



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

CAMPUS CURITIBA

DEPARTAMENTO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE
MATERIAIS - PPGEM**

MARCELO BORGES DOS SANTOS

**ESTIMATIVAS DOS MOMENTOS ESTÁTISTICOS
PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO ESTOCÁSTICA
DE VIGA EM UMA FUNDAÇÃO PASTERNAK**

CURITIBA

MARÇO – 2015

MARCELO BORGES DOS SANTOS

**ESTIMATIVAS DOS MOMENTOS ESTÁTISTICOS
PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO ESTOCÁSTICA DE
VIGA EM UMA FUNDAÇÃO PASTERNAK**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Área de Mecânica dos sólidos, do Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação, do Campus de Curitiba, da UTFPR.

Orientador: Prof. Cláudio R. da S. Ávila Jr., Dr.

Co-Orientador: Prof. Hilbeth Parente Azikri de Deus, Dr.

CURITIBA

MARÇO – 2015

TERMO DE APROVAÇÃO

MARCELO BORGES DOS SANTOS

**ESTIMATIVAS DOS MOMENTOS ESTÁTISTICOS
PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO ESTOCÁSTICA
DE VIGA EM UMA FUNDAÇÃO PASTERNAK**

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do título de mestre em engenharia, área de Mecânica dos Sólidos, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais.

Prof. Paulo César Borges, Dr.

Coordenador do Programa

Banca Examinadora

Prof. Cláudio R. da S. Ávila Jr., Dr.

PPGEM/NUMAT - Orientador

Prof. Giuseppe Pintaúde, Dr.

PPGEM/UTFPR

Prof. Oscar A. Garcia de Suarez

Membro Externo/USC.

Prof. Hilbeth Parente Azikri de Deus,

PPGEM NUMAT- Co- Orientador

Curitiba, 20 de Março de 2015

DOS SANTOS, MARCELO BORGES, ESTIMATIVAS DOS MOMENTOS ESTÁTISTICOS PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO ESTOCÁSTICA DE VIGA EM UMA FUNDAÇÃO PASTERNAK - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 97p.

RESUMO

A presente dissertação propõe a resolução do problema de flexão estocástica em uma viga Euler-Bernoulli, sobre uma fundação do tipo Pasternak, através de um método computacional baseado na simulação de Monte Carlo. A incerteza está presente nos coeficientes elásticos da viga e da fundação. Primeiramente, é estabelecida a formulação matemática do problema que é oriunda, de um modelo físico de deslocamento da viga, que leva em consideração a influência da fundação sobre a resposta do problema. Portanto foi realizado um estudo a cerca dos modelos mais usuais de fundação, que são: o modelo do tipo Winkler, e modelo de Pasternak. Logo a seguir foi provado que o problema variacional abstrato, derivado da formulação forte do problema, apresenta solução e esta é única. Para a obtenção da solução do problema, foi realizada uma fundamentação matemática, dos seguintes assuntos: representação da incerteza, método de Galerkin, série de Neumann, e por fim das cotas inferiores e superiores.

Finalmente, o desempenho das cotas inferiores e superiores, em relação à simulação de Monte Carlo direto, foram avaliadas através de vários casos, nos quais a incerteza repousa sobre os diversos coeficientes que compõe a equação de flexão na forma de um problema variacional. A metodologia mostrou-se eficiente, tanto no aspecto da convergência da resposta quanto no que se refere ao custo computacional.

Palavras-chave: Simulação de Monte Carlo, fundação de Pasternak, método de Galerkin, série de Neumann, cotas inferiores e superiores.

DOS SANTOS, Marcelo Borges, Estimates of statistical moments to the stochastic problem of bending beam on a Pasternak foundation, 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 97 p.

ABSTRACT

This work proposes the resolution of stochastic bending problem in a Euler-Bernoulli beam, on a foundation type Pasternak, through a computational method based on Monte Carlo simulation. Uncertainty is present in the elastic coefficients of the beam and foundation. First, it is established the mathematical formulation of the problem which is derived from a physical model displacement of the beam, that takes into account the influence of the foundation on the problem of response. This requires an approach that is made up on the most common models of foundation, which are: the model Winkler type and model of Pasternak. In sequence we study the existence and uniqueness of the variational problem. To obtain the solution of the problem, a mathematical reasoning is carried out, to the following matters: representation of uncertainty, Galerkin method, serial Neumann, and finally the lower and upper bounds.

Finally, the performance of lower and upper bounds, derived from direct simulation of Monte Carlo were evaluated through various cases where the uncertainty lies in the different coefficients composing the equation bending as a variational problem. The method proved to be efficient, both in the response of the convergence point as regards the computational cost.

Keywords: Monte Carlo simulation, foundation Pasternak, Galerkin method, Neumann series, lower and upper bounds.

SUMÁRIO

RESUMO.....	iii
ABSTRACT	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica.....	2
1.2 Objetivos	3
1.3 Estrutura do trabalho.....	4
2 Os modelos de fundação	6
2.1 O modelo de fundação do tipo Winkler	6
2.2 O modelo de fundação do tipo Pasternak	8
3 Formulação matemática do problema	10
3.1 Formulação forte do problema, e apresentação das hipóteses necessárias para a prova da Existência e Unicidade.	10
3.2 Existência e Unicidade.....	12
4 Fundamentação matemática do problema estocástico	15
4.1 Representação da incerteza	16
4.2 Método de Galerkin.....	17
4.3 Série de Neumann	20
4.4 Cotas inferiores e superiores para a realização do processo estocástico de resposta.....	22
4.5 Estimativas dos momentos estatísticos, e definição das funções de desvio.	

5	Resultados numéricos.....	28
5.1	Introdução.....	28
5.1.1	<i>Caracterização física da viga, e critério de parada.....</i>	29
5.2	Exemplo 1-caso A: incerteza sobre o coeficiente de rigidez à flexão viga (EI), para uma série de Neumann, de ordem $n=1$	33
5.3	Exemplo 1-caso B: incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo de Pasternak (k_p), para uma série de Neumann, de ordem $n=1$	39
5.4	Exemplo 1- caso C: incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo de Winkler (k_w), para uma série de Neumann, de ordem $n=1$	47
5.5	Conclusões do Exemplo 1.	50
5.6	Exemplo 2-caso A: incerteza sobre o coeficiente de rigidez à flexão viga (EI), para uma série de Neumann, de ordem $n=0$	55
5.7	Exemplo 2-caso B: incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo do tipo Pasternak (k_p), para uma série de Neumann, de ordem $n=0$	61
5.8	Exemplo 2-caso c: incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo do tipo Winkler (k_w), para uma série de Neumann, de ordem $n=0$	68
5.9	Conclusão do exemplo 2.....	75
6	Conclusão e Sugestão para trabalhos futuros	81
	Referências Bibliográficas.....	85
	Apêndice A.....	87
	Apêndice B.....	89

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 Modelo físico de uma fundação do tipo.....	8
Figura 2-2 Modelo de Fundação do tipo Pasternak.....	9
Figura 5-1 a) Viga simplesmente apoiada sobre uma fundação Pasternak;	30
Figura 5-2(a) Convergência do valor médio de deslocamento,	32
Figura 5-3 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das	34
Figura 5-4 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das	35
Figura 5-5 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$;	36
Figura 5-6 a) Gráficos das funções desvios da cotas $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}, i = 1, \dots, 5$;	37
Figura 5-7 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i = 1, \dots, 5$;	40
Figura 5-8 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i = 1, \dots, 5$;	41
Figura 5-9 a) Gráficos das funções desvio $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das	42
Figura 5-10 Gráficos das estimativas das correlações.....	43
Figura 5-11 Gráfico das estimativas das correlações das cotas superiores.....	44
Figura 5-12 a) Gráficos das funções desvios da cotas $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}, i = 1, \dots, 5$;	45
Figura 5-13 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}, i = 1, \dots, 5$	48
Figura 5-14 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos.....	49
Figura 5-15 Fragmento do código computacional, referente a simulação de Monte Carlo direto.....	51

Figura 5-16 Fragmento do código computacional, referente ao cálculo do tempo de processamento, via método de Monte Carlo-Neumann.	52
Figura 5-17 Fragmento do código computacional, referente ao cálculo do tempo de processamento para cálculo da norma de matriz.....	53
Figura 5-18 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráfico das.....	56
Figura 5-19 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das	57
Figura 5-20 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$;	58
Figura 5-21 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções	
$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$	59
Figura 5-22 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i = 1, \dots, 5$;	62
Figura 5-23 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i = 1, \dots, 5$;	63
Figura 5-24 a) Gráficos das funções desvio $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das.....	64
Figura 5-25 Gráficos das estimativas das correlações.....	65
Figura 5-26	66
Figura 5-27 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos.....	67
Figura 5-28 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráfico das.....	69
Figura 5-29 Zoom da região central	70
Figura 5-30 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções	
$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}, i = 1, \dots, 5$	71
Figura 5-31 Gráficos das estimativas das correlações.....	72
Figura 5-32 Zoom da região central do Gráfico das estimativas das correlações	73

Figura 5-33 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos.....74

Figura 5-34 Todas as amostras de deslocamento sofrido pela viga, obtidas via simulação de Monte Carlo direta:.....78

LISTA DE TABELAS

Tabela 5-1: Avaliações numéricas das funções de desvio relativo em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2} m$.	38
Tabela 5-2 Avaliações numéricas das funções de desvios relativos dos valores esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2} m$.	46
Tabela 5-3 Avaliações numéricas das funções desvio relativo em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2} m$.	50
Tabela 5-4 - Tempo em segundos, do processamento computacional, via Monte Carlo, e de suas respectivas cotas inferiores e superiores.	54
Tabela 5-5 Avaliações numéricas das funções de desvio relativo em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2} m$.	60
Tabela 5-6 Avaliações numéricas das funções desvios relativos em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2} m$.	68
Tabela 5-7 Avaliações numéricas das funções de desvios relativos em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2} m$.	75
Tabela 5-8 Estimativas para o valor esperado, variância e coeficiente de dispersão da variável randômica $u_m(\frac{1}{2}, \xi)$, e as suas cotas inferior e superior.	76
Tabela 5-9 Tempo em segundos, do processamento computacional, via Monte Carlo, e de suas respectivas cotas inferiores e superiores.	79

LISTA DE SÍMBOLOS

	Descrição	Unidade
EI	Rigidez a flexão	$[\text{N}\cdot\text{m}^2]$
k_w	Módulo de elasticidade do solo para modelo tipo Winkler	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-2}]$
u	Deslocamento da viga	$[\text{m}]$
g	Aceleração da gravidade	$[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}]$
l	Comprimento da viga	$[\text{m}]$
κ_p	Módulo de elasticidade do solo para modelo tipo Pasternak	$[\text{N}]$
q	Carregamento	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

ω_i	Evento simples qualquer
Ω	Espaço amostral
\mathcal{F}	Sigma álgebra.
P	Medida de probabilidade
ω'_i	Primeira derivada em relação a x , de um evento simples qualquer
x	Variável relacionada a comprimento da viga, assumindo valores entre $(0, l)$
ω''	Segunda derivada em relação a x , de um evento simples qualquer
\bar{c}	Valor máximo para k_w
\bar{b}	Valor máximo para κ_p
\bar{a}	Valor máximo para EI
\underline{c}	Valor mínimo para k_w
\underline{b}	Valor mínimo para κ_p
\underline{a}	Valor mínimo para EI
$\ u\ _v^2$	Quadrado da norma da função u
$\ v\ _v$	Norma da função v

$\ u\ _v$	Norma da função u
$\xi(\omega)$	Variável randômica
$\xi_1(\omega)$	Variável randômica qualquer
$\vartheta(x, \omega)$	Função da representação da incerteza
$\mathbb{E}[\xi_i]$	Esperança do vetor de variáveis randômicas
u_i	Coefficiente qualquer da função de deslocamento
$\varphi_i(x)$	Função testes genérica
$\mathbf{U}(\xi_k)$	Vetor dos coeficientes da função deslocamento
$\Phi(x)$	Vetor das funções teste
$\mathbf{K}(\xi_k)$	Matriz de rigidez, associada as variáveis randômicas
$\mathbf{H}(\xi_k)$	Inverso da matriz de rigidez, associada as variáveis randômicas
$h_{ij}(\xi_k)$	Elemento qualquer da matriz de rigidez, associada as variáveis randômicas
$\ \mathbf{P}(\xi_k)\ $	Norma da matriz $\mathbf{P}(\xi_k)$
$\sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{P}(\xi_k))^i$	Representação da série de Neumann aplicada a matriz $\mathbf{P}(\xi_k)$
$u_m(x, \xi_k)$	Função de deslocamento da viga, calculado através de Monte Carlo direto.
$u_{mn}(x, \xi_k)$	Função de deslocamento da viga, calculado através da série truncada de Neumann.
n	Ordem da série de Neumann
m	Número de funções testes
max	Valor máximo
$\alpha(x, \xi_k)$	Cota superior para deslocamento de viga
$\beta(x, \xi_k)$	Cota inferior para deslocamento de viga
N	Número de amostras gerado pelo código computacional
$\hat{\mu}_{u_m}$	Estimativa do momento estatístico de primeira ordem para flexão de viga
$\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$	Estimativa do momento estatístico de segunda ordem para flexão de viga

- $M_M(\mathbb{R})$ Espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem M , com entradas reais.
- $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(k)}}(x)$ Desvio das estimativas, das cotas superiores em relação a Simulação de MC.
- $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(k)}}$ Desvio das estimativas, das cotas inferiores em relação a Simulação de MC.

Operadores

- $\frac{d}{dx}$ Primeira derivada em relação a x
- $\frac{d^2}{dx^2}$ Derivada de ordem 2, em relação a x
- \int Operador integral

Siglas

- UTFPR Universidade Tecnológica Federal do Paraná
- MC Monte Carlo

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a quantificação da incerteza tem sido amplamente empregada, na modelagem de problemas de engenharia. O aumento da capacidade computacional instalada, assim como a proposição de novas técnicas, e metodologias de análise e solução de problemas com incerteza favorece essa tendência, apesar disso, a simulação de Monte Carlo direta, ainda é muito utilizada como referência para avaliação dessas novas proposições e metodologias.

A utilização da simulação de Monte Carlo direta envolve um alto custo computacional, portanto o uso da simulação de Monte Carlo direta pode até mesmo ser proibitiva, para certas aplicações, por exemplo: para problemas que apresentam não linearidades e/ou de grande dimensão.

Atualmente, devido à complexidade crescente dos problemas de análise de estruturas torna-se imprescindível a utilização de métodos numéricos, tais como métodos de elementos finitos, diferenças finitas e/ou elementos de contorno. Nesses métodos a solução de uma equação diferencial linear é aproximada pela solução de um sistema linear de equações algébricas, as quais necessariamente fazem uso da matriz de rigidez, e ao aplicar-se o método da simulação de Monte Carlo para cada amostra estrutural, deve-se reavaliar esta mesma matriz de rigidez.

Dependendo da dimensão do sistema linear e do número de amostras, esse procedimento apresenta alto custo computacional, a fim de contornar o elevado gasto computacional, devido ao cálculo da matriz “inversa”, para cada amostra gerada pelo processo estocástico, será utilizada a série de Neumann, que faz uso de valores aproximados, para os elementos da matriz “inversa” de rigidez. Deve ser ressaltado que o Matlab, não calcula diretamente a inversa de qualquer matriz, e sim utiliza métodos iterativos, tais como Jacobi, e gradientes conjugados, para a obtenção de seus valores. A fim de deixar bem enfático, que não existe o cálculo exato da matriz inversa, a própria palavra inversa, será posta entre aspas, quando este trabalho se referir ao cálculo computacional, da matriz “inversa” de rigidez.

O presente trabalho apresenta o problema de flexão estocástica de uma viga de Euler-Bernoulli apoiada em fundação de Pasternak. A incerteza está sobre os coeficientes de rigidez à flexão da viga e da fundação. A modelagem da incerteza é feita através de processos estocásticos parametrizados. O método de Galerkin é utilizado para gerar o sistema linear amostral. A contribuição deste trabalho está na utilização das propriedades da série de Neumann para obter, formalmente, as cotas inferiores e superiores para a função amostral do problema de flexão estocástica de viga.

Na próxima seção serão abordados os trabalhos anteriores, que utilizaram a série de Neumann, como uma alternativa, para o cálculo da matriz “inversa”, e também será apresentada a validade da proposta deste trabalho, pois nenhum artigo mencionado faz uso das cotas inferiores e superiores, como um meio de refinamento da resposta obtida via série de Neumann.

1.1 *Revisão Bibliográfica*

A presente seção apresenta diversos artigos publicados, que utilizaram a série de Neumann, como uma alternativa eficiente para a solução de vários problemas abordados, encontrados especificadamente na engenharia. Além de fazer uma apresentação mais formal a respeito da série de Neumann.

A série de Neumann para um operador linear definido em dimensão finita, $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, propõe que a inversa desse operador seja representada por uma série formada, por composições de um operador $\mathcal{P}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, relacionado com o operador " \mathcal{A} ". Conforme mencionado na introdução, os trabalhos que utilizam a série de Neumann têm como objetivo a redução do custo computacional, pois a inversa do operador é aproximada pelo truncamento dessa série. O número de operações realizadas por tal aproximação é menor do que as operações necessárias para obter a solução já aproximada do sistema linear, pois computacionalmente o que ocorre é a obtenção da matriz inversa, através da utilização de algum método iterativo, Golub, e Van Loan (2012). Utilizando-se a série de Neumann em problemas de engenharia, destacam-se os seguintes trabalhos: Araújo, e Awruch (1994) obtiveram a resposta de problemas estruturais estáticos não lineares e dinâmicos,

com variabilidade randômica nas propriedades mecânicas; Chakraborty, e Dey (1996) obtiveram o valor esperado e variância do processo estocástico de resposta para problemas estruturais com incerteza sobre a geometria e propriedades mecânicas das estruturas e dos parâmetros de rigidez de uma fundação; Chakraborty, e Dey (1998) formularam o problema dinâmico de flexão de vigas curvas, no domínio da frequência de estruturas com incerteza sobre os parâmetros de rigidez; Chakrabort, e Sarkar (2000) estimam os momentos estatísticos do processo estocástico de deslocamento transversal de vigas curvas apoiada em fundação de Winkler; Chakraborty, e Bhattacharyya (2002) determinaram as estatísticas para problemas tridimensionais de elasticidade linear cujas as propriedades elásticas foram representadas por um processo estocástico gaussiano; Schevenels, e Lombaert, e Degrande, e Clouteau (2007) comparam uma metodologia proposta com a série de Neumann, para o caso contínuo, em um problema de propagação de ondas em uma viga infinita apoiada em uma fundação de Winkler, com incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação; Lei, e Qiu (2000) aplicaram a série de Neumann para a análise da propagação da incerteza através da equação de movimento de estruturas. Em todos os trabalhos citados, a série de Neumann é utilizada, somente, como uma alternativa mais eficiente para solução do sistema linear, porém não são observadas as restrições e as propriedades em relação à convergência da série de Neumann. Por exemplo, nenhum trabalho faz uso da estimativa da soma da série de Neumann. A proposta apresentada nesse trabalho faz uso dessa estimativa. Além disso, não se tem registro da aplicação da série de Neumann, para avaliar a propagação da incerteza, em um modelo de viga apoiada em uma fundação de Pasternak.

A próxima seção apresenta os objetivos traçados por este trabalho, tendo em vista o que já foi apresentado na introdução, e também do que foi estudado dos artigos anteriores.

1.2 **Objetivos**

O presente trabalho tem por objetivos:

- Estabelecer uma metodologia para a resolução do problema de flexão estocástica de vigas em uma fundação do tipo Pasternak, contando com etapas tais como: prova da existência e unicidade do problema, e fundamentação teórica sobre os seguintes itens: representação da incerteza, aplicação do método de Galerkin, série de Neumann, cotas inferiores e superiores, e estimativas para cálculo de norma de matrizes, e dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.
- Desenvolver um código computacional, que resolva o problema de flexão estocástica de viga sobre uma fundação de Pasternak, de tal forma que o resultado obtido, seja consistente, e eficiente. As estimativas para os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem (Valor médio de deslocamento e correlação) obtidos através, dos resultados gerados pelo método que faz uso da série de Neumann, e que são aprimorados, pela aplicação das cotas inferiores e superiores deverão convergir com os resultados obtidos através da simulação de Monte Carlo direto. O código computacional, portanto servirá como uma alternativa, pois espera-se que além de obter um valor de deslocamento muito próximo ao método tradicional, o faça em um tempo de processamento menor.

1.3 ***Estrutura do trabalho***

O presente capítulo apresenta a introdução ao problema de flexão estocástica de uma viga sobre uma fundação do tipo Pasternak, logo a seguir é realizada a apresentação de trabalhos anteriores que fazem uso da série de Neumann. A partir da revisão bibliográfica, foram traçados os objetivos do trabalho.

O capítulo 2 apresenta um estudo teórico dos modelos de fundação, mais utilizados, para descrever o comportamento de deslocamento do solo frente a um carregamento. Neste capítulo são apresentados os modelos de fundação do tipo Winkler, e do tipo Pasternak, juntamente com as limitações, vantagens e desvantagens, que cada modelo de fundação apresenta.

O capítulo 3 apresenta a formulação matemática do problema, juntamente com as hipóteses, necessárias para a aplicação da existência e unicidade, do problema de flexão estocástica. Também é apresentada a aplicação do teorema de Lax-Milgram, sobre a forma variacional do problema, o que prova a existência e unicidade do problema estudado.

O capítulo 4 apresenta a fundamentação matemática teórica dos seguintes assuntos: representação da incerteza, método de Galerkin, série de Neumann, cotas inferiores e superiores, apresentação das diversas definições para cálculo de norma de matriz, e as estimativas das normas de matrizes. Fechando o capítulo são apresentadas as definições, de estimativa dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, denominados também, por estimativa do valor esperado e de correlação.

O capítulo 5 apresenta os resultados numéricos, do problema de flexão estocástica de uma viga, sobre uma fundação do tipo Pasternak. No primeiro exemplo é analisada a resolução do problema, via série de Neumann, expandida até o segundo termo. É analisada tanto a convergência, de todas as definições de cotas, em relação à resposta obtida via simulação de Monte Carlo direta, quanto o tempo de processamento computacional gasto, por estas cotas. Se o processo se mostrar inviável, é realizado um segundo exemplo na qual a série de Neumann é expandida somente até o primeiro termo.

O capítulo 6 é apresenta todas as conclusões possíveis, oriundas do capítulo anterior, bem como uma sugestão para trabalhos futuros.

A fim de estabelecer de forma sólida, a solução do problema a ser abordado, que é o problema de flexão estocástica de uma viga, é necessária uma fundamentação teórica a respeito dos modelos de fundação.

No próximo capítulo será feito um estudo, a cerca dos modelos de fundação, mais comuns, em problemas de engenharia.

2 OS MODELOS DE FUNDAÇÃO

O presente capítulo apresenta os modelos de fundação sobre uma base elástica, que são utilizados neste trabalho, são eles: O modelo de Winkler, e o modelo de Pasternak.

O modelo clássico de Bernoulli-Euler para estudo de flexão de vigas descreve o deslocamento transversal sofrido pela viga quando submetido a um carregamento, presença de força local, e/ou momento. Este modelo é indicado em vigas cujas características geométricas obedecem a relação cujo o vão da viga é muitas vezes maior, que a maior dimensão característica da seção transversal da viga.

Aplicações mais específicas, tais como: tubulações, e trilhos de ferrovias devem ser levadas em conta as interações mecânicas entre o modelo de viga, e a resistência da fundação a flexão.

A viga pode ser analisada como estrutura que se encontra em contato com meio contínuo. E como forma de simplificação o meio sobre a qual a viga encontra-se em contato pode ser considerado como uma base elástica.

As seções 2.1 e 2.2 apresentam os modelos de tipo Winkler e Pasternak respectivamente, sendo que para cada modelo é demonstrado como o solo se comporta fisicamente frente a um carregamento, deduzindo desta forma, a formulação matemática oriunda, do modelo físico.

2.1 *O modelo de fundação do tipo Winkler*

O modelo do tipo Winkler (1867), primeiro modelo proposto, conta com um único parâmetro. O modelo é também conhecido como fundação sobre uma base elástica. Neste modelo, as partículas que compõem a fundação atuam, fisicamente, como molas lineares e desconectadas entre si, o que implica a presença de deformação do solo somente onde o carregamento existe. A força reativa inerente da fundação é proporcional ao campo de deslocamento, sofrido pela superfície de apoio.

A relação linear entre a força aplicada e o deslocamento, e a descrição do solo como meio contínuo, são simplificações que tornam a solução da equação diferencial originada do problema de flexão, uma resposta mais viável de ser obtida, o mesmo não pode ser dito de um caso de não linearidade. Portanto o comportamento de deformação do solo, descrito conforme o modelo de Winkler tem por objetivo, contar com a influência do solo sobre a flexão da viga, e a simplificação da solução do problema de flexão, considerando o meio, como uma base elástica.

A equação (1) representa o deslocamento vertical sofrido pelo solo, quando descrito conforme o modelo de fundação do tipo Winkler:

$$q = (\kappa_w \cdot u)(x), \forall x \in (0, l); \quad (1)$$

sendo, q carregamento medido em $\left[\frac{N}{m}\right]$, κ_w módulo de elasticidade do solo descrito pelo modelo do tipo Winkler, e u deslocamento sofrido pelo solo medido em $[m]$.

A constante, κ_w , é o módulo de elasticidade do solo e pode assumir valor constante devido à homogeneidade das partículas, tornado o problema de deslocamento de viga sobre uma base elástica descrita por tal modelo, um problema relativamente simples. O valor para o módulo de elasticidade pode ser obtida através de ensaios, sobre qual tipo de solo se pretende estudar.

A figura 2-1 mostra um o modelo físico que descreve o comportamento do solo, quando descrito conforme o modelo do tipo Winkler:

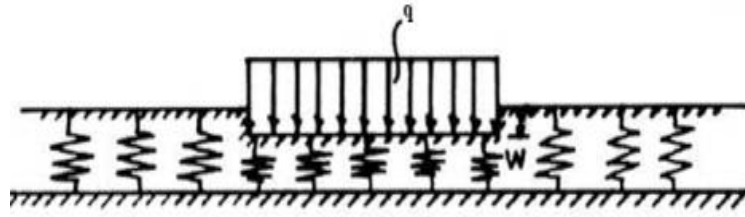


Figura 2-1 Modelo físico de uma fundação do tipo Winkler.

A figura 2-1 mostra a descontinuidade, presente entre a região carregada e a região não carregada.

A fim de contornar, a existência da descontinuidade presente na interface entre a região carregada da região não carregada, tornando o problema mais realístico possível, será apresentado um outro modelo que também descreve o deslocamento sofrido pela fundação. Porém, este novo modelo leva em consideração a interferência que a região carregada, opera sobre sua vizinhança, que está livre de carregamento. Este modelo foi proposto por Pasternak (1954).

2.2 *O modelo de fundação do tipo Pasternak*

O modelo de Pasternak (1954) é descrito de tal forma que: considerando o solo conforme uma base elástica, uma das extremidades da mola está fixa a uma camada incompressível, e outra extremidade está ligada a uma camada que sofre cisalhamento, conforme é representado na Figura 2-2.

