O ENSINO DE ARTE E MATEMÁTICA: ABORDAGENS GEOMÉTRICAS

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus de Ponta Grossa
PPGECT
Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciência e Tecnologia

O ENSINO DE ARTE E MATEMÁTICA: ABORDAGENS GEOMÉTRICAS (MATERIAL DIDÁTICO)

PONTA GROSSA
MARÇO-2013

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Esse material didático se destina a professores de Matemática e de Arte do Ensino Médio que ensinam Geometrias e que realizam Leitura de Imagens. Seu texto é resultante de um trabalho de conclusão do Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia, ofertado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Ponta Grossa, com o título “Ensino de geometrias não-euclidianas usando Arte e Matemática”, desenvolvido pela professora Simone Semmer, contando com a orientação da professora Drª. Sani de Carvalho Rutz da Silva e coorientação do professor Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves.

Estima-se que as atividades propostas nesse material didático possam auxiliar os professores de Matemática, no ensino de geometrias não-euclidianas e os professores de Arte no contexto aplicativo da leitura de imagens anamórficas, propiciando aulas diferentes das tradicionais aulas expositivas. Espera-se também, que com as atividades, aqui apresentadas, seja possível, proporcionar aos educandos, reflexões, e experimentações acerca do mundo em que se vive. E, que ao analisar o seu cotidiano, o educando descubra e relacione as conexões existentes entre as duas áreas do conhecimento: a Arte e a Matemática que, aparentemente antagônicas, possuem muito em comum.

Para isso, o contexto histórico, a análise da obra e o fazer artístico comuns na metodologia de Artes Visuais, foram incorporados ao uso de representações semióticas para o ensino de geometria. Neste material constam experimentações, em que foram utilizados materiais manipuláveis direcionados à anamorfose e às geometrias projetiva, plana, espacial e esférica, em que são discutidas e contextualizadas em função de um ensino prático e interdisciplinar. No entanto, caberá ao professor, adaptá-lo a sua realidade, e aos seus objetivos e aos da sua disciplina.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 BREVE HISTÓRICO

A aplicação prática (*tica*) de conhecimentos (*mathema*) originou a Matemática. Registros históricos suscitam que em desenhos e figuras do homem neolítico, poderia haver uma possível preocupação com relações espaciais, como congruência e simetria, presentes em potes, tecidos e cestas, bem como nos métodos de agrimensura. Geometria, palavra originária de medidas (*metron*) e da terraterra (geo), deriva dessas primeiras aplicações em medições agrárias. (BOYER, 1996) (EVES, 2004).

As primeiras aplicações de geometria, por volta de 3.000 a. C, determinaram-se com processos empregados de "como realizar" medições de área e volume, "como construir" canais e reservatórios de água. Ao mesmo tempo, havia preocupação estética de configurações e ordem na beleza das formas, como manifestações artísticas e culturais, historicamente construídas e socialmente adaptáveis (LAUER, 1983).

Ordem e beleza das formas foram abstraídas na Grécia Antiga, às margens do Mediterrâneo, absorvidas de elementos de outras culturas e ampliando-as na organização de pensamento lógico e dedutivo. Régua e compasso foram usados em desenhos e figuras, realizando construções ditas geométricas e questões fundamentais de seus elementos foram discutidas em demonstrações matemáticas, explicando seu porquê e não mais, como realizá-las. A geometria deixa de ser prática, fazendo parte do mundo das ideias.

Euclides (300 a. C) escreve postulados e teoremas sintetizando, reunindo em obra de 13 livros intitulada "Os Elementos", conhecimentos geométricos da Grécia Antiga, vindos de Tales de Mileto, Pitágoras e Platão, entre outros geômetras e filósofos gregos da época. De acordo com Eves (2004, p. 168), "é provável que 'Os Elementos' de Euclides sejam, na sua maior parte, uma compilação altamente bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores". Eves não tem dúvida que Euclides teve que aperfeiçoar algumas demonstrações e, complementar muitas outras, mas se deve a ele, o mérito de selecionar proposições e as arranjar em sequência lógica, conhecida por Geometria Euclidiana.

A Geometria Euclidiana foi a primeira teoria matemática a ser axiomatizada. Euclides escolheu para os postulados afirmações simples, que poderiam ser aceitas por serem evidentes, por qualquer pessoa de bom senso. Ou seja, axiomas e postulados são conjuntos de regras usadas em demonstrações abstratas, cujos fundamentos, suficientes para as necessidades da época, foram usados por muitos anos como única geometria existente. Porém, um de seus postulados, o das paralelas, suscitou questionamentos desde a Antiguidade, sobre a sua possível demonstração na forma de um teorema (COUTINHO, 2001; SANTOS, 2009; BRITO, 1995).

Os cinco postulados que Euclides formalizou, segundo Coutinho (2001, p.

34) denotam e referenciam a atualmente conhecida Geometria Euclidiana, ou seja: (1) por dois pontos passa uma única reta; (2) uma reta é infinita; (3) em um ponto, somente existe uma única circunferência com mesmo centro e mesmo raio; (4) todos os ângulos retos são de mesma medida e (5), se uma reta corta outras duas, a soma dos ângulos internos de um mesmo lado da reta inicial é menor que dois retos, no infinito, se cortam do mesmo lado da reta.

Em meados do século XV, junto ao Renascimento, surge a geometria projetiva, em que a Geometria de Euclides voltou-se às Artes e às grandes navegações. A geometria projetiva não é euclidiana, pois nela não existem retas paralelas, e não deixa válido o quinto postulado. É estudada e aplicada com pontos de fuga e perspectiva.

Albrecht Dürer (1471-1528), Leonardo da Vinci (1452-1519), Holbein (1498-1543) e Pozzo (1642-1709), entre outros, aliando Arte à Matemática, aplicaram geometria projetiva em suas obras, usando perspectiva de várias formas, entre elas a anamorfose.

De forma artesanal, Gerhard Kremmer (1512-1594), conhecido como Mercator, utilizou anamorfose transformando linhas curvas da esfericidade do globo terrestre em linhas retas em mapas, revolucionando a cartografia. Ele tinha habilidade para representar cursos marítimos espiralados, usando linhas retas em mapas planos (ÁVILA, 2010).

De acordo com Coutinho (2001), a Geometria de Euclides deixou de ser única no século XIX, devido a matemáticos como Saccheri (1667-1733), Lobachevsky (1792-1856), Bolyai (1802-1860), Gauss (1777-1855) e Riemann (1826-1866), que "lançaram as bases de outras geometrias tão logicamente aceitas quanto a Euclidiana": a geometria hiperbólica e a geometria elíptica (idem, p. 35-36).

Enquanto que a Geometria Euclidiana utiliza-se do espaço plano, a hiperbólica e a elíptica se utilizam de espaços respectivos, como a pseudoesfera e a esfera. A geometria que é ensinada nas escolas, segundo Coutinho (2001), é a Euclidiana. No entanto, de acordo com Brito (1995), perceber que se tem geometrias construídas em três tipos de curvatura, possibilita reconhecer as geometrias não-euclidianas, e realizar um possível estudo sobre elas.

2.2 ARTE E MATEMÁTICA

Em 1995, Lorenzato questionava o não ensino de geometria na escola. Essa questão serviu de alerta, de reflexão sobre ações e modificações de material didático. Atualmente, se ensina na escola a Geometria Euclidiana. Entre diversos autores que informam o ensino de somente um tipo de geometria, encontram-se Fainguelernt (1999), Coutinho (2001) e Kaleff (2003). Entre os autores, há aqueles cujas pesquisas apontam sugestões do uso de outros tipos de geometrias, como as não-euclidianas e também outros tipos de metodologias, inseridas em concepções voltadas à interdisciplinaridade, à visualização, à contextualização.

Documentos oficiais (BRASIL, 1998; PARANÁ, 2008) também indicam a prática de geometrias, além da Euclidiana. Nas Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática (PARANÁ, 2008), Geometrias é um conteúdo estruturante, cujos conteúdos básicos indicam o estudo de geometrias não-euclidianas inserindo conteúdos específicos de geometria fractal, geometria projetiva, esférica e hiperbólica. Entretanto, os professores não as tiveram em sua formação acadêmica (LOVIS, 2009) e, a escassez de material didático contribui para que não se ensinem geometrias não-euclidianas (PATAKI, 2003). Portanto, o professor de Matemática precisa de formação continuada e materiais pedagógicos que o auxiliem. Entretanto, existem práticas educativas que podem ser acessadas na rede mundial de comunicação, entre outros, citam-se Martos (2002), Pataki (2003), Prestes (2006), Marqueze (2006), Reis (2006) e Kodama (2006). Tais práticas evidenciam principalmente a interdisciplinaridade, a contextualização e o uso de tecnologias e de materiais manipuláveis.

Ao se utilizar de materiais manipuláveis, Kaleff (2003) explica que a aprendizagem de geometria também se utiliza de métodos didáticos que privilegiam a visualização, usando representações de figuras geométricas. Segundo a autora, no contexto geométrico, a habilidade da visualização é de suma e fundamental importância, pois, a visualização de objetos geométricos privilegia o conjunto das operações mentais envolvidas no processo cognitivo.

As operações mentais são explicadas por Duval (2003). Segundo ele, não se pode ter compreensão se não há distinção entre um objeto e sua representação. Assim também fez Magritte (1898-1967), quando, usando um poema visual e um caligrama, justificou que o cachimbo que pintou num quadro, não era um cachimbo, mas sua representação (FOUCAULT, 2004). O que esse pintor fez foi representar um objeto numa tela, mas, intencionalmente chamou a atenção do espectador, fazendo-o pensar sobre a representação de imagens em obras de arte.

Da mesma forma, Duval (2009) chama a atenção ao afirmar que por meio de representações semióticas se pode compreender objetos matemáticos, ou seja, para esse autor, as representações são importantes, ou seja, os registros de representação semióticas são tão ou mais importantes que cálculos algébricos ou aritméticos.

Diante do exposto, verifica-se que representações semióticas dependem da interpretação que se faz delas, sendo essenciais no desenvolvimento do pensamento geométrico. Elas são encontradas tanto em Arte quanto em Matemática, podendo ser usadas em trabalho interdisciplinar (FAINGUELERNT; NUNES, 2006).

Visando à interdisciplinaridade entre Matemática e Arte, por exemplo, pode-se usar no ensino de Matemática, e principalmente no ensino de Geometrias, a Metodologia Triangular de Barbosa (2005), a qual enfatiza o ensino a partir de uma análise histórica, o conhecimento estético e a produção artística. Ou seja, a abordagem triangular enfatiza o ver, o fazer e o conhecer. Essa metodologia parte da premissa de que para aprender é preciso ver a imagem e lhe atribuir significado, contextualizá-la e situá-la no momento histórico.

Por sua vez, a teoria das representações semióticas de Duval (2009) estabelece que a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro, ou seja, a habilidade de decodificar uma linguagem em outra. Por exemplo, transformar um problema escrito em linguagem natural, em termos algébricos ou em figura geométrica. Segundo Duval (2009), essa atividade aparentemente simples, pode ser um entrave na aprendizagem dos educandos, que nem sempre enxergam aquilo que o professor pretende que o façam. O autor chama de semiósis a apreensão ou a produção de uma representação e de noésis a apreensão conceitual de um objeto. E afirma: “não há noésis sem semiósis”, ou seja, não se apropria um conhecimento sem fazer produzir ou apreender uma representação desse conhecimento.

E, no que diz respeito à Arte, por intermédio das representações, seja em pintura, gravura, escultura ou qualquer outra manifestação artística, os artistas revelam o contexto em que vivem, concepções pessoais, sociais, filosóficas, históricas e culturais (FAINGUELERNT; NUNES, 2006). Essas autoras explicam o encontro entre o matemático e o artístico:

> A matemática e a arte nunca estiveram em campos antagônicos, pois desde sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade. Na verdade, podemos observar a influência mútua de uma sobre a outra desde os primeiros registros históricos que temos de ambas. Essas duas áreas sempre estiveram ligadas, desde as civilizações mais antigas, e são inúmeros os exemplos de sua interação (ibidem, 2006, p. 18).

Assim, concordando com as autoras, e escolhendo-se entre os inúmeros exemplos de confluências entre as duas áreas do conhecimento, optou-se em detalhar a anamorfose, uma espécie de perspectiva que deforma imagens, que podem ser reconhecidas sob um determinado ponto de vista e, que podem ser usadas tanto em Arte quanto em Matemática.

2.3 ANAMORFOSE

Uma imagem de um objeto pode ser distorcida. Entretanto, ela pode ser percebida de um ponto de vista que lhe pareça coerente ao observador. O processo de distorcer uma imagem de tal modo que é necessário observá-la de uma maneira específica a fim de reconhecê-la é definido por Cumming (1995) como anamorfose.

A etimologia desse vocábulo é descrita por Atalay (2007, p. 173) de duas formas distintas: as raízes podem ser em *ana* (de novo) e *morphe* (forma), ou ainda pode derivar de *an* (ausência de, sem) e *morphe*, resultando em *amorfo*, (sem forma) Lima (2006, p. 1) corrobora com a definição etimológica, quando afirma que anamorfose “significa apenas que a forma foi mudada”. Sotto e Santos (2011) a explicam como uma forma de representação gráfica, que somente pode ser reconhecida quando vista de um determinado ângulo e de uma distância fixa.

O uso da anamorfose vem da China quando “artistas trabalhavam empiricamente, pintando ao mesmo tempo em que viam o pincel através do espelho apropriado” (DANHONI NEVES; SILVA, 2010, p. 55). Ou seja, sua técnica vem da Antiguidade, sendo uma espécie de perspectiva que necessitava de cálculos e traçados geométricos. Foi usada no Renascimento por artistas com diversos objetivos e nos dias atuais é amplamente usada nas artes plásticas, abrangendo também a publicidade. Atualmente é facilitada pela tecnologia digital, que amplia, reduz e deforma imagens rapidamente por meio da informática (SOTTO; SANTOS, 2011).

A obra mais conhecida, em que há exemplo de anamorfose, intitula-se “Os Embaixadores” de Holbein (1497-1543), cujo exemplo de imagem pode ser observado na figura 1.

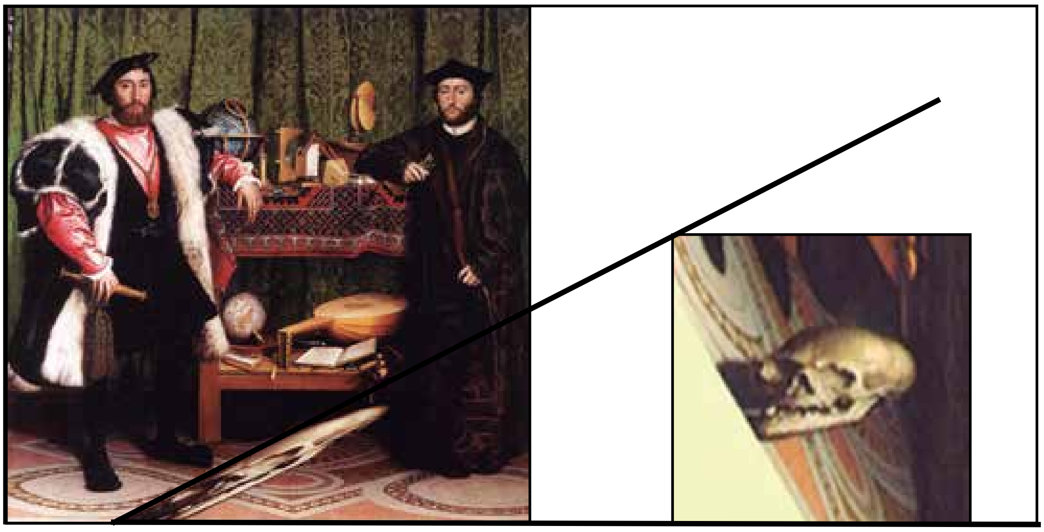


Figura 1 – Os Embaixadores de Holbein (1655).
Fonte: http://forum.outerspace.terra.com.br/showthread.php?t=385917

Ao passar pelo quadro e observá-lo de frente, além das duas pessoas em pé e vários objetos ricamente descritos pelo artista, vê-se aos pés dos homens, no chão, entre eles, uma mancha indefinida. Interagindo com a obra, por meio de uma visão periférica, é possível visualizar no quadro em vez de uma mancha, a imagem de um crânio humano (CUMMING, 1995).

Segundo Cumming (1995, p. 39), “Os Embaixadores” é uma perfeição de perspectiva, repleta de detalhes e de textura, mostrando a sólida compreensão dos princípios e filosofias da arte italiana e no norte da Europa. Quanto à imagem do crânio distorcido, o autor coloca que o artista utilizou a anamorfose, como uma forma extrema de perspectiva. A técnica foi descrita pela primeira vez nas anotações de Leonardo da Vinci.

Atalay (2007) confirma que o primeiro desenho usando anamorfose data de 1485, realizado por Leonardo da Vinci. Exemplo do desenho e de sua anamorfose podem ser observados na figura 2.

Figura 2 – Arte Anamórfica de Leonardo da Vinci.
Fonte: Atalay (2007, p. 175)

Leonardo da Vinci estudou e desenvolveu várias técnicas artísticas e científicas, e dedicando-se às transformações de figuras curvilíneas. Capra (2008, p. 213) descreve essas transformações, detalhadamente:

> Em um interessante exemplo "transicional", desenha um quadrado com um círculo inscrito e então transforma o quadrado em um paralelogramo, , transformando assim o círculo em elipse. No mesmo fólio, transforma o quadrado em um retângulo que prolonga o círculo em uma elipse diferente. Leonardo explica que a relação da *figura ovale* [elipse] com relação ao paralelogramo é a mesma do círculo com relação ao quadrado, e afirma que a área de uma elipse pode ser facilmente obtida se o círculo equivalente for encontrado.

Leonardo da Vinci, segundo Capra (2008), tentava fazer a quadratura do círculo e indicou possíveis rotas a serem utilizadas na configuração da anamorfose. A transformação do quadrado em paralelogramo e o círculo em elipse; e a transformação do quadrado em retângulo e o círculo em elipse, conforme se visualiza na figura 3.

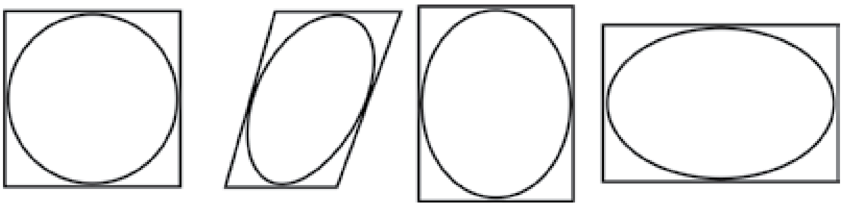


Figura 3 – Transformações de quadrado e de círculo gerando Anamorfose.
Fonte: Arquivo próprio

Um desenho de Leonardo em que aparece anamorfose é *Leonardo's Eye* (Olho de Leonardo), uma pintura de 1485, que pode ser observada na figura 4.

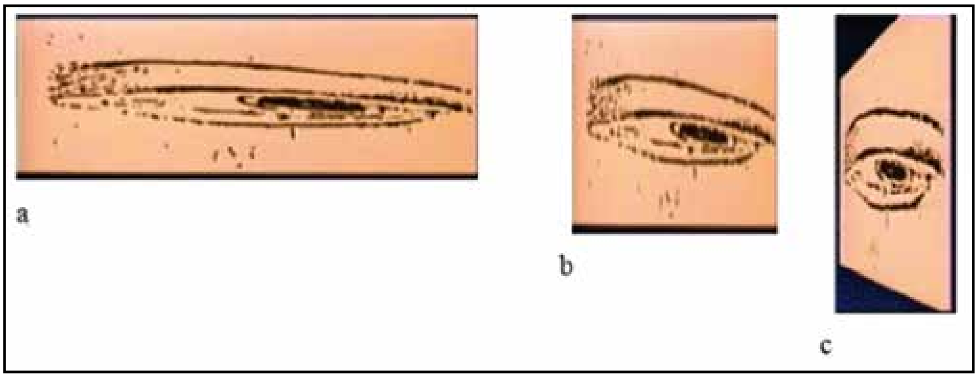


Figura 4 – *Leonardo's Eye.*
Fonte: http://obelogue.blogspot.com/2010/05/o-carteiro-chamar-as-anas-pelos-nomes.html

Segundo Sotto *et* al. (2008, p. 3), o desenho “visto de frente, não se identifica a figura, mas colocando-o em um certo ponto de vista, consegue-se perceber a pintura de um olho, com suas pálpebras e sobrancelhas”.

