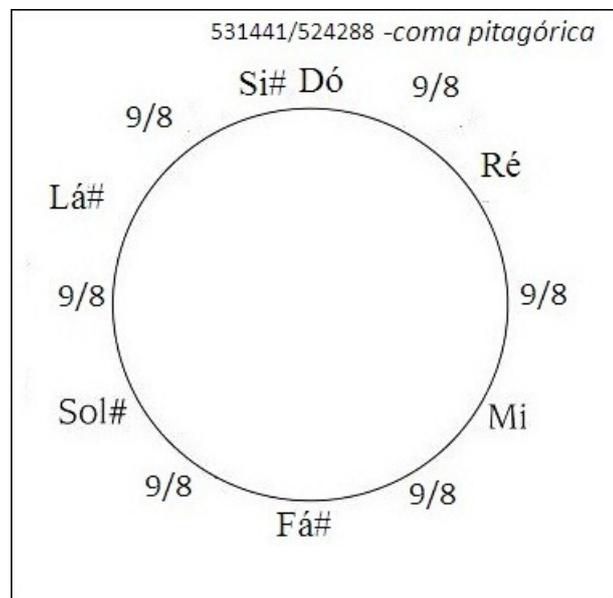


Figura 24: Representação do coma pitagórico.

Ao fazer seis vezes a sobreposição do tom inteiro sobre si mesmo ou seis vezes a sobreposição da diferença entre os dois tipos de semitons da escala pitagórica, o resultado será o mesmo, ou seja, $(9/8)^6 = [(256/243) \cdot (2187/2048)]^6 = 2,02728652954$.

¹Enarmônica: notas distintas que produzem o mesmo som.

O coma pitagórico também pode ser interpretado como a diferença entre a sobreposição de 12 quintas e 7 oitavas, que deveria resultar em um, o que não ocorre porque

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = 1,01364326477.$$

A razão do coma pitagórico é aproximadamente igual a $74/73 = 1,0137$ e ela foi responsável pelas limitações que a escala pitagórica apresentou ao longo do tempo.

3.3.2 A ESCALA TEMPERADA IGUAL

Segundo (MENEZES, 2014), o temperamento igual consiste em dividir a oitava em partes iguais. Assim o coma pitagórico era distribuído entre todas as notas da escala temperada. Para determinar o intervalo a em que seria dividida a escala era preciso que, após 12 passos intervalares, fosse atingido a oitava seguinte, que corresponderia à razão 2 : 1 de sua frequência.

Considerando f a frequência de uma determinada nota da escala temperada e q a razão entre duas notas consecutivas, pode-se obter a seguinte relação entre elas, na (Tabela 1), uma frequência qualquer será a frequência anterior multiplicada por uma constante q .

Tabela 1: As notas musicais da escala temperada.

Dó	Dó#	Ré	Ré#	Mi	Fá	Fá#	Sol	Sol#	Lá	Lá#	Si	Dó1
f	$q.f$	$q^2.f$	$q^3.f$	$q^4.f$	$q^5.f$	$q^6.f$	$q^7.f$	$q^8.f$	$q^9.f$	$q^{10}.f$	$q^{11}.f$	$q^{12}.f$

Como o $Dó1$ tem uma frequência duas vezes maior que a frequência do primeiro $Dó$, tem-se que

$$2f = q^{12}f,$$

$$2 = q^{12},$$

$$q = \sqrt[12]{2},$$

$$q \approx 1,05946309436.$$

O intervalo 1,0594 de frequência é usado para se obter o semitom temperado acima ou abaixo de qualquer nota. Multiplicando-se uma frequência por 1,0594, obtém-se o semitom superior; dividindo-se uma frequência por 1,0594, obtém-se o semitom superior.

Como exemplo seja a nota $Lá$, comumente utilizada na afinação de instrumentos musicais. Essa nota possui uma frequência universalmente definida como sendo de 440 Hz . Então,

para se obter a frequência da nota Dó imediatamente anterior a ela, basta fazer os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}La &= q^9 \cdot f, \\440 &\approx (1,059)^9 \cdot f, \\f &\approx \frac{440}{(1,059)^9}, \\f &\approx 262 \text{ Hz}.\end{aligned}$$

Como a nota Dó possui uma frequência aproximada de 262 Hz, empregando-se $q = 1,0594$, e $f = 262 \text{ Hz}$ da Tabela 1, pode-se obter as frequências das demais notas da escala temperada.

Exemplos:

1)

$$\begin{aligned}Dó\# &= q \cdot f, \\Dó\# &\approx 1,059 \cdot 262, \\Dó\# &\approx 277 \text{ HZ}.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}Ré &= q^2 \cdot f, \\Ré &\approx (1,059)^2 \cdot 262, \\Ré &\approx 294 \text{ Hz}.\end{aligned}$$

Os resultados anteriores podem ser generalizados: sejam f_x e f_y as frequências final e inicial, respectivamente então pode-se escrever a seguinte relação:

$$f_x = f_y \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^n,$$

onde n é a quantidade de semitons.

Ao começar com uma frequência de 440 Hz para se obter um semitom acima, tem-se a frequência da nota Lá: $440 \left(\sqrt[12]{2}\right)^1 \approx 466,164 \text{ Hz}$. Usando a frequência de 440 Hz, e descendo um semitom, obtém-se a frequência da nota Sol: $\frac{440}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^1} \approx 415,305 \text{ Hz}$.

De maneira análoga é possível determinar a frequência de qualquer nota no sistema temperado. Por exemplo, considerando-se como ponto inicial a frequência de 1435 Hz para calcular a frequência de uma nota a 15 semitons temperados abaixo, deve-se fazer o seguinte

cálculo:

$$\frac{1435}{(\sqrt[12]{2})^{15}} \approx 603,343 \text{ Hz.}$$

4 FOURIER E A MÚSICA

Neste capítulo será apresentada a Série de Fourier Contínua e o seu uso em sintetizadores musicais, utilizados na composição de músicas.

4.1 JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER

Jean-Baptiste Joseph Fourier (WIKIPEDIA1, 2010), Figura 25, nasceu em Auxerre, França, em 21 de março de 1768 e foi um dos mais notáveis matemáticos de sua época.



Figura 25: Jean-Baptiste Joseph Fourier.
(WIKIPEDIA1, 2010)

Educado em uma escola de monges beneditinos, sobressaiu-se nos estudos matemáticos. Participou de forma ativa na Revolução Francesa de 1798 e, ao término dela, iniciou seus estudos na Escola Politécnica de Paris.

Em 1798 acompanhou Napoleão Bonaparte na sua expedição ao Egito e se interessou pela investigação arqueológica da civilização faraônica. Transformou-se em um reconhecido

egiptólogo e ocupou o cargo de secretário do Instituto do Egito, fundado por Napoleão no Cairo. Em seu regresso à França recebeu o título de Barão em 1809. Com a queda de Napoleão, desligou-se da política e desfrutou da vida acadêmica em Paris, sendo eleito membro de várias sociedades científicas em virtude de seu prestígio como pesquisador. Fourier faleceu em Paris no dia 16 de maio de 1830.

4.2 A SÉRIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

A série de Fourier contínua é a ferramenta matemática que permite a composição de funções trigonométricas e é usada para se obter a representação gráfica aproximada de um determinado timbre sonoro. Faz parte do estudo da Análise de Fourier, também conhecida como Análise Harmônica, que é a representação de sinais através de uma combinação linear de sinais básicos como senos e cossenos ou exponenciais complexas.

4.2.1 FUNÇÕES ORTOGONAIS

Em matemática avançada (ZILL; CULLEN, 2001), uma função é considerada como uma generalização de um vetor e conceitos como produto interno e ortogonalidade podem ser estendidos às funções.

Considerando \mathbf{u} e \mathbf{v} vetores no espaço tridimensional, o produto interno (\mathbf{u}, \mathbf{v}) de dois vetores, também denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, apresenta as seguintes propriedades:

- (i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$;
- (ii) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$;
- (iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;
- (iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Quando o produto interno é nulo, os vetores são ditos ortogonais.

Definição 4.1. O produto interno de duas funções f_1 e f_2 em um intervalo $[a, b]$ é o número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx.$$

Definição 4.2. Duas funções f_1 e f_2 são ortogonais em um intervalo $[a, b]$ se

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0. \quad (7)$$

Em Análise Vetorial, a palavra *ortogonal* é sinônimo de “perpendicular”. No âmbito das funções, o termo *ortogonal* e a igualdade (7) não possuem qualquer significado geométrico.

Exemplo 4.3. *Mostre que as funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^3$ são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$.*

Solução:

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &= \int_{-1}^1 f_1(x)f_2(x)dx, \\(f_1, f_2) &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^3 dx = \frac{1}{6}x^6 \Big|_{-1}^1, \\(f_1, f_2) &= \frac{1}{6} [1^6 - (-1)^6], \\(f_1, f_2) &= 0.\end{aligned}$$

Logo, as funções f_1 e f_2 são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$.

Definição 4.4. *Diz-se que um conjunto de funções $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ com valores reais é ortogonal em um intervalo $[a, b]$ se*

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

A **norma de um vetor u** , $\|u\|$, pode ser expressa em termos do produto interno como

$$(u, u) = \|u\|^2$$

ou

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

A norma de uma função ϕ_n é definida como $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$, isto é,

$$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)dx}.$$

Já **norma quadrática**, quadrado da norma de ϕ_n , é dada por

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x)dx. \quad (8)$$

Se $\phi_n(x)$ é um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[a, b]$ com a propriedade $\|\phi_n(x)\| = 1$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, então $\{\phi_n(x)\}$ é chamado um **conjunto ortonormal** no intervalo.

Exemplo 4.5. *Mostrar que o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ é ortogonal no intervalo $[-\pi, \pi]$.*

Solução:

Deve-se mostrar que

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \text{ se } m \neq n \text{ (Definição 4.4.)}.$$

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx,$$

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx,$$

$$(\phi_m, \phi_n) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx,$$

$$(\phi_m, \phi_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \text{ } m \neq n$$

Exemplo 4.6. *Calcular a norma de cada função do conjunto ortogonal dado no exemplo 4.5.*

Solução:

Para $\phi_n(x) = \cos nx$, $n > 0$, decorre que

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx,$$

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx] dx,$$

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(2n\pi)}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} dx = \pi.$$

Assim, para $n > 0$, $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{\pi}$.

Qualquer conjunto ortogonal de funções não-nulas $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, pode ser *normalizado*, isto é, transformado em um conjunto ortonormal. Para tanto basta dividir cada função por sua norma.

Observação: Dos exemplos 4.5 e 4.6 decorre que o conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ é ortonormal em $[-\pi, \pi]$.

Em um espaço V^3 , os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam um conjunto ortogonal que pode ser usado como uma base para esse espaço, ou seja, qualquer vetor

tridimensional u pode ser escrito como uma combinação linear de v_1 , v_2 e v_3 , ou seja,

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3, \quad (9)$$

onde os coeficientes c_i , $i = 1, 2, 3$, são escalares denominados componentes do vetor. Cada componente c_i pode ser expressa em termos de u e do vetor correspondente v_i , ou seja, do produto interno de (9) com v_i .

Para $i = 1$ tem-se:

$$(u, v_1) = c_1(v_1, v_1) + c_2(v_2, v_1) + c_3(v_3, v_1),$$

$$(u, v_1) = c_1 \|v_1\|^2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0.$$

Logo,

$$c_1 = \frac{(u, v_1)}{\|v_1\|^2}.$$

De maneira análoga, obtém-se as componentes c_2 e c_3 :

$$c_2 = \frac{(u, v_2)}{\|v_2\|^2} \text{ e } c_3 = \frac{(u, v_3)}{\|v_3\|^2}.$$

Dessa forma, a equação (9) pode ser expressa como

$$u = \frac{(u, v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{(u, v_2)}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{(u, v_3)}{\|v_3\|^2} v_3 = \sum_{n=1}^3 \frac{(u, v_n)}{\|v_n\|^2} v_n. \quad (10)$$

4.2.2 A SÉRIE DE FOURIER GENERALIZADA

Supondo-se que $\phi_n(x)$ seja um conjunto ortogonal infinito de funções em um intervalo $[a, b]$ e que $y = f(x)$ seja uma função definida no intervalo $[a, b]$, então existe um conjunto de coeficientes c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, tais que

$$f(x) = c_0 \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) + \dots + c_n \phi_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x). \quad (11)$$

Para determinar os coeficientes c_n , basta multiplicar (11) por $\phi_m(x)$ e integrar no intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \phi_m(x) dx = c_0 \int_a^b \phi_0(x) \phi_m(x) dx + c_1 \int_a^b \phi_1(x) \phi_m(x) dx + \dots + c_n \int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx + \dots,$$

$$\int_a^b f(x) \phi_m(x) dx = c_0 (\phi_0, \phi_m) + c_1 (\phi_1, \phi_m) + \dots + c_n (\phi_n, \phi_m) + \dots \quad (12)$$

Pela ortogonalidade, cada termo do lado direito da equação (12) é zero, exceto quando $m = n$. Neste caso, tem-se que

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx = c_n \int_a^b \phi_n^2(x)dx ,$$

sendo

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)dx} = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Com a notação de produto interno, escreve-se (11) como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2} \phi_n(x). \quad (14)$$

Dessa forma, (14) é o análogo funcional do resultado obtido em (10).

Definição 4.7. Diz-se que um conjunto de funções $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, é **ortogonal em relação a uma função peso $w(x)$ em um intervalo $[a, b]$** se

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

A hipótese usual é que $w(x) > 0$ no intervalo de ortogonalidade $[a, b]$.

Exemplo 4.8. O conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ é ortogonal em relação à função peso constante $w(x) = 1$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Se $\phi_n(x)$ é ortogonal em relação a uma função peso $w(x)$ em $[a, b]$, então, multiplicando (11) por $w(x)\phi(x)$ e integrando, tem-se

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2}, \quad (15)$$

onde

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\phi_n^2(x)dx. \quad (16)$$

A série representada por (11), com os coeficientes dados por (13), é chamada **Série de Fourier Generalizada**.

4.2.3 SÉRIES DE FOURIER

O conjunto de funções

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi}{p}x, \cos \frac{2\pi}{p}x, \dots, \sin \frac{\pi}{p}x, \sin \frac{2\pi}{p}x, \sin \frac{3\pi}{p}x, \dots \right\} \quad (17)$$

é ortogonal no intervalo $[-p, p]$.

Se f é uma função definida no intervalo $[-p, p]$ e que pode ser desenvolvida na série trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p}x + b_n \sin \frac{n\pi}{p}x \right), \quad (18)$$

então pode-se determinar os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ de forma análoga à Subseção 4.2.2.

Integrando ambos os membros de (18) de $-p$ a p , obtém-se

$$\int_{-p}^p f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos \frac{n\pi}{p}x dx + b_n \int_{-p}^p \sin \frac{n\pi}{p}x dx \right). \quad (19)$$

Como cada função $\cos(n\pi x/p)$, $\sin(n\pi x/p)$, $n > 1$, é ortogonal aos elementos do conjunto (17) no intervalo, o segundo membro de (19) se reduz a um único termo e, conseqüentemente,

$$\int_{-p}^p f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-p}^p = pa_0. \quad (20)$$

Isolando (a_0) na igualdade 20, obtém-se

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x)dx. \quad (21)$$

Multiplicando (18) por $\cos(m\pi x/p)$ e integrando de $-p$ a p , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{m\pi}{p}x dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p}x dx + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p}x \cos \frac{n\pi}{p}x dx + b_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p}x \sin \frac{n\pi}{p}x dx \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Por ortogonalidade, tem-se que

$$\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p}x dx = 0, \quad m > 0,$$

$$\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p}x \cos \frac{n\pi}{p}x dx \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$$

e

$$\int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p}x \sin \frac{n\pi}{p}x dx = 0.$$

Assim, (22) reduz-se a

$$\int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p}x dx = a_n p,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p}x dx. \quad (23)$$

Multiplicando (18) por $\sin(m\pi x/p)$ e integrando de $-p$ a p , obtém-se

$$\int_{-p}^p \sin \frac{m\pi}{p}x dx = 0, \quad m > 0,$$

$$\int_{-p}^p \sin \frac{m\pi}{p}x \cos \frac{n\pi}{p}x dx = 0,$$

e

$$\int_{-p}^p \sin \frac{m\pi}{p}x \sin \frac{n\pi}{p}x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}.$$

Dessa maneira, pode-se reescrever (22) como

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p}x dx. \quad (24)$$

Definição 4.9. A **Série de Fourier** de uma função f definida no intervalo $(-p, p)$, é dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p}x + b_n \sin \frac{n\pi}{p}x \right),$$

com

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx, \quad (25)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p}x dx, \quad (26)$$

e

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p}x dx. \quad (27)$$

Exemplo 4.10. Desenvolver

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

em série de Fourier.

