Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus de Ponta Grossa

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia

CADERNO PEDAGÓGICO: AS OFICINAS NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES – UMA ESTRATÉGIA A PARTIR DO PRÓ-LETRAMENTO MATEMÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÕES

Marta Burda Schastai
Sani de Carvalho Rutz da Silva

PONTA GROSSA
AGOSTO - 2012

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

MARTA BURDA SCHASTAI
SANI DE CARVALHO RUTZ DA SILVA

CADERNO PEDAGÓGICO: AS OFICINAS NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES – UMA ESTRATÉGIA A PARTIR DO PRÓ-LETRAMENTO MATEMÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÕES

Este caderno pedagógico foi elaborado a partir da percepção das dificuldades encontradas pelos professores no ensino de frações para os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Sua produção tem por finalidade contribuir com os formadores de professores para que estes possam explorar um ensino voltado para a compreensão do significado das frações, frações unitárias, equivalência e as operações de adição e subtração, utilizando estratégias metodológicas que valorizem os conhecimentos prévios dos aprendizes e estimulem novas descobertas.

PONTA GROSSA
2012

... a Educação Matemática é antiga como campo de atividade, mas como campo acadêmico é relativamente recente, tendo menos de um século de existência.

(Kilpatrick, 1996)

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Ficamos felizes em compartilhar o resultado de nossos estudos e reflexões sobre o ensino de frações, bem como, em tê-lo (a) conosco buscando aperfeiçoamento da prática pedagógica. Com essa produção didática você terá a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos sobre frações e analisar diferentes estratégias de ensino.

Estudos e pesquisas sobre o Ensino de Matemática têm mostrado que alunos encontram dificuldades em aprender e professores em ensinar determinados conteúdos. Esse “aprender” e “ensinar” referem-se ao domínio do conhecimento historicamente construído e sua prática social que é onde os conteúdos ganham significado.

Assim, buscando contribuir com estratégias de ensino e aprofundamento conceitual do conteúdo de frações foi organizado o presente Caderno Pedagógico. Ele destina-se aos formadores de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e professores da Educação Básica com o objetivo fornecer subsídios para a prática pedagógica relacionada ao ensino de Matemática.

A organização das oficinas constantes no Caderno Pedagógico está embasada em Mediano (2008), a qual considera o ato de ensinar sob a perspectiva intercultural crítica e que esse ato é facilitado por meio de oficinas pedagógicas, pois elas não se limitam a tratar o tema escolhido isoladamente, mas sim, permitem que seja realizado um estudo amplo que abrange não só os conhecimentos necessários de uma disciplina, mas também da realidade local e da sociedade em que a escola está inserida.

Para a fundamentação do conteúdo de frações optou-se pelos estudos e textos elaborados por Lins e Silva (2008) e Vasconcellos e Belfort (2006) enfatizando-se a construção do conceito de fração a partir de quatro ideias: como parte de um todo, como parte de um conjunto, como um ponto localizado na reta numérica e a fração unitária como unidade de medida.

Assim, o Caderno Pedagógico tem por finalidade subsidiar professores e acadêmicos das licenciaturas com estratégias metodológicas que mostrem não só as formas de solucionar problemas com o uso de frações, mas também, ampliar a visão do professor ou do futuro professor em relação ao conceito de frações. Ele é constituído de cinco seções: a primeira, a presente apresentação**;** a segunda, o referencial teórico**;** a terceira, a estrutura organizacional das oficinas**;** a quarta, o roteiro das oficinas pedagógicas e, a quinta e última seção, destina-se à considerações finais.

A segunda seção que se destina ao referencial teórico está subdivida em duas subseções: na primeira é apresentado um resgate histórico da Matemática e a formação do professor de Matemática no decorrer dos tempos ressaltando a necessidade da formação continuada dos professores.

Na segunda subseção do referencial teórico aborda-se à origem das frações com o objetivo de mostrar que esse conteúdo matemático, bem como os demais conteúdos, tiveram sua origem a partir da necessidade das pessoas e que são usados para a resolução dos problemas, ou seja, que estão inseridos na prática social e que vão ganhando novos significados no decorrer da história.

A terceira seção apresenta a estrutura organizacional das oficinas pedagógicas que foram elaboradas para a Pesquisa PRÓ-LETRAMENTO MATEMÁTICA: *Problematizando a Construção do Conceito de Frações – Uma Contribuição para a Formação Continuada dos Professores.* As atividades propostas nas oficinas foram desenvolvidas a partir de situações-problemas, estudo de textos e atividades práticas; explorando-se o conceito de fração, fração unitária, fração equivalente, comparação de frações e a adição/subtração com frações.

Na quarta seção estão descritas as oficinas pedagógicas. Em cada oficina foram especificados os objetivos, a duração, as atividades realizadas, os materiais necessários, os textos estudados, a metodologia utilizada, enfim, o processo de desenvolvimento de cada uma das oficinas.

E, na quinta seção, finaliza-se o presente Caderno Pedagógico a partir da retrospectiva histórica da Matemática e sua inserção no ensino formal, da reflexão sobre a formação do professor no decorrer da história, da história da criação das frações e das Oficinas Pedagógicas com estudo de textos e atividades práticas.

Esperamos que muitas dúvidas sejam esclarecidas e outras possam emergir, pois só assim teremos a oportunidade de estarmos em constante formação.

Desejamos a você uma boa leitura, um ótimo processo reflexivo e um excelente trabalho pedagógico.

Marta Burda Schastai
Sani de Carvalho Rutz da Silva

2 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Nesta seção é apresentado o resgate histórico da matemática, sua inserção enquanto disciplina nas grades curriculares no ensino formal, a formação do professor e as tendências de ensino.

2.1 ENSINO DA MATEMÁTICA - UMA EXPOSIÇÃO DE SUA TRAJETÓRIA

A história da origem da Matemática mostra que, a partir da necessidade de cálculos exatos, os povos da Antiguidade desenvolveram os primeiros teoremas matemáticos. Miguel et al (2004) apontam alguns textos matemáticos que até hoje são aceitos, como por exemplo, Plimpton 322 pertencente à matemática babilônica do ano de 1900 a.C.; Papiro Matemático de Rhind da civilização do Egito do ano de 2000-1800 a.C. e o Papiro Matemático de Moscou também do Egito da época de 1890 a.C. Estes três textos abordam o Teorema de Pitágoras.

Percebe-se assim que, desde os tempos antigos são encontrados registros mencionando cálculos matemáticos. No entanto, apesar da Matemática ter sido muito usada e estudada, tendo como exemplo a própria criação dos números e dos cálculos que os povos antigos faziam uso, durante um longo período da história ela não foi considerada como área de conhecimento institucionalizada, ou seja, como uma disciplina acadêmica. Pela dimensão histórica da disciplina de Matemática divulgada nas DCE (2006, p. 15),

> A História da Matemática revela que os povos das antigas civilizações conseguiram desenvolver os rudimentos de conhecimentos matemáticos que vieram compor a Matemática que se conhece hoje. Há menções na literatura da História da Matemática que os babilônios por volta de 2000 a.C, acumulavam registros que hoje podem ser classificados como álgebra elementar. Foram as primeiras considerações feitas pela humanidade a respeito de ideias que se originaram de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas e geométricas, comparar formas, tamanhos e quantidades.

Entre os povos antigos, a Matemática foi considerada como uma ciência nos séculos VI e V a.C, quando a civilização grega apresentou princípios lógicos e exatidão de resultados. Os platônicos buscaram pela matemática, usando essencialmente a aritmética, instigar o pensamento do homem. Ainda no século VI a.C, a educação grega insere no contexto uma Matemática abstrata, que “se distanciava das questões práticas e, por meio dela, os pensadores pretendiam encontrar respostas sobre a origem do mundo” (DCE, 2006, p. 15).

Foi a partir de inventos de cientistas, essencialmente com resultados de estudos matemáticos que eram realizados por autodidatas, que a Matemática gradadivamente foi sendo estruturada e passou a ser considerada como uma disciplina pedagógica. Nesse sentido, a disciplina de Matemática também surge a partir da necessidade de estudos para a produção de “novas” tecnologias (DCE, 2006).

Dando um salto no tempo, chegando ao século XVIII, Silva (1999) aponta como um dos precursores da introdução da Matemática no ambiente acadêmico, o pedagogo Luís Antonio Verney (1713-1792) que muito influenciou para que a Matemática fosse institucionalizada como disciplina obrigatória em todos os cursos das universidades francesas, o que contribuiu para que fosse criada a profissão de matemático, no ano de 1772. Esses fatos marcam a expansão da Matemática no universo acadêmico, que veio sendo acatada paulatinamente em todas as nações.

Ferreira (2011) comenta que no Brasil desde 1730 já haviam estudos sobre a história do ensino da Matemática, mas os registros que identificam movimentos relacionados à educação formal da Matemática datam dos anos iniciais do século XX.

Segundo dados da SBEM (2009) a partir de 1930 sobressaem-se na literatura alguns educadores que se voltavam à Matemática, como é o caso de Euclides de Medeiros Guimarães Roxo e Júlio Cesar de Mello e Souza conhecido pelo heterônimo de Malba Tahan.

Estes educadores, entre outros, foram responsáveis pelo despertar dos movimentos em prol da Educação da Matemática nos centros de ensino. De acordo com as anotações das DCE (2006, p. 19) Euclides de Medeiros Guimarães Roxo foi um professor de Matemática que “promoveu as discussões rumo às reformas nos programas de Matemática. Defendeu didática e pedagogicamente, que fazia sentido criar uma única disciplina que agregasse o objeto do estudo abordado pela Matemática**”.** Fundamentado nas discussões internacionais sobre a unificação das disciplinas que versavam sobre conteúdos matemáticos e exploravam o caráter didático e pedagógico do ensino da matemática, solicitou ao Governo Federal “a junção das disciplinas aritmética, álgebra, geometria e trigonometria numa única, denominada Matemática”. (DCE, 2006, p. 19)

Esta solicitação teve parecer favorável no ano de 1928, promovendo a mudança que foi instituída em todos os estabelecimentos educacionais de ensino secundário pela reforma Francisco Campos.[1]

Como esta reforma também interferiu nos procedimentos das universidades, no ano de 1934, segundo relato de Ferreira (2011**),** foi criado o Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade de São Paulo - USP. Este curso formava professores para ministrar essencialmente aulas de Matemática. De acordo com registros que constam nas DCE (2006, p. 18),

> No final do século XIX e início do século XX, levantaram-se preocupações relativamente ao ensino de Matemática, resultantes de discussões realizadas em encontros internacionais de matemáticos, os quais já elaboravam propostas com uma preocupação pedagógica. Essas discussões contribuíram para a caracterização da Matemática como disciplina escolar e deram início à tarefa de transferir para a prática docente os ideais e exigências advindas das revoluções do século anterior.

Houve então a iniciativa em formar professores específicos para a disciplina de Matemática. Esta formação veio atrelada ao intenso desenvolvimento matemático ocorrido no final do século XIX que era embasado nos fundamentos do sistema de teorias e problemas históricos, lógicos e filosóficos, tratando-se em particular “de uma reconsideração crítica do sistema de axiomas, dos métodos lógicos e demonstrações matemáticas” (DCE, 2006, p. 18).

---

[1] Reforma Francisco Campos foi a denominação da primeira reforma educacional de repercussão nacional. Realizada no período de governo de Getúlio Vargas (1930-1945) foi coordenada pelo então Ministro da Educação e Saúde, Francisco Campos. Entre diversas medidas criadas nesta reforma consta a organização do ensino secundário e comercial, havendo também orientações para as universidades dedicarem estudos para a pesquisa e a difusão da cultura dando ao estudo superior maior autonomia administrativa e pedagógica (MENEZES e SANTOS, 2002).

Nesta época, vivia-se um cenário político econômico fortemente atrelado à instalação de fábricas e indústrias nas cidades que "em conjunto com as ciências modernas, fez surgir uma nova forma de bens materiais. Muitas atividades desenvolvidas pelo homem foram substituídas por máquinas". (DCE, 2006, p. 18) Com isso, surge uma nova classe de trabalhadores que necessitava ligar seus interesses à educação e, consequentemente, aumenta a responsabilidade da escola em suprir essa necessidade.

A formação de professores de Matemática inicia-se neste cenário, incumbindo-se as universidades de lhes promover um conhecimento disciplinar específico,

> Quando se iniciaram as licenciaturas no Brasil, elas se constituíam de três anos de formação específica e mais um ano para formação pedagógica. O saber considerado relevante para a formação profissional do professor era, fundamentalmente, o conhecimento disciplinar específico. O que hoje é denominado formação pedagógica se reduzia à didática e esta, por sua vez um conjunto de técnicas úteis para a transmissão do saber adquirido nos três anos iniciais (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 13).

Os autores mencionam que este sistema de formação de professores ficou conhecido como "3+1" ou "bacharelado + didática"[2] e as universidades tinham como objetivo principal oferecer subsídios teórico-metodológicos ao professor de matemática, conforme narra Ferreira (2011).

> As metodologias de ensino começaram a surgir a partir da década de 1930 na formação do professor secundário. A prática de ensino era uma atividade que vinha acompanhada de metodologias de ensino, sendo coordenada por um docente responsável. Por isso, havia uma sobreposição de saberes até se chegar ao momento da prática pedagógica: inicialmente, cursavam-se as disciplinas de fundamentos, depois, as metodologias de ensino ou o saber fazer e, posteriormente, a prática de ensino (FERREIRA, 2010, p. 41).

---

[2] Cursando a Universidade em três anos, o acadêmico adquiria o grau de bacharelado e para atuar no magistério era necessário que o bacharel realizasse o Curso de Didática que tinha duração de 1 ano. Dava-se então, licença ao professor para lecionar em escolas secundárias e no Curso Normal. Essas eram as normas instituídas pelo artigo 49 do Decreto-Lei n.1.190 de 4 de abril de 1939 (FERREIRA, 2010).

Estas metodologias de ensino eram distribuídas por áreas ou matérias, incluindo-se entre elas, a matéria de Matemática. Propagava-se assim, a formação de professores, que segundo Kuenzer (1992) enquadrava-se numa concepção positivista e tecnicista, porque a preocupação era formar professores que soubessem “como fazer”, não se preocupando com ”o que fazer” e o “por que fazer”; privilegiando-se a racionalidade formal e introduzindo uma prática mecânica e empírica.

Na visão de Frigotto (1996), no Brasil, até a década de 1970, a formação de professores caracterizava-se pela não articulação do exercício do magistério com a realidade da vida social. Era uma pedagogia tecnicista, pois se privilegiava uma racionalidade técnica que não possibilitava a junção entre teoria e prática.

A Licenciatura em Matemática formava professores técnico-especialistas, transmissores de conhecimentos, tendo como responsabilidade aplicar as técnicas para cumprir metas predeterminadas. O magistério constituía-se em um trabalho burocrático que concebia o ensino como um sistema de objetivos educacionais institucionalizados por uma prática formal e funcionalista.

Segundo Schön (1992) trata-se de um sistema de “racionalidade técnica”, e ao mesmo tempo Tardiff e Raymond (2000, p. 211) consideram que “a prática profissional consiste numa relação instrumental de problemas baseada na aplicação de teorias e técnicas científicas construídas em outros [problemas]”.

Destaca-se que o mecanicismo e a repressão da criatividade do profissional professor geraram desagrado e promoveram severas críticas dos estudiosos preocupados com a formação de professores, por repudiarem a ideia de professor como reprodutor do conhecimento, não lhe sendo permitida a liberdade de criar e produzir novos conhecimentos.

Nesta época estava à frente da Diretoria Geral de Instrução Pública o professor Anísio Teixeira empenhado em substituir o sistema da Escola Tradicional por um movimento de reconstrução do ensino que se denominou Escola Progressista, mas que ficou comumente conhecido como Escola Nova. Pretendia o renomado professor estabelecer uma nova cultura pedagógica para a reconstrução educacional. Para tanto foi reorganizado o Ensino Normal, criando-se o Instituto Educacional do Rio de Janeiro para regular a formação técnica dos professores. (DCE, 2006)

Além disso, com o mesmo propósito de reconstrução educacional foram criadas mais três outras instituições: as Escolas Experimentais, a Escola México e o Instituto de Pesquisas Educacionais do Departamento de Educação do Distrito Federal. Nestas três instituições foram elaborados os Guias de Orientação Didática e uma série de obras pedagógicas, entre elas a Série Biblioteca Pedagógica Brasileira. (DCE, 2006)

Iniciou-se então, um modelo diferenciado de formação dos professores, segundo anotações das DCE (2006, p. 19), atrelado “às discussões do movimento da Escola Nova, que propunha um ensino orientado por uma concepção empírico-ativista, ao valorizar os processos de aprendizagem e o envolvimento do estudante em atividades de pesquisa, atividades lúdicas, resolução de problemas, jogos e experimentos**”.** Contudo, esta nova tendência, ficou ainda por um tempo razoável apegada ao sistema anterior de formação de professores.

Para atender a proposta da escola nova, a formação dos professores deveria ser direcionada para “o desenvolvimento da criatividade e das potencialidades e interesses individuais”. O estudante era considerado o centro do processo e o professor, o orientador da aprendizagem. (DCE, 2006, p. 19)

Ainda, nas DCE (2006, p.19) há o registro de que esta tendência norteou “a produção de diversos materiais didáticos de Matemática e a prática pedagógica de muitos professores no Brasil”, porém**,** destaca concomitante à tendência empírico-ativista, a existência de outras tendências que influenciaram o ensino de Matemática, conforme pode ser observado no Quadro 1 formulado a partir das concepções de Fiorentini (1995),

PERÍODO	**TENDNCIA**	**MODELO**	**CARACTERIZAÇÃO***	**FINALIDADE**
Até final década de 1950	Formalista-clássica	Euclidiano e concepção platônica de Matemática	Sistematização lógica e visão estática, a-histórica e dogmática do conhecimento matemático. Aprendizagem centrada no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo, pelos desenvolvimentos teóricos em sala de aula. O ensino era livresco e conteudista e a aprendizagem consistia na memorização e na repetição precisa de raciocínios e procedimentos.	Desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo**.**

Continua

Continuação

PERÍODO	TENDÊNCIA	MODELO	CARACTERIZAÇÃO*	FINALIDADE
Após a década de 1950	Formalista moderna	Lógica estrutural das ideias matemáticas	Abordagem internalista da Matemática. O ensino era centrado no professor que demonstrava os conteúdos em sala de aula. Enfatizava-se o uso preciso da linguagem Matemática, o rigor e as justificativas das transmissões algébricas por meio das propriedades estruturais. A Matemática escolar era orientada pela lógica, pelos conjuntos, pelas relações, pelas estruturas matemáticas, pela axiomatização.	Reformulação do currículo escolar, por meio do Movimento da Matemática Moderna[3].
Após a ditadura militar (1964)	Tecnicista	Mecanicista e Pragmático	Método de aprendizagem enfatizado na memorização de princípios e fórmulas, no desenvolvimento de manipulação de algoritmos e expressões algébricas e de resolução de problemas. A pedagogia tecnicista não era centrada no professor ou no estudante, mas sim, nos objetivos instrucionais, nos recursos e nas técnicas de ensino.	Conteúdos organizados por especialistas, distribuídos em kits disponíveis em livros didáticos, manuais, jogos pedagógicos e recursos audiovisuais.
A partir das décadas de 1960 e 1970	Construtivista	Ações interativas e reflexivas do estudante	Dava-se mais ênfase ao processo e menos ao produto do conhecimento. Valorização da Interação entre professor e aluno, e produção individual pela interiorização das ações e reflexões realizadas coletivamente. Tendo como núcleo central da orientação pedagógica, a Psicologia.	Matemática vista como uma construção constituída por estruturas e relações abstratas entre formas e grandezas.
A partir da década de 1980	Sócio-etnocultural	Base teórica e prática na Etnomatemáti ca	Valorização dos aspectos socioculturais da Educação Matemática. O conhecimen-to matemático produzido nas diferentes práticas sociais podendo aparecer sistematizado ou não. A relação professor-aluno caracteriza-se como dialógica, privilegiando a troca de conhecimentos entre ambos e atendendo à iniciativa dos estudantes e problemas significativos no contexto cultural**.**	Saber matemático prático, relativo e não-universal**.**
A partir da década de 1990	Histórico-crítica	Saber construído historicamente para atender necessidades sociais e teóricas	Matemática concebida como um saber vivo, dinâmico, sendo que seu aprendizado não é apenas para desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios, mas sim, criar estratégias para o aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas.	Estabelecer relações, justificar, analisar, discutir ideias matemáticas.

* Adaptações dos registros da DCE (2006, p. 20-21).

Quadro 1 - Tendências pedagógicas que prevaleceram concomitantemente à tendência empírico-ativista da Escola Nova.

---

[3] Movimento da Matemática Moderna foi resultado dos diversos grupos de estudos e pesquisas em Educação Matemática a partir da década de 1960 buscando organizar uma área de estudo que estabelecesse os fundamentos para o ensino de Matemática (MOREIRA e DAVID, 2010).

Todas essas tendências pedagógicas influenciaram a formação dos professores, ainda que com uma concepção reducionista do saber matemático, em que “o saber considerado relevante para a formação profissional do professor era, fundamentalmente, o conhecimento disciplinar específico”. (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 13)

Para Moreira e David (2010) a formação pedagógica dos professores de Matemática resumia-se à didática e esta era desenvolvida como um conjunto de técnicas úteis para a transmissão do saber adquirido nos três anos iniciais do Bacharelado. Na década de 1970 torna-se mais intensa a discussão sobre o papel social e político da educação o que traz à tona a necessidade de mudanças estruturais nos cursos de licenciatura,

> Entre as propostas e concepções em debate, destaca-se a perspectiva segundo a qual o processo de formação do professor deveria se desenvolver de maneira mais integrada, em que o conhecimento disciplinar específico não constituísse mais o fundamento único ao qual se devessem agregar métodos apropriados de “transmissão” (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 13).

Além de instruir o professor para determinada disciplina, visava-se também aprofundar a formação do professor como educador, portanto, as estruturas dos cursos de Licenciatura foram sendo modificadas gradualmente, de modo que,

> ...a formação pedagógica não se limita mais à apresentação de técnicas de ensino e passa a incluir disciplinas como Sociologia da Educação, Política Educacional e outras. Mas o licenciado não deixa de ser reconhecido também como o professor de (Matemática, História, etc.). Reafirma-se, assim, a importância da chamada “formação de conteúdo”, que continua sob a responsabilidade dos especialistas (isto é, matemáticos, historiadores etc.) e envolve disciplinas planejadas e lecionadas por eles. Na busca de alternativas para a solução criam-se na década de 1980, as chamadas disciplinas integradoras. Constitui-se, assim, um novo modelo, que se mantém essencialmente até hoje. (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 15)

Aliada a estas mudanças na formação do professor permanece a tendência pedagógica histórico-crítica que concebe a Matemática como um saber vivo e dinâmico que atende as necessidades sociais e teóricas. Por isto, a ação do professor deve ser a de “articular o processo pedagógico, a visão de mundo do aluno, suas opções diante da vida, da história e do cotidiano”. (DCE, 2006, p. 21)

Para tanto, o professor que hoje atua no magistério, precisa desprender-se de uma prática pedagógica que tem resquícios do modelo da “racionalidade técnica” que Schön (1992) repudia. Ele precisa ser um profissional que saiba articular o processo pedagógico com as necessidades dos alunos em sua vivência social e cultural.

Segundo Fiorentini, Nacarato e Pinto (1999) o professor deve ser capacitado a saber motivar o aluno a ser “reflexivo e experimental”. Fiorentini (2003, p. 187), afirma que “os professores mobilizam e produzem saberes e, nesse processo constituem-se em profissionais**”.**

Contudo, há um consenso entre estes estudiosos que a formação de professores restrita ao ambiente acadêmico não é suficiente para que eles possam exercer a função nos dias de hoje, dentro de pedagogia histórico-crítica, pois é somente quando ingressam “no campo da prática profissional, que os saberes da ação docente se constituem para cada professor, num processo que mobiliza, ressignifica e contextualiza os saberes e os valores adquiridos ao longo da vida estudantil, familiar e cultural”. (FIORENTINI e CASTRO , 2003, p. 122)

Assim, Fiorentini e Castro (2003) embasados em diversos outros estudiosos entendem que o professor adquire os saberes fundamentais da atividade profissional não apenas na formação acadêmica inicial e tampouco no processo de trabalho em sala de aula, pois esta aquisição é complexa e contínua acontecendo em múltiplos espaços e momentos da vida de cada um, envolvendo aspectos pessoais, familiares, institucionais e socioculturais.

É neste sentido que a formação continuada torna-se relevante e passa a ser vista no sistema educacional como uma forma do professor mergulhar em sua prática profissional com conhecimentos que levem a conexões dos conteúdos historiamente construídos, da prática social e da evolução da ciência visando a formação cidadã de seus alunos.

Na visão de Fiorentini, Nacarato e Pinto (1999, p. 231), ao completar sua profissionalização com formação continuada, o profissional professor “filtra e seleciona os outros saberes [permitindo aos professores] retomar os saberes, julgálos e avaliá-los, e então, objetivar um saber formado de todos os saberes reduzidos e submetidos ao processo de validação constituído pela prática cotidiana**”.**

Em relação à disciplina de Matemática a formação continuada dos professores é relevante na medida em que considera o avanço dos conhecimentos matemáticos e a prática pedagógica, uma vez que a matemática como uma área de conhecimento se institucionaliza pelo mundo afora havendo,

> ... uma legião de autores historiando e investigando práticas, reunindo e analisando narrativas, documentos, produções acadêmicas, técnicas e tecnologias com vistas à cartografar os contornos dessa área de conhecimento, o seu estado atual e seu estudo epistemológico. (Ferreira, 2011, p. 13)

Estes autores revelam trabalhos matemáticos realizados tanto para desenvolver novas teorias matemáticas para resolução de problemas quanto pela necessidade de solucionar problemas que surgiram nas sociedades, como é o exemplo das frações que tiveram origem nas necessidades da antiga civilização egípcia e tornou-se uma ramificação da Educação Matemática, sendo, hoje, um conhecimento utilizado para a resolução de problemas que aparecem no cotidiano da vida das pessoas.

2.2 ORIGEM DAS FRAÇÕES

A origem das frações está ligada à distribuição das terras que ficavam à margem do rio Nilo e que serviam para o plantio dos alimentos necessários à população egípcia. O governante egípcio doava determinada gleba de terra para os agricultores que passavam a plantar no seu próprio espaço. No entanto, quando ocorriam as enchentes esta demarcação desaparecia e os agricultores não sabiam qual era a sua parte para plantio, porque a cada enchente a terra propícia à lavoura era de tamanho diferente. Para solucionar este problema os demarcadores de terra, também denominados como “homem da corda” ou geômetras, inventaram um método de medição. (Boyer, 1979 apud SCHASTAI et al, 2010)

Assim, todo ano, após a passagem das enchentes que ocorriam nos meses de junho a setembro, os geômetras remarcavam a porção de terra de cada proprietário com cordas que eram usadas como unidades de medidas. Estas cordas eram esticadas, multiplicando-se quantas vezes aquela unidade de medida da corda estava contida no terreno. No entanto, quase sempre no final da medição não cabia uma unidade exata da corda, porque a medição dos terrenos não correspondia exatamente a números inteiros, surgiu então a necessidade de um novo número – o número fracionário que corresponderia a uma porção de um número inteiro. (Boyer, 1979 apud SCHASTAI et al, 2010).

Surgiram assim as frações unitárias para resolver questões que não poderiam ser solucionadas somente com números inteiros, sendo que seus criadores (os egípcios) inventaram um símbolo que representava a fração como parte da unidade. Este símbolo foi assim representado: , em que a figura ovalada representava o que hoje é chamado numerador e, abaixo, eram colocados riscos para representar em quantas partes o inteiro havia sido dividido, ou seja, o denominador. (Boyer, 1979 apud SCHASTAI et al, 2010)

Neste exemplo  a representação corresponde à fração 1/6. Boyer (1979) apud SCHASTAI et al (2010) explica que a figura ovalada deste símbolo representa o todo destinado ao plantio e os riscos correspondem à parte que cada agricultor receberia para o plantio. Por exemplo, existindo 10.000 alqueires de terra disponível para ser repartido entre todos os agricultores, o agricultor João tinha direito a 1/3 das terras, então sua parte corresponderia a 1/3 do total de 10.000 alqueires, representada pelo símbolo , mas se depois da enchente a terra disponível para plantio diminuísse para 9.000 alqueires, a parte de João seria 1/3 de 9.000 alqueires, significando que a área de plantio teria diminuído. Para o restante dos agricultores iria diminuir também na mesma proporção que diminuiu para João.

Esta solução encontrada pelos egípcios usando frações propagou-se pelo mundo, sendo concebidos vários modelos de representação dos números fracionários para resolução de problemas que não eram possíveis utilizando apenas o número inteiro.

Na Roma Antiga foi criada a fração centesimal, dada a necessidade de regulamentar o pagamento dos impostos utilizando um sistema fracionário em que a quantidade de referência era representada por 100 unidades de determinada mercadoria. Por exemplo, o imposto incidente sobre o vinho era formado pelo seguinte esquema: de cada 100 garrafas, três eram reservadas para o pagamento do imposto. Assim, o imposto sobre a produção do vinho era representado pela fração 3/100 (SCHASTAI et al, 2010).

A literatura mostra que desde a Antiguidade (século I d.C.) as frações foram usadas, por diferentes povos: chineses, babilônios, sumérios, hindus, egípcios, gregos e romanos. Os estudos sobre os números fracionários prolongaram-se pela Idade Média (século II ao XV) e novos sistemas fracionários foram criados pelos chineses que possibilitaram operações de somar, subtrair, comparar, calcular média, dividir, ou multiplicar, e o uso de algoritmos para efetivar operações elementares. Nos século XI e XII sob a iniciativa indo-arábica, o comércio expandiu o uso de moeda e, com isso, a fração ganhou estudos científicos para dar conta da sistemática monetária usada no comércio entre árabes, hindus e judeus. Estes estudos difundiram o sistema fracionário idealizado pelos árabes por toda a Europa (SILVA, 1997).

Assim, depois de assimilar o sistema fracionário indo-arábico, os europeus aprofundaram os estudos sobre números fracionários e no século XIV passaram a aplicar álgebra em grande escala nos cálculos matemáticos e, com isso, intensificaram o uso de frações (SILVA, 1997).

Na segunda metade da Idade Média o cálculo fracionário chegou ao Ocidente sob a forma de representações, cálculos e conceitos adaptados à solução dos problemas que se colocavam à época. A partir do século XV houve uma readaptação dos conceitos de frações que se propagou até o século XXI como frações decimais. (SILVA, 1997)

Portanto, a história mostra que os números fracionários surgiram a partir da necessidade de resolver problemas de acordo com as necessidades de cada povo. Esse conhecimento historicamente construído passou a fazer parte da Matemática.

O resultado de análises de pesquisas direcionadas para o ensino de Matemática mencionado por diversos autores como, por exemplo, Ferreira (2011), Canen (2008), Borba e Skovsmose (2011) entre outros, indicam que o Ensino de

Matemática acabou perdendo o caráter utilitário dos conteúdos e passou a ser ensinado mecanicamente, com regras e algoritmos que deveriam ser memorizados e, posteriormente, reproduzidos. Esse ensino destituído de significado perdurou décadas, no entanto, após várias reformas**,** foram instituídos os PCN, enquanto documentos oficiais, que são diretrizes para o ensino no país.

Assim, sob a orientação dos PCN "o estudo dos números racionais, nas suas representações fracionárias e decimais merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados tais como: parte/todo e quociente, razão e operador". (BRASIL, 1997, p. 66)

Nesse sentido, foram organizadas oficinas pedagógicas como estratégia para a formação continuada de professores envolvendo o conceito, a representação e as operações de adição e subtração de frações, com o objetivo de contribuir para a efetivação de um processo de ensino e aprendizagem que sejam significativos tanto para o professor quanto para o aluno.

3 OFICINAS PEDAGÓGICAS – ESTRUTURA ORGANIZACIONAL

Ao utilizar tanto a contextualização dos conteúdos quanto a construção do pensamento pedagógico na prática em sala de aula é exigido do professor metodologias que envolvam atividades dinâmicas com enfoques alternativos para o ensino de matemática.

Sob este ponto de vista as Oficinas têm se apresentado como uma metodologia que atende as necessidades da prática cotidiana de um ensino contextualizado, podendo assim, serem consideradas como adequadas na formação continuada dos professores.

As Oficinas aqui apresentadas fazem parte do estudo dissertativo sobre uma proposta para o ensino de frações num Curso de formação continuada dos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Tal curso tem como objetivo apresentar alternativas para o ensino de frações que possibilitem a construção do conhecimento, de tal forma que possam utilizar o conceito nas diversas situações em que está inserido.

A importância de conhecer diferentes ideias sobre frações reside na ampliação do conceito de números fracionários, o que em estudos futuros será essencial, como por exemplo, no estudo da álgebra. Segundo Moreira (2004, p. 18), “o principal ato mediador do professor é o de prover situações frutíferas aos alunos. Um conceito, ou uma proposição, torna-se significativo através de uma variedade de situações**”.**

Isto significa que o conhecimento sobre frações não pode ser restrito a dividir uma barra de chocolate e representar suas partes por meio de dois números (o numerador e o denominador), o professor, no seu papel de mediador, deve proporcionar ao aluno condições de entender o uso de frações em diversas situações.

Nesse sentido, durante as Oficinas foram realizados estudos dos textos: “Por que surgem as frações?”; “Como ler frações?”; “Um pouco mais sobre o que são frações”; “Como criar frações equivalentes a uma fração que já tenho?”; “Como saber se duas frações são equivalentes?”; “Como somar e subtrair frações?”. Todos estes textos são de autoria dos professores Rômulo Campos Lins e Heloísa da Silva da Universidade Estadual Paulista, disponibilizados no Fascículo de Frações do Curso Pró-Letramento Matemática (LINS e SILVA, 2008).

