

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
ENGENHARIA MECÂNICA

VINICIUS GASPAR

ANÁLISE DE TÉCNICAS DE REFINO H-ADAPTATIVO EM MEF
UTILIZANDO ESTIMATIVAS DE ERRO A POSTERIORI EM
PROBLEMAS DE ELASTICIDADE UNIDIMENSIONAL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LONDRINA

2018

VINICIUS GASPAR

**ANÁLISE DE TÉCNICAS DE REFINO H-ADAPTATIVO EM MEF
UTILIZANDO ESTIMATIVAS DE ERRO A POSTERIORI EM
PROBLEMAS DE ELASTICIDADE UNIDIMENSIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Engenheiro Mecânico, do Departamento de Engenharia Mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Diego Amadeu Furtado Torres

Co-orientador: Prof. MSc. Jéderson da Silva

LONDRINA

2018



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina
Diretoria do Campus Londrina
Departamento de Engenharia Mecânica
Engenharia Mecânica



TERMO DE APROVAÇÃO

**ANÁLISE DE TÉCNICAS DE REFINO H-ADAPTATIVO EM MEF UTILIZANDO
ESTIMATIVAS DE ERRO A POSTERIORI EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE
UNIDIMENSIONAL**

por

VINICIUS GASPAR

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado em 02 de Julho de 2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

(Prof. Dr. Diego Amadeu Furtado Torres)
Prof. Orientador

(Prof. Dr. João Luiz do Vale)
Membro titular

(Prof. Dr. Rafael Sene Lima)
Membro titular

**- O TERMO DE APROVAÇÃO ASSINADO ENCONTRA-SE NA COORDENAÇÃO
DO CURSO -**

RESUMO

GASPAR, V. *Análise de técnicas de refino h-adaptativo em MEF utilizando estimativas de erro a posteriori em problemas de elasticidade unidimensional*. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

Encontrar soluções exatas para problemas de valores no contorno, na modelagem de sistemas físicos em problemas de engenharia, pode ser muito complexo ou mesmo impossível. Então, o Método de Elementos Finitos (MEF) é uma alternativa disponível para a obtenção de soluções aproximadas. Primeiramente, este trabalho pretende estudar erros de discretização em análises por elementos finitos usando estimativas de erro a posteriori baseadas em métodos de recuperação de tensão: a Média Nodal Simples (MNS), o procedimento de Zienkiewicz-Zhu (ZZ), e a técnica de Recuperação Super-convergente em Subdomínios (SPR). Para isto, o problema unidimensional de elasticidade linear é considerado. Outro aspecto de interesse é estudar o comportamento de duas estratégias de refinamento h-adaptativo, o método clássico Ch^p e a recém apresentada técnica de Recuperação Isotrópica da Densidade de Erro (RQE), considerando estes três estimadores de erros. Verificando a performance dos estimadores é possível notar como cada técnica de recuperação se comporta, no caso de refino regular aninhado, para alguns graus de funções de forma, sendo esta etapa executada objetivando verificação de código. Estes primeiros resultados mostram que as estimativas são diretamente influenciadas pelo grau do elemento e pelo número de elementos na malha. Além disso, para os processos adaptativos, foram identificadas situações particulares nas quais a nova metodologia RQE intensifica o refinamento de malha, conduzindo a um consumo maior de graus de liberdade. Para outro caso particular, o método Ch^p fornece malhas com mais elementos se comparado à metodologia RQE. Tais situações dependem de características do campo de tensões recuperado e da aproximação original em tensão num dado elemento. Além disso, a imposição adicional de restrições sobre o novo tamanho elementar parece influenciar positivamente ambas metodologias, reduzindo alguns refinamentos de malha proibitivos.

Palavras-chaves: Método de Elementos Finitos. Métodos de Recuperação. Refinamento h-adaptativo.

ABSTRACT

GASPAR, V. *Analysis of adaptive h-refinement techniques in FEM using a posteriori error estimators for one-dimensional elasticity*. Course Conclusion Work - Federal Technology University - Parana. Londrina, 2018.