Os objetivos dos artistas utilizarem anamorfose variaram de acordo com o passar do tempo. Entre os séculos XVI e XVII, esses a usaram para transmitir mensagens pornográficas, políticas, magia e caricaturas, também para mensagens secretas em períodos de guerra. Nos séculos XVIII e XIX, como brincadeiras infantis (SOTTO *et* al., 1999).

No século XVII uma cúpula foi simulada no teto de uma catedral italiana. A *trompe l’óeil* foi utilizada por Andrea Pozzo, na Catedral de Santo Inácio, em Roma, para pintar uma esfera anamórfica. A tradução do termo *“trompe l’óeil”* é “enganar aos olhos”, ou seja, a cúpula não existe, é uma ilusão de ótica que engana à primeira vista, e assombra as pessoas que desconhecem a técnica (SILVA; DANHONI NEVES, 2010). A figura 5 mostra essa imagem.

Figura 5 – Cúpula da Igreja de S. Ignazio em Roma.
Fonte: http://www.casa-in-italia.com/artpx/ignazio/ignazio.htm

A mesma técnica foi usada no Brasil, nas igrejas de Minas Gerais, por Manuel da Costa Ataíde (1762-1830), no período Barroco, exemplificada na figura 6.

Figura 6 - Assunção da Virgem Maria - Igreja de São Francisco, Ouro Preto, MG.
Fonte: http://www.fashionbubbles.com/arte-e-cultura/theatrum-sacrum-apoteose-da-alma-pela-arte-barroca/

Segundo Sansevero (2007), o artista renascentista usava a perspectiva para acentuar a realidade e o artista barroco invertia a situação, usava o *trompe l'óeil* para acentuar a irrealidade, o delírio, a vertigem e o desequilíbrio. O Barroco, com *trompe l'óeil,* busca a ilusão, todo o espaço da igreja vira uma ilusão de ótica.

Atualmente, a anamorfose é usada em publimetas, arte urbana e sinalização de trânsito. No trânsito é comum o motorista se deparar com inscrições no pavimento. Setas direcionais, símbolos ou legendas, sinalizadas no chão a sua frente podem ser lidas naturalmente com o carro em movimento, conforme o exemplo da figura 7.

Figura 7 – Sinalização horizontal.
Fonte: http://www.iepe.sp.gov.br/docs/recapeamento_sinalizacao2010/recapeamento_sinalizacao2010.asp e http://www.saocarlosemrede.com.br/portal/noticias/item/15433-prefeitura-transito-sinalizacao-sao-carlos?tmpl=component&print=1

Ao parar o carro e ficar ao lado da sinalização, poder-se-á notar que as letras ou desenhos estão esticados no chão. Suas dimensões dependem da velocidade regulamentada em função do tempo de leitura e reação motora pretendida. Peterson

(2000) as chama de enigmas visuais, pois dependendo do ponto de vista do observador, os desenhos podem parecer deformados, pois configuram uma aplicação prática da anamorfose. Mas, do ponto de vista do motorista, segundo a legislação do CONTRAN (2007) deve ser de fácil e pronto entendimento, além da precisa visualização.

A mesma impressão pode ter um observador de um jogo de futebol transmitido pela TV ao visualizar a propaganda tridimensional colocada ao lado da trave do gol, e se perguntar se ela não atrapalha o jogo. Entretanto, um torcedor que estiver na arquibancada poderá observar a propaganda escrita de forma distorcida, como mostra o exemplo da figura 8.

Figura 8 – Publimetas.
Fonte: http://www.klefer.com.br/produtos/publimetas.html.

A propaganda denominada publimeta é realizada num painel plástico adesivo, esticado no plano sobre o campo, contendo uma imagem cuja representação só pode ser reconhecida na sua tridimensionalidade sob um ponto de vista, neste caso, o ângulo de captação da emissora de TV.

A sinalização de trânsito e as publimetas utilizam a mesma técnica: a anamorfose. Para realizá-la, demanda um nível elevado de raciocínio espacial e habilidade motora, além de conhecimentos especializados em perspectiva, desenho, geometria descritiva e projetiva.

O interesse do observador da anamorfose é despertado pela forma curiosa de suas aplicações, principalmente pela difusão de arte anamórfica urbana, cujo exemplo pode ser visualizado na figura 9.

Figura 9 - *Anamorphic illusions drawn* - Julian Beever.
Fonte: http://liz.petree.tripod.com/final/index.html

Artistas compõem grandes telas, colorindo asfaltos, calçadas, muros e monumentos com imagens tridimensionais e as expõem em fotografias e vídeos, circulando pela rede mundial de informação. As pessoas que recebem e-mails com as imagens e/ou as que as visualizam em *blogs*, constantemente, indagam sobre a técnica utilizada.

Edgar Mueller, em 2009, na Alemanha, cobriu 25 metros quadrados com giz, utilizando a técnica da anamorfose e realizou em cinco dias a obra *"Lava Burst".* Uma rua da Alemanha se transformou num imenso buraco e dela vertiam chamas como se houvesse um vulcão abaixo do solo, como se verifica na figura 10.

Figura 10 – *Lava Burst* – Edgar Mueller.
Fonte: http://mesquita.blog.br/arte-pintura-32

Era realmente uma ilusão de ótica, conseguida por meio da anamorfose. Falando sobre a sua composição, Mueller (2010, p. 57) explicou a técnica que usa:

> Pare em um ponto da rua, olhe ao redor e projete que as linhas verticais, árvores e postes convergem para o seu pé. Ao desenhar, basta fixar esse ponto e fazer com que todas as linhas verticais do desenho se encontrem ali.

A explicação de Muller denota a perspectiva, numa Anamorfose *trompe l'óeil.* Outros artistas como Julian Beever e Kurt Wenner, contemporâneos a Muller, utilizam a mesma técnica para desenhar nas ruas, no plano bidimensional, transformando o espaço plano numa ilusão tridimensional. Entretanto, para observá-las, é necessário estar no mesmo ponto informado pelo artista, do contrário, a visão tridimensional não será captada pelos olhos do observador.

Entre as técnicas modernas da anamorfose está a perspectiva divertida, em que pinturas e desenhos anamórficos são resgatados por espelhos cônicos e cilíndricos. Kelly M. Houle utiliza imagens em que os ângulos de reflexão criam uma ilusão, sendo tais anamorfoses denominadas cilíndricas ou de reflexão. As imagens de Houle podem ser vistas em livros com coletâneas denominados de '*Morph Magic's*', em que espelhos cilíndricos, piramidais e cônicos são utilizados. A figura 11 mostra um exemplo de anamorfose resgatada em espelho cilíndrico.

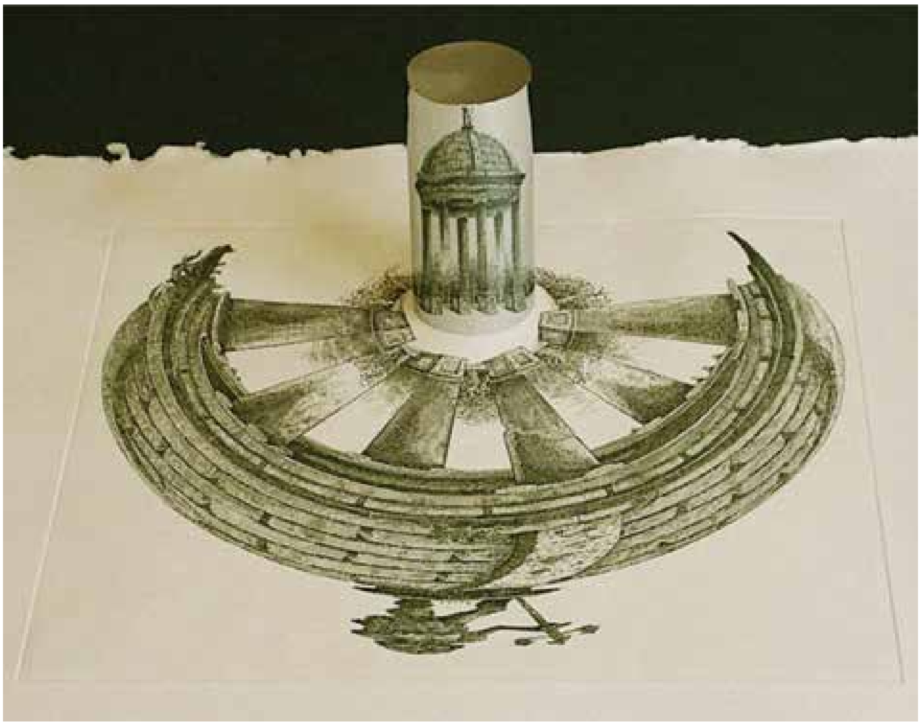


Figura 11 - Anamorfose cilíndrica - *Cupola* (1990) de István Orosz.
Fonte: http://allgraphical.blogspot.com/2010/10/cylindrical-anamorphosis.html

O crescimento de suas aplicações em publicidade e comunicação tem motivado o ensino e os alunos a visualizarem anamorfoses. 'Um encontro do real e do virtual' foi realizado por Brod, Silva e Pires (2011) com uma cúpula de um prédio na cidade de Pelotas, RS. Os estudantes de Especialização dessa cidade, selecionaram elementos do patrimônio arquitetônico e, por meio da anamorfose em suporte adesivo (uma espécie de publimeta), instalaram-no na praça da cidade, no espaço destinado ao deslocamento de transeuntes. A instalação foi considerada uma surpresa pelos visitantes que, ao saberem que se tratava da imagem da cúpula do prédio, imediatamente olhavam para a real cúpula, comparando com o que observavam no plano da calçada na praça.

Outro exemplo de anamorfose no ensino vem de Santos, Sotto & Ananias (2009) que experimentaram a técnica da anamorfose com estudantes de Ensino Médio de Presidente Prudente. Os autores ensinaram-na aos estudantes por meio da projeção de uma escada de três degraus, comparando-a com uma escada real, fazendo experimentos com fotografia.

De acordo com Raynaud (2009), a variedade de anamorfoses existentes se divide em direita e especular. As anamorfoses direitas subdividem-se em anamorfose plana, cônica, piramidal ou irregular, enquanto que as especulares dividem-se conforme a forma do espelho, sendo cilíndrica ou cônica.

Gomes e Soares (2011) usam outros termos para as anamorfoses, sendo a oblíqua e a catóptrica. Para eles, a anamorfose oblíqua é a técnica que distorce, deforma ou alonga propositadamente um desenho de modo que uma visão coerente da imagem só se obtém quando o observador é colocado num ponto de vista específico. E a catóptrica, segundo esses mesmos autores, “é uma imagem calculada para ter a sua formação regular refletida em um espelho convexo, que pode ser cilíndrico, piramidal, cônico ou tórico” (ibidem, p. 3).

Ainda, segundo os autores acima citados, numa anamorfose catóptrica, o desenho é feito anamorficamente numa superfície plana e o espelho reconstitui a imagem na sua reflexão. A imagem refletida depende do tipo de espelho, e não somente do ponto fixo de observação do observador.

Como explicado, o termo anamorfose é aplicado de várias maneiras, mas todas se resumem às mudanças de formas das imagens. A palavra anamorfose também pode resultar do grego, significando “formado novamente” e é igualmente conhecida como uma perspectiva acelerada ou desacelerada, que distorce uma imagem para que possa aparecer mediante um particular ponto de vista.

Diante das várias explicações o termo anamorfose se generalizou, e passou a abranger toda e qualquer distorção da imagem real. Na perspectiva anamórfica, todo o trabalho de decifrar a imagem se dá no olho do receptor, como nos casos da sinalização de trânsito e da publimeta. Ao passo que na anamorfose catóptrica o processo de decodificação se dá no espelho (GABRIEL, 2001).

Entre as várias explicações existentes, Hunt, Nickel e Gigault (1999) também as explicam. Para os autores, anamorfoses plana, cônica e cilíndrica são diferentes entre si e de resoluções matemáticas também distintas. Enquanto que a perspectiva anamórfica (anamorfose direta ou oblíqua) precisa da descoberta do ponto de vista apropriado para revelar a imagem, a anamorfose reflexiva, (especular ou catóptrica) depende de uma interface para tal, uma superfície reflexiva.

Diante das várias explicações, o termo anamorfose se generalizou, e passou a abranger toda e qualquer distorção de imagem real. Na perspectiva anamórfica, todo o trabalho de decifrar a imagem se dá no olho do receptor, como nos casos da sinalização de trânsito e da publimeta, ao passo que, na anamorfose catóptrica, o processo de decodificação se dá no espelho (GABRIEL, 2001).

Entre as várias explicações existentes, Hunt, Nickel e Gigault (1999) também as explicam. Para eles, anamorfoses plana, cônica e cilíndrica são diferentes entre si e de resoluções matemáticas também distintas. Enquanto que a perspectiva anamórfica (anamorfose direta ou oblíqua) precisa da descoberta do ponto de vista apropriado para revelar a imagem, a anamorfose reflexiva (especular ou catóptrica) depende de uma interface para tal, uma superfície reflexiva.

Ou seja, todas as explicações e definições de anamorfose indicam a mudança de forma da imagem, e a sua visualização somente é possível sem deformação, por meio de um ponto fixo, ou por meio de um espelho.

De acordo com Gabriel (2001), ambas as técnicas, tanto a perspectiva anamórfica quanto o *trompe l'óeil* usam composições para criar uma imagem, um *truque*, sendo que a diferença está na natureza do "truque". "Numa anamorfose é mostrado ao observador algo que não faz sentido quando visto convencionalmente, e assim ele precisa procurar o ponto de vista não convencional, no qual o truque se resolva" e, num *trompe l'óeil* o observador parado num local determinado, é enganado ao ver uma imagem inventada como se ela fosse real (ibidem, p. 7).

Assim, verifica-se que a anamorfose em suas diversas concepções faz parte do cotidiano das pessoas, e suas formas de composição também divergem entre si, sendo a deformação da imagem visível, entretanto, algumas propriedades das imagens se mantêm.

2.3.1 A técnica da anamorfose

No ensino da técnica da anamorfose, Raynaud (2009) indica que o trabalho é realizado por meio de projeções geométricas e, numa projeção, pode haver a deformação de imagens. A técnica da anamorfose gera imagens em que algumas propriedades não são mudadas, mas necessita de visão espacial e habilidade motora, podendo realizar o trabalho por meio de grades geométricas.

Para criar uma imagem anamórfica, começa-se com um pedaço de papel dividido em células quadradas, um papel quadriculado como mostra a grade 1 da figura 12, e um outro pedaço de papel com o mesmo número de células, mas desta vez, em forma de trapézio, como nas grades 2 e 3, destacadas na mesma figura.

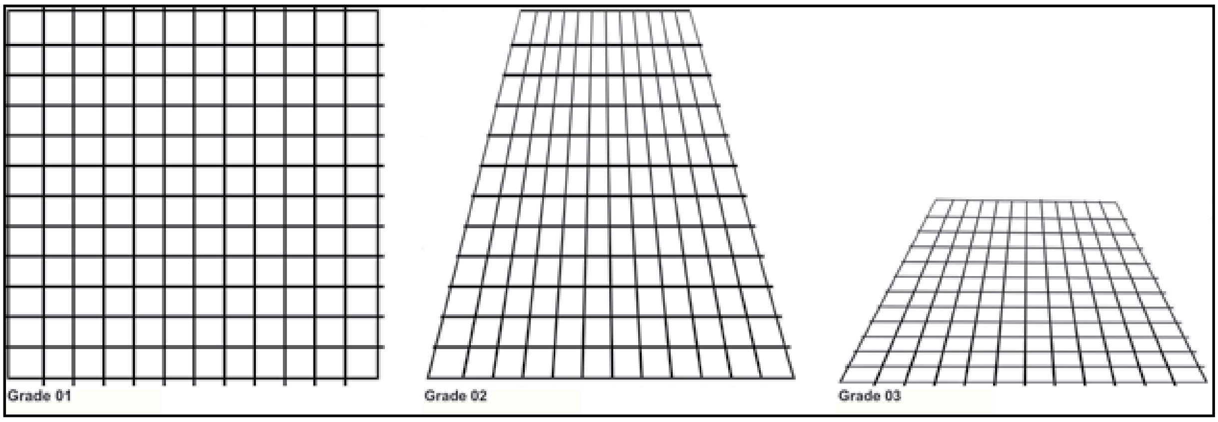
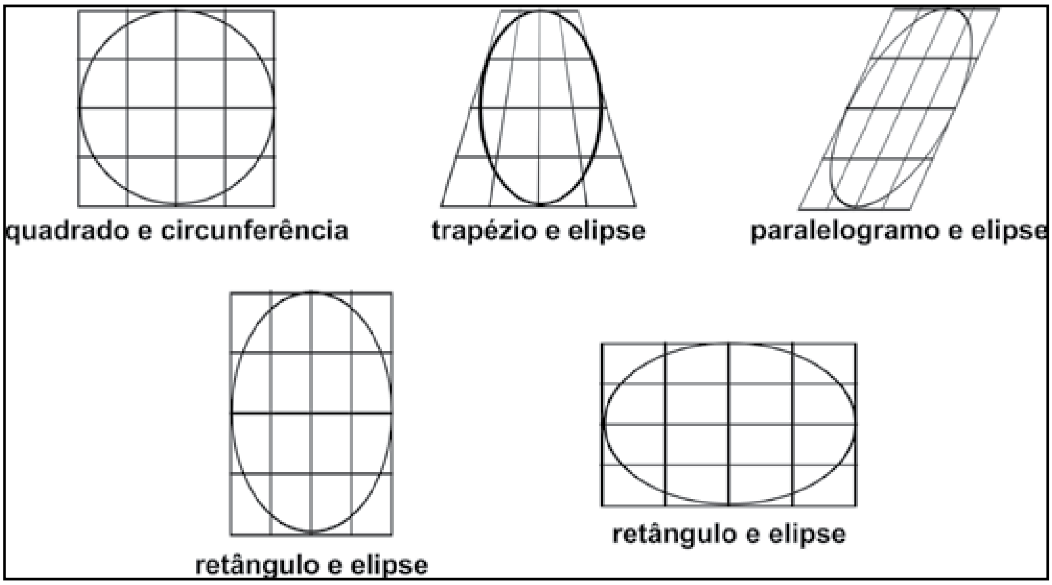


Figura 12 – Grades para anamorfose.
Fonte: Autoria própria

O desenho deve ser feito na grade 1, e depois, cuidadosamente, transferido para a grade 2 ou grade 3. Assim se terá uma versão distorcida do desenho original que, ao ser visto pelo ângulo apropriado, será visualizado como o original.

Voltando aos princípios de Leonardo da Vinci e acrescentando grades ao círculo, sua transformação para elipse perpassa também a grade em que os quadrados originais passam a ser trapézios, conforme verifica-se na figura 13.



Um quadrilátero possui quatro lados e quatro ângulos. O trapézio, além de ser um quadrilátero, possui também dois lados paralelos. Já o quadrado sendo também um quadrilátero, possui os lados e os ângulos (todos de mesma medida) e lados paralelos dois a dois. Ou seja, se assemelham por seu número de lados e de ângulos, e por possuírem pelo menos dois lados paralelos. Essas características não se modificam numa anamorfose denominada perspectiva anamórfica, enquanto que as medidas dos lados e dos ângulos se modificam.

Da mesma forma, o quadrado e o trapézio do exemplo anterior (figura 13, p. 22) não deixam de ser quadriláteros. Verifica-se a mesma questão com o quadrado e o retângulo, da mesma figura.

Já a imagem de um círculo, quando projetada numa tela inclinada, não será a de um círculo, mas a de uma elipse (figura 13, p. 22), ou generalizando, de uma cônica. Então, “a imagem de uma seção cônica será sempre uma seção cônica” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 206).