Acrescentou-se ainda o texto “Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações” de autoria dos Professores Cleiton Batista Vasconcelos e Elizabeth Belfort da Universidade Federal do Rio de Janeiro (LIMC, 2010) abordando frações como parte de uma unidade, representação das frações na reta numérica e fração como parte de um conjunto.

As atividades propostas nas Oficinas foram adaptadas a partir dos enunciados escritos por professores que participam do Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e de Ciências – LIMC, órgão do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, em parceria com a Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO; Universidade Federal de São Carlos - UFSCar e Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RJ, integrantes da Rede Nacional de Formação Continuada do Ministério da Educação/Secretaria da Educação Básica - MEC/SEB, na área de Ciências e Matemática, especificamente para o Pró-Letramento Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental.

A abordagem do conteúdo de frações foi dividida em 7 Oficinas sendo utilizado material pedagógico específico para cada uma delas, como por exemplo, o Tangran; o material dourado; tiras de papel, malha quadriculada; papel milimetrado; textos; papel vegetal; papel sulfite; lápis de cor; cartões.

Ao término de cada Oficina, o grupo escolheu um professor para registrar em um caderno denominado “Diário Coletivo” os temas abordados, os comentários sobre os conceitos trabalhados e estratégias propostas, as dificuldades encontradas, bem como os aspectos que consideram relevantes para sua prática pedagógica.

Os registros no “Diário Coletivo” tiveram como objetivos: proporcionar aos professores a reflexão sobre o tema abordado; ampliar os conhecimentos dos professores na medida em que estabelecem relações entre os conceitos matemáticos que dominam e o que estão aprendendo; utilizar a linguagem escrita para expressar como estão compreendendo os conceitos trabalhados.

As Oficinas aqui apresentadas foram aplicadas a um grupo de 16 professores do primeiro segmento do Ensino Fundamental. Prevendo-se maior diálogo entre os participantes as carteiras foram organizadas em semicírculo.

Nesta sistemática privilegia-se o diálogo e a participação, o que favorece ao professor cursista ser ouvido tanto pelo colega quanto pelo Aplicador da Oficina. Oportuniza-se assim, o confronto de ideias e, consequentemente, o crescimento profissional.

Freire (1985) comenta que em um ambiente onde há diálogo e participação ativa de todos os integrantes de um grupo acontece a pedagogia da pergunta, pela qual o processo de aprendizagem faz-se por meio de questionamentos que estimulam a reflexão e a investigação para a solução de um problema. Pelas respostas às perguntas, ou até mesmo pelo ato de perguntar**,** surge o despertar da curiosidade e da crítica, melhorando o ato de pensar, imaginar e criar, propiciando diferentes habilidades e competências.

Na visão de Mediano (2008, p. 93), a pedagogia da pergunta enunciada por Freire, em um trabalho coletivo,

> ... favorece a construção da autonomia do professor e a sua capacidade de análise crítica. Nossas escolas são ainda muito heterônomas, esperando que "as ordens venham da Secretaria". É, pois, muito importante fazer com que o professor individualmente e como coletivo seja capaz de se colocar perguntas do tipo: Por que se faz assim? A quem estou beneficiando se fizer desta forma? E ter coragem de fazer aquilo que parece melhor naquela circunstância.

Nas Oficinas propostas, buscou-se realizar um trabalho com os professores, que segundo Vergnaud (apud MOREIRA, 2004, p. 11), crie "situações frutíferas" nas atividades escolares, ou seja, situações em que os professores "encontram e progressivamente dominam, particularmente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que queremos que aprendam**".**

O resultado esperado a partir das atividades e do estudo dos textos propostos nas Oficinas é de que os professores cursistas reconheçam suas limitações e aprendam o suficiente para ensinarem aos seus alunos uma matemática clara, compreensível e que estabeleça relação com as situações que eles vivenciam no dia a dia.

Em se referindo ao professor Aplicador, autor deste trabalho, ressalta-se que cada Oficina teve um material específico previamente selecionado e organizado por ele, e a realização dos encontros se deu em um período de 24 horas, sendo 6 encontros de 4 horas de duração, durante duas semanas.

A seguir são descritas cada uma das Oficinas, com introdução, objetivos, materiais utilizados, textos, atividades práticas, exercícios propostos e orientações direcionadas para uma eventual aplicação deste caderno.

4 OFICINAS PEDAGÓGICAS

4.1 OFICINA 1 - DIVISÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS EM PARTES IGUAIS EM RELAÇÃO À ÁREA

Os professores do Ensino Fundamental normalmente consideram o conteúdo de frações como sendo um dos mais difíceis de serem trabalhados, isso porque as frações pertencem ao conjunto dos números racionais e também representam parte de coisas, por exemplo, “meio”, “terça parte”, “quarta parte” e para representar partes de coisas são utilizados dois números inteiros (numerador e denominador), constituindo em uma dificuldade epistemológica, ou seja, em uma dificuldade encontrada desde a origem da representação fracionária.

Essa dificuldade também aparece na sequência do ensino de matemática, quando o aluno primeiramente aprende e utiliza os números naturais, realizando contagens com esta forma de representação numérica e, posteriormente, amplia este conjunto numérico com o conhecimento dos números fracionários. Para representar partes de coisas introduz-se o conceito de fração, e o aluno precisa utilizar mais de um número natural para indicar partes, por exemplo: a expressão “meio” é representada pela fração $\frac{1}{2}$, que utiliza dois números naturais, o número 1 que é o numerador e o número 2 que é o denominador, e isto representa parte de um todo.

Assim, a ampliação do conceito de números naturais para os números fracionários merece uma atenção especial**.** Nesse sentido, propõe-se inicialmente**,** o estudo do texto “Por que surgem as frações?” com o objetivo de recordar a definição dos números naturais que servem para fazer contagens e os números fracionários que são utilizados para representar partes de um todo.

Ao representar partes de um todo, aparecem as frações indicadas por dois números, um numerador e um denominador, termos esses que devem ser bem definidos, para que o professor possa compreender exatamente o que eles representam no contexto matemático, especificamente no estudo de frações. Nesse sentido explora-se o texto “Como ler frações?”**,** definindo denominador de uma fração como um termo que indica o “nome” ou o “tipo” da fração. A expressão “tipo” será melhor explorada na Oficina 3, com o estudo do texto “Um pouco mais sobre o que são frações” ao explorar a fração unitária enquanto unidade de medida, ideia que ainda não é muito explorada no Brasil.

Parte-se do princípio de que o denominador é a parte da fração que define o “tipo” de divisão a ser realizada, considera-se necessário explorar a divisão em partes iguais. Segundo Lins e Silva (2008, p.11) a “maneira de falar de frações, relacionando-as a partes de um todo é a maneira mais comum de se introduzir frações a crianças no Brasil, talvez por parecer mais simples de explicar”, a ideia de fração enquanto partes de um todo se refere à divisão do todo em partes iguais (denominador) e as partes consideradas (numerador).

As crianças já trazem consigo quando entram na escola a ideia de “metade” de uma maçã, de “pedaço” de bolo, de “meio” pão, é esse conhecimento que precisa ser sistematizado e ampliado no ensino formal. Para as crianças, a expressão “metade” nem sempre significa que o inteiro foi dividido em partes iguais. É comum encontrar crianças que dizem eu quero a “metade maior” ou a “metade menor” da maçã por exemplo, evidenciando assim, que o conceito de fração como parte de um todo ainda não está bem construído. A criança ainda não está sabendo que dividir é fracionar um inteiro em partes iguais.

Outro aspecto a ser levado em consideração é em relação ao significado da palavra “igual”. O sentido da palavra “igual”, no caso de estudo das frações, não se refere à forma, mas à área, isto significa que, quando o inteiro é dividido em partes iguais**,** cada parte não precisa ter a mesma forma (triângulo, quadrado, retângulo) mas que, cada uma dessas partes obrigatoriamente tenha a mesma área.

Assim, ao se propor atividades de divisão em partes iguais o objetivo é mostrar que as partes podem ter formas diferentes, porém que, cada parte deve ter área exatamente igual às outras partes em que o inteiro foi dividido.

4.1.1 Objetivos

A Oficina 1 - Divisão de figuras geométricas planas em partes iguais em relação à área, tem como objetivos:

- incentivar a leitura e interpretação de textos matemáticos, para o desenvolvimento de estratégias de ensino da matemática;
- reconhecer a relação entre números naturais e números fracionários;
- discutir os procedimentos utilizados para a construção do metro quadrado e do meio metro;
- aperfeiçoar habilidades de divisão de figuras geométricas planas em partes iguais, no que se refere à área;
- desenvolver habilidades de dobraduras, recortes e sobreposições no ensino de frações.

4.1.2 Tempo de duração

O tempo necessário para a realização da oficina é de quatro horas.

4.1.3 Materiais utilizados

- cópias de textos disponibilizados no Fascículo IV – Pró-Letramento Matemática (2008);
- desenhos de figuras planas;
- papel sulfite colorido e jornal;
- retângulos de 2 x 8 cm (dois para cada professor);
- lápis de escrever e colorido, borracha, régua, tesoura, cola e fita adesiva.

4.1.4 Atividades realizadas / Conteúdos abordados

- estudo dos textos: “Por que surgem as frações? e “Como ler frações?”;
- construção de uma superfície com a medida de um metro quadrado;
- construção de uma superfície com a medida de meio metro quadrado;
- comparação do metro quadrado (forma de quadrado) com meio metro quadrado (forma de retângulo, triângulo e quadrado);
- divisão de figuras geométricas planas em partes iguais.

4.1.5 Texto 1: “Por que surgem as frações?”

> Depois dos números naturais, as frações foram o primeiro tipo de números a surgir. Elas aparecem quando as pessoas querem registrar partes de coisas, ao invés de contá-las. O vaqueiro, por exemplo, conta seu gado quando sai para o campo, para que, na volta, possa saber se os bois e vacas estão ali. Mas se temos uma melancia e vamos dividi-la entre seis pessoas, para indicar que quantidade cada uma vai comer dizemos “1/6 de uma melancia”, que se lê “um sexto”. Estamos indicando que a melancia foi dividida em seis partes – 6 é o denominador –, e cada pessoa vai receber uma destas partes – 1 é o numerador. É interessante observar que a palavra “fração” está relacionada com a palavra “fratura”, que quer dizer “quebra”, e, de fato, podemos pensar que as frações representam **quantidades** que correspondem a “pedaços” de coisas. Bilhetes de loteria são vendidos em “frações”, quer dizer, ao invés de comprar o bilhete inteiro, é possível comprar apenas uma ou mais partes dele. Elas surgiram muito antes dos números decimais, como forma de representar quantidades não-inteiras, provavelmente pela inspiração de se representar partes. Aos poucos a ideia de fração foi se ampliando e outros significados foram criados. No Egito Antigo, apenas as frações unitárias (aquelas que **têm** numerador 1) eram usadas. Muito raramente usavam 2/3 e, mais raramente ainda, 3/4. Para escrever outras frações, eles usavam **as** frações unitárias. Por exemplo, 5/6 = 1/2 + 1/3 (LINS e SILVA, 2008, p. 8).

Orientações para o Aplicador

Antes de iniciar o estudo do primeiro texto “Por que surgem as Frações?” sugere-se ao Aplicador utilizar a técnica “explosão de ideias”[4], em que a questão

---

[4] Explosão de ideias é uma expressão que corresponde ao termo inglês "*brain storm*", que literalmente significa “tempestade cerebral". Essa técnica consiste em: 1. Determinar o assunto. 2.

norteadora é formulada oralmente pelo Aplicador, com uma linguagem clara e objetiva, de forma que, na resposta os professores possam expor seus conhecimentos sobre a origem e função dos números naturais e fracionários.

Em seguida organiza-se o registro das contribuições dos professores cursistas em duas colunas, uma referente aos números naturais e a outra referente aos números fracionários.

Na sequência, orienta-se aos professores cursistas formarem duplas para lerem e comentarem o texto, registrarem os aspectos relevantes e estabelecerem uma relação com o registro feito a partir da “explosão de ideias”.

Para finalizar o estudo do texto, os professores coordenados pelo Aplicador sistematizam uma comparação das semelhanças e diferenças entre o conjunto dos números naturais e números fracionários no que se refere à origem e função.

4.1.6 Texto 02: Como ler frações?

> Como acontece muitas vezes, prestar atenção nas palavras pode nos ajudar a lembrar a que elas se referem. A palavra “denominar” quer dizer “indicar nome de”, e, de fato, o denominador de uma fração indica o seu “nome”, que “tipo” de partes são, se são sextos, como no caso da melancia que foi dividida em seis partes e cada um ficou com uma parte, ou terços, quintos ou décimos. Já o numerador, indica o número que vamos tomar deste tipo de partes. É como se, ao escrever a fração 1/6, estivéssemos dizendo “uma parte do tipo sexto”. Para ler uma fração, então, dizemos o numerador e depois o denominador, mas por tradição, ao invés de dizermos, por exemplo, “um seis”, para a fração 1/6, dizemos “um sexto”. Os denominadores de 2 a 10 são lidos assim:

denominador	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Como se lê	meio	Terço	quarto	quinto	sexto	sétimo	oitavo	nono	décimo

> Como você pode reparar, as palavras usadas para ler denominadores de fração de 4 a 10, são as mesmas que usamos para indicar posição, por exemplo, em fila; isso pode ajudar a memorizá-las. Se o denominador é um,

---

Permitir que o maior número possível de alunos exponha a primeira ideia que lhe vier à mente a respeito daquele assunto. 3. Não deve haver comentários, críticas ou objeções às ideias, por mais absurdas que pareçam. 4. Anotar, no quadro-de-giz ou folha de papel, todas as ideias que forem sendo apresentadas. 5. Encerrado o tempo concedido pelo professor, permitir que a classe examine cada ideia constante da lista, discuta a propriedade de cada uma, elimine as que julgar inadequadas e selecione as que julgar válidas. Trata-se de um método que tem como vantagem despertar o interesse dos alunos, permitir a participação de todos eles, dinamizar o estudo e desenvolver a capacidade de raciocínio do grupo. Além disso, ajuda a fixar, na experiência dos alunos, os conceitos e atitudes corretos com referência ao assunto proposto (SOUZA, R. A. de. **Infantil – explosão de ideias.** Disponível em: <http://www.juerp.org.br/index.php?oid=11&cid=35>. Acesso em: 01 ago. 2011.

> podemos dizer “inteiros”: 4/1 pode ser lido “quatro inteiros”. Para denominadores maiores que 10, usamos a palavra “avos”: 1/12 é lida “um doze avos”; 3/17 é lida “três dezessete avos”; 20/40 é lida “vinte quarenta avos”. Esta palavra pode parecer estranha, mas nós a usamos muito quando tratamos de dinheiro, porque é ela que aparece em “centavos”, que é uma abreviatura de “cem avos”. Quando dizemos “15 centavos”, estamos fazendo uma referência a 15/100, já que um centavo é o mesmo que um centésimo de real. Mas ao lermos frações, se o denominador for 100, 1000 e assim por diante, o comum é dizermos “centésimo” (ao invés de “cem avos”), “milésimo” (ao invés de mil avos”), e assim por diante. As frações com denominador 10, 100, 1000, e assim por diante (as chamadas potências de 10) têm uma importância particular, porque têm uma relação direta com os números da forma decimal, os “números com vírgula”. No trabalho com os alunos é sempre importante enfatizar esta relação, e se possível apresentar as duas representações, como fração decimal e como número decimal, o que estimula um pensamento mais flexível nos alunos. Se por exemplo, vocês estão lendo algo que aparece a porcentagem 65%, mostre a eles que isto poderia ser representado também como 0,65 ou como 65/100. Cada uma destas representações facilita certos modos de pensar e de operar sobre ela; reconhecer sua equivalência permite que seus alunos passem de uma a outra quando estão resolvendo problemas ou tentando entender uma situação ou texto, e esta é uma característica importante das pessoas que pensam de forma autônoma. Um outro modo de se ler frações, bastante mais simples, mas que não é “oficial”, é simplesmente ler o numerador e o denominador, colocando entre eles a palavra “sobre”: 2/3 pode ser lida “2 sobre 3”; 7/12 pode ser lida “7 sobre 12”; 23/15 pode ser lida “23 sobre 15”. Ele é prático porque descreve diretamente o símbolo de que estamos falando, mas é útil também porque pode ser usado para se ler “falsas frações”, como o símbolo 0,8/4, que indica a divisão de 0,8 por 4, e é muito importante na álgebra: como iríamos ler a fração a/b, se não sabemos quem é o número b? (LINS e SILVA, 2008, p. 8).

Orientações para o Aplicador

Sugere-se ao Aplicador que antes de solicitar a leitura do texto ao professor cursista, faça alguns questionamentos que não precisam ser respondidos no momento, mas que possibilitem ao professor cursista a reflexão e incentivem a leitura atenta do texto, tais como: Como se faz a leitura de frações? Existe um único tipo de se fazer a leitura de frações? Quais são as irregularidades?? encontradas na leitura das frações? De onde vêm o termo “avos”? Qual é a relação entre as expressões “denominador” e “tipo” de fração? O que significa a palavra “denominar”?

Para o estudo do texto “Como ler frações?“, é importante orientar os professores cursistas que a primeira leitura seja individual. Após a leitura inicial, reúne-se o grupo todo para uma leitura comentada, tendo o Aplicador como coordenador. Nesta dinâmica um professor cursista faz a leitura de um parágrafo e o professor seguinte faz o comentário e, assim, sucessivamente.

Para finalizar o estudo do texto, o Aplicador retoma os questionamentos iniciais perguntando aos professores cursistas qual era o pensamento a respeito de cada item antes da leitura e qual foi a contribuição do texto (confirma-se a ideia inicial ou acrescenta-se algum conhecimento? Os conceitos trabalhados no texto foram relevantes ou não?).

4.1.7 Exercícios de fixação

a) Utilizando folhas de jornal construa duas superfícies, uma de um metro quadrado e outra de meio metro quadrado. Pergunta-se aos professores cursistas: A área da superfície de meio metro quadrado é igual à metade da área da superfície de um metro quadrado?

Orientações para o Aplicador

O objetivo da atividade “**a**” é mostrar ao professor dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental o quanto a mecanização do ensino pode interferir no processo de construção do meio metro quadrado. O professor normalmente não encontra dificuldades para construir o metro quadrado, ele constrói um quadrado com um metro de lado. Já para a construção do meio metro quadrado, ele normalmente constrói um quadrado com 0,5 m de lado.

Observa-se na Figura 1, a ilustração que tem supostamente meio metro quadrado. Nota-se que a superfície deste suposto meio metro quadrado cabe quatro vezes na superfície de um metro quadrado, sendo portanto, não a metade, mas sim a quarta parte.

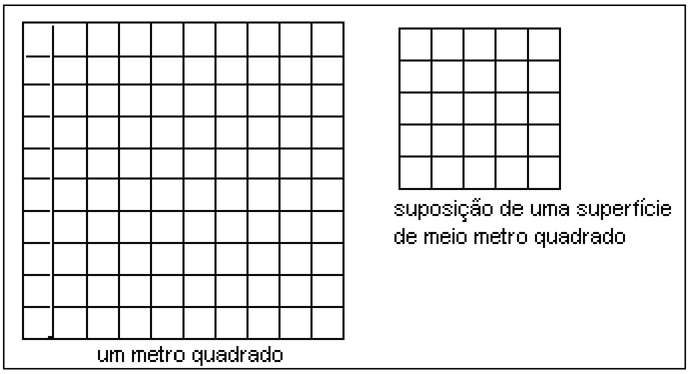


Figura 1 – Construção de superfícies
Fonte: Elaborado pela autora

Este erro acontece com frequência porque o professor considera apenas a forma quadrada para representar a superfície com meio metro quadrado. O ensino sistematizado e mecanizado da matemática impede perceber que na divisão de partes iguais deve ser considerada a área e não a forma.

A partir da construção do metro quadrado, o meio metro quadrado pode ser encontrado com diferentes formas geométricas planas, porém com a mesma área conforme pode ser observado na Figura 2, a seguir.

Na Foto A da Figura 2, visualiza-se a noção errônea de meio metro quadrado ao lado do um metro quadrado, percebendo com nitidez que a superfície menor corresponde à quarta parte da superfície maior.

Na Foto B da Figura 2 inicia-se o primeiro passo para encontrar o meio metro quadrado a partir de uma superfície de 1 metro quadrado.

Na Foto C da Figura 2 a superfície de um metro quadrado foi dobrada ao meio, apresentando o meio metro quadrado em forma de retângulo.

Na Foto D da Figura 2 a superfície foi dobrada na diagonal apresentando meio metro quadrado em forma de triângulo.

Nas Fotos E, F e G da Figura 2 apresenta-se a dobradura representando a forma quadrada de meio metro quadrado.

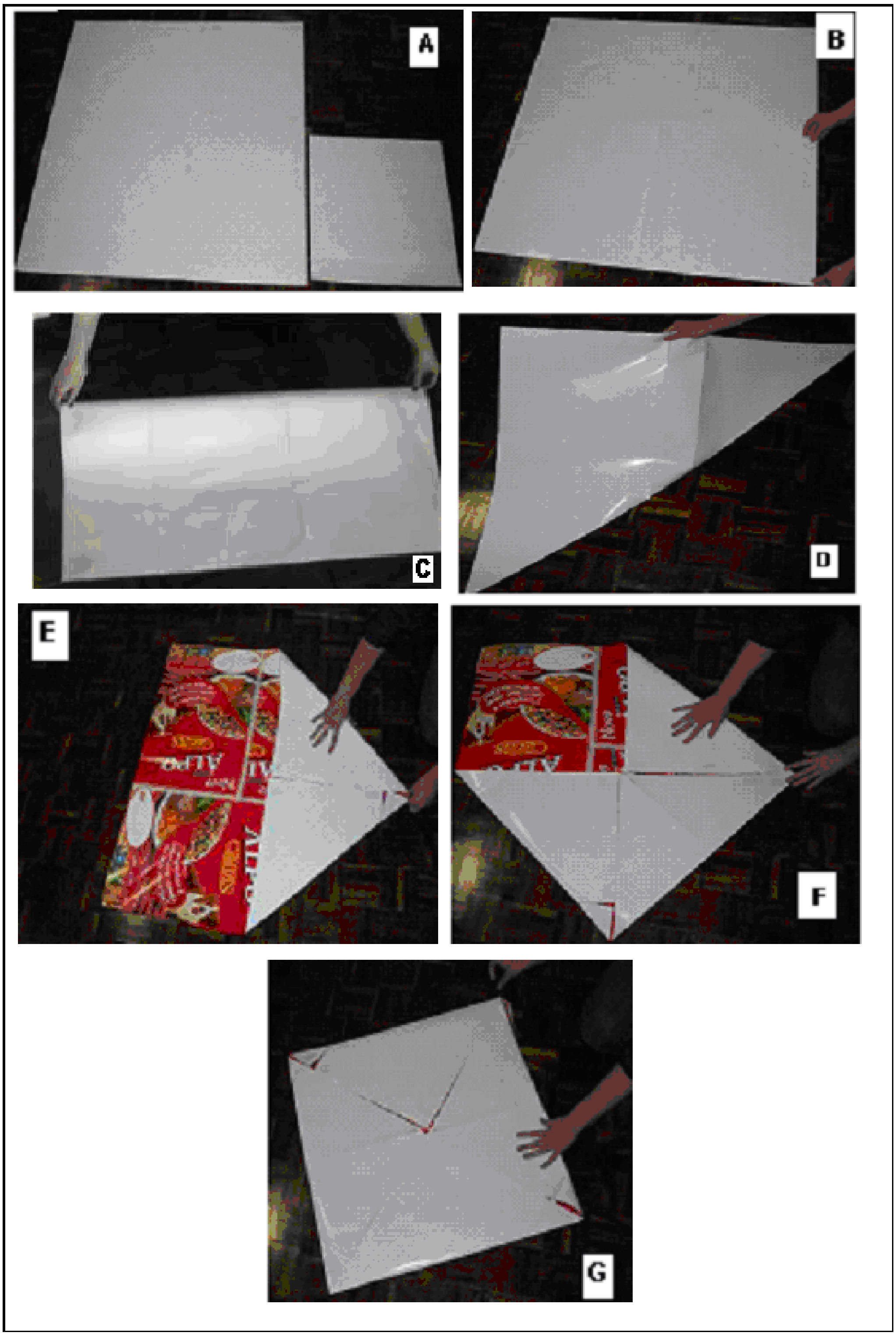


Figura 2 – Divisão de uma superfície de um metro quadrado em meio metro quadrado
Fonte: Elaborado pela autora

Neste sentido, justifica-se a proposição de exercícios que explorem a divisão de figuras geométricas planas em partes iguais no que se refere à área, uma vez que, para o ensino de frações enquanto parte de um todo contínuo, o que se considera como igual são as áreas e não a forma.

b) Divida os retângulos ilustrados na Figura 3 em duas partes iguais. Responda: De quantas formas diferentes os retângulos podem ser divididos em duas partes iguais? Justifique sua resposta.

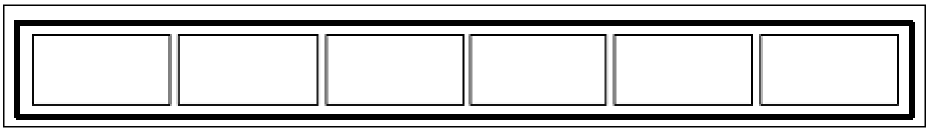


Figura 3 – Retângulos para serem divididos em partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

Orientações para o Aplicador

Na atividade “**b**” há uma tendência dos professores relacionarem a divisão do retângulo em partes iguais com o eixo de simetria, por isso é importante que o Aplicador enfatize o conceito de divisão em partes iguais considerando o “igual” como as partes que possuem a mesma área e não necessariamente a mesma forma. Na Figura 4 , visualizam-se seis possibilidades de se dividir um retângulo em duas partes iguais em relação à área.

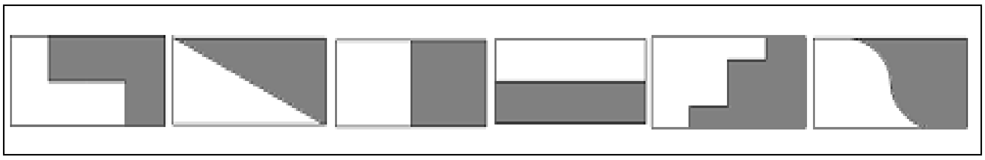


Figura 4: Exemplos de divisões de retângulo em partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

Ressalta-se que as divisões apresentadas na Figura 4 não devem ser consideradas como um modelo, mas como exemplos para que o professor cursista possa criar novas formas de dividir e refletir sobre esse processo.

c) Qual a fração que representa a parte pintada em cada uma das ilustrações da Figura 5?

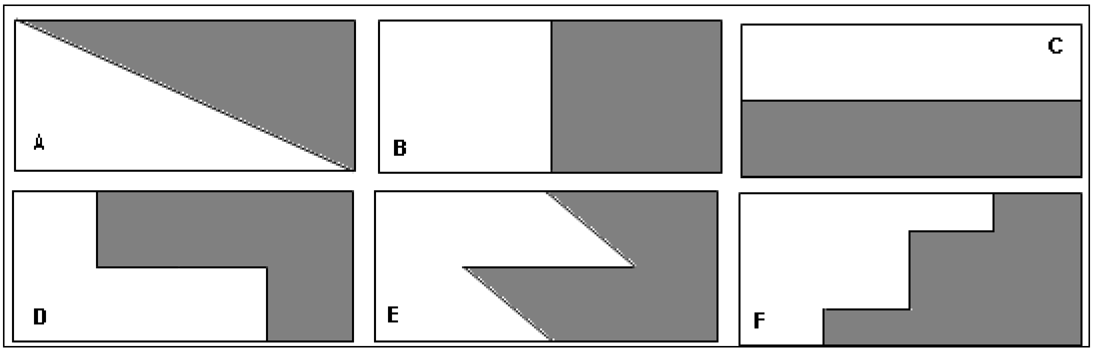


Figura 5: Exemplos de divisões em partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

Orientações para o Aplicador

O exercício "**c**" é complemento do exercício "**b**". As figuras retangulares já estão divididas em partes iguais e cada uma das partes pintadas corresponde à metade da figura inteira sendo representada pela fração $\frac{1}{2}$.

Nos retângulos A, B e C da Figura 5 a divisão em partes iguais é feita de forma bem convencional, com traçados respectivamente na diagonal, verticalmente e horizontalmente. É chamada de forma convencional por ser comumente utilizada por professores e alunos para dividir um retângulo em duas partes iguais.

Nos retângulos D, E e F da Figura 5 visualiza-se a divisão em partes iguais de forma não tão convencional com traçados irregulares o que as transforma em formas mais difíceis de serem identificadas de imediato como sendo partes iguais em relação à área. Essa igualdade pode ser comprovada por meio do recorte da área pintada na cor cinza e sobreposição na área de cor branca.

d) As frações obtidas a partir das ilustrações retangulares da Figura 5 do item "c" são iguais? Em que sentido? Use recortes e/ou dobraduras para verificar se a parte pintada de cada retângulo da Figura 5 é igual à outra parte da figura (não pintada).

Orientações para o Aplicador

O exercício **“d”** é complemento dos exercícios **“b”** e **“c”**. A proposta é que, a partir das figuras do exercício **“c”** que estão divididas em duas partes, os professores cursistas possam comprovar que essas partes são iguais, ou seja, que possuem a mesma área. Para a comprovação propõe-se aos professores cursistas que façam dobraduras e/ou recortes para sobreposição da parte pintada sobre a parte incolor.

Embora a atividade solicitada seja de nível fácil para os professores, é importante realizá-la com os alunos para comprovar por meio da sobreposição que a parte pintada possui a mesma área da parte incolor.

Para os professores é interessante propor questões mais complexas, como por exemplo: Quando dividimos uma figura retangular pelas diagonais, as quatro partes possuem a mesma área?

O traçado da Figura 6 representa a divisão de um retângulo pelas diagonais.

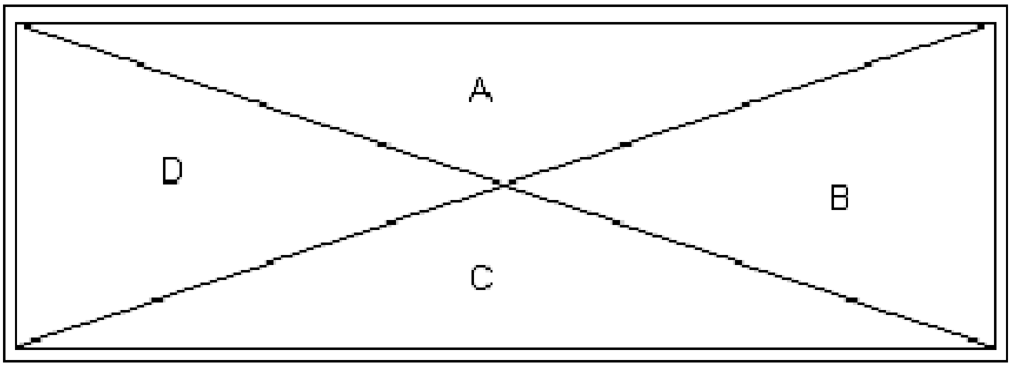


Figura 6 – Figura retangular dividida em quatro partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

Apenas pela visualização, percebe-se que as partes A e C; B e D da Figura 6 são iguais. E quanto às partes A e B**,** são iguais ou diferentes?

A = B ? ou A ≠ B ?

Para comprovar a igualdade ou a diferença entre as partes A e B ou C e D, propõe-se aos professores cursistas que façam o recorte das partes A e B e por meio de dobraduras e recortes verifiquem se a superfície da parte B pode ser sobreposta na superfície da parte A.

Como resultado da comparação das partes A e B ou C e D por meio da sobreposição observa-se que, embora tenham formas diferentes, ocupam a mesma área. Portanto**,** os triângulos A, B, C e D são iguais do ponto de vista da área ocupada.

e) Utilize duas folhas de papel de 4 x 16 cm representando retângulos iguais. Dobre um deles ao meio horizontalmente e depois verticalmente, dividindo-o em quatro partes iguais de forma "bem convencional" e pinte a quarta parte. Repita a processo com o outro retângulo, mas agora dobre-o mais duas vezes verticalmente, dividindo-o em 16 partes e represente por meio de pintura a quarta parte desse retângulo de uma maneira "não tão convencional". Compare a área pintada no primeiro retângulo com a área pintada no segundo retângulo. Responda: Há igualdade entre as duas partes pintadas?

Orientações para o Aplicador

No exercício **"e"** o objetivo é dividir duas folhas retangulares de mesmo tamanho em partes iguais, representar a quarta parte de cada uma delas, uma de forma bem "convencional" e outra de forma "não tão convencional" comparando as superfícies pintadas.

Para representar a quarta parte do retângulo de 4 x 16 cm de forma "convencional" dobra-se o papel, uma vez horizontalmente e outra vez verticalmente dividindo-o em quatro partes iguais e pinta-se uma das partes. Ressalta-se que no enunciado do exercício "**e**" foi solicitada a divisão de forma "convencional" dobrando uma vez horizontalmente e outra verticalmente, mas essa divisão também poderia ser feita dobrando o papel duas vezes horizontalmente ou duas vezes verticalmente e cada parte representada pela fração $\frac{1}{4}$, conforme representação na Figura 7.

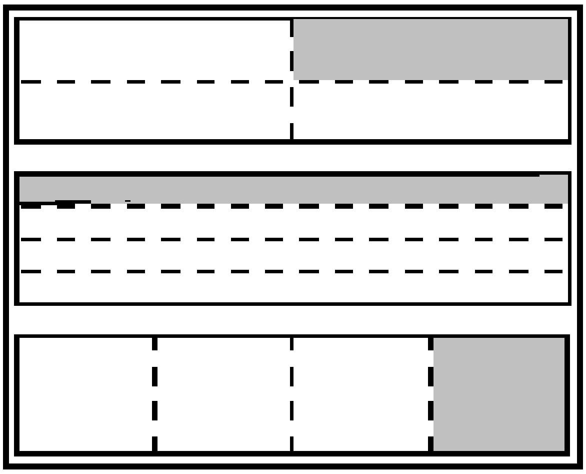


Figura 7 – Forma de representar a divisão em 4 partes iguais de maneira convencional
Fonte: Elaborado pela autora

Para representar a quarta parte do retângulo de 4 x 16 cm de forma “não tão convencional”, divide-se, inicialmente, o papel em 16 partes iguais, dobrando-se uma vez horizontalmente e três vezes consecutivas verticalmente.