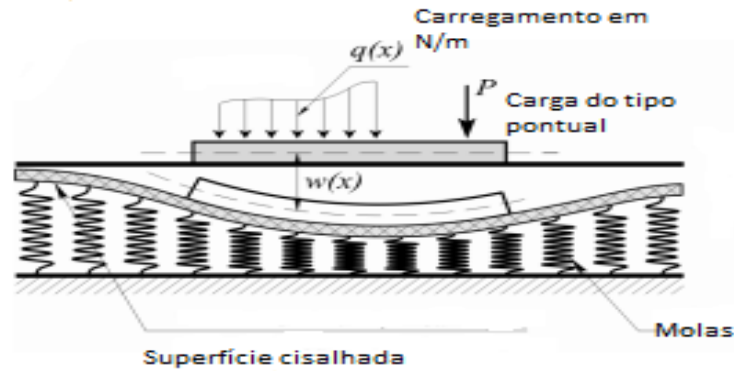


Figura 2-2 Modelo de Fundação do tipo Pasternak

A Figura 2.2 representa o deslocamento vertical do solo, quando descrito como uma fundação do tipo Pasternak.

O modelo físico de uma fundação do tipo de Pasternak descreve a força de reação do solo, sobre a viga, devido ao carregamento, como soma dos efeitos da compressão, sofrida pelas partículas, juntamente com, outra parcela devido ao cisalhamento presente nas camadas que compõe o solo. Sendo matematicamente descrita conforme Eq.(2):

$$q = -\frac{d}{dx}\left(\kappa_p \cdot \frac{du}{dx}\right)(x) + (\kappa_w \cdot u)(x), \forall x \in (0, l); \quad (2)$$

sendo, κ_p coeficiente de rigidez relacionado ao comportamento de cisalhamento do solo, e l o vão da viga.

Nota-se na equação (2), a inclusão do modelo de fundação do tipo Winkler, devido ao comportamento elástico do solo. A derivada de segunda ordem presente na Eq. (2) garante um perfil de deslocamento sofrido pelo solo sob um formato geométrico de curvatura. Este tipo de deslocamento é caracterizado pelo escorregamento das camadas que são adjacentes entre si, evidenciando um comportamento de cisalhamento.

Embora os parâmetros que compõe a modelagem da fundação do tipo de Pasternak, sejam muitas vezes determinados como valores conhecidos, descobertos

em testes de laboratório, e/ou retirados da própria bibliografia. A incerteza dos valores deve ser levada em consideração, para obtenção de respostas mais realísticas.

No próximo capítulo será abordada, a formulação forte do problema de deslocamento de uma viga Euler-Bernoulli, incluindo a influência do solo no deslocamento da viga, conforme já estudado no presente capítulo.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

O presente capítulo tem por objetivo fazer um estudo da existência e unicidade do problema de flexão estocástica. Primeiramente será apresentada a formulação forte do problema, contando com a influência da rigidez do solo, na resposta de deslocamento da viga.

A formulação forte exige que a solução do problema, seja uma equação que possua derivadas bem definidas, até quarta ordem, portanto tem-se um conjunto restrito de funções candidatas a resposta do problema. A fim de aumentar o número de funções candidatas, diminui-se a ordem de exigência do problema, passando de uma formulação forte para um problema variacional. Pois o conjunto das funções diferenciáveis, até segunda ordem, é mais extenso. E é a partir do problema variacional, que será feita a prova de existência e unicidade. Uma vez provado que o problema variacional, possui solução, e esta solução é única, é aplicado o método de Galerkin, para obter uma solução aproximada do problema abordado.

A seção a seguir apresenta a formulação forte do problema, e logo em seguida as hipóteses, necessárias para a aplicação da versão estocástica do lema de Lax-Milgram, que comprova a existência e unicidade do problema.

3.1 *Formulação forte do problema, e apresentação das hipóteses necessárias para a prova da Existência e Unicidade.*

O problema de flexão estocástica para uma viga apoiada em fundação de Pasternak é definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u \in H^2((\Omega, \mathcal{F}, P); C^4(0, l)), \text{ tal que,} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\kappa_P \frac{du}{dx} \right) + \kappa_W u = q, \forall (x, \omega) \in (0, l) \times \Omega; \\ u(0, \omega) = u(l, \omega) = 0; \\ \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{(0, \omega)} = \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{(l, \omega)} = 0, \quad \forall \omega \in \Omega; \end{array} \right. \quad (3)$$

sendo, E módulo de Young, I momento de inércia de área, Ω o espaço amostral e κ_P e κ_W são os coeficientes de elasticidade do solo descritos pelos modelos de Pasternak e Winkler, respectivamente, u é o deslocamento transversal da viga e q é o carregamento mecânico. O produto EI denota-se como coeficiente de rigidez a flexão. Fazendo-se $\kappa_P = 0$, na Eq. (2), tem-se o problema de flexão de viga apoiada em fundação de Winkler. A existência e unicidade do problema definido na Eq. (3) requerem que sejam consideradas as seguintes hipóteses sobre os coeficientes de rigidez à flexão e da fundação e o termo de carregamento:

$$\text{H1: } \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}^+ : P\left(\omega \in \Omega : EI(x, \omega) \in [\underline{a}, \bar{a}], \forall x \in [0, l]\right) = 1; \\ \exists \underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}^+ : P\left(\omega \in \Omega : \kappa_P(x, \omega) \in [\underline{b}, \bar{b}], \forall x \in [0, l]\right) = 1; \\ \exists \underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}^+ : P\left(\omega \in \Omega : \kappa_W(x, \omega) \in [\underline{c}, \bar{c}], \forall x \in [0, l]\right) = 1. \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\text{H2: } q \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; L^2(0, l)).$$

A hipótese H1 assegura que os coeficientes de rigidez à flexão e da fundação sejam positivos definidos, e uniformemente limitados em probabilidade, uma vez que a matriz de rigidez deve obrigatoriamente admitir inversa. A hipótese H2 assegura a limitação, no sentido de Lebesgue, Cabral (2013), sobre o termo de carregamento. Estas hipóteses são necessárias para a aplicação do lema estocástico de Lax-

Milgram, Babuska, e Tempone, e Zouraris (2005); Brenner, e Scott (1994), utilizado para garantir a existência e unicidade das soluções, conforme será mostrado na próxima seção.

3.2 Existência e Unicidade

A presente seção apresenta a prova da existência e a unicidade do problema de flexão estocástica de uma viga apoiada em uma fundação de Pasternak, com incerteza nos coeficientes de rigidez, tanto da viga, quanto da fundação. A fim de provar a existência e unicidade, é necessário definir-se o problema variacional associado à formulação forte definido pela Eq. (3). No apêndice A, é demonstrado o desenvolvimento necessário para a obtenção do problema variacional, a partir da formulação forte definido pela Eq.(3). Seja $\{\Lambda_i\}_{i=1}^N$, com $\Lambda_i \subset \Omega, \forall i \in \{1, \dots, N\}$, com $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $\{\omega_1, \dots, \omega_{N_i}\} \subset \Lambda_i$, um conjunto de eventos elementares. A partir disso, define-se $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_N = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i$. Seja $\{EI(x, \omega_i), \kappa_P(x, \omega'_i), \kappa_W(x, \omega''_i)\}$, a i -ésima amostra estrutural dos coeficientes de rigidez da viga e fundação. Swift, e Rao (2010), propôs um lema tal que: tem-se que a i -ésima realização do processo estocástico de deslocamento dependerá de $\{\omega_i, \omega'_i, \omega''_i\}$, $(u = u(x, \omega_i, \omega'_i, \omega''_i))$. Em vista disso, o problema variacional (PV), para i -ésima a amostra estrutural, é definido em $V = H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ como,

$$\begin{cases} \text{Determinar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V. \end{cases} \quad (5)$$

sendo $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, a forma bilinear dada por,

$$a(u, v) = \int_0^l \left(EI(x, \omega_i) \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} + \kappa_P(x, \omega'_i) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + \kappa_W(x, \omega''_i) uv \right) dx, \quad (6)$$

e $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear,

$$f(v) = \int_0^l (qv)(x) dx. \quad (7)$$

A partir das definições apresentadas nas Eqs. (6) e (7), para i -ésima amostra estrutural dos coeficientes de rigidez da viga e fundação, assegura-se, através dos teoremas apresentados a seguir, a existência e unicidade de soluções dos problemas definidos nas Eqs. (3) e (5).

Teorema (Existência e Unicidade): Sejam EI , κ_p , κ_w e q , tais que satisfaçam as hipóteses H1 e H2, então, para a i -ésima amostra estrutural dos coeficientes, $\{EI(x, \omega_i), \kappa_p(x, \omega'_i), \kappa_w(x, \omega''_i)\}$, que implica em uma função amostral de deslocamento $u = u(x, \omega_i, \omega'_i, \omega''_i)$, garante que existe solução. Portanto para o problema definido pela Eq. (5), existe solução, e a solução é única em H^2 , ver apêndice B.

Prova: Observa-se que $\Lambda \subset \Omega$ e da hipótese (H1), tem-se que $\{EI(x, \omega_i), \kappa_p(x, \omega'_i), \kappa_w(x, \omega''_i)\}$, a i -ésima amostra estrutural, fixada, é limitada em probabilidade. A prova da existência e unicidade da solução da Eq.(5) é obtida mediante a utilização do lema de Lax-Milgram; Babuska, e Tempone, e Zouraris (2005); Brenner, e Scott (1994). Para tanto é necessário demonstrar que a forma bilinear da Eq. (6), originária do problema definido na Eq. (5), é contínua e coerciva.

A fim de que se possa provar a continuidade e coercividade do problema variacional, é necessário à utilização dos seguintes itens: hipóteses da probabilidade limitada (H1), o teorema da desigualdade de Cauchy-Schwartz, Yosida (1978), e as comparações de tamanho simples. No apêndice B é apresentada a definição da desigualdade de Cauchy-Schwartz.

A seguir é provado que o problema variacional, apresenta continuidade e coercividade. Duas exigências suficientes e necessárias para que o problema variacional apresente solução, e que esta solução seja única :

a. continuidade

$$|a(u, v)| \leq \bar{c} \left[\int_0^l u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^l v^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \bar{b} \left[\int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ + \bar{a} \left[\int_0^l \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^l \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \|u\|_v \|v\|_v,$$

sendo: $C = 3 \cdot \max\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$;

b. coercividade

$$a(u, u) \geq \underline{c} \int_0^l u^2 dx + \underline{b} \int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \underline{a} \int_0^l \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx \geq c \|u\|_v^2$$

sendo $c = \min\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$.

A Eq. (7) infere que a função $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, é linear e bem definida, assim tendo em vista o lema de Lax-Milgram é garantido que o problema definido pela Eq. (3) tem uma única solução.

A partir da prova de existência e unicidade, já apresentada, será válido realizar a escolha adequada, do conjunto de funções que será utilizado no método de Galerkin, para obtenção de aproximações numéricas, das funções amostrais do processo de flexão estocástica.

No próximo capítulo serão abordadas as ferramentas matemáticas necessárias para encontrar a solução do problema de flexão estocástica, dado que o presente capítulo já provou que o problema possui solução, e esta solução é única.

4 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA ESTOCÁSTICO

O presente capítulo tem por objetivo, explorar algumas das ferramentas matemáticas possíveis, para a solução do problema de flexão estocástica, de uma viga sobre uma fundação do tipo Pasternak. Primeiramente, será devidamente apresentada, a formulação matemática da representação da incerteza, dos coeficientes de rigidez, tanto da viga, quanto da fundação. Lembrando que estes coeficientes estão associados aos operadores diferenciais, que atuam sobre as funções testes.

O método de Galerkin é apresentado logo a seguir, pois é através deste método que, a solução aproximada do problema propriamente dito, é obtida. A solução do sistema linear obtido pela aplicação do método de Galerkin é dependente da inversa da matriz de rigidez. E como o presente trabalho, tem por objetivo, evitar o custo computacional dispendido pelo cálculo dessa matriz, é apresentada em seguida, a série de Neumann.

A série de Neumann serve basicamente como uma alternativa para o cálculo computacional da matriz “inversa” de rigidez, pois ela aproxima os valores, dos elementos dessa matriz. Outra peyorativa do trabalho é o refino da solução do problema, quando este faz uso da série de Neumann. Este refino é realizado através da utilização das cotas inferiores e superiores.

As definições das cotas inferiores e superiores, também serão devidamente abordadas neste capítulo. As cotas são dependentes, do cálculo de norma de matriz. Para o cálculo da norma de matriz, são apresentadas cinco definições distintas. Os valores obtidos das normas de matrizes, são aprimorados, em relação à norma 2, ver apêndice B (definições 4, e 6), através da aplicação das estimativa das normas de matrizes.

Finalmente são definidas as estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, bem como a definição de função de desvios relativos das estimativas obtidas via cotas inferiores e superiores, em relação à simulação de Monte Carlo Direta.

4.1 Representação da incerteza

Na maioria dos problemas de engenharia, as informações estatísticas completas sobre as incertezas não está disponível. Às vezes, os momentos de primeira e segunda são a únicas informações conhecidas. A função de distribuição de probabilidade é definida com base na experiência ou heurísticamente. A fim de aplicar o método de Galerkin, uma representação explícita da incerteza é necessária.

A incerteza será representada em termos de um conjunto finito de variáveis aleatórias:

$$\mathfrak{g}(x, \omega) = \mathfrak{g}(x, \xi(\omega)) = \mathfrak{g}(x, \xi_1(\omega), \dots, \xi_N(\omega)). \quad (8)$$

No problema de flexão de viga Euler-Bernoulli considerado no presente trabalho, a incerteza estará presente nos coeficientes de rigidez à flexão da viga, descrito na equação pelo termo EI , e nos módulos de elasticidade da fundação, k_w e k_p . Estes termos são modelados via parametrização de um processo estocástico. Os termos sobre o qual recai a incerteza são definidos a partir de uma combinação linear de funções deterministas e variáveis aleatórias, de acordo com Grigoriu (1995):

$$\mathfrak{g}(x, \omega) = \mu_g(x) + \sum_{i=1}^N \delta_i(x) \xi_i(\omega) = \mu_g(x) + \Delta^t(x) \cdot \xi(\omega), \quad (9)$$

sendo $\mu_g(\cdot)$ é o valor esperado do processo randômico. E $\xi(\omega) = \{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^N$ é um vetor de variáveis randômicas independentes, de tal forma que:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\xi_i] = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\ P(\omega \in \Omega : \xi_i(\omega) \in \Gamma_i) = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{cases} \quad (10)$$

sendo $\mathbb{E}[\cdot]$ é o valor operador esperado. Na Eq. (8), Γ_i é a imagem da variável randômica ξ_i , isto é, $\Gamma_i = \xi_i(\Omega)$, com $\Gamma_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, $|\Gamma_i| = |b_i - a_i| < \infty, \forall i \in \{1, \dots, N\}$, limitada. Desta forma, a imagem do vetor randômico $\xi: \Omega \rightarrow \Gamma$, com $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$, e os termos de $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$, é dado por $\Gamma = \prod_{i=1}^N \Gamma_i$.

4.2 Método de Galerkin

O método de Galerkin é aplicado ao problema de flexão de vigas de Euler-Bernoulli apoiadas em fundação do tipo Pasternak com incerteza sobre os coeficientes de rigidez a flexão e da fundação. As soluções do processo estocástico deslocamento são da seguinte forma:

$$u(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\xi(\omega)) \varphi_i(x), \quad (11)$$

sendo $u_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}$ as funções coordenadas e $\varphi_i \in V$ as funções testes. Em termos práticos serão obtidas soluções numéricas para o problema variacional definido na Eq. (5).

A proposta do método de Galerkin é obter o espaço das soluções numéricas aproximadas para a k -ésima realização, a partir do truncamento da Eq. (11), no M -ésimo. Portanto as soluções numéricas aproximadas possuem a seguinte forma,

$$u_M(x, \xi_k) = \sum_{i=1}^M u_i(\xi_k) \varphi_i(x) = (\mathbf{U}(\xi_k)) \cdot \Phi(x). \quad (12)$$

Substituindo-se na Eq. (5) a Eq. (12) chega-se ao problema variacional aproximado, que consiste em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \{u_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M \text{ tal que,} \\ \sum_{i=1}^M a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = \langle f, \varphi_j \rangle, \quad \forall \varphi_j \in V_M. \end{array} \right. \quad (13)$$

A solução do problema variacional aproximado, Eq. (13), consiste em determinar os coeficientes da combinação linear expressa na Eq. (12). Utilizando-se a representação vetor-matriz pode-se formular o problema variacional aproximado pela solução do sistema linear de equações algébricas,

$$\mathbf{K}(\xi_k) \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (14)$$

sendo $\mathbf{K} \in M_M(\mathbb{R})$ a matriz de rigidez, \mathbf{U} o vetor de deslocamento e \mathbf{F} o vetor de carregamento mecânico. Os elementos da matriz de rigidez, e o vetor de carregamento mecânico são expressos respectivamente, conforme descrito pelas Eq.(15), e Eq.(16):

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = [k_{ij}]_{M \times M}, \quad k_{ij} = & \int_0^L (\kappa_W(x, \omega_k) \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j) \cdot dx \\ & + \int_0^L \left(\kappa_P(x, \omega_k) \cdot \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} \right) \cdot dx \\ & + \int_0^L \left(EI(x, \omega_k) \cdot \frac{d^2\varphi_i}{dx^2} \frac{d^2\varphi_j}{dx^2} \right) \cdot dx, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{F} = \{f_i\}_{i=1}^M, \quad f_i = \int_0^L (f \cdot \varphi_j) \cdot dx. \quad (16)$$

O método de Monte Carlo gera variáveis randômicas, as quais determinam incerteza em relação aos coeficientes de rigidez tanto da viga quanto da fundação. Ao substituir a aproximação numérica para a k-ésima função amostral do processo

estocástico de deslocamento, na Eq.(12), e no (PV), Eq.(5), gera-se um sistema linear de equações algébricas cuja representação é definida como:

$$\mathbf{K}(\xi_k)\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{H}(\xi_k)\mathbf{F}, \quad (17)$$

sendo $\mathbf{K}(\xi_k) \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ a matriz de coeficientes ou de rigidez, $\mathbf{H}(\xi_k) = (\mathbf{K}(\xi_k))^{-1}$, $\mathbf{H}(\xi_k) = [h_{ij}(\xi_k)]_{m \times m}$ e $\mathbf{U} = [u_1(\xi_k), \dots, u_m(\xi_k)]^T$. A i -ésima entrada do vetor $\mathbf{U}(\xi_k)$ é dada por:

$$u_i(\xi_k) = \sum_{j=1}^m h_{ij}(\xi_k) f_j. \quad (18)$$

A partir das Eqs. (12) e (18) a aproximação numérica aproximada para a função amostral do processo estocástico de deslocamento transversal, $u_m = u_m(x, \xi_k)$, é expressa por,

$$u_m(x, \xi_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (h_{ij}(\xi_k) f_j) \phi_i(x) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{H}(\xi_k) \Phi(x)). \quad (19)$$

O método de simulação de Monte Carlo implicará que, as estimativas para os momentos estatísticos do processo estocástico de deslocamento, são obtidas a partir do conjunto das realizações do sistema expresso na Eq. (17). Conforme sugere a Eq. (19), para se determinar a realização do sistema é necessário calcular-se a inversa aproximada da matriz de coeficientes ($\mathbf{H}(\cdot)$). É importante mencionar, que não se realiza a determinação da inversa, pois envolve um alto custo computacional, recorre-se a métodos iterativos, tais como Jacobi ou Gradientes Conjugados, pois apresentam maior eficiência. Apesar disso, dependendo da natureza do problema (não linearidades) e do número de variáveis randômicas, o

processo de simulação de Monte Carlo direto pode-se tornar proibitivo, em decorrência do número de operações que são realizadas computacionalmente. Sob certas condições, uma alternativa para redução do esforço computacional, é a utilização da série de Neumann, dentro da simulação de Monte Carlo, evitando o cálculo direto da matriz “inversa” de rigidez, o que é característico da simulação de Monte Carlo direto.

A próxima seção apresenta formalmente a série de Neumann, e as limitações a respeito de sua aplicabilidade. A aplicação da série de Neumann requer a decomposição da matriz inversa de rigidez, em duas matrizes, uma correspondente aos valores médios fixos dos coeficientes de rigidez, e uma segunda matriz, cujos elementos são funções, das variáveis randômicas, advindas do processo estocástico. As variáveis do tipo randômicas assumem os valores gerados pela simulação de Monte Carlo, portanto tanto um método, quanto o outro são dependentes da simulação de Monte Carlo.

4.3 *Série de Neumann*

A versão da série de Neumann que será utilizada nesse trabalho, é para operadores lineares definidos em espaços de dimensão finita. Neste caso, o objeto matemático representativo do operador é uma matriz. Uma vez que os coeficientes que compõe a equação diferencial de deslocamento da viga são modelados via um processo estocástico, descrito conforme a Eq.(9), e devido a inexistência de perda de generalidade, assume-se para a k -ésima amostra estrutural dos coeficientes de rigidez da viga e da fundação, que a matriz de rigidez, Eq. (17), admite a seguinte decomposição,

$$\mathbf{K}(\xi_k) = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}(\xi_k) \Rightarrow \mathbf{K}(\xi_k) = \mathbf{K}_0(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k)), \quad (20)$$

sendo $\mathbf{P}(\xi_k) = (\mathbf{K}_0)^{-1} \Delta\mathbf{K}(\xi_k)$, \mathbf{I} matriz identidade, \mathbf{K}_0 parcela da matriz de rigidez cujo os elementos são associados aos valores esperados dos coeficientes de rigidez, $\Delta\mathbf{K}(\xi_k)$ parcela da matriz de rigidez cujo os elementos são dependentes das

variáveis randômicas gerados pela simulação de Monte Carlo. Formalmente, conforme as Eqs. (17) e (20), a solução $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\xi_k)$ é dada por,

$$\mathbf{U}(\xi_k) = (\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k))^{-1} \mathbf{U}_0, \quad (21)$$

sendo $\mathbf{U}_0 = (\mathbf{K}_0)^{-1} \mathbf{F}$, $(\mathbf{U}_0 = [u_1^0, \dots, u_m^0]^T)$. Se $0 < \|\mathbf{P}(\xi_k)\| < 1$ então $(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k))^{-1}$ existe e pode ser representada através da seguinte série, Golub, e Van Loan (2012),

$$(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k))^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{P}(\xi_k))^i, \quad (22)$$

e

$$\|(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k))^{-1}\| = \frac{1}{1 - \|\mathbf{P}(\xi_k)\|}. \quad (23)$$

As Eqs (20) e (22) inferem que,

$$(\mathbf{K}(\xi_k))^{-1} = (\mathbf{K}_0 (\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k)))^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{P}(\xi_k))^i (\mathbf{K}_0)^{-1}. \quad (24)$$

Substituindo-se a Eq. (24) na Eq. (19) obtém-se,

$$u_m(x, \xi_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^{\infty} p_{ij}^{(q)}(\xi_k) u_j^0 \varphi_i(x) = (\mathbf{U}_0)^T \sum_{q=0}^{\infty} (\mathbf{P}(\xi_k))^q \Phi(x), \quad (25)$$

sendo que,

$$(\mathbf{P}(\xi_k))^q = [P_{ij}^{(q)}(\xi_k)]_{m \times m}. \quad (26)$$

É importante observar, que para obter as soluções numéricas aproximadas, é necessário o truncamento da série expressa na Eq. (25).

4.4 Cotas inferiores e superiores para a realização do processo estocástico de resposta

A atual seção apresenta a estratégia proposta, baseada na utilização da série de Neumann e de resultados clássicos de álgebra linear, para o estabelecimento de cotas inferiores e superiores para as realizações do processo estocástico de deslocamento transversal. Se o conjunto das amostras estruturais $\{EI(x, \omega_i), \kappa_p(x, \omega'_i), \kappa_w(x, \omega''_i)\}_{i=1}^N$ forem tais que $0 < \|\mathbf{P}(\omega_i)\| < 1, \forall i \in \{1, \dots, N\}$, pode-se representar as aproximações numéricas das realizações do processo estocástico de deslocamento, em termos da série de Neumann. Fazendo-se o truncamento, no N -ésimo termo da série expressa na Eq. (25), a k -ésima realização do processo estocástico de deslocamento transversal é dada por,

$$u_{mn}(x, \xi_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^n P_{ij}^{(q)}(\xi_k) u_j^0 \phi_i(x) = (\mathbf{U}_0)^T \sum_{q=0}^n (\mathbf{P}(\xi_k))^q \Phi(x). \quad (27)$$

A k -ésima realização do processo estocástico de deslocamento transversal, com $x \in [0, l]$, fixado, a distância entre as soluções aproximadas obtidas por simulação de Monte Carlo direta, Eq. (19), e pela série de Neumann, Eq. (27), pode-se ser estimado como segue,

$$|u_m(x, \xi_k) - u_{mn}(x, \xi_k)| \leq \sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathbf{P}(\xi_k)\|^q \|\mathbf{U}_0\| \|\Phi(x)\|. \quad (28)$$

Baseando-se nas propriedades da série de Neumann Eqs. (22) e (23), pode-se calcular o termo $\sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathbf{P}(\xi_k)\|^q$, uma vez que a condição $0 < \|\mathbf{P}(\xi_k)\| < 1$ é satisfeita,

$$\sum_{q=n+1}^{\infty} \|\mathbf{P}(\xi_k)\|^q = \frac{\|\mathbf{P}(\xi_k)\|^{n+1}}{1 - \|\mathbf{P}(\xi_k)\|}. \quad (29)$$

Em vista disso, a estimativa para a Eq. (28) toma a seguinte forma,

$$|u_m(x, \xi_k) - u_{mn}(x, \xi_k)| \leq C(n, \xi_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\|, \quad (30)$$

sendo,

$$C(n, \xi_k) = \frac{\|\mathbf{P}(\xi_k)\|^{n+1}}{1 - \|\mathbf{P}(\xi_k)\|}, \quad (31)$$

um coeficiente que depende de "n" e $\|\mathbf{P}(\xi_k)\|$. Da Eq. (30) obtém-se as cotas inferior e superior, para a k-ésima realização do processo estocástico de deslocamento transversal

$$\alpha(x, \xi_k) \leq u_m(x, \xi_k) \leq \beta(x, \xi_k), \quad (32)$$

sendo $\alpha(\cdot, \cdot)$ e $\beta(\cdot, \cdot)$ as cotas inferior e superior, respectivamente, que são definidas como,

$$\begin{cases} \alpha(x, \xi_k) = u_{mn}(x, \xi_k) + \chi(n, \xi_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\|, \\ \beta(x, \xi_k) = u_{mn}(x, \xi_k) + \lambda(n, \xi_k) \|U_0\| \|\Phi(x)\|, \forall (x, \xi_k) \in (0, l) \times \Gamma; \end{cases} \quad (33)$$

sendo $\chi = -\lambda$ e $\lambda = C(n, \xi_k)$. Com essas funções, Eq. (33), é possível obter as estimativas dos momentos estatísticos das cotas inferior e superior para as realizações do processo estocástico de deslocamento transversal.

A determinação do coeficiente "λ", para cada realização, exige o cálculo de $\|\mathbf{P}(\xi_k)\|$. Tal avaliação, envolve alto custo computacional, uma vez que o próprio Matlab, subentende que $\|\mathbf{P}(\xi_k)\| = \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_2$, via de regra é o processo mais custoso computacionalmente, das definições para norma de matriz, inviabilizando a proposta, deste trabalho. Para contornar essa dificuldade, recorre-se a outras definições para cálculo de norma, para que logo em seguida seja efetuada a equivalência em relação à norma definida por $\|\mathbf{P}(\xi_k)\|_2$, Golub, e Van Loan (2012), ver apêndice B, conceitos para norma de matriz e equivalência.