A técnica da anamorfose seria a cópia da figura original cuja grade se constitui de quadrados, em outra grade, cujos quadrados se transformam em trapézios ou retângulos, ou ainda, a outra forma generalizada (figura 14).

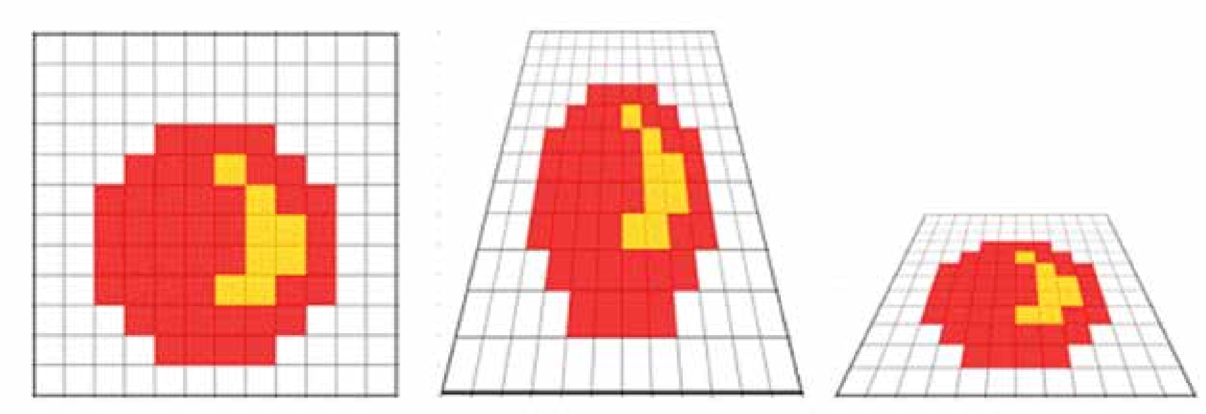


Figura 14 – Grades de Anamorfoses.
Fonte: Autoria própria

Quanto à anamorfose reflexiva, para a reflexão num espelho cilíndrico, a grade inicial continua a mesma, e a grade anamórfica se transforma num setor de coroa circular, onde cada quadrado da grade inicial também se transforma num setor de coroa circular. Se a reflexão for de um espelho cônico, a grade anamórfica ficará semelhante a uma toalha redonda, cujo cone espelhado é colocado ao centro, como mostra a figura 15.

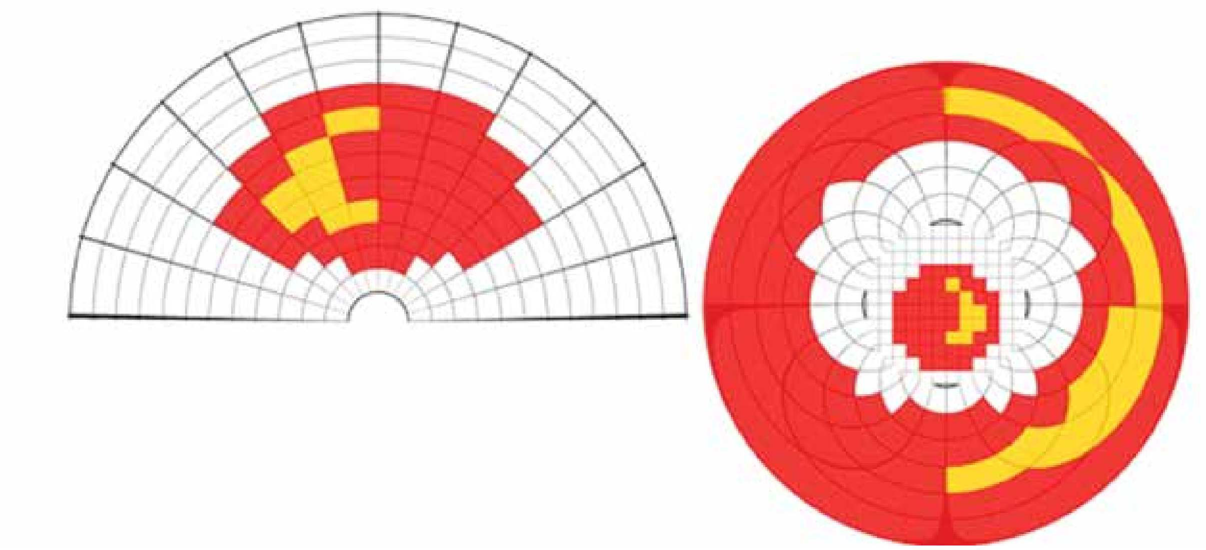


Figura 15 – Anamorfose de reflexão cilíndrica e de reflexão cônica.
Fonte: Autoria própria obtida por meio de *Anamorph-me!*

Copiar meticulosamente cada célula do desenho para a célula correspondente de uma grade quadriculada em branco parece antiquado no advento da informática quando se manipulam, copiam e distorcem imagens digitais. Entretanto, a técnica, quando realizada sob o ponto de vista da teoria das representações semióticas de Duval (2009) é uma conversão, pois a correspondência biunívoca, uma a uma, para cada elemento do registro de saída, tem um elemento correspondente no registro de chegada. E a conversão existe, quando essa correspondência é realizada corretamente, respeitando-se a congruência.

Então, podem-se realizar conversões usando um *software* de anamorfose como o *Anamorph-me!*. Com ele se consegue as projeções numa simples operação de selecionar a imagem e distorcê-la. Pode-se fazer anamorfose linear, de reflexão cilíndrica e cônica, além de anamorfose em forma de cone e pirâmides, como os da figura 16.

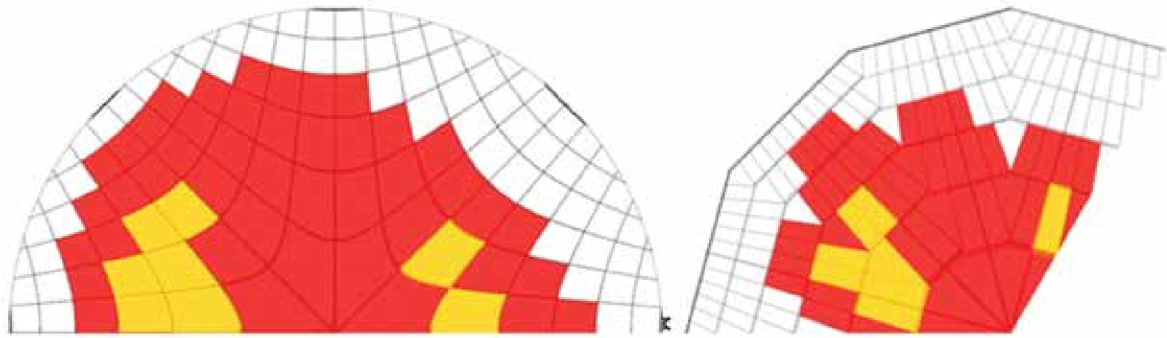


Figura 16 – Anamorfose para cone e pirâmide.
Fonte: Autoria própria obtida por meio de *Anamorph-me!*

A transferência de imagens de uma rede quadriculada para outra com objetivos de ampliação ou redução é uma técnica antiga utilizada em Matemática e em Arte. Como já explicado anteriormente, matematicamente os resultados são interpretados como mapeamentos ou transformações geométricas, e, em Arte, as imagens anamórficas resultantes recebem distintas aplicações.

Seja em Matemática ou em Arte, as deformações podem formar imagens interessantes. Hartung e Meirelles (2010) indicam que as atividades envolvendo anamorfoses podem render ótimos trabalhos interdisciplinares. Os autores citam a conexão de Matemática e Artes, e também de Biologia e Física.

Por assim considerar que as aplicações de anamorfose tanto fazem parte de Arte quanto de Matemática, e que o ensino das disciplinas se baseia e se fundamenta em representações semióticas, este material indica o trabalho em sala de aula por meio de materiais manipuláveis e representações semióticas, voltadas à Arte e Matemática.

3 ESTRUTURA DAS AULAS E AVALIAÇÃO

Neste material pedagógico encontram-se duas aplicações práticas desenvolvidas em forma de sequências de atividades. A primeira delas corresponde à anamorfose, utilizando-se geometrias projetiva e espacial, denominada "Experimentando Anamorfoses". A segunda, denominada "Investigando Superfícies Curvas e Planas" utiliza dos conhecimentos da primeira e enfatiza as conexões de Geometrias: plana, espacial, elíptica e projetiva.

EXPERIMENTANDO ANAMORFOSES

A sequência de atividades denominada "Experimentando Anamorfoses" foi elaborada para ser desenvolvida tanto na disciplina de Arte quanto na de Matemática, podendo ser aplicada desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. É composta de várias atividades, as quais são apresentadas abaixo numa sequência lógica, que, dependendo do enfoque pretendido podem ser realizadas aleatoriamente a partir da 5ª atividade.

1. Apresentação da biografia de "Temple Grandin" relatada em filme;
2. Apresentação de uma cena do filme de animação "*UP* Altas Aventuras";
3. Mostra de imagens de ilusão de ótica;
4. Estudo de perspectivas;
5. Histórico, classificação e aplicações da anamorfose em obras de arte, arte urbana, publimetas e sinalização de trânsito;
6. Composição de imagens com ilusão de ótica e perspectiva de espaços escolares;
7. Estudo das imagens fotográficas em relação à perspectiva e proporções métricas;
8. Anamorfose em grades quadriculadas;
9. Desenho e fotografia de modelos de sólidos geométricos.

INVESTIGANDO SUPERFÍCIES CURVAS E PLANAS

A sequência de atividades, abaixo, denominada "Investigando Superfícies Curvas e Planas" é mais adequada a aulas de Matemática, entretanto, pode ser adaptada para o trabalho com superfícies curvas na concepção artística e cultural.

1. Cobertura de superfícies;
2. Técnica *washi;*
3. Mostra de artesanatos realizados em cobertura de superfícies esféricas

e ovais;

4. Projeção globo terrestre;
5. Linhas em superfícies;
6. Triângulos e ângulos internos;
7. Anamorfose de quadrilátero.

Cada atividade apresentará: objetivos, conteúdos trabalhados, materiais utilizados e desenvolvimento. As atividades são sugestões ao professor que poderá adaptá-las ao seu contexto escolar. Algumas atividades apresentam variações para que se tenha flexibilidade tanto nos conteúdos como na forma abordada.

A avaliação das atividades deve ser realizada durante todo o processo (PARANÁ, 2008), não esquecendo que um erro se constitui como um conhecimento, ou seja, por meio do erro pode-se reavaliar a prática pedagógica, e aprender com as respostas e procedimentos dos alunos (CURY, 2007). Nesse sentido, é necessário que se observe constantemente os alunos e seus procedimentos, respostas e comentários. Para divulgar os trabalhos, expô-los em sala de aula ou mesmo em exposições durante o ano letivo pode ser um diferencial nas aulas de Matemática, e, comum aos professores de Arte.

4. 1 EXPERIMENTANDO ANAMORFOSES

ATIVIDADE 1

Apresentação da biografia de Temple Grandin relatada em filme.

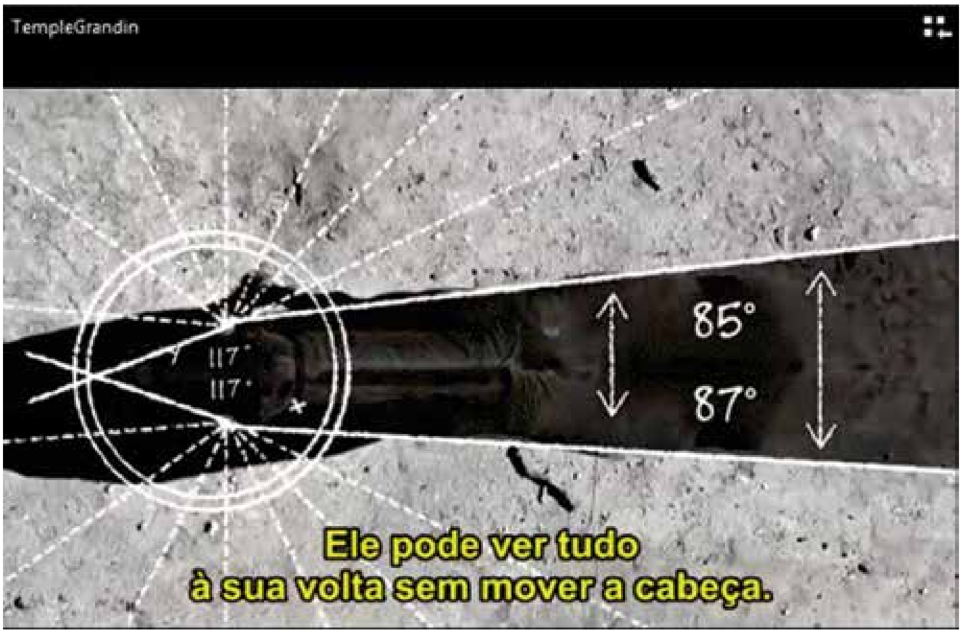


Figura 17– Visão do cavalo, interpretada visualmente por Temple Grandin.
Fonte: Fox filmes

Duração: três aulas de 50 minutos cada

Objetivos: Proporcionar visão geométrica do mundo cotidiano por meio da inteligência visual espacial da protagonista.

Conteúdos trabalhados: visão geométrica, ângulos de visão, representações de registros semióticos, aplicações de desenho geométrico e geometria em construção de máquinas. Análise de imagens, contexto histórico, ilusões de ótica.

Materiais utilizados: Filme “Temple Grandin” distribuído pela HBO filmes.

Desenvolvimento da atividade: O professor deve apresentar o filme aos estudantes após uma breve explicação sobre o autismo e de como as pessoas podem ser diferentes entre si, e, no caso da protagonista, a forma de ver o mundo, geometricamente. Destacar as características física e psicológica da menina, as atitudes dos outros personagens ao tratarem com ela. O conhecimento e a ignorância das pessoas ao tratarem de um tema polêmico como o autismo. O filme pode ser usado para refletir sobre *bullying*, inclusão e acessibilidade, inteligências múltiplas, psicologia da morte, trato com animais. Não se esquecendo de relatar a posição da mulher em atividades consideradas masculinas, a relação de gênero.

Entre as inúmeras possibilidades de se usar um filme em sala de aula, foram elencadas duas delas no trato com Matemática e Arte:

Opção 1: O professor pode mostrar o filme aos estudantes numa vez só, deixando que assimilem a história e se sensibilizem com a vida da protagonista. E, em seguida voltar o filme nas cenas importantes para a visão geométrica e os registros de representação semiótica que a menina faz em seu pensamento, e, que a produção gráfica do filme faz com maestria.

Opção 2: O professor pode mostrar o filme aos poucos, selecionando previamente as cenas em que as representações semióticas são mostradas, fazendo um paralelo entre a imagem e o registro do pensamento de Temple Grandin.

Cenas interessantes para Matemática:
- Visões geométricas da menina, entre elas as cenas das duas colheres, da abertura da janela e da visão do cavalo.;
- Geometria projetiva inserida em imagens mentais e aplicações práticas como: quarto de Ames; porteira da fazenda da tia; máquina que acalma; curvatura do matadouro de animais.

Cenas interessantes para Arte:
- O contexto cultural e histórico da região dos Estados Unidos em que se passa o filme;
- A moda dos cabelos, roupas e acessórios por meio do tempo cronológico do filme, estilo *cowboy*; estilo "Temple Grandin";
- Ilusões de ótica e arquitetura distorcida (quarto de Ames);
- A relação de gênero em profissões;
- Sensibilidade e criatividade.

ATIVIDADE 2

Apresentação de uma cena do filme de animação *“UP Altas Aventuras”*

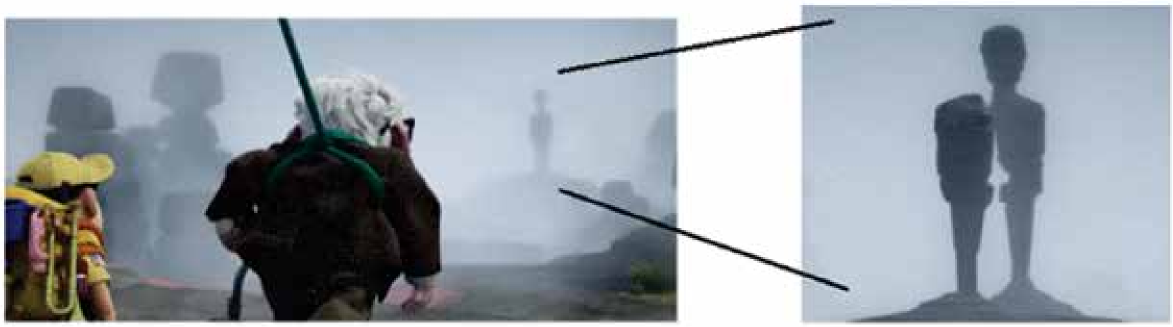


Figura 18 – Cena do filme *UP* Altas Aventuras.
Fonte: Adaptado de www.disney.com.br/up

Duração: O tempo será proporcional e relativo ao foco direcionado à atividade.

Objetivos: Perceber ilusões de ótica através de ângulos de visão do observador.

Conteúdos trabalhados: Planos de visão, relação figura-fundo, sobreposição de imagens, ângulos de visão, ilusões de ótica.

Materiais utilizados: Filme “*UP Altas Aventuras”*.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode explicar a história e mostrar apenas a cena em que os personagens Fredricksen, o ancião vendedor de balões e Russel, o menino escoteiro, caminham sobre um paredão de pedras, carregando uma casa amarrada nas costas do personagem principal. Eles escutam uma voz, que se supõe seja de uma pessoa, cujo vulto é visto no meio da névoa.
O professor pode parar o filme na cena específica e comentar sobre a ilusão de ótica que acompanha o olhar dos personagens. Conversar com os estudantes sobre a relação figura-fundo e de como pode ser interpretada nas obras de arte. Depois, dar prosseguimento à cena, em que o vulto se tornam duas pedras, sobrepostas na visão dos personagens, uma ilusão de ótica.
O professor pode conversar com os estudantes sobre a criatividade com que um filme de animação é realizado, em que pelo menos 24 imagens são passadas por segundo. Pode ainda calcular quantas imagens seriam necessárias para o tempo da cena escolhida.
Se o professor quiser continuar a explorar o cinema e a Matemática, pode usar a conexão mostrada na coleção Arte & Matemática, episódio 1: “Do Zero ao Infinito” que mostra as relações existentes.

Variação: Usar outro filme de animação que mostre efeitos semelhantes. Uma opção mais atual é o filme A "Era do Gelo 4", e a cena escolhida é no final do filme, quando o esquilo chega à ilha do mapa feito na casca de noz. Quando o esquilo se aproxima da ilha, a vê como se fosse uma grande noz. Ao se aproximar mais, as imagens mostram uma reunião de ilhas. Novamente, no exemplo, a sobreposição de imagens, a relação figura-fundo.

ATIVIDADE 3

Mostra de imagens de ilusão de ótica

Duração: O tempo será proporcional e relativo à quantidade e às propriedades das imagens pré-selecionadas.

Objetivos: Fazer analogia entre imagens de ilusão de ótica e cenas de filme;
Distinguir figura e fundo em imagens, em exercício de observação;
Discutir ângulos de visão do observador e forma de organização de imagens (figura e fundo) na composição de fotografias.

Conteúdos trabalhados: Ilusão de ótica, sobreposição de imagens, inclusão, exclusão.

Materiais utilizados: Imagens de ilusões de ótica com planos sobrepostos.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode mostrar imagens por meio de projetor ou televisor, mostrando-as e discutindo as relações existentes entre os planos de cada imagem. Pode ainda solicitar que os estudantes pesquisem imagens virtuais na *internet*, e que as insiram numa explicação de figura-fundo fazendo analogia com a cena de "*Up Altas Aventuras".*

O professor de Arte pode solicitar aos estudantes análises de imagens que se relacionem a Mensagens Subliminares, com propagandas, filmes e obras que contenham elementos da linguagem visual, como abstrato-figurativo, figura-fundo, planos, textura, estabelecimento de cores e padrões, além da simbologia de formas e cores.