Solução:

A Figura 26 mostra o gráfico de f .

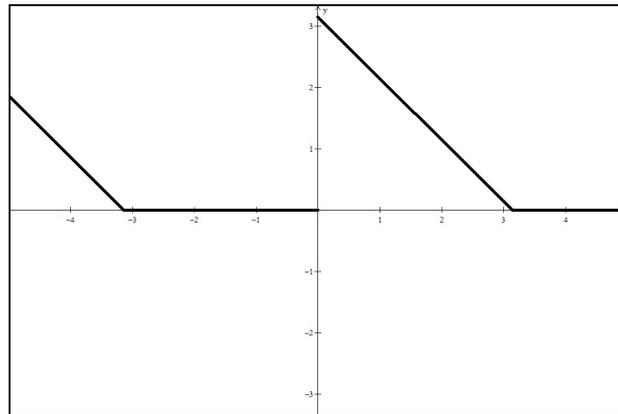


Figura 26: Gráfico da função f .

Com $p = \pi$, tem-se, de (25) e (26), que

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right],$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \right],$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[(\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right],$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi},$$

$$a_n = \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2 \pi},$$

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^2 \pi}.$$

De maneira análoga, obtém-se de (27), que

$$b_n = \frac{1}{n} \int_0^\pi (\pi - x) \sin nx dx = \frac{1}{n}.$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{x=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right].$$

Exemplo 4.11. (BOYCE; DIPRIMA, 2009) Supõe-se que existe uma série de Fourier convergindo para a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}, \quad f(x+4) = f(x).$$

Determinar os coeficientes dessa série de Fourier.

Solução:

Esta função representa uma onda triangular, Figura 27, periódica de período igual a

4.

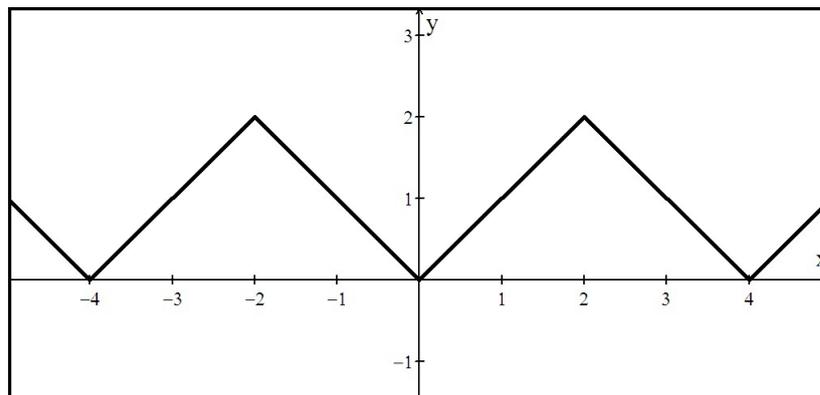


Figura 27: Onda triangular.

Então, nesse caso, $p = 2$ e a série de Fourier tem a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{2} x + b_n \sin \frac{n\pi}{2} x \right], \quad (28)$$

onde os coeficientes são calculados por (25), (26) e (27) com $p = 2$.

Substituindo $f(x)$ em (25), tem-se

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1 + 1 = 2.$$

Para $n > 0$ em (26), obtém-se

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \cos \frac{n\pi}{2} x dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi}{2} x dx.$$

Essas integrais podem ser calculadas integrando-se por partes. Assim:

$$a_n = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n\pi} x \sin \frac{n\pi}{2} x - \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{2} x \right] \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{n\pi} x \sin \frac{n\pi}{2} x + \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{2} x \right] \Big|_0^2,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 + \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi + \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi - \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \right],$$

$$a_n = \frac{4}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1), n = 1, 2, \dots,$$

$$a_n = \frac{1}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1],$$

$$a_n = \begin{cases} -8/(n\pi)^2, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Finalmente, segue de (27), de maneira análoga, que

$$b_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

Substituindo os coeficientes a_0 , a_n e b_n em (28), obtém-se a série de Fourier de f :

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi}{2} x + \dots \right],$$

ou

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \cos \left(\frac{n\pi x}{2} \right).$$

4.2.4 SÉRIE DE FOURIER DE COSENOS E DE SENOS

Definição 4.12. Uma função f é **par** se $f(-x) = f(x)$ e **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$.

Propriedades das Funções Pares e das Funções Ímpares

1. O produto de duas funções pares é par.
2. O produto de duas funções ímpares é par.
3. O produto de uma função par e uma função ímpar é ímpar.

4. A soma (diferença) de duas funções pares é par.
 5. A soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar.
 6. Se f é par, então

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

7. Se f é ímpar, então

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Séries de Cossenos e de Senos

Se f é uma função par no intervalo $(-p, p)$, então, com base nas propriedades de funções pares e das funções ímpares, os coeficientes a_0 , a_n e b_n podem ser escritos como:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(x)}_{\text{par}} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x}_{\text{par}} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x}_{\text{ímpar}} dx = 0.$$

Analogamente, quando f é ímpar no intervalo $(-p, p)$,

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(x)}_{\text{ímpar}} dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x}_{\text{ímpar}} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p \underbrace{f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x}_{\text{par}} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

Definição 4.13. A série de Fourier de uma função par no intervalo $(-p, p)$, $2p$ -periódica é a série de cossenos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x,$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx$$

e

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx.$$

Definição 4.14. A série de Fourier de uma função ímpar no intervalo $(-p, p)$ é a série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x,$$

onde

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx. \quad (29)$$

Exemplo 4.15. A função

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

exibida na Figura 28 é ímpar no intervalo $(-\pi, \pi)$.

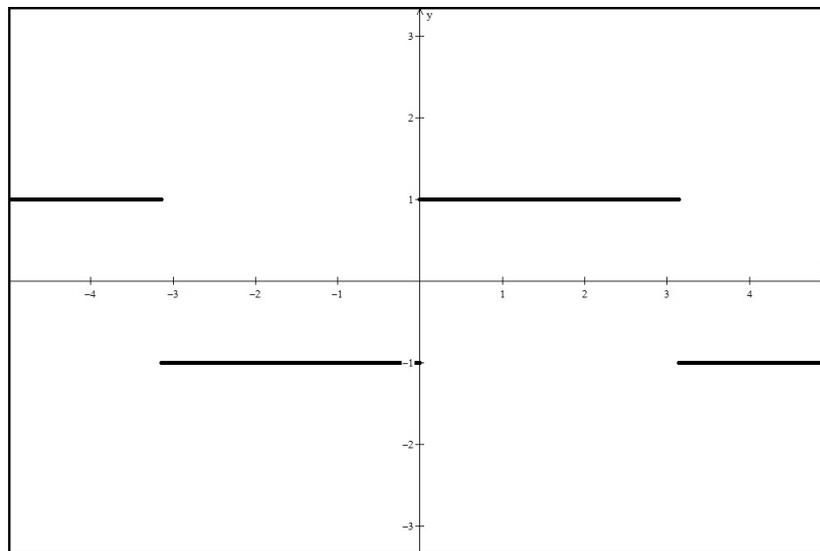


Figura 28: Gráfico da função $f(x)$.

Com $p = \pi$, tem-se, por (29):

$$b_n = \int_0^{\pi} (1) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

e assim

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin nx. \quad (30)$$

Definição 4.16. Uma função f é dita seccionalmente contínua em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo pode ser dividido por um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de modo que

1. f é contínua em cada intervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$,

2. f tende a um limite finito nas extremidades de cada intervalo, quando aproximada do interior do intervalo.

Teorema 4.17. Suponha que f e f' sejam seccionalmente contínuas no intervalo $L \leq x < L$. Suponha, além disso, que f está definida fora do intervalo $-L \leq x < L$ de modo a ser periódica com período $2L$. Então há uma série de Fourier que converge para f em todos os pontos onde ela é contínua e converge para $\frac{[f(x+) + f(x-)]}{2}$ em todos os pontos onde f é descontínua.

Sequência de Somas Parciais

É possível notar como uma sequência de somas parciais de uma série de Fourier tende para uma função. Nas Figuras 29, 30 e 31 faz-se uma comparação do gráfico da função f do Exemplo 4.15 com os gráficos das três primeiras somas parciais de (30). Usando o Teorema 4.17, é possível verificar que na origem a função converge para $\frac{[f(0+) + f(0-)]}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$.

$$S_1 = \frac{4}{\pi} \sin x,$$

$$S_2 = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right]$$

e

$$S_3 = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right].$$

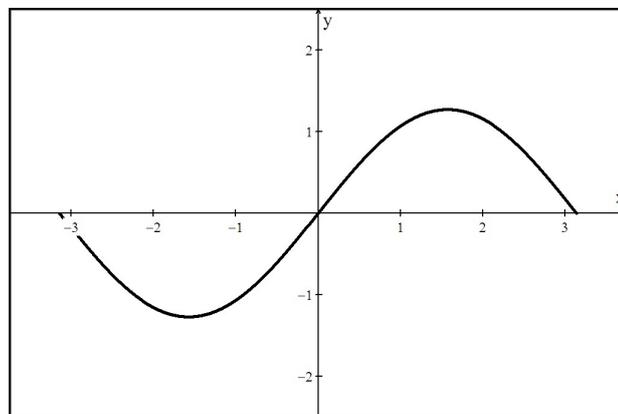


Figura 29: Gráfico da função $S_1 = \frac{4}{\pi} \sin[x]$.

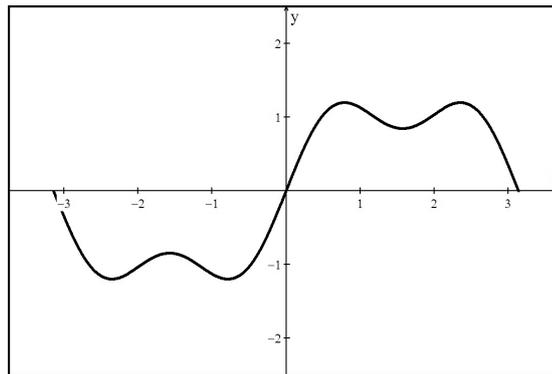


Figura 30: Gráfico da função $S_3 = \frac{4}{x} \left[\sin[x] + \frac{\sin[3x]}{3} \right]$.

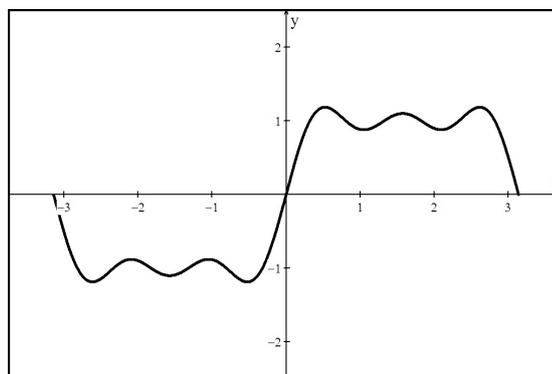


Figura 31: Gráfico da função $S_5 = \frac{4}{x} \left[\sin[x] + \frac{\sin[3x]}{3} + \frac{\sin[5x]}{5} \right]$.

Como é possível observar na Figura 32, o gráfico da soma parcial S_{15} tem “picos” pronunciados na vizinhança das discontinuidades em $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$, etc. Esse distanciamento das somas parciais S_N dos valores funcionais na vizinhança de um ponto de descontinuidade não se suaviza, permanece praticamente constante, mesmo quando N é grande. Esse comportamento de uma série de Fourier na vizinhança de um ponto em que f é descontínua é chamado **Fenômeno de Gibbs**.

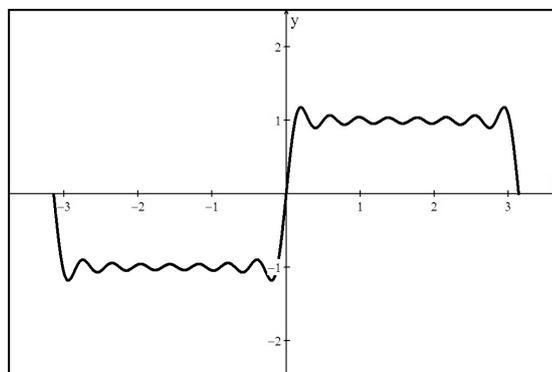


Figura 32: Gráfico da função $S_{15} = \frac{4}{x} \left[\sin[x] + \dots + \frac{\sin[15x]}{15} \right]$.

4.2.5 SINTETIZADORES ELETRÔNICOS E A SÉRIE DE FOURIER

Em (RATTON, 2002), sintetizadores sonoros são instrumentos eletrônicos criados para produção de timbres de instrumentos musicais conhecidos ou outros tipos de timbre.

Segundo (MACHADO; INDRUSIAK, 2014), timbre é definido como:

Quando um instrumento musical é tocado ou algum ser vivo emite algum som, vários harmônicos são produzidos simultaneamente pelo instrumento ou pelas pregas vocais. Considerando-se o princípio da superposição, desenvolvido por Fourier, a presença de várias ondas, sendo propagadas simultaneamente no mesmo meio, resultará em uma onda que será descrita pela soma algébrica das ondas relativas aos harmônicos produzidos pela fonte sonora (FOURIER apud SERWAY; JEWETT, 2011). Essa configuração da onda resultante é chamada de timbre (OLSON, 1967). É o timbre, ou seja, uma soma de inúmeras ondas, que nos faz diferenciar o som produzido por um piano do som de uma flauta ou da voz de uma determinada pessoa de outra (p. 10).

Uma das formas de implementação dos sintetizadores é a síntese aditiva. O funcionamento dos sintetizadores aditivos tem como base o teorema de Fourier, segundo o qual a função pode ser expressa como a soma de uma série de ondas senoidais chamada de série de Fourier.

Em (JR, 2012), para se obter o timbre graficamente soma-se as ondas senoidais (ou cossenoidais) que representam os sons puros, chamados de harmônicos. A soma das ondas senoidais (ou cossenoidais) é obtida através da série de Fourier.

Para a criação de timbres usados nos sintetizadores aditivos procede-se, por exemplo, da seguinte forma:

1. produz-se o primeiro harmônico, Figura 33, com uma amplitude máxima, que corresponde a 100% e uma frequência de 500 Hz ;
2. produz-se o terceiro harmônico, Figura 34, com uma amplitude que corresponde a 33% da amplitude máxima e possui uma frequência de 1500 Hz , ou seja, $f_3 = 3 \cdot f_1$;
3. produz-se o quinto harmônico, Figura 35, com uma amplitude que corresponde a 20% da amplitude máxima e possui uma frequência de 2500 Hz , ou seja, $f_5 = 5 \cdot f_1$;
4. produz-se o sétimo harmônico, Figura 36, com uma amplitude que corresponde a 14% da amplitude máxima e possui uma frequência de 3500 Hz , ou seja, $f_7 = 7 \cdot f_1$;
5. produz-se o nono harmônico, Figura 37, com uma amplitude que corresponde a 11% da amplitude máxima e possui uma frequência de 4500 Hz , ou seja, $f_9 = 9 \cdot f_1$;
6. na Figura 38 tem-se a superposição de harmônicos destacada em vermelho. Como foi usado apenas o primeiro harmônico para a soma, esta corresponde a ele mesmo (primeiro

harmônico);

7. na Figura 39 tem-se a superposição de harmônicos destacado em vermelho, que corresponde à soma do primeiro e do terceiro harmônicos. Observa-se que a amplitude e a frequência da onda resultante são iguais ao do primeiro harmônico;
8. na Figura 40 tem-se a superposição de harmônicos destacada em vermelho, que corresponde à soma do primeiro, do terceiro e do quinto harmônicos. Observa-se que a amplitude e a frequência da onda resultante são iguais ao do primeiro harmônico;
9. na Figura 41 tem-se a superposição de harmônicos destacada em vermelho, que corresponde à soma do primeiro, do terceiro, do quinto e do sétimo harmônicos. Observa-se que a amplitude e a frequência da onda resultante são iguais ao do primeiro harmônico;
10. na Figura 42 tem-se a superposição de harmônicos destacada em vermelho, que corresponde à soma do primeiro, do terceiro, do quinto, do sétimo e do nono harmônicos e se aproxima de uma onda quadrada. Observa-se que a amplitude e a frequência da onda resultante são iguais ao do primeiro harmônico.