As definições dos coeficientes "λ", apresentadas na Eq.(34 a, b, c, d e e), seguem justamente o que foi explicado no paragrafo anterior, ou seja, de que para cada conceito de norma de matriz, sua equivalência já está devidamente aplicada:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(n, \xi_k) = \frac{(\sqrt{m} \cdot \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_1)^{n+1}}{1 - \sqrt{m} \cdot \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_1}, \quad (34.a) \\ \lambda_2(n, \xi_k) = \frac{\|\mathbf{P}(\xi_k)\|_2^{n+1}}{1 - \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_2}, \quad (34.b) \\ \lambda_3(n, \xi_k) = \frac{(\sqrt{m} \cdot \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_\infty)^{n+1}}{1 - \sqrt{m} \cdot \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_\infty}, \quad (34.c) \\ \lambda_4(n, \xi_k) = \frac{m \cdot \left(\max_{i,j} |p_{ij}(\xi_k)|\right)^{n+1}}{1 - m \cdot \left(\max_{i,j} |p_{ij}(\xi_k)|\right)}, \quad (34.d) \\ \lambda_5(n, \xi_k) = \frac{\|\mathbf{P}(\xi_k)\|_F^{n+1}}{1 - \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_F}, \quad (34.e) \end{array} \right. \quad (34)$$

Desta forma, as cotas inferior e superior serão obtidas com a utilização das Eqs. (33) - (34), observando que os valores das normas das matrizes, são sempre majorados, afim de que se trabalhe em cima do maior erro possível, buscando um padrão mais conservativo de resposta. A Eq.(35) apresenta em notação indicial, as cotas inferiores e superiores, discriminadas, de acordo com a definição de norma de matriz, e sua respectiva equivalência.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i(x, \xi_k) = u_{mn}(x, \xi_k) + \chi_i(n, \xi_k) \|\mathbf{U}_0\| \|\Phi(x)\|, i = 1, \dots, 5; \\ \beta_i(x, \xi_k) = u_{mn}(x, \xi_k) + \lambda_i(n, \xi_k) \|\mathbf{U}_0\| \|\Phi(x)\|, \forall (x, \xi_k) \in (0, l) \times \Gamma, i = 1, \dots, 5. \end{array} \right. \quad (35)$$

As definições apresentadas nas Eqs. (34) e (35), para a determinação das cotas inferior e superior, propiciam uma redução no custo computacional. Na próxima seção serão apresentadas as definições matemáticas das estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, bem como a definição da função de desvio relativo.

4.5 Estimativas dos momentos estatísticos, e definição das funções de desvio.

As estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem (estimativa do valor esperado e da correlação), que são obtidas através de, um conjunto de realizações, definidas por: $\left(\left\{ u_m(x, \xi(\omega_j)) \right\}_{j=1}^N, \forall x \in [0, l] \right)$, originadas do processo de flexão estocástica, de uma viga com comprimento "l", são definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mu}_{u_m}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_m(x, \xi(\omega_j)), \forall x \in [0, l]; \\ \widehat{\mu}_{u_m}^{(2)}(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N u_m(x, \xi(\omega_j)) u_m(y, \xi(\omega_j)), \forall (x, y) \in [0, l]^2. \end{array} \right. \quad (36)$$

Substituindo-se as cotas expressas pela Eq. (35), nas estimativas definidas pela Eq. (36), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mu}_{\alpha_i}(x) \leq \widehat{\mu}_{u_m}(x) \leq \widehat{\mu}_{\beta_i}(x), \forall x \in [0, l], i = 1, \dots, 5; \\ \widehat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}(x, y) \leq \widehat{\mu}_{u_m}^{(2)}(x, y) \leq \widehat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}(x, y), \forall (x, y) \in [0, l]^2, i = 1, \dots, 5; \end{array} \right. \quad (37)$$

O método de simulação de Monte Carlo direto é utilizado para avaliar o desempenho das cotas inferiores e superiores.

Primeiramente são obtidas as estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, Eq. (36), das cotas inferiores e superiores do processo de flexão estocástica, e os valores dos momentos estatísticos obtidos via simulação de Monte Carlo direto.

Logo a seguir, o desempenho da utilização das cotas, é avaliado através do desvio observado entre as estimativas dos momentos estatísticos, gerado pelas cotas, em relação às estimativas, obtidas através do método da simulação de Monte

Carlo direto. Outro critério a ser avaliado é o custo computacional para obter as cotas, tendo como referência a simulação de Monte Carlo direta. Portanto faz-se necessário, definir as funções de desvio relativo dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem: $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(k)}}, \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(k)}} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, (valor esperado $k=1$ e correlação $k=2$), em relação as estimativas, derivadas da simulação de Monte Carlo direta.

$$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(k)}}(x) = \begin{cases} (100\%) \cdot \left[1 - \frac{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(k)}}{\hat{\mu}_m^{(k)}}(x) \right], & \forall x \in (0, l); \\ 0, & \forall x \in \{0, l\}, i = 1, \dots, 5; \end{cases} \quad (38.a)$$

$$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(k)}}(x) = \begin{cases} (100\%) \cdot \left[1 - \frac{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(k)}}{\hat{\mu}_m^{(k)}}(x) \right], & \forall x \in (0, l); \\ 0, & \forall x \in \{0, l\}, i = 1, \dots, 5. \end{cases} \quad (38.b)$$

No próximo capítulo, será abordado o exemplo numérico, a fim de validar a proposta deste trabalho, que é a substituição do cálculo da matriz “inversa”, pela série de Neumann.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

O presente capítulo apresenta os resultados numéricos para o problema de flexão de viga do tipo Euler-Bernoulli. Na próxima seção, serão estabelecidos, os critérios necessários para avaliar, a proposta deste presente trabalho, bem como, os aspectos geométricos da viga.

5.1 Introdução

A fim de avaliar o problema de flexão estocástica da viga, serão apresentados dois exemplos, dependentes dos números de termos expandidos pela série de Neumann. Pois o trabalho baseia-se na técnica da tentativa e erro, na qual os critérios, que determinam a ordem da série de Neumann, são: a convergência das cotas em relação à resposta obtida via simulação de Monte Carlo direta e o tempo de processamento necessário, para a obtenção destas.

De acordo com a Eq.(39), e tendo em vista a Eq.(22), é observado que parcela da matriz “inversa” de rigidez, dependente do processo estocástico, pode ter seu valor aproximado através da aplicação da série de Neumann truncada. O valor aproximado desta matriz é definido por:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k))^{-1} \cong \sum_{i=0}^n (\mathbf{P}(\xi_k))^i \quad (39)$$

No primeiro exemplo a série de Neumann, é expandida até ordem " $n=1$ ", Eq.(39). Portanto o cálculo da matriz $(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k))^{-1}$, é aproximado via série de Neumann até o segundo termo. Observa-se que os valores dos elementos desta matriz aproximada são dependentes das variáveis randômicas, gerado pelo processo estocástico. E devido a este comportamento, o primeiro exemplo será denominado por Monte Carlo-Neumann.

No segundo exemplo a série de Neumann é expandida até ordem " $n=0$ ". A série de Neumann, expandida somente até o primeiro termo, faz com que o cálculo

da matriz $(\mathbf{I} + \mathbf{P}(\xi_k))^{-1}$ assumam o valor da matriz identidade, deixando sob a responsabilidade das cotas inferiores e superiores, a aproximação mais acurada da resposta do problema de flexão estocástica, conforme observado pela Eq.(28).

Ambos os exemplos são compostos por três casos, sendo que para cada um deles, a incerteza está presente em:

- Caso A) Coeficiente de rigidez à flexão da viga (EI).
- Caso B) Coeficiente de rigidez da fundação, conforme descrito pelo modelo tipo Pasternak (κ_p).
- Caso C) Coeficiente de rigidez da fundação, conforme descrito pelo modelo tipo Winkler (κ_w).

5.1.1 *Caracterização física da viga, e critério de parada.*

A modelagem da incerteza será feita através de um processo estocástico parametrizado, conforme a Eq. (9). Todos os exemplos fazem uso de uma mesma viga, que possui as seguintes características geométricas: comprimento de um metro ($l = 1 \text{ m}$), e seção transversal, cuja altura, e largura possuem respectivamente o valor de $h = \frac{1}{50} \text{ m}$ e $b = \frac{1}{100} \text{ m}$. A viga está simplesmente apoiada nas extremidades, e está sujeita a um carregamento uniformemente distribuído no valor de $q(x) = 1 \text{ kPa.m}, \forall x \in [0, 1]$.

A figura (5.1) apresenta tanto as dimensões da viga, quanto as condições de contorno, e carregamento que a viga está sujeita .

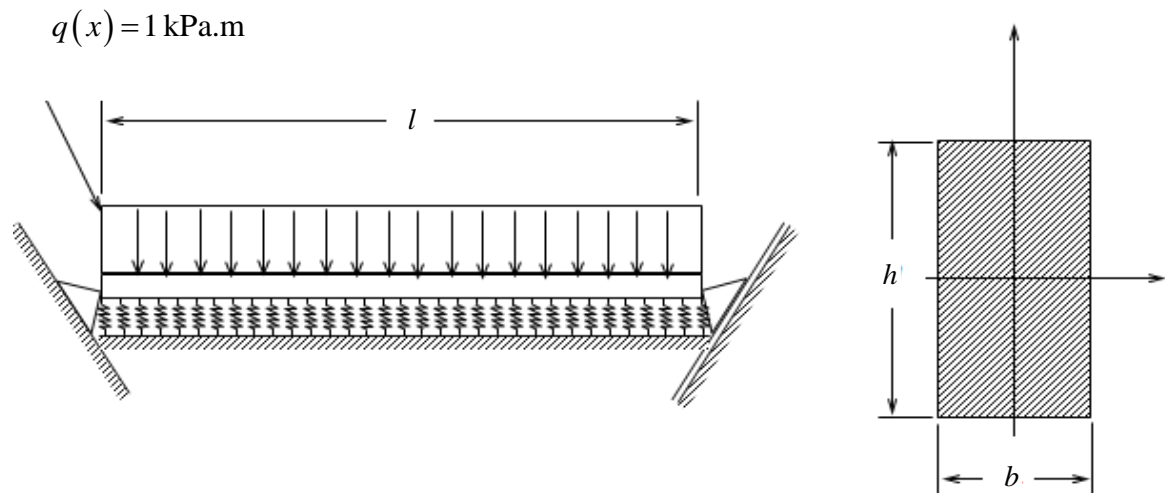


Figura 5-1 a) Viga simplesmente apoiada sobre uma fundação Pasternak;
b) Seção transversal da viga.

A Eq.(40) apresenta os valores médios dos coeficientes de rigidez, tanto da viga como da fundação. Junto dos coeficientes de rigidez, são também apresentados os valores dos coeficientes de dispersão, para cada um dos coeficientes de rigidez:

$$\begin{cases} \mu_{EI}(x) = 1400 \text{ N.m}^2 & \wedge & \delta_{EI}(x) = \frac{1}{10}, \forall x \in [0,1]; \\ \mu_{\kappa_p}(x) = 1000 \text{ N} & \wedge & \delta_{\kappa_p}(x) = \frac{1}{10}, \forall x \in [0,1]; \\ \mu_{\kappa_w}(x) = 1000 \text{ Pa} & \wedge & \delta_{\kappa_w}(x) = \frac{1}{10}, \forall x \in [0,1]. \end{cases} \quad (40)$$

A justificativa dos valores, para a dispersão dos coeficientes, encontra-se justamente nos processos de fabricação, pois os valores para o módulo de elasticidade do aço e alumínio flutuam sobre uma média de aproximadamente de 2% a 0.5%.

A caracterização da incerteza é feita mediante a utilização das amostras de vetores de variáveis randômicas: $\{\xi(\omega_j)\}_{j=1}^N = \{\xi_1(\omega_j), \xi_2(\omega_j), \xi_3(\omega_j), \xi_4(\omega_j)\}_{j=1}^N$, ou seja, cada amostra de deslocamento é função de quatro variáveis randômica, cujas as propriedades são apresentadas na Eq. (10), vale a pena frisar que as variáveis

randômicas de distribuição uniforme. As amostras do vetor randômico, $\left(\left\{\xi(\omega_j)\right\}_{j=1}^N\right)$, são geradas por funções do MATLAB, e para reduzir a correlação espúria produzida pelo processo de geração, implementou-se nesse ambiente, o método Latin Hypercube Sampling, Olsson & Sandberg (2002). A partir de um conjunto com dez mil amostras, ($N=10,000$), são obtidas as estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, tanto das cotas inferiores e superiores, quanto da resposta que faz uso da simulação de Monte Carlo direto.

Antes de realizar o processo estocástico propriamente dito, também é necessário declarar o vetor das funções testes, que neste presente trabalho será definido por: $\Phi(x) = \left\{ \text{sen}\left(\frac{1.\pi.x}{l}\right), \text{sen}\left(\frac{2.\pi.x}{l}\right), \text{sen}\left(\frac{3.\pi.x}{l}\right) \right\}$.

A Fig. (5.2) apresenta os gráficos das estimativas do valor esperado e variância, $(\hat{\mu}_{u_m}, \hat{\sigma}_{u_m}^2)$, para uma viga de comprimento $l=1\text{m}$, versus o número de realizações, (N), via simulação de Monte Carlo direto, para todos os casos presente neste trabalho. Os valores das estimativas apontados pelos gráficos são referentes ao ponto fixo $x = \frac{l}{2}$.

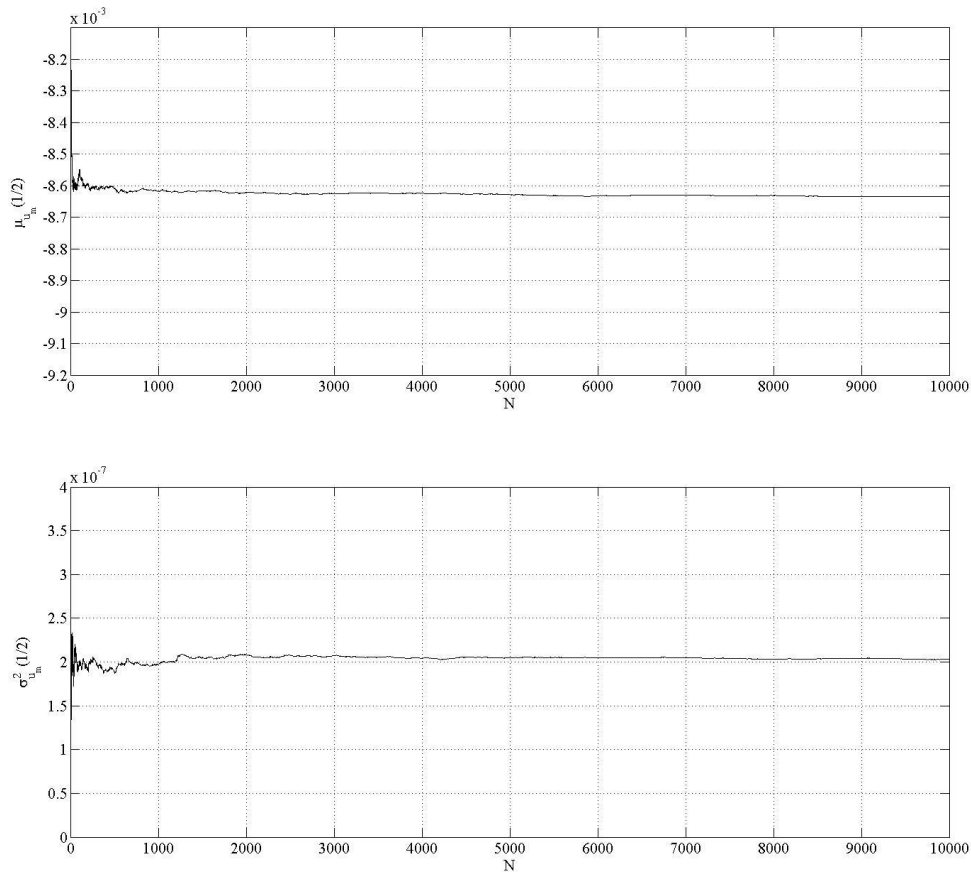


Figura 5-2(a) Convergência do valor médio de deslocamento,
(b) variância de deslocamento.

Observa-se nas Fig. (5.2a) e (5.2b), que para $N \geq 2,000$ realizações, as estimativas para valor esperado e variância da variável randômica $u_m\left(\frac{1}{2}, \xi\right)$ apresentam a tendência, de estabilizarem nos valores, $\hat{\mu}_{u_m}\left(\frac{1}{2}\right) = -0.00863460207110418 \text{ m}$ e $\hat{\sigma}_{u_m}^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2.03524066011372 \times 10^{-7} \text{ m}^2$, respectivamente. O comportamento observado pelos gráficos permite inferir a quantidade de amostras mínimas necessárias, para a realização do processo estocástico. Portanto para o problema abordado poderia ser realizado o mesmo procedimento com um número menor de amostras, porém tendo em vista, que o presente trabalho trata-se de um caso experimental, e serve como uma validação da proposta apresentada será mantida o número de 10,000 amostras, afim de que se obter uma resposta mais conservativa.

Na próxima seção será analisado, o problema estocástico de flexão de viga, com incerteza no coeficiente de rigidez de flexão, mantendo os demais valores dos

coeficientes, como fixos, nos seus valores médios. A série de Neumann será expandida até a ordem de $n=1$.

5.2 Exemplo 1-caso A: incerteza sobre o coeficiente de rigidez à flexão viga (EI), para uma série de Neumann, de ordem $n=1$.

Para este exemplo, caso (a), a incerteza está presente no coeficiente de rigidez à flexão da viga, $EI : [0,1] \times \Omega \rightarrow [\underline{a}, \bar{a}]$. O coeficiente de rigidez, EI é modelado de acordo com um processo randômico parametrizado, descrito conforme a Eq.(41):

$$EI(x, \xi(\omega)) = \mu_{EI} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sigma_{EI} \sum_{k=1}^2 \left[\xi_{2,k-1}(\omega) \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right) + \xi_{2,k}(\omega) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) \right]. \quad (41)$$

A Eq.(41) é função de quatro variáveis do tipo randômica, ou seja, para obter uma amostra de flexão de viga, são necessárias quatro variáveis randômicas, as quais definem um único valor numérico para o coeficiente de rigidez EI .

O símbolo σ_{EI} corresponde ao desvio padrão do coeficiente de rigidez à flexão da viga.

A Fig. (5.3) apresenta os gráficos das estimativas de primeira ordem, (valor esperado), do processo de flexão estocástica de viga, para cada uma das cotas inferiores e superiores, Eq. (36a).

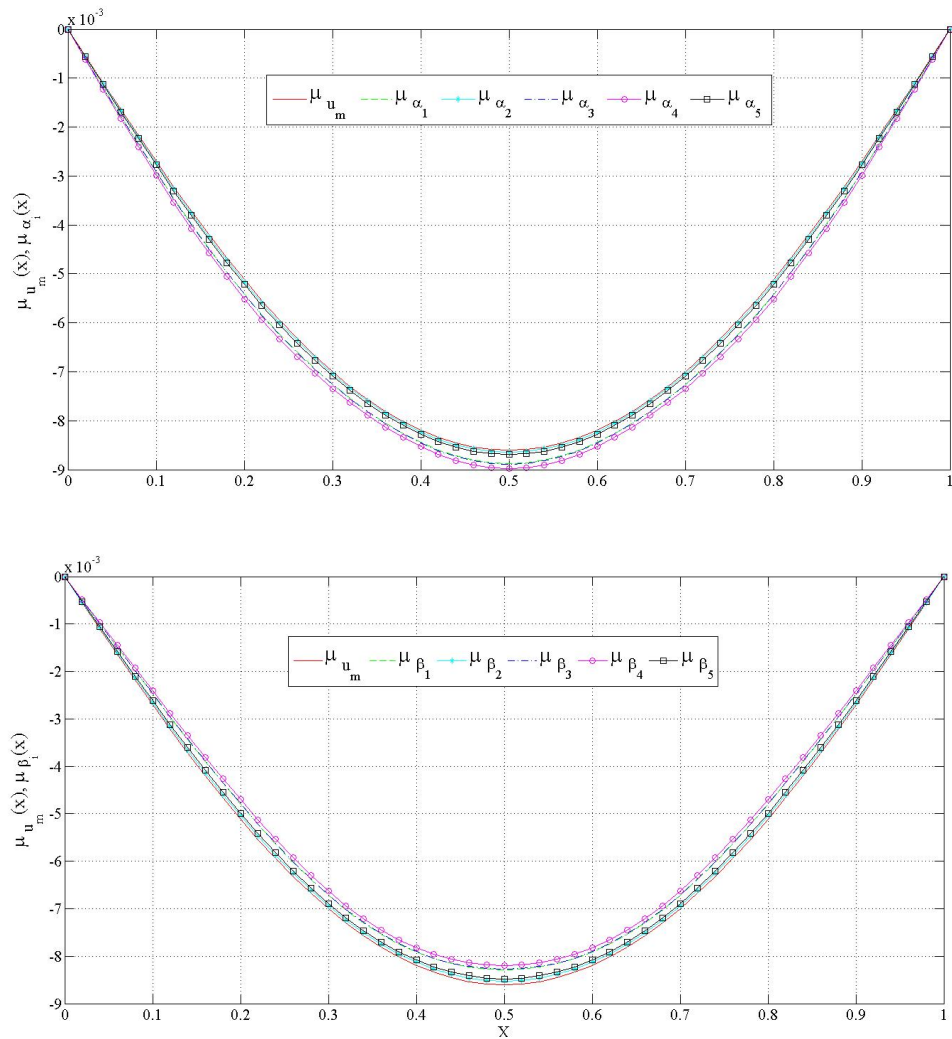


Figura 5-3 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i = 1, \dots, 5$.

A Fig. (5.4) apresenta os gráficos das funções de desvio relativo do valor esperado, das cotas inferiores e superiores, $(\alpha(x, \xi_k), \beta(x, \xi_k))$ $\forall (x, \xi_k) \in [0, 1] \times \{\xi(\omega_j)\}_{j=1}^N$ em relação à resposta gerada via a simulação de Monte Carlo direta, Eq. (38a).

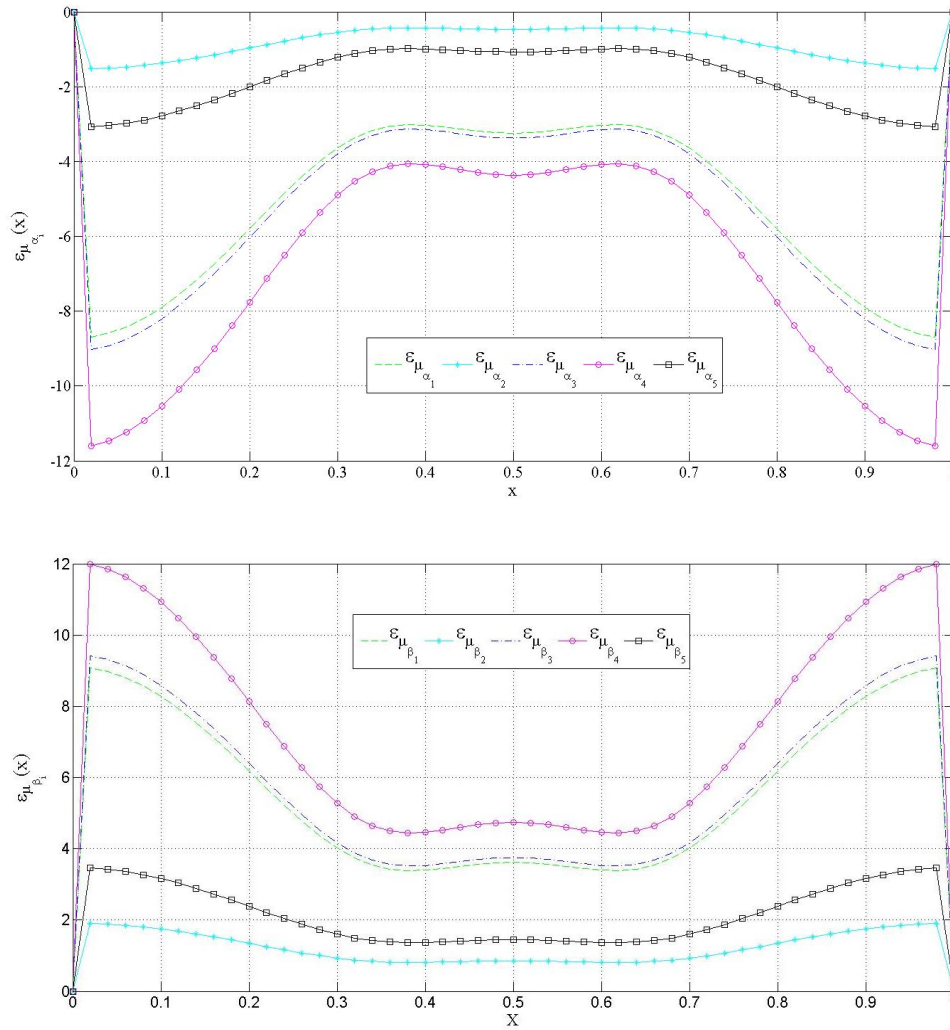


Figura 5-4 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}$, $i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}$, $i = 1, \dots, 5$.

A Fig. (5.5) apresenta os gráficos das funções referentes às estimativas do momento estatístico de segunda ordem (correlação) obtida, a partir do conjunto de realizações do método de Monte Carlo direto, e do conjunto de realizações que fazem uso das cotas inferiores e superiores, conforme Eq. (36b).

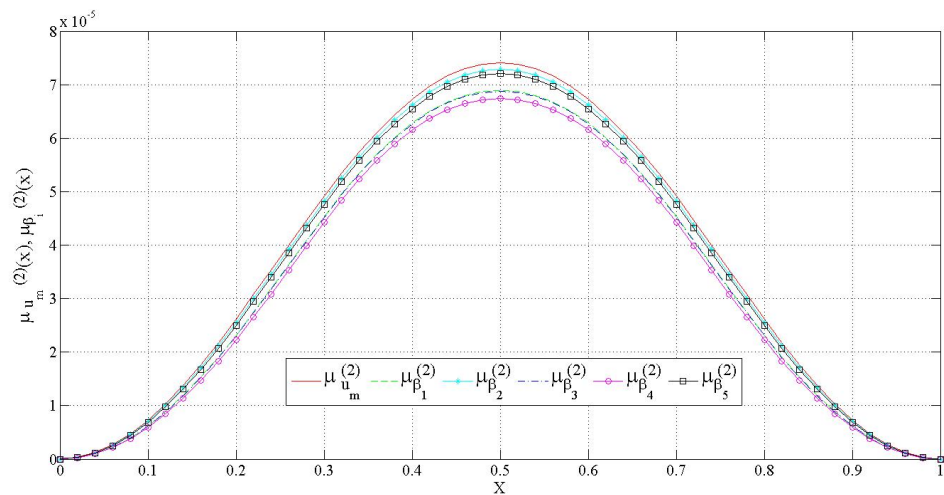
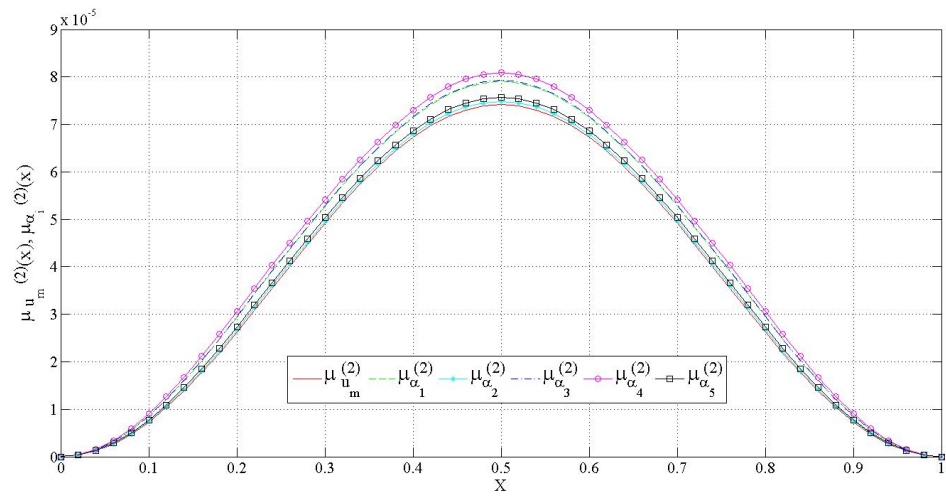


Figura 5-5 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i=1, \dots, 5$;

b) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i=1, \dots, 5$.

