Um Método para Escalonar Sistemas de Equações Lineares Usando Somente Determinante de Ordem 2

A Method to Assign Systems of Linear Equations Using Only Determinant of Order Two

Adilandri Mércio Lobeiro
Coordenação de Informática - COINF
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Campo Mourão, PR
alobeiro@utfpr.edu.br

Liliana Madalena Gramani
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, PR
gramani@ufpr.br

Resumo: Este artigo propõe um método para simplificação do modelo tradicional do escalonamento de sistemas de m equações e n incógnitas, usando somente determinante de ordem dois. O método proposto é aplicado e desenvolvido em uma sequência de sistemas de equações lineares destacando a sua simplicidade de utilização.

Palavras-chave: determinante de ordem dois; escalonamento; sistemas de equações lineares.

Abstract: This paper proposes a method for simplification of the traditional model of scheduling systems of m equations in n unknowns, using only determinant of order two. The proposed method is applied and developed in a sequence of systems of linear equations emphasizing its simplicity of use.

Key words: determinant of order two; scheduling; systems of linear equations.

Recebido em 16/08/2010 - Aceito em 15/12/2010.

1 Introdução

O presente artigo descreve um método para simplificação do modelo tradicional do escalonamento para sistemas de equações lineares de qualquer ordem.

O referido método denominado SMED, acrônimo para "Simplificação do Método do Escalonamento usando Determinante de ordem dois", fornece a solução de um sistema de m equações lineares a n incógnitas com duas características relevantes em relação ao método tradicional do escalonamento: (i) aspectos pedagógicos, que representam a facilidade com que os alunos aplicam o SMED; (ii) aspectos temporais, que representam o tempo necessário para operar o SMED em um cenário de sala de aula.

Além dessas características o SMED possui outra exclusivamente associada ao seu modo de operação, que opera utilizando somente determinante de ordem dois independentemente do número de equações e incógnitas que um sistema venha a possuir. Isso significa que sua utilização se torna acessível a qualquer estudante que tenha tido contato com Álgebra Linear básica.

Para propor o SMED apresentou-se uma sequência de sistemas de equações lineares. Cada um desses sistemas, incluindo um sistema genérico, foi resolvido tanto pelo método tradicional do escalonamento como pelo SMED. Afinal, obteve-se a mesma solução, justificada pelas operações elementares. Desta forma, buscou-se salientar as vantagens do uso do método proposto.

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações da forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

com b_i e a_{ij} números reais e $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, números naturais.

Uma solução do sistema (1) é uma n-upla de números $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

O método mais simples e eficiente para resolver sistemas lineares é o do escalonamento, conforme os trabalhos [1–5] . Embora este método esteja consagrado por seu uso secular e, ao mesmo tempo, atual, este trabalho propõe uma nova forma de escalonamento utilizando somente determinantes de ordem dois. Esta proposta visa simplificar o método do escalonamento.

O método tradicional do escalonamento opera sobre as matrizes abaixo, que são a matriz dos coeficientes do sistema (1) e a respectiva matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{2}$$

Diz-se que uma matriz é escalonada quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma de suas linhas está à esquerda do primeiro elemento não-nulo de cada uma das linhas subsequentes e, além disso, as linhas nulas (se houver), ou seja, as linhas que têm todos elementos iguais a zero, estão abaixo das demais [5].

Um sistema escalonado (cuja matriz é escalonada) pode ser facilmente resolvido de baixo para cima, obtendo-se, primeiro, o valor da última incógnita, substituindo-a por esse valor na equação anterior, e assim por diante [4].

O método do escalonamento se baseia no fato de que todo sistema é equivalente a um sistema escalonado. Partindo do sistema (1), chega-se a um sistema escalonado equivalente por meio de uma sequência de operações elementares, que são as seguintes [2]:

E1) Permuta das i-ésima e k-ésima equações do sistema. Notação: $L_i \longleftrightarrow L_k$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq m$;

E2) Substituição da i-ésima equação pela i-ésima equação multiplicada por um escalar não nulo α. Notação: $L_i \leftarrow \alpha L_i$, $1 \leq i \leq m$;

E3) Substituição da i-ésima equação pela i-ésima equação mais α vezes a k-ésima equação. Notação: $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_k$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq m$.