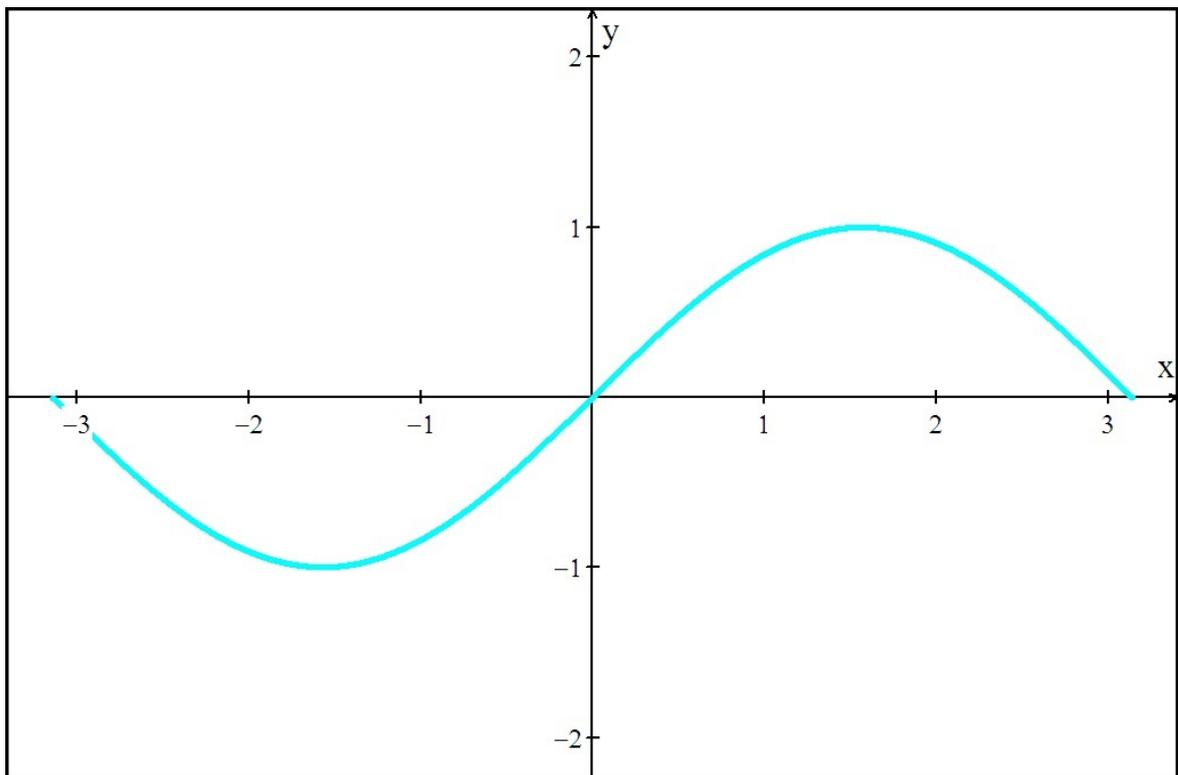


Figura 33: Gráfico da função $f_1(x) = \sin(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, um ciclo completo.

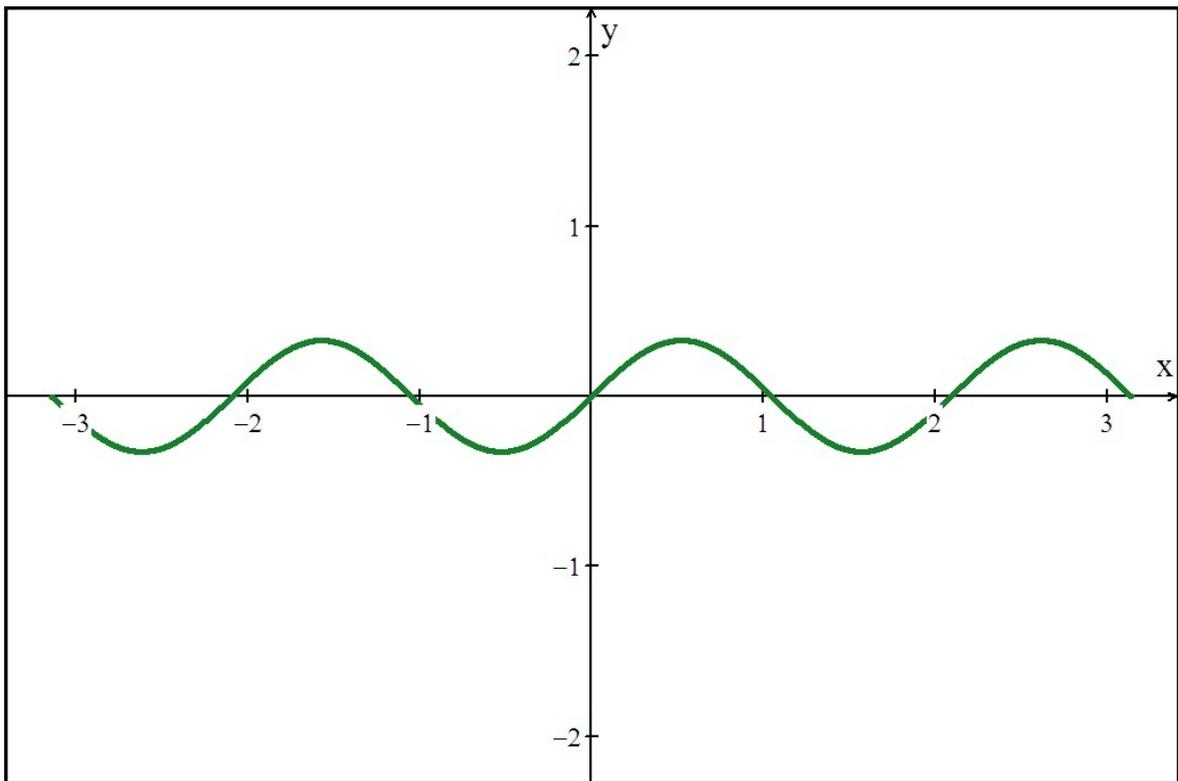


Figura 34: Gráfico da função $f_3(x) = 0.33 \sin(3x)$, três ciclos completos.

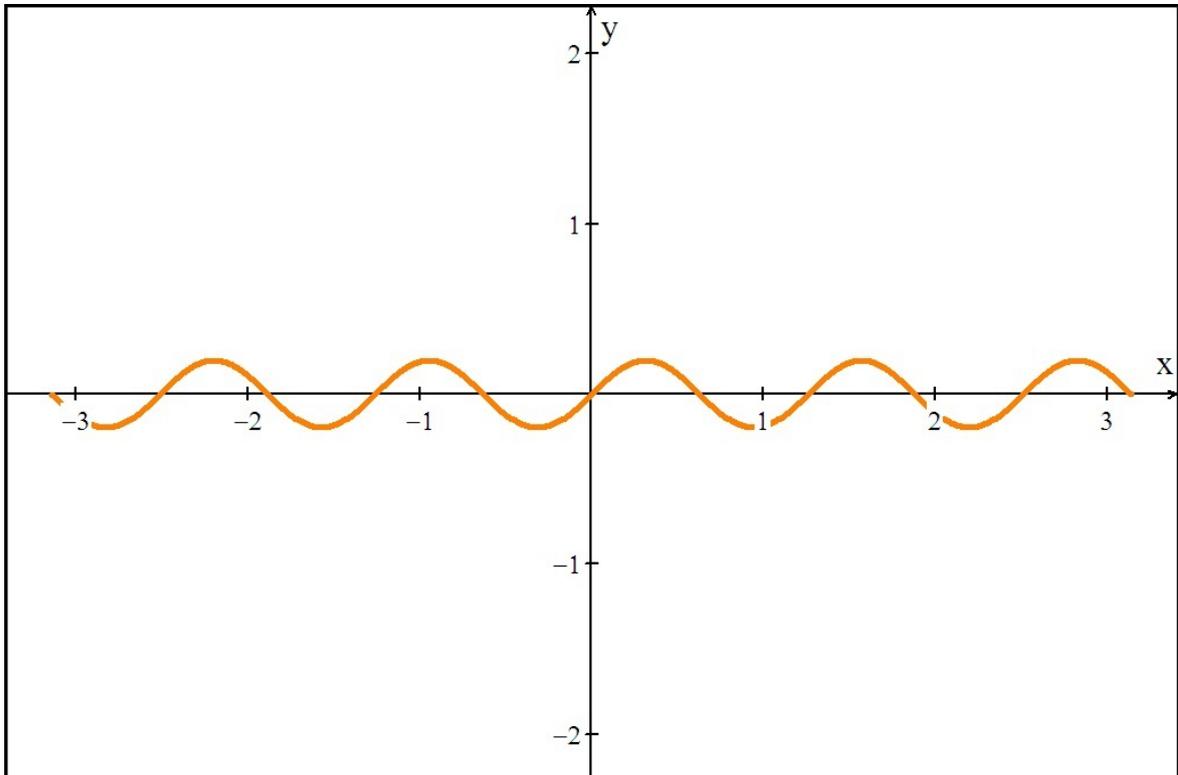


Figura 35: Gráfico da função $f_5(x) = 0.20 \sin(5x)$, cinco ciclos completos.

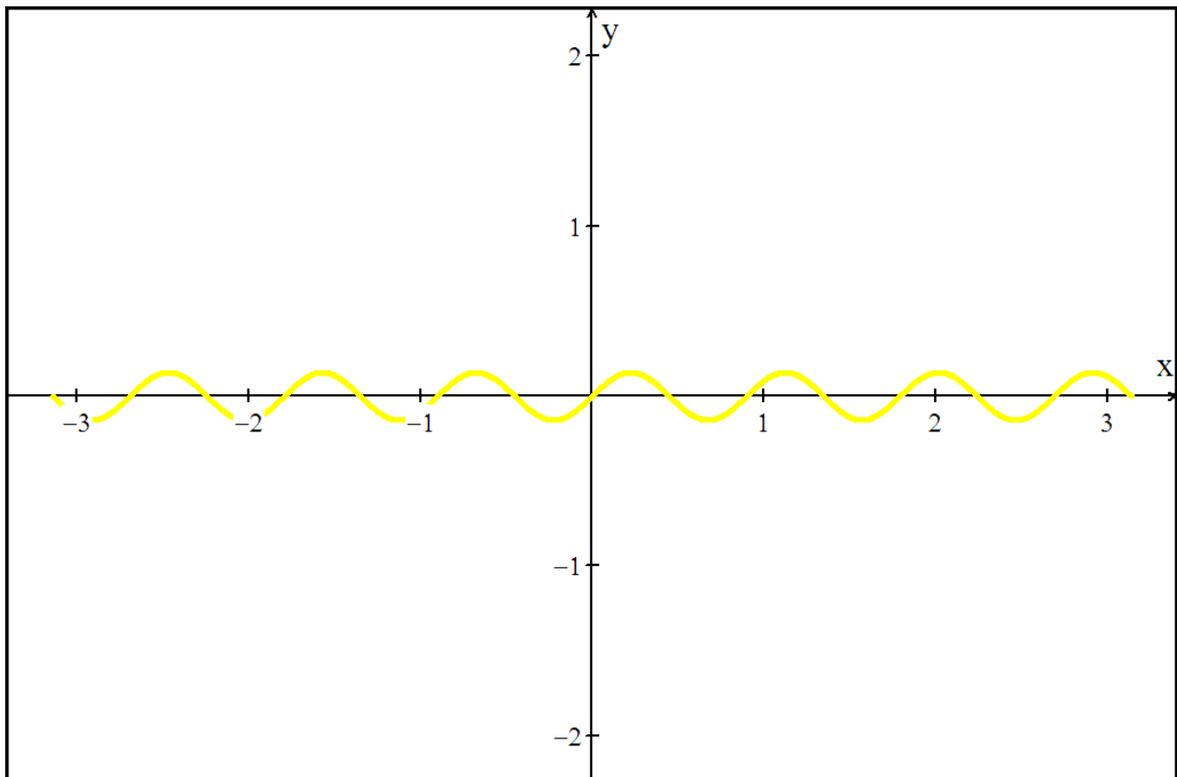


Figura 36: Gráfico da função $f_7(x) = 0.14 \sin(7x)$, sete ciclos completos.

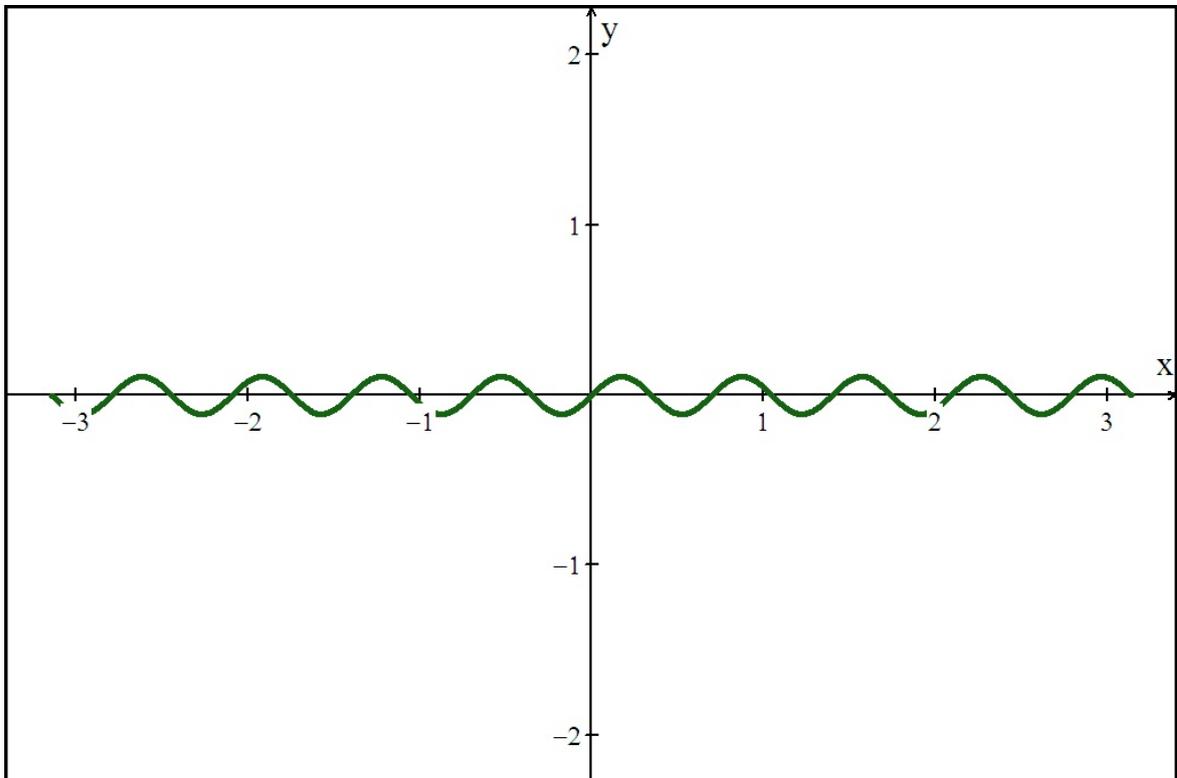


Figura 37: Gráfico da função $f_9(x) = 0.11 \sin(9x)$, nove ciclos completos.