A Fig. (5.6) apresenta os gráficos das funções de desvio relativo em correlação, Eq. (38b), das cotas inferiores e superiores, em relação à correlação obtida através da simulação de Monte Carlo direta.

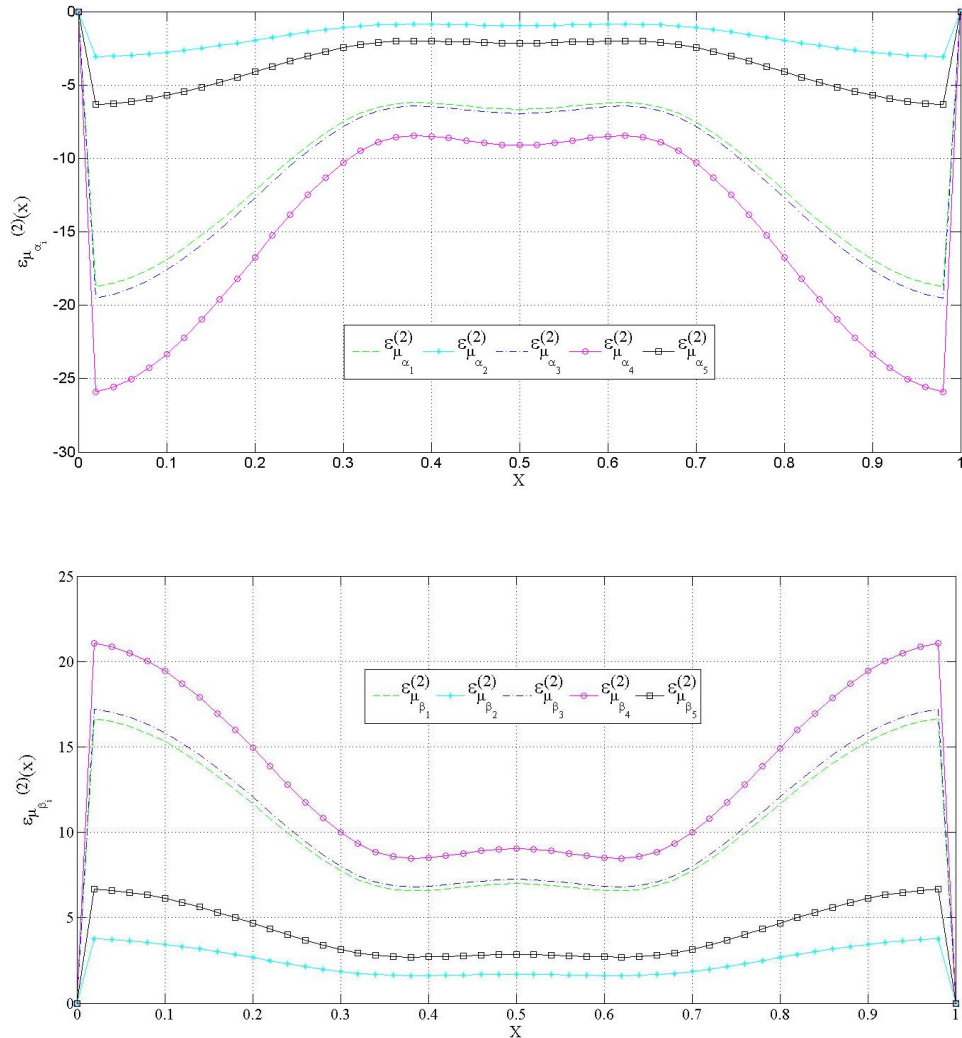


Figura 5-6 a) Gráficos das funções desvios da cotas $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$;
 b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$.

Na Tab. (5.1) são apresentados os valores numéricos das funções desvios relativos em valor esperado, e de correlação, Eqs.(38a, e 38b), referentes ao ponto $x = \frac{1}{2} m$. Na Tab. (5.1) também são apresentados os valores máximos que as funções de desvio relativo, em valor esperado, e correlação apresentam. Comparando-se os valores tabulados é constatado que as funções de desvio relativo das estimativas do valor esperado apresentam menores valores numéricos, do que as funções desvio relativo para as estimativas das correlações. Outro aspecto a ser salientado, é que as cotas obtidas com o coeficiente " λ ", calculado através das Eqs. (34b) e (34e) apresentaram os menores valores numéricos para as funções de

desvio relativo, o que confirma o que já foi concluído a partir de uma análise visual dos gráficos anteriores, explicitados neste caso.

Tabela 5-1: Avaliações numéricas das funções de desvio relativo em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2}$ m.

i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	8.69119206689677	-3.2396741892488	9.07102838086285	3.61945270098889
2	1.5270587202721	-0.47309722324695	1.90691937928087	0.852875734986658
3	9.03184572264939	-3.37122458226744	9.41168087901046	3.75100309400761
4	11.6029748871438	-4.36411882068415	11.9828013063367	4.74389733242424
5	3.07593198970573	-1.07122639018786	3.45578738535841	1.45100490192764
i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	18.7150014346519	-6.65809180288817	16.6536857851072	6.99959910280772
2	3.08928061590932	-0.94667301274158	3.74964387946062	1.69395973034181
3	19.5032136085395	-6.9359305296785	17.2194720867035	7.24427610000943
4	25.918689362443	-9.10766267720693	21.0536424362239	9.03094040001499
5	6.33735014353563	-2.16217951444915	6.67082706962799	2.86077765528989

A próxima seção será analisa o problema estocástico de flexão de viga, com incerteza no coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pela modelo do tipo Pasternak, mantendo os demais valores dos coeficientes fixos, nos seus respectivos valores médios. A série de Neumann é expandida até o segundo termo, portanto ordem 1.

5.3 Exemplo 1-caso B: incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo de Pasternak (k_p), para uma série de Neumann, de ordem $n=1$.

Para este caso (b), a incerteza está sobre ao coeficiente associado ao termo difusivo do modelo de fundação do tipo Pasternak. A incerteza é modelada através de um processo estocástico parametrizado, $\kappa_p : [0,1] \times \Omega \rightarrow [\underline{b}, \bar{b}]$ dado por Eq.(42):

$$\kappa_p(x, \xi(\omega)) = \mu_{\kappa_p} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sigma_{\kappa_p} \sum_{k=1}^2 \left[\xi_{2,k-1}(\omega) \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right) + \xi_{2,k}(\omega) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) \right]. \quad (42)$$

Sendo σ_{κ_p} o desvio padrão do coeficiente de rigidez à flexão da viga.

A Fig. (5.7) apresenta os gráficos das estimativas de primeira ordem, (estimativa para valor esperado), do processo de flexão estocástica, para cada uma das cotas inferiores Eq. (36a). Devido à aproximação das cotas inferiores, o que causa certa confusão, foi necessário fazer um zoom dentro da região delimitada pelo retângulo presente na Fig.(5.7a), a fim de distinguir a convergência das cinco propostas para cálculo de norma de matriz em relação à resposta obtida via simulação de Monte Carlo Direta.

A Fig. (5.8) apresenta a estimativa dos valores esperados, das cotas superiores em relação à estimativa do valor esperado gerado, pela simulação de Monte Carlo direto. Observa-se que foi necessário assim como a Fig.(5.7) fazer um zoom devido a convergência entre as respostas. Somente através do Zoom é possível, uma análise quantitativa, melhor, e perceber quais cotas apresentam as melhores convergência.

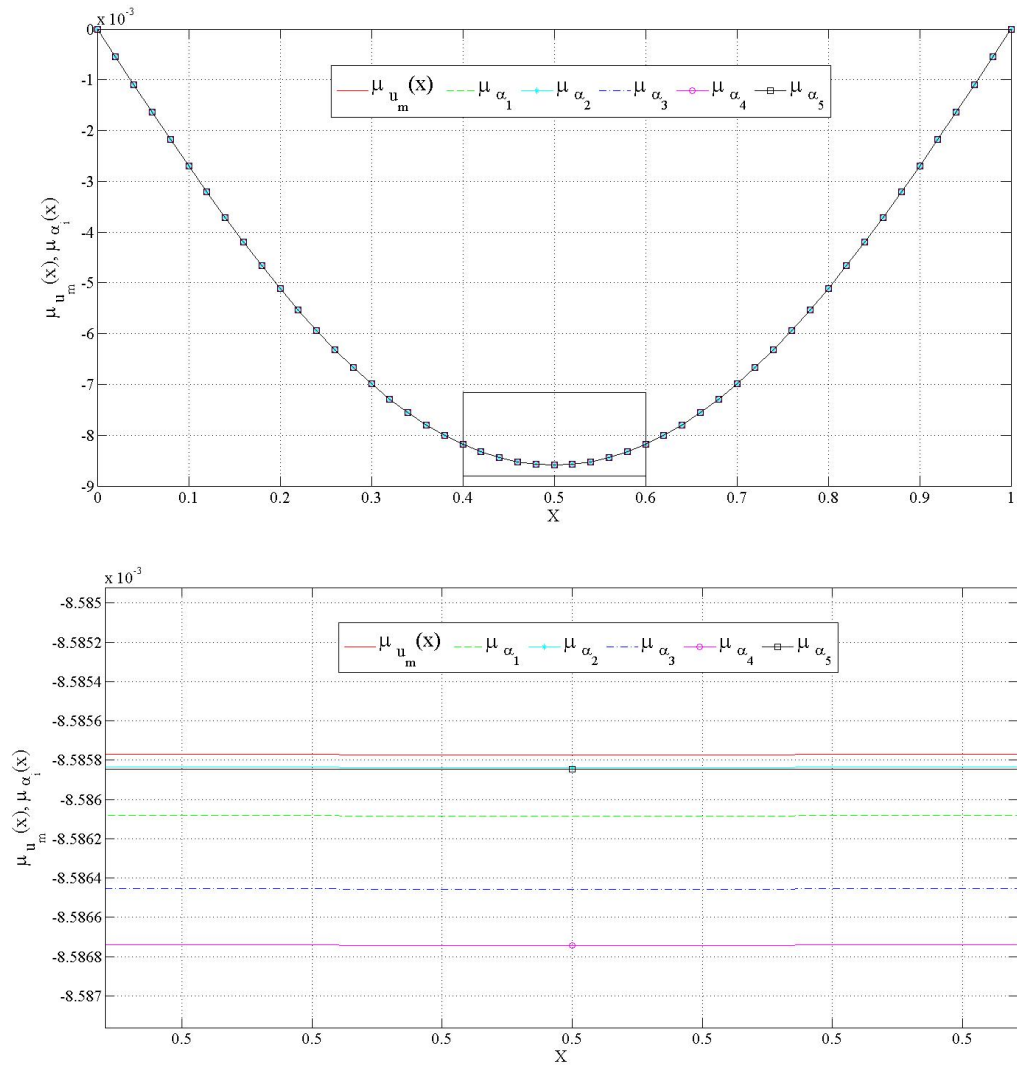


Figura 5-7 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=1, \dots, 5$;

b) Zoom do gráfico das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=1, \dots, 5$.

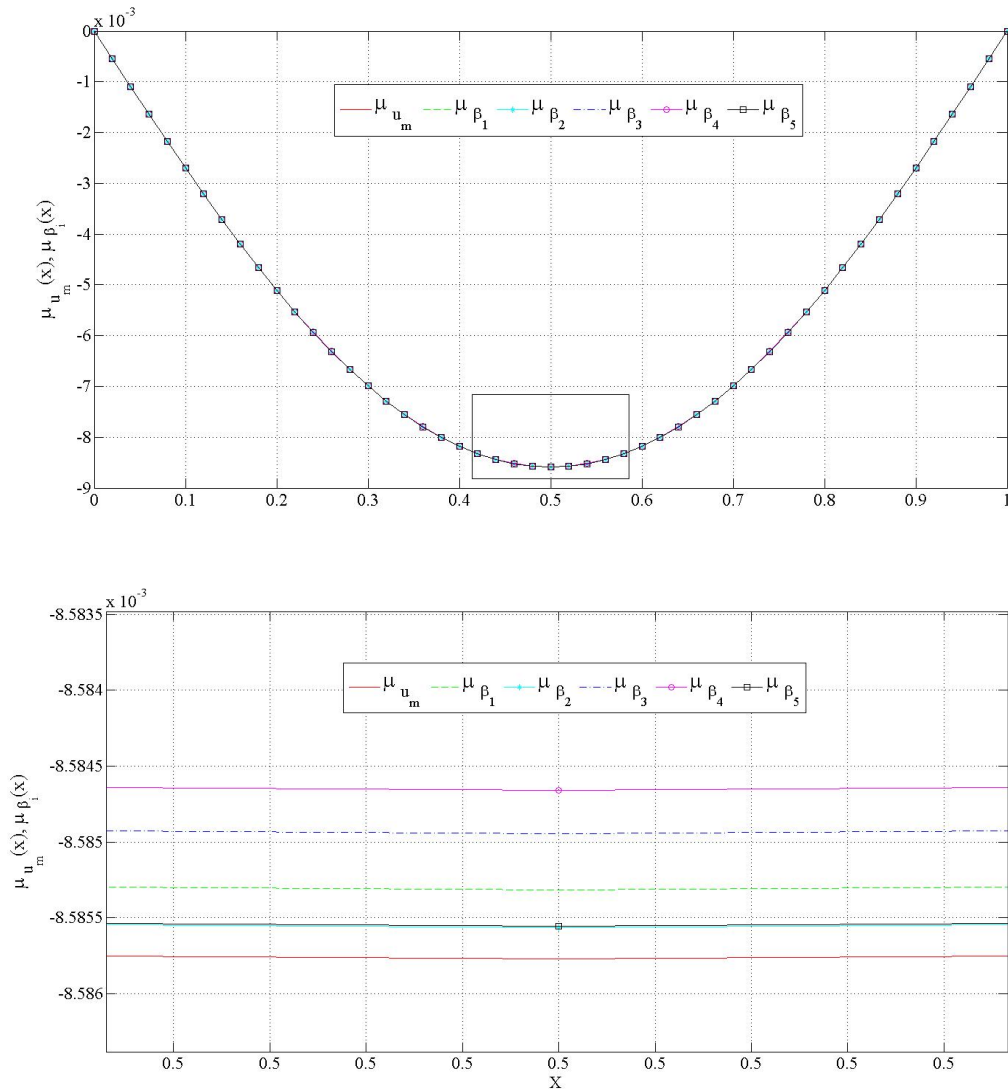


Figura 5-8 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i = 1, \dots, 5$;
 b) Zoom dos gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i = 1, \dots, 5$.

A Fig. (5.9) apresenta os gráficos das funções de desvio relativo em valor esperado para as cotas inferiores e superiores. Comparando-se os gráficos, referentes ao caso (a), apresentados na Fig.(5.4) constata-se que, para esse caso, caso (b), as estimativas obtidas a partir das cotas apresentaram menor desvio relativo em valor esperado.

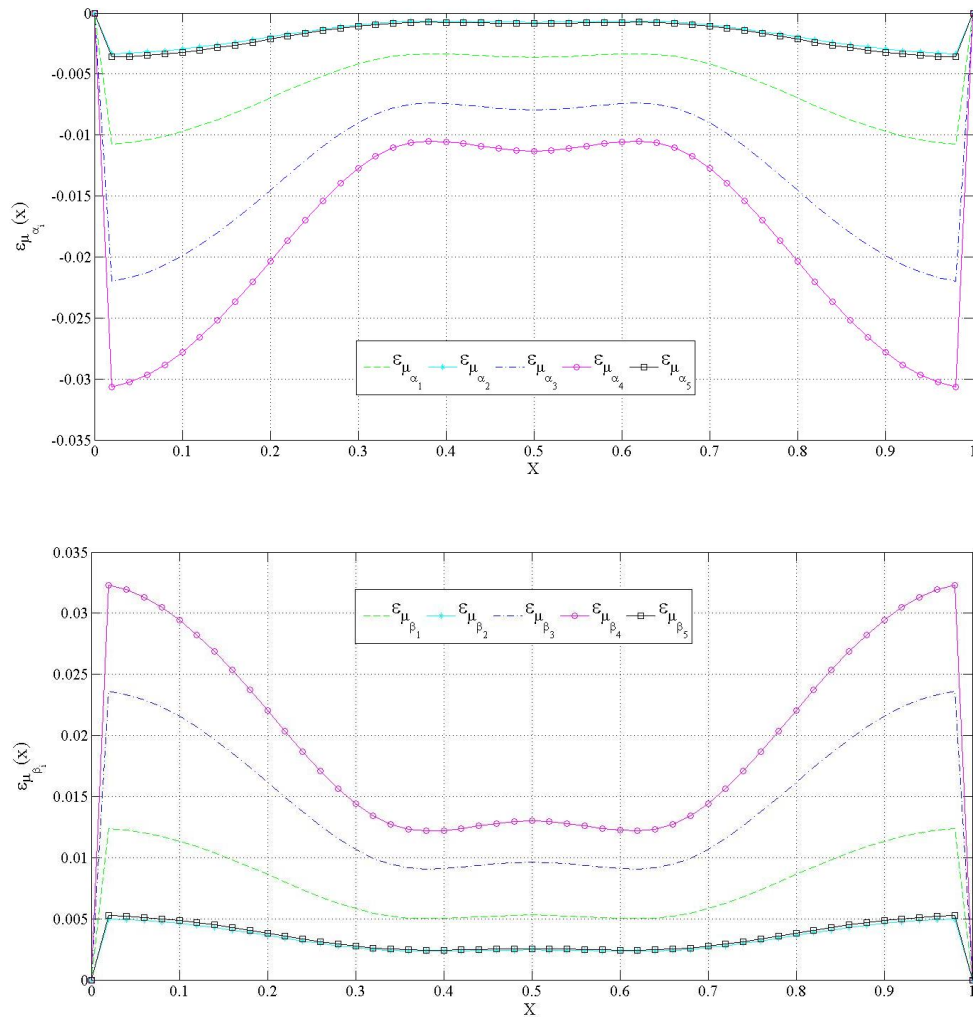


Figura 5-9 a) Gráficos das funções desvio $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}$, $i=1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}$, $i=1, \dots, 5$.

A Fig. (5.10) e Fig. (5.11) apresentam os gráficos das funções das estimativas do momento estatístico de segunda ordem (correlação) obtidas, a partir do conjunto de realizações geradas pela simulação de Monte Carlo direto, das cotas inferiores e superiores, respectivamente conforme Eq.(36b). Novamente é observado a aproximação, entre si, das cotas inferiores e superiores, quando a incerteza repousa sobre o coeficiente de rigidez associada a uma derivada de primeira ordem. A convergência das cotas faz com que as respostas se confundam. Portanto, observa-se que tanto na Fig. (5.10a) quanto Fig.(5.11a) foi delimitada uma região retangular, próximo, a região central da viga, e feito um zoom dentro deste mesmo retângulo.

Através das Fig. (5.10b) e Fig.(5.11b) (zoom da região delimitado pelo retângulo), pode-se observar com maior clareza a convergência, da estimativa das correlações, de cada uma das cotas, tanto as inferiores e superiores, em relação à estimativa da correlação gerada, pela simulação de Monte Carlo direto.

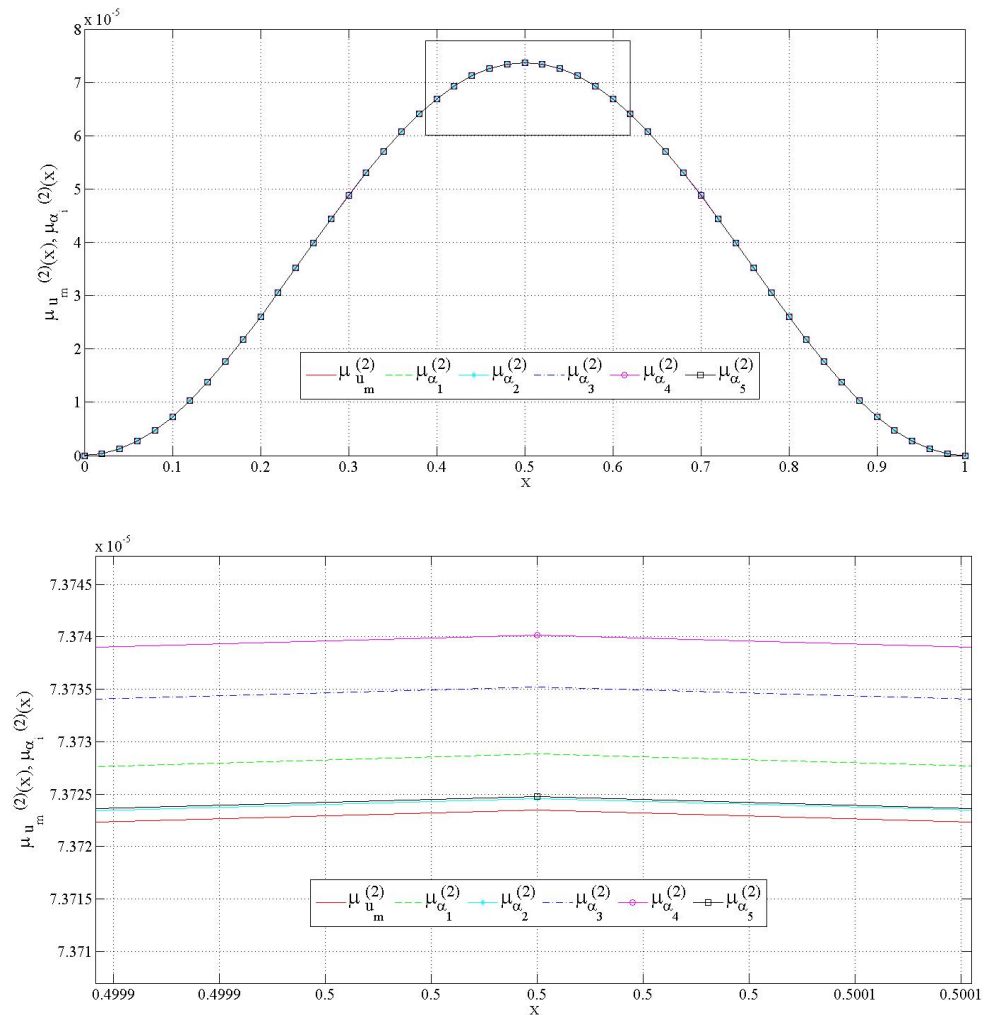


Figura 5-10 Gráficos das estimativas das correlações

- a) Estimativas das cotas inferiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$;
 b) Zoom das estimativas das cotas inferiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$.

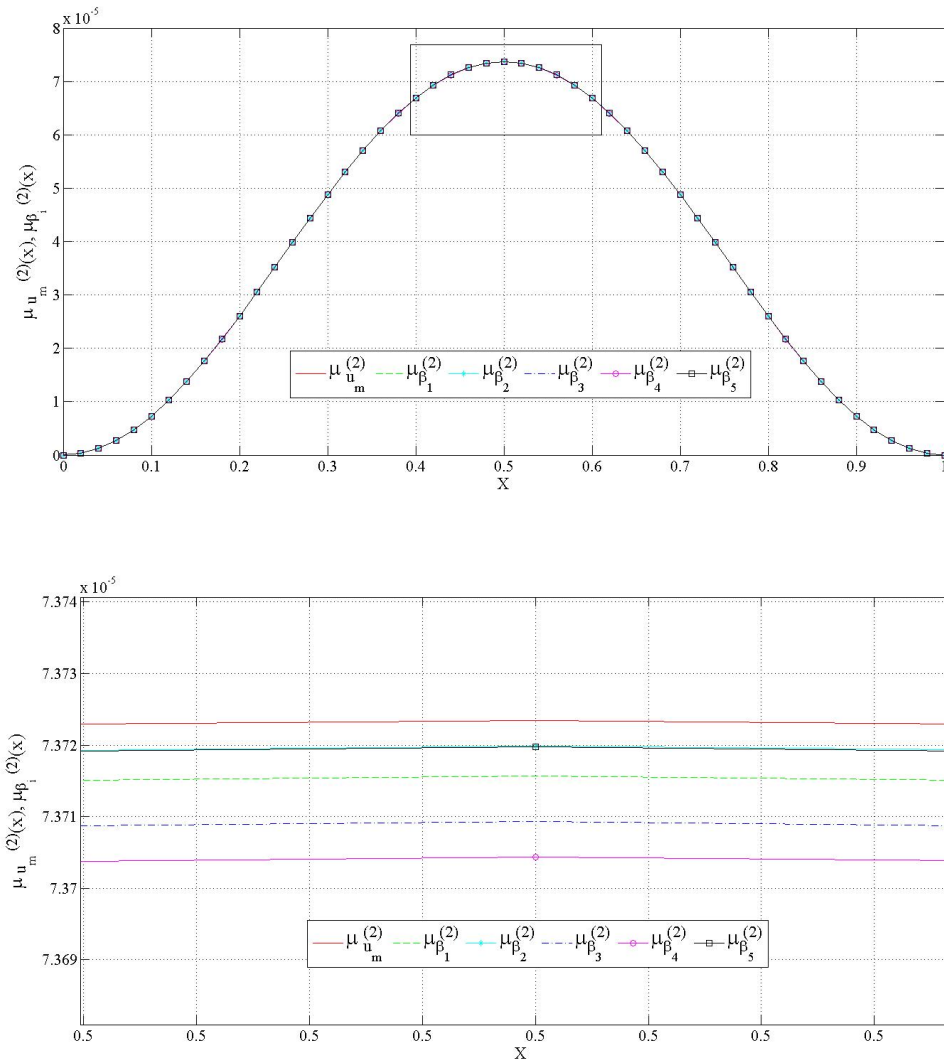


Figura 5-11 Gráfico das estimativas das correlações das cotas superiores

a) Estimativas das cotas superiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i=1, \dots, 5$;

b) Zoom das estimativas das cotas superiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i=1, \dots, 5$;

A Fig. (5.12) apresenta os gráficos das funções de desvio relativo em correlação, Eq. (38b), das cotas inferiores e superiores, em relação à correlação obtida através da simulação de Monte Carlo direta.