Figura 19 – Fotografias em perspectiva.
Fonte: http://www.newopticalillusions.com/illusions/funny-optical-illusions

ATIVIDADE 4

Estudo de perspectivas

Duração: três a quatro aulas de 50 minutos cada.

Objetivos: Mostrar que ângulos de visão e distância de objetos visualizados geram anamorfoses em imagens.

Conteúdos trabalhados: Geometria projetiva: ponto de fuga, linha do horizonte, linhas de visada, pirâmide visual, proporções.

Materiais utilizados: Imagens de paisagens e espaços arquitetônicos que visam a perspectivas frontais e laterais. Revistas com imagens para recorte.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode trabalhar com os estudantes em três momentos distintos: análise de imagem em perspectiva, procura de imagens em perspectiva e destaque dos conceitos geométricos, usando imagens e projeções.
A atividade inicia com análise de imagem realizada pelo professor, mostrando pontos de fuga, linha do horizonte, linhas de visada e pirâmide visual. Na sequência, os estudantes procuram imagens semelhantes em revistas de recorte, escolhendo uma imagem para realizar experimentos. De posse da imagem, cada estudante, orientado pelo professor, verifica as linhas da pirâmide visual e as assinala com caneta colorida, destacando, marcando cada linha. Se houver pontos de fuga, os estudantes devem deixá-los coloridos e destacados.

Outra opção é verificar o que os estudantes já sabem sobre o assunto, questionando:

o que é perspectiva, como se apresenta num desenho? O que significa dizer que a imagem tem um ponto de fuga? E linha do horizonte?
O professor pode, então, explicar a perspectiva como forma, como técnica de representação gráfica, usando geometria projetiva. Ou seja, linhas paralelas observadas no mundo real, em fotografias, imagens ou desenhos, podem concorrer a um mesmo ponto de fuga. Também pode desenhar na lousa o que significa uma pirâmide visual e como ela se apresenta num desenho, causando ou não anamorfoses.

Variação: Usar imagens de obras de arte que envolvem a técnica da perspectiva, como Salvador Dali, M. C. Escher, Portinari e outros.
O professor de Arte pode solicitar figuras com mais de um ponto de fuga, principalmente em análise de obras de arte, fazendo com que os estudantes verifiquem técnicas usadas pelos artistas.

Novamente, se o professor quiser aprofundar os conhecimentos, poderá utilizar Arte & Matemática, episódio 3: "O Artista e o Matemático".

ATIVIDADE 5

Histórico, classificação e aplicações de anamorfose em obras de arte, arte urbana, publimetas e sinalização de trânsito.

Duração: duas a três aulas de 50 minutos

Objetivos: Divulgar historicamente e contemporaneamente aplicações de anamorfose

Conteúdos trabalhados: Anamorfose

Materiais utilizados: Imagens de obras de arte em que foram usadas as técnicas de Anamorfose.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode selecionar imagens que tenham sido organizadas por meio da anamorfose, por exemplo, obras de arte de Holbein, Leonardo da Vinci, Victor Vassarely, Pozzo, Mestre Ataíde, Peticov, Muller, Beever, dentre outros.
Os exemplos de imagens que podem usadas na atividade se encontram no Referen-

cial Teórico.

Figura 20 – Organização do processo envolvendo anamorfose em arte urbana.
Fonte: Sant'Ana, 2012, p. 36

ATIVIDADE 6

Composição de imagens com ilusão de ótica e perspectiva de espaços escolares

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Objetivos: Manipular recursos tecnológicos;
Elaborar imagens anamórficas observando ângulos de visão, e distâncias visuais entre figura e fundo;
Observar possíveis pontos de fuga e conceitos visuais da perspectiva;
Observar sobreposição de planos;
Empregar sobreposição de planos;
Captar ilusões de ótica e perspectivas em ambientes escolares, registrando-as em fotografias.

Conteúdos trabalhados: Geometria projetiva, perspectiva, pontos de fuga, linhas de visada, anamorfismo, paralelismo.

Materiais utilizados: Máquinas fotográficas.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode orientar os estudantes a procurar nos espaços escolares, perspectivas visuais e anamorfoses em corredores, prédio, quadra esportiva, horta e outros espaços que possam munidos de máquinas fotográficas, registrá-los. Os professores podem orientar também os estudantes para que organizem, inventem, realizem composições anamórficas, experimentando captar diferentes planos de visão, aglutinando-os ou não, brincando com proporções.

Fotografia 1 – Imagem anamórfica.
Fonte: Acervo próprio

Fotografia 2 – Imagem gerada com Anamorfose.
Fonte: Acervo próprio

ATIVIDADE 7

Estudo das imagens fotográficas em relação à perspectiva e proporções métricas.

Duração: O tempo da atividade é relativo e proporcional ao trabalho dos estudantes.

Objetivos: Estudar proporções em imagens anamórficas;
Comparar medidas de objetos reais com medidas do mesmo objeto em fotografias.

Conteúdos trabalhados: Geometria projetiva, proporções, Teorema de Tales.

Materiais utilizados: Imagens fotográficas impressas, canetas coloridas, réguas graduadas, goniômetros. Imagens fotográficas virtuais, *pendrive, software Geogebra*.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode realizar essa atividade de duas formas distintas:
Opção 1: Com imagens fotográficas impressas. Munidos de uma imagem fotográfica impressa, os estudantes poderão analisar e destacar as linhas de visada, os pontos de fuga e verificarão a possibilidade de estabelecer o "Teorema de Tales" nas imagens, procurando por proporções métricas. As experiências com linhas proporcionais poderão ser mostradas, destacadas com canetas coloridas.

Opção 2: Com imagens fotográficas virtuais. Munidos de uma imagem fotográfica virtual, inseri-la no *software Geogebra*, destacando linhas e mediando-as por meio das ferramentas do Geogebra. Procurar, também, referências do "Teorema de Tales" nas imagens.
Nesse caso, as informações necessárias para acessar o *software* e executá-lo podem ser encontradas em Instituto Geogebra no Rio de Janeiro, disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/

Figura 21 – Exemplo de atividade com medidas e proporções, e esquema gráfico.
Fonte: Acervo próprio

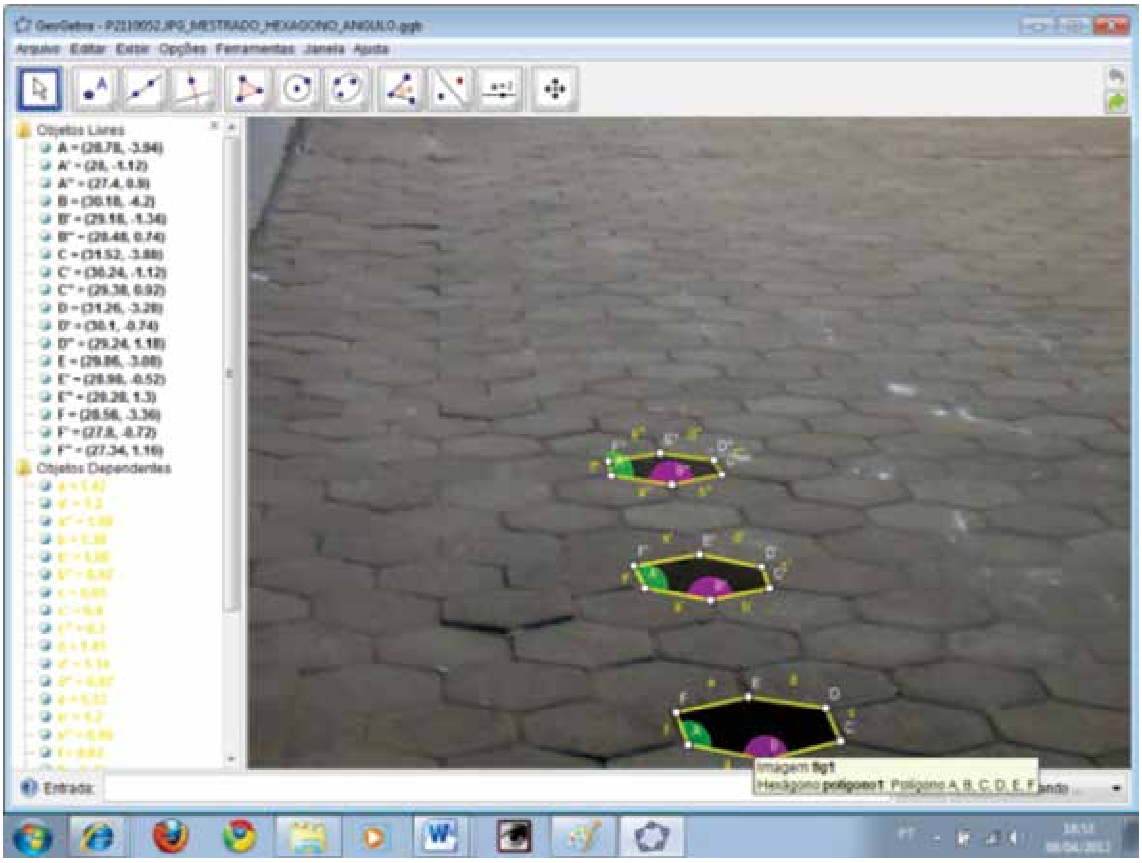


Figura 22 – Atividade com hexágonos em anamorfose.
Fonte: Acervo próprio

ATIVIDADE 8

Anamorfose em grades quadriculadas

Duração: O tempo da atividade é relativo e proporcional ao trabalho dos estudantes.

Objetivos: Realizar composições anamórficas usando grades quadriculadas;
Realizar conversões de imagens, usando grades anamórficas.

Conteúdos trabalhados: Correspondência biunívoca entre dois sistemas de registro semióticos distintos.

Materiais utilizados: Grades anamórficas, tabelas em diferentes escalas.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode explicar aos estudantes a transferência das imagens de uma grade à outra, que resultam em imagens anamórficas.

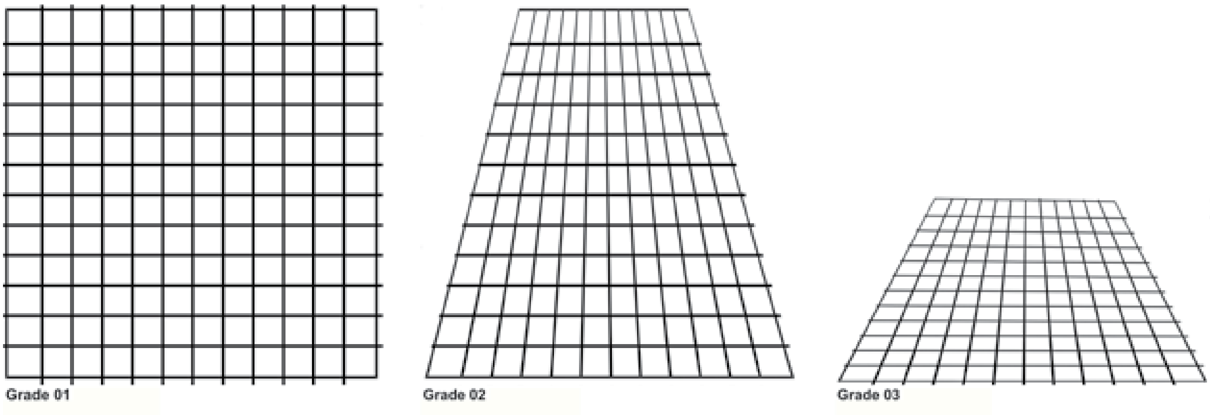


Figura 23 – Grades para anamorfose.
Fonte: Autoria própria

A figura 23 pode ser usada para representar uma figura qualquer. Dependendo do grau de ensino em que o professor vai usá-la, a figura escolhida para a primeira grade poderá ser proporcional à capacidade cognitiva e artística dos estudantes. Numa aula de Matemática geralmente se usam figuras desenhadas no quadriculado, como se fossem pixels, como mostra a figura 24.

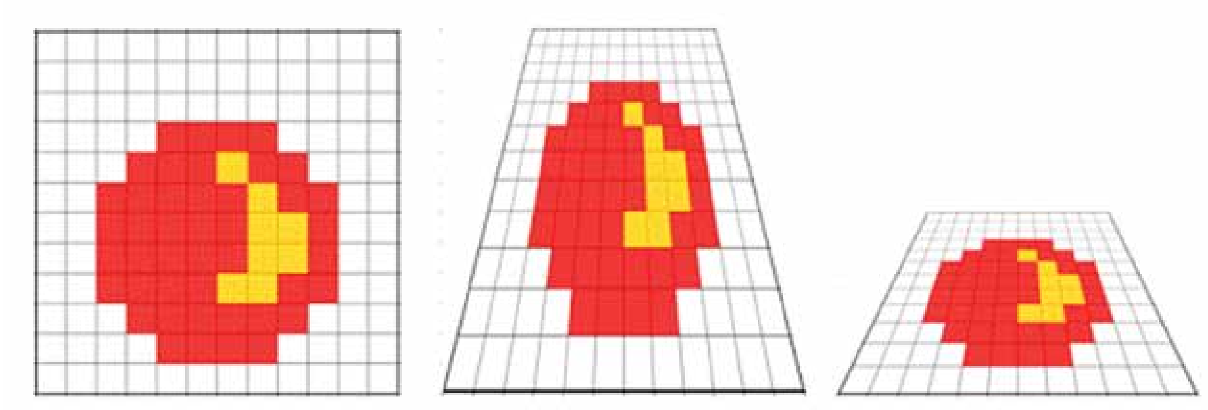


Figura 24 – Grades de Anamorfoses.
Fonte: Autoria própria

As imagens também podem ser usadas pelo professor no estudo de cônicas, por exemplo, ou em quadriláteros, usando as figuras experimentais de Da Vinci, que podem ser observadas na figura 25.

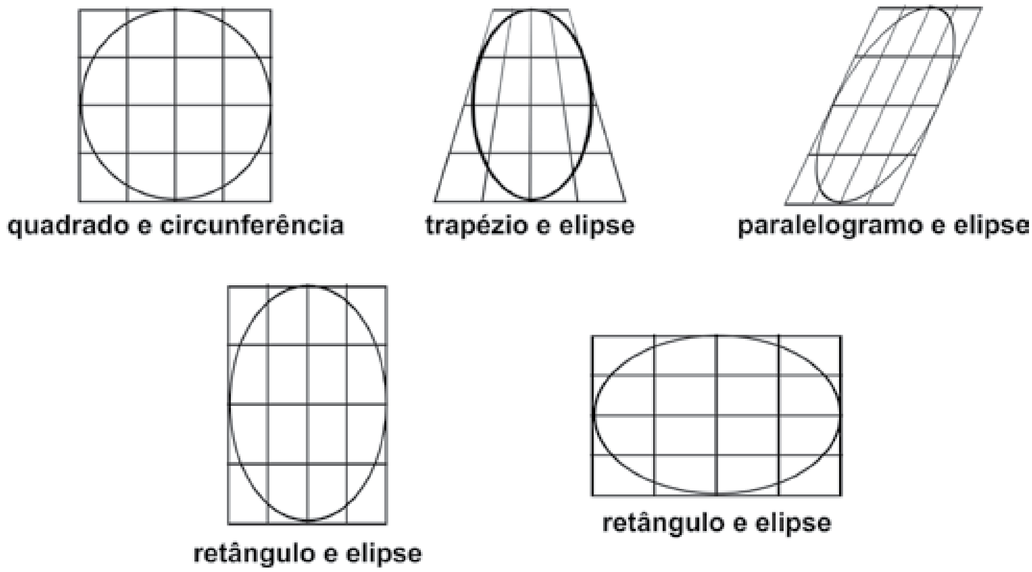


Figura 25 – Anamorfose de quadrado e de círculo com grades quadriculadas.
Fonte: Autoria própria

Sugere-se que o professor de Matemática utilize uma figura simples, e desenvolva com os estudantes imagens anamórficas com grades, como as exemplificadas nas figuras 26 e 27.

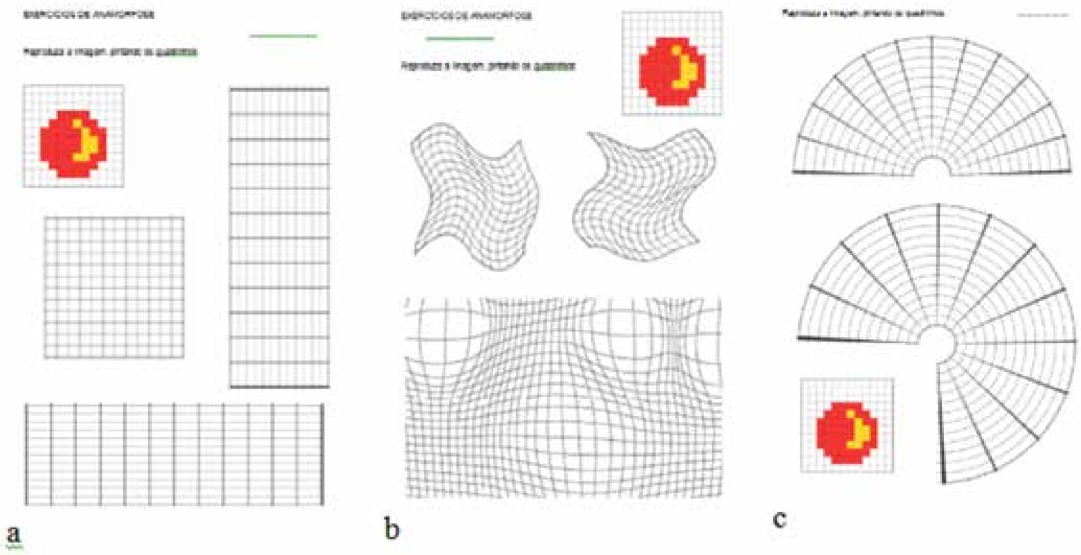


Figura 26 – Exercícios com grades anamórficas.
Fonte: Autoria própria

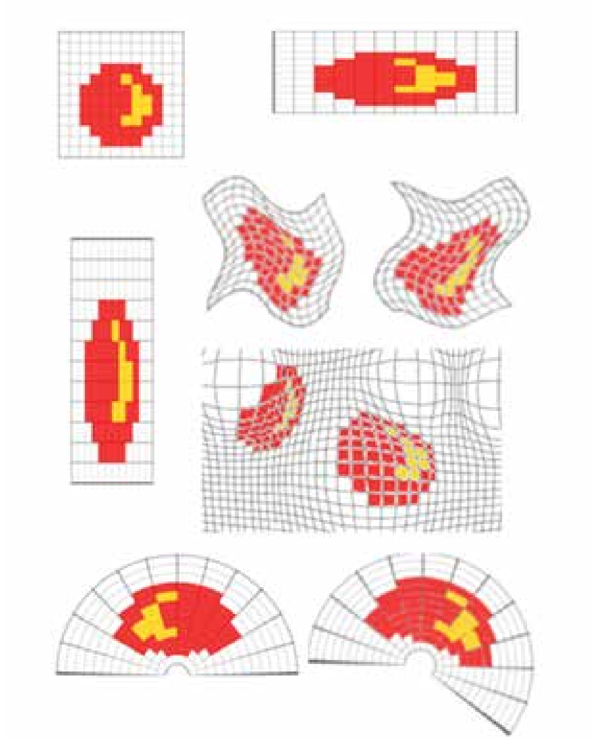


Figura 27 – Resultados de conversões anamórficas.
Fonte: Autoria própria

Trata-se de um exercício de concentração e conversão de registros semióticos, os quais quando analisados e interpretados à luz de registros de representação semiótica de Duval (2003, 2009, 2011) podem indicar aos professores uma possível análise cognitiva de suas classes de estudantes.

Variações: Se o professor resolver usar recursos tecnológicos, como o software *Anamorph-me!*, poderá conseguir imagens anamórficas rapidamente, e usá-las em experimentos com os estudantes. Com ele se consegue as projeções numa simples operação de selecionar a imagem e distorcê-la. Pode-se fazer anamorfose linear, de reflexão cilíndrica e cônica, além de anamorfose em forma de cone e pirâmides (figuras 28 e 29).