Após obter um sistema escalonado equivalente ao sistema (1) por meio de operações elementares, é possível classificá-lo quanto ao conjunto soluções. Se o sistema (1) admite:

- infinitas soluções, diz-se que o Sistema é Possível Indeterminado (SPI);
- uma única solução, diz-se que o Sistema é Possível Determinado (SPD);
- nenhuma solução, diz-se que o Sistema é Impossível (SI).

Com base no sistema tradicional de escalonamento, resumidamente desenvolvido acima, é proposto, nas demais seções, um método de escalonamento para um sistema de m equações lineares e n incógnitas utilizando somente determinante de ordem dois.

É importante salientar que se apresentou o SMED a uma turma de alunos, durante uma aula de Álgebra Linear na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Campus Campo Mourão), e percebeu-se um grande avanço em relação à aprendizagem quando esse foi comparado com o método tradicional do escalomento. O SMED tanto colaborou para obter a solução do sistema de equações de uma forma mais rápida quanto ajudou o aluno a entender melhor o processo de escalonamento. Foi observada, neste momento, a facilidade de aprendizagem do SMED e o pequeno espaço de tempo para solucionar o sistema.

2 Simplificação do método do escalonamento usando determinante de ordem dois (SMED)

2.1 Sistema de uma equação e uma incógnita

Considera-se um sistema de uma equação e uma incógnita, dado por

$$ax = b,$$

em que a, x e b são números reais [2]. Inicialmente pode-se pensar que a solução desta equação é $x = \frac{b}{a}$, entretanto, é necessário avaliar as três possibilidades abaixo:

1. Se $a \neq 0$, então $x = \frac{b}{a}$, que é a única solução da equação, qualquer que seja o valor de b, SPD.

2. Se $a = 0$, há duas possibilidades, dependendo do valor de b:

   (a) Se $b \neq 0$, tem-se $0 \cdot x = b$ e não existe solução para esta equação, SI;

   (b) Se $b = 0$, tem-se $0 \cdot x = 0$ e qualquer número real será solução da equação, SPI.

As mesmas possibilidades ocorrem no caso geral de m equações a n incógnitas, como será desenvolvido adiante.

2.2 Sistema de duas equações e uma incógnita

Um sistema linear de duas equações e uma incógnita é dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

cuja solução, quando existe, é o conjunto formado por $x_1 \in \mathbb{R}$. Uma das maneiras de resolver o sistema (3) é obter os conjuntos soluções das equações $a_{11}x_1 = b_1$ e $a_{21}x_1 = b_2$ separadamente, como foi feito na seção (2.1) e, depois, fazer a intersecção desses conjuntos soluções obtendo-se assim a solução do sistema (3).

2.3 Sistema de duas equações e duas incógnitas

Considera-se um sistema linear de duas equações e duas incógnitas dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{4}$$

Para obter a solução do sistema (4) aplica-se o método do escalonamento tradicional com o objetivo de visualizar o SMED. Para isso, avaliam-se dois casos:

2.3.1 $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1, 2$.

Se os coeficientes a_{11} e a_{21} forem iguais a zero, pode-se escolher x_1 como igual a uma constante arbitrária, não afetando o valor de x_2. Para encontrar x_2, resolve-se o sistema

$$\begin{cases} a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases} \tag{5}$$

como foi feito em (2.2). Para determinar a solução do sistema (5), que é equivalente ao sistema (4), tem-se:

- Se as equações em x_2 não trouxeram nenhuma nova informação para o sistema, isto é, $a_{12} = b_1 = a_{22} = b_2 = 0$, a solução é uma reta, SPI;
- Se um só valor de x_2 é determinado por essas duas equações, então a solução do sistema é um ponto, SPD;
- Se as duas equações são incompatíveis, então o sistema não tem solução, SI.

2.3.2 $a_{i1} \neq 0$ para algum $i = 1, 2$.

Consideram-se dois casos:

2.3.2.1 $a_{11} \neq 0$

Se $a_{11} \neq 0$ no sistema (4), aplica-se o escalonamento com uso das operações elementares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad L_2 \leftarrow a_{11}L_2 \end{cases} \tag{6}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 &= a_{11}b_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1 \end{cases} \tag{7}$$

chega-se a um sistema escalonado

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases} \tag{8}$$

equivalente ao sistema (4). É importante observar que, se $a_{21} = 0$, o sistema (4) já está escalonado. Esse fato não impede que seja aplicada a operação elementar E3 (somar a uma linha um múltiplo de outra linha [2,5]), conforme ilustrado no sistema (7), pois, sendo $a_{21} = 0$, a nova linha dois será igual a antiga linha dois ($L_2 \leftarrow L_2 - 0L_1$), obtendo-se um sistema equivalente.