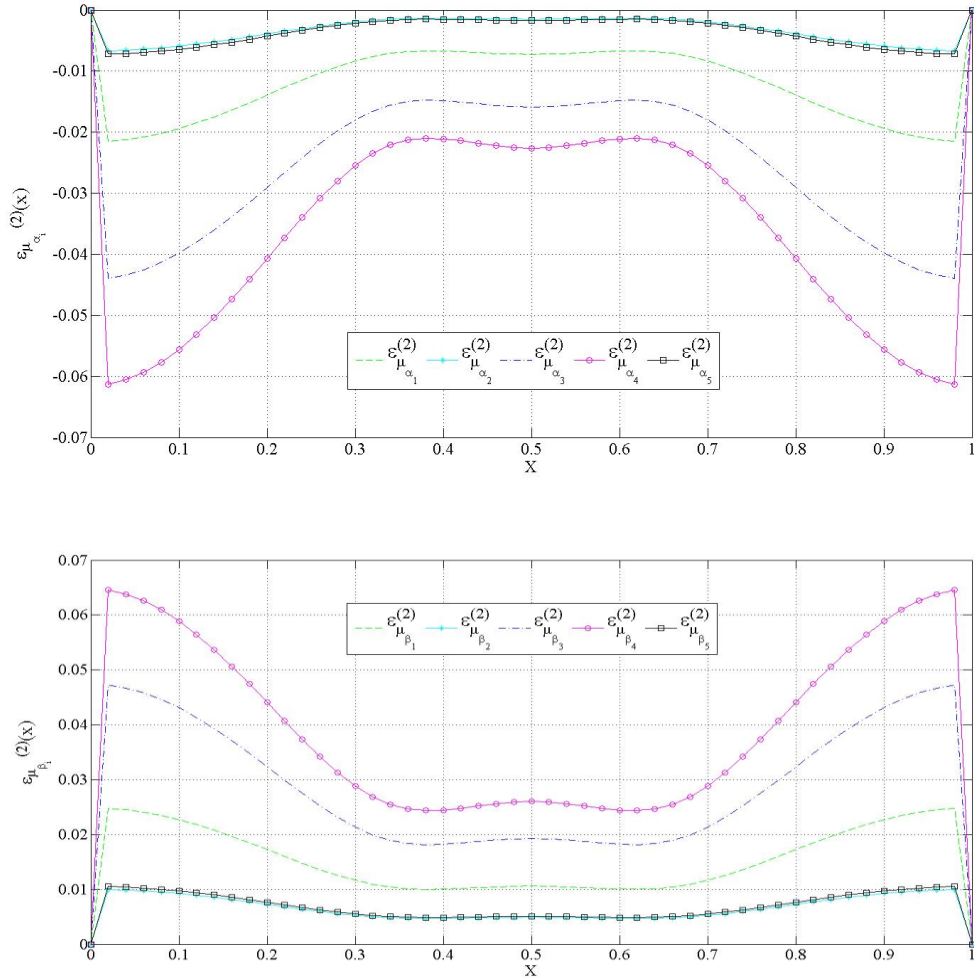


Figura 5-12 a) Gráficos das funções desvios da cotas $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$;

b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$.

Na Tab. (5.2) apresentam-se os valores das funções desvio relativo em valor esperado e correlação, referente ao ponto $x = \frac{1}{2}$ m. Também são apresentados os valores máximos das funções de desvio relativo, em valor esperado, e correlação. Comparando-se os valores numéricos apresentados nas Tab.(5.1) e Tab.(5.2) constatam-se, para o exemplo 1 caso (a), valores numéricos superiores. Isto indica que quando a incerteza está no coeficiente “ κ_p ”, a propagação da incerteza através do modelo de viga é menor. Conforme pode ser verificado no modelo matemático do problema, Eq. (6), este coeficiente não está associado ao operador diferencial de maior ordem. Observa-se que na tabela 5.2, que para este caso que as funções de desvio relativo em valor esperado, tanto para a cota inferior, quanto superior, vinculada a norma de matriz definida de acordo com a (34e), assumem

respectivamente os valores: $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_5}}\left(\frac{1}{2}\right) = -0.0008672\%$ e $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_5}}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.0025525730\%$, enquanto que para o caso a deste mesmo exemplo 1, os valores são: $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_5}}\left(\frac{1}{2}\right) = -1.07122639018786\%$ e $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_5}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1.45100490192764\%$. Pode-se constatar que ao comparar ambos os valores numéricos, o desvio relativo em valor esperado foi maior para o caso a do exemplo 1. Apesar disso, para ambos os casos, as estimativas dos valores esperados das cotas inferior e superior, que estão vinculadas "λ", definidas pelas Eqs. (34.b) e (34.e), $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i = 2, 5$, e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i = 2, 5$, apresentam um pequeno desvio em relação à estimativa do valor esperado obtida através do método da simulação de Monte Carlo direto.

Tabela 5-2 Avaliações numéricas das funções de desvios relativos dos valores esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2}$ m.

i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	0.0107381528942962	-0.00362213075697	0.0123855771688608	0.0053074917953255
2	0.00333073565235154	-0.00076160167439	0.0049781599489429	0.0024469627128431
3	0.0219556890336259	-0.00795401693458	0.0236031132760273	0.0096393779729697
4	0.0306326725722617	-0.0113048155946	0.0322800967887615	0.0129901766325435
5	0.00360421635745567	-0.00086721196836	0.0052516406529035	0.0025525730060538
i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	0.0214782991276197	-0.00724436314132	0.0247679655929867	0.0106144033186206
2	0.00666156628397196	-0.00152312681689	0.0099558475113670	0.0048938499411010
3	0.0439195872675047	-0.0159089681496	0.0471960381809522	0.0192770305318279
4	0.0612848868227767	-0.0226120865007	0.064537441254231	0.0259766128445138
5	0.00720856109606149	-0.00173434816332	0.0105027422354742	0.0051050564838339

5.4 Exemplo 1- caso C: incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo de Winkler (k_w), para uma série de Neumann, de ordem $n=1$.

Para este caso (c), a incerteza está presente sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo do tipo Winkler, sendo modelada através de um processo estocástico parametrizado $\kappa_w : [0,1] \times \Omega \rightarrow [\underline{c}, \bar{c}]$, definido como,

$$\kappa_w(x, \xi(\omega)) = \mu_{\kappa_w} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sigma_{\kappa_w} \sum_{k=1}^2 \left[\xi_{2,k-1}(\omega) \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right) + \xi_{2,k}(\omega) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) \right] \quad (43)$$

Sendo σ_{κ_w} o desvio padrão. Para este exemplo as curvas das estimativas do valor esperado, e as curvas das estimativas para correlação do processo estocástico de deslocamento transversal das cotas inferior e superior acumulam-se, não sendo possível distinguir as estimativas das cotas inferiores e superiores. Mesmo com a ampliação do gráfico, ocorre a perda de precisão, pois os valores estão muito próximos, torna-se inviável a análise de quantitativa da convergência das cotas. Desta forma apresentam-se nas Figs. (5.13) e (5.14), os gráficos das funções de desvio relativo em valor esperado e correlação, respectivamente, das cotas inferiores e superiores, em relação à resposta obtida via simulação de Monte Carlo direto. Observam-se comportamentos similares aos observados aos casos anteriores, porém neste caso em específico, as funções de desvio relativo apresentam os menores valores numéricos.

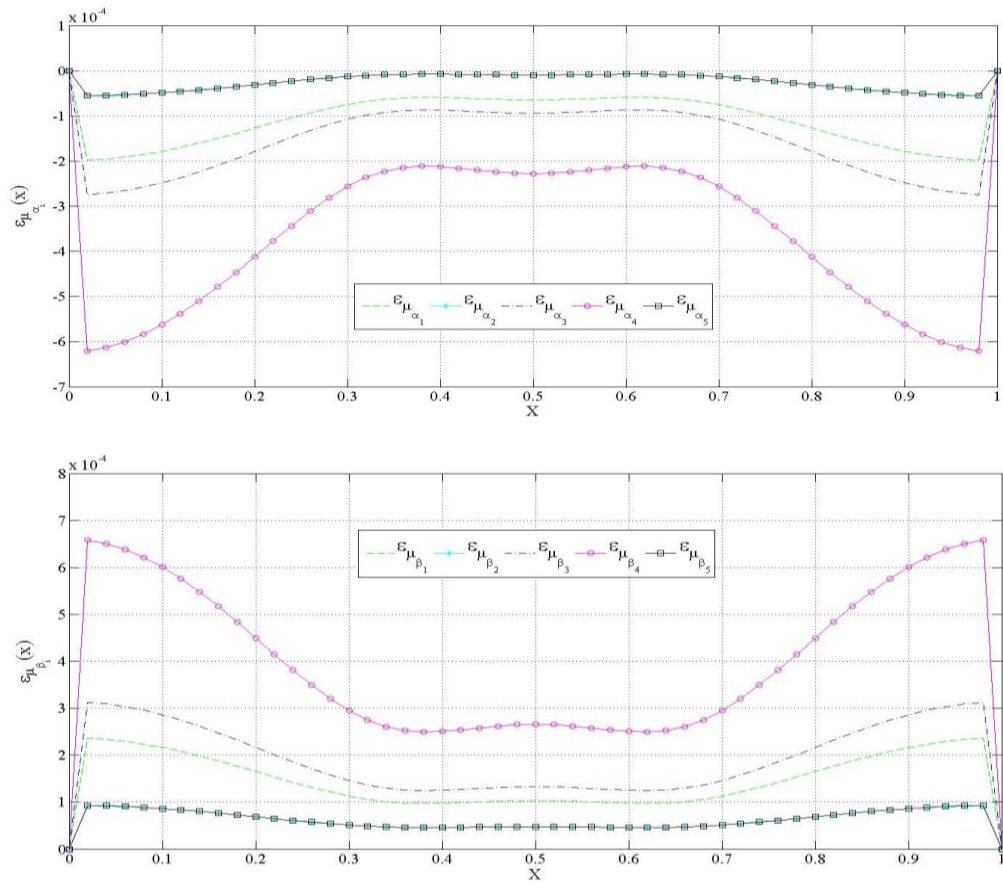


Figura 5-13 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções

$$\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}, i = 1, \dots, 5.$$

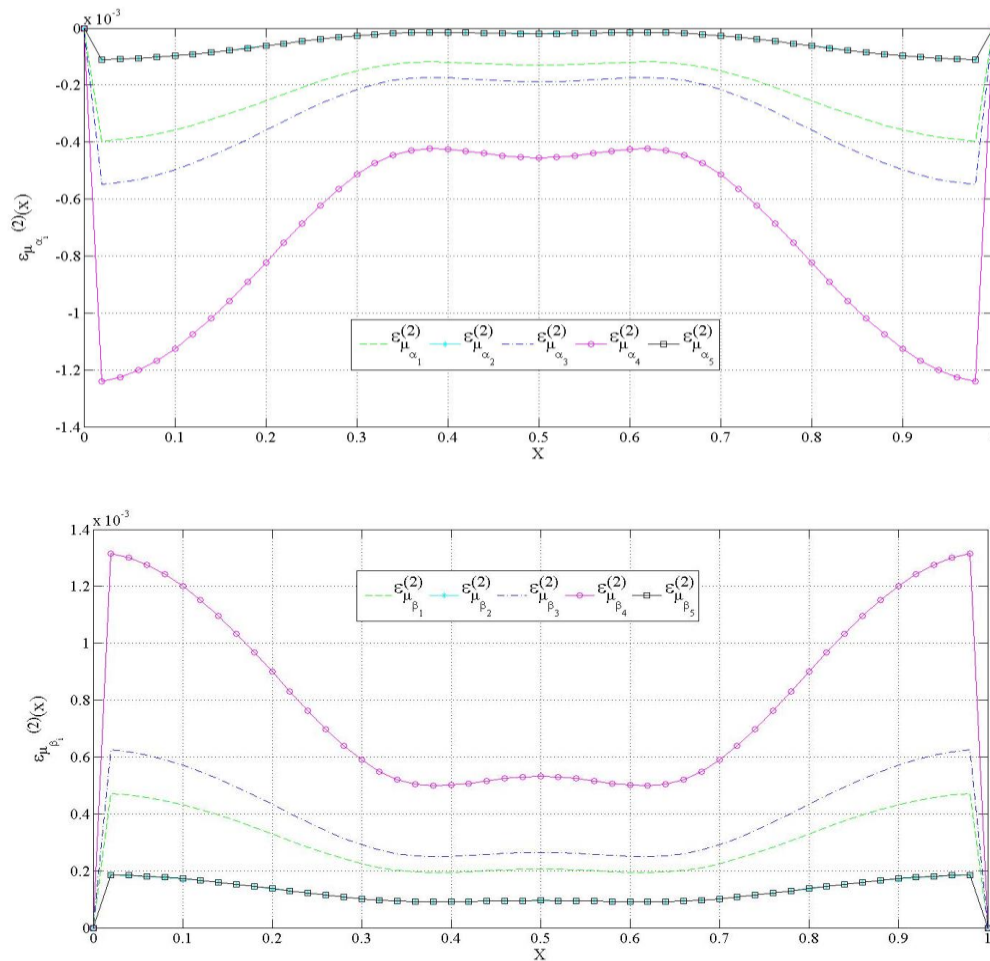


Figura 5-14 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$.

A Tab. (5.3) apresenta os valores das funções de desvio relativo em valor esperado e correlação, referentes ao ponto $x = \frac{1}{2}$ m, e também são apresentados os valores máximos das funções de desvio relativo, em valor esperado, e correlação. Neste caso são constatados os menores valores numéricos para as funções desvio em valor esperado e correlação. Outro aspecto a ser salientado, é que nesse caso, assim como nos demais, as funções desvios em valor esperado e correlação, quando calculadas de acordo com as definições dadas pelas Eqs. (34b) e (34e) apresentam valores mais próximos das respostas obtidas via método de Monte Carlo direto. A propagação da incerteza é menor, pois a parte do operador associada ao coeficiente “ κ_w ”, apresenta pouca influência sobre o processo de flexão estocástica da viga. Consequentemente, isso se transmite para o problema aproximado, Eq.

(28), fazendo com que a norma da matriz " \mathbf{P} ", ($\|\mathbf{P}(\xi_k)\|$), apresente pequenas variações numéricas, para diferentes amostras estruturais, as quais a incerteza repousa sobre o coeficiente " κ_w ".

Tabela 5-3 Avaliações numéricas das funções desvio relativo em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2} m$.

i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	0.00019814325575850	-6.4626513052e-05	0.0002357179645140	0.000102917991950
2	5.50696434897802e-05	-9.3756347352e-06	9.264435337774e-05	4.76671138227e-05
3	0.00027477289656907	-9.4218656609e-05	0.0003123476048139	0.000132510136274
4	0.00062021985320903	-0.00022762024802	0.0006577945629193	0.000265911727781
5	5.53681760884217e-05	-9.4909193837e-06	9.294288539907e-05	4.778239905967e-05
i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	0.0003962836269133	-0.00012925140662	0.0004714313965314	0.0002058346892597
2	0.00011013786072045	-1.8750472885e-05	0.0001852877046681	9.533407679951e-05
3	0.00054954364974158	-0.00018843582956	0.000624690124217	0.000265018914891
4	0.00124043872169466	-0.00045523735414	0.0013155677753395	0.000531817810800
5	0.00011073492178770	-1.8981040272e-05	0.0001858847636704	9.556464386495e-05

5.5 Conclusões do Exemplo 1.

A eficiência do código computacional, proposto por este trabalho está justamente, na comparação dos valores apresentados nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3. Os valores tabelados evidenciam a existência de convergência, das respostas obtidas via cotas inferiores e superiores, em relação às respostas obtidas pela simulação de

Monte Carlo direto. Outro fator a ser analisado, é a economia do tempo de processamento computacional, representado pela utilização da série de Neumann, e das cotas inferiores e superiores, em relação ao tempo de processamento computacional necessário para obter o cálculo direto da matriz de rigidez “inversa”.

A Fig. (5.15) apresenta o fragmento, do código computacional, onde é situado o cálculo iterativo da matriz “inversa” de rigidez, juntamente com o tempo do processamento computacional, necessário para a obtenção desta mesma matriz. O cálculo da matriz “inversa” de rigidez conforme apresentada pela Fig.(5.15) faz parte da simulação de Monte Carlo direto. Lembrando que foi omitida a linha do código na qual existe a passagem da alocação das variáveis aleatórias. Através da Eq.(22), é notório observar que a variável $\mathbf{P}(\xi_k)$, representada computacionalmente por “Paux”, irá assumir diferentes valores, a cada passagem pelo laço, o que é característico de um processo iterativo.

```

for i=1:Ns                                %Laço presente no processo estocástico.
Ns=i;                                     %Decréscimo do número de amostras.
t0=cputime;                               %tempo de processamento de todas linhas anteriores.
Kaux=inv(Ko*(I+Paux));                    %cálculo da matriz inversa direta.
delta_t=cputime-t0;                       %tempo de processamento para cálculo da matriz inversa.
tMCD=tMCD+delta_t;                        %soma com os valores dos processamentos anteriores.

```

Figura 5-15 Fragmento do código computacional, referente a simulação de Monte Carlo direto.

No primeiro exemplo, a série de Neumann de ordem $n=1$, é expandido até o segundo termo da série, cujo termo vale: $(\mathbf{P}(\xi_k))^1$, ver Eq.(22). Computacionalmente este termo é representado por “Paux^1”. Como a matriz representada por: $(\mathbf{P}(\xi_k))^1$ é dependente das variáveis randômicas, é esperado que esta mesma matriz venha possuir diferentes valores a cada passagem pelo laço. Devido a este comportamento iterativo, este exemplo é denominado de Monte Carlo-Neumann.

A Fig. (5.16) apresentada o fragmento, do código computacional, no qual o cálculo da matriz “inversa” de rigidez é substituído pela série de Neumann, de ordem

$n=1$, ou seja, até o segundo termo da série. Na Fig. (5.16) foi omitida a linha do código na qual existe a passagem da alocação das variáveis aleatórias. Para o primeiro exemplo é calculado o tempo de processamento computacional gasto para obter o cálculo iterativo da matriz “inversa” de rigidez aproximada, via série de Neumann. E também é calculado o tempo de processamento gasto para obter a norma das matrizes, pois assim como a aplicação da série de Neumann, o cálculo das normas das matrizes, também trata-se de um processo iterativo, ver Eq.(34.a-e).

O cálculo do tempo de processamento computacional gasto pela aplicação da série de Neumann de ordem $n=1$ representado pelo código mostrado pela Fig. (5.16) deve ser comparado, com o tempo de processamento computacional gasto pelo método também iterativo, representado pela simulação de Monte Carlo direta. Vale apenas frisar que a variável “soma_P”, assumi inicialmente o valor de uma matriz identidade.

Para o segundo exemplo a aplicação da série de Neumann, independe do processo estocástico, pois a ordem da série é tal que: $n=0$. Neste exemplo a série é expandida somente até o primeiro termo, $(\mathbf{P}(\xi_k))^0$. Transformando a matriz, $(\mathbf{P}(\xi_k))^0$ dependente das variáveis randômicas, na matriz identidade, ou seja, uma matriz cujos elementos são constantes. Como o objetivo deste trabalho está justamente na economia representada, pela troca do processo iterativo do cálculo direto da matriz “inversa”, pelo processo iterativo representado pela utilização da série de Neumann, não faz sentido, contar o tempo de processamento gasto pela série de Neumann de ordem $n=0$. Pois para este exemplo em particular, inexistente a formação do laço. Portanto para o exemplo 2, recai somente sobre o processo iterativo de cálculo de norma de matriz, a representação do custo computacional.

```

for i=1:Ns                                %Laço presente no processo estocástico.
Ns-i;                                     %Decréscimo do número de amostras.
t0=cputime;                               %tempo de processamento de todas linhas anteriores.
soma_P=soma_P+Paux^1;                    %Utilização da Série de Neumann.
delta_t=cputime-t0;                       %tempo de processamento da utilização da SN.
tSN=tSN+delta_t;                          %soma com os valores dos processamentos anteriores.

```

Figura 5-16 Fragmento do código computacional, referente ao cálculo do tempo de processamento, via método de Monte Carlo-Neumann.

A Fig. (5.17) apresenta o fragmento, do código computacional, na qual é calculado o tempo de processamento gasto pelo cálculo iterativo da norma 1 da matriz, $(\mathbf{P}(\xi_k))$, matriz representada computacionalmente pela variável “Paux”. A lógica computacional, representado pela Fig. (5.17), pode ser estendida para as outras definições de norma de matriz. Através da Fig.(5.17), é notório observar, que os valores dos tempos de processamento são alocados, em uma matriz linha, pois cada coluna discrimina o gasto computacional representado pelas cinco propostas distintas, para cálculo de norma de matriz.

O presente trabalho tem por intuito, analisar o tempo computacional dispendido para o cálculo iterativo de norma de matriz, de todas as cinco propostas disponíveis, afim de que se possa analisar a eficiência das cotas inferiores e superiores, em relação ao método tradicional, da simulação de Monte Carlo direto. O valor do tempo de processamento iterativo para cálculo de norma de matriz deve ser somado ao tempo gasto pelo processo computacional Monte Carlo- Neumann.

```

somat1=0;           %declarar o valor inicial.
for i=1:Ns         %Laço presente no processo estocástico.
t0=cputime;       %tempo de processamento de todas linhas anteriores.
norma_P(1,i)=norm(Paux,1); %Cálculo da Norma de Matriz.
somat1=somat1+cputime-t0; %tempo de processamento do cálculo da norma. Soma recursiva.
t(1,1)=somat1;   %tempo de processamento da utilização da SN.

```

Figura 5-17 Fragmento do código computacional, referente ao cálculo do tempo de processamento para cálculo da norma de matriz.

A Tabela 5.4 é apresenta o tempo de processamento computacional dispendido pelo cálculo da matriz “inversa”, característico da simulação de Monte Carlo direto, (T_{MCD}) , também é apresentado o tempo de processamento computacional, necessário para o cálculo da matriz “inversa” via série de Neumann, (T_{SN}) , juntamente com o tempo de processamento computacional, dispendido pelo cálculo iterativo das normas das matrizes definidas de acordo com as Eq. (34a,b,c,d,e), representados respectivamente por $(T_1, T_2, T_3, T_4$ e $T_5)$. A cotas definidas pelas Eqs. (34a) e (34b) apresentaram o maior tempo de computação, (T_1) ,

e (T_2), respectivamente. Para os casos B e C a série de Monte Carlo-Neumann apresentou um tempo de computação menor, (T_{SN}), do que a simulação de Monte Carlo direta, (T_{MC}). Ao comparar-se o tempo de computação e os valores numéricos das funções desvios relativos em valor esperado e correlação, conclui-se que as cotas inferiores e superiores que são funções da norma de matriz, definida pela Eq. (34.e) foram as que apresentaram maior eficiência, para os casos apresentados neste trabalho. No entanto para este exemplo, o método das cotas se mostrou totalmente ineficiente, uma vez que o tempo de processamento do cálculo iterativo da norma de matriz é somado a simulação Monte Carlo-Neumann.

Tabela 5-4 - Tempo em segundos, do processamento computacional, via Monte Carlo, e de suas respectivas cotas inferiores e superiores.

Casos	T_{MCD}	T_{SN}	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A	111.254	111.285	423.023	135.105	-	90.462	26.542
B	108.689	107.388	401.078	139.318	24.676	36.304	13.595
C	100.547	95.619	445.854	335.883	106.655	133.067	36.217

Nos próximos casos do exemplo 2, a ordem da série de Neumann é reduzida para $n = 0$, ficando dependente somente dos cálculos de norma de matriz, o tempo de computação. No exemplo 2 serão realizados os mesmos procedimentos dos realizados pelo exemplo 1. O critério de desempenho computacional, para o exemplo 2, será baseado nas funções de desvio relativo, das estimativas, em relação à simulação de Monte Carlo direta, pois o tempo computacional dispendido pelo cálculo iterativo de norma de matriz independe da ordem da série de Neumann. Para este exemplo será dada uma atenção maior para a norma de matriz vinculada ao " λ " definido pela Eq. (34e).

5.6 Exemplo 2-caso A: incerteza sobre o coeficiente de rigidez à flexão viga (EI), para uma série de Neumann, de ordem $n=0$.

Para este caso (a), a incerteza está sobre ao coeficiente de rigidez de flexão da Viga, (EI), e a série de Neumann, é expandida somente até o primeiro termo " $n = 0$ ".

A Fig. (5.18) apresenta os gráficos das estimativas de primeira ordem, (valor esperado), do processo de flexão estocástica de viga, para cada uma das cotas inferiores e superiores, Eq. (36a). Pode-se observar, que as estimativas para valores esperados, obtidas pelas cotas inferiores e superiores, que são vinculadas aos coeficientes " λ ", definidos pelas Eqs. (34.b) e (34.e), $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=2,5$, e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i=2,5$, aproximam-se mais da estimativa do valor esperado do processo de deslocamento obtido via simulação de Monte Carlo direta. Também é notório a partir da análise visual, que a Fig.(5.18), quando comparada com a Fig. (5.3), apresenta uma distância maior das cotas inferiores e superiores, em relação à resposta obtida via método da simulação de Monte Carlo direta. Portanto fica claro que a dispersão maior das repostas entre si, é causada justamente pela ordem de truncamento da série de Neumann, pois tanto as respostas apresentadas pela Fig. (5.3), quanto das apresentadas pela Fig. (5.18), a incerteza repousa sobre o coeficiente de rigidez (EI).

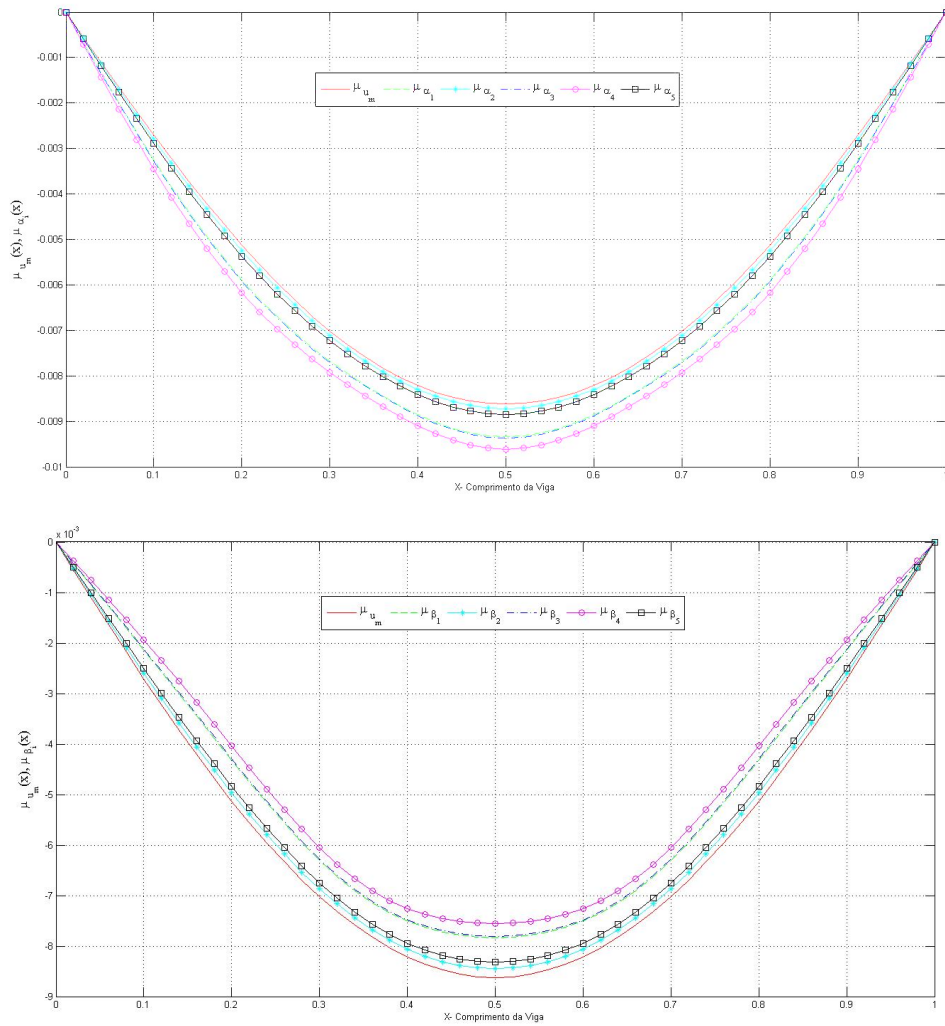


Figura 5-18 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=1, \dots, 5$; b) Gráfico das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i=1, \dots, 5$.

A Fig. (5.19) apresenta os gráficos das funções desvio relativo do valor esperado, das cotas inferiores e superiores, $(\alpha(x, \xi_k), \beta(x, \xi_k))$, em relação a resposta gerada via método de Monte Carlo direta, Eqs. (38a).