Estando todas as divisões bem marcadas pelos vincos, pode ser realizada a pintura correspondente a $\frac{4}{16}$ de maneira “não tão convencional”, conforme exemplos representados na Figura 8.

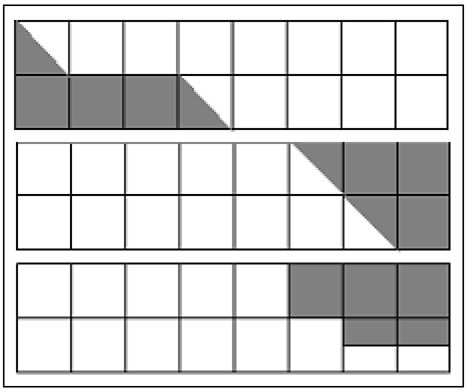


Figura 8 – Três formas de representar a quarta parte de um retângulo dividido em 16 partes.
Fonte: Elaborado pela autora

As partes representadas nas Figuras 7 e 8, também podem ser recortadas e sobrepostas umas sobre as outras para comprovar a igualdade das áreas. A partir da comparação alguns questionamentos podem ser levantados:

- $\frac{1}{4}$ é sempre igual a $\frac{1}{4}$? Se não é igual, por quê?

- $\frac{1}{4}$ de um bolo de 2 kg é igual a $\frac{1}{4}$ de um bolo de 4 kg ?

A partir desses questionamentos percebe-se que as frações representam a parte de um todo e essas partes só podem ser comparadas se os inteiros forem iguais.

f) Divida a Figura 9 em 10 partes iguais.
Responda: De quantas maneiras a Figura 9 pode ser dividida em 10 partes?

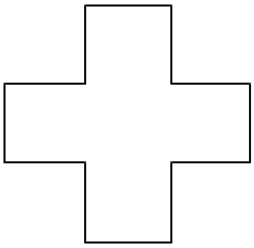


Figura 9 – Dodecágono[5] para ser dividido em 10 partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

Orientações para o Aplicador

Nos exercícios **"f"**, **"g"** e **"h"** explora-se a divisão de figuras de diferentes formas geométricas em partes iguais.

No exercício **"f"** a Figura 9 pode ser dividida em 10 partes iguais de diferentes maneiras. Propõe-se que cada professor cursista faça a divisão de uma maneira diferente. Para socializar as diferentes estratégias utilizadas pelos professores sugere-se ao Aplicador organizar uma exposição das divisões realizadas por cada professor cursista.

Na Figura 10 é apresentada uma das formas de dividir o dodecágono em 10 partes iguais.

[5] Dodecágono é uma figura geométrica formada por 12 segmentos de retas que não se cruzam compondo uma região plana poligonal (DANTE, 2005, p. 81).

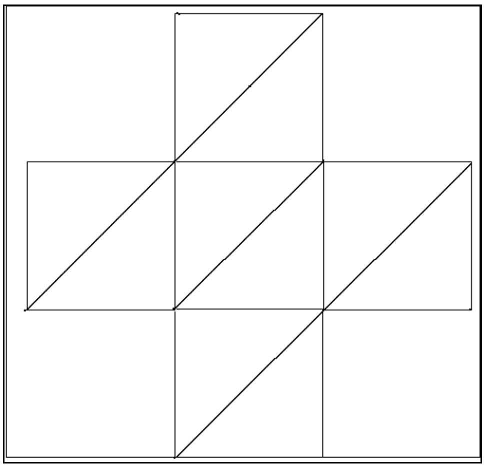


Figura 10 – Modelo de divisão do dodecágono
Fonte: Elaborado pela autora

g) Divida a Figura 11 em seis partes iguais.

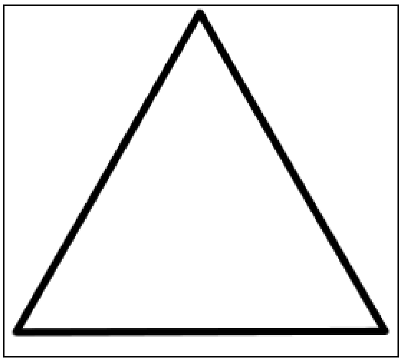


Figura 11 – Triângulo a ser dividido em 6 partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

Orientações para o Aplicador

No exercício **“g”** a Figura 11 é um triângulo equilátero que deve ser dividido em 6 partes iguais. Uma das possibilidades é tomar como referência um dos vértices, dividir a medida do lado oposto a esse vértice em 6 partes iguais e unir cada ponto ao vértice, conforme ilustra a Figura 12.

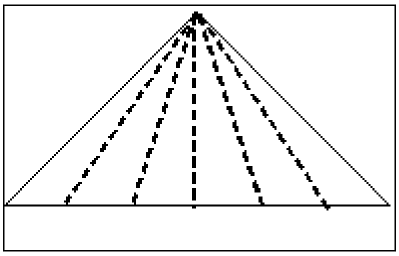


Figura 12 – Modelo de divisão do triângulo em 6 partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

h) Descubra duas maneiras diferentes de dividir a Figura 13 em cinco partes iguais

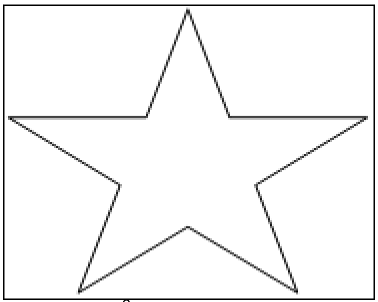


Figura 13 – Decágono[6] a ser dividido em 5 partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

Orientações para o Aplicador

No exercício **"h"** a proposta é encontrar duas maneiras diferentes de dividir a Figura 13 em 5 partes iguais. Na Figura 14 estão representadas duas maneiras de divisão em partes iguais.

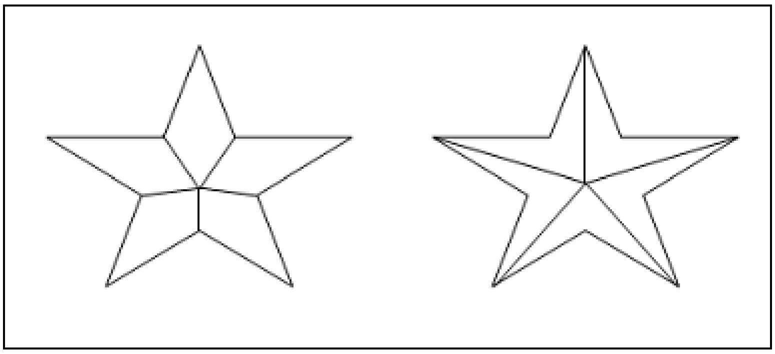


Figura 14 – Duas possíveis maneiras de dividir o decágono em 5 partes iguais .
Fonte: Elaborado pela autora

[6] Decágono é uma figura geométrica formada por 10 segmentos de retas que não se cruzam compondo uma região plana poligonal (DANTE, 2005, p. 81).

Conclui-se a Oficina 1, registrando-se no Diário Coletivo os principais aspectos abordados, dúvidas, contribuições, curiosidades, anseios, expectativas para os próximos encontros. Este registro é feito com a participação de todos os professores cursistas, sendo que apenas um professor registra e os demais assinam.

O Aplicador pode encerrar a Oficina 1 retomando o conceito de divisão de uma superfície em partes iguais em relação à área e anunciar a Oficina 2 fazendo alguns questionamentos: “Como utilizar o Tangran como recurso didático para o ensino de frações?”, “Quais peças do Tangran possuem a mesma área e formas diferentes?”, “É possível utilizar uma das peças do Tangran como unidade de medida?”. Esses questionamentos têm como objetivo despertar no professor a curiosidade e a vontade de pesquisar.

4.2 OFICINAS 2 – O TANGRAN - RECURSO LÚDICO PARA O ENSINO DE FRAÇÕES

Na Oficina 2 propõe-se a construção do Tangran com o objetivo de reforçar os conceitos trabalhados na Oficina 1, ou seja, a divisão em partes iguais, considerando como partes iguais as partes que possuem a mesma área, ampliando o conceito de fração como parte de um todo a partir da fixação de cada uma das peças do Tangran como unidade de medida.

O Tangran, é um quebra-cabeça chinês muito antigo composto por sete peças: cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo, que exerce grande atração tanto em crianças como em adultos e permite desenvolver a criatividade e explorar o pensamento lógico na composição e transformação de figuras.

Nas escolas o Tangran pode ser encontrado para recorte no final dos livros didáticos e como quebra-cabeça confeccionado em madeira ou E.V.A. (emborrachado). No entanto, nesta Oficina propõe-se a construção do Tangran por meio de dobraduras a partir de uma folha de papel sulfite (ou papel cartão dupla face) do qual é retirado o maior quadrado possível.

Ao construir o Tangran, o quadrado inicial é dividido por meio de dobraduras em 16 quadradinhos e cada quadradinho pode ser considerado como uma unidade de medida de área. Essa marcação (vinco) permanece nas peças e facilita a comparação da área ocupada pelas peças.

Os passos para a construção do Tangran normalmente precisam ser repetidos pelo Aplicador duas, três vezes, ou mais vezes até que todos os professores cursistas dominem a técnica com segurança.

Após a construção das peças do Tangran, o Aplicador instrui os professores a montarem figuras geométricas planas utilizando estas peças. Por exemplo, montar um quadrado utilizando 2 peças, 3 peças, 4 peças, 5, peças, 6 peças e 7 peças do Tangran. É uma ação lúdica que contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e auxilia na visualização de cada uma das partes em relação ao todo.

4.2.1 Objetivos

Para que na Oficina 2, a Construção do Tangran se constitua em um recurso didático para o ensino de frações, estabelecem-se os seguintes objetivos:

- construir o Tangran por meio de dobraduras;
- explorar as características das peças do Tangran;
- identificar as peças do Tangran pela área, por semelhança, tamanho e forma geométrica;
- compor e decompor figuras geométricas planas usando o Tangran;
- utilizar as peças do Tangran como unidades de medida.

4.2.2 Tempo de duração

O tempo necessário para a realização da oficina é de duas horas.

4.2.3 Materiais utilizados

- papel sulfite (ou cartão dupla face) para construção do Tangran;
- Fotocópia dos exercícios;

- lápis de escrever e colorido, borracha, régua, tesoura e cola.

4.2.4 Atividades realizadas

- construção do Tangran;
- resolução de exercícios.

4.2.5 Exercícios de fixação

a) Construção do Tangran

- Construa o Tangran por meio de dobraduras e recortes, nomeando as peças conforme a Figura 15.

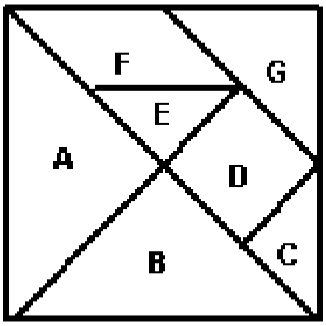


Figura 15 – Construção de Tangran
Fonte: LINS e SILVA (2004, p. 22)

Orientações para o Aplicador:

Ao construir o Tangran articulam-se os conhecimentos de medidas, geometria e números possibilitando ao professor vivenciar situações práticas de ensino contextualizado a partir de uma situação problema.

Para a construção do Tangran por meio de dobraduras, os procedimentos foram organizados em forma de passos conforme seguem:

1º passo - distribuir um pedaço de papel com forma retangular (sulfite ou cartão dupla face).

2º passo - a partir do papel com forma retangular, retirar o quadrado de maior área possível. Para obter o quadrado, dobra-se o lado menor do papel sobre o lado maior, conforme mostra a Foto A da Figura 16. Em seguida, corta-se o retângulo que sobrou do lado maior, obtendo-se o quadrado conforme mostra a Foto B da Figura 16. Para a construção do Tangran será utilizado apenas o quadrado.

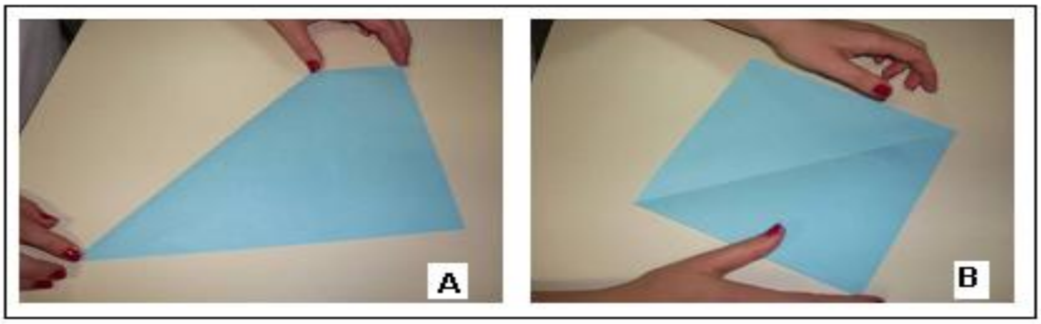


Figura 16 – Corte de um quadrado a partir da folha retangular
Fonte: Elaborado pela autora

3º passo – O quadrado passa a ser considerado o "inteiro". Dobra-se o quadrado marcando vincos de modo a obter uma malha quadriculada com 16 quadradinhos.

Para obter a malha quadriculada dobra-se o quadrado, duas vezes seguidas, no mesmo sentido conforme Foto C da Figura 17 de maneira que, ao abrir o papel quadrado estejam vincadas três dobras paralelas obtendo quatro formas retangulares, conforme mostra a Foto D da Figura 17.

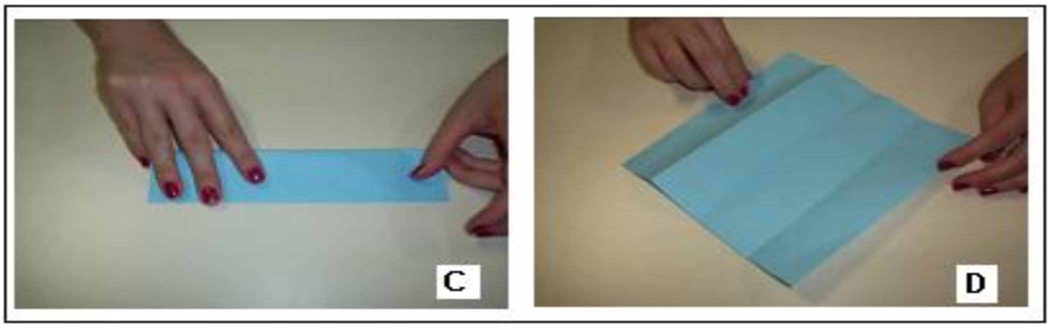


Figura 17 – Passos para construção da malha quadriculada por meio de dobraduras
Fonte: Elaborado pela autora

No sentido contrário, realiza-se o mesmo procedimento dobrando-se o quadrado ao meio no sentido vertical dos vincos obtidos na Foto D da Figura 17, e depois mais uma vez ao meio de modo que, ao abrir o papel quadrado, existam “vincos” que se assemelhem a uma malha quadriculada com 16 quadradinhos, conforme os passos observados nas Fotos E, F e G da Figura 18.

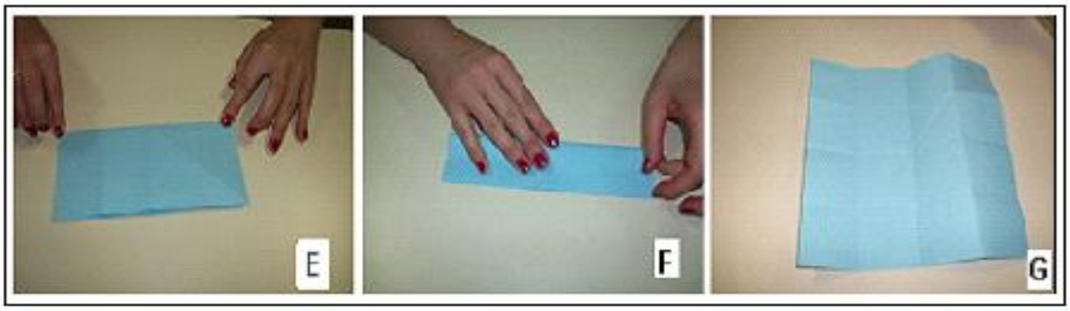


Figura 18 – Prosseguimento da dobradura para construção do Tangran
Fonte: Elaborado pela autora

Considerando cada um dos 16 quadradinhos como unidade de área, o Aplicador pergunta aos professores cursistas: Qual é a área total do quadrado considerado como “inteiro”?

4º passo – Divide-se o quadrado pela diagonal de forma a obter dois triângulos iguais (Fotos H e I da Figura 19). Utiliza-se a régua ou a tesoura para separá-los, conforme mostra a Foto J da Figura 19.

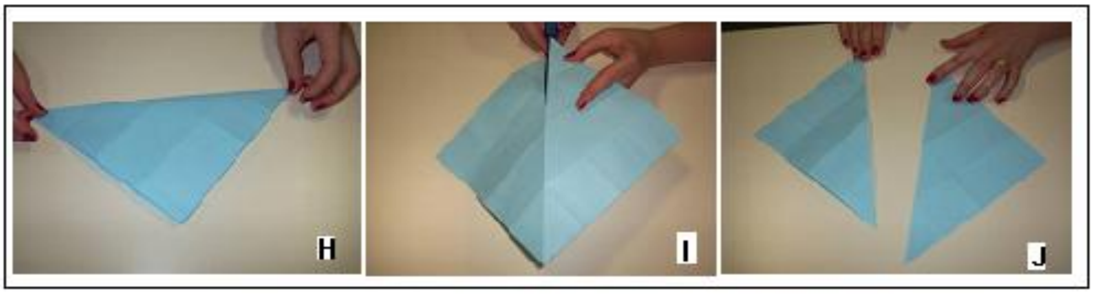


Figura 19 – Dobradura em diagonal para construção do Tangran
Fonte: Elaborado pela autora

Concluindo os procedimentos do 4º passo, o Aplicador pergunta aos professores cursistas: Qual é a área de cada um dos triângulos obtidos na Figura 19?

5º passo – Ao dobrar ao meio um dos triângulos da Foto J da Figura 19, obtêm-se dois triângulos iguais com a metade do tamanho do triângulo inicial conforme Foto K da Figura 20. Utiliza-se uma régua ou uma tesoura para separá-los conforme mostra a Foto L da Figura 20. Esses triângulos são considerados como duas peças Tangran - dois triângulos grandes.

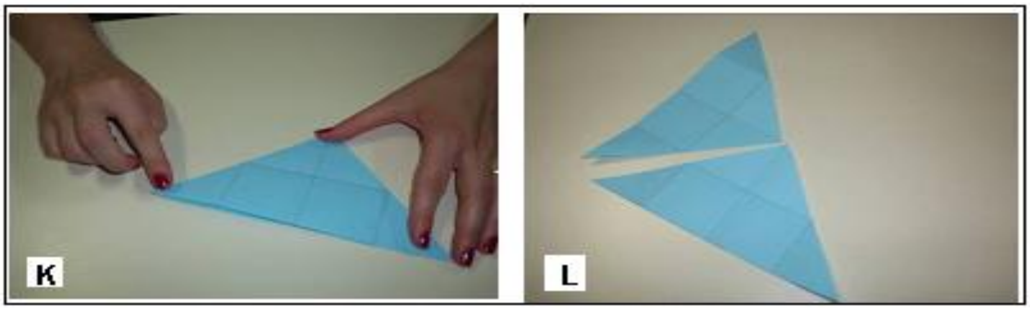


Figura 20 – Triângulos grandes – duas peças do Tangran
Fonte: Elaborado pela autora

Concluindo os procedimentos do 5º passo o Aplicador pergunta aos professores cursistas: Qual é a área dos triângulos obtidos na Foto L da Figura 20?

6º passo – Toma-se o outro triângulo grande (Foto J, Figura 19) e dobra-se de modo que o vértice referente ao ângulo reto encoste-se à base maior do triângulo conforme mostra a Foto M da Figura 21. Na marca deixada por esta nova dobradura faz-se o recorte, separando o triângulo em duas partes, conforme mostra a Foto N da Figura 21. Na Foto O da Figura 21, observa-se o resultado deste procedimento, ou seja, 2 peças: um triângulo médio (terceira peça do Tangran) e um trapézio.

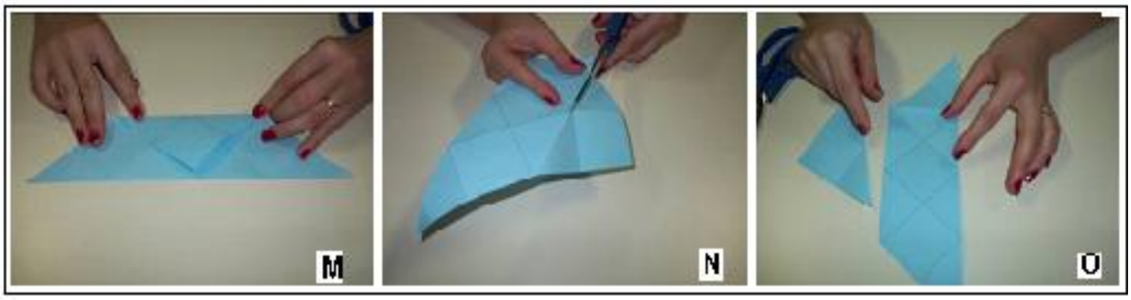


Figura 21 – Construção do triângulo médio – peça do Tangran
Fonte: Elaborado pela autora

Após o 6º passo o Aplicador pergunta aos professores cursistas:

- Qual é a área do triângulo médio obtido na Figura 21?
- Qual é a área do trapézio obtido na Figura 21?

7º passo – Toma-se o trapézio obtido no 6º passo, dobra-se a ponta esquerda do trapézio de forma a obter um triângulo retângulo e um trapézio retângulo. No vinco separam-se as peças conforme mostram as Fotos P e Q da Figura 22. Com este recorte obtém-se um triângulo pequeno (quarta peça do Tangran) e um trapézio retângulo conforme mostra a Foto R da Figura 22.

Figura 22 – Construção do triângulo pequeno – peça do Tangran
Fonte: Elaborado pela autora

A partir da obtenção das peças da Foto R Figura 22, o Aplicador pergunta aos professores cursistas:

- Qual é a área do triângulo obtido a partir dos recortes apresentados na Figura 22?
- Qual é área do trapézio retângulo que foi obtido na Figura 22?

8º passo – Toma-se o trapézio retângulo obtido na Foto R da Figura 22, dobra-se o lado que possui dois ângulos retos de modo a obter um quadrado conforme Foto S da Figura 23. Separam-se as figuras conforme mostra a Foto T da Figura 23 obtendo duas outras peças: um quadrado (quinta peça do Tangran) e um trapézio retângulo menor que o utilizado no 7º passo conforme mostra a Foto U da Figura 23.

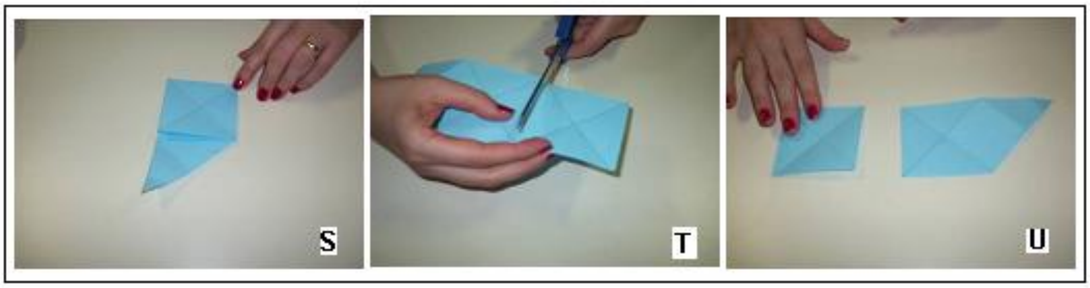


Figura 23 – Construção do quadrado – peça do Tangran
Fonte: Elaborado pela autora

Após obter as peças da Foto U Figura 23 o Aplicador pergunta aos professores cursistas:

- Qual é a área do quadrado obtido na Figura 23?
- Qual é a área do trapézio obtido na Figura 23?

9º passo - Este é o último passo para obtenção das peças do Tangran. Toma-se o trapézio obtido no 8º passo e localiza-se o vértice referente ao ângulo reto, dobra-se de forma a obter um paralelogramo e um triângulo conforme mostram as Fotos V e W da Figura 24. Usa-se a tesoura ou a régua para separar as duas partes conforme mostra a Foto Y da Figura 24. Completa-se assim as duas peças do Tangran que faltavam: um paralelogramo (sexta peça do Tangran) e um triângulo pequeno (sétima peça do Tangran) conforme mostram as Fotos Y e Z da Figura 24.

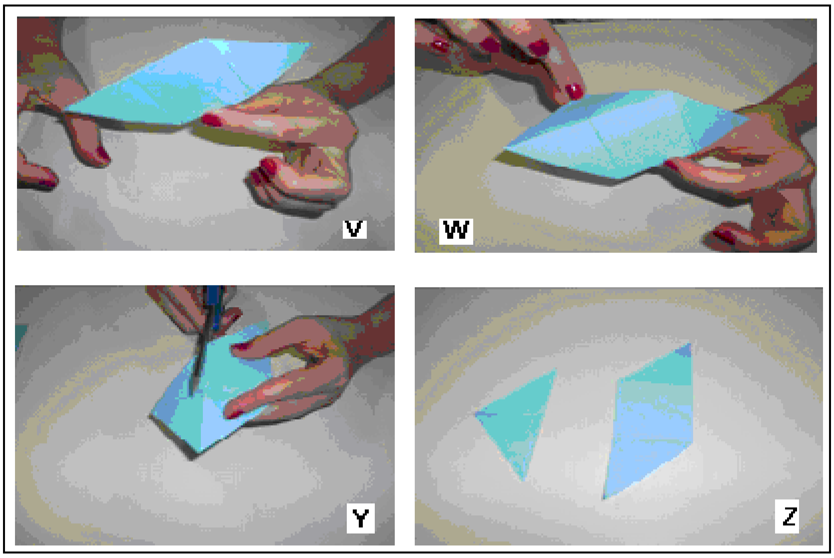


Figura 24 – Construção do triângulo pequeno e do paralelogramo – peças do Tangran
Fonte: Elaborado pela autora

Após obter as peças da Foto Z Figura 24 o Aplicador pergunta aos professores cursistas:

- Qual é a área do paralelogramo obtido na Figura 24?
- Qual é a área do triângulo obtido na Figura 24?

Ao término dos 9 passos foram construídas as sete peças do Tangran conforme mostram as Fotos AA, BB e CC da Figura 25. Essas peças devem ser nomeadas conforme Figura 15 para evitar confusão na resolução do exercício "**b**".

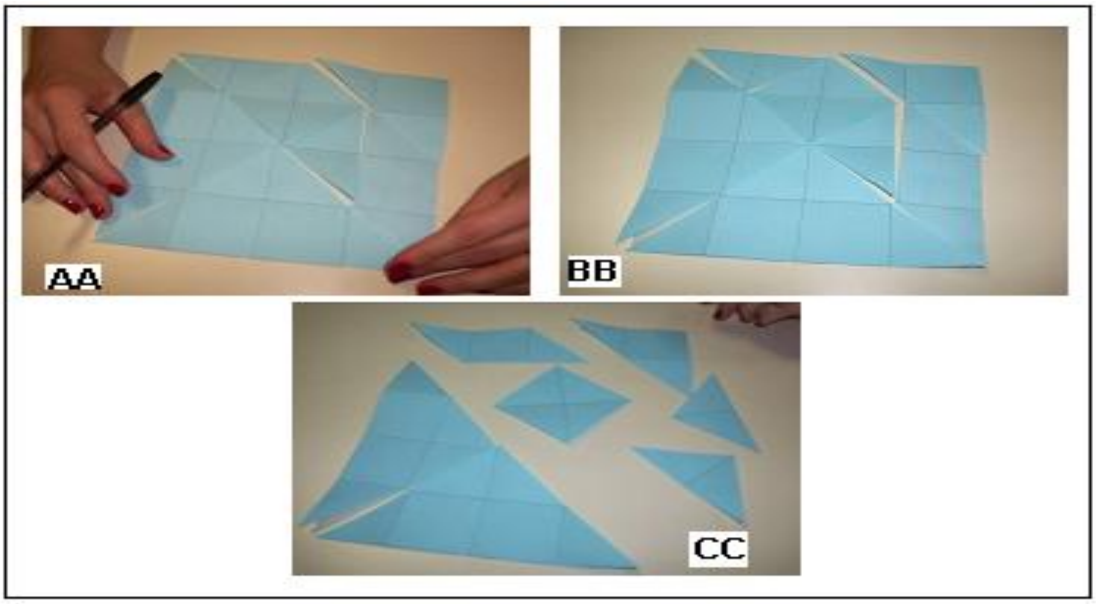


Figura 25 – Peças do Tangran
Fonte: Elaborado pela autora

Antes de iniciar os exercícios explorando a fração como uma unidade de medida a partir da comparação das peças do Tangran, sugere-se ao Aplicador propor algumas atividades com o quebra-cabeça construído, por exemplo: encontrar a área de cada peça conforme as denominações descritas na Figura 15; montar triângulos com 2 ou 4 peças; formar a imagem de um objeto. Essas atividades têm como objetivo familiarizar o professor cursista com a denominação das peças estabelecidas na Figura 15.

O professor Aplicador pode sugerir aos professores cursistas que pintem as peças nas cores apresentadas na Figura 26, por exemplo. Com as peças coloridas a identificação fica facilitada, especialmente quando se propõe essa atividade para as crianças.

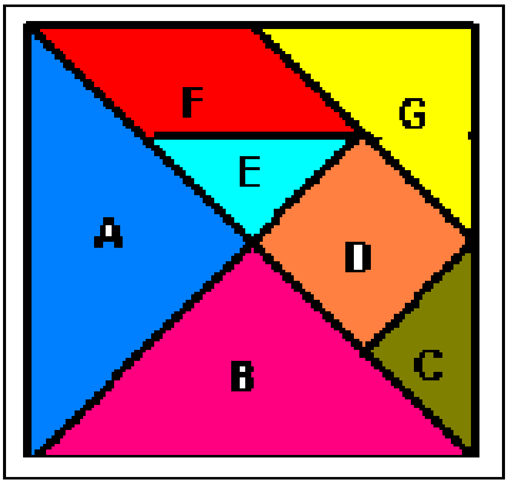


Figura 26 – Denominação das peças no Tangran
Fonte: Adaptado LIMC (2010, p. 1)

É importante também que o professor Aplicador proponha alguns questionamentos aos professores cursistas, como por exemplo:

- Qual a peça que possui maior área? E a menor?
- É possível construir um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo utilizando dois triângulos pequenos?
- É possível construir um quadrado utilizando 2, 3, 4, 5, 6 e 7 peças?
- Que outros polígonos podem ser construídos?
- Qual será a área máxima de um quadrado construído com duas peças?

Com esses questionamentos busca-se contextualizar o ensino de Matemática e vivenciar uma prática que exige a mobilização de conhecimentos para a resolução de problemas. Nesse caso, a relação entre números, medidas e geometria é a preparação para o exercício "**b**" que tem como objetivo utilizar as peças do Tangran como unidades de medida.

b) Comparando a área das peças do Tangran – Uma atividade lúdica

b1) Com base na Figura 26 e considerando que as peças C (ou E) do Tangran construído têm valor igual a uma unidade de área, responda:

1. Qual é a área da peça D?

2. Qual é a área da peça F?

3. Qual é a área da peça G?

4. Qual o valor da área da peça A (ou B)?

5. Qual é área do Tangran inteiro exposto na Figura 26?

Orientações para o Aplicador:

Para a resolução do exercício "**b1**" são consideradas como unidades de medida as peças C (ou E), correspondendo aos triângulos pequenos do Tangran (Figura 25). Com as duas peças C ou E são construídas as peças D, F e G, conforme mostra a Figura 27. Portanto, para formar as peças D, F e G do Tangran foram utilizadas uma peça C e outra peça E (ou duas peças C ou E) em diferentes posições.

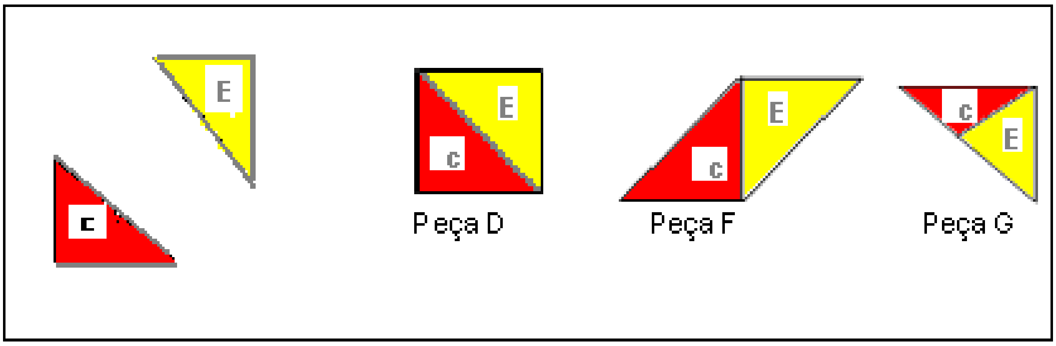


Figura 27 – Construção das peças D, F e G a partir das peças C e E.
Fonte: Adaptado do: LIMC (2010, p.1)

Com duas peças C e duas peças E (ou quatro peças C ou E) são construídas as peças A ou B que aparecem na figura 26, conforme mostra a Figura 28.