A passagem de (4) para (8) pode ser interpretada simplesmente com o cálculo do determinante de ordem 2, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \end{cases} \tag{9}$$

É importante salientar que a representação do sistema (9) introduz o SMED para sistemas de duas equações e duas incógnitas.

A seguir descrevem-se mais alguns casos de aplicação do SMED para sistemas de outras ordens incluindo o caso de m equações e n incógnitas. Representando-se

$$a_{22}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad b_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

no sistema (9), tem-se:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{22}^*x_2 &= b_2^* \end{cases} \tag{10}$$

A solução do sistema (10), que é equivalente ao sistema (4), depende da solução da equação $a_{22}^*x_2 = b_2^*$, logo:

- se $a_{22}^*x_2 = b_2 = 0$, significa que existem infinitos valores para x_2 , ou ainda, a equação não traz nenhuma nova informação para o sistema, então resta a primeira equação, que define uma reta, SPI;
- se um só valor de x_2 é determinado por essa equação, então a solução do sistema é um ponto, SPD;
- se não existe um valor de x_2, então o sistema não tem solução, SI.

2.3.2.2 $a_{11} = 0$.

Se $a_{11} = 0$ no sistema (4) tem-se $a_{21} \neq 0$, pois por hipótese, $a_{i1} \neq 0$, para algum $i = 1, 2$. Troca-se a posição relativa da primeira e da segunda equações e procede-se (a menos de uma troca de coeficientes) como foi feito em (2.3.2.1).

2.4 Sistema de três equações e duas incógnitas

Um sistema de três equações e duas incógnitas é dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3 \end{cases} \tag{11}$$

Como foi feito anteriormente, a princípio, resolve-se o sistema (11) pelo método do escalonamento tradicional buscando a equivalência com o SMED. Analisam-se dois casos:

2.4.1 $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1, 2, 3$.

Se $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1,2,3$, pode-se escolher x_1 como igual a uma constante arbitrária, isso não afetará o valor de x_2. Para encontrar x_2, obtém-se os conjuntos soluções de cada uma das três equações

$$\begin{cases} a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{22}x_2 & = & b_2 \\ a_{32}x_2 & = & b_3 \end{cases} \tag{12}$$

separadamente, como foi feito na seção (2.1). A solução do sistema (11) é:

- Uma reta, SPI , se as equações em x_2 não trouxerem nenhuma nova informação para o sistema, ou seja, $a_{12} = b_1 = a_{22} = b_2 = a_{32} = b_3 = 0$;
- Um ponto, SPD, se um só valor de x_2 é determinado por essas três equações;
- O conjunto vazio, SI, se as três equações são incompatíveis.

2.4.2 $a_{i1} \neq 0$ para algum $i = 1,2,3$.

Consideram-se dois casos:

2.4.2.1 $a_{11} \neq 0$

Se $a_{11} \neq 0$ em (11), efetua-se o escalonamento aplicando as operações elementares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 & L_2 \leftarrow a_{11}L_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 & = & b_3 & L_3 \leftarrow a_{11}L_3 \end{cases} \tag{13}$$

e ainda,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 & = & a_{11}b_2 & L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1 \\ a_{11}a_{31}x_1 + a_{11}a_{32}x_2 & = & a_{11}b_3 & L_3 \leftarrow L_3 - a_{31}L_1 \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})x_2 &= a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{cases} \tag{14}$$

Observando os sistemas (11) e (14) conclui-se que a passagem de um para o outro pode ser interpretada simplesmente com o cálculo do determinante de ordem 2, isto é, usando o SMED:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Denotando-se

$$a_{22}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad b_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_{32}^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad b_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}$$

tem-se

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{22}^* x_2 &= b_2^* \\ a_{32}^* x_2 &= b_3^* \end{cases} \tag{15}$$

Para determinar a solução do sistema (11), equivalente ao sistema (15), analisam-se a segunda e a terceira equações, separadamente, da mesma maneira como foi desenvolvido na seção (2.1). Se:

- as equações em x_2 não trazem nenhuma nova informação para o sistema, ou seja, $a_{22} = b_2 = a_{32} = b_3 = 0$, então resta a primeira equação, que define uma reta, SPI;
- um só valor de x_2 é determinado por essas duas últimas equações, então a solução do sistema é um ponto, SPD;
- as duas equações finais são incompatíveis, então o sistema não tem solução, SI.