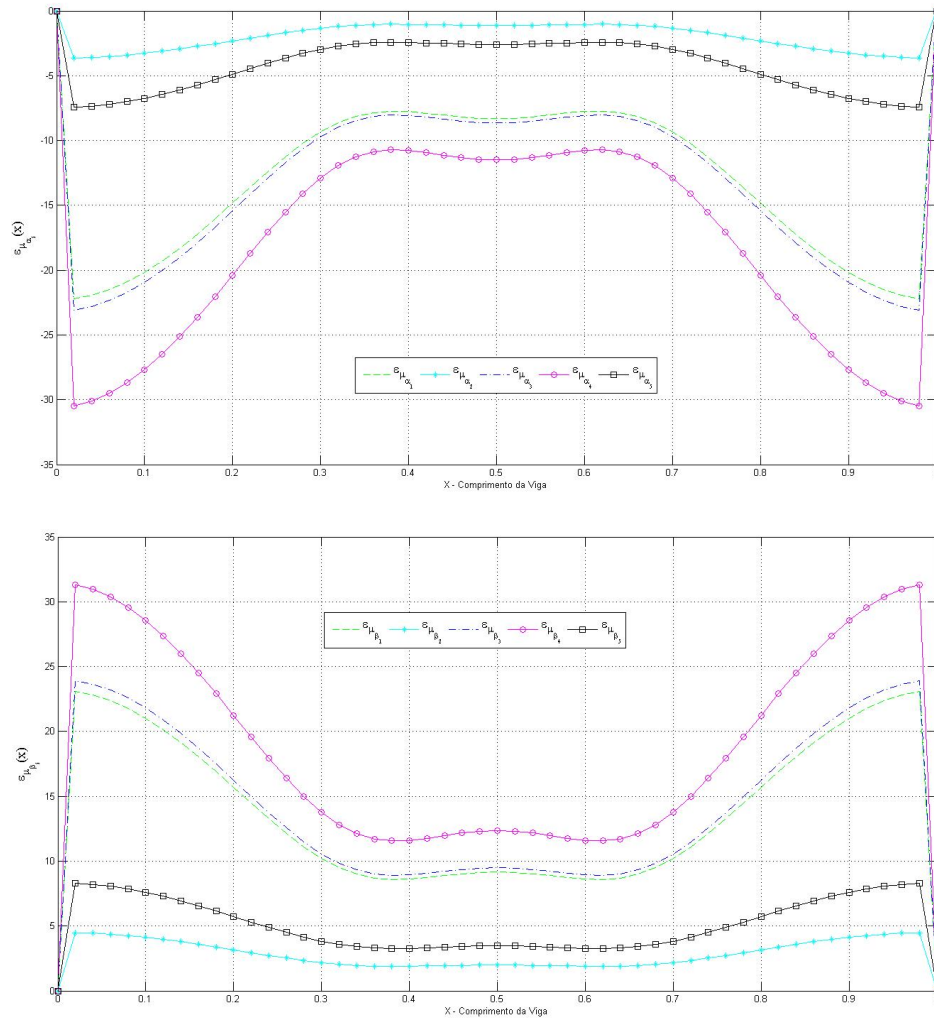


Figura 5-19 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}$, $i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}$, $i = 1, \dots, 5$.

A Fig. (5.20) apresenta os gráficos das funções das estimativas do momento estatístico de segunda ordem (correlação), obtidas a partir do conjunto de realizações do método de Monte Carlo direto, e do conjunto de realizações que fazem uso das cotas inferiores e superiores, conforme observado pela Eq. (36b).

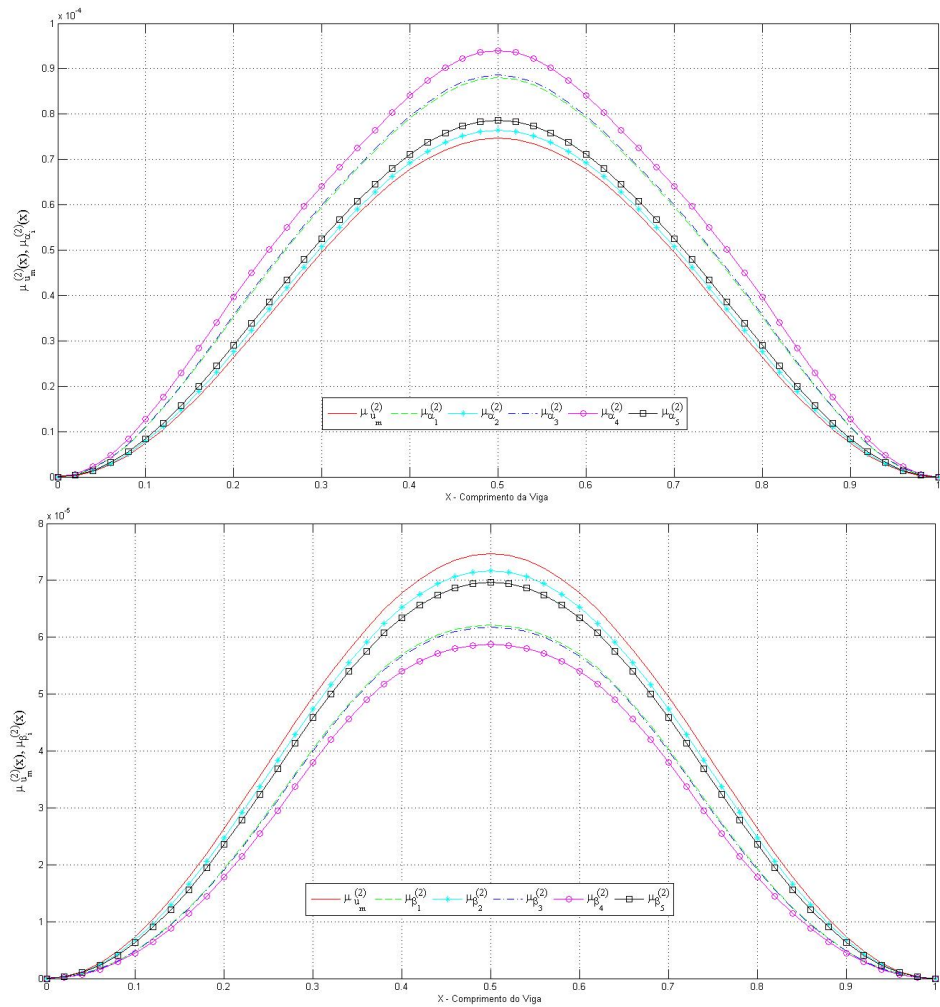


Figura 5-20 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}$, $i = 1, \dots, 5$;
 b) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}$, $i = 1, \dots, 5$.

A Fig. (5.21) apresenta os gráficos das funções de desvio relativo em correlação, Eq. (38b), das cotas inferiores e superiores, em relação à correlação obtida através da simulação de Monte Carlo direta.

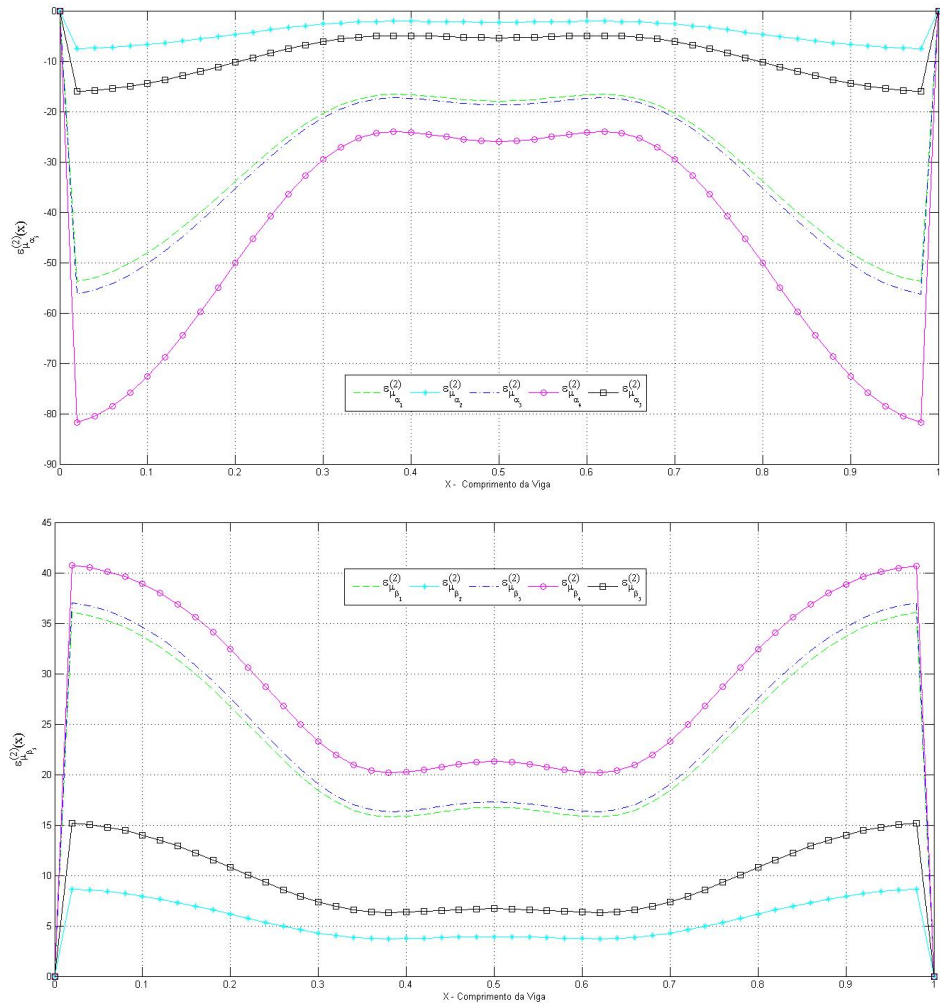


Figura 5-21 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções

$$\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$$

A Tab. (5.5) apresenta os valores numéricos que as funções desvio relativo em valor esperado e correlação, Eqs. (38 a, b), assumem quando $x = \frac{1}{2}$ m, e também são apresentados os valores máximos que estas funções apresentam. Comparando-se os valores tabulados constata-se que as funções de desvio relativo para as estimativas de valor esperado apresentam menores valores numéricos, do que as funções desvio relativo para as estimativas das correlações. Outro aspecto a ser salientado, é que as funções de desvio relativos, relacionadas às cotas obtidas com o coeficiente "λ", calculado através das Eqs. (34b) e (34e) apresentaram os menores valores numéricos, o que confirma o que já foi concluído a partir de uma análise visual dos gráficos anteriores, explicitados neste caso. Porém quando

comparado aos valores da Tab.(5.1), observa-se que os valores apresentados na Tab.(5.5), são numericamente superiores.

Tabela 5-5 Avaliações numéricas das funções de desvio relativo em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2}$ m.

i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	22.207332733809	- 8.31330636014325	23.0629452179085	9.16848134196906
2	3.63024404446612	-1.13938208017947	4.48601847513465	1.99455706200478
3	23.066746182399	-8.64518651146646	23.9223511745238	9.50036149329206
4	30.4562869650903	-11.4988094297412	31.3118275385763	12.3539844115669
5	7.44864121665756	-2.61393455943038	8.30438236028482	3.46910954125563
i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	53.7562536982665	-17.9265575675045	36.0661114222714	16.7563423285827
2	7.47921143685697	-2.28931471261806	8.62136082609214	3.92722607064823
3	56.2125577709954	-18.6988873412236	37.0346916307835	17.3068225842993
4	81.7512964717664	-25.967594881846	40.712513368059	21.3156281981621
5	16.0466079564464	-5.36029762540211	15.1867965137164	6.69978794391715

5.7 Exemplo 2-caso B: incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo do tipo Pasternak (k_p), para uma série de Neumann, de ordem $n=0$.

Para este caso (b), a incerteza repousa sobre o coeficiente associado ao termo difusivo do modelo de fundação do tipo Pasternak, (κ_p), e a série de Neumann, é expandida somente até o primeiro termo " $n = 0$ ".

As Fig. (5.22) e Fig.(5.23) apresentam os gráficos das estimativas de primeira ordem, (estimativa do valor esperado), do processo de flexão estocástica, para cada uma das cotas inferiores, e superiores respectivamente conforme definido pela Eq. (36a). Devido a convergência das respostas entre si, e a fim de que se possa distinguir cada uma das cotas, foi necessário a aplicação do zoom dentro da região delimitada pelo retângulo, próximo, a região central da viga, conforme observado na Fig. (5.22a). Através do zoom dentro desta região, pode-se notar a convergência das cotas, de acordo com o que é visto pela Fig. (5.22b), o mesmo procedimento foi realizado na Fig.(5.23).

Quando comparado ao caso A, dos exemplos 1 e 2, observa-se que para este caso, (caso b), existe uma aproximação maior das cotas inferiores e superiores, entre si. Este comportamento ocorre devido ao fato de que, a incerteza repousa sobre o coeficiente que está associado a uma derivada de primeira ordem.

A diferença crucial entre o caso B deste exemplo, para o caso B, do exemplo 1, é que existe uma maior dispersão das respostas, obtida pelas cotas, em relação à resposta obtida via método da simulação de Monte Carlo direto.

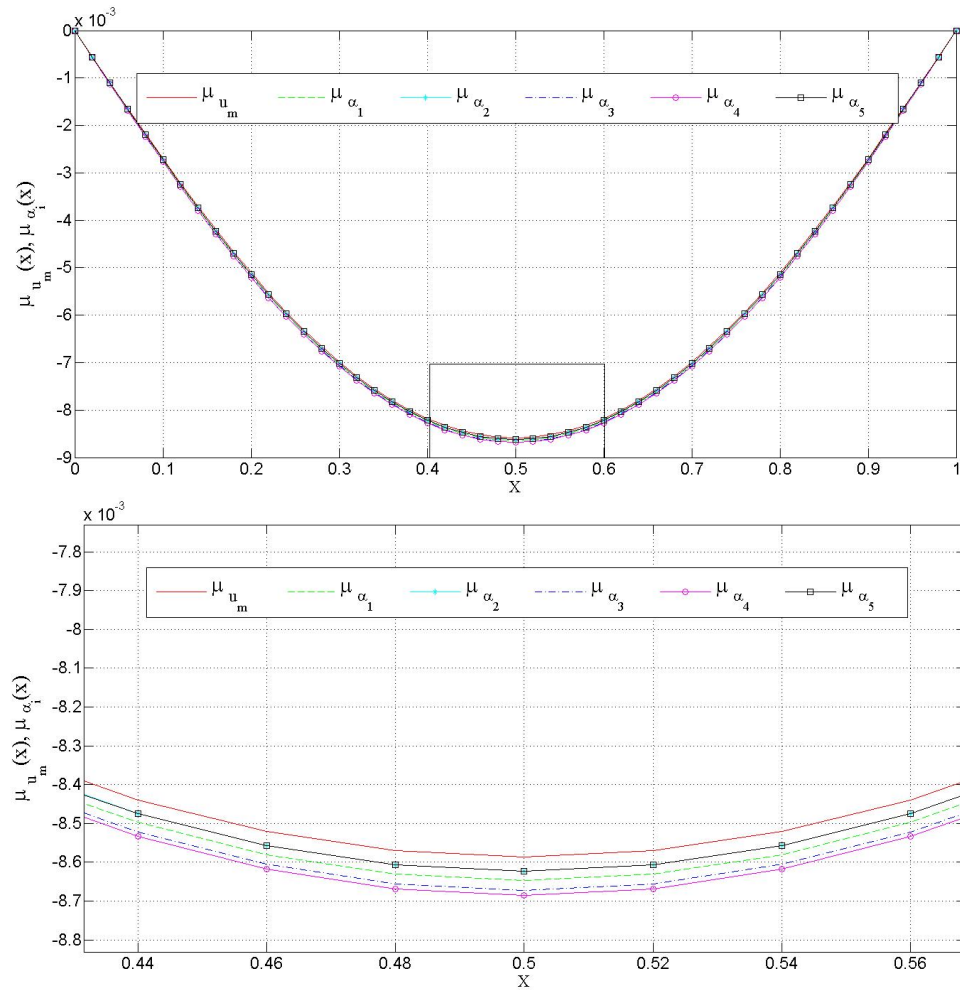


Figura 5-22 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=1, \dots, 5$;

b) Zoom do gráfico das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=1, \dots, 5$.

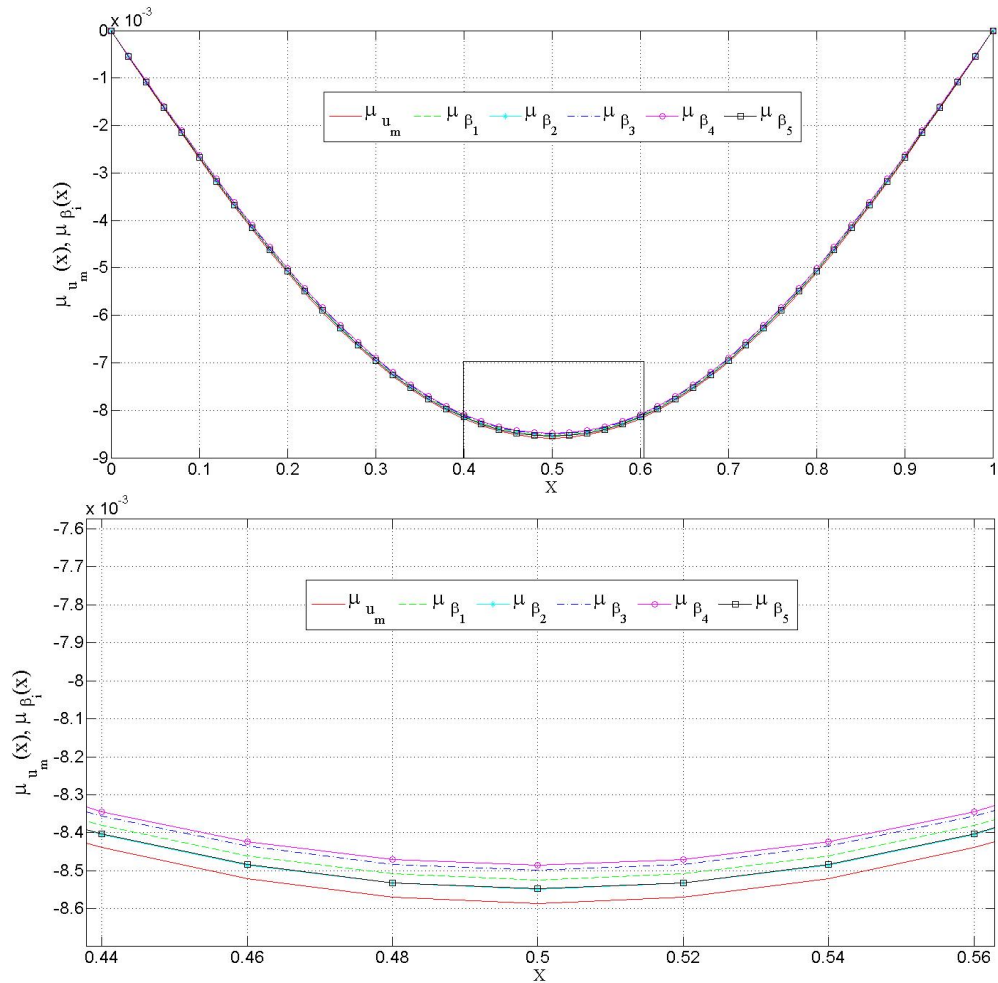


Figura 5-23 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i = 1, \dots, 5$;
 b) Zoom dos gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i = 1, \dots, 5$.

A Fig.(5.24) apresenta os gráficos das funções de desvio relativo em valor esperado para as cotas inferiores e superiores. Comparando-se os gráficos apresentados pela Fig. (5.24) com os gráficos presentes na Fig.(5.9) constata-se que, para esse exemplo, que o desvio relativo em valor esperado apresenta valores superiores.

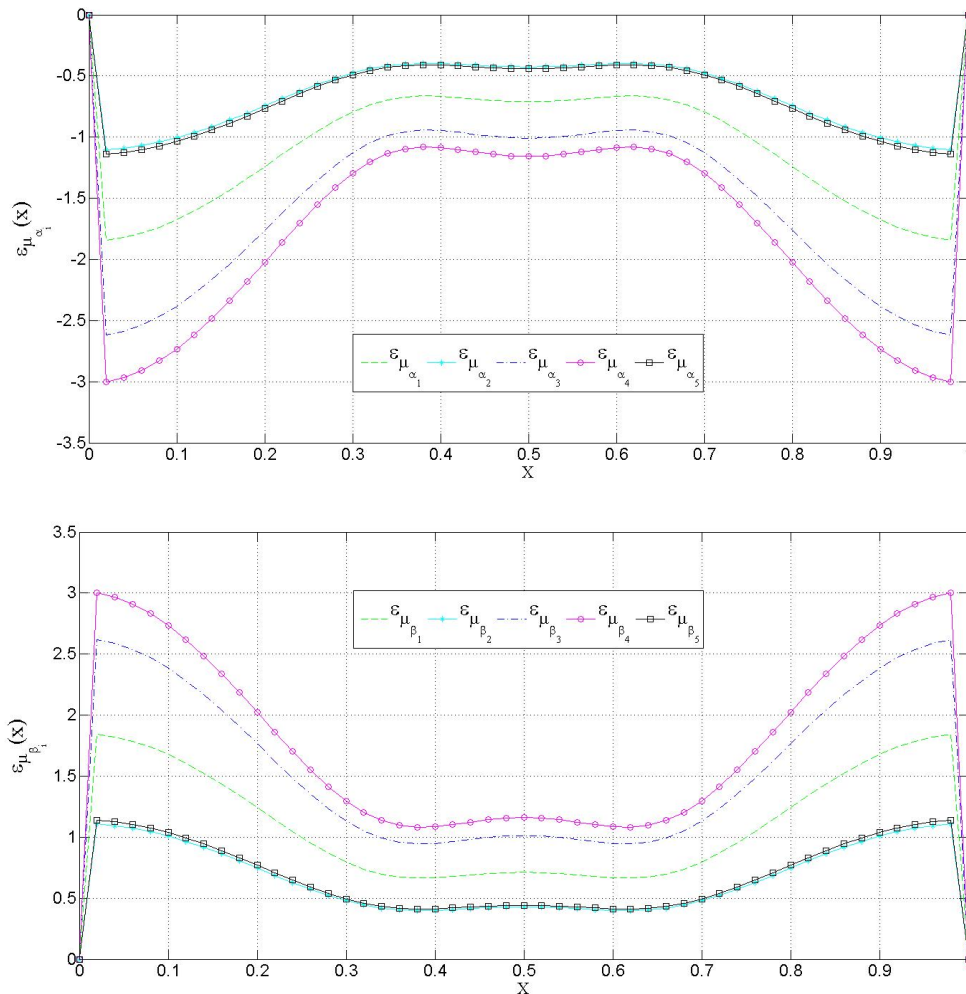


Figura 5-24 a) Gráficos das funções desvio $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}$, $i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}$, $i = 1, \dots, 5$.

A Fig. (5.25) apresenta os gráficos das funções referentes às estimativas dos momentos estatísticos de segunda ordem (correlação) obtidas, tanto do conjunto de realizações presentes no método de Monte Carlo direto, quanto das cotas inferiores e superiores, conforme Eq. (36b). Observa-se que no Fig. (5.25) foi delimitada uma região retangular, próximo, a região central da viga, e feito um zoom dentro deste mesmo retângulo, obtendo desta forma a Fig. (5.26).

Através da Fig. (5.26) (zoom da região delimitado pelo retângulo), pode-se observar a convergência, da estimativa das correlações, das cotas inferiores e superiores em relação à estimativa da correlação gerada, pelo método de Monte Carlo direto. Observa-se, o mesmo comportamento, para todos os casos, presentes em todos os exemplos, que as estimativas das correlações, obtidas pelas cotas

inferiores e superiores, que são vinculadas aos coeficientes "λ", definidos pelas Eqs. (34.b) e (34.e), $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 2,5$, e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i = 2,5$, aproximam-se mais da estimativa para valores esperados do processo obtido via simulação de Monte Carlo direta.

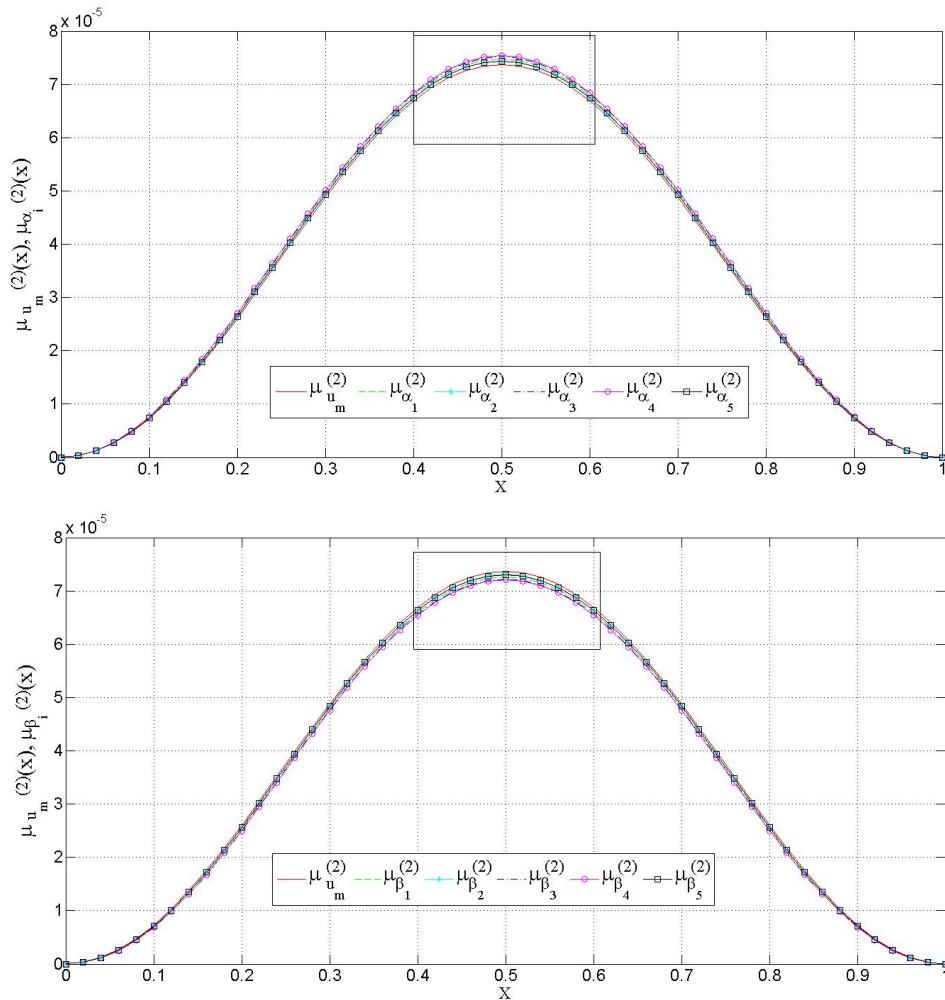


Figura 5-25 Gráficos das estimativas das correlações

a) para as cotas inferiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$;

b) para cotas superiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$.