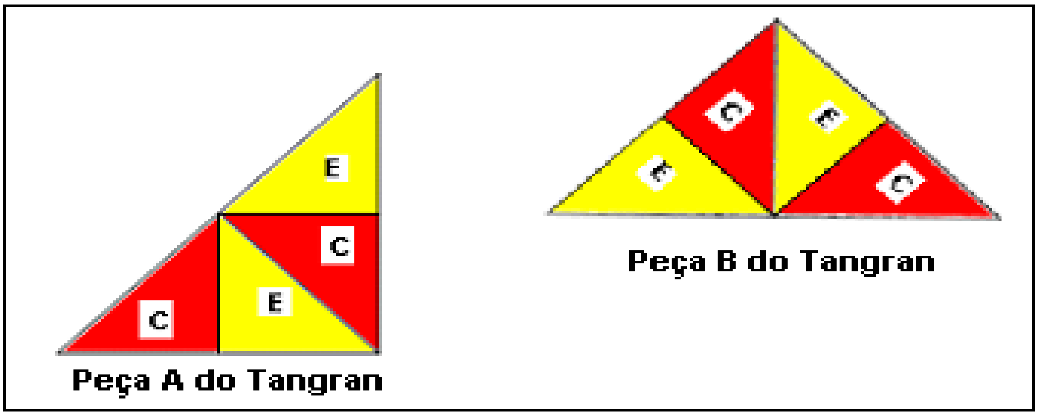


Figura 28 – Construção de peças A e B a partir das peças C e E.
Fonte: Adaptado do LIMC (2010, p.1)

Com 8 peças C e 8 peças E (ou 16 peças C ou E) é construído o Tangran inteiro, conforme mostra a Figura 29.

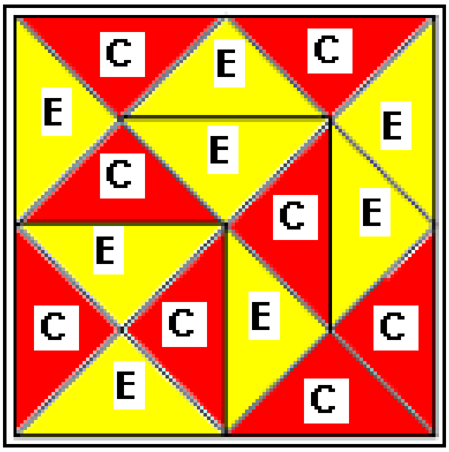


Figura 29 – Construção do Tangran com peças C e E.
Fonte: Adaptado do LIMC (2010, p. 1)

Portanto, utilizando os triângulos pequenos do Tangran (peças C e E da Figura 25) são construídos os triângulos grandes (peças A e B), o triângulo médio (peça G), o paralelogramo (peça F) e o quadrado (peça D) que aparecem na Figura 26.

Em resposta à questão “**b1**” considera-se que:

- as peças D (quadrado), F (paralelogramo) e G (triângulo médio) da Figura 27 são formadas por uma peça C e uma peça E ou duas peças C (ou E), totalizando duas peças. Portanto, cada uma das peças D, F ou G possui 2 unidades de área.
- as peças A e B (triângulos grandes) da Figura 28 são formadas por duas peças C e 2 peças E ou 4 peças C (ou E), totalizando quatro peças. Portanto, cada uma das peças A (ou B) possui 4 unidades de área.
- o Tangran da Figura 29 é formado por 8 peças C e 8 peças E ou 16 peças C (ou E), totalizando 16 peças. Assim, possui 16 unidades de área.

b2) Se a peça D do Tangran representada na Figura 26 for considerada como uma unidade de medida, responda:

1. Qual é a área da peça C (ou E) da Figura 26?

2. Qual é a área da peça F da Figura 26?

3. Qual é a área da peça G da Figura 26?

4. Qual é a área da peça A (ou B) da Figura 26?

5. Qual é a área do Tangran representado na Figura 26?

Orientações para o Aplicador:

Para a resolução do exercício “**b2**”, a peça D da Figura 26 foi considerada como unidade de medida de área, e no exercício ”**b1**” a Figura 27 mostra que duas peças (uma C e outra E) formam a peça D**;** portanto, a peça D tem o **dobro** da área das peças C (ou E), então as peças C (ou E) têm **metade** da área da peça D e a área de cada uma das peças C (ou E) pode ser expressa pela fração $\frac{1}{2}$, conforme mostra a Figura 30.

As peças D, F e G visualizadas na Figura 27 foram construídas com duas peças uma C e outra E; portanto, as peças F e G têm a mesma área da peça D, ou seja, valem uma unidade de área, conforme se visualiza na Figura 30.

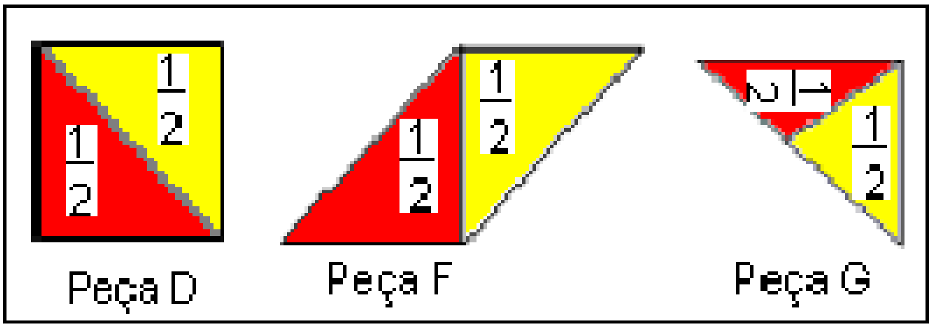


Figura 30 – Peças D, F e G como unidades de medida
Fonte: Adaptado do LIMC (2010, p. 1)

As peças A e B da Figura 28 são construídas com 4 peças (duas peças C e duas peças E), e como a peça G (D ou F) da Figura 27 é construída com duas peças (uma peça C e uma peça E), então tanto a peça A quanto a peça B equivalem a duas peças G (D ou F); portanto, a área de ambas é de 2 unidades, conforme mostra a Figura 31.

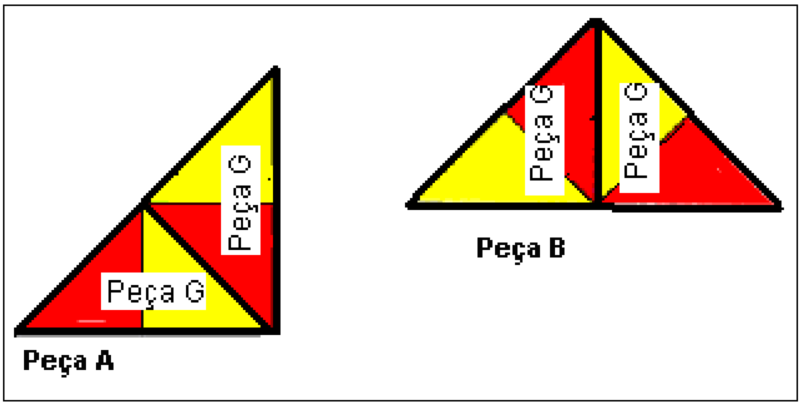


Figura 31 – Construção das peças A e B com duas peças D
Fonte: Adaptado do LIMC (2010, p. 1)

Observa-se na Figura 31 que para recobrir a superfície da peça A (ou B) são necessárias duas peças D, uma peça inteira e outra recortada em duas partes iguais, ou uma peça D e duas peças C (ou E) que formam uma peça D.

O Tangran inteiro é formado por 8 peças C e 8 peças E ou 16 peças C (ou E) e como cada uma das peças D, F ou G são formadas por duas peças uma C e outra E, a área total do Tangran tendo a peça D como unidade de medida é de 8 unidades de área, conforme mostra a Figura 32. Observa-se que os cantos do quadrado foram construídos com peças G que possuem a mesma área das peças D.

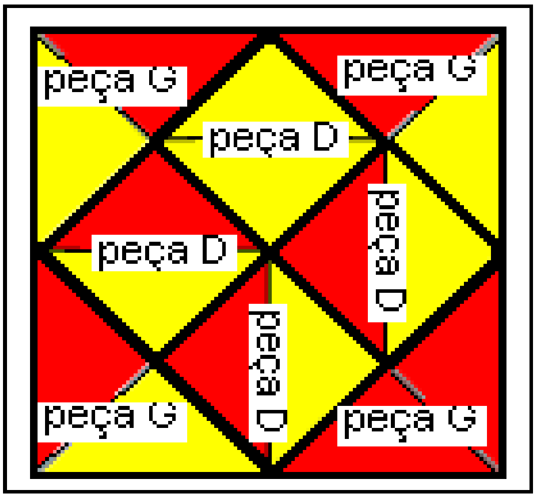


Figura 32 – Construção do Tangran com peças D e G
Fonte: Adaptado do LIMC (2010, p. 1)

b3) Considerando que as peças A (ou B) da Figura 26 têm valor igual a uma unidade de área, responda:

1. **Qual é a área da peça C (ou E) da Figura 26?**
2. **Qual é a área da peça D da Figura 26?**
3. **Qual é a área da peça F da Figura 26?**
4. **Qual é a área da peça G da Figura 26?**
5. **Qual é a área do TANGRAN da Figura 26?**

Orientações para o Aplicador:

Na resolução do exercício “**b3**” considera-se como unidade de medida a peça A (ou B) da Figura 26.

A peça A da Figura 26 é formada por duas peças C e duas peças E (ou 4 peças C ou E). Portanto, as peças C (ou E) ocupam a quarta parte das peças A (ou B). Isso leva a concluir que a área da figura C (ou E) representa $\frac{1}{4}$ da unidade de medida da peça A (ou B).

Em outra composição das peças A ou B, retoma-se as Figuras 27 e 31 para visualizar a formação das peças A ou B utilizando a peça G (que tem a mesma área das peças D e a F).

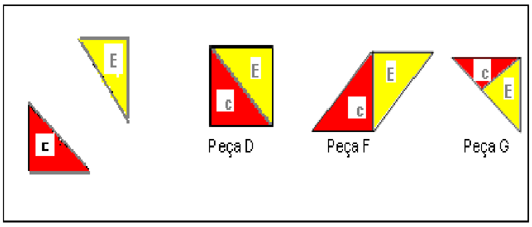


Figura 27 – Construção das peças D, F e G. a partir das peças C e E .

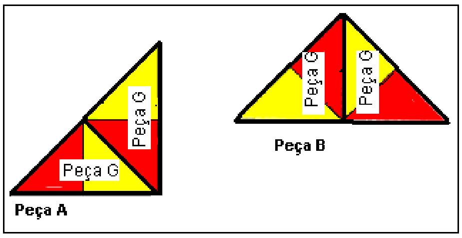


Figura 31 – Construção das peças A e B com 2 peças D

Na Figura 27 verifica-se que as peças D, F e G são formadas por 2 peças C (ou E), ou uma peça C e uma E; portanto, são iguais em relação a área. Com a junção de duas peças G (D ou F) formam-se as peças A (ou B). Portanto, quando a peça A (ou B) é considerada como unidade de medida, a peça G (D ou F) ocupa a metade da área das peças A (ou B), assim a área das peças D, F e G representam $\frac{1}{2}$ da unidade de medida, ou seja, das peças A (ou

Retomando a Figura 29 observa-se:

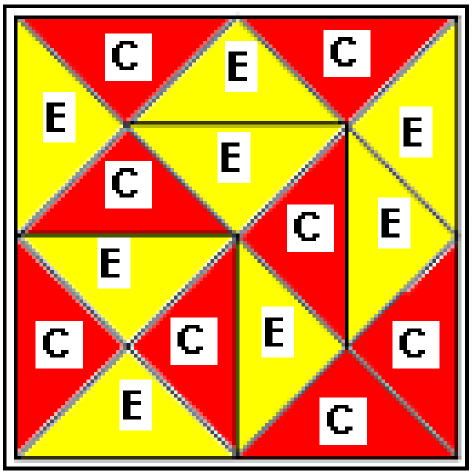


Figura 29 – Construção do Tangran com 8 peças C e 8 peças E ou 4 peças A (ou B)
Fonte: Adaptado do LIMC (2010, p. 1)

O Tangran inteiro é formado por 8 peças C e 8 peças E ou 16 peças C (ou E), e as peças A (ou B) são formadas por duas peças C e duas peças E ou 4 peças C (ou E). Observa-se que são necessárias 4 peças A (ou B) para recobrir a superfície total do Tangran; portanto, a área total do Tangran tendo como unidade de medida as peças A (ou B) é de 4 unidades.

b4) Considerando o Tangran expresso na Figura 26 como uma unidade de área, responda:

1. Qual é a área da peça A (ou B) da Figura 26?

2. Qual é a área da peça D da Figura 26?

3. Qual é a área da peça F da Figura 26?

4. Qual é a área da peça G da Figura 26?

5. Qual é a área da peça C (ou E) da Figura 26?

Orientações para o Aplicador

No exercício **"b4"** considera-se como unidade de medida o quadrado inicial (que deu origem ao Tangran), portanto, a figura formada por todas as peças. Como o Tangran pode ser construído com duas peças A e duas peças B ou 4 peças A (ou B), cada peça A (ou B) ocupa a quarta parte da unidade (Tangran). Logo a área de cada peça A (ou B) é representada pela fração $\frac{1}{4}$.

O Tangran ainda pode ser construído com 8 peças C e 8 peças E, ou 16 peças C (ou E) conforme pode ser observado na Figura 29. Portanto**,** a área de cada peça C (ou E) é representada pela fração $\frac{1}{16}$.

As peças D, F ou G possuem a mesma área, e para formar o Tangran são necessárias 8 dessas peças conforme se visualiza na Figura 30. Portanto**,** a área de cada peça D, F ou G é representada pela fração $\frac{1}{8}$.

Para finalizar a Oficina 2, sugere-se ao Aplicador que retome o conceito de fração como parte de um todo contínuo e a representação das frações unitárias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$ obtidas no exercício "**b**" e apresente a Oficina 3 que enfatiza o conceito de fração unitária.

4.3 OFICINA 3 – FRAÇÕES UNITÁRIAS E COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

A Oficina 3 propõe o estudo do Texto 3: "Um pouco mais sobre o que são frações" que estabelece a relação existente entre as frações e as medidas. O conceito de fração como medida não é muito utilizado em nosso país, por isso é importante que essa ideia seja bem trabalhada.

No texto aparece a expressão “tipo” referindo-se à fração unitária e fazendo analogia às medidas, por exemplo, ao dizer que a altura de uma porta é de 2 m, o número dois indica o “quanto” e o metro indica o “tipo” de unidade utilizada, assim também, ao dizer que Pedro comeu $\frac{5}{6}$ de uma minipizza o 5 representa o “quanto” e o $\frac{1}{6}$ é considerado como unidade de medida e indica o “tipo” de divisão que foi realizada. Mostra-se o resultado dessa medição multiplicando o número de partes que foram comidas pela fração considerada como unidade de medida, ou seja, $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ que representa “cinco pedaços do tipo sexto”, introduzindo-se também a ideia de multiplicação de frações.

Outra forma de explorar o ensino de frações é a partir da relação parte-todo. No exemplo da minipizza, ela foi dividida em 6 partes iguais, e cinco dessas partes foram comidas. Portanto, 6 é o denominador e indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido e 5 é o numerador e indica quantas partes foram comidas. Esse fato é representado pela fração $\frac{5}{6}$.

Ao relacionar as frações unitárias como unidades de medida o professor “ajuda as crianças a perceberem fração como um número, e não apenas como um símbolo que junta dois números (isto é muito comum)” (LINS e SILVA 2004, p. 11). Isso significa que é importante desenvolver as várias maneiras de pensar sobre frações, para que o aluno possa construir o conceito de números fracionários.

Na Oficina 1 foi explorada a divisão do todo contínuo em partes iguais no que se refere à área, conceito esse indispensável para o ensino de frações em termos de todo, de partes e fração unitária. Nos exercícios da Oficina 3 destaca-se o conceito de fração unitária como sendo aquela que tem como numerador o número 1. Ao relacionar frações com as medidas, a fração unitária é considerada uma unidade de medida e precisa ser bem compreendida pelos alunos.

Assim, no exercício “**a**” desta oficina propõe-se a representação de frações unitárias em um todo contínuo (tiras de papel de 3 x 15 cm) por meio de dobraduras, e no exercício “**b**” a representação e comparação de frações por meio de dobraduras em folhas de papel (5 x 8 cm) e a introdução da equivalência de frações a partir da comparação.

4.3.1 Objetivos

A Oficina 3 - Frações unitárias e comparação de frações, têm como objetivos:

- incentivar a leitura e interpretação de textos matemáticos, para o desenvolvimento de estratégias de ensino da matemática;
- conceituar fração unitária;
- estabelecer os critérios que determinam a maior ou menor área representada pelas frações unitárias;
- comparar frações de um mesmo inteiro**.**

4.3.2 Tempo de duração

O tempo necessário para a realização da oficina é de duas horas.

4.3.3 Materiais utilizados

- cópias de textos disponibilizados no Fascículo IV – Pró-Letramento Matemática (2008);
- 6 tiras de papel sulfite de 3 x 15 cm para cada professor cursista;
- 8 retângulos de papel sulfite de 8 x 5 cm para cada professor cursista;
- lápis de escrever e colorido, borracha, régua, tesoura e cola.

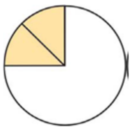
4.3.4 Atividades realizadas

- estudo do texto “Um pouco mais sobre o que são frações”;

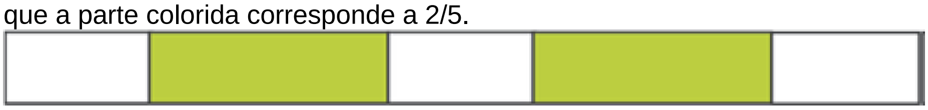
- exercício “**a**” representação de frações unitárias em tiras de papel por meio de dobraduras;
- exercício “**b**” comparação de frações a partir da representação das frações em folhas de papel e introdução a equivalência de frações.

4.3.5 Texto 3: “Um pouco mais sobre o que são frações”

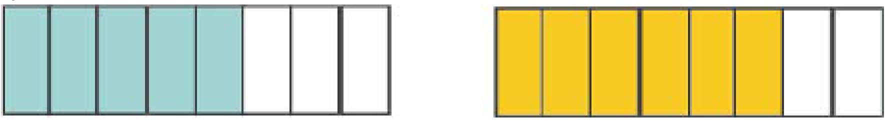
Voltando ao que querem dizer as palavras, numerador e denominador, podemos perceber uma semelhança das frações com as medidas. Quando dizemos que o comprimento de uma mesa é de dois metros, estamos indicando o “quanto” (dois) e o de que “tipo” (metro). Se mudarmos o “tipo” para centímetro, o “quanto” teria que mudar para 200 para a medida ficar certa, já que 2 m = 200 cm. Assim, uma das formas de se entender o que é uma fração, é que elas são o resultado de se medir alguma coisa, usando como referência uma parte da unidade. Vamos ver um exemplo. Muitos livros didáticos introduzem as crianças às frações, usando bolos e tortas. Imaginemos que pessoas comeram uma parte da torta abaixo, e restou o que está indicado. Como representar, com um número, o quanto foi comido?



O que vamos fazer é medir a parte que foi comida. Para isto temos que escolher uma “unidade”. Pela figura, temos a impressão de que a torta toda havia sido cortada em oito fatias. Podemos, então, escolher 1/8 de torta como unidade de medida. Quantas vezes esta unidade cabe na parte que foi comida? A resposta é “seis vezes”. Por isto, o número correspondente à parte comida é 6/8, são “seis partes do tipo oitavo”, e isto pode ser expresso (e mostrado por escrito para os alunos!), também, dizendo que o resultado de nossa medição é 6 x 1/8 = 6/8, o que já começa a introduzir a **ideia** de multiplicação envolvendo uma fração. É como se dissermos que a medida de uma sala foi 6 metros, isto é, 6 x 1 metro. Mas podíamos também ter escolhido ¼ como unidade de medida, porque pela figura percebemos que ¼ também cabe um número exato de vezes na parte que foi comida. Quantas vezes o ¼ cabe na parte que foi comida? Três, e por isso o número resultante é ¾, ou 3 x ¼ = ¾. Relacionar frações com medidas é importante porque ajuda as crianças a perceberem frações como um número, e não apenas como um símbolo que junta dois números (isto é muito comum), e para relacionar frações como medidas, é muito importante darmos destaque às frações unitárias, porque elas funcionam, neste caso, como um sistema de unidades de medida. Outra forma de entender as frações é pensar em todo e partes. Em nosso exemplo acima, costuma-se dizer que o número correspondente à parte que foi comida é 6/8 porque ao todo **havia** 8 fatias iguais, e destas 6 foram comidas, e a fração 6/8 expressaria este fato. Do ponto de vista matemático, é muito importante enfatizar que as partes têm de ser iguais. Na figura abaixo não é verdade que a parte colorida corresponde a 2/5.



O que pode acontecer é que seus alunos não estejam pensando nas áreas ou nos comprimentos, apenas na quantidade de partes. Acontece que as frações indicam, matematicamente, também uma razão entre parte e todo; em termos do número de partes pintadas os alunos poderiam estar certos, mas não em termos da razão da área pintada em relação à área total. Uma possível analogia pode ser encontrada quando duas crianças discutem para ver quem vai ficar com o bife maior. Se um adulto cortar os dois bifes em pedaços menores, e repartir os pedaços, a atenção das crianças é direcionada ao número de pedaços, e como cada uma tem o mesmo número de pedaços, tudo fica bem, até porque, depois de cortada em pedaços menores, fica difícil comparar as "áreas totais" de bife que cada uma recebeu! O uso de figuras acima com as crianças, e mesmo a discussão, com elas, do "caso do bife", pode ajudá-las a desenvolver sua compreensão inicial da noção de fração. Essa última maneira de falar frações, relacionando-as a partes e todo é a maneira mais comum de introduzir frações a crianças, no Brasil, talvez por parecer mais simples de explicar. Mas a primeira tem suas vantagens também. Ao introduzirmos frações com a ideia de medida, estaremos juntando as **ideias** de medida e de número, assim como fazemos ao trabalhar com números na forma decimal, de modo que a criança tem outra oportunidade de articular, de associar aquelas duas importantes ideias matemáticas. Neste caso**,** isto ajuda para que a criança reconheça frações como números – tanto quanto os naturais e os na forma decimal - e não apenas como símbolos. Em segundo lugar, esta abordagem pode ajudar a evitar que a criança faça confusão mais adiante, quando começar a trabalhar com frações maiores que um, que são chamadas, muito justamente, de frações impróprias. Vamos ver o seguinte problema: "Uma família pediu dois bolos do mesmo tamanho, ambos cortados em 8 fatias iguais. Do primeiro comeram 5 fatias, e do segundo comeram 6 fatias. Que fração corresponde ao total de bolo que foi comido?"



Os dois bolos

Uma resposta muito comum, dada por alunos que estão começando a trabalhar com frações é "11/16". Por quê? Provavelmente, porque o total de fatias (nos dois bolos!) é 16, e o número total de fatias comidas é 11, ou seja, a criança pensou certo, usando o esquema de total e parte, e chegou a uma resposta "errada"! Este "errada" tem mesmo que ir entre aspas, porque do jeito que a pergunta está feita, a criança pensou certo: que fração do todo foi comida? São ao todo, de fato 16 fatias! Acontece que nós, professores, professoras e autores de livros, já estamos tão acostumados com o que se espera como resposta "certa", que temos dificuldade em aceitar isto, e só conseguimos dizer que "o aluno não entendeu o conceito de fração". Perguntamos: qual conceito de fração? Aquele que diz que a fração representa "o número de partes tomadas, em relação ao número total de partes", este ela entendeu sim, senão não teria dado uma resposta tão sensata. Se a ideia que a criança tivesse de fração fosse a de "resultado de medir com uma unidade que é uma parte do bolo, ela mediria o tanto comido, usando a fração escolhida como unidade; se escolher 1/8 (uma fatia) como unidade, obterá o resultado (correto) de 11/8 para o que foi comido. A fração que ela usaria como unidade de medida seria, muito naturalmente, uma fração própria, este caso uma parte de um bolo. Isto não quer dizer que pensar em frações em termos de todo e partes seja ruim; essa é uma maneira importante, também, de tratar frações. O que queremos é que a criança desenvolva várias maneiras de entender frações, que compreenda a relação entre elas e que saiba escolher qual delas é melhor numa determinada situação. Mas o professor tem que fazer

> escolhas didáticas, por exemplo, como introduzir uma ideia matemática a seus alunos e, neste caso, este tipo de análise é importante. É preciso pensar no que vem adiante, e não apenas no que parece ser mais fácil de explicar naquele momento (LINS e SILVA, 2008, p. 10).

Orientações para o Aplicador

Para o estudo do texto “Um pouco mais sobre o que são frações” sugere-se ao Aplicador que proponha a leitura individual e solicite que cada professor cursista registre o que considera relevante e/ou o que não compreendeu em um pedaço de papel e coloque em uma caixa, chamada de urna.

A urna circula entre os professores no ritmo de uma música, quando a música para, o professor que está com a urna retira a questão fazendo a leitura em voz alta para todos e responde a pergunta. Caso tenha dúvidas pode solicitar ajuda aos demais colegas. O Aplicador encerra o estudo do texto fazendo a comparação entre a fração unitária como unidade medida e, fração em termos de relação todo e partes. O som, a música e a caixa são de responsabilidade do professor Aplicador.

4.3.6 Exercícios de fixação

No exercício **“a”** explora-se o conceito de fração unitária. É importante ressaltar que só é possível comparar frações se elas pertencerem a um mesmo inteiro. Para estas comparações o Aplicador distribui para cada professor cursista 6 tiras de papel de mesma medida. Sugere-se tiras de papel de 3 x 15 cm devido à facilidade em dividir em 2, 4 e 8 por meio de dobraduras e por 3, 5 e 15 utilizando a régua (como são múltiplos de 15 a divisão é exata).

a) Representação de frações unitárias

- Usando 6 tiras de papel com medida de 3 cm x 15 cm, represente cada uma das frações unitárias: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{15}$ em uma tira de papel. Para dividir a tira você pode utilizar a dobradura ou a régua. Em seguida responda as questões:

- **Qual destas frações representa a maior área?**
- **Qual representa a menor área?**
- **Qual a relação entre o denominador de uma fração unitária e a superfície representada na tira de papel?**
- **Coloque as frações em ordem crescente.**

Orientações para o Aplicador:

Para representar as 6 frações solicitadas no exercício "**a**", o professor cursista utiliza uma tira para cada uma das frações e divide-a de acordo com o denominador da fração a ser representada pintando uma das partes, preferencialmente a primeira**,** para facilitar a comparação da área pintada em cada uma das frações representadas.

A tira de papel que teve a menor quantidade de divisões apresentou partes com áreas maiores e uma destas partes foi representada pela fração $\frac{1}{2}$. A tira de papel que foi dividida em maior quantidade de partes apresentou partes com áreas menores, e uma destas partes foi representada pela fração $\frac{1}{15}$, conforme se visualiza na Figura 33.

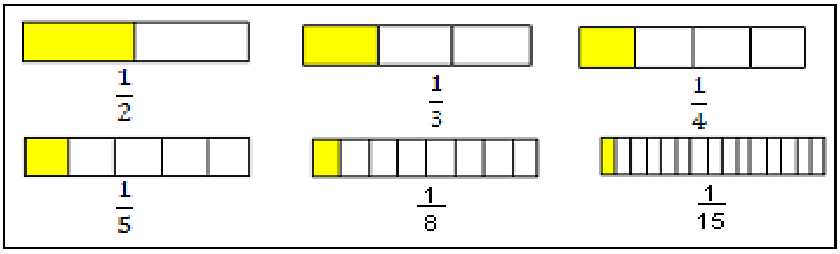


Figura 33 – Divisão de uma unidade em partes iguais
Fonte: Adaptado do LIMC (2010)

Portanto, a fração unitária é aquela que apresenta o numerador 1 e determina o "tipo" de divisão que foi realizada (em duas, três, quatro, cinco, oito ou 15 partes), sendo considerada como unidade quando se explora a ideia de fração como medida.

No exercício **“b”** propõe-se a comparação de frações. Para esta atividade são distribuídas 8 folhas de papel de 8 x 5 cm para cada professor. As dimensões sugeridas facilitam o processo de dobradura, a representação das frações (região a ser pintada) e a posterior organização no caderno.

Optou-se em utilizar a dobradura para representar as frações porque é um processo em que os alunos conseguem dividir o todo em partes iguais com facilidade.

b) Comparação de frações

b1 - Utilizando 9 folhas de papel de mesma medida (sugestão: 8 x 5 cm), realize as seguintes atividades:

1. **Dobre uma folha retangular ao meio, e responda:**
   Em quantas partes ficou dividido o papel? Estas partes são iguais?
2. **Na mesma folha dobre mais uma vez ao meio e responda:**
   Em quantas partes a folha retangular ficou dividida? Que fração da folha de papel cada uma das partes representa?
3. **Ainda na mesma folha dobre novamente ao meio e responda:**
   Em quantas partes iguais a folha de papel ficou dividida? Cada uma dessas partes representa que fração do todo?

b2 - Usando 8 folhas de papel de 8 x 5 cm, divida-as por meio de dobraduras e representa as partes indicadas nas frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$

Em seguida, responda:

• Qual destas frações representa a maior área?

• Qual representa a menor área?

• Quais frações representam áreas iguais?

• Qual das duas frações representa a parte maior $\frac{5}{8}$ **ou** $\frac{3}{4}$ **?**

Justifique sua resposta.

Orientações para o Aplicador:

Ao dobrar uma folha de papel sucessivamente ao meio, divide-se o todo em 2, 4 e 8 partes iguais. Cada uma das partes obtidas é respectivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ da folha de papel que foi dobrada, conforme mostra a Figura 34.

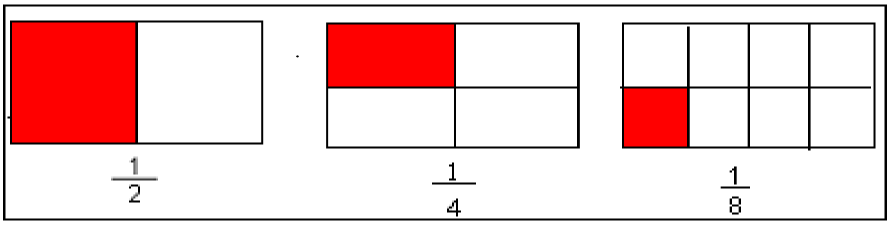


Figura 34 – Representações das partes fracionadas
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Uma das formas de indicar as representações solicitadas no exercício **"b2"** está representada na Figura 35:

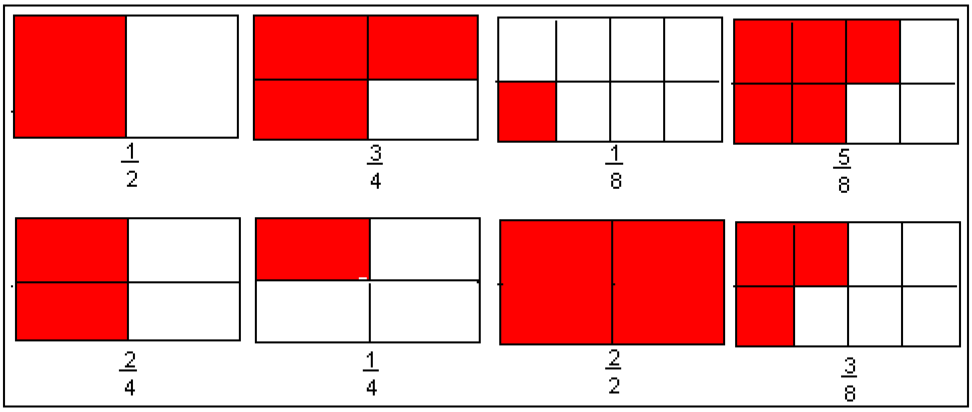


Figura 35 – Representação de frações
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Na Figura 35, as áreas pintadas em vermelho representam cada fração do exercício "**b2**", permitindo visualizar que a maior área ocupada é a representada pela fração $\frac{2}{2}$ uma vez que corresponde à folha de papel inteira. A menor área é representada pela fração $\frac{1}{8}$, considerando que para a representação dessa fração a folha foi dividida em maior número de partes, formando "pedaços" menores, dos quais se considera apenas um.

Na Figura 36, observa-se que as áreas iguais estão representadas pelas frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$.

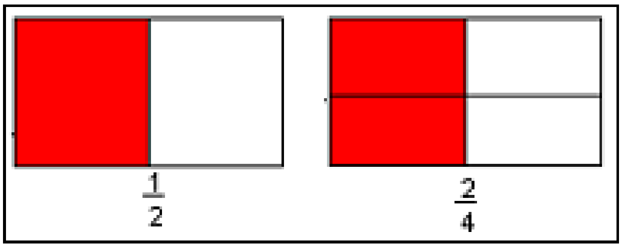


Figura 36 – Áreas iguais (frações equivalentes)
Fonte: Elaborado pela autora

É importante ressaltar aos professores que, para comparar frações é necessário considerar partes de um mesmo “inteiro”, ou seja, na atividade “**b2**” que as frações estejam representadas em uma folha de papel com as mesmas dimensões. Assim, ao comparar as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$, a que representa maior área é a fração $\frac{3}{4}$, porque como pode ser observado na Figura 37, há $\frac{1}{8}$ de área pintada a mais que na fração $\frac{5}{8}$.

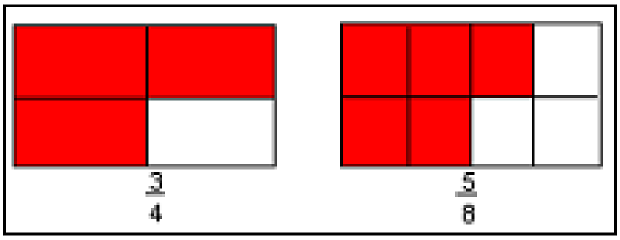


Figura 37 – Comparação de frações
Fonte: Elaborado pela autora

Outra forma de explicar que a fração $\frac{3}{4}$ é maior que a fração $\frac{5}{8}$ é usando o conhecimento de frações equivalentes, uma vez que a comparação de frações fica mais fácil de ser visualizada se as frações representadas forem de um mesmo “tipo”, ou seja, quando o inteiro for dividido em um mesmo número de partes iguais. Neste caso, é necessário encontrar uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$, em que o denominador seja o número 8 para comparar com a fração $\frac{5}{8}$.