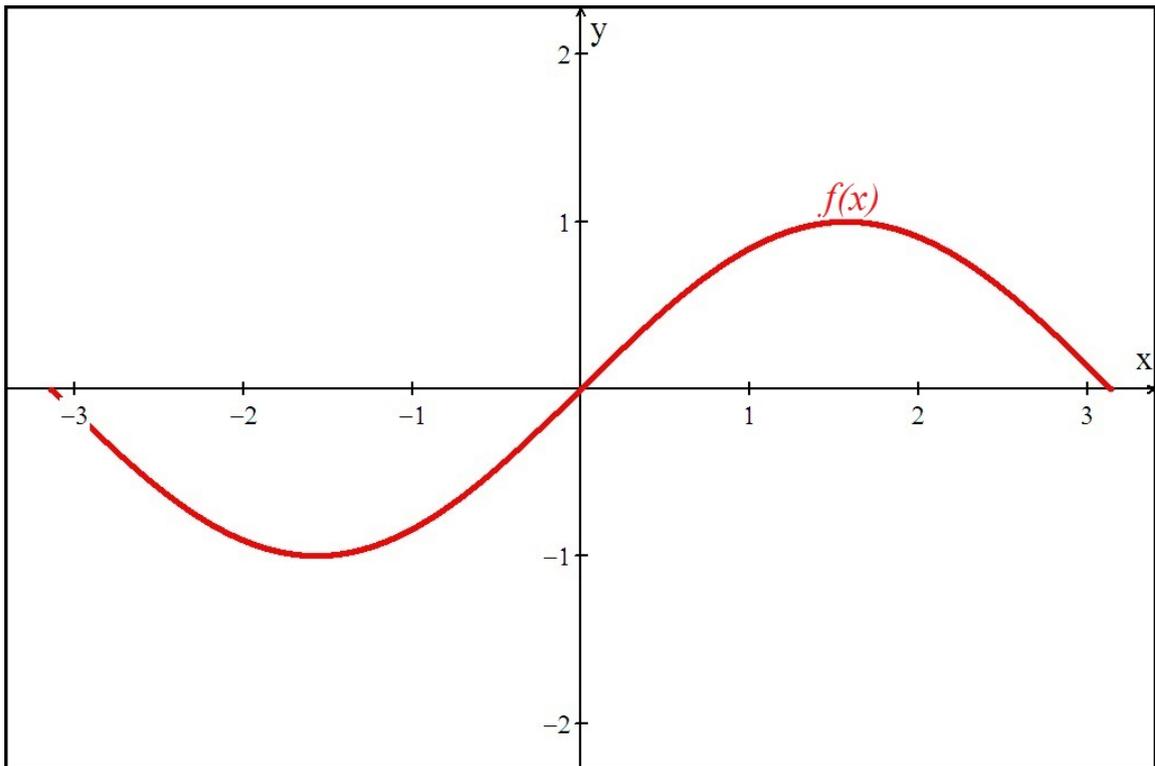


Figura 38: Gráfico da função $f(x) = \sin(x)$ ou $f(x) = f_1(x)$, em vermelho, superposição do primeiro harmônico, que corresponde a ele mesmo.

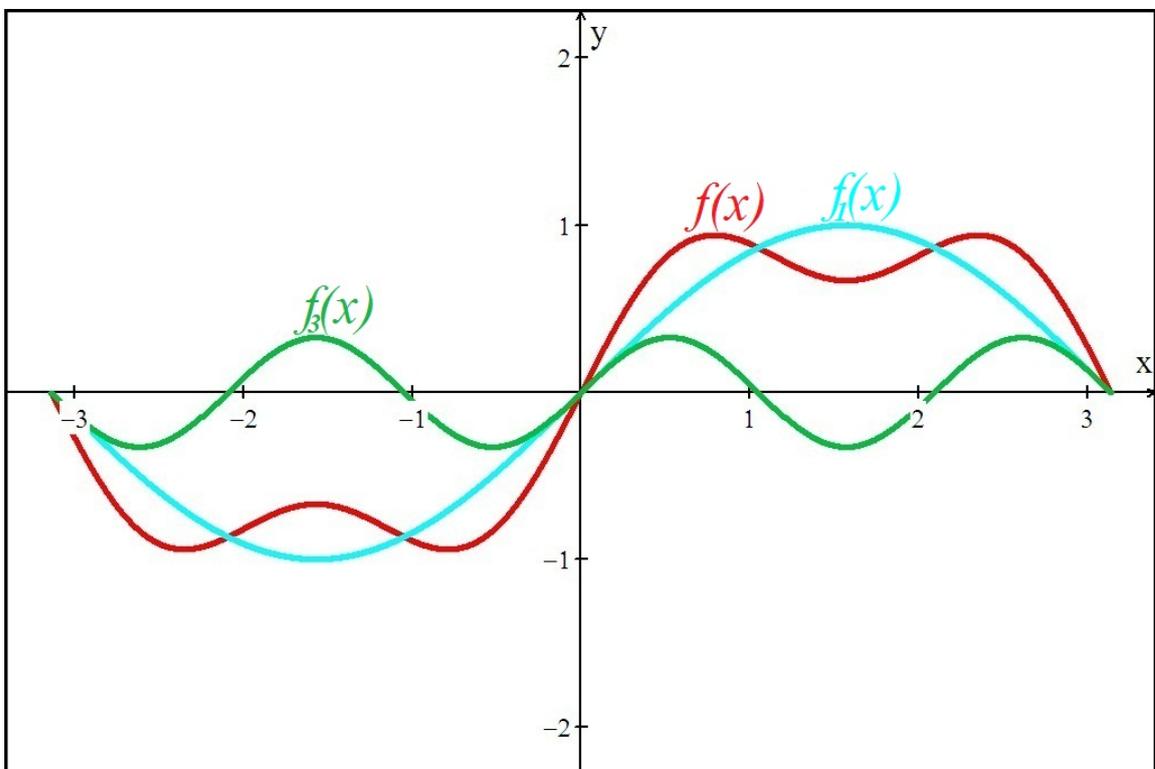


Figura 39: Gráfico da função $f(x) = \sin(x) + 0.33 \sin(3x)$ ou $f(x) = f_1(x) + f_3(x)$, em vermelho, que corresponde à soma do primeiro e do terceiro harmônicos.

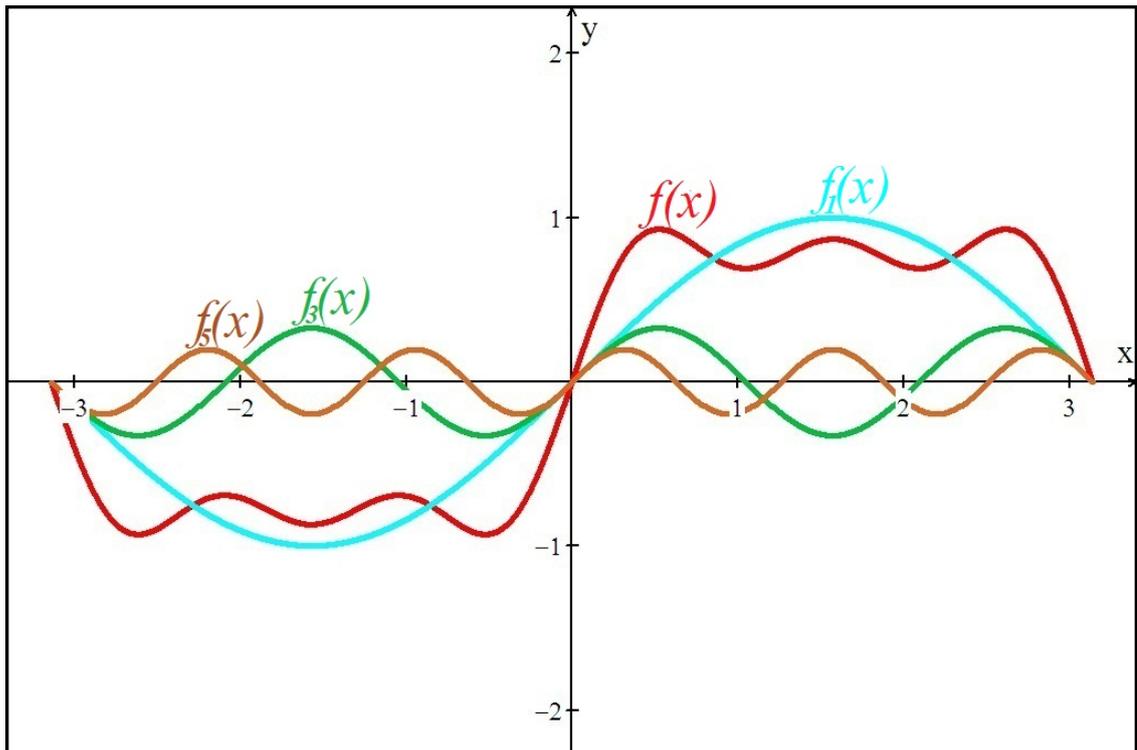


Figura 40: Gráfico da função $f(x) = \sin(x) + 0.33 \sin(3x) + 0.20 \sin(5x)$ ou $f(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x)$, em vermelho, que corresponde à soma dos três primeiros harmônicos.

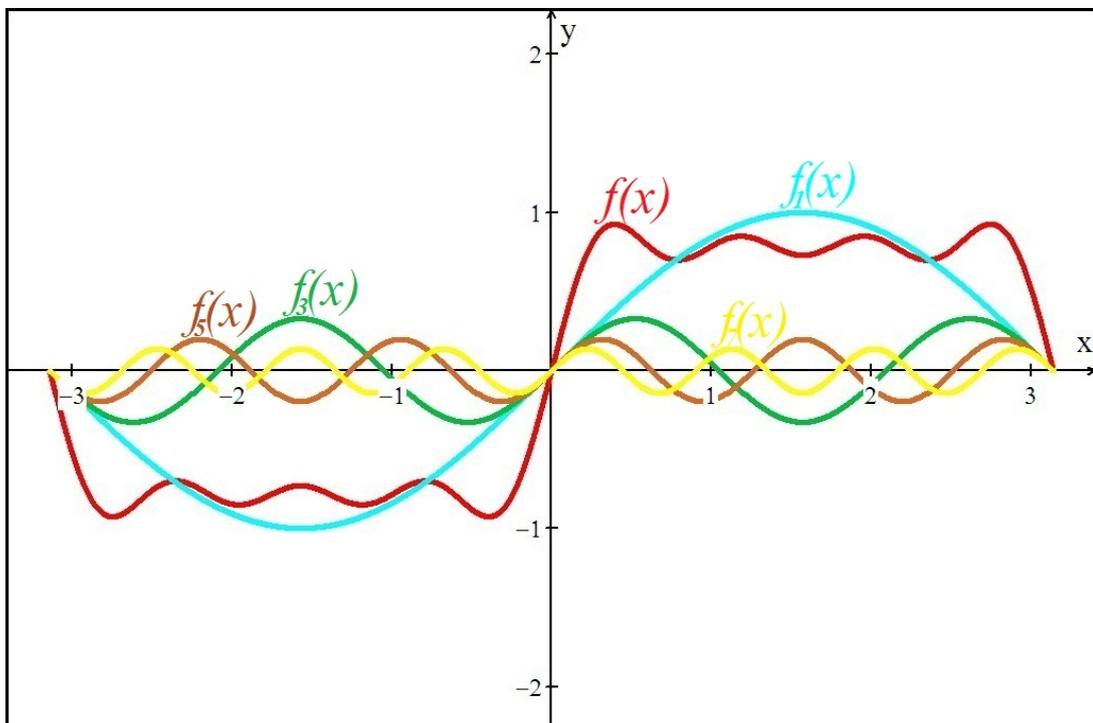


Figura 41: Gráfico da função $f(x) = \sin(x) + 0.33 \sin(3x) + 0.20 \sin(5x) + 0.14 \sin(7x)$ ou $f(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x)$, em vermelho, que corresponde à soma do primeiro, do terceiro, do quinto e do sétimo harmônicos.

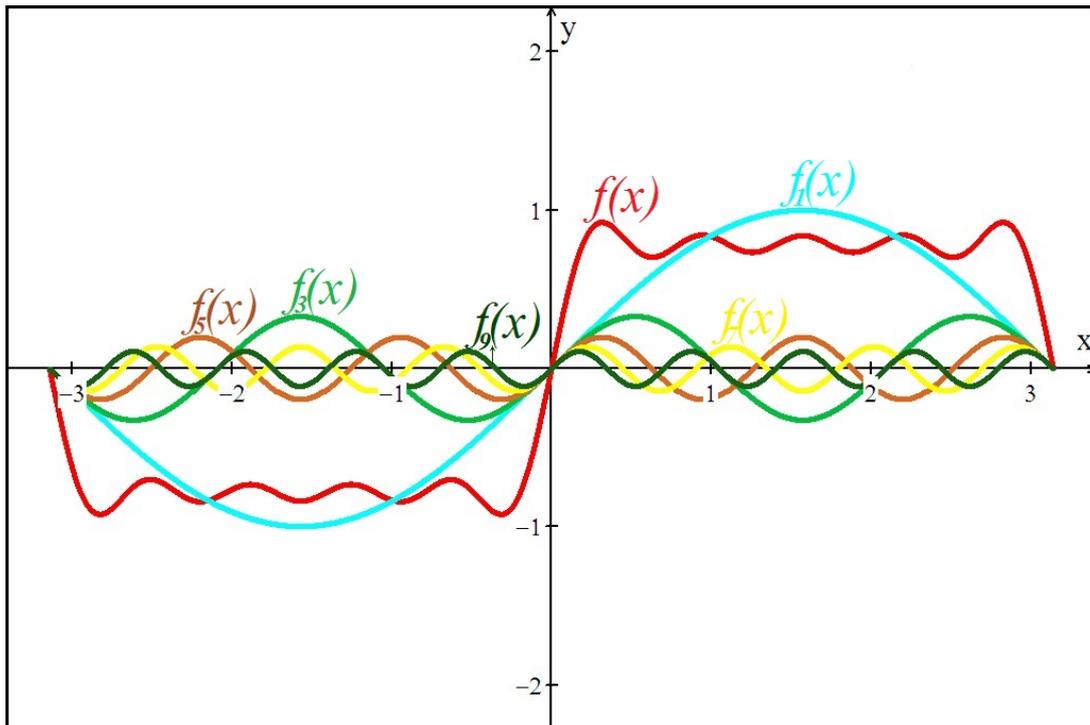


Figura 42: Gráfico da função $f(x) = \sin(x) + 0.33 \sin(3x) + 0.20 \sin(5x) + 0.14 \sin(7x) + 0.11 \sin(9x)$ ou $f(x) = f_1(x) + f_3(x) + f_5(x) + f_7(x) + f_9(x)$, em vermelho, que corresponde à soma do primeiro, do terceiro, do quinto, do sétimo e do nono harmônicos.

A onda resultante da soma corresponde a uma determinada nota musical e possui um timbre característico que depende da soma dos harmônicos escolhidos. Os harmônicos e suas respectivas amplitudes podem ser escolhidos de formas diversas, obtendo-se assim os mais variados timbres. Cada diferente timbre obtido é relacionado a uma determinada tecla do sintetizador, que quando, acionada irá tocar o timbre musical.

Em (MACHADO; INDRUSIAK, 2014), pode-se observar que existem dois tipos de sinais que podem ser captados por um sintetizador: os sinais de tempo contínuo e os sinais de tempo discreto, Figura 43.

Os sinais de tempo contínuo são definidos para todo e qualquer instante de tempo. Um exemplo de sinal de tempo contínuo pode ser visto em uma música gravada em um disco de vinil, pois o disco plástico possui uma ranhura espiralada que é varrida continuamente por uma pequena agulha. As vibrações mecânicas sofridas por essa agulha são transformadas em sinais elétricos, amplificados e transformados em ondas sonoras. Os sinais de tempo discreto são definidos apenas para alguns instantes de tempo. Um exemplo de sinal de tempo discreto pode ser visto em uma música gravada em um CD, pois o sinal de tempo contínuo é decodificado, gerando um sinal binário, e depois convertido em sinais digitais de tempo discreto (p. 10).

Segundo (HAYKIN; VEEN, 2001), ao se fazer a aquisição de um sinal é usada uma frequência de aquisição que é o intervalo de tempo entre as medições feitas por um instrumento

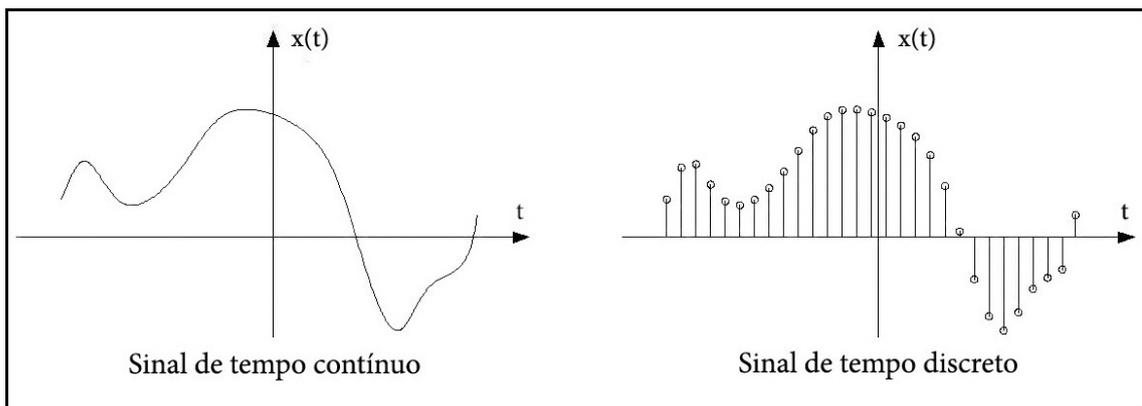


Figura 43: Exemplos de sinais de tempo contínuo e discreto.
(HAYKIN; VEEN, 2001)

de captação do som que será transformado em sinal.