Finding the exact solution for boundary value problems, in physical systems modeling for engineering purposes, can be complex or even impossible. Then, the Finite Element Method (FEM) is an available alternative to obtain approximating solutions. Primarily, this work aims to study discretization error in FEM analysis using a posteriori error estimates based on stress recovery methods: the Simple Nodal Stress Averaging, the Zienkiewicz-Zhu (ZZ), and the Superconvergent Patch Recovery (SPR) techniques. For this, the one-dimensional problem of linear elasticity is considered. Other aspect of concern is to study the behavior of two adaptive h-refinement strategies, the classical Ch^p and the novel Isotropic Error Density Recovery (IEDR) technique, considering these three errors estimators. By verifying the error estimators performance it is possible to note how each recovery technique behaves in case of regular nested h-refinement, for some degrees of shape functions, being this step carried out aiming for code verification. These first results show that the estimates are directly influenced by the element degree and the number of elements in the mesh. Further, for the adaptive h-refinement processes, it was found an specific situation in which the novel IEDR methodology intensify the mesh refinement, leading to more degrees of freedom. For other particular case, the Ch^p provides meshes with more elements if compared to the IEDR methodology. Such situations depend on the features of the recovered stress field and the original stress approximation in a given element. Moreover, imposing some additional restrictions on the new element size seems to influence positively the both approaches, reducing some prohibitive mesh refinements.

Key-words: Finite Elements Method. Recovery Methods. h-adaptive refinement.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Exemplo de refino h-adaptativo em um problema de elasticidade onde se busca obter a distribuição de tensão no domínio. Tem-se malha inicial com 3 elementos (a), primeiro refino gerando 39 elementos na malha (b) e a malha ótima para o problema com 60 elementos (c).	18
Figura 2	– (a) Problema de elasticidade unidimensional em barra deformável e (b) configuração deformada do sistema.	21
Figura 3	– Elemento finito linear contendo dois nós, cada um deles associado a uma função de forma de aproximação linear, definida no domínio elementar Ω_{el}	24
Figura 4	– Exemplo da recuperação de gradiente utilizando a MNS para uma malha com dois elementos lineares.	34
Figura 5	– Exemplo da recuperação de gradiente utilizando a recuperação ZZ para uma malha com dois elementos lineares de tamanhos distintos.	35
Figura 6	– Exemplo da expansão polinomial em um subdomínio formado por elementos lineares.	37
Figura 7	– Construção de uma função deformação recuperada em um elemento linear.	40
Figura 8	– Exemplificação do escalamento presente na geração da nova malha adaptada.	46
Figura 9	– Barra engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um carregamento axial distribuído ao longo do comprimento.	47
Figura 10	– Carregamento linear.	47
Figura 11	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ para um carregamento linear.	49
Figura 12	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ para um carregamento linear.	50
Figura 13	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 2$ para um carregamento linear.	51
Figura 14	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 2$ para um carregamento linear.	52
Figura 15	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 3$ para um carregamento linear.	53
Figura 16	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 3$ para um carregamento linear.	54
Figura 17	– Comparação entre as curvas de convergência do erro relativo em energia para as malhas contendo elementos lineares, quadráticos e cúbicos obedecendo a um refino aninhado para um carregamento linear.	55
Figura 18	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via MNS para um carregamento linear.	56
Figura 19	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via ZZ para um carregamento linear.	57

Figura 20	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via SPR para um carregamento linear.	58
Figura 21	– Comparação entre o desenvolvimento dos índices de efetividade na situação de refino aninhado e diferentes graus elementares para as estimativas baseadas na recuperação (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR para um carregamento linear.	59
Figura 22	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.	61
Figura 23	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.	63
Figura 24	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2%.	65
Figura 25	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2%.	67
Figura 26	– Carregamento quadrático.	69
Figura 27	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ para um carregamento quadrático.	70
Figura 28	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ para um carregamento quadrático.	71
Figura 29	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 2$ para um carregamento quadrático.	72
Figura 30	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 2$ para um carregamento quadrático.	73
Figura 31	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 3$ para um carregamento quadrático.	74
Figura 32	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 3$ para um carregamento quadrático.	75
Figura 33	– Comparação entre as curvas de convergência do erro relativo em energia para os malhas contendo elementos lineares, quadráticos e cúbicos obedecendo a um refino aninhado para um carregamento quadrático.	76
Figura 34	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via MNS para um carregamento quadrático.	77