Para obter uma fração equivalente a $\frac{3}{4}$, divide-se a folha em que esta fração está representada mais uma vez, ficando cada uma de suas partes divididas ao meio e a parte pintada fica representada pela fração $\frac{6}{8}$ que é a fração equivalente a $\frac{3}{4}$ com denominador 8, conforme mostra a Figura 38.

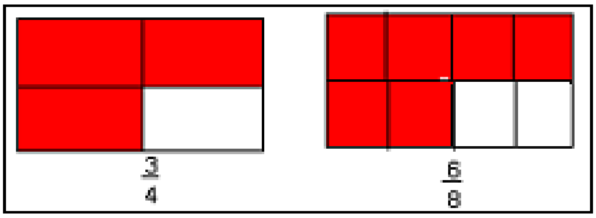


Figura 38 – Representação de equivalência de frações
Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, a fração $\frac{3}{4}$ passa a ser representada pela sua equivalente $\frac{6}{8}$ e pode ser comparada com a fração $\frac{5}{8}$. Para comparar as frações de mesmo "tipo" analisam-se os numeradores das frações que indicam as partes consideradas, verificando-se que fração $\frac{3}{4}$ é maior que a fração $\frac{5}{8}$, pois o numerador da fração equivalente a $\frac{3}{4}$ é 6, que é maior que o numerador 5 da fração $\frac{5}{8}$.

Este resultado também pode ser observado graficamente, conforme mostra a Figura 39, onde as partes marcadas com **X** representam as partes que foram subtraídas.

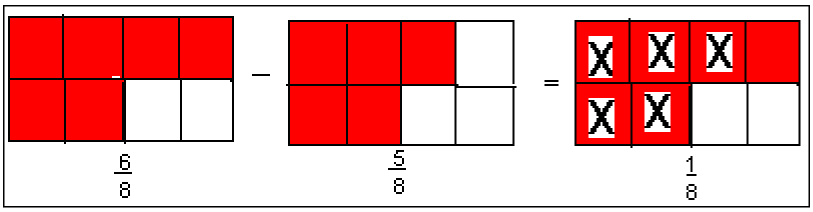


Figura 39 - Representação gráfica da subtração de frações
Fonte: Elaborado pela autora

Ao comparar frações por meio da representação geométrica possibilita-se ao professor perceber que a fração $\frac{3}{4}$ pode ser transformada em uma fração do mesmo "tipo" da fração $\frac{5}{8}$, ou seja, na fração $\frac{6}{8}$ e que a área ocupada pela fração $\frac{3}{4}$ é equivalente à área ocupada pela fração $\frac{6}{8}$, e que esta fração ocupa 6 partes do todo que foi dividido em 8 partes e a fração $\frac{5}{8}$ ocupa apenas 5 dessas partes. Portanto, na área representada pela fração $\frac{3}{4}$, há $\frac{1}{8}$ a mais que na área representada pela fração $\frac{5}{8}$.

Antes de encerrar a Oficina 3 é importante que o Aplicador retome os principais pontos trabalhados no 2º encontro contemplando os conceitos abordados nas Oficinas 2 e 3, ou seja: a construção e o uso do Tangran para o ensino de frações, a ideia de fração como medida e enquanto relação parte-todo, fração unitária e a comparação de frações.

Conclui-se a Oficina 3 no segundo encontro solicitando-se aos professores cursistas que registrem no Diário Coletivo os principais aspectos abordados nas Oficinas 2 e 3: as dúvidas, as contribuições, curiosidades, anseios, expectativas para os próximos encontros. O registro no diário é feito com a participação de todos os professores.

4.4 OFICINA 4 – EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

Na Oficina 4 propõe-se o estudo do texto “Como criar frações equivalentes a uma fração que já tenho?” que descreve dois procedimentos para criar frações equivalentes. O primeiro procedimento é o de multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero, explicando por meio de um exemplo o que acontece na prática. No exemplo, considera-se um bolo como sendo o inteiro e a fração $\frac{1}{2}$ representa a metade deste bolo.

Para encontrar uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$, multiplica-se o numerador e o denominador da fração por um mesmo número, como por exemplo o número 3, obtendo-se a fração $\frac{3}{6}$. Isto significa que, ao multiplicar a fração $\frac{1}{2}$ por 3, cada metade do bolo fica dividida em 3 partes, portanto, o bolo que inicialmente havia sido dividido em duas partes (fatias) agora fica dividido em 6 partes (fatias) e cada uma dessas partes (fatias) é três vezes menor do que a parte (fatia) inicialmente considerada ($\frac{1}{2}$ do todo), portanto, para pegar a mesma porção de bolo é necessário pegar 3 partes (fatias) do todo dividido em 6 partes (fatias), sendo assim, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ correspondem à mesma porção de bolo, portanto são frações equivalentes.

O segundo procedimento é de dividir o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero para se obter frações equivalentes mais simples (mais fáceis de visualizar), ressaltando-se que a divisão por 1 não altera a fração inicial. Neste procedimento faz-se o processo inverso do primeiro, considerando um bolo como sendo o inteiro, e a fração $\frac{3}{6}$ representando 3 partes (fatias) do bolo que foi dividido em 6 partes (fatias).

Para encontrar uma fração equivalente de forma menos complexa, algumas frações (desde que o numerador e o denominador sejam divisíveis por um mesmo número) podem ser simplificadas, como no caso da fração $\frac{3}{6}$ encontra-se sua equivalente simplificando, ou seja, dividindo o numerador e o denominador por 3, obtendo-se a fração $\frac{1}{2}$.

Graficamente esta simplificação representa a divisão da unidade em menor quantidade de partes. Por exemplo, se a parte comida de um bolo fosse representada pela fração $\frac{3}{6}$, então o bolo seria dividido em seis partes e seriam comidas três partes. Se a parte comida fosse representada pela fração equivalente encontrada, ou seja, $\frac{1}{2}$ o bolo seria dividido em duas partes e uma parte teria sido comida.

Apesar da diferença das partes que foram tomadas nas duas divisões do bolo, a parte comida em ambos os casos foi a mesma. Isto acontece porque as frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{2}$ correspondem à mesma porção do bolo porque são frações equivalentes.

Ao estabelecer a relação entre o algoritmo (modo de fazer) para obter frações equivalentes e mostrar por meio de exemplos o que acontece na prática, possibilita-se ao aluno a compreensão da representação numérica instrumentalizando-o a utilizar esse conceito para resolver problemas que aparecem em outras situações, tanto no ensino escolar como em seu cotidiano.

Nesta perspectiva, propõe-se os exercícios “**a**”, “**b**” e ”**c**”. No exercício “**a**” exploram-se as frações equivalentes por meio de sucessivas dobraduras em uma folha de papel (todo contínuo); no exercício “**b**” a equivalência de frações em tiras de papel do mesmo comprimento comparando-se à área representada em cada tira e localizando-se os pontos de coincidência das divisões das tiras justapostas e, no exercício “**c**”, a adição e subtração de frações com denominadores diferentes por meio da representação das frações em folhas de papel vegetal e sobreposição das mesmas para visualização das frações equivalentes de mesmo “tipo”, ou seja, com o mesmo denominador.

Ainda insere-se o estudo do “Como saber se duas frações são equivalentes?” que traz uma “receita”, ou seja, o procedimento de como verificar se duas frações são equivalentes. Para saber se duas frações são equivalentes basta multiplicar o numerador da primeira pelo denominador da segunda e o numerador da primeira pelo denominador da segunda, se os resultados forem iguais são equivalentes, caso os resultados sejam diferentes não são equivalentes.

Se a “receita” para verificar quando duas frações são equivalentes for compreendida, favorece-se a flexibilização do raciocício para a adição e subtração de frações, que serão exploradas na Oficina 5 com o estudo do texto “Como somar e subtrair frações? “, e para estudos posteriores, como por exemplo, a Regra de Três que é conteúdo do segundo segmento do Ensino Fundamental.

4.4.1 Objetivo

Na Oficina 4 – No aprendizada de equivalência de frações, tem-se como objetivos:

- incentivar a leitura e interpretação de textos matemáticos, para o desenvolvimento de estratégias de ensino da matemática;

- reconhecer a importância do estudo de equivalência de frações como conceito necessário para compreensão dos algoritmos da adição e subtração de frações com denominadores diferentes;
- obter frações equivalentes por meio da comparação de áreas representadas e a partir da sobreposição da representação de frações em folhas de papel vegetal;
- identificar se duas frações são equivalentes**.**

4.4.2 Tempo de duração

O tempo necessário para a realização da oficina é de quatro horas.

4.4.3 Materiais utilizados

- cópias de textos disponibilizados no Fascículo IV – Pró-Letramento Matemática (2008);
- Fotocópias dos exercícios;
- 9 tiras de papel cartão de 2 x 30 cm para cada cursista, sendo de cores variadas;
- 5 folhas de papel sulfite de 5 x 8 cm para cada cursista;
- 2 folhas de papel vegetal de 5 x 8 cm para cada cursista;
- lápis de escrever e colorido, borracha, régua, tesoura e cola.

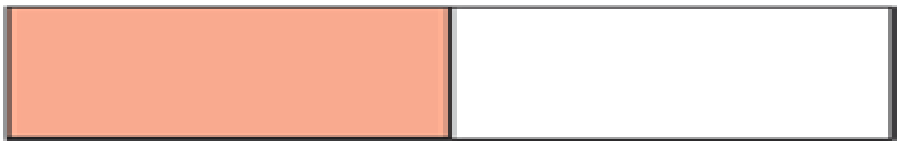
4.4.4 Atividades realizadas

- estudo dos textos "Como criar frações equivalentes a uma fração que já tenho"? e "Como saber se duas frações são equivalentes"?;

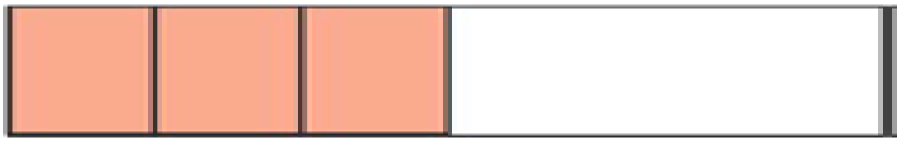
- exercício “**a**” - Representação e obtenção de frações equivalentes a uma fração dada, em folhas de papel sulfite, por meio de sucessivas dobraduras;
- exercício “**b**” – Representação de frações em tiras de papel, comparando as áreas representadas, localizando pontos de coincidências nas divisões das tiras justapostas e identificando frações equivalentes;
- exercício “**c**” – Representação de duas frações com denominadores diferentes em folhas de papel vegetal, sobrepondo as representações, obtendo frações equivalentes e resolvendo a adição e subtração.

4. 4. 5 Texto 4: Como criar frações equivalentes a uma fração que já tenho?

Se você tem uma fração e quer achar outras frações que sejam equivalentes a ela, pode usar dois procedimentos. O primeiro é multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número (que não seja o zero!); o segundo é dividir o numerador e o denominador por um mesmo número (que também não pode ser zero, porque não dá para dividir por zero). Uma “explicação” para isto pode ser dada pensando de novo em bolos.



Começamos com $\frac{1}{2}$. O bolo foi dividido em duas partes iguais e pegamos uma delas. Se o denominador desta fração (que é 2) for multiplicado por 3, isto quer dizer que o bolo vai ser dividido em três vezes mais partes do que antes (antes eram 2 partes, agora são 6). As fatias serão três vezes menores.



Como as fatias são três vezes menores, para pegar a mesma quantidade de antes tenho que pegar três vezes mais fatias do que peguei antes. Isto é, o numerador tem que ser multiplicado por 3 também. O mesmo raciocínio se aplica no caso geral. Assim, se usarmos as letras, a, b e c para representar números naturais diferentes de zero, vale o seguinte: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{a}{b}$. Em nosso exemplo $\frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração por 2, 3, 4, 5 e assim por diante, vamos produzir tantas frações equivalentes quantas queiramos:

> $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{14}$. Este raciocínio também vale se estamos pensando em razões. Quando uma pesquisa de opinião diz que 3 em cada 4 eleitores disseram que vão votar em um certo candidato, é de se esperar que 6 de cada 8 vão votar neste candidato, que 300 de cada 400 também, e assim por diante. Como já dissemos, se você dividir o numerador e o denominador por um mesmo número, também vai encontrar uma fração equivalente à primeira. No caso do $\frac{1}{2}$ isto não é possível, porque o 1 só pode ser dividido por 1 mesmo, e isso não ia mudar a fração. Mas veja o caso de $\frac{12}{18}$; o 12 (numerador) e o 18 (denominador) podem ser divididos por 2, gerando a fração $\frac{6}{9}$ e podem ser divididos por 3, gerando a fração $\frac{4}{6}$ e podem ser divididos por 6, gerando a fração $\frac{2}{3}$, e elas são todas equivalentes: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{12}{18}$. O processo de achar frações equivalentes a uma fração dada, mas que tem numerador e denominador menores, se chama simplificação. Ela pode ser útil para podermos trabalhar com frações mais simples, mais fáceis de visualizar (LINS e SILVA, 2008, p. 19).

Orientações para o Aplicador

Para o estudo do Texto 4 “Como criar frações equivalentes a uma fração que já tenho”? recomenda-se a leitura comentada, relacionando o processo de obter frações equivalentes a partir de uma fração dada, com as ações realizadas ao fazer divisões sucessivas por meio de dobraduras em uma folha de papel. Por exemplo, para representar a fração $\frac{1}{2}$ em uma folha de papel dobra-se a folha ao meio e pinta-se uma das partes. Para obter uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$ dobra-se novamente ao meio obtendo-se a fração $\frac{2}{4}$, e assim, sucessivamente.

É importante que o professor perceba que, a cada vez que se dobra o papel ao meio para obter uma fração equivalente, divide-se o pedaço que foi representado em duas partes, e no algoritmo para obter frações equivalentes o numerador e o denominador da fração ficam multiplicados por dois.

4.4.6 Exercícios de fixação

No exercício “**a**” obtém-se a equivalência de frações próprias por meio de dobraduras sucessivas. Frações próprias são aquelas que têm o numerador menor que o denominador e representam menos que um inteiro.

É interessante que o professor cursista estabeleça a relação entre a dobradura e a multiplicação do numerador e do denominador por um mesmo número. Por exemplo, quando se dobra uma folha de papel ao meio e pinta-se uma das partes representa-se a fração inicial $\frac{1}{2}$, dobrando-se a folha pela segunda vez, a fração inicial $\frac{1}{2}$ fica multiplicada pelo número 2 obtendo-se a fração $\frac{2}{4}$, dobrando-se uma terceira vez a fração $\frac{2}{4}$ fica multiplicada por 2 obtendo a fração $\frac{4}{8}$ e assim, sucessivamente.

a) Frações equivalentes por meio de dobraduras

a1 - Utilizando 6 folhas de papel de mesma medida (sugestão: 8 x 5 cm), realize as seguintes atividades:

1. **Pegue uma folha retangular e dobre-a ao meio e depois responda:**
   Em quantas partes a folha ficou dividida? Estas partes são iguais?
   Como você dividiria esta folha de papel em 4 partes? E em 8 partes?

2. **Represente cada uma das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{2}$ em uma folha de papel.**

   Para fazer a representação divida o papel de acordo com o número de partes indicadas no denominador e pinte as partes indicadas no numerador.

3. **Obtenha duas frações equivalentes a cada uma das frações representadas no item 2 do exercício “a1”.**

Para obter as frações equivalentes utilize o processo de dobraduras sucessivas, a partir da representação realizada no item 2 do exercício "a1".

a2 - Explique porque as frações encontradas no item 3 do exercício "a1" são frações equivalentes a frações dadas $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{2}{2}$.

Orientações para o Aplicador

O primeiro passo, para resolver o exercício "**a**", é a representação das frações indicadas no enunciado do exercício. Para representar a fração $\frac{1}{2}$, divide-se a folha em duas partes (denominador 2) e pinta-se uma (numerador 1) das partes, conforme mostram as Ilustrações A e B da Figura 40.

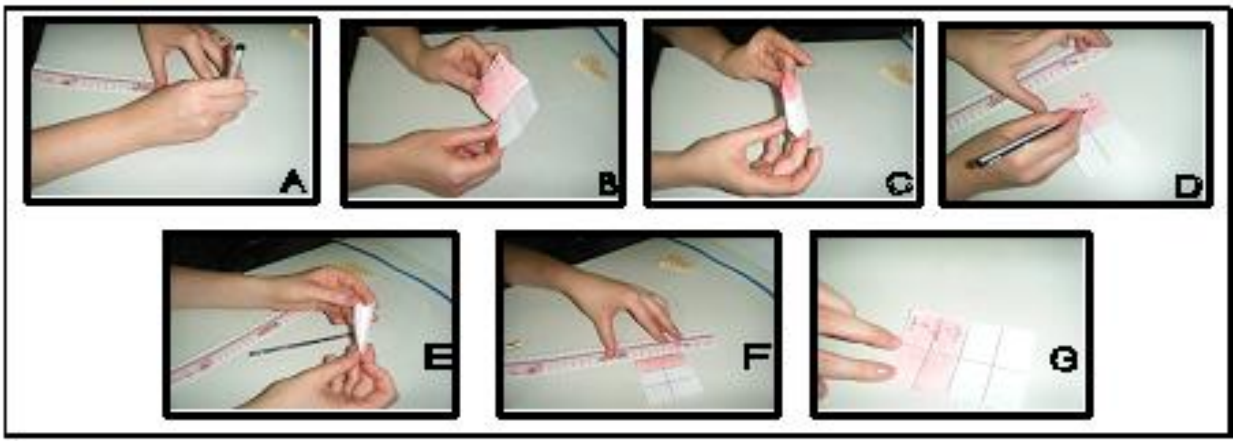


Figura 40 – Dobraduras para encontrar frações equivalentes
Fonte: Elaborado pela autora

Encontram-se as frações equivalentes da fração $\frac{1}{2}$ por meio de dobraduras sucessivas. Para encontrar a primeira fração equivalente, dobra-se a folha em que a fração está representada mais uma vez, conforme mostram as ilustrações C e D da Figura 40. A folha fica dividida em 4 partes e dessas 4 partes duas correspondem à área pintada, sendo representadas pela fração $\frac{2}{4}$.

É importante que o professor perceba que, ao dobrar a folha de papel ao meio pela segunda vez, ele divide cada uma das duas partes obtidas na primeira divisão, representadas pela fração $\frac{1}{2}$ ao meio, ficando essas partes representadas pela fração $\frac{2}{4}$, e essa ação está relacionada ao algoritmo utilizado para obter frações equivalentes, neste caso, correspondendo à multiplicação do numerador e do denominador da fração inicial $\frac{1}{2}$, pelo número 2 resulta na fração $\frac{2}{4}$ equivalente a $\frac{1}{2}$.

Nas Ilustrações E, F e G da Figura 40, visualiza-se a terceira dobradura apresentando vincos que dividem a folha em 8 partes e dessas 8 partes, 4 partes correspondem à área pintada, sendo representadas pela fração $\frac{4}{8}$.

Portanto, as frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes porque representam a mesma área, ou seja, a mesma região que foi destacada em um inteiro do mesmo tamanho, conforme mostra a Figura 41.

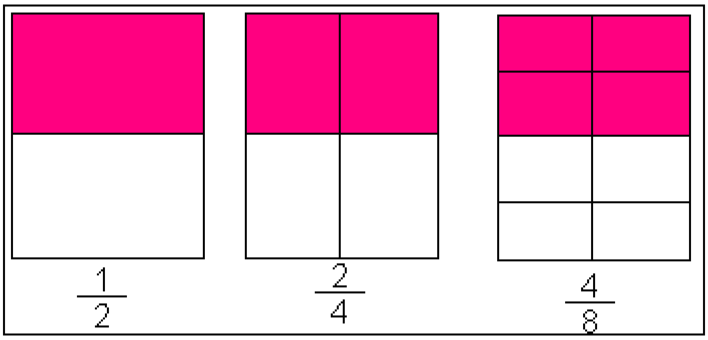


Figura 41 – Frações equivalentes
Fonte: Elaborado pela autora

Para a atividade “**a**” sugere-se utilizar folhas de papel nas dimensões de 8 x 5 cm devido à facilidade de organização dessas representações no caderno do aluno.

No exercício **“b**” explora-se a equivalência de frações em relação à área representada em tiras de papel, localizando-se também os pontos coincidentes das divisões realizadas quando as tiras estão justapostas. Esta atividade possibilita introduzir o conceito de fração como o ponto localizado em um segmento de reta.

b) Frações equivalentes por meio da comparação da área representada e pontos de coincidência

b1 - Utilizando 9 tiras de papel cartão de cores diferentes e da mesma medida (sugestão: 2 x 30 cm), realize as seguintes atividades:

1- Divida cada uma das 9 tiras de papel cartão em partes da seguinte forma:

- a primeira em uma parte;

- a segunda em duas partes iguais;

- a terceira em três partes iguais;

- a quarta em quatro partes iguais;

- a quinta em cinco partes iguais;

- a sexta em 6 partes iguais;

- a sétima em 10 partes iguais;

- a oitava em 15 partes iguais e;

- a nona em 30 partes iguais.

Para dividir as tiras em partes iguais use a régua ou faça dobraduras.

2- Escreva em uma das extremidades de cada uma das tiras o "tipo" de divisão que foi realizada, por meio da fração unitária.

3- Coloque as 9 tiras justapostas (encostadas umas às outras) e identifique as frações que se localizam em pontos coincidentes observando as marcas feitas nas divisões das tiras no item 1 do exercício "a1".

4- Liste todas as frações que estão no mesmo alinhamento, ou seja, aquelas em que as marcas das divisões coincidem.

Orientações para o Aplicador

Para o exercício **"b"**, sugere-se providenciar 9 tiras de papel cartão em diferentes cores, nas dimensões de 2 cm de largura e 30 cm de comprimento. Com o comprimento de 30 cm facilita-se a divisão das tiras em 2, 3, 4, 5, 10, 15 e 30 partes solicitadas no Item 1 do exercício "**b**", uma vez que os números 2, 3, 5, 10 e 15 são múltiplos de 30 e a divisão de 30 cm em 4 partes resulta num comprimento de 7,5 cm que é facilmente medido. Cada tira sendo de uma cor diferente auxilia na identificação das frações representadas, por exemplo, no Item 1 do exercício "**b**" o professor solicita que a tira verde seja dividida em 2 partes iguais, a vermelha em 3 partes e, assim, sucessivamente.

É importante que as divisões sejam feitas com o máximo possível de precisão, caso contrário, a comparação entre as frações representadas nas tiras fica prejudicada.

Na Figura 42 destacam-se as frações equivalentes, que podem ser visualizadas tanto pela comparação das áreas ocupadas quanto pelos pontos de coincidência das divisões realizadas em cada tira.

Por exemplo, observando-se a Figura 42 verifica-se que a fração $\frac{6}{30}$ corresponde a 6 partes da tira que foi dividida em 30 partes e coincide com a representação da fração $\frac{3}{15}$ que corresponde a 3 partes da tira que foi dividida em 15 partes e com a representação da fração $\frac{2}{10}$ que corresponde a 2 partes do todo que foi dividido em 10 partes. Portanto, estas três frações são equivalentes, porque possuem a mesma área e/ou porque correspondem a um ponto comum nas tiras de papel conforme pode se observar na Figura 42.

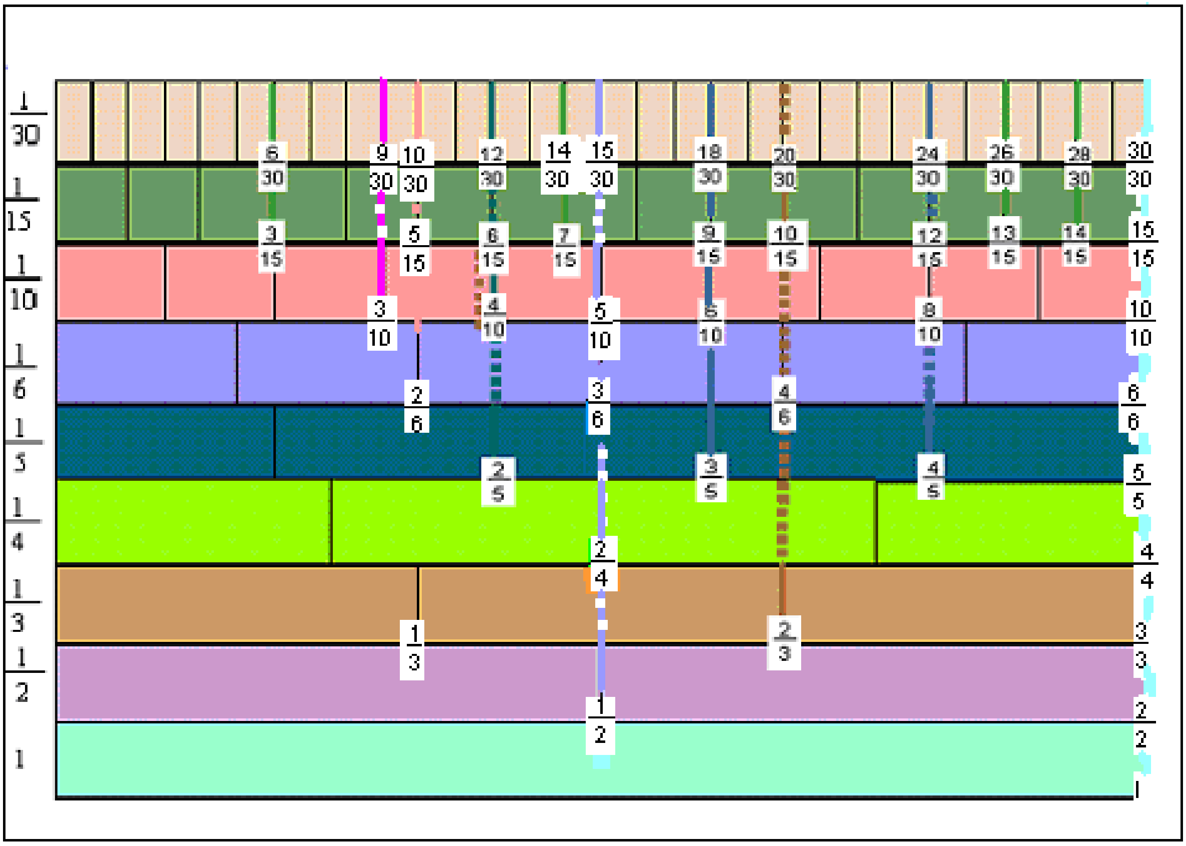


Figura 42 – Frações equivalentes a partir da representação e comparação de frações em tiras de papel
Fonte: Adaptado do LIMC (2010)

Para melhor visualização da área ocupada pelas frações representadas nas tiras e os pontos de coincidência, foram traçadas linhas no sentido vertical confirmando a igualdade das áreas e os pontos de coincidência, conforme se visualiza na Figura 42. As frações que estão no mesmo alinhamento são frações equivalentes, conforme pode ser visualizado no Quadro 2,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{15}{10}$$

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{10}{10} = \frac{15}{15} = \frac{30}{30}$$

$$\frac{3}{15} = \frac{6}{30}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{12}{30}$$

$$\frac{7}{15} = \frac{14}{30}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{18}{30}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{24}{30}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{26}{30}$$

$$\frac{14}{15} = \frac{28}{30}$$

Quadro 2- Alinhamento das frações equivalentes
Fonte: Elaborado pela autora

A atividade possibilita introduzir o conceito de fração como o ponto localizado em um segmento de reta e, ao mesmo tempo, permite que haja a comparação entre as áreas ocupadas pelas frações equivalentes.

c) Adição e subtração de frações com denominadores diferentes utilizando o processo de sobreposição de representações em papel vegetal

c1 - Utilizando duas folhas de papel vegetal de mesma medida (sugestão: 8 x 5 cm), realize as seguintes atividades:

1. Divida uma das folhas de papel vegetal em 5 partes iguais.

Para fazer a divisão utilize a régua.

2. **Divida a outra folha em 8 partes iguais**
   Para fazer a divisão utilize a régua.

3. **Represente a fração $\frac{2}{5}$ na folha de papel vegetal que foi dividida em 5 partes no Item 1 do exercício “c1”, pintando as partes indicadas no numerador.**

4. **Represente a fração $\frac{3}{8}$ na folha de papel vegetal que foi dividida em 8 partes no Item 2 do exercício “c1”, pintando as partes indicadas no numerador.**

5. **Sobreponha as duas representações obtidas nos Itens 3 e 4 do exercício “c1” e responda:**
   - **5.1. Em quantas partes a folha de papel ficou dividida?**
   - **5.2. Estas partes são iguais entre si? Por quê?**
   - **5.3. Quantas partes correspondem à fração $\frac{2}{5}$?**
   - **5.4. Escreva a fração equivalente a $\frac{2}{5}$ com denominador igual ao número total de partes.**
   - **5.5. Quantas partes correspondem à fração $\frac{3}{8}$?**
   - **5.6. Escreva a fração equivalente a $\frac{3}{8}$ com denominador igual ao número total de partes.**
   - **5.7. Qual fração representa a maior área da folha de papel vegetal $\frac{2}{5}$ ou $\frac{3}{8}$? Explique sua resposta.**
   - **5.8. Qual é o valor da soma: $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$? Explique como obtém o resultado.**

5.9. Qual é o valor da diferença: $\frac{2}{5}$ - $\frac{3}{8}$? Escreva a sentença matemática correspondente e explique sua resposta.

Orientações para o Aplicador

Para resolver o exercício "**c**", representam-se cada uma das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ em uma folha de papel vegetal, conforme mostra a Figura 43. Posteriormente, sobrepõe-se às representações das frações $\frac{3}{8}$ (o todo dividido em 8 partes iguais, sendo pintadas 3 delas) e $\frac{2}{5}$ (o todo foi dividido em 5 partes iguais sendo pintadas duas).

Como, neste caso, os denominadores são 5 e 8, sugere-se folhas de papel vegetal de 5 por 8 cm, porque com essas dimensões o processo de divisão do papel fica facilitado. Para representar a fração $\frac{2}{5}$, no papel vegetal de 5 x 8 cm, marcam-se pontos no lado que tem 5 cm com espaçamento de 1 cm e traça-se por esses pontos, linhas paralelas ao lado que tem 8 cm. Para representar a fração $\frac{3}{8}$**,** marcam-se pontos no lado que tem 8 cm com espaçamento de 1 cm e traça-se por esses pontos, linhas paralelas ao lado que tem 5 cm, conforme mostra a Figura 43.

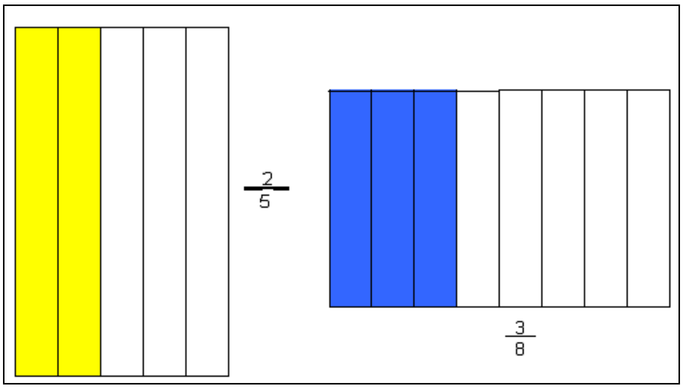


Figura 43 – Divisão de uma unidade em 3 e 5 partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

Para efetuar a adição ou a subtração de duas frações, as partes devem ser de um mesmo todo e a operação é realizada quando as partes deste todo são iguais. Para encontrar partes iguais calcula-se o mínimo múltiplo comum e obtém-se frações equivalentes. Com isto as frações iniciais são substituídas por frações equivalentes que têm o mesmo denominador. Quando as frações têm um mesmo denominador significa que o todo foi dividido em partes iguais e as partes são do mesmo “tipo”. Então a operação de adicionar ou subtrair é efetuada com as frações equivalentes às frações dadas.

Assim, para somar ou subtrair as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$**,** encontra-se o mínimo múltiplo comum entre os denominadores 5 e 8, tendo como resultado o número 40, e obtém-se as respectivas frações equivalentes $\frac{16}{40}$ e $\frac{15}{40}$ com o mesmo denominador, possibilitando substituir a fração $\frac{2}{5}$ por $\frac{16}{40}$ e a fração $\frac{3}{8}$ por $\frac{15}{40}$. Observa-se que as frações substitutas possuem o mesmo denominador permitindo que se faça tanto a adição quanto a subtração, somando-se ou subtraindo-se os numeradores que indicam a quantidade de partes e repetindo o denominador que indica a quantidade de partes em que o inteiro foi dividido, portanto:

Adição: $\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40} = \frac{31}{40}$

Subtração : $\frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{16}{40} - \frac{15}{40} = \frac{1}{40}$

Este resultado também pode ser obtido por meio da sobreposição das representações das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ (Figura 43). Ao colocar o retângulo com a representação da fração $\frac{2}{5}$ sobre o retângulo com a representação da fração $\frac{3}{8}$, visualiza-se o retângulo dividido em 40 pequenos quadrados conforme mostra a Figura 44 que ilustra a sobreposição. Estes quadradinhos são todos iguais entre si, pois foram originados da divisão em partes iguais.

A fração $\frac{2}{5}$ representada no papel vegetal na cor amarela e a fração $\frac{3}{8}$ representada no papel vegetal na cor azul conforme ilustrações A e B da Figura 44, ao serem sobrepostas, delimitam uma área que fica na cor verde conforme ilustração C da Figura 44 que pertence, ao mesmo tempo**,** à representação da fração $\frac{2}{5}$ e a fração $\frac{3}{8}$. Portanto, a área representada pela fração $\frac{2}{5}$ fica dividida em 16 quadradinhos conforme ilustração C da Figura 44, sendo que 10 quadradinhos são da cor amarela e 6 são da cor verde que é a área comum às duas cores sobrepostas.