Para (PROAKIS; MANOLAKIS, 1996), existem várias possibilidades de se obter a amostra de um sinal de tempo discreto. Uma delas seria tomar as amostras de sinais em períodos de tempo uniformes, que é a coleta do sinal a cada T segundos. É necessário que a frequência de amostragem seja maior ou igual ao dobro da frequência máxima existente no sinal a ser amostrado. Caso a frequência de amostragem seja menor que o dobro da frequência máxima do sinal, a característica do sinal é perdida, como mostra a Figura 44.

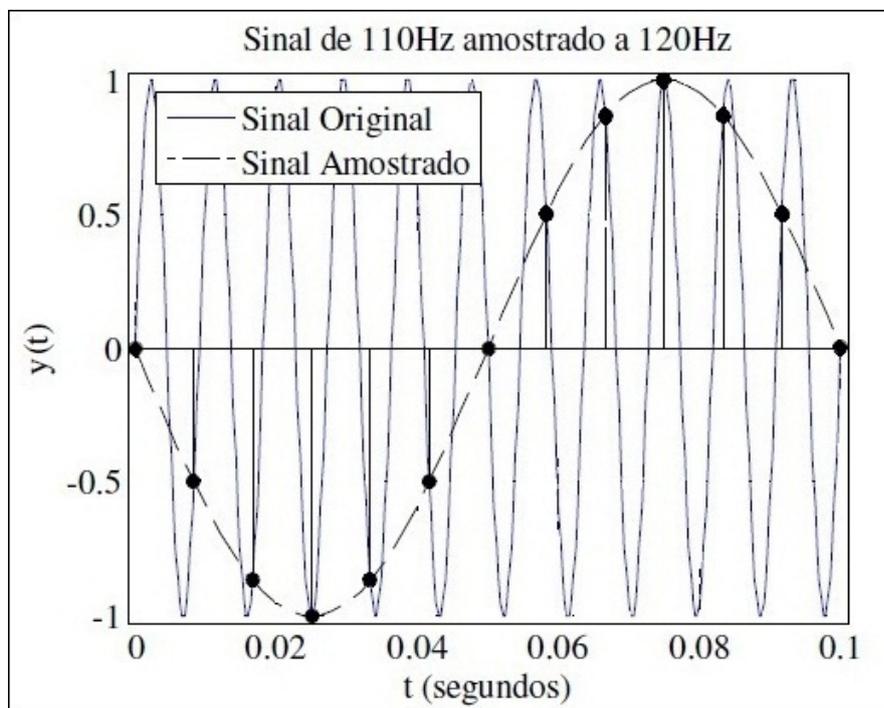


Figura 44: Frequência de amostragem menor que duas vezes a frequência máxima do sinal.
(PROAKIS; MANOLAKIS, 1996)

Então, na prática um sintetizador não usa a Série de Fourier contínua nos reais, mas

uma versão quantizada da série de Fourier. Segundo (SOUZA et al., 2005), uma forma de quantizar a série de Fourier é a utilização das fórmulas de quantização da base de Riesz-Fourier, em que em um determinado intervalo é tomado apenas uma quantidade finita de sinais, não muito grande, para que não ocupe muita memória do computador.

Uma comparação dos gráficos do sinal contínuo e da série de Fourier quantizada, de um trecho de aproximadamente um segundo da quinta sinfonia de Beethoven, pode ser observada na Figura 45: (a) aproximação clássica da série Fourier que corresponde a 21.495 amostras, aproximações por síntese clássica de Fourier (traço); (b) síntese com a série de Fourier quantizada em que foram tomados apenas 128 amostras, síntese com série de Fourier Quantizada (ponto) e por consequência é computacionalmente muito mais interessante pois apesar de uma quantidade bem menor de amostras é possível ver que é uma boa aproximação e, para fins práticos na produção do som a diferença é praticamente imperceptível para o ser humano.

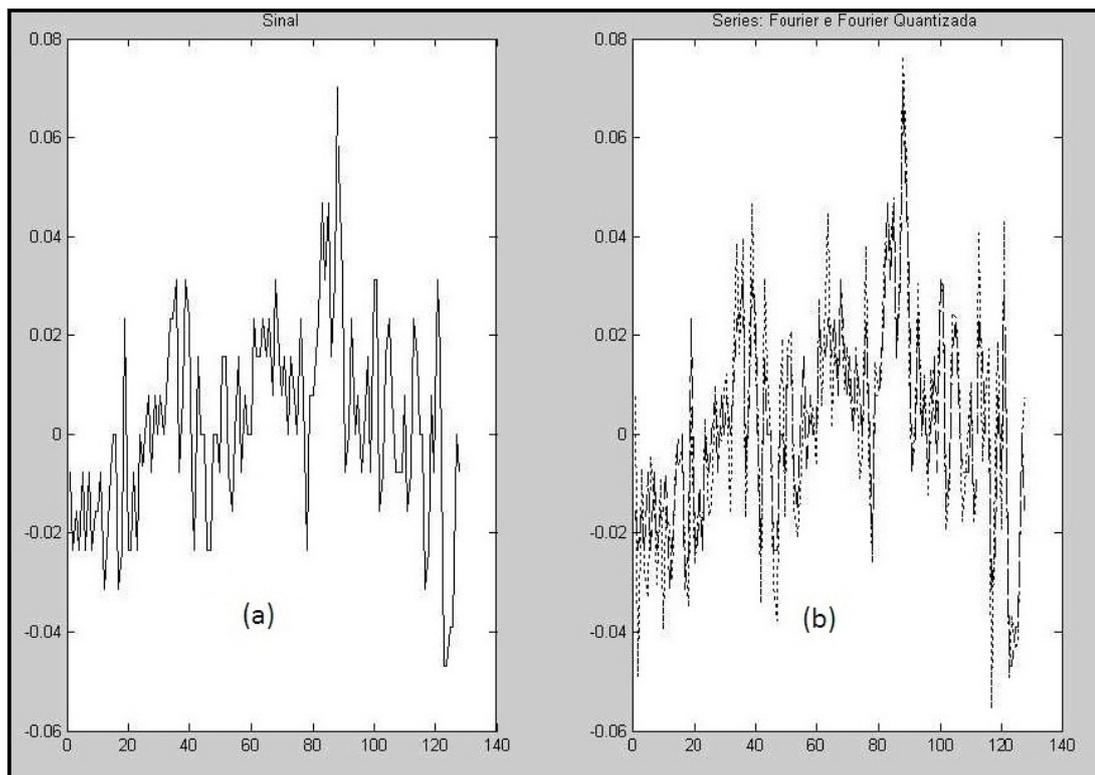


Figura 45: Comparação de sinais: (a) Trecho de 1,0 segundo da Quinta Sinfonia de Beethoven, correspondente a 21.495 amostras; (b) Trecho inicial do sinal original (N=128 amostras). (SOUZA et al., 2005)

5 A MÚSICA E AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo será apresentada uma sequência de oficinas que podem ser aplicadas nas turmas de ensino médio. As oficinas são interdisciplinares e utilizam recursos computacionais como o GeoGebra. Ao final de cada oficina, organiza-se uma lista de exercícios aplicados.

5.1 OFICINA 1: COEFICIENTES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O software livre GeoGebra (HOHENWARTER, 2013) é um aplicativo que dispõe de diversos recursos para serem usados nas aulas de matemática, como o estudo dos coeficientes de uma função trigonométrica. No GeoGebra os alunos visualizam dinamicamente o efeito que a mudança dos coeficientes provoca no gráfico das funções.

Os alunos devem ter como conhecimento prévio noções das funções seno e cosseno.

As funções trigonométricas são funções do tipo $y = a + b \cdot \sin(cx + d)$, $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$ e $y = a + b \cdot \tan(cx + d)$, sendo a , b , c e d constantes reais. Em (JUNIOR, 2013), estão descritos os passos para a construção dessas funções, transcritas a seguir:

1. Na “Janela de Visualização”, clique com o botão direito; vá em “Propriedades-Eixo x”, habilite “Distância” e selecione $\pi/2$; clique em “Fechar”.
2. Em “Entrada” digite $a=\text{ControleDeslizante}[-10,10,1,1,72,\text{false},\text{true},\text{false}, \text{false}]$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em “Básico” habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “Propriedades-Avançado”, na janela que abrirá, digite no campo “Vermelho” $a < 0$, no campo “Verde” $a = 0$ e no campo “Azul” $a > 0$.
3. Em “Entrada” digite $b=\text{ControleDeslizante}[-10,10,1,1,72,\text{false},\text{true},\text{false}, \text{false}]$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “PropriedadesAvançado”, na janela que abrirá digite no campo “Vermelho” $b < 0$; no campo “Verde” $b = 0$ e no campo “Azul” $b > 0$.
4. Em “Entrada” digite $c=\text{ControleDeslizante}[-10,10,1,1,72,\text{false},\text{true},\text{false}, \text{false}]$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “PropriedadesAvançado”, na janela que abrirá, digite no campo “Vermelho” $c < 0$; no campo “Verde” $c = 0$ e no campo “Azul” $c > 0$.

5. Em “Entrada” digite $d = \text{ControleDeslizante}[-2\pi, 2\pi, \pi/12, 1, 72, \text{false}, \text{true}, \text{false}, \text{false}]$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “PropriedadesAvançado”, na janela que abrirá, digite no campo “Vermelho” $d < 0$; no campo “Verde” $d = 0$ e no campo “Azul” $d > 0$.
6. Em “Entrada” digite $f_s(x) = a + b \sin(cx + d)$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor.
7. Em “Entrada” digite $f_c(x) = a + b \cos(cx + d)$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente da função seno.
8. Em “Entrada” digite $f_t(x) = a + b \tan(cx + d)$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente das anteriores.
9. Em “Entrada” digite $f_1 = \text{Função}[f_s, 0, 2\pi/abs(c)]$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente da função f_s .
10. Em “Entrada” digite $f_2 = \text{Função}[f_c, 0, 2\pi/abs(c)]$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; formate-a aumentando a espessura e escolhendo uma cor diferente da função f_c .
11. Em “Entrada” digite $n = \text{ControleDeslizante}[-10, 10, 1, 1, 72, \text{false}, \text{true}, \text{false}, \text{false}]$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto; em “Básico” habilite a opção “Exibir Rótulo”; em “PropriedadesAvançado”, na janela que abrirá, digite no campo “Vermelho” $a < 0$, no campo “Verde” $a = 0$ e no campo “Azul” $a > 0$.
12. Em “Entrada” digite $x = (\pi/2 + n\pi - d)/c$; dê “Enter”; clique com o botão direito do mouse sobre a função criada; habilite a linha; formate-a aumentando a espessura e escolhendo “Estilo Pontilhado” por se tratar de uma assíntota.
13. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite Função Seno; selecione as funções f_s e f_1 clique em “Aplicar”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o com o mesmo formato do item 6.
14. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite Função Cosseno; selecione as funções f_c e f_2 e clique em “Aplicar”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado; formate-o da mesma maneira que no item 7.

15. Clique no ícone “Caixa para Exibir/Esconder Objetos”; clique na “Janela de Visualização”; na janela que abrirá, em “Legenda”, digite Função Tangente; selecione a função f_t , o valor n e a reta e ; clique em “Aplicar”; clique com o botão direito do mouse sobre o objeto criado e formate-o.

Na janela de apresentação do GeoGebra, quando a opção de gráfico escolhido for a função seno, tem-se o gráfico apresentado na Figura 46.

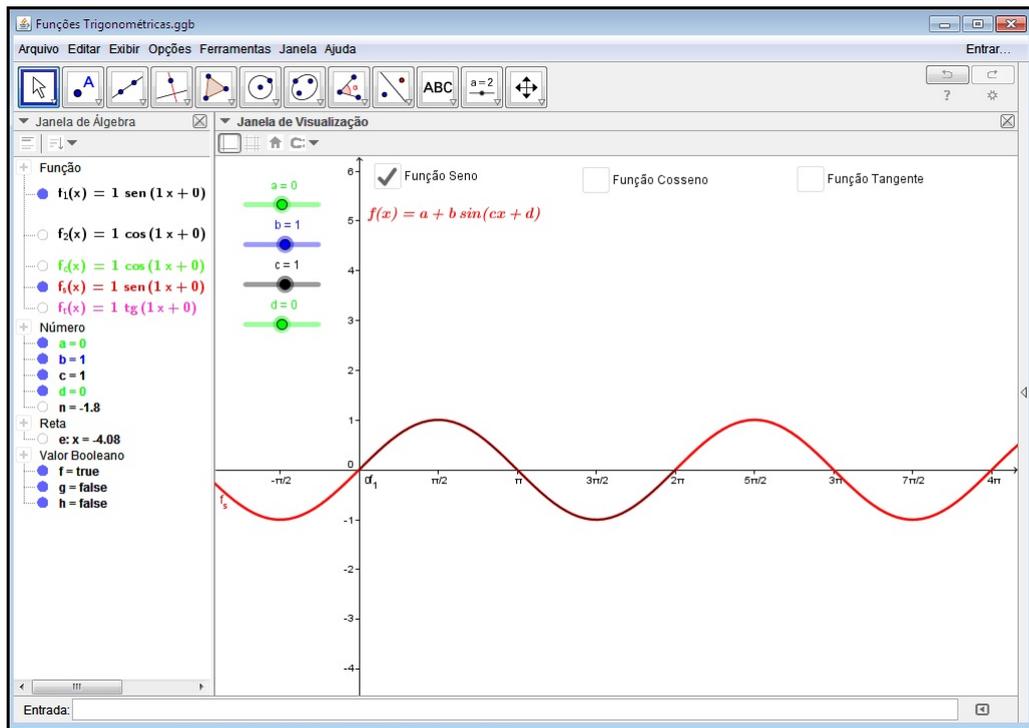


Figura 46: Gráfico da função $f(x) = 0 + 1 \cdot \sin(1 \cdot x + 0)$.

Nessa janela é possível ver o gráfico da função $f(x) = a + b \sin(cx + d)$ quando $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$. Ao alterar os valores dos coeficientes a , b , c e d , o gráfico da função muda automaticamente. Se for escolhido $a = 2$, o gráfico da função se deslocará de duas unidades no sentido positivo do eixo y como na Figura 47.

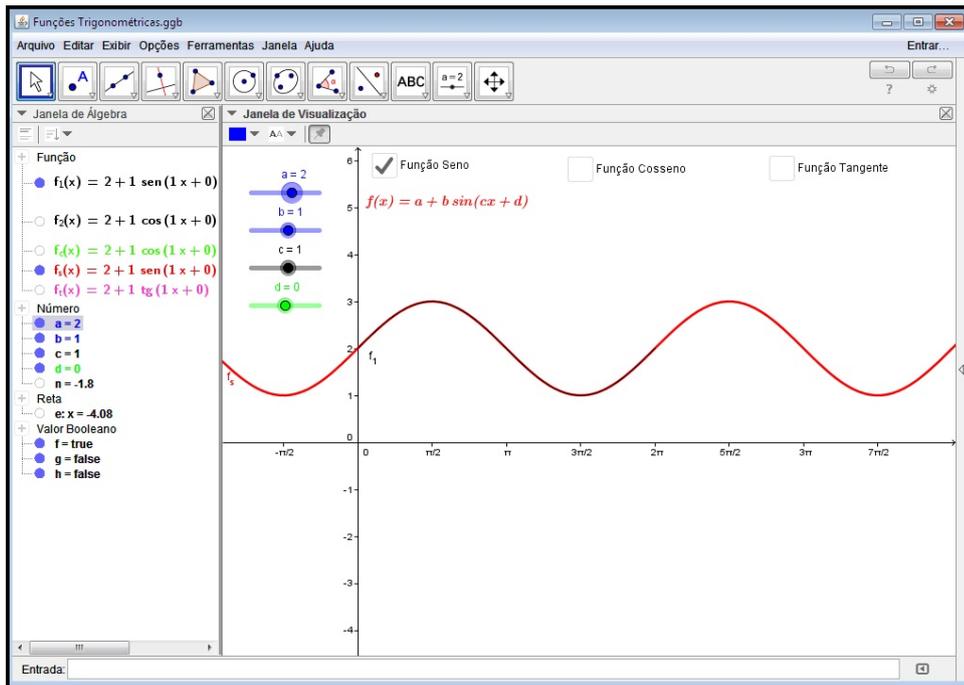


Figura 47: Gráfico da função $f(x) = 2 + 1 \cdot \sin(1 \cdot x + 0)$.