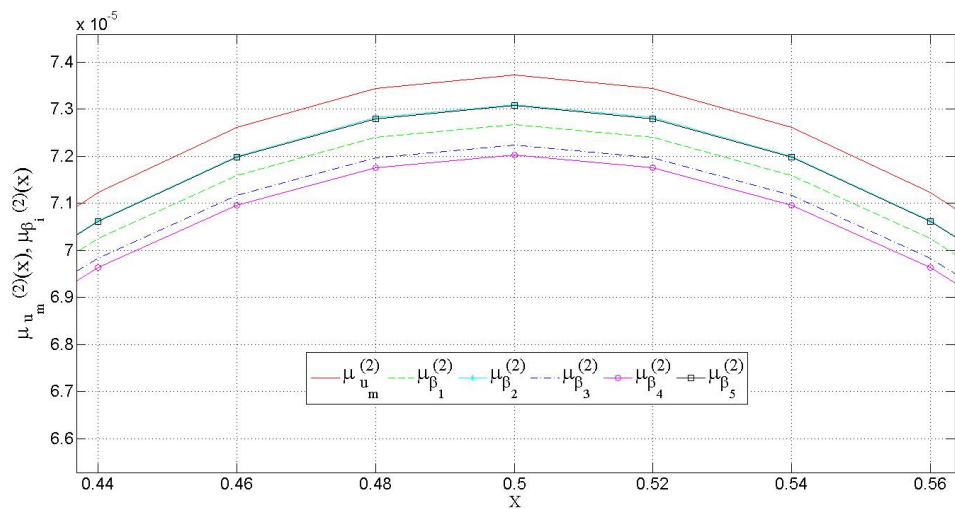
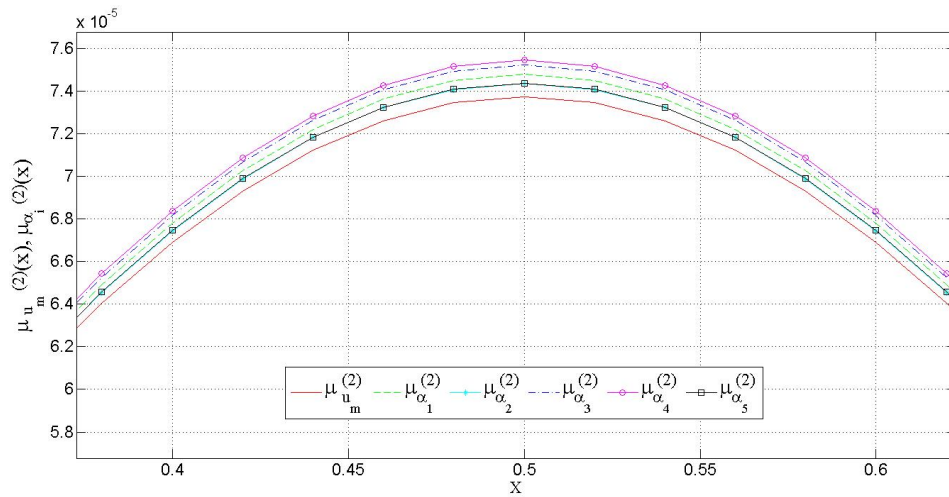


Figura 5-26

A Fig. (5.27) apresenta os gráficos das funções de desvio relativo em correlação, Eq. (38b), das cotas inferiores e superiores, em relação à correlação obtida através da simulação de Monte Carlo direta.

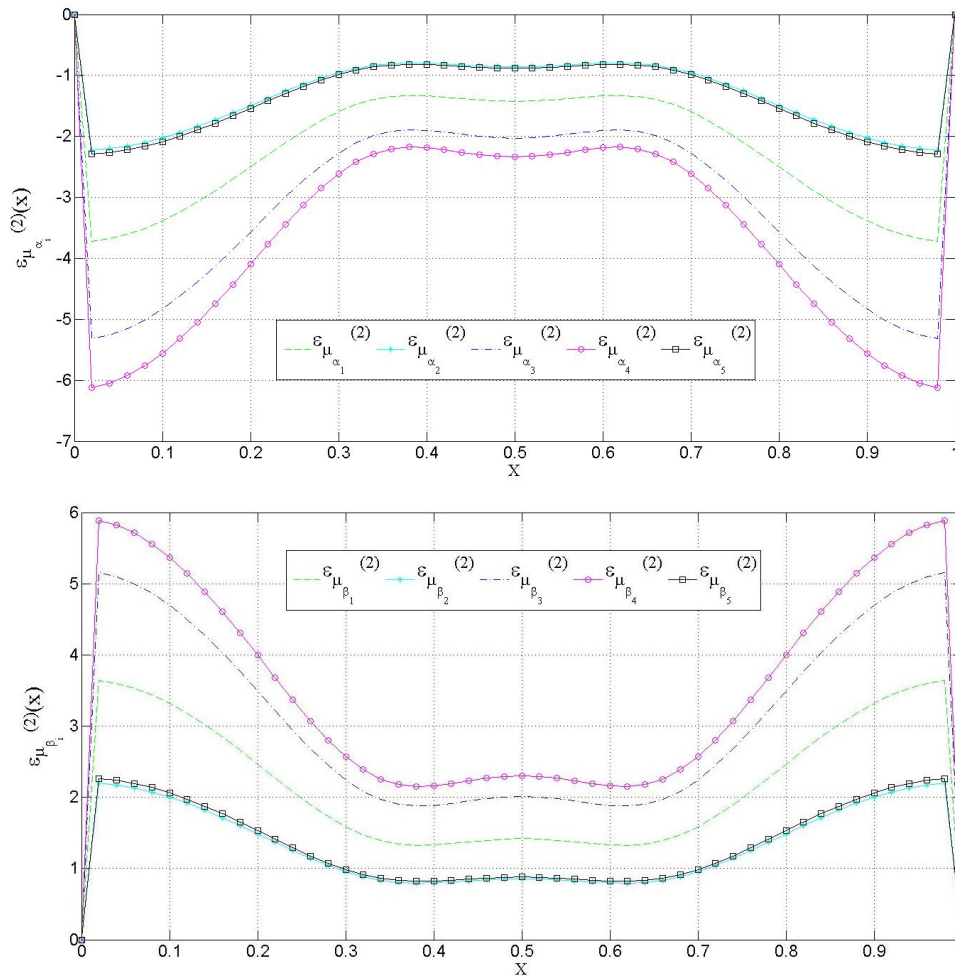


Figura 5-27 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$.

A Tab. (5.6) apresenta os valores que as funções de desvio relativo em valor esperado e correlação, assumem para um x fixo, tal que: $x = \frac{1}{2} m$. E também são apresentados os valores máximos das funções de desvio relativo, em valor esperado e correlação. Comparando-se os valores numéricos apresentados nas Tabs. (5.6) e (5.5) é constatado que o caso a, do exemplo 2, possui valores numéricos superiores.

Tabela 5-6 Avaliações numéricas das funções desvios relativos em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2} m$.

i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	1.84092755011485	-0.71039557365455	1.84255144915023	0.712056674503758
2	1.10524168669774	-0.42629509104177	1.10686558971639	0.427956191890044
3	2.61681162279859	-1.01001943549761	2.61843551763011	1.01168053634646
4	3.00074467251183	-1.15828321238765	3.00236856526551	1.15994431323635
5	1.13862567335234	-0.43918701569585	1.14024957619051	0.440848116544579
i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	3.72375911537377	-1.42632608299729	3.64308210478422	1.41853156115671
2	2.22493659234486	-0.85403729461925	2.19920814654291	0.854437134258823
3	5.31691622312442	-2.0317398796196	5.15341174900279	2.01159347412607
4	6.11735531038009	-2.33312191884747	5.88868034741713	2.30325677555224
5	2.29270691756831	-0.87997035680313	2.26497163641862	0.880070921432918

5.8 Exemplo 2-caso c: incerteza sobre o coeficiente de rigidez da fundação quando descrito pelo modelo do tipo Winkler (k_w), para uma série de Neumann, de ordem $n=0$.

No presente caso, a incerteza está presente sobre o coeficiente de rigidez da fundação, quando descrito pelo modelo do tipo Winkler, (κ_w), e a série de Neumann, é expandida somente até o primeiro termo " $n = 0$ ".

A Fig. (5.28) apresenta as estimativas dos valores esperados, gerados tanto através do método das cotas, quanto da simulação de Monte Carlo direto. A aproximação das cotas inferiores e superiores, para incerteza sobre um coeficiente (κ_w), faz com que as respostas se confundam entre si. Porém quando comparado com o mesmo caso, presente no exemplo anterior, observa-se que para este caso

em específico, há uma dispersão maior das estimativas dos valores esperados, obtidas pelas cotas inferiores e superiores, em relação à estimativa do valor esperado obtido via simulação de Monte Carlo direto. Observa-se que na Fig. (5.28) foi delimitada uma região retangular, próximo, a região central da viga. Foi feito um zoom dentro desta região delimitada pelo retângulo, obtendo desta forma o Gráf. (5.29).

Através da Fig. (5.29), (zoom da região delimitado pelo retângulo), pode-se observar a convergência, das estimativas dos valores esperados, das cotas inferiores e superiores em relação à estimativa do valor esperado gerado, pelo método de Monte Carlo direto. Observa-se, o mesmo comportamento para todos os casos já abordados, que as estimativas dos valores esperados, obtidas pelas cotas inferiores e superiores, que são vinculadas aos coeficientes " λ ", definidos pelas Eqs. (34.b) e (34.e), $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=2,5$, e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i=2,5$, aproximam-se mais da estimativa do valor esperado do processo obtido via simulação de Monte Carlo direta.

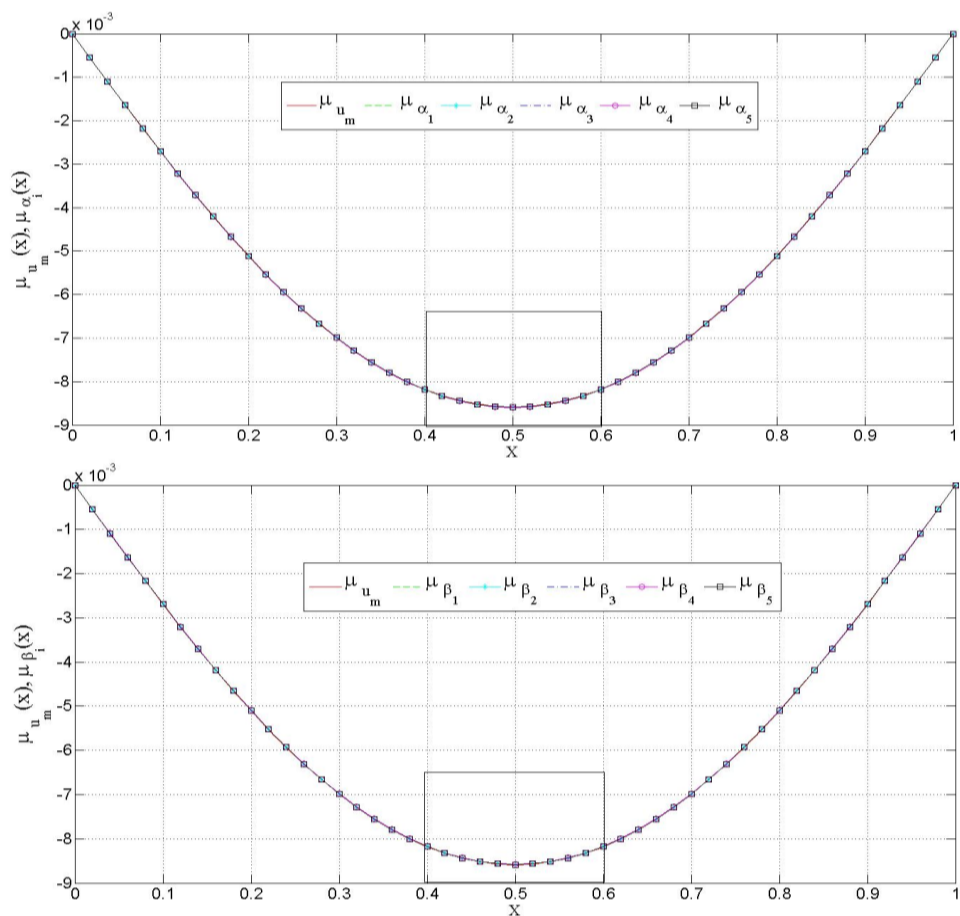


Figura 5-28 a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=1, \dots, 5$; b) Gráfico das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i=1, \dots, 5$.

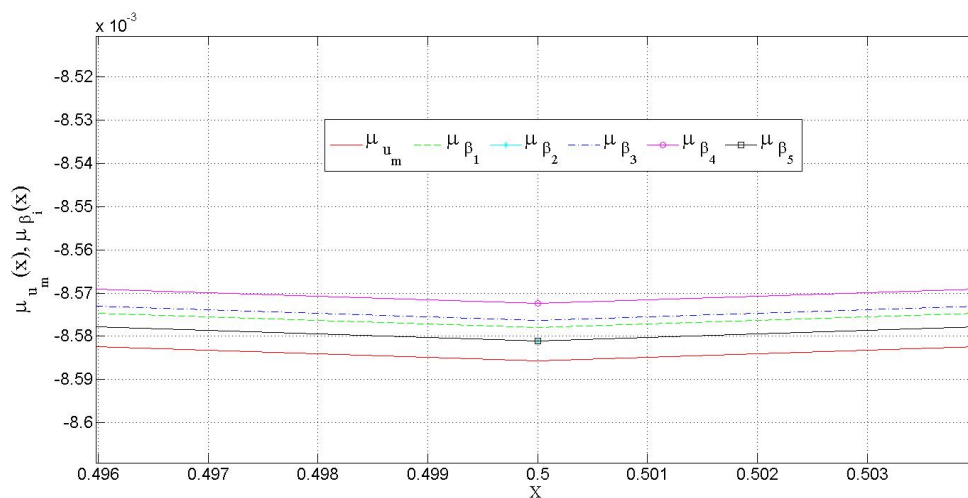
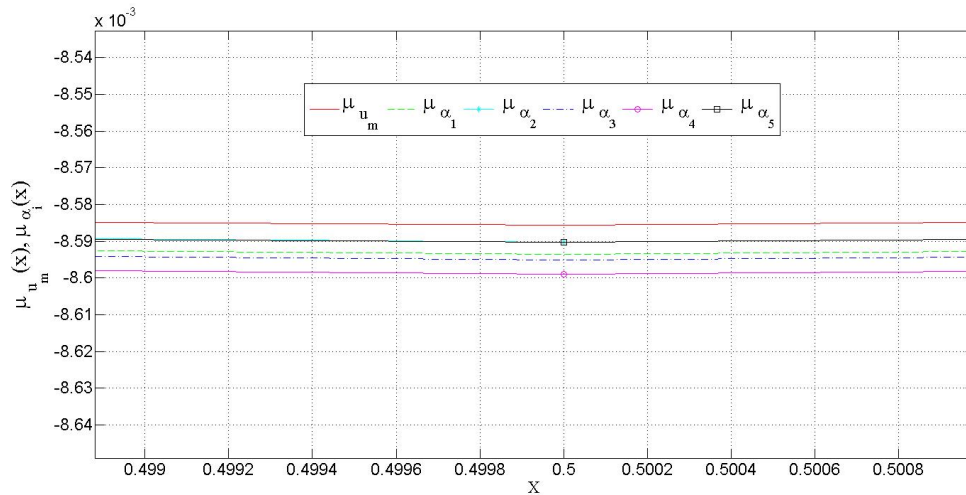


Figura 5-29 Zoom da região central

- a) Gráficos das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}, i=1, \dots, 5$;
 b) Gráfico das estimativas $\hat{\mu}_{u_m}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}, i=1, \dots, 5$.

A Fig. (5.30) apresenta os gráficos das funções de desvio relativo em valor esperado para as cotas inferiores e superiores. Comparando-se os gráficos dos casos anteriores, Fig.(5.19) e Fig.(5.24), deste mesmo exemplo, (exemplo 2), constata-se que, para esse caso em específico, as estimativas obtidas a partir das cotas apresentaram os menores desvios relativos em valor esperado. Porém quando comparado com o mesmo caso, presente no exemplo anterior, Fig. (5.13), observa-se que quando a série de Neumann é expandida somente até o primeiro termo, " $n=0$ ", as estimativas obtidas a partir das cotas apresentaram maiores valores de desvios relativos em valor esperado.

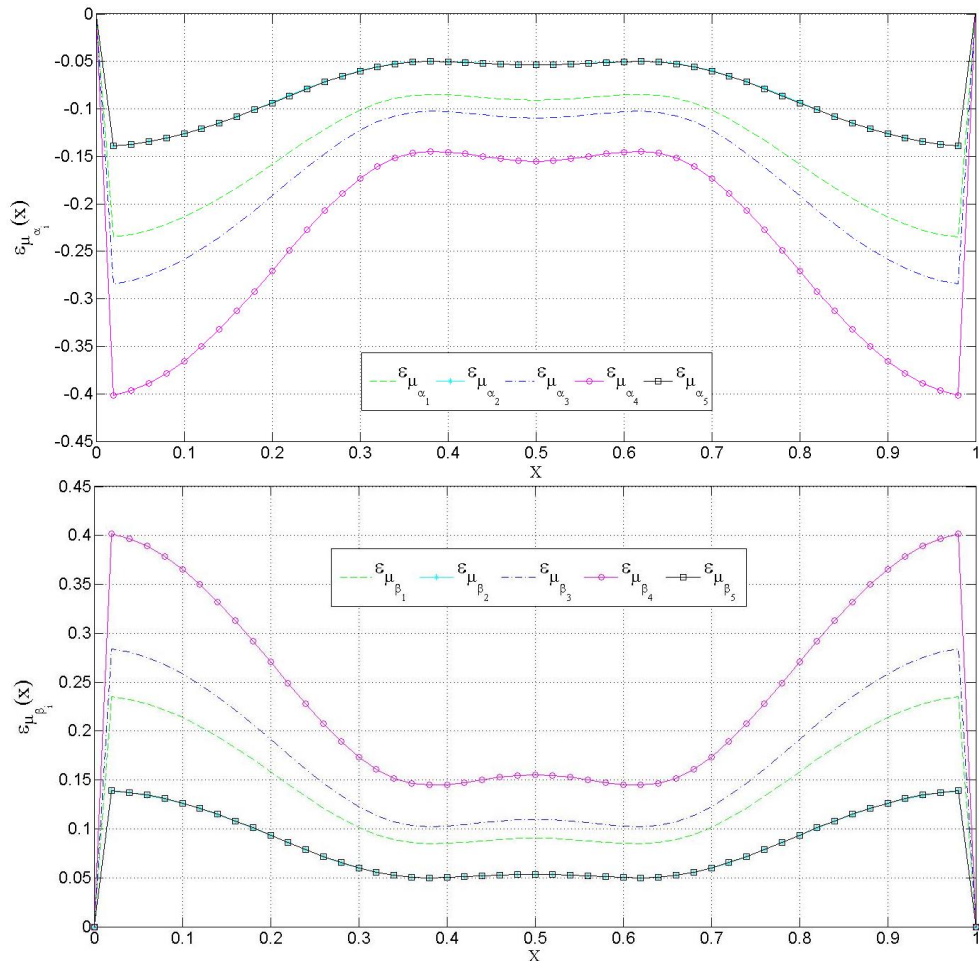


Figura 5-30 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}$, $i=1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções

$$\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}, i=1, \dots, 5.$$

A Fig. (5.31) apresenta os gráficos das funções referentes às estimativas do momento estatístico de segunda ordem (correlação) obtida, a partir do conjunto de realizações do método de Monte Carlo direto, e das cotas inferiores e superiores, conforme Eq.(36b). Novamente é observado a aproximação das cotas inferiores e superiores, quando a incerteza repousa sobre o coeficiente de rigidez, (κ_w). Esta aproximação faz com que as respostas se confundam entre si. Observa-se que na Fig. (5.31) foi delimitada uma região retangular, próximo, a região central da viga, e feito um zoom dentro deste mesmo retângulo, obtendo desta forma o Gráf. (5.28).

Através do Fig.(5.31) (zoom da região delimitado pelo retângulo), pode-se observar a convergência, da estimativa das correlações, das cotas inferiores e superiores em relação à estimativa da correlação gerada, pelo método de Monte Carlo direto. Observa-se, o mesmo comportamento de todos os casos anteriores já

abordados, em que as estimativas das correlações, obtidas pelas cotas inferiores e superiores, que são vinculadas aos coeficientes " λ ", definidos pelas Eqs. (34.b) e (34.e), $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i=2,5$, e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i=2,5$, aproximam-se mais da estimativa para valores esperados do processo obtido via simulação de Monte Carlo direta.

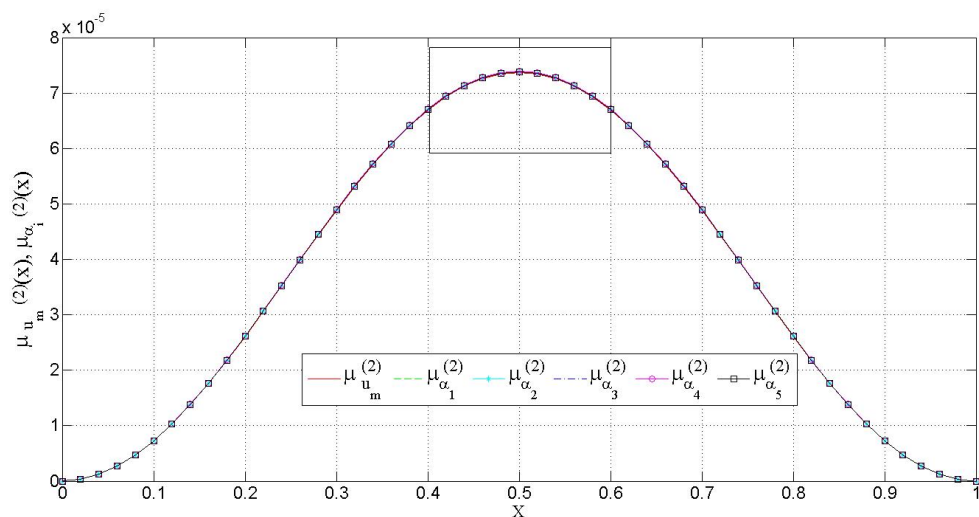
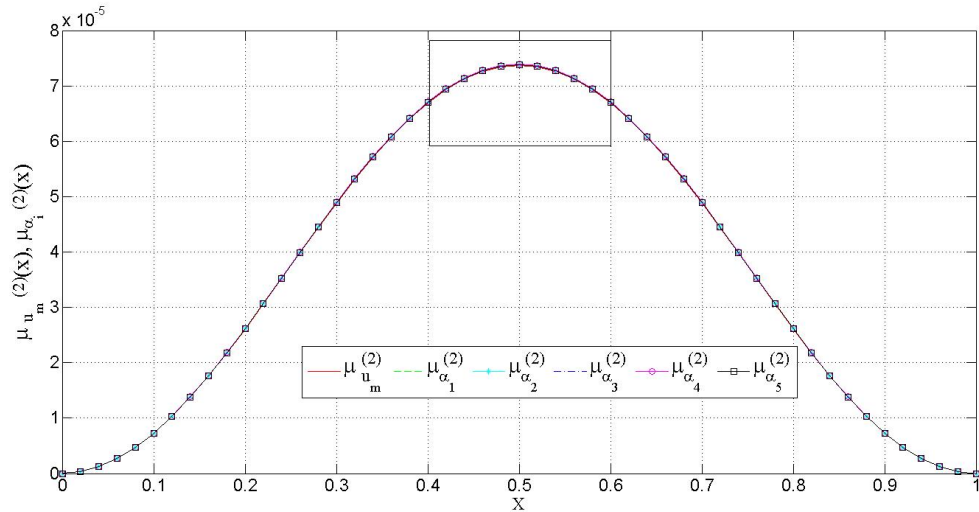


Figura 5-31 Gráficos das estimativas das correlações

a) para as cotas inferiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i=1, \dots, 5$;

b) para cotas superiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i=1, \dots, 5$

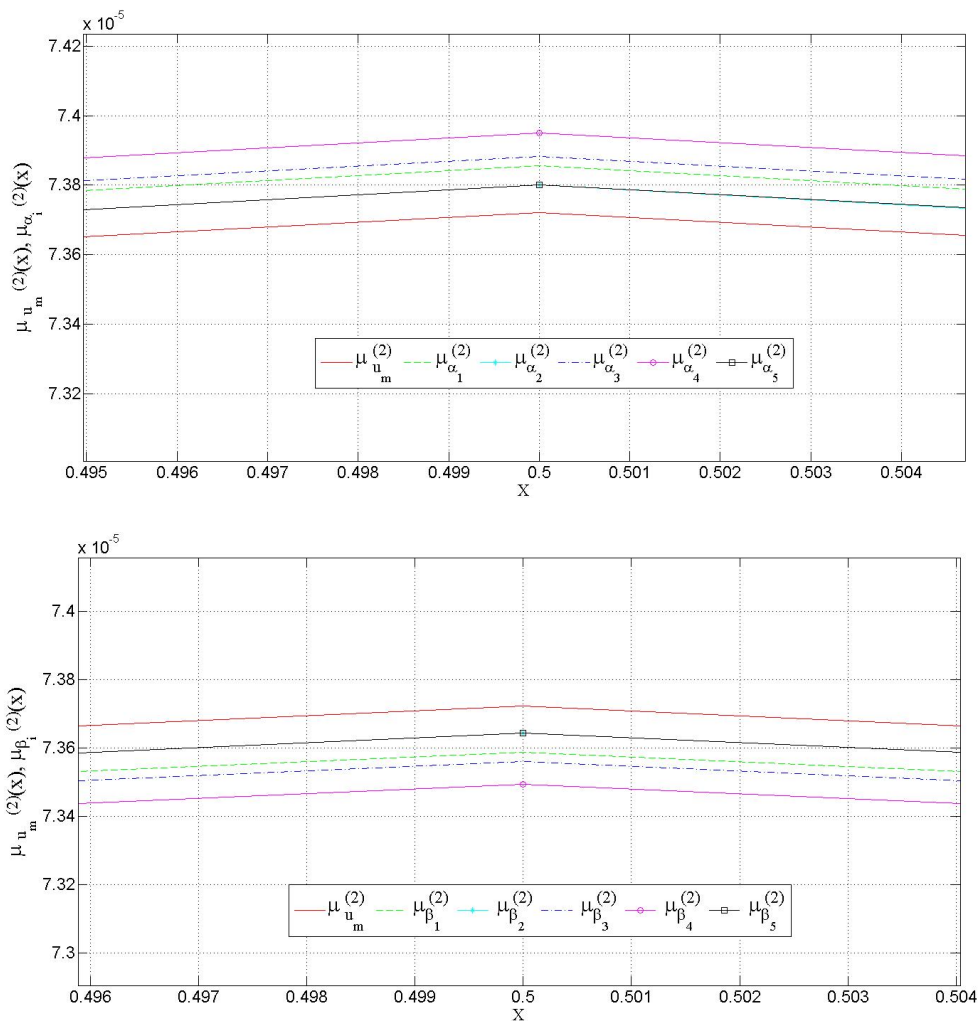


Figura 5-32 Zoom da região central do Gráfico das estimativas das correlações
 a) para as cotas inferiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$;
 b) para cotas superiores $\hat{\mu}_{u_m}^{(2)}$ e $\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$.

No Fig. (5.33) apresentam-se os gráficos das funções desvio relativo em correlação, Eq. (38b), das cotas inferiores e superiores, em relação à correlação obtida através da simulação de Monte Carlo direta. Novamente, comparando-se os Fig. (5.32) e Fig. (5.33), constata-se que as cotas obtidas através das Eqs. (34b) e (34e) apresentaram melhor desempenho.