Da mesma forma a fração $\frac{3}{8}$ corresponde a 15 quadradinhos sendo 9 na cor azul e 6 na cor verde comum às duas áreas (amarela e azul), assim, a área pintada de verde é contada duas vezes.

Na Figura 44, a fração $\frac{2}{5}$ está representada na Ilustração A; a fração $\frac{3}{8}$ está representada na Ilustração B e a soma de $\frac{2}{5}$ com $\frac{3}{8}$ está representada na Ilustração C.

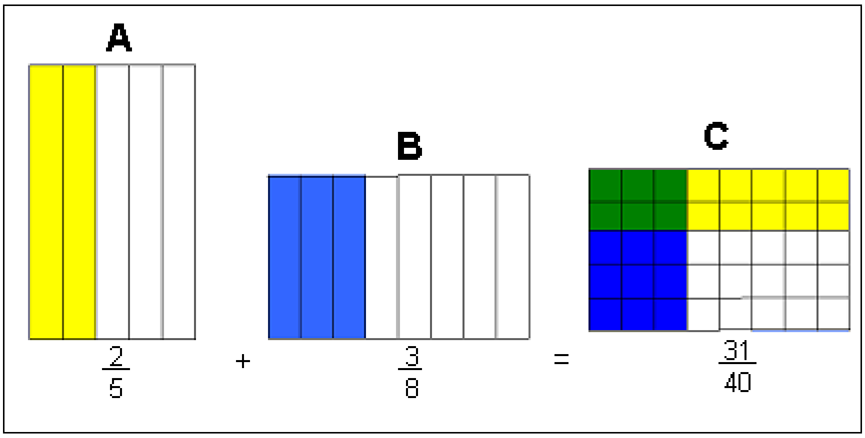


Figura 44 – Adição das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$, obtida pelo método da sobreposição.
Fonte: Elaborado pela autora

Uma das alternativas de comparar as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$, para descobrir qual delas é maior, é colocar uma folha sobre a outra e olhar contra a luz, assim é possível visualizar uma figura dividida em quadradinhos, conforme Ilustração C da Figura 44.

A parte de cor amarela corresponde à fração $\frac{2}{5}$, que após a sobreposição corresponde a uma fração equivalente expressa por $\frac{16}{40}$, pois na sobreposição há 16 partes correspondentes à cor amarela (9 na cor amarela mais 6 que se tornou na cor verde quando sobreposta pela cor azul).

Da mesma forma, a fração $\frac{3}{8}$ (pintada na cor azul), sobreposta corresponde a uma fração equivalente expressa por $\frac{15}{40}$, representada por 9 partes na cor azul e 6 na cor verde.

Logo, as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ são respectivamente equivalentes às frações $\frac{16}{40}$ e $\frac{15}{40}$, o que possibilita a comparação das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$ por meio das frações $\frac{16}{40}$ e $\frac{15}{40}$. Para comparar frações que possuem o mesmo denominador, basta verificar qual é a fração que apresenta o maior e o menor numerador. Assim a fração de maior numerador é $\frac{16}{40}$, então a fração maior é aquela equivalente a ela, ou seja, a $\frac{2}{5}$.

A adição e subtração também podem ser resolvidas diretamente com as frações equivalentes por possuírem o mesmo denominador, adicionando-se ou subtraindo-se os numeradores e conservando-se o denominador.

4.4.7 Texto 5: Como saber se duas frações são equivalentes?

> Como é muito comum falar de frações falando de bolo, vamos começar com uma receita que depois será explicada. Para saber se duas frações são equivalentes nós multiplicamos o numerador da primeira pelo denominador da segunda, e o denominador da primeira pelo numerador da segunda; se os resultados forem iguais elas são equivalentes, se derem diferentes, elas não são equivalentes. Vamos ver o caso de $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ que já resolvemos pensando em bolos: Numerador da primeira x denominador da segunda: 1 x 4 = 4. Denominador da primeira x numerador da segunda: 2 x 2 = 4. Como os resultados são iguais, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes (como já sabíamos, pensando em bolos). Será que as frações $\frac{35}{15}$ e $\frac{14}{6}$ são equivalentes? Pensando em bolos esta não é uma questão fácil de responder, certo? Usando nossa receita: Numerador da primeira x denominador da segunda: 35 x 6 = 210. Denominador da primeira x numerador da segunda: 15 x 14 = 210. Como os resultados são iguais, as frações $\frac{35}{15}$ e $\frac{14}{6}$ são equivalentes. E as frações $\frac{11}{16}$ e $\frac{3}{4}$ será que são equivalentes? Numerador da primeira x denominador da segunda: 11 x 4 = 44. Denominador da primeira x numerador da segunda: 16 x 3 = 48. Como

> os resultados são diferentes, as frações $\frac{11}{16}$ e $\frac{3}{4}$ não são equivalentes. (LINS e SILVA, 2008, p. 19).

Orientações para o Aplicador:

Para o estudo do Texto 5 “Como saber se duas frações são equivalentes?”, recomenda-se a leitura atenta do texto que possibilita a compreensão de como identificar se as frações são ou não equivalentes. O importante a fixar na leitura do texto é de que duas frações só serão equivalentes se a área, independente do número que a represente for igual. Por exemplo quando a fração $\frac{1}{2}$ representada em uma unidade, tem a fração $\frac{2}{4}$ como sua equivalente, significa que a área de ambas são iguais, apenas diferem nos valores numéricos, ou seja no tipo de divisão que foi efetuada.

Para finalizar a Oficina 4 sugere-se ao Aplicador solicitar aos professores uma breve avaliação oral das atividades realizadas até o quarto encontro em relação à dinâmica de trabalho e conceitos trabalhados. Esses dados direcionam os procedimentos a serem adotados nas Oficinas seguintes. Registrar no Diário Coletivo os principais aspectos abordados, dúvidas, contribuições e curiosidades.

Antes de encerrar o encontro o Aplicador pode fazer alguns questionamentos aos cursistas para serem respondidos no encontro seguinte, como por exemplo: É possível resolver a adição de frações com denominadores diferentes sem o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum? Existe um único algoritmo que podemos utilizar para efetuar a adição/subtração com frações? Esses questionamentos promovem a reflexão dos professores e aguçam a curiosidade para o próximo encontro.

4.5 OFICINA 5 – ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO E COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES A PARTIR DE UMA FOLHA DE PAPEL

Como as frações representam partes de coisas ou de conjuntos: “meio”, “terça parte”, “quarta parte” e são representadas por 2 números inteiros, um número inteiro é o numerador e indica a quantidade de partes consideradas e outro é o denominador e indica em quantas partes o inteiro foi dividido, os alunos muitas vezes acabam fazendo as operações de adição e subtração com frações como se estivessem operando com números inteiros, adicionando numerador com numerador e denominador com denominador.

Neste sentido, buscando estratégias de ensino para que os alunos possam compreender os algoritmos das operações de adição/subtração com frações, propõe-se o estudo do texto “Como somar e subtrair frações?” e atividades em que se priorizam a compreensão e a visualização das frações equivalentes em um todo contínuo, comparando-as, adicionando e subtraindo partes de um mesmo todo, explicitando-se a necessidade de se obter frações equivalentes e estabelecendo a relação entre a equivalência de frações obtida por meio de dobraduras e o algoritmo do cálculo do Mínimo Múltiplo Comum.

4.5.1 Objetivos

A Oficina 5 – A adição, subtração e comparação de frações a partir de uma folha de papel, tem como objetivo:

- incentivar a leitura e interpretação de textos matemáticos, para o desenvolvimento de estratégias de ensino da matemática;
- representar frações em uma folha de papel por meio de dobraduras;
- obter frações equivalentes de mesmo denominador por meio de dobraduras;
- justificar por que se calcula o Mínimo Múltiplo Comum na adição e na subtração de frações com denominadores diferentes;
- expor diferentes formas de realizar a adição e a subtração de frações com denominadores diferentes;
- resolver as operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes utilizando diversas estratégias.

4.5.2 Tempo de duração

O tempo necessário para a realização da oficina é de quatro horas.

4.5.3 Materiais utilizados

- cópia de texto “Como somar e subtrair frações?”
- retângulos de 2 x 8 cm (dois para cada professor);
- cópia da lista de atividades complementares;
- lápis de escrever e colorido, borracha, régua;
- malha quadriculada.

4.5.4 Atividades realizadas

- estudo do texto “Como somar e subtrair frações?”;
- resolução do exercício “**a**” utilizando diferentes estratégias: representação geométrica, listagem de frações equivalentes, técnica da multiplicação em “cruz” e com o algoritmo em que se obtém frações equivalentes a partir do cálculo do Mínimo Múltiplo Comum;
- resolução das operações de adição e subtração da lista de atividades complementares ;
- resolução do exercício “**b**”, comparação de frações impróprias, por meio da representação geométria em uma malha quadriculada.

4.5.5 Texto 6: Como somar e subtrair frações?

> Falamos, antes, sobre pensar em frações como resultados de medições, e observamos a semelhança com medir em metros e centímetros.

Relembrando: em $\frac{7}{5}$, o numerador 7 diz o "quanto", e o denominador 5 diz de que "tipo" (são 7 do tipo "quintos"), assim como em 2 metros o 2 diz "quanto" e o "metros" diz o "tipo" (são 2 do tipo "metros"). Agora, se alguém disser que quer saber o resultado da conta 2 metros + 50 centímetros, vamos somar o 2 com o 50? Claro que não! Temos duas alternativas principais. A primeira é transformar 2 metros em centímetros (2 m = 200 cm) e depois somar 200 cm com os outros 50 cm, dando o resultado 250 cm. Outra possibilidade é transformar 50 cm em metros (50 cm = 0,5 m) e depois somar 0,5 m com os outros 2 m, dando o resultado 2,5 m. Observe que 2,5 m = 250 cm. Com frações é a mesma coisa. Só podemos somar frações do mesmo "tipo", quer dizer, só podemos somar, diretamente, frações com o mesmo denominador. Se quisermos somar $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{10}$, antes de efetuar a operação é preciso transformar as duas em frações do mesmo "tipo", isto é, em frações com o mesmo denominador. Se fôssemos somar os numeradores diretamente, 5 sextos + 3 décimos = 8 de que tipo? Do mesmo modo que 2 metros + 50 centímetros = 52 de que tipo?

Esta frase, "transformar as duas frações com o mesmo denominador" quer dizer, na verdade, que temos que procurar uma fração equivalente a $\frac{5}{6}$, e outra equivalente a $\frac{3}{10}$, que tenham ambas o mesmo denominador. Podemos usar o método de multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número, para gerar frações equivalentes a cada uma delas:

Frações equivalentes a $\frac{5}{6}$:

$$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=\frac{30}{36}=\frac{35}{42}=\frac{40}{48}=\frac{45}{54}=\frac{50}{60}=\ldots$$

Frações equivalentes a $\frac{3}{10}$:

$$\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{9}{30}=\frac{12}{40}=\frac{15}{50}=\frac{18}{60}=\ldots$$

Comparando as frações equivalentes a $\frac{5}{6}$ com as equivalentes a $\frac{3}{10}$, descobrimos que $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$ e $\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$, de modo que, agora, podemos fazer nossa adição:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{25}{30} + \frac{9}{30} = \frac{34}{30}$$

Veja outra vez a semelhança com somar medidas em metros e centímetros: 2 m + 50 cm = 200 cm + 50 cm = 250 cm ou 2 m + 50 cm = 2 m + 0,5 m = 2,5 m e do mesmo modo 5 sextos + 3 décimos = 25 trinta avos + 9 trinta avos = 34 trinta avos. Este método é bom porque mostra a relação entre somar frações e as frações equivalentes, e deve ser usado com os alunos, mas, além de entendermos o que estamos fazendo, é sempre útil conhecermos técnicas práticas para fazer contas. No caso da adição de frações, vamos continuar usando, é claro, a ideia de encontrar frações equivalentes às originais, mas com denominadores iguais, só que ao invés de fazermos listas e as compararmos, vamos usar uma técnica mais direta. Veja: 1) Queremos somar $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{10}$; 2) Para achar frações equivalentes a $\frac{5}{6}$ e a $\frac{3}{10}$, o método mais direto é multiplicar o numerador e o denominador

de cada uma delas por um mesmo número, diferente de zero; $\frac{5}{6} = \frac{5}{6} \text{ x } \frac{a}{a}$ e $\frac{3}{10} = \frac{3}{10} \text{ x } \frac{b}{b}$ 3) Agora perguntamos: “6 x a = 10 x b, porque as duas frações têm que ter o mesmo denominador. Quais são estes números a e b?” Há muitas respostas, por exemplo “6 x 5 = 10 x 3”, mas há uma resposta que é bem fácil de achar, não temos que procurar muito: “6 x 10 = 10 x 6”. Se multiplicarmos um denominador pelo outro, vai dar o mesmo resultado que se multiplicar o outro pelo um! 4) Agora sim. A fração equivalente a $\frac{5}{6}$ é encontrada multiplicando-se seu numerador e seu denominador por 10; a fração equivalente a $\frac{3}{10}$ é encontrada multiplicando-se seu numerador e seu denominador por 6. 5) $\frac{5}{6} \text{ x } \frac{10}{10} = \frac{50}{60}$ e $\frac{3}{10} \text{ x } \frac{6}{6} = \frac{18}{60}$, de modo que $\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{50}{60} + \frac{18}{60} = \frac{68}{60}$. Vamos resumir esta técnica para somar frações:
O denominador do resultado vai ser o produto dos dois denominadores (no caso acima, 6 x 10 = 60) Multiplique “em cruz” os numeradores e denominadores, e some os resultados:

$$\boxed{\frac{5}{6} \times \frac{3}{10}}$$

5 x 10 + 3 x 6 = 50 + 18 = 68, que é numerador do resultado.
Assim: $\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{5}{6} \text{ x } \frac{10}{10} + \frac{3}{10} \text{ x } \frac{6}{6} = \frac{50}{60} + \frac{18}{60} = \frac{68}{60}$
A vantagem de se usar com os alunos, no início, esta notação mais longa, é que fica sempre possível ver a relação com frações equivalentes, mas à medida que eles adquirem segurança, pode-se sugerir uma notação mais abreviada, mais resumida:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{5 \text{ x } 10 + 3 \text{ x } 6}{60} = \frac{68}{60}$$

Usando letras para resumir e expressar de forma simbólica:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \text{ x } d + b \text{ x } c}{b \text{ x } d}$$

Tudo que dissemos sobre a adição, vale também para a subtração:

$$\frac{3}{6} - \frac{2}{10} = \frac{3}{6} \text{ x } \frac{10}{10} - \frac{2}{10} \text{ x } \frac{6}{6} = \frac{30}{60} - \frac{12}{60} = \frac{18}{60}$$

E para somar frações com números inteiros, basta lembrar que números inteiros podem ser representados como frações com denominador 1:

$$4 + \frac{3}{5} = \frac{4}{1} + \frac{3}{5} = \frac{4}{1} \text{ x } \frac{5}{5} + \frac{3}{5} \text{ x } \frac{1}{1} = \frac{20}{5} + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$$

Estamos certos de que se você examinar esta conta, pensando sobre ela, vai criar um modo mais prático de somar números naturais e frações. Finalmente, se você tiver que somar mais de duas frações, nossa sugestão é que some duas, depois mais outra, e assim por diante, ou que use o método de procurar frações equivalentes, para somar todas de uma vez.
Você deve ter observado que, para somar frações, não utilizamos o “famoso” MMC, o Mínimo Múltiplo Comum (que não discutiremos aqui). Como o nome diz, este é o menor número que é múltiplo de dois números dados. Por exemplo, 30 é o MMC de 6 e de 10, é o menor número que é múltiplo ao mesmo tempo de 6 e de 10.

> Em vez disso, usamos outro múltiplo comum de 6 e de 10, como denominador. Usamos o número 60 = 6 x 10. Por quê? Porque é muito mais prático ir “direto” para o 6 x 10 do que ficar tentando achar o MMC de 6 e 10. As técnicas para se achar o MMC de dois números são simples, mas não têm nenhuma relação visível com somar frações. É comum encontrarmos crianças que não somam frações porque não sabem calcular o MMC, e outras que se demoram demais no MMC antes de fazerem a adição (se não errarem no meio do caminho!). Por que se ensina a somar frações usando MMC? Acreditamos que seja por tradição, apesar de às vezes se dizer que é porque os números nas frações ficam menores, todavia num mundo em que o acesso a calculadoras simples é cada vez maior, este argumento vai perdendo força. Como sugerimos, nas séries iniciais é melhor trabalhar com frações simples, de modo que ao somá-las não vamos terminar com números muito grandes. Mas se você achar que é melhor, depois de fazer a adição pode aplicar o processo de simplificação ao resultado: $\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{5 \times 10 + 3 \times 6}{60} = \frac{68}{60}$
>
> $\frac{68}{60} = \frac{34}{30}$ (dividindo em cima e embaixo por 2)
>
> $\frac{34}{30} = \frac{17}{15}$ (dividindo em cima e em embaixo por 2) e pronto, porque 17 e 15 não têm nenhum divisor comum. Além de ter usado um algoritmo mais direto para a adição, ainda trabalhou a ideia de simplificação!
>
> Uma segunda observação, é que nós usamos acima uma notação muito especial para “multiplicar numerador e denominador por um mesmo número”: $\frac{5}{6} \times \frac{10}{10} = \frac{50}{60}$. Esta notação, que pode ser apresentada quase “como quem não quer nada”, introduz a multiplicação de frações, e, mais tarde, você pode voltar a este tema para observar que ao multiplicar por $\frac{10}{10}$ estamos, na verdade, multiplicando por 1, uma ideia extremamente útil, como veremos, por exemplo, na hora de entender como se faz divisões com frações. (LINS e SILVA, 2008, p. 21).

Orientações para o Aplicador

Antes de iniciar o estudo do texto “Como somar e subtrair frações?”, é importante que o professor Aplicador retome os questionamentos realizados ao término da Oficina 4, que ainda não precisam ser respondidos, mas que possibilitam a reflexão dos professores durante a Oficina 5.

Os questionamentos sugeridos no terceiro encontro foram: Por que tiramos o Mínimo Múltiplo Comum para efetuar a adição de frações com denominadores diferentes? Existe alguma outra forma de se fazer essa operação sem utilizar o Cálculo do Mínimo Múltiplo Comum? Qual? Por que na adição e na subtração com frações não se adicionam/subtraem os denominadores?

Na sequência, sugere-se ao Aplicador propor aos professores cursistas uma leitura silenciosa do texto “Como somar e subtrair frações?” e, posteriormente, a divisão do texto em 5 partes distribuindo-se cada parte para um grupo de professores cursistas. Cada grupo faz o estudo da sua parte e apresenta os aspectos que considera relevantes para o grupo todo sob a orientação do Aplicador.

4.5.6 Exercícios de fixação

No exercício **“a**” propõe-se a resolução da adição e da subtração de frações com denominadores diferentes utilizando quatro algoritmos diferentes: representação geométrica, lista de equivalências, a técnica em “cruz” e o algoritmo que utiliza o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum com o objetivo de analisar quais algoritmos possibilitam a compreensão das operações de adição e subtração com frações, especialmente para os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

No exercício “**a**” optou-se em propor a adição e subtração com frações próprias cujo resultado também é uma fração própria, isso porque, talvez essa seja a primeira vez que os professores estejam fazendo a representação geométrica, e para representar a fração própria utiliza-se apenas um inteiro que facilita o processo de representação. No entanto, na lista de exercícios complementares proposta aos professores cursistas após a resolução do exercício “**a**” foram contempladas adições e subtrações com frações próprias e impróprias.

No exercício **“b”** explora-se a comparação de frações impróprias, ou seja, frações que representam mais que um inteiro. Neste caso optou-se em representar as frações na malha quadriculada porque dá mais agilidade ao processo, dispensando-se o uso de régua e medições.

a) Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

- Resolva as operações: $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$ **de quatro maneiras diferentes: utilizando a representação geométrica, a lista de equivalências, a multiplicação em “cruz” e o algoritmo que utiliza o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum.**

Orientações para o Aplicador

Para resolver as duas operações do exercício **“a”**, adição e subtração de frações próprias de um mesmo inteiro e denominadores diferentes, propõe-se quatro estratégias diferentes:

a. por meio da representação geométrica;
b. utilizando a técnica da multiplicação em “cruz”;
c. a partir da listagem de frações equivalentes;
d. utlizando o algoritmo convencional com o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum para obter as frações equivalentes.

Como um dos objetivos do ensino de Matemática é instrumentalizar o aluno para que possa resolver problemas utilizando estratégias diversas, é indispensável propor na formação de professores, diferentes formas para resolver uma mesma situação, fazendo-se a análise de quais são as vantagens e desvantagens de cada processo em cada etapa do ensino.

Lembrando-se ainda, que ao fazer a representação geométrica da adição e da subtração de frações com denominadores diferentes, possibilita-se ao professor explorar uma forma de cálculo diferente daquela comumente utilizada com o cálculo do MMC, possibilitando-se a compreensão do “porquê” tornar os denominadores comuns para efetuar a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes e o “porquê” não se adiciona nem se subtrai os denominadores.

Resolução do Exercício “a”:

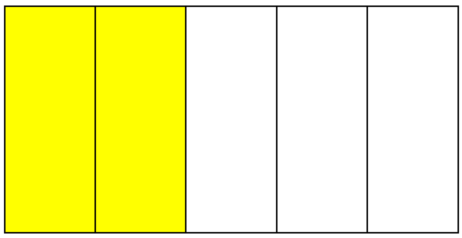
As duas operações indicadas no exercícios **“a”**, foram resolvidas utilizando quatro estratégias diferentes:

1ª Estratégia: Por meio da representação geométrica

Para realizar a operação $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ por meio da representação geométrica, inicialmente se faz o desenho de dois retângulos de 3 cm x 5 cm, considerando-os como “inteiros”, nos quais serão representadas as frações indicadas na operação.

É recomendável utilizar os números que aparecem nos denominadores das frações da adição/subtração, para traçar os retângulos considerados como “inteiros”, uma vez que é necessária a divisão de um retângulo em 5 partes e de outro em 3 partes iguais. No entanto, ressalta-se que, o professor pode utilizar qualquer forma com quaisquer dimensões para fazer a representação.

Para representar a fração $\frac{2}{5}$ em um retângulo nas dimensões de 3 x 5 cm, divide-se verticalmente o retângulo em 5 partes iguais (denominador). Uma das formas de dividir o retângulo utilizando-se régua e lápis consiste em marcar de cm em cm o lado que mede 5 cm e traçar retas paralelas ao lado que mede 3 cm. Depois de realizada a divisão pinta-se duas dessas partes (numerador) conforme se visualiza na Figura 45.



$\frac{2}{5}$

Figura 45 – Representação da fração $\frac{2}{5}$

Fonte: Elaborado pela autora

Para representar a fração $\frac{1}{3}$ em um retângulo nas dimensões de 3 x 5 cm, divide-se horizontalmente o retângulo em 3 partes iguais (denominador). Uma das formas de dividir utilizando-se régua e lápis consiste em marcar de cm em cm o lado que mede 3 cm e traçar retas paralelas ao lado que mede 5 cm. Depois de realizada a divisão pinta-se uma dessas partes (numerador) conforme se visualiza na Figura 46,

$\frac{1}{3}$

Figura 46 – Representação da fração $\frac{1}{3}$

Fonte: Elaborado pela autora

Como as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$ são de "tipos" diferentes (os denominadores são 3 e 5, representam a divisão do inteiro em pedaços de tamanhos diferentes) não é possível fazer a adição direta, portanto, é necessário transformá-las em frações do mesmo "tipo", ou seja, em pedaços de mesmo tamanho.

Para transformar as duas frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$ em frações do mesmo "tipo" divide-se novamente o retângulo representado na Figura 46 que, inicialmente, foi dividido em 3 partes horizontalmente, em 5 partes verticalmente (em 5 partes porque representa o denominador da fração $\frac{2}{5}$), conforme mostra a ilustração A da Figura 47, e divide-se também o retângulo representado na Figura 46, que havia sido dividido em 5 partes verticalmente, em três partes iguais horizontalmente (em 3 partes porque representa o denominador da fração $\frac{1}{3}$), conforme mostra a ilustração B da Figura 47, obtendo-se assim, frações de mesmo "tipo", ou seja, em frações equivalentes com o mesmo denominador, conforme se visualiza nas ilustrações A e B da Figura 47.

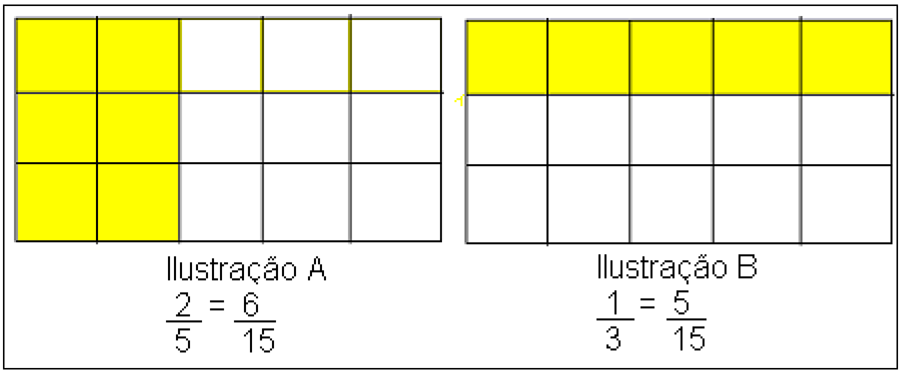


Figura 47 – Transformação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ do mesmo "tipo"
Fonte: Elaborado pela autora

Verifica-se na Figura 47 que a superfície pintada nas ilustrações A e B corresponde, respectivamente, às partes pintadas nas Figuras 45 e 46, significando que a fração $\frac{1}{3}$ é equivalente à fração $\frac{5}{15}$ (Ilustração A da Figura 47) e a fração $\frac{2}{5}$ é equivalente à fração $\frac{6}{15}$ (Ilustração B da Figura 47).

Portanto, na Figura 47 representam-se duas frações do mesmo “tipo”, o que possibilita tanto a adição quanto a subtração de forma direta, ou seja, a adição ou subtração de numeradores (que indicam a quantidade de partes consideradas) e a permanência do mesmo denominador (que indica em quantas partes o inteiro foi dividido, ou seja, o “tipo” de divisão que foi feita).

Na Figura 48 mostra-se a representação geométrica da soma das frações $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$.

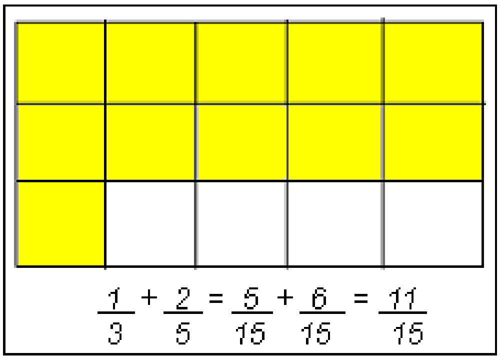


Figura 48 – Adição das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$

Fonte: Elaborado pela autora

Sistematizando a adição obtém-se:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$

Na Figura 49 mostra-se a representação geométrica do resultado da operação $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$

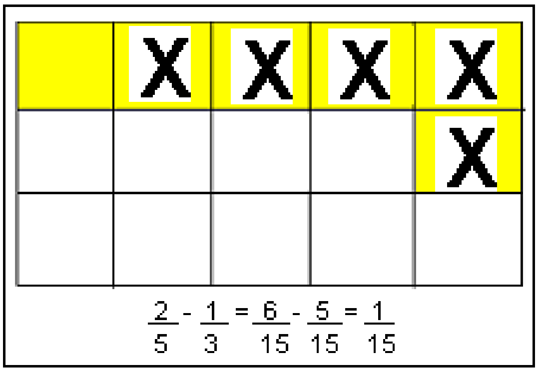


Figura 49 – Subtração das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$

Fonte: elaborado pela autora

Sistematizando a subtração obtém-se:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

2ª Estratégia: Utilizando-se a técnica da multiplicação em “cruz”

Para realizar a operação $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ utilizando-se a técnica de multiplicar em “cruz”, neste exemplo multiplica-se o numerador (2) da primeira fração pelo denominador (3) da segunda fração, obtendo-se o numerador (6) da fração equivalente à fração $\frac{2}{5}$ e o numerador (1) da segunda fração pelo denominador (5) da primeira fração obtendo-se o numerador (5) da fração equivalente a $\frac{1}{3}$.

Para determinar o denominador comum das frações equivalentes multiplica-se o denominador (5) da primeira fração pelo denominador (3) da segunda fração obtendo-se 15. Portanto, sistematizado o processo tem-se:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3 + 1 \times 5}{5 \times 3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$

Para realizar a operação $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$ utilizando a técnica de multiplicar em “cruz”, o processo é similar ao utilizado na adição: multiplica-se o numerador (2) da primeira fração pelo denominador (3) da segunda fração, obtendo-se o numerador (6) da fração equivalente à fração $\frac{2}{5}$ e o numerador (1) da segunda fração pelo denominador (5) da primeira fração, obtendo-se o numerador (5) da fração equivalente a $\frac{1}{3}$.

Para determinar o denominador comum das frações equivalentes, neste exemplo, multiplica-se o denominador (5) da primeira fração pelo denominador (3) da segunda fração, obtendo-se 15. Portanto, sistematizado o processo tem-se:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3 - 1 \times 5}{5 \times 3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

É importante que o professor Aplicador alerte o professor cursista que neste processo nem sempre se obtém o menor múltiplo comum como denominador das frações equivalentes, mas que é um processo prático, e que o resultado final pode ser simplificado, ou seja, no resultado final pode-se encontrar uma fração equivalente, escrita de uma forma mais simples, pelo processo de divisão do numerador e do denominador por um mesmo número. Ressalta-se que, obtém-se o menor múltiplo comum utilizando a técnica em "cruz" apenas quando os denominadores são números primos.

3ª Estratégia: A partir da listagem de frações equivalentes

Para realizar a adição e a subtração de frações com denominadores diferentes utilizando-se a listagem de frações equivalentes, primeiramente obtém-se uma listagem de frações equivalentes às frações indicadas na operação.

No exercício "**a**" as operações indicadas são $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$. Portanto, organiza-se uma lista de frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e outra lista equivalentes a $\frac{2}{5}$. Para obter frações equivalentes à fração dada multiplica-se o numerador e o denominador por um mesmo número, conforme se visualiza na Figura 50.

Equivalência a fração $\frac{2}{5}$	Equivalência a fração $\frac{1}{3}$
$\frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{10}$	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$
$\boxed{\frac{2}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{15}}$	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{9}$
$\frac{2}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{20}$	$\frac{1}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{12}$
$\frac{2}{5} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{25}$	$\boxed{\frac{1}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{15}}$
$\frac{2}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{12}{30}$	$\frac{1}{3} \times \frac{6}{6} = \frac{6}{18}$

Figura 50 – Lista de frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$

Fonte: Elaborado pela autora

Na sequência, localizam-se duas frações, uma em cada lista, com a condição de apresentarem denominadores iguais. Na lista de frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ encontra-se a fração $\frac{6}{15}$ e na lista de frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ encontra-se a fração $\frac{5}{15}$.

Como as frações $\frac{6}{15}$ e $\frac{5}{15}$ possuem o mesmo denominador e são respectivamente equivalentes às frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$, pode-se efetuar as operações de adição e subtração das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$, substituindo-as pelas respectivas frações equivalentes com o mesmo denominador.

Portanto:

$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$ e $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$

4 ª Estratégia: Utilizando o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum para obter as frações equivalentes

Uma outra alternativa para resolver as operações de adição/subtração de frações com denominadores diferentes é utilizar o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum – MMC para obter as frações equivalentes com mesmo denominador.

Para realizar as operações $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ determina-se o Mínimo Múltiplo Comum entre os denominadores 3 e 5.

Uma das formas de encontrar o Mínimo Múltiplo Comum é listar os números que são múltiplos de cada um dos denominadores da operação. Neste caso, são os múltiplos de 3 e 5 e encontrar o menor múltiplo comum diferente de zero.

Múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

Múltiplos de 5: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...

Múltiplos comuns de 3 e 5: 0, 15, 30, ...

Portanto, o menor múltiplo comum entre os números 3 e 5 diferente de 0 é o número 15, que é chamado de Mínimo Múltiplo Comum.

Outra forma de se obter o Mínimo Múltiplo Comum é utilizando o processo da decomposição simultânea, em que todos os números são decompostos em fatores primos ao mesmo tempo. O produto dos fatores primos é o Mínimo Múltiplo Comum.

No processo da decomposição simultânea para obter o Mínimo Múltiplo Comum entre os denominadores 3 e 5, utiliza-se o dispositivo prático, conforme visualiza-se na Figura 51.

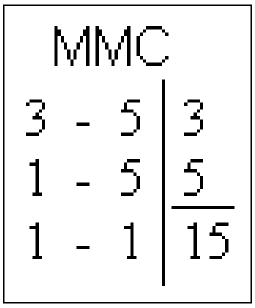


Figura 51: Cálculo do MMC
Fonte: Elaborado pela autora

A partir do cálculo do Mínimo Múltiplo Comum, obtém-se frações equivalentes às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, com o denominador comum, no caso denominador 15.

Para encontrar a fração equivalente à fração $\frac{2}{5}$ com o denominador 15, divide-se o 15 (denominador comum) por 5 (denominador da fração inicial) que resulta em 3 e multiplica-se esse resultado por 2 (numerador da fração inicial), obtendo-se o número 6 que passa a ser o numerador da fração equivalente. Portanto, a fração equivalente a $\frac{2}{5}$ com denominador 15 é a fração $\frac{6}{15}$.