Ao alterar o coeficiente $b = 1$ para $b = 3$, é possível observar que a amplitude do gráfico da função aumentou, Figura 48.

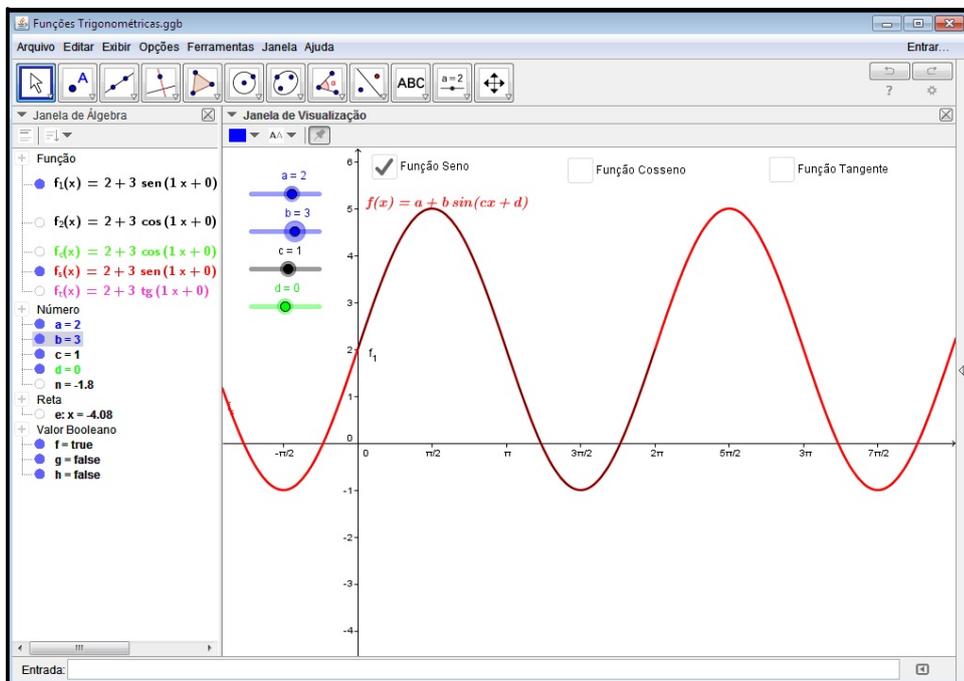


Figura 48: Gráfico da função $f(x) = 2 + 3 \cdot \sin(1 \cdot x + 0)$.

Mudando o valor do coeficiente c de 1 para 4, é possível ver na Figura 49 que a frequência do gráfico da função aumentou.

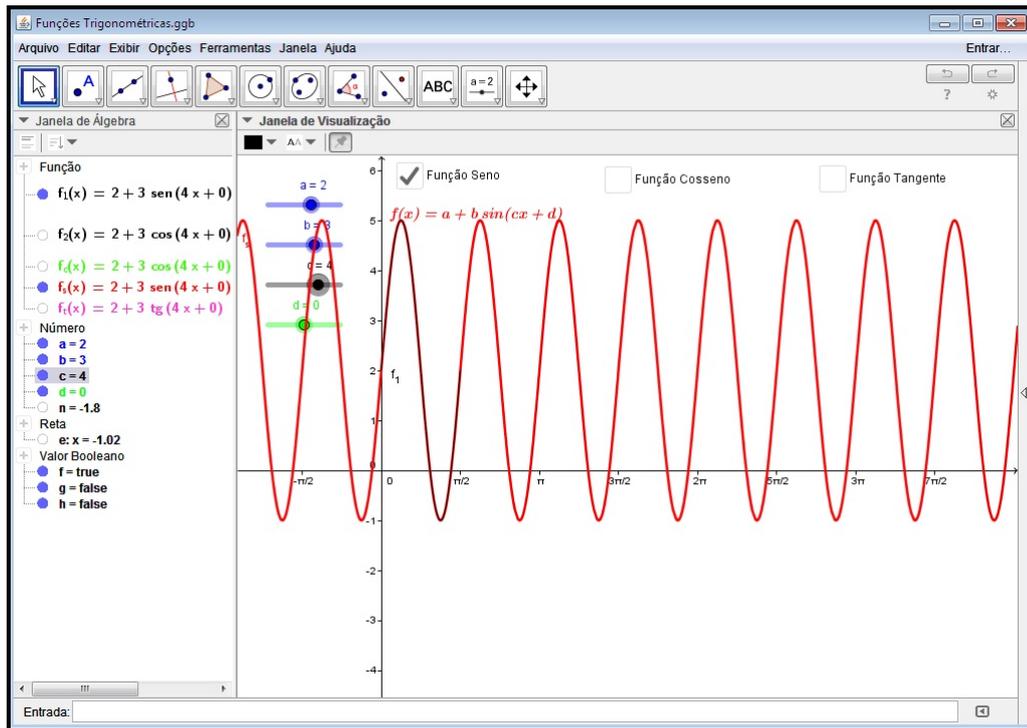


Figura 49: Gráfico da função $f(x) = 2 + 3 \cdot \sin(4 \cdot x + 0)$.

Ao alterar o coeficiente $d = 0$ para $d = 3,14$, é possível ver na Figura 50 que o gráfico da função se deslocou para a esquerda.

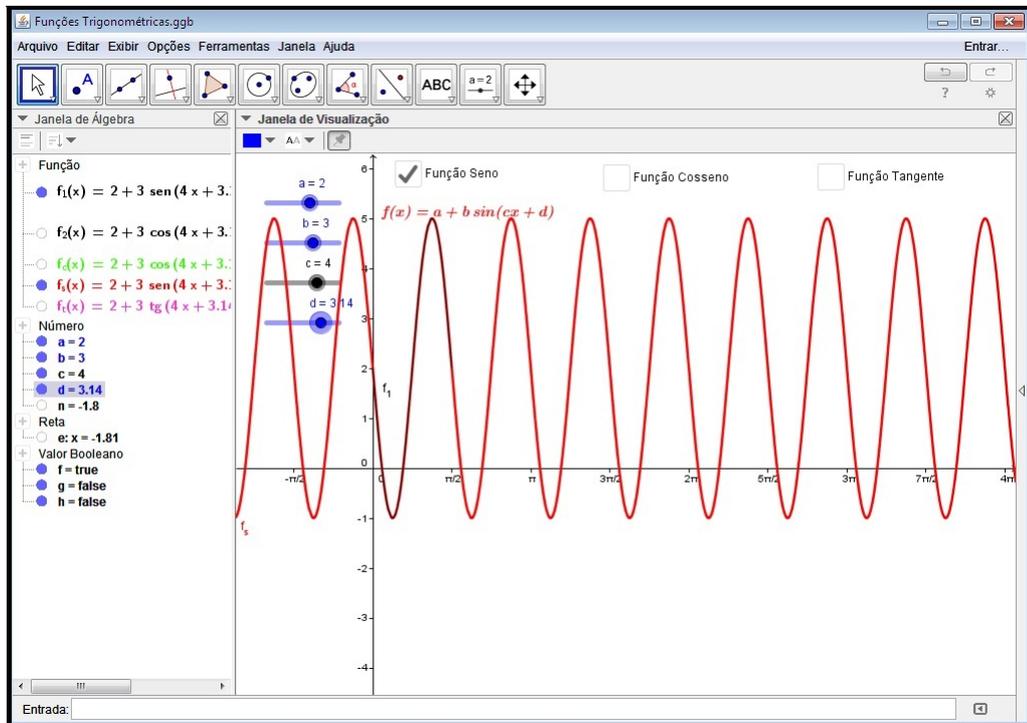


Figura 50: Gráfico da função $f(x) = 2 + 3 \cdot \sin(4 \cdot x + 3,14)$.

O GeoGebra deverá ser previamente programado para que os alunos possam desen-

volver as atividades que serão propostas. Na Figura 51, apresenta-se um fluxograma com as sugestões para esta oficina.



Figura 51: Fluxograma da Oficina 1.

1ª etapa: apresentar o gráfico da Figura 46 e os alunos utilizarão os computadores para se familiarizar com o aplicativo e seu funcionamento. É interessante que os alunos trabalhem em duplas para que discutam os resultados obtidos.

2ª etapa: fornecer algumas questões sobre as funções seno e cosseno para que possam ser respondidas com a utilização do GeoGebra.

Questões sugeridas:

- a) O que acontece com os gráficos das funções seno e cosseno quando o coeficiente “a” tem seu valor alterado? Há diferença entre os resultados obtidos para as funções seno e cosseno?
- b) O que acontece com os gráficos das funções seno e cosseno quando o coeficiente “b” tem seu valor alterado? Há diferença entre os resultados obtidos para as funções seno e cosseno?
- c) O que acontece com os gráficos das funções seno e cosseno quando o coeficiente “c” tem seu valor alterado? Há diferença entre os resultados obtidos para as funções seno e cosseno?
- d) O que acontece com os gráficos das funções seno e cosseno quando o coeficiente “d” tem seu valor alterado? Há diferença entre os resultados obtidos para as funções seno e cosseno?

3ª etapa: debate e exposição das conclusões para o grupo.

É importante observar se as ideias dos alunos são corretas e empregar a linguagem matemática.

Após o final dessa oficina, espera-se que os alunos sejam capazes de compreender o papel de cada coeficiente de uma função trigonométrica.

5.1.1 LISTA DE QUESTÕES APLICADAS

1. (UFPEL, 2004) Em um certo lugar, as marés altas ocorrem à 0 h e às 12 h, com altitude de 0,9 m, enquanto que as marés baixas ocorrem às 6 h e às 18 h, com altitude de 0,1 m. Nessas condições, qual a função que descreve a altitude do mar em relação ao horário t , em horas?
2. (KRUSE, 2014) Nossa respiração é um fenômeno cíclico, com períodos alternados de inspiração e expiração. Em um determinado adulto, a velocidade do ar nos pulmões em função do tempo, em segundos, decorrido a partir do início de uma inspiração, é dada pela equação $v(t) = 0,5 \cdot \sin(2 \cdot \pi t / 5)$. Calcule o ciclo respiratório completo desse adulto.
3. (COSER, 2014) Usando o GeoGebra, determine o período e a imagem de cada uma das funções:
 - a) $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$;
 - b) $f(x) = \cos(4 \cdot x)$;
 - c) $f(x) = 1 - \sin(3 \cdot x)$;
 - d) $f(x) = \cos(x + 2)$;
 - e) $f(x) = 2 \cdot \cos(x)$;
 - f) $f(x) = -1 + 2 \cdot \sin(0,5 \cdot x - 3)$.
4. Se $y = 3 \cdot \cos(x) - 1$, então y varia no intervalo:
 - a) $[2, 4]$.
 - b) $[-1, 1]$.
 - c) $[-1, 3]$.
 - d) $[-3, 1]$.
 - e) $[-4, 2]$.
5. (COSER, 2014) O gráfico, Figura 52, é da função f . Usando o GeoGebra a lei de f é:
 - a) $f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
 - b) $f(x) = 3 \cdot \cos(2 \cdot x)$.
 - c) $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
 - d) $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x)$.
 - e) $f(x) = 3 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

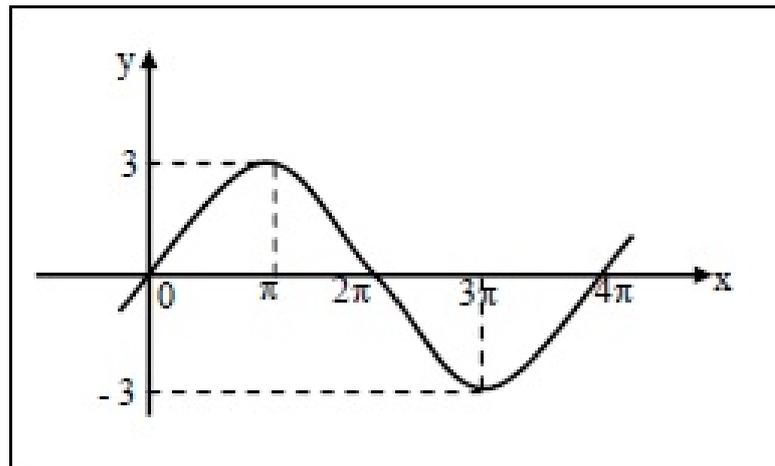


Figura 52: Gráfico da função f .

6. (COSER, 2014) Usando o GeoGebra, determine quantas soluções a equação $\sin 2x = \cos x$ possui:
- se $x \in [-2\pi, 2\pi]$;
 - se $x \in [-10\pi, 10\pi]$.

5.2 OFICINA 2: RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A MÚSICA

A Figura 53 é um fluxograma representativo da Oficina 2, que inicia com a apresentação de um vídeo mostrando o desenvolvimento da música e a sua relação com a física e a matemática através dos tempos.

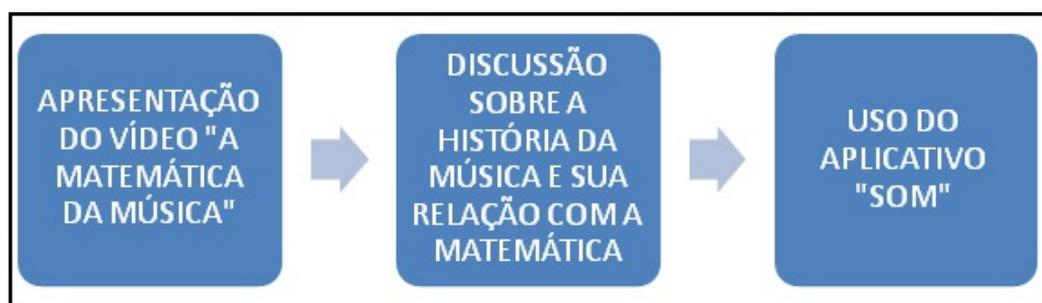


Figura 53: Fluxograma da Oficina 2.

Procedimento:

- 1) Apresentar o vídeo “A matemática da música”, disponível em (MATEMATICA, 2015).
- 2) Após a apresentação do vídeo, recordar conceitos importantes sobre o som e suas relações com a matemática. Algumas perguntas que podem ser feitas pelo professor para que os alunos possam debater sobre o assunto:

- Quem foi Pitágoras de Samos?
- O que é um monocórdio?
- O que é um intervalo musical?
- O que é som?
- O que é frequência sonora?
- O que é intensidade sonora?
- Como representar um som através das funções seno e cosseno?
- O que são harmônicos de uma onda sonora?

É interessante usar o aplicativo “Som”, (PHET, 2013), para explicar os conceitos de frequência e amplitude sonora.

Na Figura 54, tem-se a tela inicial do aplicativo “Som”. A barra de ferramentas tem cinco opções: ouvir uma única fonte, medir, interferência entre duas fontes, interferência por reflexão e ouvir com pressão do ar variável. A opção “ouvir uma única fonte” pode ser usada para mostrar aos alunos a relação do som com sua frequência e sua intensidade. É interessante notar que é possível ouvir a diferença que ocorre com o som simultaneamente às alterações feitas na amplitude e na frequência do som.

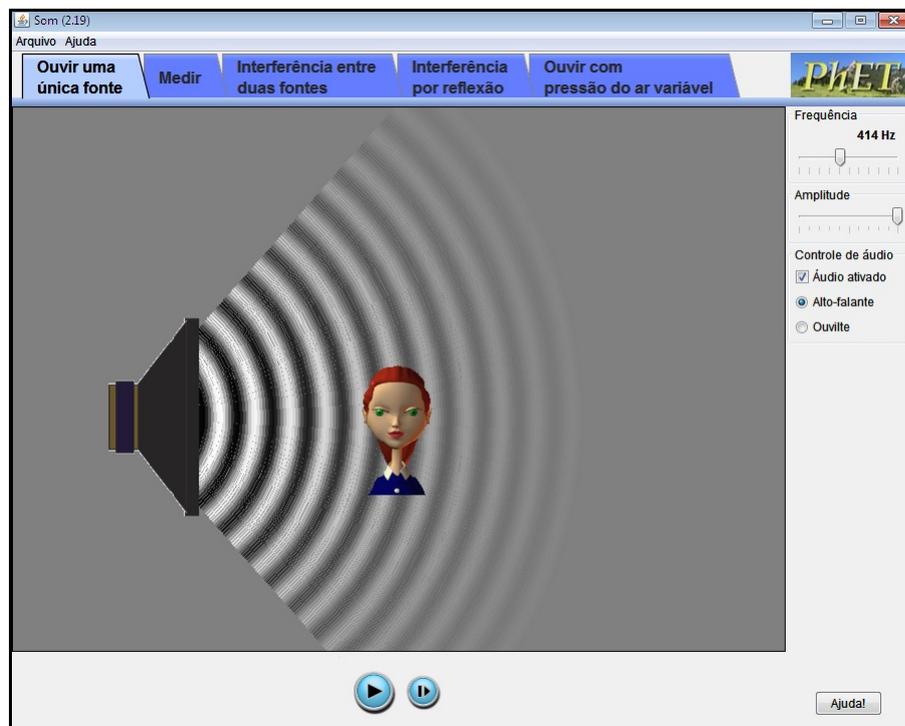


Figura 54: Tela inicial do aplicativo Som.
(PHET, 2013)

Esta segunda oficina explora os conceitos básicos de acústica e a relação existente entre a Matemática, a Física e a Música.