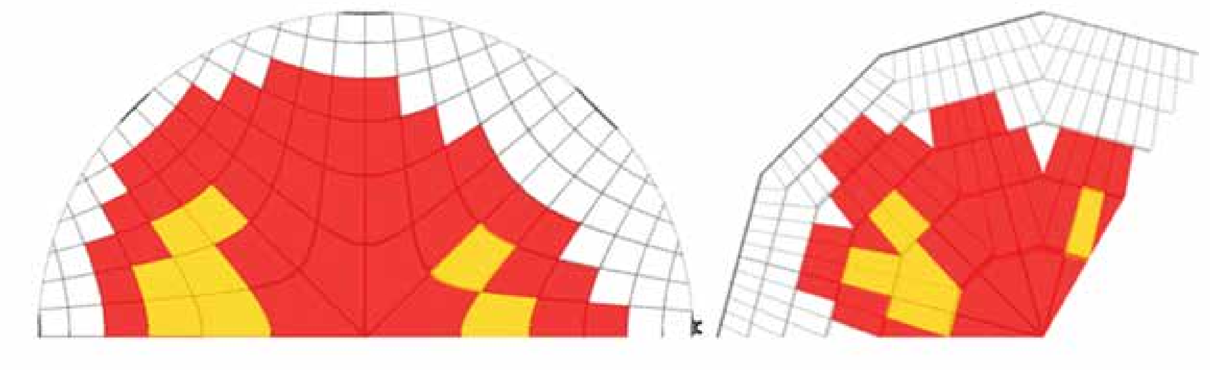


Figura 28 – Anamorfose para cone e pirâmide.
Fonte: Autoria própria obtida por meio de *Anamorph-me!*

Exemplos de experiências usando *Anamorph-me!* e outras atividades com anamorfose podem ser vistas em Hartung e Meirelles (2010), disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27220, que indicam atividades envolvendo anamorfoses, que podem render ótimos trabalhos interdisciplinares.

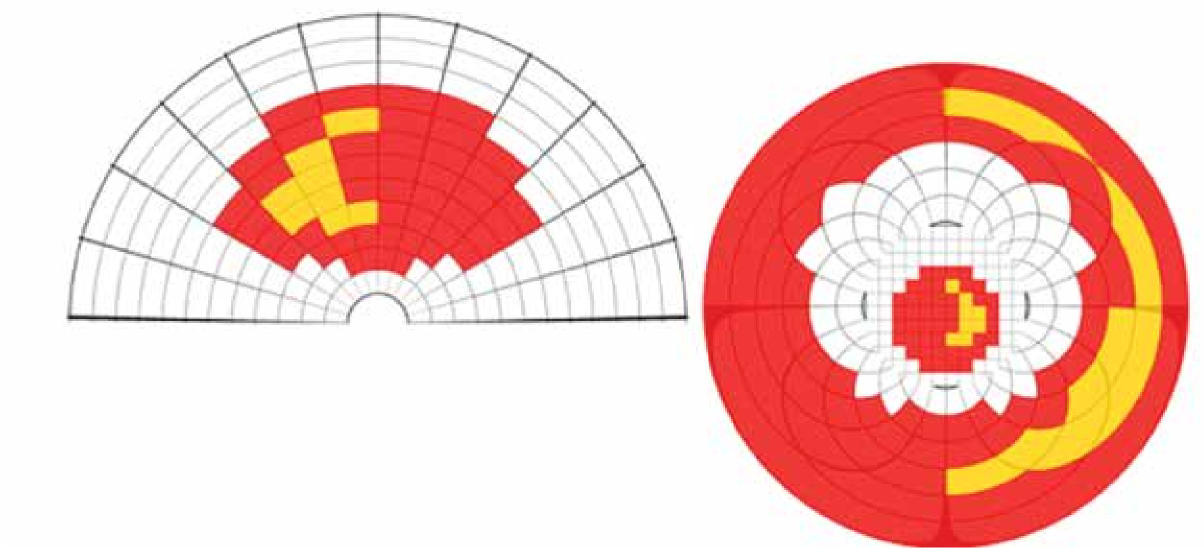


Figura 29 – Anamorfose de reflexão cilíndrica e de reflexão cônica.
Fonte: Autoria própria obtida por meio de *Anamorph-me!*

ATIVIDADE 9

Desenho e fotografia de model geométricos

Duração: O tempo da atividade é relativo e proporcional ao trabalho dos estudantes.

Objetivos: Desenhar tridimensionalmente modelos de sólidos geométricos;
Fotografar modelos de sólidos geométricos em ângulos específicos de visão.
Comparar desenhos e fotografias de modelos de sólidos geométricos.

Conteúdos trabalhados: Geometria espacial, sólidos geométricos, poliedros, elementos de poliedros (face, aresta, vértice), anamorfose de faces, arestas e ângulos de poliedros.

Materiais utilizados: Modelos de poliedros transparentes, salientando-se arestas e vértices. Papel de desenho, régua, lápis preto, máquina fotográfica digital.

Desenvolvimento da atividade: Usando desenhos de observação, os estudantes ao observar um poliedro de um ponto fixo, realizarão esboços do sólido que escolheram. Depois do primeiro esboço, podem-se realizar outros, do mesmo ponto fixo. Depois dos esboços prontos, os estudantes registrarão os poliedros em fotografia, do mesmo ponto de observação.
Munidos dos registros fotográficos, os estudantes poderão comparar os esboços com as imagens das máquinas digitais.
As imagens resultantes poderão ser impressas e os estudantes poderão usá-las para realizar esboços, em vez de usar os modelos de sólidos.

4. 1 INVESTIGANDO SUPERFÍCIES CURVAS E PLANAS

ATIVIDADE 1

Cobertura de superfícies

Duração: Uma aula de 50 min.

Objetivos: Estabelecer semelhanças e diferenças entre superfícies curvas de sólidos geométricos;
Experimentar se a superfície plana de papel adesivo pode se adaptar a superfícies curvas de cilindro, esfera e elipsoide.

Conteúdos trabalhados: Semelhanças e diferenças entre superfícies.

Materiais utilizados: Tesoura; papel adesivo com malha pontilhada; modelos de sólidos geométricos de isopor: cilindro, esfera e elipisoide.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode solicitar que os alunos se reúnam em equipes de no máximo cinco (5) alunos cada. Em seguida, o professor pode distribuir o material para as equipes. O docente pode explicar ou solicitar que os alunos cubram as superfícies curvas dos objetos de isopor com o papel adesivo, sem excluir os pontos das linhas e colunas pontilhadas representadas no papel. Ou seja, os estudantes poderão recortar o papel adesivo (figura 30), cuidando para não recortar e descartar os pontos representados no papel, inserindo o papel sobre a superfície curva de cada modelo de sólido geométrico.

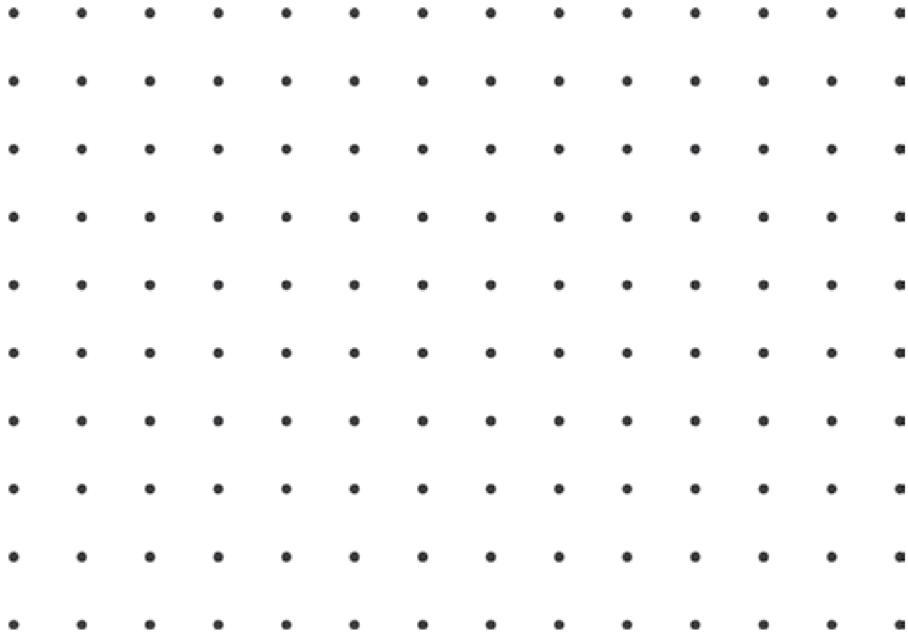


Figura 30 – Exemplo do papel adesivo com malha pontilhada.
Fonte: Autoria própria

O professor pode deixar os alunos recortarem e colarem o papel nas superfícies curvas sem explicar qual seria o melhor procedimento. Ao verificar possíveis problemas de percurso, questioná-los sobre como estão procedendo, fazendo com que eles pensem, e experimentem a adaptação do papel adesivo sobre as superfícies dos modelos de sólidos geométricos.

As fichas indicativas fazem parte da metodologia usada na pesquisa direcionada e podem seguir de roteiro para que o professor as usem em sala de aula, conversando com os estudantes, ou pesquisando como eles procederiam com a atividade.

Ficha 1

Identificação dos alunos(as) ....data ..../ ..../ ....

Ao colar o papel adesivo sobre os modelos de sólidos geométricos, descrever as dificuldades e facilidades:

1) Ao colar o papel adesivo sobre a superfície do cilindro, discuta no grupo e escreva suas considerações:

a) Foi necessário cortar o papel adesivo?
b) Se sim, como foi realizado o corte?
c) Precisou medir a superfície, como foi realizada a colagem?
d) Precisou sobrepor o papel adesivo em algum momento?
e) Descreva a realização da atividade, e o resultado da colagem.

2) Ao colar o papel adesivo sobre a superfície da esfera, discuta no grupo e escreva suas considerações:

a) Para colar o papel adesivo precisou recortar o papel? Se sim, de que forma foi feito?
b) O papel adesivo ficou completamente colado na superfície da esfera?
c) Precisou sobrepor o papel adesivo em algum momento?
d) Comparando com a colagem sobre a superfície curva do cilindro, foi mais fácil, mais difícil ou não houve diferenças?
e) Descreva o procedimento do recorte e da colagem e como ficou o resultado final.
f) Compare agora as superfícies do cilindro e da esfera, descreva como ficaram com o papel adesivo colado.

3) Ao colar o papel adesivo sobre a superfície da elipsoide, discuta no grupo e escreva suas considerações:

a) Para colar o papel adesivo sobre a superfície da elipsoide, precisou cortar o papel? Se sim, de que forma foi realizado?
b) Precisou sobrepor o papel adesivo em algum momento?
c) Comparando a colagem sobre a superfície curva da elipsoide com a colagem sobre a superfície curva da esfera, houve diferenças no procedimento?
d) Descreva o procedimento de recorte e da colagem e como ficou o resultado final.
e) Compare agora as superfícies cobertas com o papel adesivo do cilindro, da elipsoide e da esfera, escrevendo as semelhanças e diferenças do procedimento realizado. Explique como foi realizada a colagem e de como ficou colado no cilindro, na esfera e na elipsoide, comparando-as.

ATIVIDADE 2

Técnica *washi*

Pré-requisito: Realização da atividade 1

Duração: Uma aula de 50 minutos

Objetivos: Conhecer a técnica cultural de cobertura de superfície oval denominada *washi.*

Conteúdos trabalhados: Semelhanças e diferenças entre superfícies de corpos redondos. Planificação de corpos redondos.

Materiais utilizados: Tesoura; papel adesivo com malha pontilhada; modelos de sólidos geométricos de isopor: cilindro, esfera e elipsoide.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode comentar com os alunos sobre suas dificuldades em colar o papel adesivo e quais seriam as possíveis soluções para cobrir as superfícies curvas dos três modelos de sólidos geométricos (cilindro, esfera e elipsoide).

Relembrar aos alunos que o cilindro pode ser planificado com dois círculos e um retângulo, e que a planificação da esfera é possível com biângulos ou biláteros. Explicar que a cobertura das superfícies curvas com papel adesivo pode ser realizada com papel recortado.

Para o cilindro, o recorte pode ser feito com a planificação da superfície curva, um retângulo cujas dimensões sejam equivalentes às medidas da altura do cilindro e do comprimento da circunferência da base. E, para as superfícies curvas da esfera e da elipsoide, pode-se usar a técnica japonesa que cobre superfícies curvas com papel, usando recortes.

Trata-se da técnica dos ovos *washi*, usada no Japão. A técnica é utilizada para o revestimento de ovos, e conhecendo-a pode-se usá-la em outras superfícies curvas como a da esfera, por exemplo.

O professor pode usar slides das imagens ou cartazes explicativos do procedimento tradicional japonês, explicando os passos de recorte e colagem. Na figura 31a o processo da dobragem do papel ao meio, sendo cortado em tiras (figura 31b). O desdobre acontece em seguida (figura 31c), e a colagem da parte central do papel circundando o ovo (figura 31d). O término da colagem, tira a tira, sobrepondo algumas partes da tira de papel fino (figura 3e).

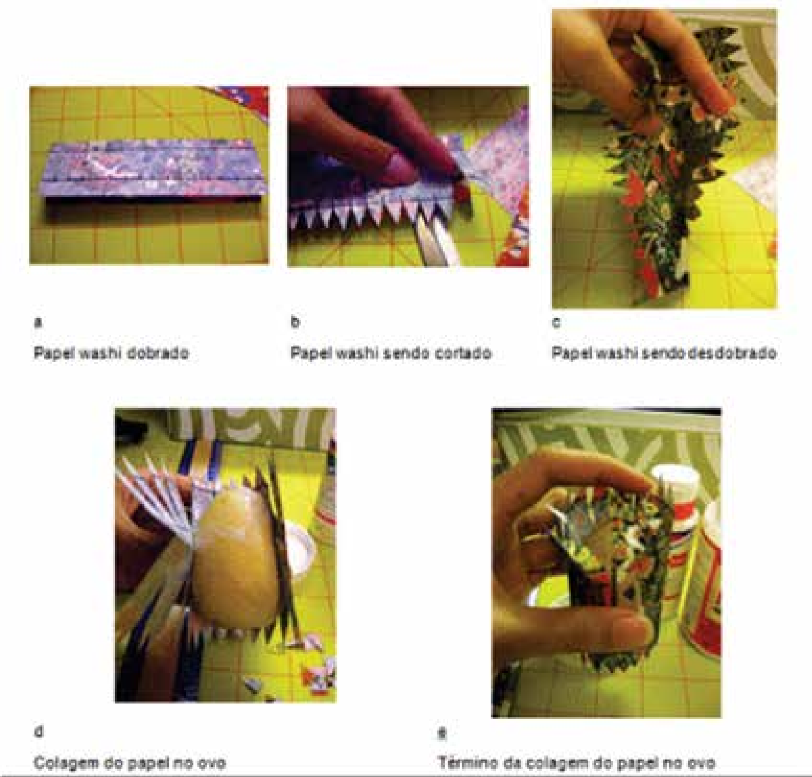


Figura 31 - Técnica *washi.*
Fonte: Adaptado de http://nz.lifestyle.yahoo.com/better-homes-gardens/craft/articles/a/-/5828252/washi-eggs/

O papel *washi* é bem fino, assemelha-se ao papel de seda (aproximadamente 20 g/m²) e é dobrado e recortado em tiras retangulares, deixando uma tira horizontal para o meio do ovo. As tiras do papel *washi* se sobrepõem na superfície curva devido à forma convexa do ovo, e sua gramatura favorece a sobreposição sem deixá-lo espesso.
Semelhantemente, o papel adesivo pode ser recortado de forma análoga para recobrir as superfícies de uma esfera e de uma elipsoide. No entanto, o papel adesivo possui gramatura maior que o papel *washi* (aproximadamente 80g/m²). A diferença nas gramaturas impede que o papel adesivo se sobreponha na superfície, necessitando recortar tiras triangulares que não se sobreponham. Porém, essa informação não deve ser comentada antes que os alunos sintam a necessidade de recortar as tiras.
Seguindo as instruções de composição de ovos *washi*, a esfera e o elipsoide de isopor podem ser cobertos com o papel adesivo recortado seguindo o gráfico de recorte (figura 32).
Já a superfície curva do cilindro pode ser coberta normalmente com o papel adesivo, pois é possível a sua planificação.

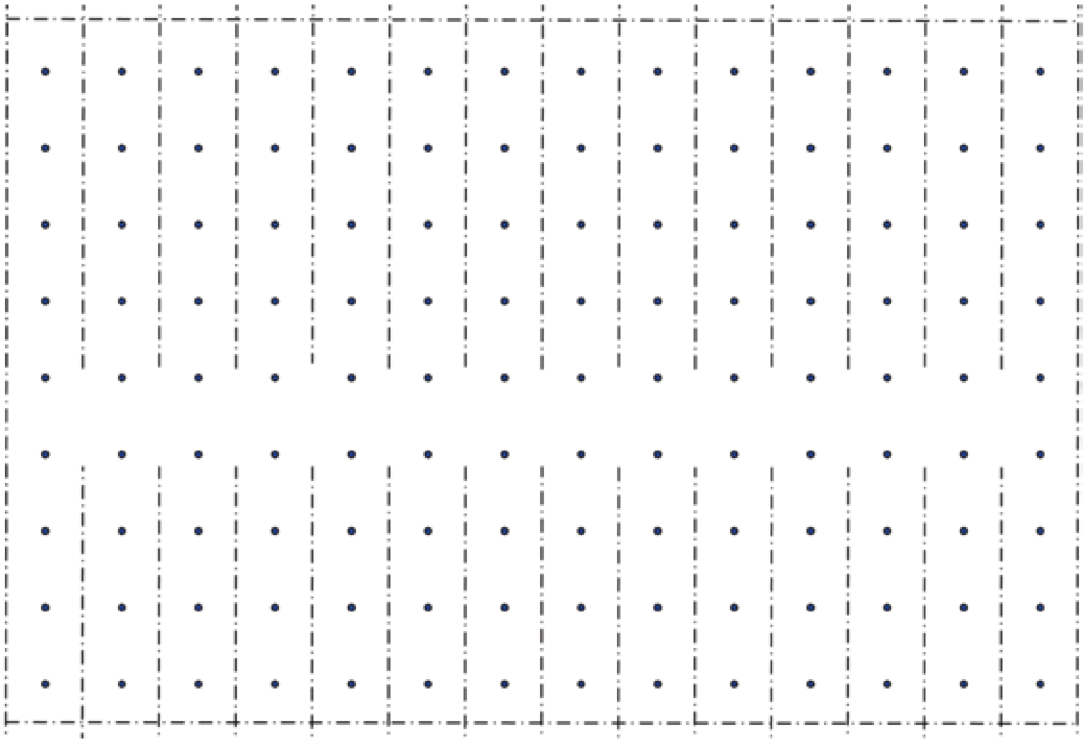


Figura 32 – Gráfico, grade de pontos para recorte.
Fonte: Autoria própria

Como já explicado anteriormente, as fichas indicativas fazem parte da metodologia usada na pesquisa direcionada e podem seguir de roteiro para que o professor a use em sala de aula, conversando com os estudantes, ou pesquisando como eles procederiam com a atividade.

Ficha 2

Identificação dos alunos(as) ....data ..../ ..../ ....

1)Ao colar o papel adesivo sobre as superfícies da esfera e da elipsoide usando a técnica washi, discuta com o grupo as facilidades e dificuldades do procedimento:

a) O modelo de recorte (figura 32) facilitou a colagem sobre a esfera?
b) O modelo de recorte (figura 32) facilitou a colagem sobre a elipsoide?
c) Precisou sobrepor o papel em algum momento? Compare a colagem da esfera e da elipsoide.
d) Como ficou o resultado final? Ficou melhor que a colagem anterior sem o modelo de recorte (figura 32)? Estime se pode haver um método mais adequado para recortar o papel adesivo dando sugestões de encaminhamento e de procedimento do recorte de papel adesivo.