Para encontrar a fração equivalente à fração $\frac{1}{3}$ com o denominador 15, divide-se o 15 (denominador comum) por 3 (denominador da fração inicial) que resulta em 5 e multiplica-se esse resultado por 1 (numerador da fração inicial), obtendo-se o número 5 que passa a ser o numerador da fração equivalente. Portanto, a fração equivalente a $\frac{1}{3}$ com denominador 15 é a fração $\frac{5}{15}$.

Sistematizando a técnica obtém-se:

- na adição:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$

- na subtração:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

b) Comparação de frações que representam mais que um inteiro

- As frações $\frac{4}{3};\frac{5}{4};\frac{9}{8}$ são frações de um mesmo todo. Qual das frações representa a maior área? E a menor? Explique como você chegou a esse resultado.

Orientações para o Aplicador

Na atividade “**b**” apresenta-se geometricamente a comparação de frações que possuem o numerador maior que o denominador, ou seja, frações impróprias.

Sugere-se ao Aplicador propor aos professores cursistas o uso da malha quadriculada para representar as frações $\frac{4}{3};\frac{5}{4};\frac{9}{8}$, uma vez que será necessário o traçado de mais de um retângulo para representar cada fração que tem o numerador maior que o denominador e, na malha quadriculada, esse processo é facilitado.

A nomenclatura das frações: própria, imprópria, mista e aparente não é o aspecto mais importante a ser abordado com os alunos dos Anos Iniciais. No entanto, é interessante o professor cursista observar a diferença entre os tipos de frações nas atividades propostas no decorrer das oficinas. No caso da atividade “**b**” pode-se explorar a transformação da fração imprópria em número misto por meio da representação geométrica relacionando-a com o algoritmo da divisão, quando se obtém no quociente a quantidade de partes inteiras, no resto o numerador e no divisor - o denominador da fração própria que compõe o número misto.

As frações $\frac{4}{3};\frac{5}{4};\frac{9}{8}$ só podem ser comparadas se representadas em um mesmo inteiro, e se o inteiro estiver dividido em partes iguais. Portanto, é necessário planejar as dimensões do retângulo que será considerado o inteiro.

Como as frações apresentam denominadores diferentes 3, 4 e 8 e para fazer a comparação é necessário encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador. O processo de representação das frações é facilitado quando se obtém o menor denominador comum, assim o todo é dividido em um menor número de partes.

Nesse sentido, encontra-se o menor múltiplo comum entre os números 3, 4 e 8 obtendo-se como resultado o número 24, portanto cada inteiro será dividido em 24 partes iguais. Isto significa que a área do retângulo será de 24 quadradinhos da malha quadriculada. No entanto, são quatro as possibilidades de se obter um retângulo com área de 24 quadradinhos utilizando como unidades de medidas os lados dos quadradinhos (números naturais): 1 x 24; 2 x 12; 3 x 8 e 4 x 6.

Para escolher as dimensões do retângulo que será considerado como inteiro, de forma que a divisão em partes iguais fique facilitada, analisam-se ainda, os denominadores das frações (3, 4 e 8). Observando-se os denominadores, percebe-se que 8 é múltiplo de 4, portanto todo número divisível por 8 também é divisível por 4, então entre os números 4 e 8 a melhor opção é o número 8, concluindo-se que as dimensões ideais do retângulo são 8 quadradinhos de comprimento e 3 quadradinhos de altura.

Embora essa tomada de decisão quanto às medidas do retângulo ideal para representar as frações $\frac{4}{3};\frac{5}{4};\frac{9}{8}$ inicialmente pareça complicada, na prática, essa percepção é quase imediata. O professor visualiza nos denominadores (3, 4 e 8) os números que são múltiplos (4 e 8) e escolhe o maior (8) como medida de um dos lados do retângulo e como a área desse retângulo é de 24 quadradinhos (obtido no cálculo do MMC) a medida do outro lado do retângulo é 3, uma vez que 8 x 3 = 24.

Observa-se na Figura 52 que, para o traçado dos retângulos, foi utilizada uma folha quadriculada. Como já haviam sido encontradas as dimensões ideais para o retângulo a ser considerado como inteiro, bastava contar 3 quadradinhos da folha quadriculada para a altura e 8 quadradinhos para a largura, obtendo-se o retângulo com 24 quadradinhos de área (3 x 8 = 24). A partir da construção do inteiro, as frações $\frac{4}{3};\frac{5}{4};\frac{9}{8}$ foram representadas.

Para representar cada uma das frações $\frac{4}{3};\frac{5}{4};\frac{9}{8}$ foram necessários dois retângulos (2 unidades) conforme se visualiza Figura 52.

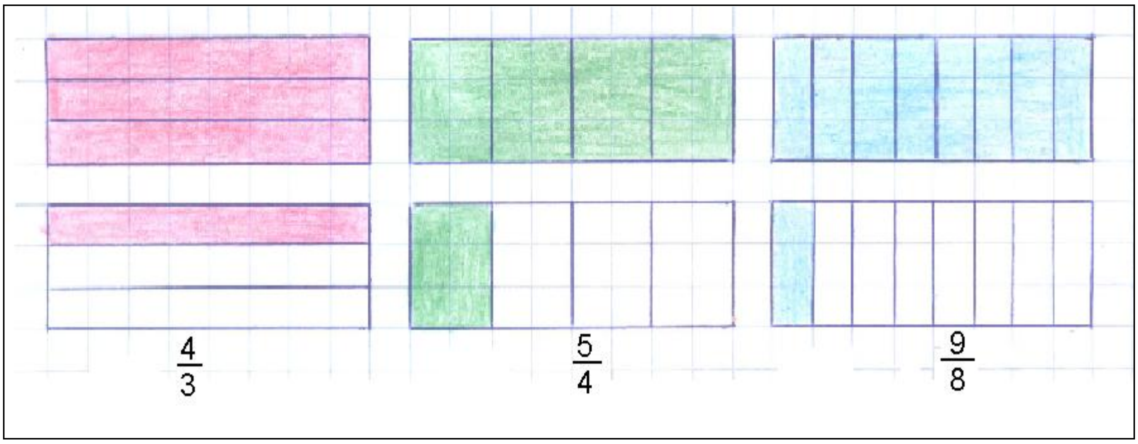


Figura 52 - Representação das frações $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$ e $\frac{9}{8}$
Fonte: Elaborado pela autora

Como os denominadores das frações $\frac{5}{4}$ e $\frac{9}{8}$ são ambos divisíveis por 8 e somente o denominador da fração $\frac{4}{3}$ não é divisível por 8, basta pensar no menor número que seja divisível por 3 e 8 ao mesmo tempo. Como 3 x 8 = 24 o número que representará o denominador das frações equivalentes será 24. Assim, a representação de cada uma das frações da Figura 52 será redividida de forma que cada inteiro fique dividido em 24 partes iguais, conforme mostra a figura 53.

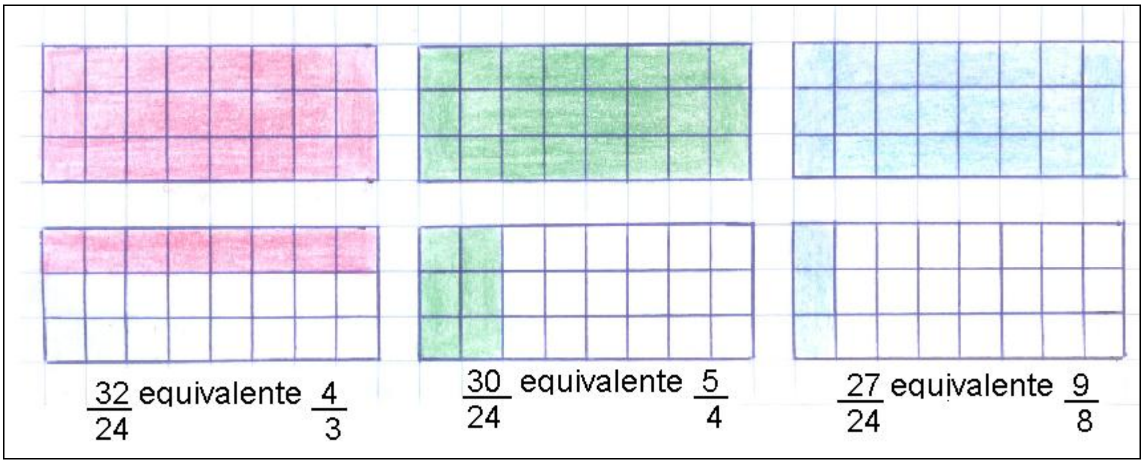


Figura 53 – Divisão do inteiro em 24 partes iguais
Fonte: Elaborado pela autora

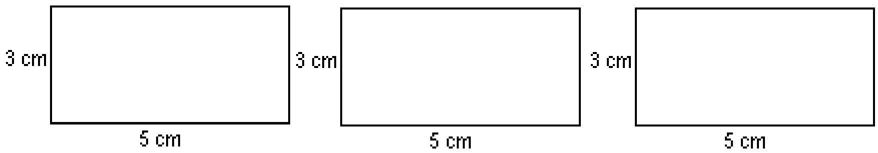
Na Figura 53 visualizam-se as frações $\frac{32}{24}$, $\frac{30}{24}$ e $\frac{27}{24}$ e que possuem denominadores comuns e são, respectivamente, equivalentes às frações $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$ e $\frac{9}{8}$. A partir das frações equivalentes de mesmo denominador, a comparação das frações se dá por meio da verificação do número de partes indicadas no numerador de cada fração.

Comparando as três frações equivalentes $\frac{30}{24}$, $\frac{27}{24}$ e $\frac{32}{24}$, observa-se que a fração $\frac{32}{24}$ representa a maior quantidade de partes e a fração $\frac{27}{24}$ representa a menor quantidade de partes, portanto a fração $\frac{4}{3}$ representa a maior área e a fração $\frac{9}{8}$ representa a menor área de um mesmo inteiro.

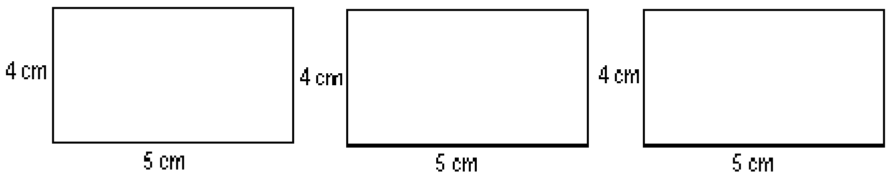
4.5.7 Lista de exercícios complementares

Efetue as operações com frações por meio da representação geométrica; pela técnica em “cruz”; utilizando a lista de frações equivalentes e pelo método utilizando o MMC.

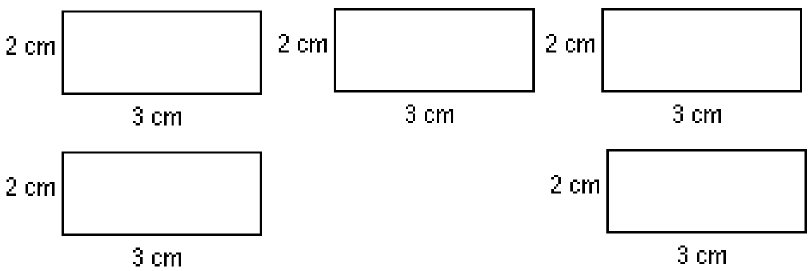
a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$



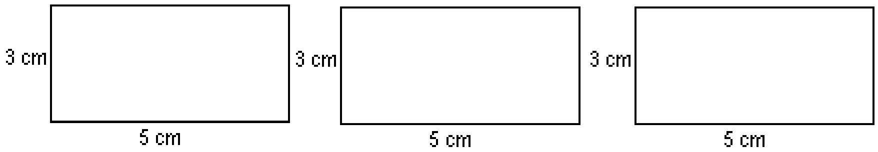
b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$



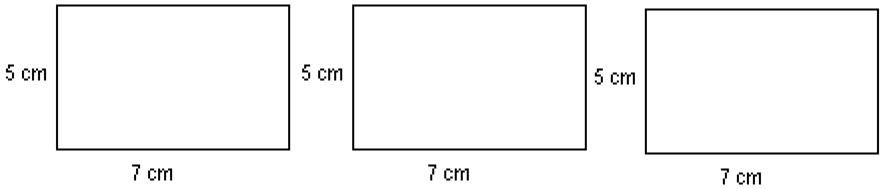
c) $\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$



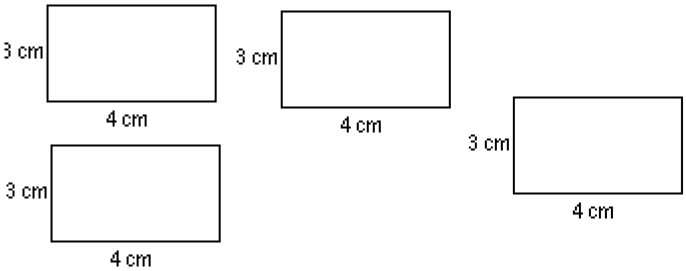
d) $\frac{4}{5}$ - $\frac{2}{3}$



e) $\frac{5}{7} - \frac{3}{5}$



f) $\frac{5}{3} - \frac{3}{4}$



Orientações para o Aplicador

Para fixação dos algoritmos de adição/subtração expostos na Oficina 5 sugere-se ao Aplicador propor a lista de exercícios complementares aos professores cursistas para ser resolvida em duplas.

Finaliza-se a Oficina 5 solicitando-se aos professores o registro no Diário Coletivo, contemplando os principais aspectos abordados, dúvidas, contribuições e curiosidades.

4.6 OFICINA 6 – REPRESENTAÇÃO DE FRAÇÕES EM UMA RETA NUMÉRICA

As frações fazem parte do conjunto dos números racionais e podem ser representadas na reta numérica. Neste sentido, propõe-se na Oficina 6 o Estudo do

Texto “Representação de frações na reta numérica” reforçando o conceito de fração como divisão do todo em partes iguais.

Para a localização de frações na reta numérica não se considera a área, mas os pontos marcados em intervalos iguais na reta, portanto nos exercícios: “**a**” e “**b**” exploram-se as frações enquanto números a serem localizados em segmentos de reta e a equivalência de frações.

As frações indicadas no exercício “**a**” representam pontos menores que a unidade, ou seja, as frações próprias e, no exercício “**b**”, são contempladas as frações impróprias.

Para a fixação do conceito de fração enquanto ponto localizado em um segmento de reta propõe-se uma lista de atividades complementares.

4.6.1 Objetivos

A Oficina 6 – Representação de frações em uma reta numérica, tem os seguintes objetivos:

- incentivar a leitura e interpretação de textos matemáticos, para o desenvolvimento de estratégias de ensino da matemática;
- localizar frações em um segmento de reta;
- reconhecer fração enquanto ponto localizado em uma reta;
- identificar frações equivalentes por meio da comparação de pontos localizados em um segmento de reta.

4.6.2 Tempo de duração

As atividades são realizadas em um período de duas horas.

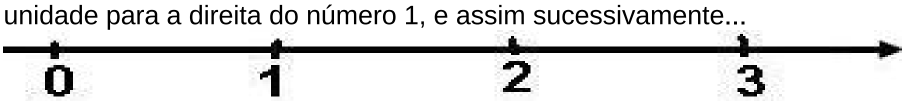
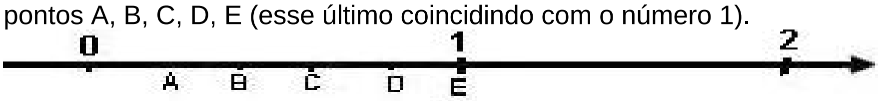
4.6.3 Materiais utilizados

- cópia de texto “Representação de frações na reta numérica”;
- cópia da lista de atividades complementares;
- papel milimetrado ou malha quadriculada;
- régua, lápis, borracha.

4.6.4 Atividades realizadas

- estudo do texto “Representação de frações na reta numérica”;
- localização de frações em segmentos de retas nos exercícios “**a**” e “**b**”;
- resolução da lista de atividades complementares.

4.6.5 Texto 7 - Representação de frações na reta numérica

> A visualização dos números fracionários na reta numérica não deveria, a rigor, ser considerada como uma nova ideia, pois também se trata da divisão de uma unidade em partes iguais. Só que, ao invés de destacarmos a parte, passamos a destacar pontos da reta. Como em uma régua, marcamos os valores inteiros em intervalos iguais, como ilustrado abaixo. O número 1 passa, então, a ser representado por um ponto na reta, que dista uma unidade do zero para a direita, o número 2 pelo ponto que dista uma unidade para a direita do número 1, e assim sucessivamente...
>
> 
>
>
> Na reta numérica, para determinar a posição da fração $\frac{1}{5}$, dividimos o intervalo que vai de zero até 1 em cinco partes iguais, encontrando os pontos A, B, C, D, E (esse último coincidindo com o número 1).
>
> 
>
>
> O ponto **A** é associado com $\frac{1}{5}$, o ponto **B**, assinalado na figura, representa a fração $\frac{2}{5}$, e assim, sucessivamente, sendo que E representa a fração $\frac{5}{5}$, ou seja a unidade completa (BELFORT, 2006, p. 2).

Orientações para o Aplicador

Para o estudo do texto “Representação de frações na reta numérica”, sugere-se ao Aplicador propor aos professores cursistas uma leitura comentada. Antes de iniciar o estudo do texto o Aplicador pode fazer alguns questionamentos, como por exemplo: Para representar frações em uma reta numérica, o que é necessário? Quantas marcas são necessárias para dividir um segmento de reta em 5 partes iguais? E em 6 partes iguais? Qual é a maior dificuldade encontrada pelos alunos quando se propõe a localização de frações em um segmento de reta? Estas questões são importantes para que o professor reflita sobre as dificuldades que os alunos apresentam e sobre as possibilidades de interferência para que essas dificuldades sejam sanadas.

No estudo do texto, o Aplicador deve alertar os professores cursistas que, quando se localiza um número fracionário na reta numerada, esta fração está associada a um ponto e não mais a uma área como estudado na Oficina 1. Nos exercícios propostos contempla-se a representação de frações menores que a unidade (frações próprias), a representação de frações maiores que a unidade (frações impróprias) e frações que coincidem com as unidades (frações aparentes).

4.6.6 Exercício de fixação

No exercício “**a**” explora-se a ideia de fração como número a ser localizado em um segmento de reta numérica. As frações indicadas no exercício representam pontos menores que a unidade, ou seja, as frações próprias, e no exercício “**b**” as frações indicadas representam pontos maiores que a unidade, ou seja, as frações impróprias. A partir da localização das frações nos segmentos de reta visualiza-se a equivalência.

a) Representação de frações menores que a unidade em um segmento de reta

- No papel milimetrado (ou em uma folha de papel sulfite quadriculada) trace 7 segmentos de retas com 30 cm de comprimento cada um. Para favorecer a

visualização da equivalência, os segmentos devem ser traçados, um logo abaixo do outro, mantendo-se o espaço de 1 cm entre eles.

- Em cada segmento de reta marque nas extremidades os pontos 0 e 1 e considere o intervalo como uma unidade inteira.

- Utilize um segmento de reta para localizar cada uma: $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{4}{5}$ e $\frac{12}{15}$.

- No último segmento, marque todos os pontos referentes às frações indicadas e responda: Entre as frações listadas há mais do que uma associada a um mesmo ponto na reta? Se houver, quais são elas?

Orientações para o Aplicador

Para a resolução do exercício "**a**" utiliza-se uma folha de papel milimetrado (ou sulfite quadriculado) com sete segmentos de reta de 30 cm de comprimento.

Como todas as frações dadas no exercício "**a**" representam valores menores que a unidade, o segmento de reta é demarcado nas extremidades pelos pontos 0 e 1, assim o intervalo de 0 até 1 corresponde a uma unidade inteira.

Para representar as frações divide-se cada segmento de reta em partes iguais de acordo com o denominador da fração a ser representada. Por exemplo, para representar a fração $\frac{1}{2}$, o primeiro segmento de reta é dividido em duas partes iguais (denominador 2) e a fração fica localizada no ponto 1 (numerador 1); para representar a fração $\frac{5}{10}$, o segundo segmento de reta é dividido em 10 partes iguais (denominador 10) e a fração fica localizada no ponto 5 (numerador 5), conforme se visualiza na Figura 54.

Após representar cada fração em um segmento de reta, traça-se uma linha verticalmente em cada um dos pontos que indicam a posição das frações do exercício "**a**" e percebe-se que algumas frações ocupam a mesma posição no segmento de reta considerado como o inteiro. Isto acontece porque estas são frações equivalentes, ou seja, são frações escritas de maneira diferente, mas que estão localizadas na mesma posição no segmento de reta. Assim, neste exemplo, a localização da fração $\frac{1}{2}$ é a mesma da sua fração equivalente $\frac{5}{10}$, a localização da fração $\frac{3}{4}$ é a mesma da fração equivalente $\frac{6}{8}$ e a localização da fração $\frac{4}{5}$ é a mesma da sua fração equivalente $\frac{12}{15}$, conforme pode ser observado na Figura 54.

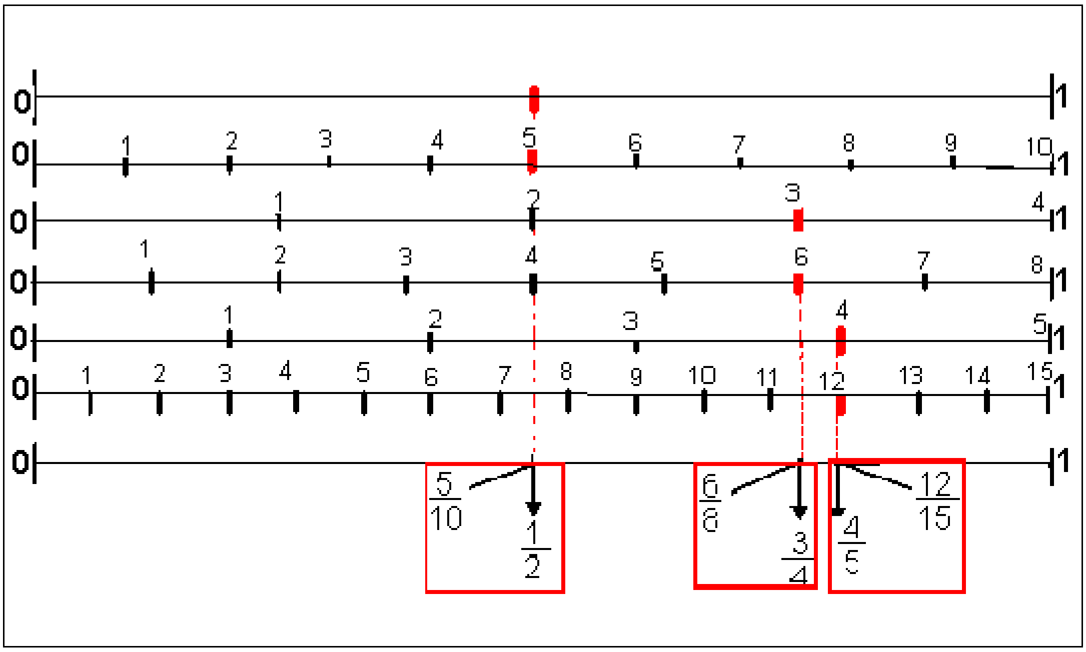


Figura 54 - Representação de números fracionários na reta
Fonte: Adaptado pela autora

b) Representação de frações menores e maiores que a unidade em um segmento de reta

- No papel milimetrado (ou folha de papel sulfite quadriculada) trace 8 segmentos de retas com 36 cm de comprimento cada um. Para favorecer a visualização da equivalência, os segmento devem ser traçados, um logo abaixo do outro, mantendo-se o espaço de 1 cm entre eles.

- Divida cada segmento de reta de 36 cm em três partes iguais e registre os números 0 na extremidade esquerda, 1 e 2 na sequência e o 3 na extremidade direita. Considere cada um desses intervalos como uma unidade inteira.

- Utilize um segmento de reta para localizar cada uma das frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{8}{4}$ **e** $\frac{6}{3}$

- No último segmento, marque todos os pontos referentes às frações indicadas e responda: Entre as frações listadas há mais do que uma associada a um mesmo ponto na reta? Se houver, quais são elas?

Orientações para o Aplicador

Para a resolução do exercício "**b**" utiliza-se papel milimetrado ou papel sulfite quadriculado, sugere-se o uso de 12 quadradinhos para representar uma unidade, uma vez que 12 é divisível pelos denominadores de todas as frações dadas, e isso facilita a divisão para representar as frações.

No exercício "**b**" algumas das frações têm o numerador maior que o denominador, são as frações maiores que a unidade, as chamadas frações impróprias. Para representá-las na reta é necessário utilizar pontos que vão além de uma unidade, neste sentido é necessário traçar um segmento de reta demarcado por pontos que vão além da unidade 1. Na Figura 55 além do ponto 1, foram demarcadas a segunda e a terceira unidades.

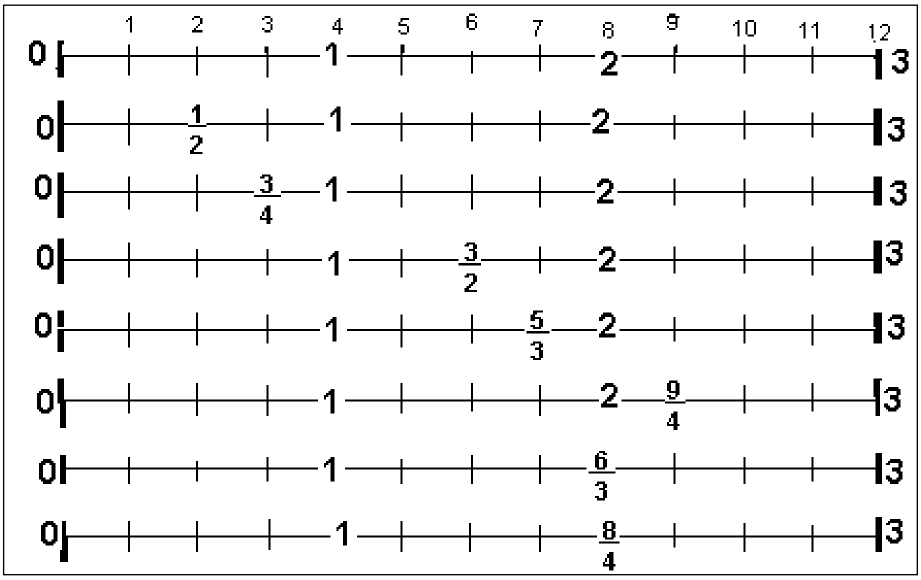


Figura 55 – Frações próprias e impróprias representadas na reta numérica
Fonte: Adaptado pela autora

Para localizar a primeira fração do exercício "**b**", divide-se o intervalo de 0 a 1 do segmento de reta, em duas partes iguais. O primeiro ponto indica a metade da unidade, ou seja, corresponde a fração $\frac{1}{2}$.

Para localizar a fração $\frac{3}{4}$ divide-se o intervalo de 0 a 1 do segmento de reta em 4 partes iguais marcando-se no ponto 3 a fração $\frac{3}{4}$.

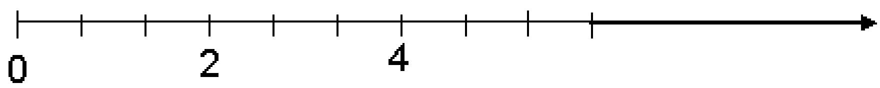
Para localizar a fração $\frac{3}{2}$, divide-se o segmento de 0 a 1 em duas partes (denominador 2); o primeiro ponto corresponde à fração $\frac{1}{2}$, o segundo ponto que coincide com o extremo 1 corresponde à fração $\frac{2}{2}$; portanto, como ainda a quantidade de pontos não foi suficiente, continua-se a marcação no intervalo de 1 a 2**;** no terceiro ponto que coincide com a metade do intervalo entre 1 e 2 localiza-se a fração $\frac{3}{2}$. Da mesma forma, para localizar a fração $\frac{5}{3}$, divide-se o segmento de 0 a 1 em três partes iguais; no primeiro ponto localiza-se a fração $\frac{1}{3}$, no segundo ponto a fração $\frac{2}{3}$, no terceiro ponto a fração $\frac{3}{3}$ que coincide com o extremo 1 do intervalo de 0 a 1, e como as divisões não foram suficientes para representar a fração $\frac{5}{3}$, continua-se a divisão em três partes iguais no intervalo de 1 a 2, no quarto ponto localiza-se a fração $\frac{4}{3}$ e no quinto ponto a fração $\frac{5}{3}$. De modo similar localizam-se as frações $\frac{9}{4}$, $\frac{8}{4}$ e $\frac{6}{3}$.

Após representar cada fração em um segmento de reta, traça-se verticalmente uma linha em cada um dos pontos que indicam a posição das frações do exercício "**b**" e percebe-se que as frações $\frac{8}{4}$ e $\frac{6}{3}$ estão localizadas na mesma posição no segmento de reta, portanto são frações equivalentes, e neste caso, também coincidem com o extremo 2 dos segmentos de 1 a 2 ou de 2 a 3, podendo ser chamadas de frações aparentes, conforme se visualiza na Figura 55.

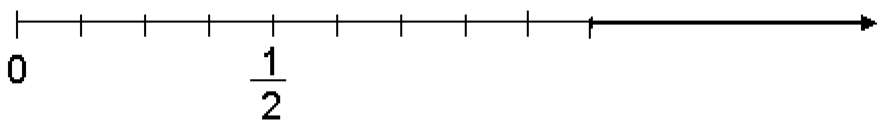
4.6.7 Lista de exercícios complementares[7]

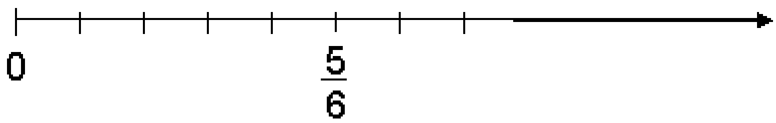
1) Identifique na reta abaixo o ponto $\frac{1}{2}$ e a fração que representa os pontos marcados.

[2] Os exercícios "1", "2", "3" e "4" são adaptados de SILVA (1997)



2) Associe uma fração a cada ponto:





3) Represente num segmento as medidas $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ e dê uma medida que esteja entre elas.

4) Desenhe a unidade a partir do segmento abaixo:

Orientações para o Aplicador

Para a fixação do conceito de fração enquanto ponto a ser localizado em uma reta, sugere-se ao Aplicador propor aos professores cursistas a lista de exercícios complementares para ser resolvida em duplas.

Finaliza-se a Oficina 6 solicitando-se aos professores o registro no Diário Coletivo com os principais aspectos abordados, dúvidas, contribuições e curiosidades e apresenta-se a Oficina 7 – Fração como parte de um conjunto.

4.7 OFICINA 7 – FRAÇÃO COMO PARTE DE UM CONJUNTO

Antes de iniciar a oficina 7, retomam-se os conceitos trabalhados até a oficina 6. Na oficina 1 foram exploradas as divisões do todo em partes iguais, sendo o termo igual empregado para as partes que possuem a mesma área e considerando-se como inteiro um todo contínuo. A partir da divisão do todo contínuo em partes iguais foram propostas as oficinas 2, 3, 4 e 5, definindo-se frações unitárias como unidades de medida e como partes de um todo contínuo dividido, a equivalência de frações, a comparação de frações e as operações de adição e subtração.

Na oficina 6 foi contemplado o conceito de fração enquanto número localizado em um segmento de reta, a partir da divisão de intervalos iguais e a equivalência de frações.

Nesta oficina 7, amplia-se o conceito de fração, explorando-se o ensino de fração a partir de um todo discreto, ou seja de um conjunto de objetos, onde são consideradas como iguais as quantidades de elementos dos subconjuntos do conjunto dado. Neste sentido, propõe-se o estudo do Texto “Fração como parte de um conjunto” e a resolução dos exercícios “**a**” e “**b**”.

4.7.1 Objetivos

A Oficina 7 – Fração como parte de um conjunto, tem os seguintes objetivos:

- incentivar a leitura e interpretação de textos matemáticos, para o desenvolvimento de estratégias de ensino da matemática;
- representar frações de um conjunto de objetos considerado como o inteiro;
- identificar frações equivalentes por meio da comparação de elementos dos subconjuntos representados a partir de um conjunto de elementos;

4.7.2 Tempo de duração

As atividades são realizadas em um período de duas horas.

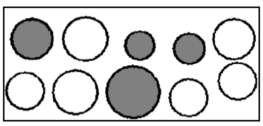
4.7.3 Materiais utilizados

- cópia de texto “Fração como parte de um conjunto”
- cópia da atividade “a”;
- materiais de contagem (material dourado, tampinhas),
- régua, lápis de cor, lápis de escrever, borracha.

4.7.4 Atividades realizadas

- estudo do texto “Fração como parte de um conjunto”
- resolução dos exercícios “**a**” e “**b”**;

4.7.5 Texto 8 - Fração como parte de um conjunto

> Uma terceira ideia, que pode ser considerada uma variante da ideia 1 para o caso de grandezas discretas, é aquela que associa as frações a subconjuntos de um conjunto. De acordo com essa ideia, cada fração de um conjunto é um subconjunto desse conjunto. De acordo com essa interpretação, de um conjunto de 10 elementos, qualquer subconjunto de 4 elementos corresponde a $\frac{2}{5}$ desse conjunto; e assim por diante. Por exemplo:
>
> 
>
> As bolas pintadas de cinza correspondem a $\frac{2}{5}$ do total de bolas representadas na figura. **Discutindo a prática:** As frações também estão

> sendo utilizadas aqui para representar uma ou mais partes de um todo que foi dividido em partes iguais. Só que, nesse caso, o todo é um conjunto, ou seja, uma grandeza discreta e o que se divide são os elementos do conjunto, formando, assim, um subconjunto. Desta vez, as partes iguais não são necessariamente iguais em forma ou tamanho. São iguais em **número de elementos**. Assim é que de um conjunto com quatro pessoas, independente de idade, de cor, de tamanho, de sexo etc. duas quaisquer dessas pessoas representam metade do conjunto, ou $\frac{1}{2}$ do conjunto. Um ponto a se considerar é o "tamanho" (número de elementos) do conjunto considerado como todo. É importante que o professor fique atento para que não ocorra, em um primeiro momento, a necessidade de se dividir (quebrar) algum dos elementos do conjunto. Lembre que não faz muito sentido falar em uma bola de gude dividida em duas partes ou em um ovo dividido em três partes, por exemplo. Para iniciar um trabalho com crianças, um número bom de elementos para o conjunto que vai representar o todo é 12, uma vez que de um conjunto com doze elementos pode-se, facilmente, encontrar $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$. (BELFORT e VASCONCELOS, 2006, p. 3) .