5.2.1 LISTA DE QUESTÕES APLICADAS

1. (PUCRS - 2010/2) O comprimento de uma corda de guitarra é $64,0\text{ cm}$. Esta corda é afinada para produzir uma nota com frequência igual a 246 Hz quando estiver vibrando no modo fundamental. Se o comprimento da corda for reduzido à metade, a nova frequência fundamental do som emitido será:
 - a) 123 Hz .
 - b) 4246 Hz .
 - c) 310 Hz .
 - d) 369 Hz .
 - e) 492 Hz .

2. (UFPR–adaptado) A velocidade de propagação do som em um gás é de 300 m/s . Um diapasão vibrando neste gás gera uma onda de comprimento de onda de $2,00\text{ cm}$. É correto afirmar que:
 - 01) A frequência do diapasão é de $60,0\text{ Hz}$.
 - 02) A onda emitida pelo diapasão corresponde a um infra-som.
 - 04) Um observador em movimento, aproximando-se do diapasão detectaria uma onda com frequência maior que a frequência de vibração do diapasão.
 - 08) Um outro diapasão que vibrasse com frequência de $5,00\text{ kHz}$ emitiria um som cujo comprimento de onda seria de $6,00\text{ cm}$ nesse gás.
 - 16) Se o diapasão vibrasse no vácuo, não seriam produzidas ondas sonoras.
 - 32) Aumentando-se a amplitude de oscilação do diapasão e mantendo-se a mesma frequência, haverá uma diminuição do comprimento de onda da onda sonora emitida no gás.
 - 64) Mudando o meio de propagação do gás para um sólido, somente a velocidade de propagação aumentará, permanecendo inalterada a frequência e o comprimento de onda inicial.

3. (UFPR) É correto afirmar:
 - 01) Uma onda sonora ao passar do ar para a água aumenta seu comprimento de onda.
 - 02) A distância entre duas cristas consecutivas é chamado período.

- 04) É possível variar amplitude de uma onda sem alterar sua frequência.
- 08) A luz amarela ao passar do ar para a água aumenta seu comprimento de onda.
- 16) Ao notarmos um relâmpago em uma tempestade, verificamos primeiro o clarão da luz e depois o som.
- 32) As ondas transversais transportam energia e as longitudinais transportam matéria.
- 64) A luz necessita de meio material para se propagar.
4. (UFMG/97) Uma perfuratriz cavou um poço para explorar petróleo. Para medir o comprimento do mesmo foi utilizado um vibrador sonoro de frequência de 200 Hz com um comprimento de onda de 2 metros. Sabendo que o pulso emitido pelo vibrador demorou 20 segundos para retornar até a superfície, qual é o comprimento do poço?
5. (UFMG/98) O som é um exemplo de uma onda longitudinal. Uma onda produzida em uma corda esticada é um exemplo de uma onda transversal. O que difere ondas mecânicas longitudinais de ondas mecânicas transversais é
- a) a frequência.
 - b) a direção de vibração do meio de propagação.
 - c) o comprimento de onda.
 - d) a direção de propagação.
6. A figura abaixo, Figura 55, representa uma onda periódica propagando-se na água (a onda está representada de perfil). A velocidade de propagação desta onda é de 40 m/s , e cada quadradinho possui 1 m de lado.



Figura 55: Onda periódica propagando-se na água.

Determine:

- O comprimento de onda (λ) desta onda;
- A amplitude (A) desta onda;

- c) A frequência (f) da onda;
- d) O período (T) de oscilação do barquinho sobre a onda.

5.3 OFICINA 3: COEFICIENTES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Na Figura 56 é apresentado um diagrama simplificado da Oficina 3. Nesta oficina será necessário o uso de um aparelho multimídia para a apresentação de slides, com o objetivo de relembrar e aprofundar o conhecimento de conceitos físicos sobre o som.

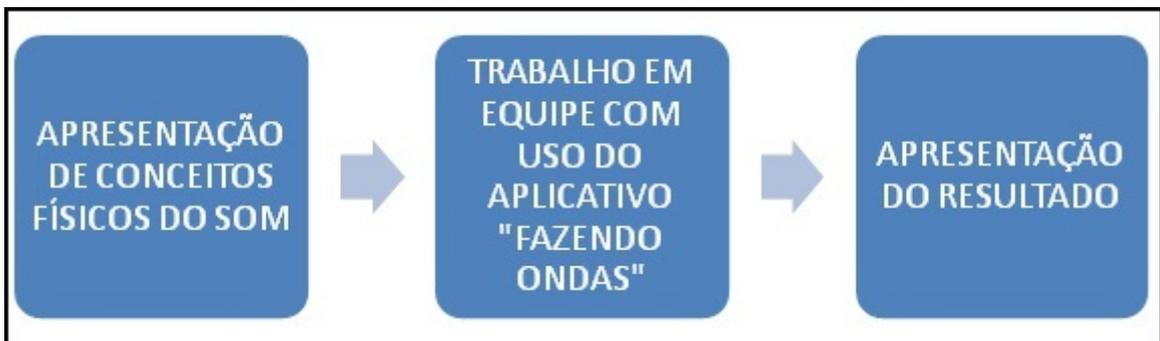


Figura 56: Fluxograma da Oficina 3.

A Oficina 3 começa com uma breve discussão sobre as características do som: altura, intensidade e timbre. A altura e a intensidade sonora já foram discutidas na Oficina 2, Figuras 57 e 58.

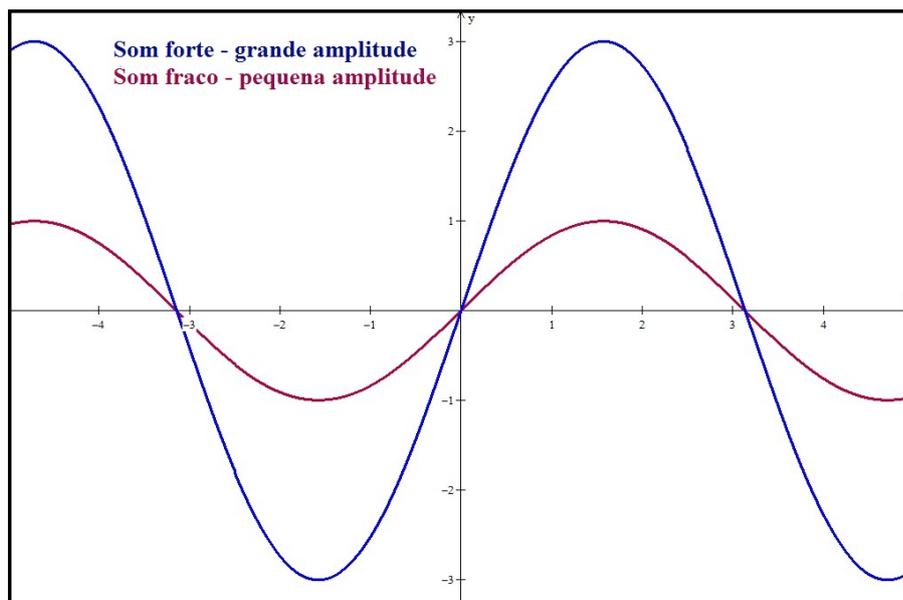


Figura 57: Representação gráfica da amplitude sonora.

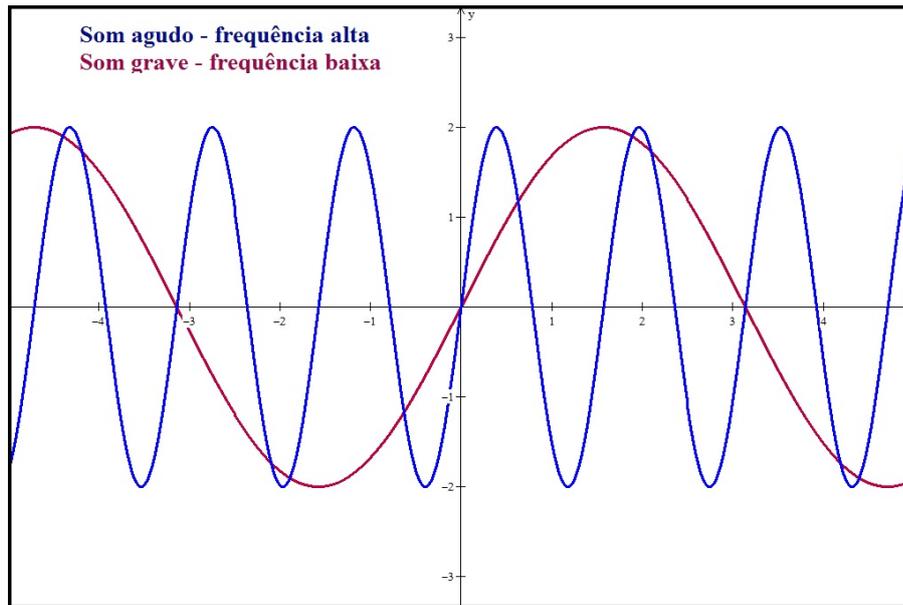


Figura 58: Representação gráfica da frequência sonora.

É importante ressaltar para os alunos que os gráficos apresentados são representações matemáticas de propriedades das ondas e não a onda propriamente dita.

Para apresentar o conceito de timbre pode-se iniciar com a apresentação da Figura 59, na qual é possível identificar que três ondas puras são múltiplas da fundamental (de menor frequência) a composição resulta em uma onda complexa que possui a mesma frequência da onda fundamental.

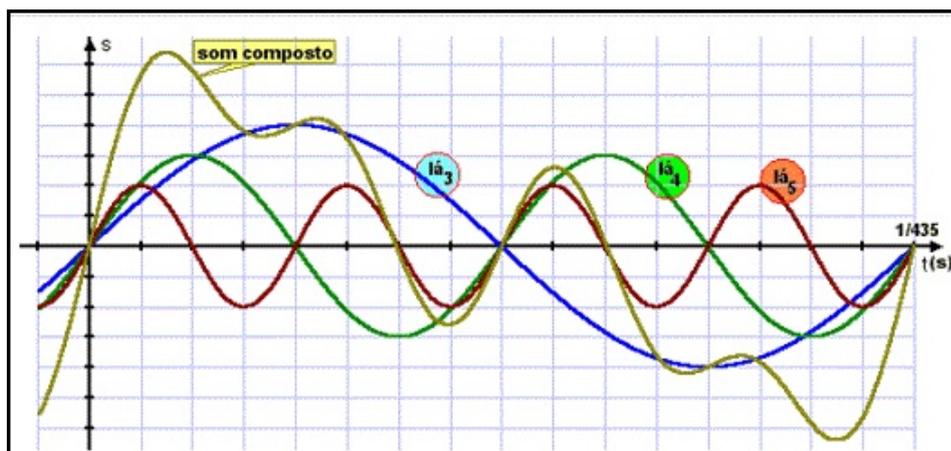


Figura 59: Superposição de 3 sons musicais simples ($l\acute{a}_3$, $l\acute{a}_4$ e $l\acute{a}_5$) resultando num som composto.
(FATOSMATEMATICOS, 2013)

Deve-se explicar que cada onda pura pode ser representada por uma função seno ou cosseno, onde os coeficientes diferenciam, como visto na Oficina 1. A soma dessas três ondas puras forma uma onda complexa que representa um timbre. Este possibilita a distinção de notas

iguais emitidas por fontes distintas. Como exemplo de gráficos que representam uma mesma nota (mesma frequência), mas são emitidas por diferentes instrumentos (diferentes timbres), pode-se mostrar a Figura 21. Nela é possível observar que, apesar dos gráficos que representam as ondas emitidas por fontes diferentes terem uma mesma frequência (mesma nota), as ondas tem formatos bem distintos. Isso faz com que um ouvinte possa distinguir as fontes emissoras dos sons.

A partir desse momento, torna-se possível enunciar o teorema de Fourier: “Toda função seccionalmente contínua (diferenciável) e periódica de período T , pode ser representada como a soma infinita de funções senos e cossenos”, e comentar que as ondas representadas na Figura 21 podem ser obtidas através da soma de funções seno e cosseno.

Após isso, propõe-se uma atividade no aplicativo “Séries de Fourier: Fazendo Ondas”, (PHET, 2013).

O aplicativo “Fazendo ondas” possui três ambientes distintos: Discreto, Jogo das Ondas e Discreto para Contínuo. Nessa atividade será usado o ambiente “Discreto” e a turma será dividida em equipes de três ou quatro alunos para que haja tempo disponível à apresentação das atividades realizadas pelas equipes para o restante da turma.

Atividades a serem realizadas por equipe:

- 1º) no ambiente “Discreto” do aplicativo, os alunos deverão escolher o número de harmônicos que terá a onda complexa (dê preferência a um número superior a sete);
- 2º) escolher se a série será representada pela soma de funções seno ou cosseno;
- 3º) obter a expressão matemática da onda resultante (para posteriormente apresentá-la ao restante da turma);
- 4º) ouvir o som emitido pela composição dos harmônicos escolhidos pelos alunos;
- 5º) apresentar o trabalho desenvolvido para o restante da turma.

Ao final desta atividade, espera-se que os alunos tenham compreendido o conceito de timbre e como ele pode ser representado graficamente como uma soma de funções seno ou cosseno.

5.3.1 LISTA DE QUESTÕES APLICADAS

1. (Unesp,2001) O nível de intensidade sonora (N) é expresso em decibéis (dB) por

$$N = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0},$$

onde:

I é a intensidade sonora fornecida pela caixa de som;

I_0 = intensidade-padrão, correspondente ao limiar da audição (para o qual $N = 0$).

Para o nível de intensidade $N = 120 \text{ dB}$, a intensidade sonora, fornecida pela caixa de som, deverá ser de:

- a) $10^{13} \cdot I_0$.
- b) $10^{12} \cdot I_0$.
- c) $1200 \cdot I_0$.
- d) $120 \cdot I_0$.
- e) $12 \cdot I_0$.

2. (Unitau 95) O ouvido humano pode detectar intensidades sonoras que vão de 10^{-12} W/m^2 a 1 W/m^2 . Usando como intensidade de referência 10^{-12} W/m^2 , determine os níveis de intensidade sonora em decibéis.

3. (Cesgranrio 2000) Quando o ouvido humano é submetido continuamente a ruídos de nível sonoro superior a 85dB, sofre lesões irreversíveis. Por isso, o Ministério do Trabalho estabelece o tempo máximo diário que um trabalhador pode ficar exposto a sons muito intensos. Esses dados são apresentados a seguir:

Nível sonoro (dB): 85; Tempo máximo de exposição (h): 8.

Nível sonoro (dB): 90; Tempo máximo de exposição (h): 4.

Nível sonoro (dB): 95; Tempo máximo de exposição (h): 2.

Nível sonoro (dB): 100; Tempo máximo de exposição (h): 1.

Observe-se, portanto, que a cada aumento de 5 dB no nível sonoro, o tempo máximo de exposição cai para a metade. Sabe-se ainda que, ao assistir a um show de rock, espectadores próximos às caixas de som estão expostos a um nível sonoro de 110 dB . De acordo com as informações anteriores, a duração máxima aceitável de um show de rock, para os espectadores próximos às caixas de som, deveria de ser de:

- a) 30 min.
- b) 20 min.
- c) 15 min.
- d) 7 min e 30 s.
- e) 3 min e 45 s.