2.4.2.2 $a_{11} = 0$.

Se $a_{11} = 0$ no sistema (11), tem-se por hipótese que, pelo menos $a_{p1} \neq 0$ para $p = 2,3$. Considera-se, sem perda de generalidade, $a_{21} \neq 0$. Troca-se a posição relativa da primeira e da segunda equações e procede-se (a menos de uma troca de coeficientes) como foi feito em (2.4.2.1).

2.5 Sistema de três equações e três incógnitas

Considere o sistema de três equações e três incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}\right. \tag{16}$$

Para solucioná-lo, inicialmente, aplica-se o método do escalonamento tradicional para depois visualizar o SMED. Tem-se dois casos:

2.5.1 $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1,2,3$.

Se $a_{i1} = 0$ para todo $i = 1,2,3$, recai-se em um sistema de três equações e duas incógnitas conforme foi analisado na seção (2.4).

2.5.2 $a_{i1} \neq 0$ para algum $i = 1,2,3$.

Temos dois casos a considerar:

2.5.2.1 $a_{11} \neq 0$. Se $a_{11} \neq 0$ em (16), aplica-se o escalonamento procedendo com as operações elementares

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 & \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 & L_2 \leftarrow a_{11}L_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 & L_3 \leftarrow a_{11}L_3 \end{array}\right. \tag{17}$$

segue

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 & \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + a_{11}a_{23}x_3 & = & a_{11}b_2 & L_2 \leftarrow L_2 - a_{21}L_1 \\ a_{11}a_{31}x_1 + a_{11}a_{32}x_2 + a_{11}a_{33}x_3 & = & a_{11}b_3 & L_3 \leftarrow L_3 - a_{31}L_1 \end{array}\right.$$

logo

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_3 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_3 & = & a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{array}\right. \tag{18}$$

Note que a passagem de (16) para (18) pode ser interpretada simplesmente calculando determinante de ordem 2. A representação do sistema usando o SMED está ilustrada abaixo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} x_3 & = & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ & & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 & = & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}. \end{array}\right. \tag{19}$$

Denotando-se

$$a_{22}^{*} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{23}^{*} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad b_{2}^{*} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{1} \\ a_{21} & b_{2} \end{vmatrix}$$

$$a_{32}^{*} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad a_{33}^{*} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{3}^{*} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{1} \\ a_{31} & b_{3} \end{vmatrix}$$

escreve-se o sistema (19) como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 & = & b_2^{*} \\ a_{32}^{*}x_2 + a_{33}^{*}x_3 & = & b_3^{*} \end{cases} \tag{20}$$

onde avaliam-se dois casos:

2.5.2.1.1 $a_{i2}^{*} \neq 0$ para algum $i = 2, 3$;

Pode-se admitir (trocando a ordem das duas últimas equações, se necessário) que $a_{22}^{*} \neq 0$. Da mesma forma da passagem de (4) para (10), tem-se que (20) implica em

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 & = & b_2^{*} \\ a_{33}^{**}x_3 & = & b_3^{**}, \end{cases} \tag{21}$$

em que

$$a_{33}^{**} = \begin{vmatrix} a_{22}^{*} & a_{23}^{*} \\ a_{32}^{*} & a_{33}^{*} \end{vmatrix} \quad e \quad b_{3}^{**} = \begin{vmatrix} a_{22}^{*} & b_{1}^{*} \\ a_{32}^{*} & b_{3}^{*} \end{vmatrix}.$$

são coeficientes representados por determinantes de ordem dois conforme proposto pelo SMED.