Orientações para o Aplicador

Para o estudo do texto "Fração como parte de um conjunto", sugere-se ao Aplicador propor aos professores cursistas uma leitura comentada, ressaltando que neste caso, as frações são representadas a partir de um conjunto de elementos que foi dividido em subconjuntos. Assim, se esse conjunto for dividido em 10 subconjuntos com uma bola em cada, cada subconjunto será representado pela fração $\frac{1}{10}$.

Para representar a fração correspondente a todas as bolas cinzas da Figura 56 são considerados 4 subconjuntos, portanto a fração que representa a quantidade de bolas cinzas é $4 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$, onde o 4 é o numerador e indica a quantidade de subconjuntos que possuem bolas cinzas e 10 é o denominador que indica o número de subconjuntos em que o inteiro foi dividido.

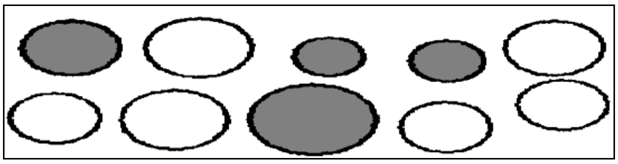


Figura 56 – Conjunto de bolas
Fonte: Belfort e Vasconcelos (2006, p. 3)

4.7.6 Exercício de fixação

No exercício “**a**” explora-se a fração a partir de uma quantidade discreta, ou seja, de um conjunto com 12 elementos que é considerado como o inteiro e os subconjuntos com mesmo número de elementos são representados por meio de frações. Para encontrar as frações equivalentes compara-se a quantidade de elementos representados pelas frações e se essas quantidades forem iguais as frações correspondentes são equivalentes.

a) Representação de frações a partir da divisão de um conjunto com 12 elementos em subconjuntos

- Separe um conjunto de 12 peças de material de contagem (tampinhas, pequenos cubos do material dourado, retalhos de EVA, etc.), e realize as seguintes atividades:

1) Divida o conjunto de 12 peças do material escolhido em 1, 2, 3, 4, 6 e 12 partes iguais e preencha a Tabela 1.

2) Após preencher a Tabela 1, pinte todos os números que representam quantidades iguais da mesma cor e encontre as frações equivalentes;

Partes* Subconjuntos	Número de elementos em:											
	1 Parte**	2 partes**	3 partes**	4 partes**	5 partes**	6 partes**	7 partes**	8 partes**	9 partes**	10 partes**	11 partes**	12 partes**
1												
2												
3												
4												
6												
12												

* Quantidade de partes em que conjunto foi dividido
** Número de elementos em cada parte

Tabela 1 – Representações das partes do conjunto de 12 peças dividido em subconjuntos
Fonte: LIMC (2010)

Orientações para o Aplicador:

No exercício "**a**" o conjunto com 12 objetos é considerado como o inteiro. Portanto, a divisão em partes iguais não se refere a forma ou tamanho, mas sim, ao número de elementos em cada subconjunto

Para a resoluçao da atividade "**1**" do exercício "**a**" – preenchimento da Tabela 1, o conjunto com 12 elementos deverá ser dividido em 1, 2, 3, 4, 6 e 12 partes iguais em relação ao número de elementos, conforme mostram as Figuras 57, 58, 59, 60, 61 e 62.

Na figura 57 visualiza-se a divisão do conjunto de 12 elementos em uma parte, verificando que o número de elementos do subconjunto coincide com o próprio número de elementos do conjunto. Assim, o subconjunto do conjunto de 12 elementos dividido em uma parte corresponde a 12 elementos.

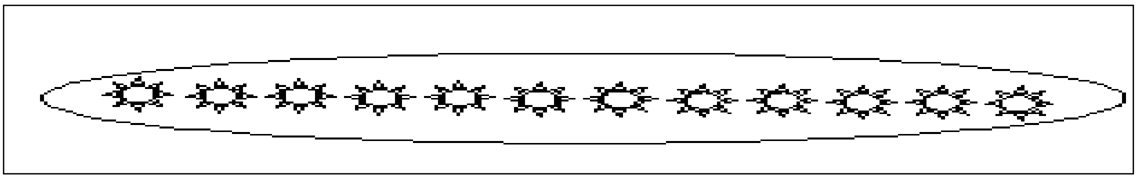


Figura 57 – Conjunto com 12 elementos dividido em uma parte
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Na figura 58 visualiza-se a divisão do conjunto de 12 elementos em 2 partes com 6 elementos em cada uma, ou seja, em dois subconjuntos com 6 elementos. Assim, em uma parte há 6 elementos e nas duas partes o total de elementos é 12.

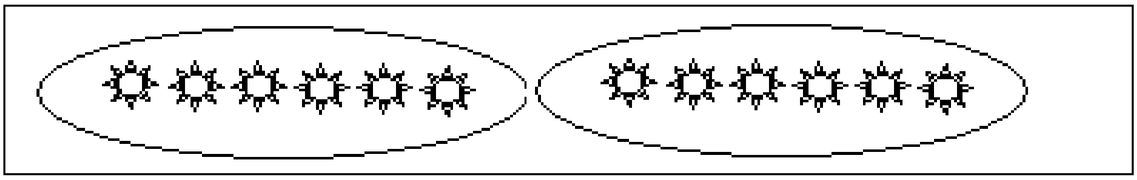


Figura 58 – Divisão do conjunto com 12 elementos em 2 subconjuntos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Na figura 59 visualiza-se a divisão do conjunto de 12 elementos em 3 partes com 4 elementos em cada uma, ou seja, em três subconjuntos com 4 elementos. Assim, em uma parte há 4 elementos, em duas partes há 8 elementos e nas 3 partes o total de elementos é 12.

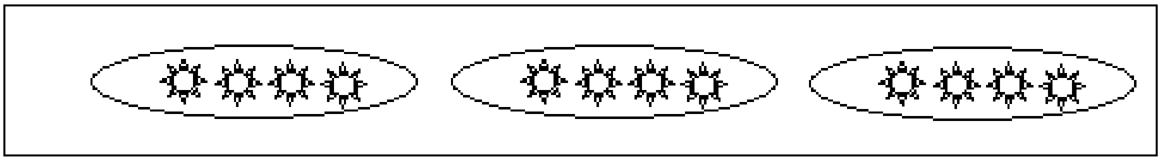


Figura 59 – Divisão do conjunto com 12 elementos em 3 subconjuntos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Na figura 60 visualiza-se a divisão do conjunto de 12 elementos em 4 partes com 3 elementos em cada uma, ou seja, em 4 subconjuntos com 3 elementos. Assim, em uma parte há 3 elementos, em duas partes 6 elementos, em 3 partes 9 elementos e nas 4 partes o total de elementos é 12.

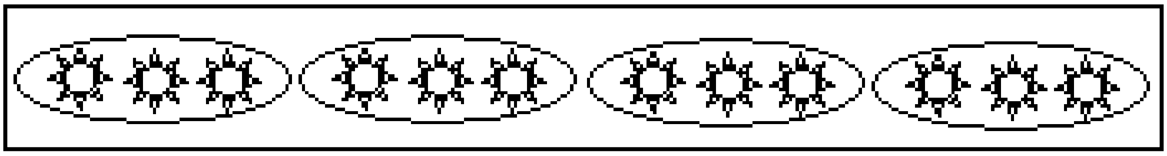


Figura 60 – Divisão do conjunto com 12 elementos em 4 subconjuntos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Na figura 61 visualiza-se a divisão do conjunto de 12 elementos em 6 partes com 2 elementos em cada uma, ou seja, em 6 subconjuntos com 2 elementos. Assim, em uma parte há 2 elementos, em duas partes 4 elementos, em 3 partes 6 elementos, em 4 partes 8 elementos e nas 6 partes o total de elementos é 12.

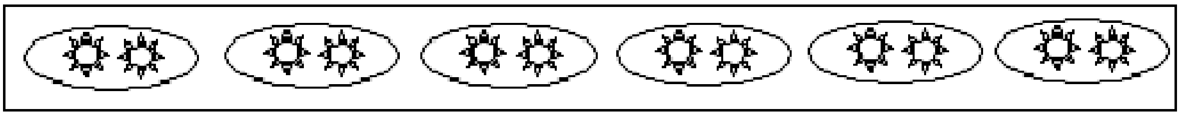


Figura 61- Divisão do conjunto com 12 elementos em 6 subconjuntos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Na figura 63 visualiza-se a divisão do conjunto de 12 elementos em 12 partes com um elemento em cada parte, ou seja, em 12 subconjuntos com 1 elemento. Assim, em uma parte há um elemento, em duas partes há 2 elementos, em 3 partes há 3 elementos, em 4 partes há 4 elementos, em 5 partes há 5 elementos, em 6 partes há 6 elementos, em 7 partes há 7 elementos, em 8 partes há 8 elementos, em 9 partes há 9 elementos, em 10 partes há 10 elementos, em 11 partes há 11 elementos e nas 12 partes o total de elementos é 12.

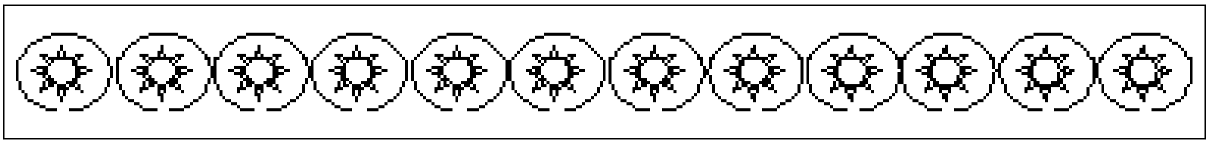


Figura 62 – Divisão do conjunto com 12 elementos em 12 subconjuntos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Após a divisão do conjunto de 12 objetos em 1, 2, 3, 4, 6 e 12 partes iguais, o professor cursista sistematiza a resposta da atividade “**1**” do exercício ”**a**” com o preenchimento Tabela 1 que ficou representada pela Figura 63.

Partes* Subconjuntos	Número de elementos em:											
	1 Parte**	2 partes**	3 partes**	4 partes**	5 partes**	6 partes**	7 partes**	8 partes**	9 partes**	10 artes**	11 partes**	12 partes**
1	12											
2	6	12										
3	4	8	12									
4	3	6	9	12								
6	2	4	6	8	10	12						
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

* Quantidade de partes em que conjunto foi dividido
** Número de elementos em cada parte
Figura 63 **–** Representação da Tabela 1 preenchida
Fonte: LIMC (2010)

Para resolver a atividade “**2**” do exercício “**a**”, identificando as frações equivalentes, o professor cursista inicialmente deverá pintar na Tabela 1 todos os números iguais com uma mesma cor, conforme mostra a Figura 64.

É interessante que o Aplicador oriente todos os cursistas a utilizarem a cor laranja, por exemplo, para pintar as quadrículas em que aparece o número 12; a cor lilás para pintar as quadrículas em que aparece o número 6. Isso facilita a comunicação do Aplicador com os cursistas e a visualização das frações equivalentes.

Número de partes em que foi dividido	Número de elementos em cada parte:											
	1 parte	2 partes	3 partes	4 partes	5 partes	6 partes	7 partes	8 partes	9 partes	10 partes	11 partes	12 partes
1	12											
2	6	12										
3	4	8	12									
4	3	6	9	12								
6	2	4	6	8	10	12						
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Figura 64 – Identificação das frações equivalentes identificadas na Tabela 1
Fonte: LIMC (2010)

Para facilitar a interpretação e análise dos dados, foi desmembrada a Tabela 1 (Figura 64) em linhas e obtêm-se frações relacionadas a cada número preenchido na Tabela 1, conforme disposto no Quadro 3,

<table>
<tr><th>Nº Linha</th><th>Cor da quadrícula/ Quantidade de elementos</th><th>Descrição</th></tr>
<tr><td>1ª Linha</td><td><table><tr><td>12</td></tr><tr><td>1</td></tr></table></td><td>Na primeira linha, observa-se a divisão do conjunto com 12 elementos em um subconjunto com 12 elementos ficando representado pela unidade, isso porque, esse subconjunto corresponde à representação do “inteiro”.</td></tr>
<tr><td>2ª Linha</td><td><table><tr><td>6</td><td>12</td></tr><tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{2}{2}$</td></tr></table></td><td>Na segunda linha, observa-se que o conjunto com 12 elementos foi dividido em duas partes, uma parte com 6 elementos representada pela fração $\frac{1}{2}$ e duas partes com 12 elementos representada pela fração $\frac{2}{2}$.</td></tr>
<tr><td>3ª Linha</td><td><table><tr><td>4</td><td>8</td><td>12</td></tr><tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$\frac{3}{3}$</td></tr></table></td><td>Na terceira linha, observa-se que o conjunto com 12 elementos foi dividido em três partes, uma parte com 4 elementos representada pela fração $\frac{1}{3}$, duas partes com 8 elementos representadas pela fração $\frac{2}{3}$ e 3 partes com 12 elementos representadas pela fração $\frac{3}{3}$.</td></tr>
<tr><td>4ª Linha</td><td><table><tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td></tr><tr><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{2}{4}$</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{4}{4}$</td></tr></table></td><td>Na quarta linha, observa-se que o conjunto com 12 elementos foi dividido em quatro partes, uma parte com 3 elementos representada pela fração $\frac{1}{4}$, duas partes com 6 elementos representadas pela fração $\frac{2}{4}$, 3 partes com 9 elementos representadas pela fração $\frac{3}{4}$, 4 partes com 12 elementos representadas pela fração $\frac{4}{4}$.</td></tr>
<tr><td>5ª Linha</td><td><table><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr><tr><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{2}{6}$</td><td>$\frac{3}{6}$</td><td>$\frac{4}{6}$</td><td>$\frac{5}{6}$</td><td>$\frac{6}{6}$</td></tr></table></td><td>Na quinta linha, observa-se que o conjunto com 12 elementos foi dividido em seis partes, uma com 2 elementos representada pela fração $\frac{1}{6}$, duas com 4 elementos representadas pela fração $\frac{2}{6}$, 3 partes com 6 elementos representadas pela fração $\frac{3}{6}$, 4 partes com 12 elementos representadas pela fração $\frac{4}{6}$, 5 partes com 10 elementos representadas pela fração $\frac{5}{6}$ de 12 = 6 elementos e 6 partes com 12 elementos representadas pela fração $\frac{6}{6}$.</td></tr>
<tr><td>6ª Linha</td><td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{2}{12}$</td><td>$\frac{3}{12}$</td><td>$\frac{4}{12}$</td><td>$\frac{5}{12}$</td><td>$\frac{6}{12}$</td><td>$\frac{7}{12}$</td><td>$\frac{8}{12}$</td><td>$\frac{9}{12}$</td><td>$\frac{10}{12}$</td><td>$\frac{11}{12}$</td><td>$\frac{12}{12}$</td></tr></table></td><td>Na sexta linha, observa-se que o conjunto com 12 elementos foi dividido em 12 partes, uma parte com 1 elemento representada pela fração $\frac{1}{12}$, duas partes com 2 elementos representadas pela fração $\frac{2}{12}$, e assim, sucessivamente, até 12 partes com 12 elementos representadas pela fração $\frac{12}{12}$.</td></tr>
</table>

Quadro 3 – Representação das frações obtidas na divisão dos subconjuntos
Fonte: Adaptado do LIMC (2010)

Como as frações que correspondem às mesmas quantidades são equivalentes, e como cada cor está associada a um mesmo número, o processo de identificação fica facilitado conforme se visualiza na Figura 65.

COR DA QUADRÍCULA/QUANTIDADE DE ELEMENTOS	FRAÇÕES REPRESENTADAS POR QUANTIDADES IGUAIS DE ELEMENTOS
2	$\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{12}$
3	$\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{12}$
4	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{12}$
6	$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{6}{12}$
8	$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$
9	$\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$
10	$\frac{5}{6}$ e $\frac{10}{12}$
12	1, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{6}$ e $\frac{12}{12}$

Figura 65 – Frações equivalentes encontradas na divisão do conjunto de 12 elementos
Fonte: LIMC (2010)

Portanto, na atividade "**2**" do exercício "**a**", as frações equivalentes entre si são aquelas que, a partir da divisão do conjunto com 12 elementos, representam a mesma quantidade de elementos. São elas:

$$\frac{1}{4}\ e\ \frac{3}{12}$$
$$\frac{1}{6}\ e\ \frac{2}{12}$$
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\ e\ \frac{6}{12}$$
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\ e\ \frac{4}{12}$$
$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}\ e\ \frac{8}{12}$$
$$\frac{3}{4}\ e\ \frac{9}{12}$$
$$\frac{5}{6}\ e\ \frac{10}{12}$$

$$1, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{6} \; e \; \frac{12}{12}$$

b) Fração de um todo discreto

- Considere um conjunto com 15 elementos como sendo o inteiro e responda:

1) Quantos elementos correspondem a $\frac{7}{5}$ desse conjunto?

2) Quantos elementos correspondem a $\frac{1}{4}$ desse conjunto? Se os elementos desse conjunto fossem alunos essa representação poderia ser realizada? E se os elementos desse conjunto fossem maçãs essa representação poderia ser realizada? Justifique a resposta.

Orientações para o Aplicador

Antes de determinar $\frac{7}{5}$ de um conjunto de 15 elementos, é importante observar que esta fração representa uma quantidade maior do que um inteiro, ou seja, é uma fração imprópria.

Como o exercício refere-se a grandezas discretas, as quais se referem a algo que se pode associar um valor numérico resultante de uma contagem (por exemplo, o resultado de quantas tampinhas de refrigerantes, ou de quantos palitos de picolé)[8], a visualização pode ser realizada por meio da representação de um conjunto de objetos. Assim, para a resolução do exercício "**b**", foi escolhida uma figura que apresenta um conjunto de 15 estrelas, ou seja, 15 elementos do mesmo tipo, conforme mostra a Figura 66.

---

[8] Conceito citado por Vasconcelos e Barbosa (2010, p. 3)

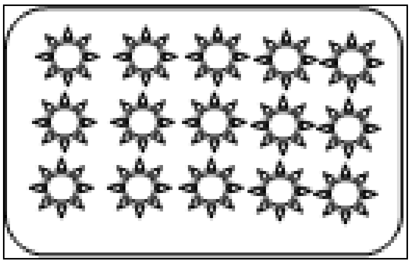


Figura 66 – Representação de um conjunto de 15 elementos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Para determinar $\frac{7}{5}$ do conjunto, inicia-se dividindo o conjunto de 15 elementos em 5 partes, obtendo-se subconjuntos com o mesmo número de elementos, conforme ilustra a Figura 67.

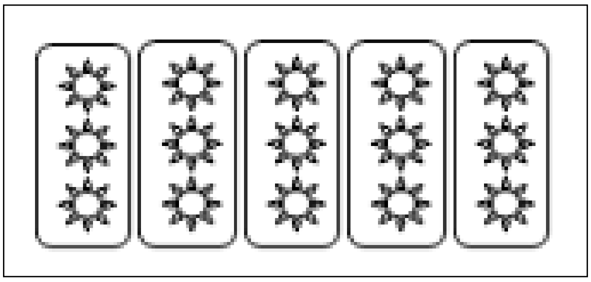


Figura 67 – Divisão do conjunto de 15 elementos em cinco subconjuntos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Dividindo-se o conjunto de 15 elementos em 5 subconjuntos, cada subconjunto corresponde a 3 elementos e é representado pela fração $\frac{1}{5}$, conforme se visualiza na Figura 68.

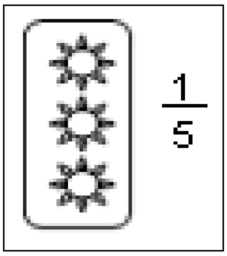


Figura 68– Um subconjunto do conjunto de 15 elementos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

E para resolver a atividade "**1**" do exercício "**b**" é necessário encontrar $\frac{7}{5}$ de um conjunto de 15 elementos. Sabendo-se que uma parte do conjunto de 15 elementos corresponde a 3 elementos, tem-se como solução a adição das sete partes: $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ que é igual a $\frac{7}{5}$, conforme se visualiza na Figura 69.

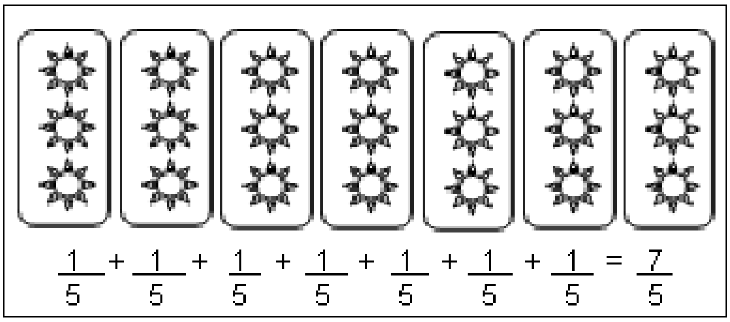


Figura 69 – Representação de sete subconjuntos de 3 elementos
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

No entanto, para calcular $\frac{7}{5}$ de um conjunto de 15 elementos encontram-se no máximo 5 grupos com três elementos sendo representados pela fração $\frac{5}{5}$, portanto a fração $\frac{7}{5}$ representa uma quantidade de subconjuntos que excede o total de subconjuntos do conjunto de 15 elementos.

Assim, para representar a fração $\frac{7}{5}$ se faz necessário um conjunto inteiro de 15 elementos, mais dois subconjuntos de outro conjunto de 15 elementos. O número de elementos da fração $\frac{7}{5}$ corresponde à operação: $\frac{7}{5}$ de 15 = 21. Este número de elementos é maior do que a quantidade de elementos do conjunto considerado. Isso acontece sempre que a fração é maior do que a unidade, ou seja, quando a fração é imprópria.

Para representar $\frac{1}{4}$ do conjunto de 15 elementos, divide-se o conjunto de 15 elementos em 4 partes, resultando em quatro subconjuntos de 3 elementos cada um e restando 3 elementos. Cada um dos 3 elementos restantes é dividido em 4 partes iguais, totalizando 12 pedaços. Cada um desses pedaços corresponde a $\frac{1}{4}$ do elemento inicial.

Redistribuindo-se os 12 pedaços do “tipo” $\frac{1}{4}$ em 4 partes, cada subconjunto fica com $\frac{3}{4}$ de um inteiro. Portanto $\frac{1}{4}$ de um conjunto de 15 elementos corresponde a três inteiros e três quatros (3 $\frac{3}{4}$), conforme se visualiza na Figura 70.

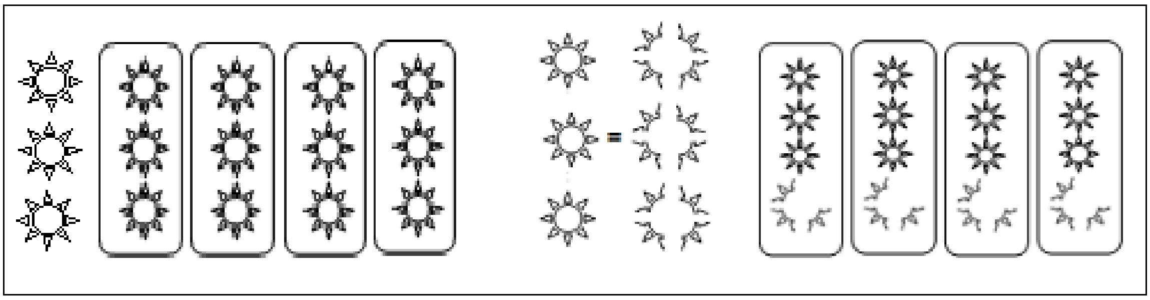


Figura 70 – Divisão de um conjunto de 15 elementos em 4 partes iguais
Fonte: Adaptado LIMC (2010)

Logo $\frac{1}{4}$ de um conjunto de 15 elementos resulta em três inteiros e três quartos ($3\frac{3}{4}$). É importante observar neste tipo de exercício que esta resolução somente é possível quando são considerados elementos que possam de fato serem divididos como tortas, pães, chocolates ou frutas**;** para determinar três inteiros e três quartos ($3\frac{3}{4}$) de 15 pessoas ou de 15 cães não é possível, uma vez que não se dividem pessoas ou cães.

Com a Oficina 7 conclui-se o curso, e orienta-se o Aplicador a solicitar aos professores uma avaliação das atividades realizadas durante o curso em relação à dinâmica de trabalho e conceitos trabalhados. Registrar no Diário Coletivo os principais aspectos abordados, dúvidas, contribuições e curiosidades.

CONSIDERAÇÕES

Após ministrar este curso, a autora percebeu que, o aprofundamento conceitual e algorítmico do conteúdo de frações foi o eixo articulador para que os professores pudessem ensinar mais e os alunos aprenderem melhor. A proposta inicial não era que os professores fizessem a aplicação imediata dos conceitos abordados com seus alunos, mas no encontro final os professores relataram como iniciaram o trabalho com frações em suas turmas e, nos relatos, ficou claro que, quando o professor participa de cursos de formação que proporcionem a relação entre a teoria e a prática pedagógica, o resultado é a alegria e satisfação de ensinar e aprender.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término da apresentação deste Caderno Pedagógico gostaríamos de ressaltar que a formação continuada de professores é um desafio que se apresenta quando a pretensão é um ensino de Matemática voltado para a compreensão de conceitos a partir de uma abordagem que valorize tanto a prática social, quanto o conhecimento historicamente produzido.

Por muito tempo, o conhecimento Matemático englobou inúmeros saberes que eram estudados de forma esparsa e desarticulados, conforme explica Fiorentini (2001), e por isso, apenas "o conhecimento da Matemática e a experiência do magistério não garantem competência a qualquer profissional que nela trabalhe" (DCE, 2006, p. 23). Esta é portanto, a razão de hoje, o desafio que se apresenta ao professor consiste em centrar a prática pedagógica relacionando ensino, aprendizagem e conhecimento matemático.

Conforme Miguel et al (2004, p. 70, 71) o fato do objeto de estudo da Educação Matemática ainda estar em construção, os cursos acadêmicos de formação de professores não estão suprindo a contento a necessidade do professor conceber a Matemática como um "conjunto de resultados, métodos, procedimentos, algoritmos, etc.". Ao mesmo tempo, não capacitam o professor para construir por "intermédio do conhecimento matemático, valores e atitudes de natureza diversa, visando à formação integral do ser humano e, particularmente, do cidadão, isto é, do homem público".

Analisando a trajetória histórica da matemática como saber pedagógico, percebe-se que o ensino da disciplina de Matemática passou por diferentes orientações pedagógicas culminando na tendência histórico-crítica que influenciou para que a LDB e os PCN lançassem propostas educacionais que formassem alunos críticos capazes de agir com "autonomia nas suas relações sociais" e, para isso, é necessário que ele se aproprie também de conhecimentos matemáticos.

Estas propostas exigem acima de tudo, diferentes estratégias de ensino de forma a possibilitar que alunos e professores tornem a sala de aula, não um local de transmissão e aquisição de saber, mas sim, um ambiente de discussão, de criticidade, de integração entre o conhecimento escolar e o conhecimento da vida, de construção de um saber que não está pronto e acabado. Na capacitação suficiente para atingir estas propostas, segundo pesquisadores como Schön (2000), Feldman (2009), Altet e Perrenoud e Paquay (2003) entre outros, considera-se a formação contínua do professor como uma das condições indispensáveis.

Segundo Fonseca (1997, p. 19) há necessidade de um trabalho efetivo que “instrumentalize o professor para tornar-se juntamente com o aluno, agentes ativos, críticos e reflexivos no processo ensino-aprendizagem”.

Nesse sentido, o presente Caderno Pedagógico pode contribuir para a formação de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental a partir do aprofundamento conceitual do conteúdo de frações e de estratégias de ensino e fica disponibilizado para o uso irrestrito dos que buscam alternativas para a prática pedagógica, no sentido de promover um ensino voltado para a compreensão de conceitos e algoritmos, e não de apresentar modelos prontos e/ou acabados.

REFERÊNCIAS

ALTET, M.; PERRENOUD, P.; PAQUAY, L. **A profissionalização dos formadores de professores.** Tradução de Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2003.

BELFORT, E.; VASCONCELOS, C. B. Diferentes significados de um mesmo conceito – o caso das frações. In: LIMC Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e de Ciências. Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Pró Letramento Matemática – Estado de Minas Gerais. **Sugestões de estudo para frações** - 1º Encontro. (2006). Disponível em: <http:√www.limc.ufrj.br/rede/mod/resource/view.php?id=855>. Acesso em 10 jan. 2011.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. 3. ed. Brasília, 1997.

CANEN, A.Formação de professores e diversidade cultural. In: CANDAU, V. M. (org.). **Magistério** – construção cotidiana. 6. ed. Petrópolis: Vozes, 2008, p. 205-236.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática** – ensino fundamental – Livro do professor. São Paulo: Ática, 2005.

DCE - Diretrizes Curriculares da Educação Fundamental da Rede de Educação Básica do Estado do Paraná. Curitiba – Estado do Paraná. Secretaria do Estado da Educação: 2006.

FELDMANN, M. G. (org.). **Formação de professores e escola na contemporaneidade**. São Paulo: SENAC São Paulo, 2009.

FERREIRA, V. l. **Metodologia do ensino de matemática -** história, currículo e formação de professores. São Paulo: Cortez, 2011.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetikê**. São Paulo, Campinas, n. 4, ano 3, nov./1995, p. 1-37.

_____ (org.) **Formação de professores de matemática -** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

_____, CASTRO, F. C. de. Tornando-se professor de matemática – o caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. IN: FIORENTI, D. (org.) **Formação de professores de matemática** – explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003, p. 121-156.

_____; NACARATO, A. M.; PINTO, R. A.. Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada. **Quadrante.** São Paulo, n. 8, 1999, p. 33-60.

FONSECA, S. **Metodologia de ensino matemática**. Rio de Janeiro: Lê, 1997.

FREIRE, M. O que é um grupo? In: GROSSI, E. P.; BORDIN, J. (orgs) **Paixão de aprender**. Petrópolis: Vozes, 1995.

FRIGOTTO, G. A. A formação e profissionalização do educador: novos desafios. In: SILVA, T. T. GENTILI, P. **Escola S.A**.: quem ganha e quem perde no mercado educacional do neoliberalismo. Brasília: CNTE, 1996.

KUENZER, A. Estágio Curricular: um momento de integração entre teoria e prática? **Cadernos de Estágio**. Curitiba: UFPR, 1992.

LIMC. Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e de Ciências. Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Material Pró Letramento – Fascículo 4 – Frações. **Roteiro de estudos de frações** – comentários sobre as atividades propostas. (2010) Disponível em: <HTTP:√www.limc.ufrj.br/rede/mod/resource/view.php?id=855>. Acesso em 10 jan. 2011.

LINS, R. C.; SILVA, H. Fascículo de Frações do Curso Pró-Letramento Matemática. Fascículo 4. In: BRASIL. Ministério da Educação. Pró Letramento **– Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental – Matemática –Frações**.Brasília: MEC, 2008.

MEDIANO, Z. D.; A formação em serviço de professores através de oficinas pedagógicas. In: In: CANDAU, V. M. (Org.). **Magistério** – construção cotidiana. 6. ed. Petrópolis: Vozes, 2008, p. 91-109.

MENEZES, E. T. de; SANTOS, T. H. dos. Reforma Francisco Campos. **Dicionário Interativo da Educação Brasileira - EducaBrasil**. São Paulo: Midiamix, 2002. Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=372>. Acesso em: 03 jan. 2012.

MIGUEL, A. et al. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, 2004, p. 70-93.

MOREIRA, M.A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud** - o ensino de ciências e as investigações nessa área. Rio Grande do Sul: instituto de Física – UFRS, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **Números Racionais** - conhecimentos da Matemática, Rio Claro, n. 21, p.1-19. 2010.

_____.; _____. **A formação matemática do professor -** licenciatura e prática docente escolar. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

RAMOS, l. F. **Conversa sobre números, ações e operações** – uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos. São Paulo: Ática, 2009.

SBEM- Sociedade Brasileira de Educação de Educação Matemática. (2009) **Educação Matemática**. Disponível em: <www.matematicahoje.com.br/telas/mat_educ.asp>. Acesso em: 10 dez. 2011.

SCHASTAI, M. B. O ensino da matemática e o uso da linguagem escrita - o caso da resolução de um problema envolvendo o conceito de fração. **Artigo**. 2010. Disponível em: <pg.utfpr.edu.br/.../Programacao%20Apresentacao%20de%20Artigos>.\Acesso em 10 ago. 2011.

SCHÖN, D. A. Formar professores como reflexivos. In: NÓVOA, A. **Os professores e sua formação.** Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1992.

_____. **Educando o profissional reflexivo** – um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SILVA, M. J. F. da. **Sobre a introdução do conceito de números fracionários**. 1997, 245f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC. São Paulo.

SILVA, C. M. S. da, **A matemática positivista e sua difusão no Brasil.** Vitória: EDUFES, 1999.

SOUZA, R. A. de. **Infantil – explosão de ideias.** Disponível em: <http://www.juerp.org.br/index.php?oid=11&cid=35>. Acesso em: 01 ago. 2011.

TARDIF, M.; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Revista Educação & Sociedade**, ano XXI, n. 73, dez./2000, p. 209-244. Disponível em: <www.scielo.br/pdf/es/v21n73/4214.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2011

VASCONCELOS, C. B. ; BARBOSA, G. O. **Cadernos de Aritmética** - Grupo Fedathi **-** Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (2010). Disponível em: <www.multimeios.ufc.br/.../fedathi-cadernos-de-aritmética-fracoes.pdf>. Acesso em 10 fev. 2012.