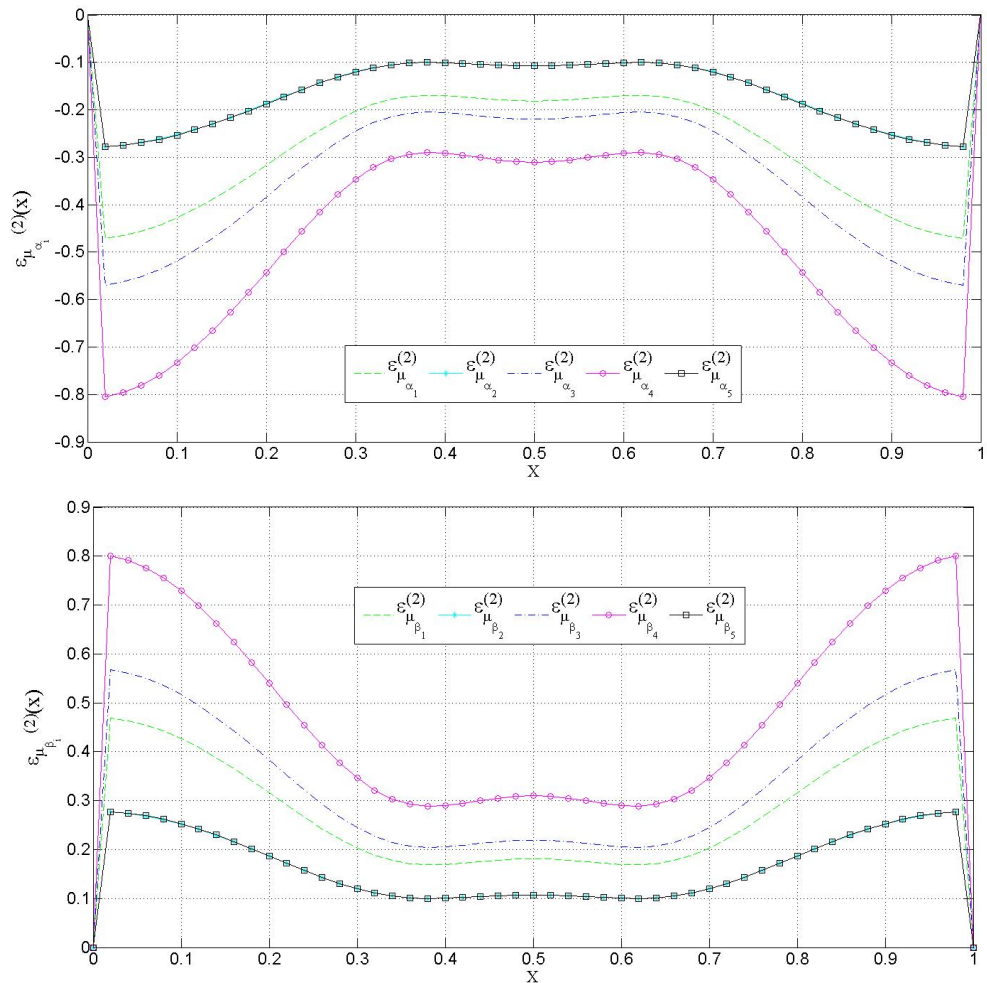


Figura 5-33 a) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\alpha_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$; b) Gráficos das funções $\varepsilon_{\mu_{\beta_i}}^{(2)}, i = 1, \dots, 5$.

A Tab. (5.7) apresenta os valores das funções de desvio relativo em valor esperado e correlação, referentes ao ponto $x = \frac{1}{2} m$, e também são apresentados os valores máximos que as funções desvios apresentam, ao longo do seu domínio. Neste caso são constatados os menores valores numéricos para as funções desvio em valor esperado e correlação, para este exemplo em particular. Outro aspecto a ser salientado, é que as funções desvios em valor esperado e correlação, quando calculadas de acordo com as definições de norma de matriz dadas pelas Eqs. (34b) e (34e) apresentam valores mais próximos das respostas obtidas via método de Monte Carlo direto, o mesmo comportamento é observado nos casos anteriores.

Tabela 5-7 Avaliações numéricas das funções de desvios relativos em valor esperado e correlação, em seu valor máximo e em $x = \frac{1}{2}$ m.

i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	0.234864905514187	-0.090686115540	0.23490249515622	0.09072442244919
2	0.138632803000815	-0.053524069637	0.1386703926487	0.053562376546
3	0.284177319450829	-0.109729139047	0.28421490908963	0.1097674459559
4	0.4014775347295	-0.155027078827	0.40151512436175	0.1550653857360
5	0.138908504686452	-0.05363053762	0.1389460943339	0.05366884453849
i	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}(x) \right\}$	$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(2)}}\left(\frac{1}{2}\right)$
1	0.470508439878325	-0.181471856585	0.46902601856808	0.18134908021487
2	0.27751826250122	-0.107069345364	0.27708792950967	0.10710346484663
3	0.569414187764616	-0.219599787523	0.5673698528333	0.21939321408461
4	0.805286937457583	-0.310385383825	0.8006977891958	0.30979930739729
5	0.278070763784788	-0.107282445026	0.27763823455770	0.10731623698845

5.9 Conclusão do exemplo 2

As cotas que estão vinculadas, ao cálculo de norma de matriz definidos pelas Eqs. (34b,e), conforme pode ser constatado pelas Tabs. (5.5), (5.6) e (5.7) obtiveram bom desempenho, pois apresentaram os menores valores numéricos, para as funções desvio em valor esperado e correlação. Comparando-se os valores presentes nas Tabs. (5.5), (5.6) e (5.7), e o tempo de processamento apresentado pela Tab. (5.4), é constatado que a cota de deslocamento tanto inferior quanto superior, vinculada ao cálculo da norma de matriz definida pela Eq. (34e), é

extremamente eficiente. E uma vez exposta à eficiência representada pelas cotas " $\hat{\mu}_{\alpha_5}$, e $\hat{\mu}_{\beta_5}$ ", é construída a Tab. (5.8).

Na Tab. (5.8), são tabuladas as estimativas dos valores esperados e variâncias, e o coeficiente de dispersão de uma variável randômica " $u_m(\frac{1}{2}, \xi)$ ", gerada tanto pelas cotas " $\hat{\mu}_{\alpha_5}$, e $\hat{\mu}_{\beta_5}$ ", quanto pela simulação de Monte Carlo direta, para os casos a, b, e c. Observa-se que o caso a, de ambos os exemplos, apresentou o maior valor numérico para a estimativa do coeficiente de dispersão (diferença entre o valor máximo, e o valor mínimo de deslocamento, em um ponto fixo), ou seja, quando a incerteza está associada ao coeficiente de rigidez a flexão, a incerteza propaga-se mais intensamente, do que quando está sobre os coeficientes de rigidez da fundação, (casos b, e c). Mesmo assim, comparando-se os valores na Tab. (5.8) observa-se que a estimativa de dispersão do processo de flexão estocástica é, numericamente, inferior a dispersão dos coeficientes de rigidez da viga e da fundação, conforme descrito pela Eq.(40).

Tabela 5-8 Estimativas para o valor esperado, variância e coeficiente de dispersão da variável randômica $u_m(\frac{1}{2}, \xi)$, e as suas cotas inferior e superior.

Caso	$\hat{\mu}_{u_m}(\frac{1}{2})$	$\hat{\sigma}_{u_m}^2(\frac{1}{2})$	$ \hat{\delta}_{u_m}(\frac{1}{2}) $
A	- 0.00860180295005772	1.32634729006993e-07	0.00230149115378652
B	-0.00858577178122925	6.01831296468297e-10	0.000141112670422128
C	- 0.00858570211652379	1.41594345019521e-11	2.17141249857795e-05
Caso	$\hat{\mu}_{\alpha_5}(\frac{1}{2})$	$\hat{\sigma}_{\alpha_5}^2(\frac{1}{2})$	$ \hat{\delta}_{\alpha_5}(\frac{1}{2}) $
A	-0.00856402494838532	$2.36025371713737 \times 10^{-7}$	0.0550991804474795
B	- 0.00862347937608969	3.61978900663114e-10	0.000109021238242902

C	- 0.00859030667472814	8.72469528553198e-12	1.58114062736425e-05
Caso	$\hat{\mu}_{\beta_5} \left(\frac{1}{2} \right)$	$\hat{\sigma}_{\beta_5}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$	$\left \hat{\delta}_{\beta_5} \left(\frac{1}{2} \right) \right $
A	- 0.00863958095173012	$2.42484903000134 \times 10^{-7}$	0.058615476798602
B	-0.00854792156804089	3.61978900663113e-10	0.000109021238242902
C	- 0.00858109426940234	8.724695285532e-12	1.58114062736425e-05

A Tab. (5.8) permite observar que os valores numéricos para os casos a, e c, consta-se que $\hat{\sigma}_{\alpha_4}^2 \left(\frac{1}{2} \right) < \hat{\sigma}_{\beta_4}^2 \left(\frac{1}{2} \right)$. Porém não é necessário que isso ocorra. Na Tab. (5.8), para o caso b, observa-se um comportamento contrário. Isso ocorre, pois as cotas garantem, para cada amostra estrutural, o "envelopamento" da realização do processo de flexão estocástica. Apesar disso, não garantem, que ocorra tal "envelopamento" da estimativa da função variância do processo estocástico de deslocamento. Na Fig. (5.34) é apresentado, todas as amostras de deslocamentos sofridos pela viga, geradas pelas simulações de Monte Carlo direto, para todos os casos a, b, e c. Na Fig. (5.34) é observado, o "envelopamento", gerado por todas as amostras de deslocamento oriundas do processo estocástico, e também é observado, uma maior propagação da dispersão quando a incerteza está associada ao coeficiente de rigidez a flexão, EI , ou seja, ao termo associado a derivada de maior ordem. A dispersão diminui conforme a diminui a ordem da derivada, a qual a incerteza está atrelada.

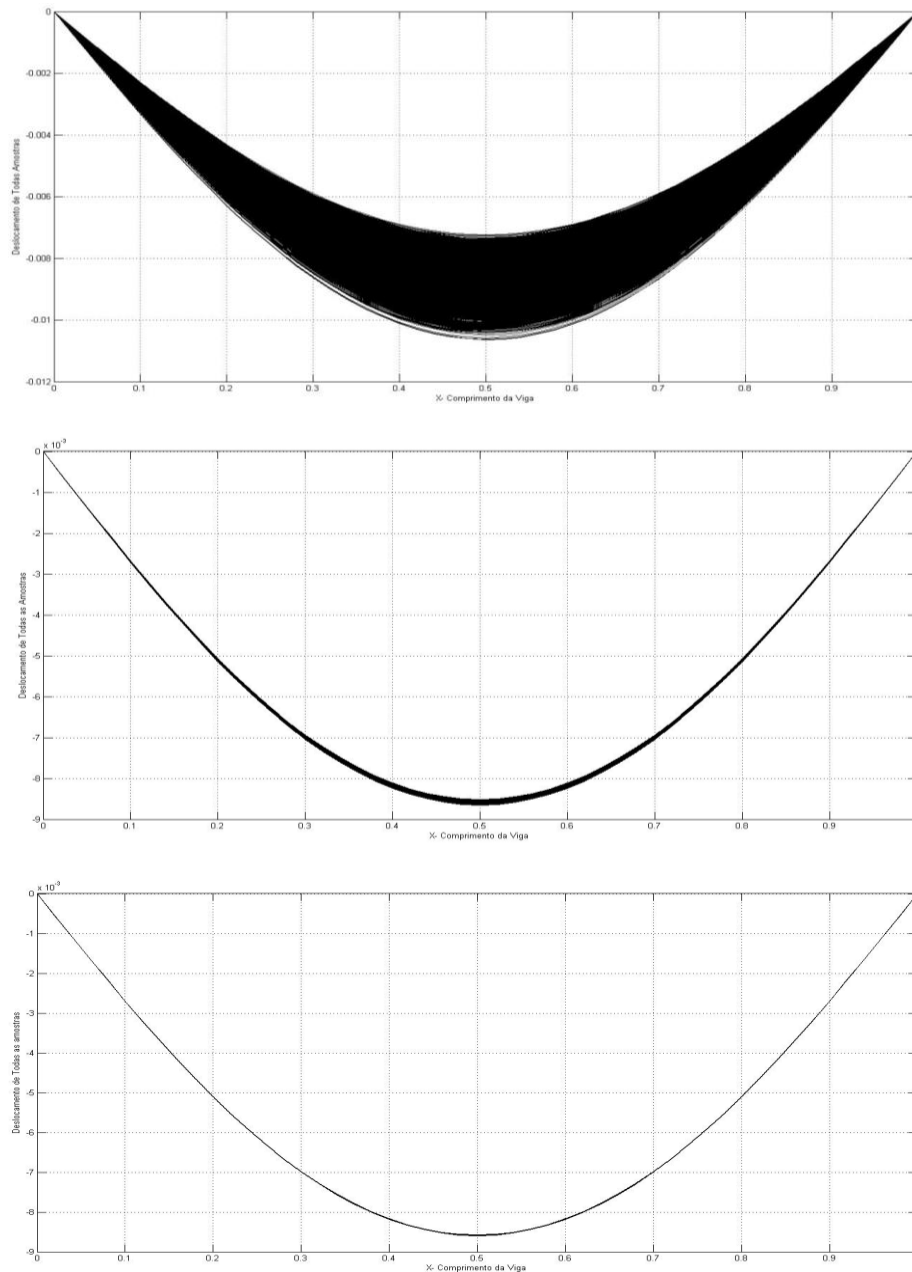


Figura 5-34 Todas as amostras de deslocamento sofrido pela viga, obtidas via simulação de Monte Carlo direta:

a) Incerteza no coeficiente EI , **b)** Incerteza em κ_p , **c)** Incerteza em κ_w

Na Tabela 5.9, observa-se que os valores são idênticos dos apresentados pela Tab.(5.4), exceto dos valores da aplicação estocástica da série de Neumann. As cotas definidas pelas Eqs. (34a) e (34b) apresentaram o maior tempo de computação, (T_1) e (T_2). Ao comparar-se o tempo de computação e os valores numéricos das funções desvios relativos em valor esperado e correlação, conclui-se

que as cotas que definidas pelas Eqs. (34c) e (34e), cujo o tempo de processamento são representados por (T_3), e (T_5), foram as que apresentaram maior eficiência, para os caso b, apresentado neste trabalho. Em particular, para o caso C, conforme apresentado na Tab. (5.9), os valores numéricos das funções desvios relativos em valor esperado e correlação indicam que as cotas dessas estatísticas desviam-se pouco em relação às estimativas calculadas via simulação de Monte Carlo direto, porém observa-se que, somente, as cotas vinculada a norma de matriz calculada conforme a Eq. (34e) foi obtida com um tempo mais de três vezes menor.

Tabela 5-9 Tempo em segundos, do processamento computacional, via Monte Carlo, e de suas respectivas cotas inferiores e superiores.

Casos	T_{MC}	T_{SN}	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
A	111.254	-	423.023	135.105	-	90.462	26.542
B	108.689	-	401.078	139.318	24.676	36.304	13.595
C	100.547	-	445.854	335.883	106.655	133.067	36.217

Nos exemplos apresentados, a proposição de cotas inferior e superior apresentou-se como uma estratégia eficiente para obter estimativas para o valor esperado e correlação do processo estocástico de deslocamentos, para uma série de Neumann de ordem $n=0$. Para as definições das cotas, foram examinadas as diferentes propostas para o coeficiente " λ ", Eq. (34). A definição que apresentou os menores valores numéricos tanto para a função de desvio relativo em valor esperado, quanto para função de desvio relativo de correlação foi aquela em que o coeficiente " λ " é calculado conforme a Eq. (34b). Apesar disso, é a que apresentou o maior tempo de processamento computacional. Em particular, as cotas que foram obtidas com o coeficiente " λ " definido pelas Eqs. (34e), (34c) apresentaram o melhor desempenho, em termos das funções desvio relativo em valor esperado e correlação, porém a que apresentou em especial a melhor eficiência em termos computacionais foi a cota calculada de acordo com a Eq. (34e).

6 CONCLUSÃO E SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho apresenta-se uma aplicação inédita, da série de Neumann, sobre o problema de flexão de viga de Euler-Bernoulli apoiada em uma fundação de Pasternak, com incerteza sobre os coeficientes de rigidez a flexão da viga e da fundação. Para a modelagem da incerteza, sobre os coeficientes, foram utilizados processos estocásticos parametrizados. O método de simulação de Monte Carlo direto foi utilizado para estimar os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem das respostas, a partir do conjunto das realizações do processo estocástico de deslocamento transversal da viga. Cada realização, ou função amostral foram obtidas através de aproximações numéricas via método de Galerkin.

No capítulo anterior foi apresentado um resultado teórico, na forma de exemplos, lembrando que para cada amostra estrutural dos coeficientes, a existência e unicidade do problema variacional é assegurada pela aplicação do teorema de Lax-Milgram. A partir disso, são utilizadas as propriedades da série de Neumann, para obter cotas inferiores e superiores, para cada realização do processo estocástico de deslocamento transversal da viga. A definição dessas cotas depende do valor numérico da norma da matriz presente em cada realização. Com base nisso são examinadas cinco propostas para tal definição. Essas propostas baseiam-se na equivalência entre normas de matrizes, $(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty, \max|\cdot|, \|\cdot\|_F)$. Para avaliar a estratégia proposta neste trabalho são apresentados dois exemplos numéricos, com três casos distintos, nos quais são utilizadas as diferentes propostas de definições para cálculo de norma de matriz, para a obtenção das estimativas para valor esperado e correlação das cotas inferiores e superiores.

As conclusões retiradas dos exemplos numéricos foram as seguintes:

- As estimativas dos valores esperados obtidas tanto para as cotas inferiores, quanto superiores, apresentaram melhor desempenho, do que as estimativas para a correlação.
- Quando a incerteza repousa sobre o coeficiente de rigidez do solo, quando descrito conforme o modelo do tipo Winkler, independente da

ordem da série de Neumann, observa-se que as estimativas dos momentos estatísticos apresentam uma menor propagação da incerteza, do que as estimativas obtidas quando a incerteza repousa sobre o coeficiente de rigidez da viga. Esse comportamento é intrínseco da "sensibilidade" da resposta, em relação a variações percebidas, nos coeficientes que estão associados ao operador diferencial de maior ordem presente no modelo matemático.

- As definições das cotas, baseadas nas normas 2 e de Frobenius ($\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_F$), foram as que apresentaram menor desvio, em relação as soluções, obtidas por simulação de Monte Carlo direta. Por outro lado, a proposta obtida com a norma 2, apresentou-se menos "eficiente", por exigir maior tempo de computação.
- A proposta baseada na norma de Frobenius apresentou, para todos os exemplos, um menor tempo de computação, quando comparado a norma 2. Em vista disso, essa proposta foi a mais eficiente. Além da economia computacional, esta proposta em particular foi a que apresentou os menores desvios relativos para valor esperado e correlação, comparada às outras definições, excetuando a definição de norma 2. Para incerteza sobre o coeficiente de rigidez do solo descrito de acordo com o modelo de fundação tipo Winkler, a economia do tempo de processamento chega a ser aproximadamente três vezes menor, portanto quando a incerteza repousa sobre o coeficiente de rigidez do solo, as cotas utilizadas vinculadas a norma de Frobenius são uma alternativa realmente muito eficiente.
- As estimativas dos valores esperados, de deslocamento das cotas inferiores, de todos os casos, apresentaram uma aproximação maior, em relação à estimativa do valor esperado gerado via simulação de Monte Carlo direta. Portanto as cotas superiores são menos eficientes.

É importante mencionar que nesse trabalho, não foi realizado um estudo sobre a influência, da dimensão do sistema linear de equações. Sugere-se que tal estudo seja realizado em trabalhos futuros. Desta forma, utilização da estratégia proposta através do uso da série de Neumann, com ordem baixa e cálculo das cotas, para os problemas que foram apresentados neste trabalho, mostra-se uma alternativa eficiente, em relação à simulação de Monte Carlo direta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araújo J.M., Awruch A.M. (1994), On stochastic finite elements for structural analysis *Computers & Structures*, v. 52, n. 3, p. 461-469.

Babuska I., Tempone R, Zouraris GE. (2005) "Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method: the stochastic formulation." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, n. 12-16, p. 1251-1294.

Brenner SC., Scott LR. (1994), *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag.

Cabral A.P. Marco (2013), *Introdução a teoria da medida e integral de lebesgue*.

Chakraborty S., Bhattacharyya B. (2002) An efficient 3D stochastic finite element method, *International Journal of Solids and Structures*, v. 39, n. 9, p. 2465-2475.

Chakraborty S., Dey S.S. (1995), Stochastic finite element method for spatial distribution of material properties and external loading, *Computers & Structures*, v. 55, n. 1, p. 41-45.

Chakraborty S., Dey S.S. (1996) Stochastic finite element simulation of random structure on uncertain foundation under random loading, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 38, n. 11 , p. 1209-1218.

Chakraborty S., Dey S.S. (1998) A stochastic finite element dynamic analysis of structures with uncertain parameters *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 40, n. 11, p. 1071-1087.

Chakraborty S., Sarkar S. K. (2000) Analysis of a curved beam on uncertain elastic foundation *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 36, n. 1, p. 73-82.

Golub GH., Van Loan CF, (2012) *Matrix Computations*, Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences.

Grigoriu, M. (1995) *Applied Non-Gaussian Processes: Examples, Theory, Simulation, Linear Random Vibration, and Matlab Solution*. Prentice Hall.

Lei Z., Qiu C. (2000) Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation *Computers & Structures*, v. 77, n. 6, p. 651-657.

Olsson AMJ., Sandberg GE. (2002) "Latin Hypercube Sampling for Stochastic Finite Element Analysis." *Journal of Engineering Mechanics*; v. 128, n. 1, p. 121-125.

P.L. Pasternak (1954) New method of calculation for flexible substructures on two-parameter elastic foundation, *Gosudarstvennoe Izdatelstvo, Literaturi po Stroitelstvu Arkhitekture, Moskau*, , pp. 1–56 (in Russian).

Rao MM., Swift JR. (2010), *Probability Theory with Applications*. Springer; 2nd ed.

Schevenels M., Lombaert G., Degrande G., Clouteau D. (2007) The wave propagation in a beam on a random elastic foundation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 22, n. 2, p. 150-158.

Winkler (1867)., *Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit*, Prague , p. 182.

Yosida K. (1978) *Functional analysis* Springer Berlin.

APÊNDICE A – Formulação variacional

A formulação forte do problema de flexão estocástica de uma viga apoiada em fundação de Pasternak é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } u \in H^2((\Omega, \mathcal{F}, P); C^4(0, l)), \text{ tal que,} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\kappa_p \frac{du}{dx} \right) + \kappa_w u = q, \forall (x, \omega) \in (0, l) \times \Omega; \\ u(0, \omega) = u(l, \omega) = 0; \\ \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{(0, \omega)} = \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{(l, \omega)} = 0, \quad \forall \omega \in \Omega; \end{array} \right\},$$

multiplicando a equação diferencial, por uma função v , tal que v , goza das seguintes propriedades:

$$\left\{ v(0) = v(L) = 0 \wedge \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \right\},$$

tem-se,

$$\int_0^L \left(\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\kappa_p \frac{du}{dx} \right) + \kappa_w u \right) \cdot v \cdot dx = \int_0^L (q \cdot v) \cdot dx.$$

Trabalhando somente o primeiro termo da equação que acompanha o termo de rigidez a flexão, e aplicando a regra do produto de derivadas, tem-se:

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot v \cdot dx = \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot v \right) \cdot dx - \int_0^L \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot \frac{dv}{dx} \right) \cdot dx, \quad (1)$$

aplicando os limites de integração, as condições de contorno, e o teorema fundamental do cálculo, no primeiro termo após a igualdade da Eq.(1) tem-se:

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot v \right) \cdot dx = \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot v \right) \Big|_0^L = 0,$$

da regra do produto de derivadas, aplicada ao segundo termo da Eq.(1) tem-se:

$$\int_0^L \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot \frac{dv}{dx} \right) dx = \int_0^L \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{dv}{dx} \right) \right) dx - \int_0^L \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx,$$

aplicando os limites de integração, as condições de contorno, e o teorema fundamental do cálculo tem-se:

$$\int_0^L \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{dv}{dx} \right) \right) dx = EI \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{dv}{dx} \Big|_0^L = 0.$$

Portanto:

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot v \cdot dx = \int_0^L \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx.$$

O mesmo procedimento é tomando para os demais termos, de tal forma que o problema variacional (PV), fica definido como:

$$a(u, v) = \int_0^l \left(EI(x, \omega_i) \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} + \kappa_P(x, \omega'_i) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + \kappa_W(x, \omega''_i) uv \right) dx$$

APÊNDICE B – Conceitos matemáticos

No presente apêndice b é apresentado os conceitos necessários, para a prova da existência e unicidade do problema variacional, definições de norma de matriz, e equivalência de matrizes.

Definição 1. (Desigualdade de Cauchy-Schwartz): Sejam u e v , duas funções integráveis. A desigualdade de Cauchy-Schwartz é definida como:

$$\left| \int_0^l u.v.dx \right| \leq \left(\int_0^l u^2.dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^l v^2.dx \right)^{1/2} .$$

Definição 2 .(Norma de uma função). A norma de uma função definido em H^2 , ou seja, o quadrado da função u , da primeira derivada e da derivada de ordem dois, também são integráveis. A norma portanto definida como:

$$\|u\|_{H^2} = \left[\int \left(u^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 \right) dx \right]^{1/2} .$$

Definição 3.(Norma de Frobenius). Dada uma matriz A , $m \times n$, a norma de Frobenius, é definida como:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2} .$$

Definição 4.(Norma de Matriz). Dada uma matriz quadrada A . A norma de A é definida como:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T.A)},$$

sendo: $\lambda_{m\acute{a}x}(A^T.A)$, o máximo autovalor, da multiplicao da transposta de A , por A .

Definiao 5. (Momentos de primeira, e segunda ordem). A partir de, um conjunto de realizaoes, $\left(\left\{u_m(x, \xi(\omega_j))\right\}_{j=1}^N, \forall x \in [0, l]\right)$, do problema de flexão estocástica de uma viga com vão " l ", a estimativa para o momento de primeira, e segunda ordem são definidas por:

$$\begin{cases} \widehat{\mu}_{u_m}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_m(x, \xi(\omega_j)), \forall x \in [0, l]; \\ \widehat{\mu}_{u_m}^{(2)}(x, y) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N u_m(x, \xi(\omega_j)) u_m(y, \xi(\omega_j)), \forall (x, y) \in [0, l]^2. \end{cases}$$

Definiao 6. Dada uma matriz A quadrada $m \times m$, as equivalências de normas serão dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{m}} \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_1 &\leq \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_2 \leq \sqrt{m} \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_1 \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_\infty &\leq \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_2 \leq \sqrt{m} \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_\infty \\ \|A\|_{m\acute{a}x} &\leq \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_2 \leq m \|A\|_{m\acute{a}x} \end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{cases} \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m |p_{ij}(\xi_k)|; \\ \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |p_{ij}(\xi_k)|; \\ \|\mathbf{P}(\xi_k)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |p_{ij}(\xi_k)|^2}. \end{cases}$$

Definição 7. : As funções de desvio relativo para os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem $\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(k)}}, \varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(k)}} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, (valor esperado $k=1$ e correlação $k=2$),

$$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(k)}}(x) = \begin{cases} (100\%) \cdot \left[1 - \frac{\hat{\mu}_{\alpha_i}^{(k)}(x)}{\hat{\mu}_{u_m}^{(k)}} \right], & \forall x \in (0, l); \\ 0, & \forall x \in \{0, l\}, i = 1, \dots, 5; \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(k)}}(x) = \begin{cases} (100\%) \cdot \left[1 - \frac{\hat{\mu}_{\beta_i}^{(k)}(x)}{\hat{\mu}_{u_m}^{(k)}} \right], & \forall x \in (0, l); \\ 0, & \forall x \in \{0, l\}, i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$