Em seguida, o professor deve comentar com os alunos a possibilidade de usar gráficos de recortes mais adequados para as superfícies, como o da figura 33. O professor pode perguntar aos alunos se alguma equipe tem sugestões de possíveis encaminhamentos.

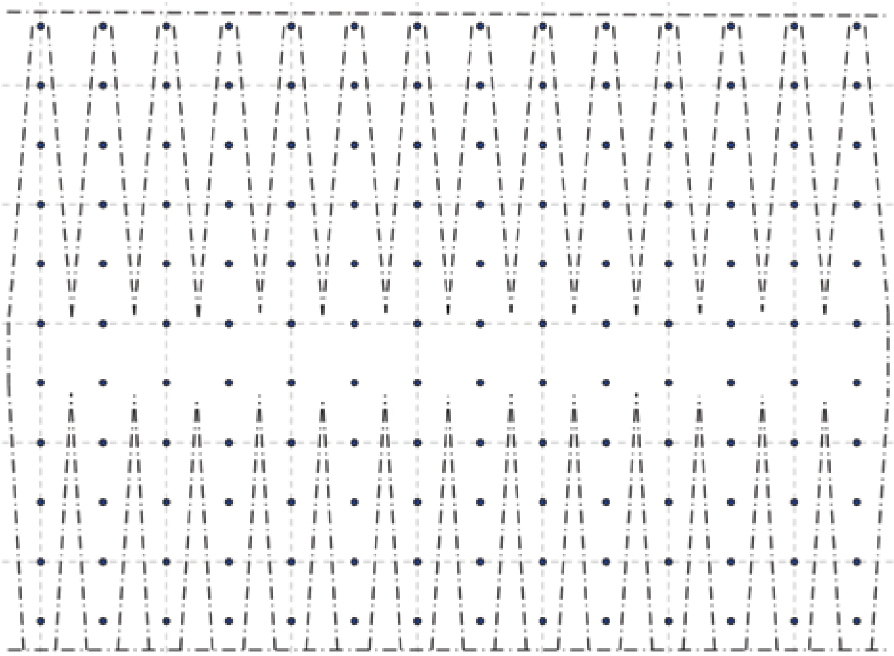


Figura 33 – Gráfico, nova grade de pontos para recorte.
Fonte: Autoria própria

O professor pode solicitar que os alunos utilizem os novos gráficos de recorte (figura 33) para realizar a cobertura das superfícies curvas da esfera e da elipsoide.

Cabe relatar que as medidas das tiras verticais podem ficar maiores que os objetos, resultando em sobreposições, necessitando, portanto, recortar um pedacinho de cada tira, cuja medida a ser cortada será visível durante a experiência, ao iniciar a colagem. É conveniente deixar que os alunos cheguem a essa conclusão experimentando e refletindo sobre o assunto.

Solicitar que os alunos preencham a ficha 3, se assim o professor preferir.

Ficha 3

Identificação dos alunos(as) ....data ..../ ..../ ....

1) Ao colar o papel adesivo sobre as superfícies da esfera e da elipsoide usando a técnica washi, discuta com o grupo as facilidades e dificuldades do procedimento:

a)O recorte do modelo ficou mais adequado para a colagem na esfera?
b)Houve sobreposição do papel na colagem do modelo sobre a esfera?
c)Precisou recortar algum pedaço do modelo para que se adequasse à superfície da esfera?
d)O recorte do modelo ficou mais adequado para a colagem na elipsoide?
e)Houve sobreposição do papel na colagem do modelo sobre a elipsoide?
f) Precisou recortar algum pedaço do modelo para que se adequasse à superfície da esfera?
g) Compare os três resultados das esferas cujas superfícies curvas foram cobertas com o papel adesivo. Qual esfera ficou com a superfície coberta mais adequada?
h) Compare os três resultados das elipsoides cujas superfícies curvas foram cobertas com o papel adesivo. Qual elipsoide ficou com a superfície coberta mais adequada?

Discutir com os alunos os resultados da colagem sobre as superfícies curvas, esclarecendo possíveis dúvidas de encaminhamento

ATIVIDADE 3

Mostra de artesanatos realizados em cobertura de superfícies esféricas e ovais

Duração: O tempo será proporcional e relativo ao foco direcionado à atividade, dependendo da quantidade de imagens e do enfoque dado à discussão de conteúdos e concepções.

Objetivos: Reconhecer que existem aplicações práticas de conversão semiótica nas composições artesanais;
Conhecer tesselações de superfícies curvas com diversos materiais.

Conteúdos trabalhados: Superfície curva, área de superfície curva.

Materiais utilizados: Objetos ou imagens com tesselações de superfícies curvas.

Desenvolvimento da atividade: Na sequência, o professor pode questionar os alunos sobre a possível planificação da esfera e da elipsoide. Questionar por exemplo, como seria possível realizar uma colagem de papel sobre as superfícies curvas sem sobrepor o papel. Convém diferenciar cobertura de superfície com planificação, pois pode haver confusões quanto aos termos utilizados.

O professor pode também mostrar imagens sobre procedimentos de cobertura de superfícies utilizadas por artesãos, designers e outros profissionais, como exemplificados nas figuras 34 a 37.

Figura 34 – Tesselação de esfera com pastilhas espelhadas.
Fonte: http://200.194.222.32/produto/18/21473775/bola+d.8+mosaico

Figura 35 – Tesselação de superfície ovóide.
Fonte: http://www.gomesmosaicos.com.br/blog/index.php/2011/11/24/o-ovo-floral/

Figura 36 – Tesselação de superfície ovóide.
Fonte: http://portuguese.alibaba.com/product-tp-img/colored-african-glass-egg-mosaic-table-pendant-lamp-111251314.html

Figura 37 – Pintura de pêssankas.
Fonte: http://www.miniweb.com.br/cidadania/temas_transversais/pascoa/pascoa_nomundo.html

ATIVIDADE 4

Projeção globo terrestre

Duração: O tempo será proporcional e relativo ao foco direcionado à atividade, dependendo das imagens empregadas na discussão interdisciplinar com Geografia.

Objetivos: Visualizar aplicações práticas de geometrias não-euclidianas em Geografia, por meio de mapas e projeções do globo terrestre.

Conteúdos trabalhados: Interdisciplinaridade com Geografia; círculo máximo, círculos menores, retas paralelas e perpendiculares, biláteros.

Materiais utilizados: Imagens de projeções de Mercator, Projeções do globo terrestre sob diversas concepções.

Desenvolvimento da atividade: O professor pode conversar com os alunos sobre a criatividade dos artesãos e artistas e os conhecimentos necessários para realizar a cobertura de superfícies não planas. Poderá também refletir sobre as dificuldades dos geógrafos em transpor os mapas do papel para o globo, e vice-versa. As dificuldades para transpor imagens do papel para superfícies de cilindros, cones, esferas e elipiso55ides, e os procedimentos para que as imagens fiquem ou não anamórficas.

Sugestão de imagens sobre projeções do globo terrestre:
http://www.conhecimentohoje.com.br/Computacao_recentes266_frames.htm

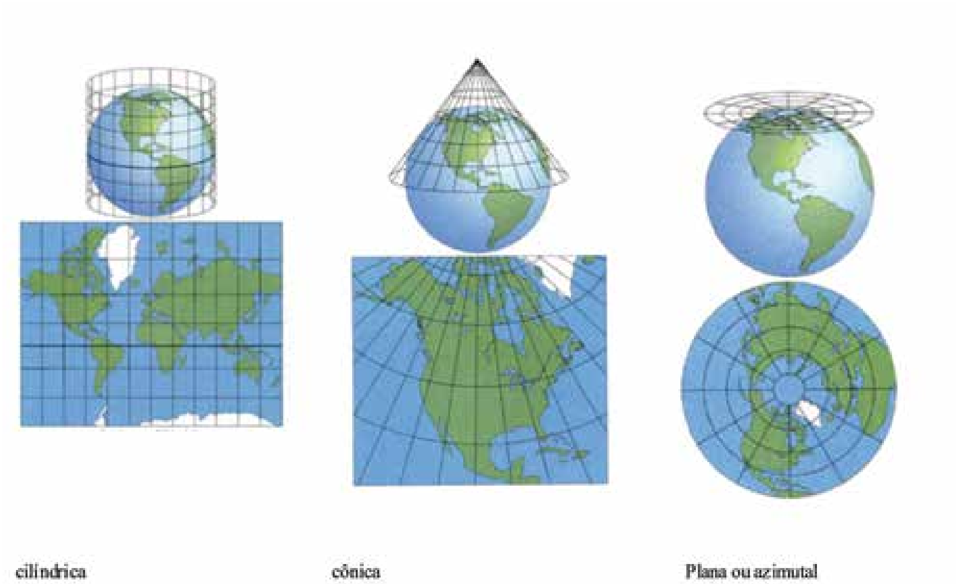


Figura 38 – Projeções do globo terrestre.
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/galerias/imagem/0000001124/0000014081.jpg

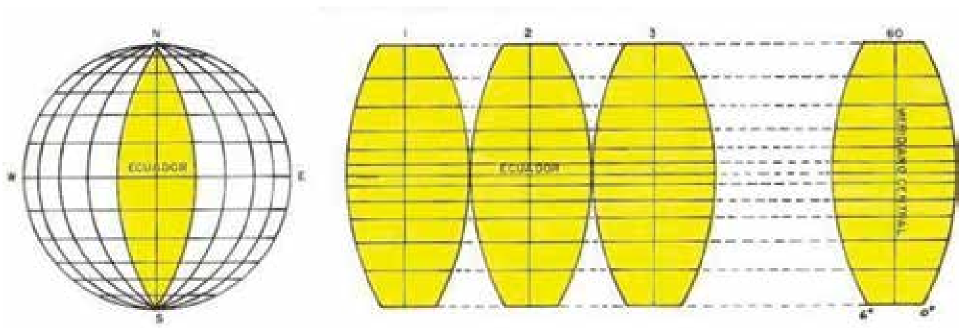


Figura 39 – Projeção de Mercator
Fonte: http://www.professores.uff.br/cristiane/Estudodirigido/Cartografia.htm

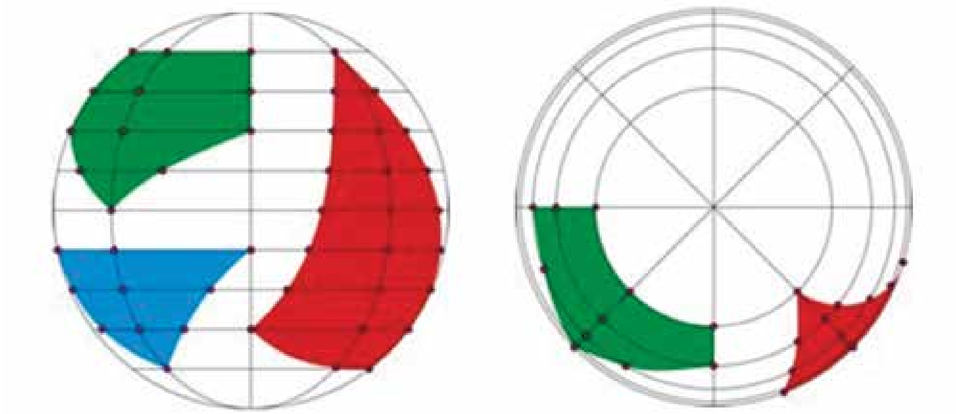


Figura 40 – Visualização de projeção em esfera.
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/galerias/imagem/0000001124/0000014081.jpg

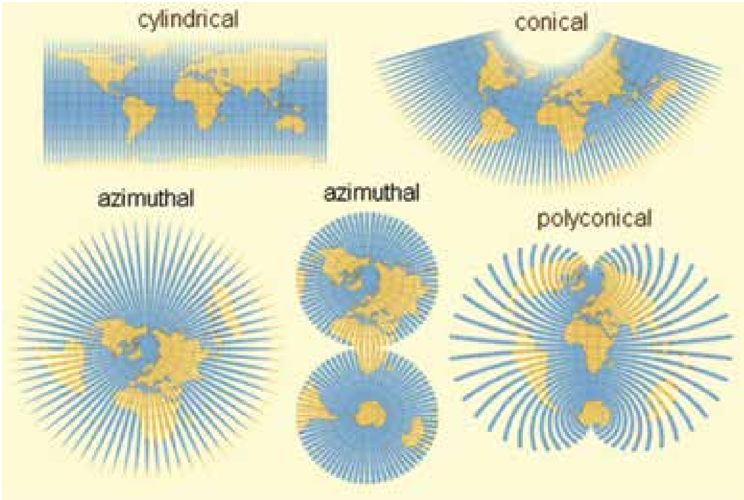


Figura 41 – Projeções do globo terrestre.
Fonte: http://www.conhecimentohoje.com.br/Computacao_recentes266_frames.htm
Créditos: Jarke van Wijk / The Cartographic Journal / Maney Publishing

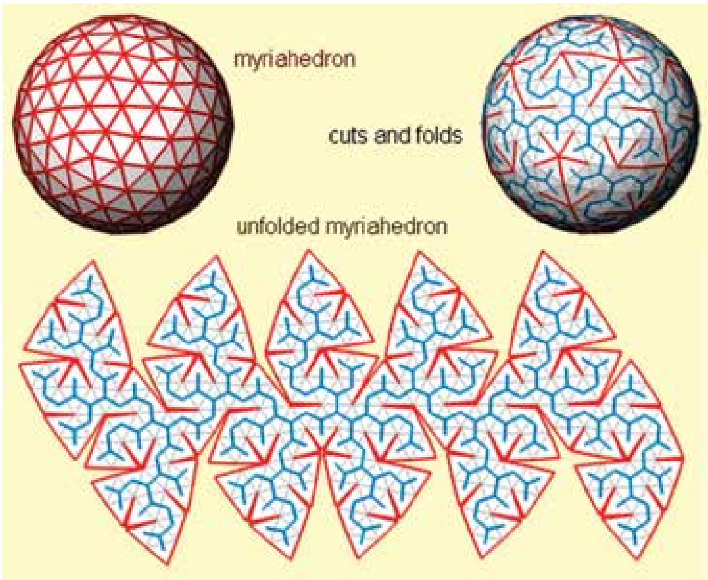


Figura 42 – Transformação de esfera em miriaedro.
Fonte: http://www.conhecimentohoje.com.br/Computacao_recentes266_frames.htm

ATIVIDADE 5

Linhas em superfícies

Duração: Uma aula de 50 minutos

Objetivos: Estudar as propriedades da ligação entre dois pontos em quatro superfícies diferentes: plana, cilíndrica, esférica e elipsoide;
Representar, quando possível, retas paralelas e perpendiculares em superfícies distintas;
Realizar conversões e representações semióticas entre superfícies e entre esquemas gráficos.

Conteúdos trabalhados: Reta paralela, reta perpendicular, paralelismo e perpendicularismo em superfícies plana e curvas.

Materiais utilizados: Goniômetro simples, conhecido como transferidor; goniômetro de acetato; canetas de retroprojetor, tesoura; tiras de papel adesivo colorido (2 a 3 mm de largura); malha pontilhada impressa em cartolina; cilindro, esfera e elipsoide de isopor.

Desenvolvimento: O professor pode distribuir os alunos em equipes para usar o material em conjunto.
Primeiramente o professor pode distribuir o material necessário para cada equipe, solicitando que o usem conforme as indicações de suas explicações, ou seguindo o roteiro proposto.

Superfície plana da cartolina

De posse da cartolina com a malha pontilhada, o professor poderá esclarecer que ela representará a superfície plana euclidiana. Os alunos deverão escolher dois pontos da malha impressa, denominando-os de A e B, marcando-os com a caneta de retroprojetor.
Em seguida, com o auxílio das tiras de papel adesivo colorido, o professor deve solicitar que os alunos representem uma linha ligando os dois pontos. Ou seja, a tira de papel colorido deverá ser colada na cartolina, passando pelos dois pontos escolhidos.
O professor pode questionar aos alunos se há outras formas de ligar os pontos, se há possibilidade de determinar mais linhas que passem pelos pontos A e B. O docente

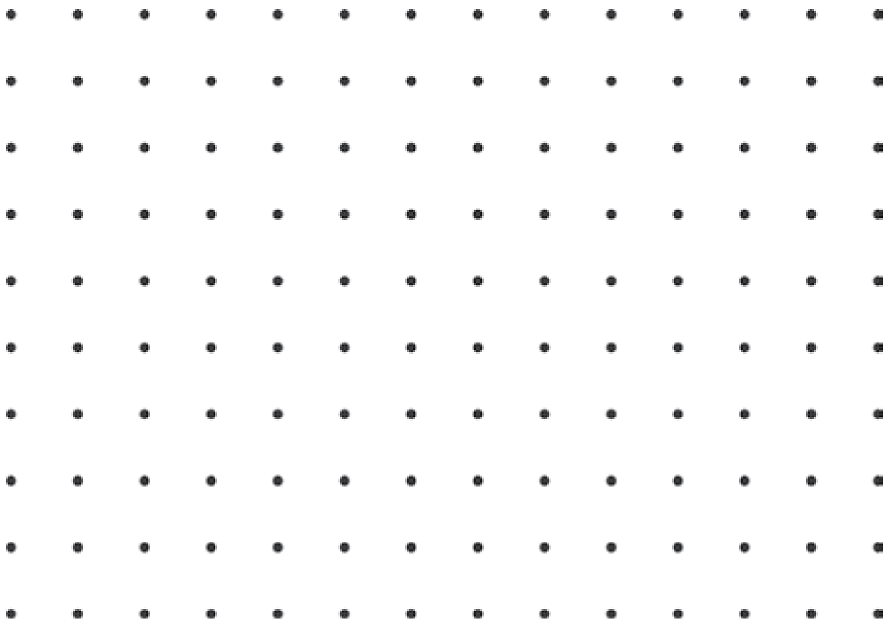
deve lembrar aos estudantes que dois pontos determinam uma reta.

O professor pode solicitar que com o auxílio das tiras de papel adesivo colorido, sejam representados na superfície plana uma reta paralela e uma reta perpendicular à reta AB, usando os pontos da malha. Ao realizar a reta paralela, os estudantes poderão identificar dois pontos, nomeando-os de A' e B' e, usar o goniômetro para fazer ângulos precisos. Em seguida, o professor pode solicitar que os estudantes preencham a ficha 4.

Ficha 4

Identificação dos alunos(as) ....data ..../ ..../ ....

Observe o esquema abaixo, é uma representação, um esquema da cartolina usada na atividade 3.



Esquema 1: Esquema da cartolina

a) Marque na ficha, no esquema da cartolina, os pontos escolhidos e denominados de A e B.
b) Represente a linha de papel adesivo colorido usando caneta colorida.
c) Marque no esquema da ficha as retas paralela e perpendicular realizadas na cartolina. Identifique a reta paralela com a letra $\boldsymbol{a}$ e a reta perpendicular pela letra $\boldsymbol{b}$.
d) Marque os pontos A' e B' da reta paralela à AB no esquema.
e) Foi possível realizar mais de uma linha que passa pelos pontos A e B?
f) Qual a medida dos ângulos quando a reta $\boldsymbol{b}$ intercepta a reta AB?
g) Qual a medida dos ângulos quando a reta $\boldsymbol{b}$ intercepta a reta $\boldsymbol{a}$?
h) Marque as medidas dos ângulos no esquema acima.
i) Compare as medidas dos ângulos da reta AB com os da reta A'B'. As medidas dos ângulos são iguais? Há algum padrão de repetição nas medidas dos ângulos?

O professor pode discutir as respostas dos alunos, ouvindo suas argumentações. Esse deve verificar se a reta perpendicular (***b***) de todas as equipes ao interceptar a reta paralela (***a***) à AB formou ângulos retos. Ou seja, verificar se a reta ***b***, perpendicular à AB também ficou perpendicular à reta ***a***. Essa verificação pode indicar se o encaminhamento da atividade está dando certo, do contrário, o docente deve intervir de forma com que as atividades com a superfície plana estejam de acordo com o solicitado, evitando assim, problemas com as atividades seguintes.