A solução do sistema (21), que é equivalente ao sistema (16), depende da solução da equação $a_{33}^{**}x_3 = b_3^{**}$. Consideram-se três casos:

- se $a_{33}^{**} = 0$ e $b_3^{**} \neq 0$, o sistema será impossível, SI;
- se $a_{33}^{**} = 0$ e $b_3^{**} = 0$, restam a primeira e a segunda equações, que definem uma reta, SPI, visto que x_3 é um real qualquer;
- se $a_{33}^{**} \neq 0$, um só valor de x_3 é determinado por esta equação, isto mostra que a solução é um ponto, SPD.

2.5.2.1.2 $a_{i2}^{*} = 0$ para todo $i = 2,3$.

Se $a_{i2}^{*} = 0$ para todo $i = 2,3$ o sistema (20), reduz-se

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{23}^{*}x_3 & = & b_2^{*} \\ a_{33}^{*}x_3 & = & b_3^{*}. \end{array} \right. \qquad (22)$$

Para determinar a solução do sistema (22), que é equivalente ao sistema (16), analisam-se a segunda e terceira equações como foi feito na seção (2.1). Se:

- $a_{23} = b_2 = a_{33} = b_3 = 0$, as equações em x_3 (duas últimas) podem ser desconsideradas, pois não trazem nenhuma nova informação para o sistema. Então, resta a primeira, que define um plano, SPI;
- se um só valor de x_3 é determinado por essas duas últimas equações então a solução do sistema é uma reta, SPI;
- se as duas equações finais são incompatíveis então o sistema não tem solução, SI.

2.5.2.2 $a_{11} = 0$.

Se $a_{11} = 0$ tem-se, por hipótese, que pelo menos $a_{p1} \neq 0$ para $p = 2,3$. Considera-se, sem perda de generalidade, $a_{21} \neq 0$. Troca-se a posição relativa da primeira e da segunda equações e procede-se (a menos de uma troca de coeficientes) como foi feito em (2.5.2.1).

2.6 Sistema de m equações a n incógnitas

Nas seções anteriores foram abordados sistemas de três equações e três incógnitas e alguns casos de menor ordem nos quais utilizou-se o SMED. A equivalência do escalonamento tradicional e do SMED foi ilustrada em todos os casos abordados. A representação da solução dos sistemas através do determinante de ordem dois ficou evidenciada nas respectivas seções anteriores.

Nesta seção será desenvolvido o SMED para um sistema qualquer de m equações e n incógnitas justificando-se a equivalência dos sistemas através das operações elementares $E1$,$E2$ e $E3$ fundamentadas no método do escalonamento tradicional, para isto considere o sistema (1), o qual, mediante aplicações sucessivas de determinantes de ordem 2, produz um sistema equivalente escalonado. Tem-se dois casos a considerar referentes ao sistema (1):

2.6.1 $a_{i1} = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Pode acontecer que todos os coeficientes a_{i1} na primeira "coluna" referentes à primeira incógnita sejam nulos. Se isso acontecer, pode-se escolher x_1 como igual a uma constante arbitrária. Isso não afetará os valores de $x_2, \cdots, x_n$ e passa a considerar x_2 ou, mais geralmente, a coluna mais próxima, à direita da primeira, onde haja algum elemento não-nulo e opera-se (como serão descritos em 2.6.2) de modo a obter uma matriz cuja primeira coluna não-nula começa com um elemento diferente de zero mas todos os demais sejam iguais a zero. A partir daí, fixa-se a primeira linha.

2.6.2 $a_{i1} \neq 0$, para algum $1 \leq i \leq m$.

Se pelo menos um dos a_{i1} é não-nulo, pode-se escolher qualquer um destes coeficientes não-nulos, por exemplo, a_{p1}, trocar a posição relativa da primeira e da p-ésima equação, e usar esta equação para eliminar x_1 das $m-1$ equações restantes por meio do uso de determinantes de ordem 2. O resultado final é um conjunto de equações da seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a^*_{22}x_2 + a^*_{23}x_3 + \cdots + a^*_{2n}x_n & = & b^*_2 \\ a^*_{32}x_2 + a^*_{33}x_3 + \cdots + a^*_{3n}x_n & = & b^*_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ a^*_{m2}x_2 + a^*_{m3}x_3 + \cdots + a^*_{mn}x_n & = & b^*_m \end{array}\right. \tag{23}$$

em que

$$a^*_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}, \quad b^*_i = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix}$$

com $2 \leq i \leq m$ e $2 \leq j \leq n$. Observa-se que a passagem de (1) para (23) é justificada aplicando as seguintes operações elementares:

1. $L_i \leftarrow a_{11}L_i$ com $2 \leq i \leq m$ e $a_{11} \neq 0$;
2. $L_i \leftarrow L_i - a_{i1}L_i$ com $2 \leq i \leq m$,

que são fundamentadas no método do escalonamento tradicional [2, 5]. Note que o SMED eliminou a primeira incógnita das $m-1$ equações usando somente determinante de ordem 2. É importante salientar se $a_{i1} = 0$ para algum i, não interfere no SMED, visto que, pode-se somar a uma linha um múltiplo de outra linha [5], neste caso, estará somando a linha nula à linha i ($L_i \leftarrow L_i - 0L_i$), que resultará na própria linha i.

Para simplificar (23), temos duas possibilidades:

2.6.2.1 $a^*_{i2} = 0$ com $2 \leq i \leq m$.

Se todos os elementos a^*_{i2} com $i = 2, \cdots, m$ são nulos, passa-se imediatamente a considerar a terceira coluna, a partir da terceira equação, ou seja, os coeficientes a^*_{i3} com $i = 3, \cdots, m$ ou, mais geralmente, a coluna mais próxima, à direita da segunda, onde haja algum elemento abaixo de a^*_{33} não-nulo e opera-se (como será descrito em 2.6.2.2) de modo a obter uma matriz cuja terceira coluna não-nula possui elementos abaixo de a_{33}^* iguais a zero. A partir de então fixa-se a segunda linha.

2.6.2.2 $a_{i2}^* \neq 0$ com $2 \leq i \leq m$

Se pelo menos um dos elementos a_{i2}^* é não-nulo, pode-se escolher qualquer um deles, por exemplo, a_{q2}^*. Depois trocam-se as posições relativas da segunda e q-ésima equações usando esta equação para eliminar x_2 das $m-2$ equações restantes, utilizando determinantes de ordem 2. O resultado final é um conjunto de equações da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 + \cdots + a_{2n}^*x_n & = & b_2^* \\ a_{33}^{**}x_3 + \cdots + a_{3n}^{**}x_n & = & b_3^{**} \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m3}^{**}x_3 + \cdots + a_{mn}^{**}x_n & = & b_m^{**} \end{array} \right. \tag{24}$$

em que

$$a_{ij}^{**} = \left| \begin{array}{cc} a_{22}^* & a_{2j}^* \\ a_{i2}^* & a_{ij}^* \end{array} \right|, \quad b_i^{**} = \left| \begin{array}{cc} a_{22}^* & b_2^* \\ a_{i2}^* & b_i^* \end{array} \right|$$

com $3 \leq i \leq m$ e $3 \leq j \leq n$.

Esse processo é, então, repetido até se tenha tratado de todas as colunas do sistema.

3 Conclusão e perspectivas

Neste artigo, foi desenvolvido um método para resolver sistemas de equações lineares de m equações a n incógnitas. Para isso, apresentou-se uma sequência de sistemas de equações lineares que foram resolvidas pelo método tradicional do escalonamento e pelo SMED. Aplicou-se o SMED a uma turma de alunos da disciplina de Álgebra Linear da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Campus Campo Mourão) e observou-se um grande avanço em relação à aprendizagem quando este foi comparado com o método tradicional do escalonamento. Foram então observados os aspectos pedagógicos, que representam a facilidade de aprendizagem do SMED e os aspectos temporais visando ao tempo necessário para operar com este método. Conclui-se que a principal contribuição do mesmo é a sua simplicidade de utilização, pois facilita o processo para obter a solução de um sistema de equações lineares de qualquer ordem utilizando somente o determinante de ordem dois, que representa uma ferramenta básica da Álgebra Linear.

4 Referências

[1] KOLMAN, B.; HILL, D. R. Introdução à Álgebra Linear com Aplicações. Editora LTC, Rio de Janeiro, 1ª ed., 2006.

[2] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. Álgebra Linear. Editora Harbra Ltda, São Paulo, 3ª ed., 1986.

[3] GONÇALVES, A.; SOUZA, R. M. L. Introdução à Álgebra Linear. Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1ª ed., 1977.

[4] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio – v. 3. SMB - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1ª ed., 2001.

[5] LIMA, E. L. Álgebra Linear. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 3ª ed., 1998.