Figura 35	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via ZZ para um carregamento quadrático.	78
Figura 36	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via SPR para um carregamento quadrático.	79
Figura 37	– Comparação entre o desenvolvimento dos índices de efetividade na situação de refino aninhado e diferentes graus elementares para as estimativas baseadas na recuperação (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR para um carregamento quadrático.	80
Figura 38	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.	82
Figura 39	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.	84
Figura 40	– Comparação entre as técnicas de refino adaptativo em termos de intensidade de refinamento de tamanho de elemento, dada pela razão $\frac{h_{new}}{h_{old}}$ em função do parâmetro de refinamento ξ	87
Figura 41	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.	88
Figura 42	– Carregamento senoidal.	91
Figura 43	– Comparação entre as curvas de convergência do erro relativo em energia para os malhas contendo elementos lineares, quadráticos e cúbicos obedecendo a um refino aninhado para um carregamento senoidal.	92
Figura 44	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via MNS para um carregamento senoidal.	93
Figura 45	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via ZZ para um carregamento senoidal.	94
Figura 46	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via SPR para um carregamento senoidal.	95
Figura 47	– Comparação entre o desenvolvimento dos índices de efetividade na situação de refino aninhado e diferentes graus elementares para as estimativas baseadas na recuperação (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR para um carregamento senoidal.	96
Figura 48	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento senoidal.	97

Figura 49	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento senoidal.....	100
Figura 50	– Comparação entre as técnicas de refino adaptativo em termos de intensidade de refinamento do tamanho de elemento, caracterizada pela razão $\frac{h_{new}}{h_{old}}$ em função do parâmetro de refinamento ξ	103
Figura 51	– Barra engastada nas duas extremidades, submetida a um carregamento distribuído ao longo do comprimento.	104
Figura 52	– Carregamento Novotny.	105
Figura 53	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ para o carregamento Novotny.	106
Figura 54	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ para o carregamento Novotny.....	107
Figura 55	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 2$ para o carregamento Novotny.	108
Figura 56	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 2$ para o carregamento Novotny.....	109
Figura 57	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 3$ para o carregamento Novotny.	110
Figura 58	– Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 3$ para o carregamento Novotny.....	111
Figura 59	– Comparação entre as curvas de convergência do erro relativo em energia para os malhas contendo elementos lineares, quadráticos e cúbicos obedecendo a um refino aninhado para o carregamento Novotny.....	112
Figura 60	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via MNS no caso do carregamento Novotny.	113
Figura 61	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via ZZ no caso do carregamento Novotny.	114
Figura 62	– Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c)12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via SPR no caso do carregamento Novotny.	115
Figura 63	– Comparação entre o desenvolvimento dos índices de efetividade na situação de refino aninhado e diferentes graus elementares para as estimativas baseadas na recuperação (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR no caso do carregamento Novotny.....	116
Figura 64	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.	117

- Figura 65 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny..... 119
- Figura 66 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny. 122

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear para um carregamento linear.	62
Tabela 2	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.	64
Tabela 3	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.	66
Tabela 4	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.	68
Tabela 5	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.	83
Tabela 6	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.	85
Tabela 7	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.	89
Tabela 8	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento senoidal.	98
Tabela 9	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento senoidal.	101
Tabela 10	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.	118
Tabela 11	– Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.	120

Tabela 12 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny. 123

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método de Elementos Finitos
MEFG	Método de Elementos Finitos Generalizados
MNS	Média Nodal Simples
ZZ	Zienkiewicz e Zhu
SPR	Superconvergent Patch Recovery ou Recuperação por Super Convergência em Subdomínios
IEDR	Isotropic Error Density Recovery ou Recuperação Isotrópica da Densidade de Erro.
SPRE	Super Convergência em Subdomínios utilizando Condições de Equilíbrio
SPREB	Super Convergência em Subdomínios utilizando Condições de Equilíbrio e Contorno
REP	Recuperação por Equilíbrio em Subdomínios
RCP	Recuperação de Campo em Subdomínios
SPR-C	Constrained Superconvergent Patch Recovery ou Recuperação por Super Convergência em Subdomínios Restringida.