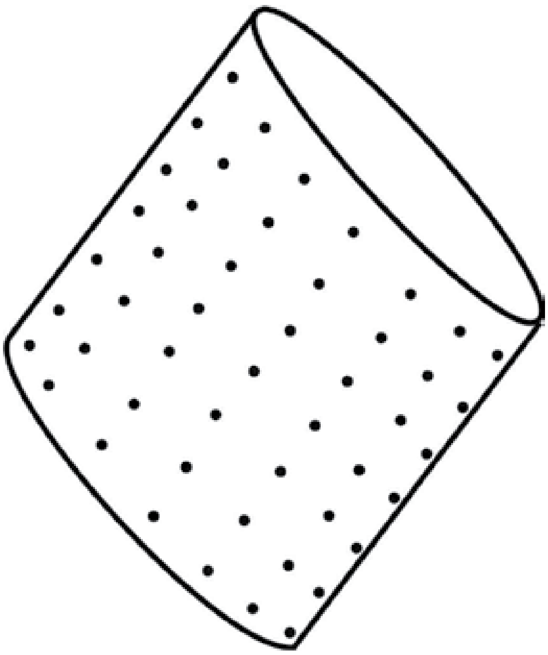
Superfície curva do cilindro

Na sequência, a superfície do cilindro será usada. O professor solicita que os estudantes utilizem a superfície curva do cilindro marcada com uma malha pontilhada, realizando a mesma atividade feita com a cartolina. Ou seja, os alunos deverão escolher dois pontos na superfície curva do cilindro, nomeando-os de C e D, e deverão ligar os dois pontos com uma tira de papel adesivo colorido. Em seguida, representarão uma reta paralela e uma perpendicular à reta CD. Cabe lembrar aos estudantes que o goniômetro de acetato pode ser útil para marcar os ângulos na superfície curva do cilindro. Os alunos, ao realizarem essa atividade, deverão preencher a ficha 5.

Ficha 5

Identificação dos alunos(as) ....data ..../ ..../ ....

Observe o esquema 2, é uma representação de um cilindro cuja superfície curva apresenta uma malha pontilhada. Use-o como esquema de representação da atividade no cilindro.



Esquema 2: Imagem parcial da superfície pontilhada do cilindro

a) Marque no esquema, os pontos escolhidos e denominados de C e D.
b) Represente a linha de papel adesivo colorido usando caneta colorida.
c) Marque as retas paralela (***a***) e perpendicular (***b***) realizadas na superfície do cilindro.
d) Foi possível realizar mais de uma linha passando por C e D?
e) Ao realizar a reta paralela (***a***) à reta CD, escolha dois pontos da reta ***a*** no esquema, marcando-os no esquema usando C’ e D’.
f) Ao realizar a reta perpendicular (***b***) à reta CD, quais as medidas dos ângulos quando a reta ***b*** intercepta a reta CD?
g) Quais as medidas dos ângulos quando a reta ***b*** intercepta a reta ***a***?
h) Marque as medidas dos ângulos no esquema 2.
i) Os ângulos que foram medidos possuem a mesma medida quando a reta perpendicular (***b***) intercepta a reta CD e quando intercepta a reta C’D’?

O professor pode, então, discutir com os alunos as questões respondidas, verificando a possibilidade da reta CD se apresentar como uma curva, conforme os pontos escolhidos. Por exemplo: se os pontos escolhidos formarem uma reta paralela à base do cilindro, a reta circundará o cilindro, formando uma circunferência.
Conversar com os alunos sobre o uso do goniômetro de acetato e comparar as medidas realizadas com a cartolina e com o cilindro.

Superfície curva da esfera

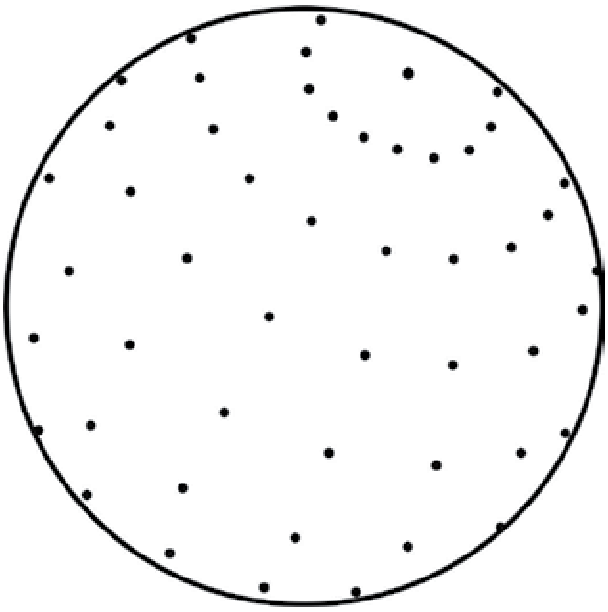
Na sequência, os alunos deverão realizar a atividade anterior, agora com a superfície da esfera, coberta com uma malha pontilhada.
Então, deverão marcar dois pontos E e F, ligá-los usando uma tira de papel adesivo colorido, fazendo uma reta. Também representarão na superfície esférica retas experimentando-as se podem ficar paralela (***a***) e perpendicular (***b***) à reta EF, da mesma forma que as atividades anteriores. Na sequência, os alunos deverão preencher a ficha 6, cujas questões se referem ao tratamento das representações das retas com a superfície esférica.

Ficha 6

Código dos alunos(as) ....data ..../ ..../ ....

Observe o esquema abaixo, é uma representação de uma esfera cuja superfície curva apresenta uma malha pontilhada.

Esquema 3: Imagem parcial da superfície pontilhada de uma esfera



a) Marque no esquema 3, os pontos escolhidos e denominados de E e F.
b) Represente a linha de papel adesivo colorido usando caneta colorida.
c) Foi possível marcar mais de uma linha passando por E e F? Se foi possível, marque no esquema 3.
d) Marque a reta paralela (***a***) realizada na superfície da esfera. Escolha dois pontos da reta e marque-os no esquema usando E' e F'.
e) Foi possível realizar a reta paralela à EF na superfície da esfera? O que aconteceu quando a reta paralela à EF foi representada na esfera?
f) Marque a reta ***b*** , perpendicular à reta EF realizada na superfície da esfera
g) Foi possível realizar a representação da reta perpendicular à EF na superfície da esfera?
h) O que aconteceu quando a reta perpendicular foi representada na superfície esférica?

O professor discutirá sobre as respostas das questões da ficha, introduzindo conceitos de geometria elíptica, questionando os estudantes sobre a impossibilidade de representar as retas paralela e perpendicular à reta EF.
Pode também explicar os elementos de geometria elíptica, como os círculos máximos e os círculos menores, e que as retas na superfície da esfera são os círculos máximos. O docente também poderá explicar que duas retas sempre irão se interceptar em dois pontos, formando biângulos e, que na superfície esférica, não haverá retas paralelas que se apresentarão da mesma forma que na superfície plana.

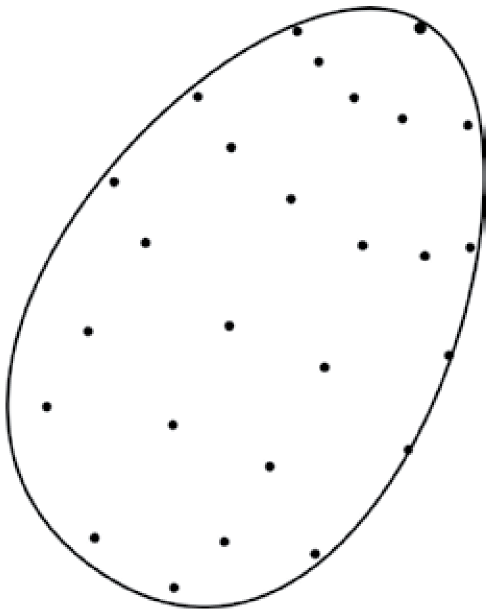
Superfície curva da elipsoide

O professor pode solicitar aos estudantes que realizem a mesma atividade na superfície curva da elipsoide. Da mesma forma que as atividades anteriores, ao marcar os pontos sobre a superfície curva elipsoide, solicitar que os estudantes utilizem as letras G e H, e que determinem a reta GH, uma reta paralela e uma reta perpendicular à GH. Cabe ressaltar que, se os alunos preencherem a ficha 7, estarão fazendo comparações entre as diversas superfícies e suas representações de retas.

Ficha 7

Identificação dos alunos(as) ....data ..../ ..../ ....

Observe o esquema abaixo, é uma representação de uma elipsoide cuja superfície curva apresenta uma malha pontilhada.



Esquema 4 Imagem parcial da superfície pontilhada de uma esfera

Compare as atividades realizadas na esfera, com as realizadas na elipsoide.

a) Foi possível representar retas paralela e perpendicular à reta GH?
b) Há semelhanças entre as atividades referentes à esfera e à elipsoide? Explique.

ATIVIDADE 6

Triângulos e ângulos internos

Duração: Uma aula de 50 minutos

Objetivos: Verificar a soma dos ângulos internos de triângulos em superfícies distintas.

Conteúdos trabalhados: Triângulos, soma de ângulos internos. Projeção e representação de triângulos em superfícies distintas.

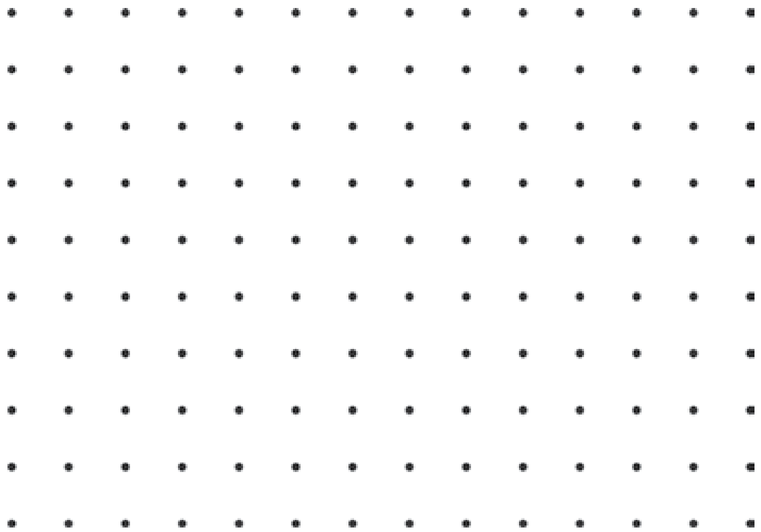
Materiais utilizados: Goniômetro simples de plástico, conhecido como transferidor; goniômetro de acetato; régua graduada em cm e mm de plástico; régua graduada em cm e mm de acetato, tesoura; tiras de papel adesivo colorido (2 a 3 mm de largura); malha pontilhada impressa em cartolina; cilindro, esfera e elipsoide de isopor com superfícies pontilhadas. Uma ficha de registro (ficha 8).

Desenvolvimento: O professor solicita aos alunos que se distribuam nas mesmas equipes anteriores, fazendo a distribuição do material a ser usado.
O professor pode iniciar o trabalho com a cartolina, solicitando que os estudantes escolham três pontos não alinhados, representando um triângulo, usando como vértices os pontos escolhidos e ligando-os com as tiras de papel adesivo colorido. Nesse triângulo, os estudantes deverão utilizar a nomenclatura ABC. Em seguida, o professor pode encaminhar a experimentação, solicitando que os alunos sigam o roteiro a seguir: medir os ângulos internos do triângulo ABC e realizar a soma dos ângulos internos, registrando o desenho e as medidas dos ângulos na ficha de atividades.
O professor poderá indicar as atividades posteriores, as quais serão realizadas pelas equipes, seguindo os mesmos passos da primeira.
Ou seja, os alunos irão repetir a mesma atividade de registro de pontos e representação do triângulo com as superfícies pontilhadas do cilindro, da esfera e da elipsoide, utilizando as nomenclaturas DEF para o triângulo do cilindro, GHI para o triângulo representado na esfera e JKL para o triângulo representado na elipsoide. O professor pode reforçar a ideia de representação nos modelos de sólidos geométricos, usando os mesmos pontos de referência da primeira atividade, a da representação na superfície plana. Tal procedimento pode evitar a não configuração das representações, ficando as equipes sem realizar conversões dos registros de representação semiótica, levando a duplas interpretações.
As fichas referentes aos procedimentos e aos resultados, apresentadas a seguir, podem também ser substituídas apenas pelos esquemas das superfícies. Entretanto, a *Ficha* 8 representa a ficha de atividades que foi usada na experimentação com os estudantes da pesquisa.

Ficha 8

Identificação dos alunos(as) ....data ..../ ..../ ....

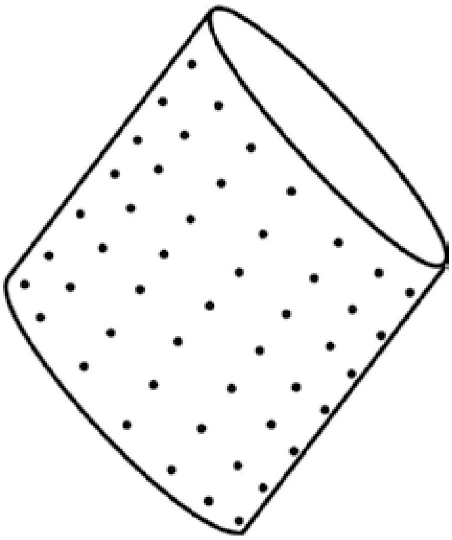
1) Observe o esquema abaixo, é uma representação da cartolina usada na atividade 3.



Esquema 5 – Representação da cartolina

a) Escolha três pontos não colineares da cartolina e do esquema 5, os pontos escolhidos serão denominados de A, B e C.
b) Represente os lados do triângulo ABC usando caneta colorida.
c) Marque as medidas dos três ângulos internos do triângulo.
d) Realize a soma das medidas dos três ângulos internos do triângulo ABC.

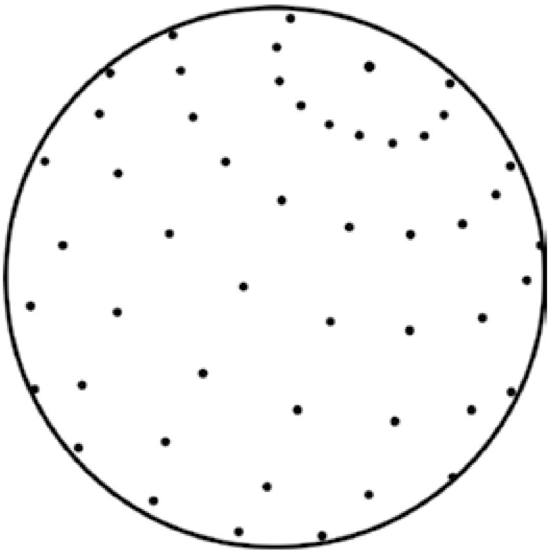
2) Observe a figura abaixo, é uma representação de um cilindro cuja superfície curva apresenta uma malha pontilhada. Use-o como esquema de representação da atividade abaixo.



Esquema 6 – Representação do cilindro

a) Marque no esquema 6, os pontos escolhidos e denominados de D, E e F.
b) Represente os lados do triângulo DEF usando caneta colorida.
c) Marque as medidas dos três ângulos internos do triângulo.
d) Realize a soma das medidas dos três ângulos internos do triângulo DEF.

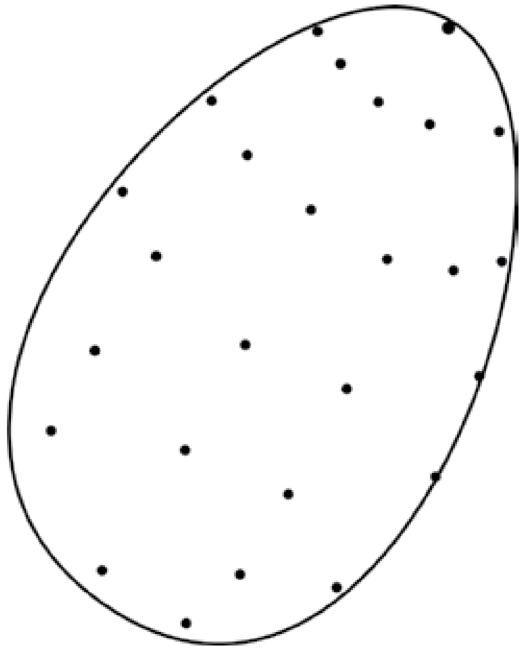
3) Observe o esquema abaixo, é uma representação de uma esfera cuja superfície curva apresenta uma malha pontilhada.



Esquema 7 – Representação da esfera

a) Marque no esquema 7, os pontos escolhidos e denominados de G, He I.
b) Represente os lados do triângulo GHI usando caneta colorida.
c) Marque as medidas dos três ângulos internos do triângulo.
d) Realize a soma das medidas dos três ângulos internos do triângulo GHI.

4) Observe o esquema abaixo, é uma representação de um elipsoide cuja superfície curva apresenta uma malha pontilhada.



Esquema 8 – Representação da elipsoide

a) Marque no esquema 8, os pontos escolhidos e denominados de J, K e L.
b) Represente os lados do triângulo JKL usando caneta colorida.
c) Marque as medidas dos três ângulos internos do triângulo.
d) Realize a soma das medidas dos três ângulos internos do triângulo JKL.

O professor pode, então, discutir com os alunos os resultados encontrados, socializar as representações dos triângulos nos modelos de sólidos geométricos, fazendo comparações entre os triângulos encontrados.
Mostrar aos alunos exemplos de triângulos representados nas superfícies esférica e oval, cujas medidas dos ângulos internos somam mais de 180º, explicando as propriedades e as diferenças das geometrias quanto aos triângulos.

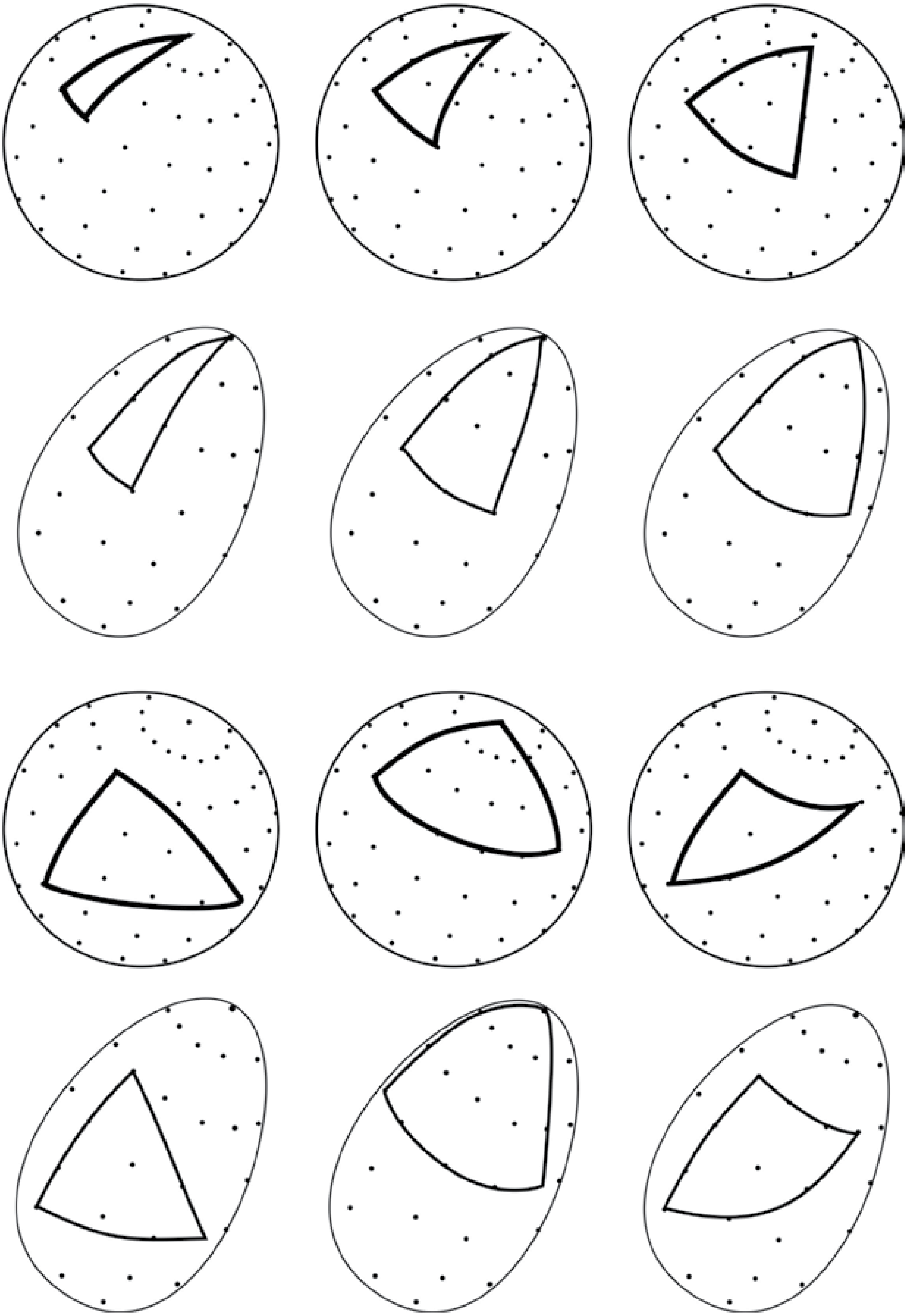


Figura 43 - Exemplos de triângulos representados nas superfícies da esfera e da elipsoide.
Fonte: Autoria própria

ATIVIDADE 7

Anamorfose de quadrilátero

Duração: O tempo será proporcional e relativo ao foco direcionado à atividade.