4. (Puccamp 2001) Quando se ouve uma orquestra tocando uma sonata de Bach, consegue-se distinguir diversos instrumentos, mesmo que estejam tocando a mesma nota musical. A qualidade fisiológica do som que permite essa distinção é:
- a) a altura.
 - b) a intensidade.
 - c) a potência.
 - d) a frequência.
 - e) o timbre.
5. (PUC MG 98-2) Quando um violino e um oboé emitem a mesma nota, o som de um é perfeitamente distinguível do outro. A propriedade do som que permite essa distinção é:
- a) a frequência.
 - b) a velocidade de propagação.
 - c) a altura.
 - d) o timbre.
 - e) a intensidade.
6. (UFSC,2003) Dois músicos se apresentam tocando seus instrumentos: uma flauta e um violino. A flauta e o violino estão emitindo sons de mesma altura, mas de intensidades diferentes – a intensidade do som do violino é maior do que a intensidade do som da flauta. Uma pessoa cega encontra-se a uma mesma distância dos dois instrumentos, estando a flauta à sua direita e o violino à sua esquerda. A pessoa é capaz de distinguir os sons de um violino e de uma flauta. Considerando a situação descrita, assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).
- 01) É possível perceber que o violino está à sua esquerda e que a flauta está à sua direita, devido aos timbres diferentes dos sons emitidos pelos dois instrumentos.
 - 02) A pessoa é capaz de perceber que o violino está à sua esquerda e que a flauta está à sua direita, porque o som que está sendo emitido pelo violino é mais agudo e o som da flauta é mais grave.
 - 04) É possível a pessoa perceber que os dois instrumentos estão emitindo a mesma nota musical, porque uma nota musical é caracterizada pela sua frequência.
 - 08) O som que está sendo emitido pelo violino tem a mesma frequência do som que está sendo emitido pela flauta; por isso, a pessoa percebe que são de mesma altura.

- 16) A forma da onda sonora do violino é diferente da forma da onda sonora da flauta; por isso, os sons desses instrumentos apresentam timbres diferentes.
- 32) O som que está sendo emitido pelo violino é mais alto do que o som que está sendo emitido pela flauta.
- 64) Na linguagem vulgar, dizemos que a pessoa percebe o som do violino “mais forte” do que o som da flauta.
7. (UFLA/2001) Vários instrumentos musicais emitem a mesma nota. Um espectador consegue distinguir a nota emitida pelos diferentes instrumentos por causa
- das frequências diferentes.
 - das alturas diferentes.
 - dos timbres diferentes.
 - dos comprimentos de onda diferentes.
 - dos períodos diferentes.

5.4 OFICINA 4: CAMPEONATO “JOGO DAS ONDAS”

Esta Oficina pode ser aplicada em forma de um campeonato. Para isso é necessário que cada aluno tenha um computador e o professor será o coordenador do jogo.

Regra Geral: A turma será dividida em duas: metade dos alunos irão jogar e a outra metade irá observar. Cada um dos estudantes do segundo grupo será juiz de um colega que está jogando; abre-se o aplicativo “Fazendo Ondas” (PHET, 2013) no ambiente “Jogo das Ondas”. Os alunos que não concluírem as etapas no tempo estipulado serão eliminados.

Procedimento:

1º) Será escolhido o nível 1 (fácil). Mexendo na janela “Amplitudes” o aluno deverá conseguir obter a onda que aparece na janela “Soma”. Quando isso ocorrer, o aluno receberá uma mensagem que concluiu a tarefa, Figura 60. O aluno-juiz faz a conferência anotando o tempo;

2º) Após a conclusão da primeira etapa, o aluno-juiz selecionará o nível 2 e o aluno-jogador terá um tempo de 40 segundos para concluir a etapa. Novamente o aluno-juiz anotará o tempo.

Assim, as etapas devem prosseguir até que restem os finalistas. Logo após, será feito o

rodízio e os alunos-juízes jogarão. Os finalistas deste novo jogo irão jogar com os finalistas do primeiro grupo para definir o grande vencedor (ou vencedores).

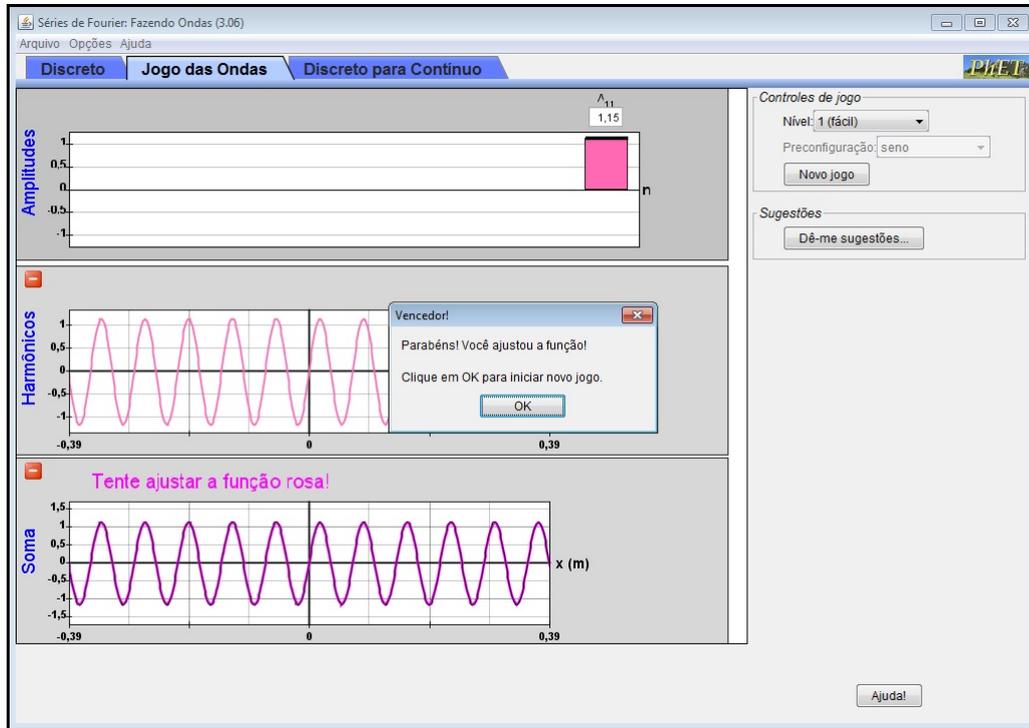


Figura 60: Tela do “Jogo das Ondas”.

Esta é uma forma descontraída de compreender o conceito de harmônicos, que o timbre resulta da soma desses harmônicos e pode ser representado através das séries de Fourier.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A música tem um caráter lúdico, possibilitando o seu uso no ensino de matemática em um trabalho interdisciplinar envolvendo a Física. A música pode despertar o interesse dos estudantes na aprendizagem de conteúdos matemáticos tais como frações, progressões aritméticas, funções trigonométricas, entre outros.

Conceitos como ortogonalidade e produto interno foram abordados com o intuito de apresentar fundamentação teórica sobre as séries de Fourier para o professor do Ensino Básico, fornecendo um suporte para as aulas de trigonometria.

Ainda, constatou-se que a série de Fourier, mais especificamente a Série de Fourier Contínua, é uma ferramenta matemática envolvida na construção de sintetizadores musicais analógicos aditivos e pode ser usada no ensino das funções seno e cosseno com o emprego de recursos como o aplicativo “Série de Fourier: Fazendo Ondas”. Este é um material acessível aos alunos e também instigante, facilitando a compreensão de conceitos como timbre.

A exposição didática por meio de sugestões de oficinas é uma seleção de ideias para a abordagem de determinados conteúdos relacionando a matemática e a música. Ressalta-se que para se obter sucesso em uma oficina é importante a organização antecipada dos materiais bem como um roteiro de trabalho bem definido.

Finalizando, há um campo vasto a ser desbravado pelo professor na interdisciplinaridade, buscando envolver os estudantes na descoberta da verdadeira beleza da ciência que é a matemática.

REFERÊNCIAS

- ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados**. [S.l.]: Escrituras, 2006.
- ACADEMIAMUSICAL. **O que é uma escala musical**. jul. 2012. Disponível em: <<http://www.academiamusical.com.pt/tutoriais/o-que-sao-escalas-musicais-video/> (acesso em 16/06/2015)>.
- ARTESEMPRE. **Música**. nov. 2012. Disponível em: <<http://adriartesempre.blogspot.com.br/p/musica.html> (acesso em 15/07/2014)>.
- BERGONOSO, M. C. C. **Número, som e beleza: a estética musical em Boécio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2013.
- BORGES, N. **Conceito de onda. Natureza das ondas**. nov. 2013. Disponível em: <http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br/2013/11/cursos-do-blog-termologia-optica-e-ondas_19.html (acesso em 17/03/2015)>.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9ª. ed. [S.l.]: LTC, 2009.
- BURNS, E. M. **História da civilização ocidental**. 2ª. ed. [S.l.]: Globo, 1974.
- COMUNE, A. D. **Pitágoras e a harmonia**. jan. 2014. Disponível em: <<https://arquiteturaemusica.wordpress.com/2014/01/01/pitagoras-e-a-harmonia/> (acesso em 09/12/2014)>.
- COSER, M. **Anglo - funções trigonométricas**. jun. 2014. Disponível em: <<http://www.marcelocoser.com.br/ftrig2009tarde.pdf> (acesso em 13/06/2015)>.
- COSTA, K. **Noções básicas de física na música**. jul. 2013. Disponível em: <<http://sociedaderacionalista.org/2013/07/26/nocoas-basicas-de-fisica-na-musica/> (acesso em 05/03/2015)>.
- ELDORADO, T. **Flauta de 35 mil anos é o mais antigo instrumento musical**. jun. 2009. Disponível em: <<http://www.territorioeldorado.limao.com.br/musica/mus3875.shtm> (acesso em 01/04/2015)>.
- FATOSMATEMATICOS. **Jean-Baptiste Joseph Fourier**. 2013. Disponível em: <<http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/02/jean-b-j-fourier.html> (acesso em 05/03/2015)>.
- FAZENDA, I. C. **Interdisciplinaridade: definição, projetos, pesquisa**. 2ª. ed. [S.l.]: Cortês, 1993.
- ERENCE, M. **Curso de física: ondas (som e luz)**. 2ª. ed. [S.l.]: Edgard Blucher LTDA, 1971.
- FERREIRA, S. L. **Introduzindo a noção de interdisciplinaridade**. 2ª. ed. [S.l.]: Cortês, 1993.
- HAVEN, C. **Max Mathews, 'father of computer music,' dies at 84**. 2011. Disponível em: <<http://news.stanford.edu/news/2011/may/max-mathews-obit-050211.html> acesso em (09/06/2015)>.
- HAYKIN, S.; VEEN, B. V. **Sinais e sistemas**. 3ª. ed. [S.l.]: Bookman, 2001.

- HOHENWARTER, M. **GeoGebra**. 2013. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/> (acesso em 27/05/2015)>.
- IAZZETA, F. **Música e mediação tecnológica**. 1^a. ed. [S.l.]: Perspectiva, 2009.
- JR, D. B. **Como funciona**. 2012. Disponível em: <<http://www.antesdomunicipal.com.br/raizes-2/> (acesso em 09/03/2015)>.
- JUNIOR, G. L. **Geometria dinâmica com o Geogebra no ensino de algumas funções**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, 2013.
- KIRN, P. **Look, Ma, Hands: iOS Theremin App Draws from Tannerin, Martenot, Trautonium**. jan. 2013. Disponível em: <<http://createdigitalmusic.com/2013/01/look-ma-hands-ios-theremin-app-draws-from-tannerin-martenot-trautonium/> (acesso em 09/06/2015)>.
- KRUSE, F. **Funções seno e cosseno: uma metodologia fácil, interessante e suas aplicações**. p. 1–3, 2014.
- LDB. **Projeto de Lei N.º 2.732-B, de 2008**. p. 1–8, 2008.
- LIMA, N. F. **Acordes e dissonâncias na escala de Dó maior**. jul. 2014. Disponível em: <<http://www.ifba.edu.br/fisica/nfl/portfolio/QNA%20OndasSom/harmoniaMusical/harmoniaMusical.html> (acesso em 15/07/2014)>.
- MACHADO, F. S.; INDRUSIAK, M. L. S. **Parâmetros geométricos do timbre de um tubo de órgão**. v. 15, n. 23, p. 7–16, 2014.
- MATEMATICA, M. T.-V. E. de. **01 - A matemática da música**. jul. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ZI1bYkmWPXg> (acesso em 29/07/2015)>.
- MEC. **Indicações para a construção de um projeto curricular interdisciplinar**. jul. 2010. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?id=13564&option=com_content&view=article (acesso em 01/03/2015)>.
- MENEZES, F. **A acústica musical em palavras a sons**. 2^a. ed. [S.l.]: Ateliê, 2014.
- NUSSENZVEIG, M. **Curso de física básica 2**. 4^a. ed. [S.l.]: Edgard Blucher LTDA, 2011.
- PARRIS, R. **Winplot para Windows**. nov. 2009. Disponível em: <<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> (acesso em 29/07/2015)>.
- PHET. **Fourier: Fazendo ondas**. jul. 2013. Disponível em: <<http://phet.colorado.edu/en/simulation/fourier> (acesso em 26/04/2015)>.
- PRIMORDIOS. **Primórdios – fundamentos 1**. 2012. Disponível em: <<http://www.antesdomunicipal.com.br/raizes-2/> (acesso em 01/02/2015)>.
- PROAKIS, J. I.; MANOLAKIS, D. G. **Digital signal processing: principles, algorithms and applications**. 3^a. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1996.
- QUEIROZ, A. **Pitágoras: o músico**. 2012. Disponível em: <<http://www.emdialogo.uff.br/node/3784> (acesso em 14/05/2015)>.
- RAMALHO, F.; FERRARO, N.; SOARES, P. **Os fundamentos da física 2**. 2^a. ed. [S.l.]: Centauro, 2014.
- RATTON, M. **Tecnologia dos instrumentos musicais eletrônicos**. 2002. Disponível em: <http://www.music-center.com.br/index.php?option=com_content&view=article&id=91:tecnologia-dos-instrumentos-musicais&catid=13:instrumentosItemid=5#parte3 (acesso em 07/02/2015)>.

R.CAMARGOS, C. B. **Música e matemática: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. s. **Física 2**. 3ª. ed. [S.l.]: LTC, 2003.

RIBAS, C. **Flauta pré-histórica é encontrada, ouça sua música**. mar. 2013. Disponível em: <<http://hypescience.com/flauta-da-era-das-cavernas-e-encontrada-ouca-sua-musica/> (acesso em 07/03/2015)>.

SANTOS, S. G. **Audio digital**. 2013. Disponível em: <<https://sofiagsantos.wordpress.com/> (acesso em 11/01/2015)>.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Princípios de Física**. 3ª. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2004.

SILVEIRA, J. **Barulho pode prejudicar a saúde; conheça lugares quietos em SP**. jun. 2010. Disponível em: <<https://blogchegadebarulho.wordpress.com/2010/06/09/barulho-pode-prejudicar-a-sade-conheca-lugares-quietos-em-sp/> (acesso em 18/06/2015)>.

SOFISICA. **Intensidade sonora**. jan. 2015. Disponível em: <<http://www.sofisica.com.br/conteudos/exercicios/acustica2.php> (acesso em 08/06/2015)>.

SOUZA, D. F. de; CINTRA, R. J. de S.; OLIVEIRA, H. M. de. Uma ferramenta para análise de sons musicais: a série quantizada de foureir. v. 1, n. 1, p. 1–5, 2005.

UFPEL. **Programa de avaliação escolar**. jul. 2004. Disponível em: <http://ces.ufpel.edu.br/vestibular/pave/download/provas/2004/prova_pave2004_2.pdf (acesso em 02/07/2015)>.

WIKINOTICIA. **Os instrumentos musicais mais antigos na Europa tem mais de 40.000 anos**. 2012. Disponível em: <<http://pt.wikinoticia.com/Tecnologia/geral%20tecnologia/117653-os-instrumentos-musicais-mais-antigos-na-europa-tem-mais-de-40000-anos> (acesso em 09/06/2015)>.

WIKIPEDIA1. **Jean-Baptiste Joseph Fourier**. 2010. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Joseph_Fourier (acesso em 09/12/2015)>.

WIKIPEDIA2. **Arquitas de Tarento**. mar. 2015. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Arquitas_de_Tarento (acesso em 18/02/2015)>.

WIKIPEDIA3. **Moog (instrumento musical)**. jun. 2015. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Moog_\(instrumento_musical\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/Moog_(instrumento_musical)) (acesso em 09/06/2015)>.

WIKIPEDIA4. **Sintetizador**. jun. 2015. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Sintetizador> (acesso em 09/06/2015)>.

WISNIK, J. M. **O som e o sentido**. 2ª. ed. [S.l.]: Centauro, 2014.

ZILL, D.; CULLEN, M. **Equações diferenciais**. 3ª. ed. [S.l.]: Makron Books, 2001.