Objetivos: Verificar anamorfoses resultantes de projeção de quadriláteros da superfície plana para as superfícies curvas;
Selecionar dados e registros fotográficos, relatando resultados em apresentação visual explicativa.

Conteúdos trabalhados: Quadriláteros. Projeção de quadriláteros em superfícies plana e curvas.

Materiais utilizados: Goniômetro plástico e de acetato; régua graduada em cm e mm de plástico e de acetato, tesoura; tiras de papel adesivo colorido (2 a 3 mm de largura); malha pontilhada impressa em cartolina; cilindro, esfera e elipsoide de isopor com superfícies pontilhadas, com um quadrilátero projetado.

Desenvolvimento: O professor pode solicitar que os alunos se reúnam em equipes de no máximo 5 alunos, preferencialmente nas mesmas equipes anteriores, ficando a critério do professor. O professor pode distribuir o material para cada equipe e solicitar que realizem as medidas, discutam as questões envolvidas e as respondam, de acordo com o material recebido.
Nessa atividade, cada equipe receberá um quadrilátero diferente representado em superfície plana pontilhada, para analisar a possível anamorfose quando o registro do quadrilátero for projetado nas outras superfícies. Cabe ao professor organizar diferentes medidas de lados e ângulos de quadriláteros e em posições diferentes sobre as superfícies, como mostradas na figura 44.

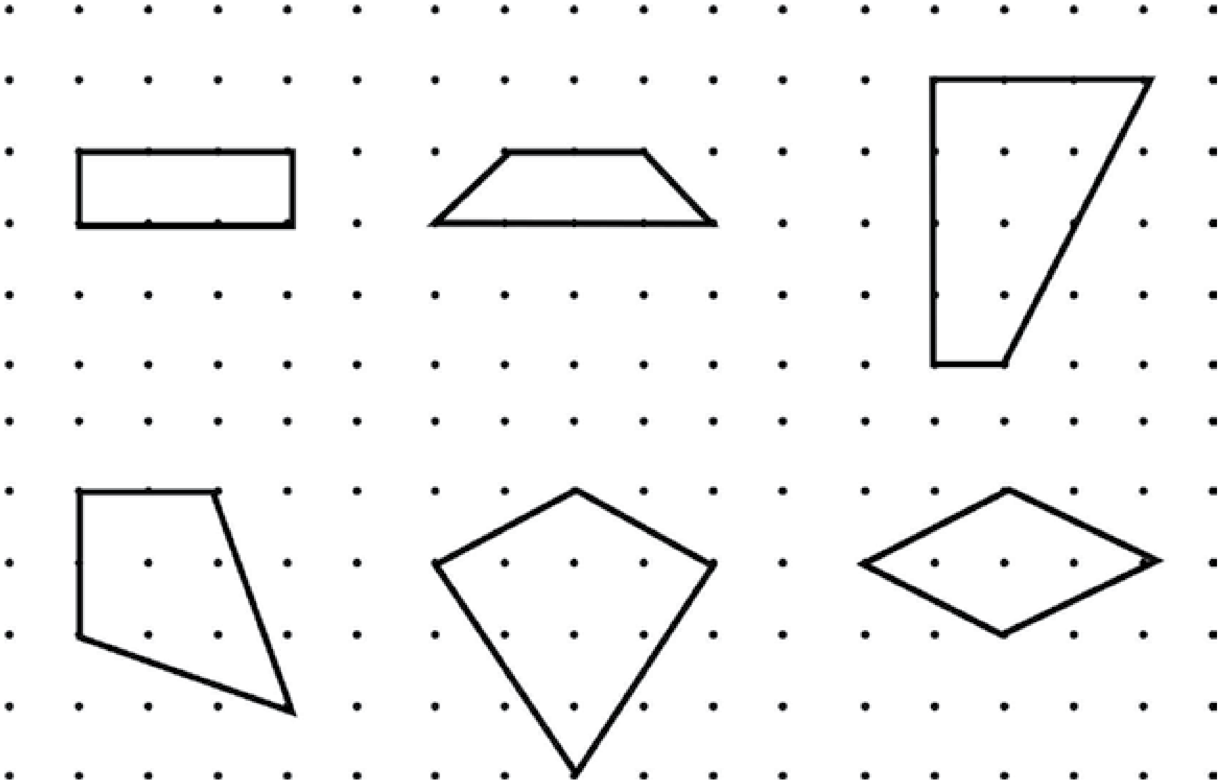


Figura 44 - Exemplos dos quadriláteros representados na cartolina.
Fonte: Autoria própria

Ao receber o quadrilátero representado na cartolina, cada equipe deverá representa-lo nas superfícies curvas do cilindro, da esfera e da elipsoide (figura 45), medindo os lados e os ângulos internos do quadrilátero, anotando a variação de medidas resultantes da anamorfose.
Cada equipe deverá apresentar as suas conclusões a respeito da possível anamorfose do quadrilátero às demais equipes.

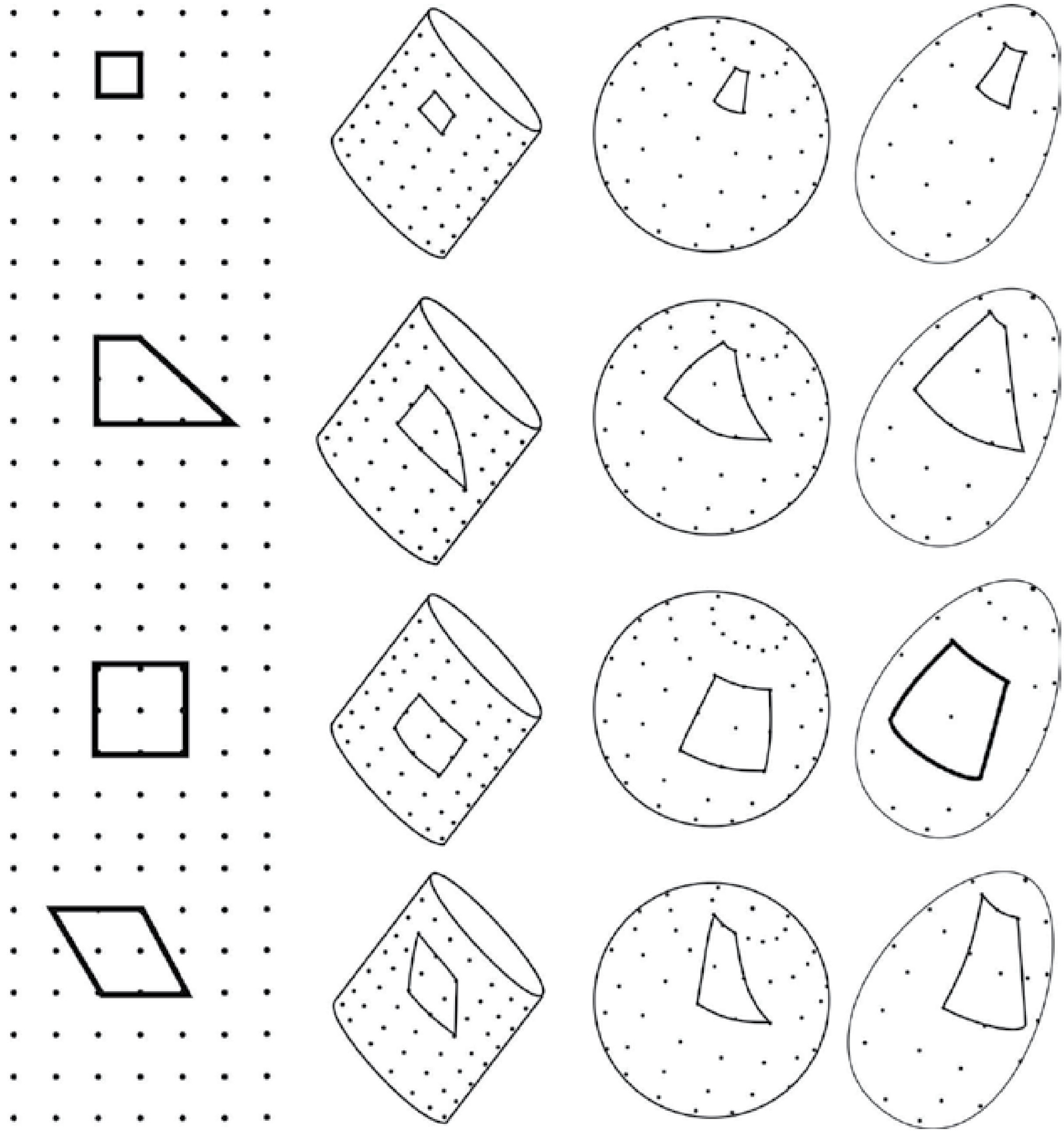


Figura 45 - Exemplos da representação dos quadriláteros.
Fonte: Autoria própria

Nessa atividade, as projeções dos quadriláteros nas superfícies plana, cilíndrica, esférica e elipsoide podem apresentar anamorfoses, conforme o local da superfície em que o quadrilátero é registrado. O exercício de análise pode ser avaliado pelo professor, segundo seus próprios critérios. Uma sugestão é o encaminhamento da atividade registrada em slides, desde a preparação do material até as conclusões. Agindo dessa forma, o professor poderá analisar se os alunos compreenderam o conteúdo, e se trabalharam de forma cooperativa e organizada.

5 CONSIDERAÇÕES

A proposta de atividades descrita nesse Manual Pedagógico poderá possibilitar ao professor de Matemática uma versão diferente das aulas tradicionais, em que os estudantes poderão interagir com materiais, formular ações e procedimentos, validar situações e estabelecer relações com o mundo ao seu redor, e não ficando somente no mundo das ideias.

Ao professor de Arte, poderá propiciar uma versão diferente do conteúdo perspectiva, pois as projeções realizadas, tanto com fotografias quanto com registros de representação semiótica, podem abrir um campo de experimentações no uso de superfícies como suporte de trabalho.

Espera-se que esse Manual Pedagógico possa contribuir para que o professor, a partir das sugestões nele contidas, possam encaminhar seu próprio trabalho, ampliando-o com pesquisas e adaptações a sua realidade, e que possa, no seu ambiente de trabalho, também realizar pesquisas, relacionando o seu cotidiano com experimentações didáticas.

A abordagem de Arte e Matemática na escola é uma oportunidade de desenvolver potencialidades que vão desde a intuição até a curiosidade, aspectos importantes na atividade intelectual e cultural.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, A. F. *et* al. **Um estudo de polígonos e poliedros através do desenho de observação. Graphica.** Curitiba, 2007. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/UMESTUDO.pdf>. Acesso em 16 jan. 2013.

ARTE E MATEMÁTICA. **Uma série de 13 programas para a TV Cultura** – Fundação Padre Anchieta & TV Escola, 2002. Disponível em: <http://www2.tvcultura.com.br/artematematica/programas.html>. Acesso em 17 ago. 2008.

ATALAY, B. **A matemática e a Mona Lisa**: a confluência da arte com a ciência. São Paulo: Mercuryo, 2007.

ÁVILA, G. **Várias Faces da matemática:** tópicos para licenciatura e leitura em geral. 2ed. São Paulo: Blücher, 2010.

BARBOSA, A. M. **A imagem no ensino da arte.** São Paulo: Perspectiva, 2005.

BERLINGHOFF, W. P. e GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos.** 2 ed. São Paulo: Blücher, 2010.

BOYER, C. B. **História da matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas:** Um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo – SP. 1995. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000093087>. Acesso em 12 jan. 2012.

BROD, G.; SILVA, A. B. A.; PIRES, J. F. Anamorfose na praça: um encontro do real e do virtual. In: XV SIGRADI - CONGRESSO DA SOCIEDADE IBERO-AMERICANA DE GRÁFICA DIGITAL, 2011, Santa Fé. Cultura Aumentada. Santa Fé - Argentina: FADU - UNL, 2011. v. 1. p. 130-133. Disponível em: <http://guaiaca.ufpel.edu.br:8080/jspui/bitstream/123456789/665/1/Anamorfose%20na%20Pra%C3%A7a%20-%20Sigradi%202011.pdf>. Acesso em 08 fev. 2013.

CAPRA, F. **A ciência de Leonardo da Vinci.** São Paulo: Cultrix, 2008.

CONTRAN, Conselho Nacional de Transito. Manual Brasileiro de Sinalização de Trânsito. Volume IV: **Sinalização Horizontal.** Brasília: Contran, 2007.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

CUMMING, R. **Para entender a arte.** São Paulo: Ática, 1995.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo horizonte: Autêntica, 2007.

DANHONI NEVES, M. C.; SILVA, J. A. P. Da Terra, da Lua e Além: 1ª. Parte. In: DANHONI NEVES, M. C. *et* al. **Da Terra, da Lua & além.** Maringá, PR: Massoni, 2010.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma.** São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** São Paulo: Unicamp, 2004.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Fazendo arte com matemática.** Porto Alegre: Artmed, 2006.

FOUCAULT, M. **isto não é um cachimbo.** 2004. Disponível em: <http://anarcopunk.org/biblioteca/wp-content/uploads/2009/01/foucault-michel-isto-nao-e-um-cachimbo.pdf>. Acesso em 12 mar. 2013.

GABRIEL, M. C. C. **Anamorfose: linguagem escondida na imagem.** V Congresso Brasileiro de Semiótica. St/2001.

GOMES, P. M.; SOARES, C. C. P. **Anamorfoses – um resgate das técnicas da perspectiva cônica.** Expressão Gráfica: Conexões entre Arte, Ciência e Tecnologia. Graphica 2011. Rio de Janeiro, 23-27 out. 2011. Disponível em: <http://www.graphica.org.br/esp_comunicaciones.html>. Acesso em 14 jan. 2012.

GOMES FILHO, J. **Gestalt do objeto:** sistema de leitura visual. 5ed. São Paulo: Escrituras, 2003.

HARTUNG, G. E.; MEIRELLES, R. **Anamorfose na Arte.** Uma abordagem Interdisciplinar. Portal do professor. 17/12/2010. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27220>. Acesso em 13 jan. 2012.

HOULE, K. **Art of Anamorphosis.** Disponível em: <http://www.kellymhoule.com/kellymhoule.com/Miniature_Books.html>. Acesso em 18 dez. 2011.

HUNT, J. L., NICKEL, B. G. e GIGAULT, Christian. Anamorphic Images. Department of

Physics. University of Guelph, Guelph, Ontário NIG 2WI. **American Journal of Physics**, Volume 68, Issue 3, pp. 232-237 (2000). Canada. Disponível em: <http://www.physics.uoguelph.ca/phyjlh/morph/Anamorph.pdf>. Acesso em 12 jan. 2012.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. 2 ed. Niterói: EdUFF, 2003.

KODAMA, Y. **O estudo da perspectiva cavaleira: uma experiência no ensino médio.** 192 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/perspectiva_cavaleira.pdf >. Acesso em 15 abr. 2012.

LAUER, M. **Crítica do artesanato.** São Paulo: Nobel, 1983.

LOVIS, K. A. **Geometria euclidiana e geometria hiperbólica em um ambiente de geometria dinâmica: o que pensam e o que sabem os professores.** 2009. 140 f. Dissertação (MESTRADO EM Educação para a Ciência) – Universidade Estadual de Maringá – Maringá – PR. 2009. Disponível em: <http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?code=vtls000180879>. Acesso em 10 jun. 2011.

MARQUEZE, J. P. **As faces dos sólidos platônicos na superfície esférica: uma proposta para o ensino-aprendizagem de noções básicas de geometria esférica.** 2006. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo - SP. 2006. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/joao_pedro_marqueze.pdf>. Acesso em 12 mar. 2011.

MARTOS, Z. G. O trabalho pedagógico envolvendo geometrias não-euclidianas no Ensino Fundamental. **Revista Zetetiké.** V.10, no. 17/18 jan/dez 2002 p. 43-70. Disponível em: <http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewissue.php?id=13>. Acesso em 25 mai. 2011.

MULLER, E. Truques de Perspectiva. In: As melhores ilusões de ótica. **Revista Superinteressante.** Edição Especial. N. 283_A. out. 2010.

MÜLLER, R. P. Mensagens visuais na ornamentação corporal Xavante. In: VIDAL, Lux (org). **Grafismo indígena:** estudos de antropologia estética. São Paulo: Estúdio Nobel: editora da Universidade de São Paulo: FAPESP, 1992.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes curriculares da educação básica, matemática.** Curitiba: SEED, 2008.

PATAKI, I. **Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar.** 2003. 214 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo - SP. 2003. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/irene_pataki.pdf>. Acesso em 25 mai. 2011.

PRESTES, I. C. R. **Geometria esférica: uma conexão com a geografia.** 2006. 210 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/irene_conceicao_rodrigues_prestes.pdf>. Acesso em 25 mai. 2011.

RAYNAUD, D. As redes universitárias de difusão das ciências matemáticas como fator de desenvolvimento da perspectiva. Uma agenda de pesquisa para o historiador da perspectiva no Brasil. **História da Arte e da Ciência.** Belo Horizonte: Brasil, 2009. Disponível em: <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00479822/>. Acesso em 12 jan. 2012.

REIS, J. D. S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis.** 2006. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos) Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, SP, 2006. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2006/reis_jds_me_rcla.pdf>. Acesso em 18 jun. 2011.

SANSEVERO, A. Barroco: Percursos e Contrastes. **Revista Digital Art&.** Ano V. no. 08. Outubro de 2007. Disponível em: <http://www.revista.art.br/site-numero-08/trabalhos/31.htm>. Acesso em 12 jan. 2012.

SANTOS, T. S. **A inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da educação básica.** Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá - Maringá, PR. 2009. Disponível em <http://nou-rau.uem.br/nou-rau/document/?code=vtls000180941>. Acesso em 22 abr. 2011.

SANTOS, C; SOUTO, P. O; ANANIAS, N, T. **Ensino da Anamorfose em Escolas de Nível Médio: um exemplo de aplicação.** In: GRAPHICA 2009, Bauru, setembro 2009. 19º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e VIII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design, Bauru, editora UNESP, p. 743-752.

SOTTO, P. O.; SANTOS, C. **Anamorfose na comunicação visual.** Disponível em: <http://prope.unesp.br/xxi_cic/27_35059384837.pdf>. Acesso em 17 nov. 2011.

SOTTO, P. O. *et* al. **Anamorfose: origens e atualidades.** Anais do 8º. Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em design. 8 a 11 de outubro de 2008. São Paulo – SP Disponível em: <http://www.modavestuario.com/356anamorfoseorigenseatualidades.pdf>. Acesso em 20 dez. 2012.