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	domínio unidimensional no qual o problema está definido
$A(x)$	função área de seção transversal da barra
$E(x)$	função módulo de elasticidade da barra
$b(x)$	função carregamento externo axialmente distribuído
$u_o(x)$	função deslocamento exato
$\varepsilon_o(x)$	função deformação exata
$\sigma_o(x)$	função tensão exata
$w_o(x)$	função ponderação associada a função deslocamento exato
\mathcal{B}	forma bilinear contínua
\mathcal{F}	funcional linear contínuo
\mathcal{U}_o	espaço de Hilbert associado às funções admissíveis para $u_o(x)$
\mathcal{W}_o	espaço de Hilbert associado às funções ponderação para $w_o(x)$
$u(x)$	função deslocamento aproximado
$w(x)$	função ponderação associada a função deslocamento aproximado
\mathcal{U}	subespaço de funções associadas a $u(x)$ contidos em \mathcal{U}_o
\mathcal{W}	subespaço de funções associadas a $w(x)$ contidos em \mathcal{W}_o
n	número de nós na malha
k	k-ésimo nó da malha
$N_k(x)$	função de aproximação associada ao nó k
\bar{u}_k	coeficiente correspondente ao nó k associado à variável de interesse do problema
\bar{w}_k	coeficiente correspondente ao nó k associado à função ponderação
\mathbf{N}	vetor global de funções de forma de aproximação
\mathbf{U}	vetor global de coeficientes nodais associados à variável de interesse
\mathbf{W}	vetor global de coeficientes nodais associados à função ponderação
el	elemento finito arbitrário
\mathbf{K}^{el}	matriz de rigidez local correspondente ao elemento el
\mathbf{F}^{el}	vetor de carregamento local correspondente ao elemento el

B^{el}	vetor local de derivadas das funções de forma associadas ao elemento el
N^{el}	vetor local de funções de forma associadas ao elemento el
K	matriz de rigidez global
F	vetor de carregamento global
$\ u\ $	energia de deformação global do sistema baseada na solução aproximada
$e_u(x)$	função erro em termos de deslocamento
$e_\sigma(x)$	função erro em termos de tensão
$e_\varepsilon(x)$	função erro em termos de deformação
$\ e_u\ _E$	norma energia do erro
m	número de elementos na malha
η	erro relativo global
$\ u_o\ $	energia de deformação exata do sistema
$\ e_u^*\ _E$	norma energia do erro estimado
$u^*(x)$	função deslocamento recuperada
θ	índice de efetividade
$\ e'_u\ _E$	norma energia do erro da solução recuperada em comparação com a solução exata
p	grau polinomial das funções de aproximação no elemento
h	tamanho do elemento finito
α	coeficiente associado à singularidade
N_{el}	número de elementos que fazem fronteira com o nó de análise
σ_n^*	tensão recuperada em um nó de análise
σ_{rec}	vetor de tensões recuperadas nos nós da malha
M^{el}	matriz de massa local
S^{el}	vetor que contém informação da tensão local
M	matriz de massa global
S	vetor que contém informação da tensão global
σ_p^*	expansão polinomial em um subdomínio
P	vetor de termos polinomiais associados à expansão
a	vetor contendo um conjunto de parâmetros associados a expansão

nps	número total de pontos super convergentes em um subdomínio
A	matriz de termos polinomiais associados à expansão
b	vetor que contém informação do campo de tensões aproximado em um subdomínio
η'	erro relativo prescrito
e_m	máximo erro admissível em um elemento
$(\ e_u\ _E)_{el}^{old}$	norma energia do erro em um elemento el da malha corrente
ξ_{el}	parâmetro de refinamento elementar
h_{new}	novo tamanho para o elemento el
h_{old}	tamanho do elemento el na malha corrente
ε_1^*	deformação recuperada no nó 1 de um elemento linear de dimensão genérica
ε_2^*	deformação recuperada no nó 2 de um elemento linear de dimensão genérica
h_o	tamanho genérico de um elemento linear
\bar{B}_o	coeficiente associado à média entre os valores nodais de deformação em um elemento linear genérico
\bar{B}_1	coeficiente associado a diferença entre os valores nodais de deformação em um elemento linear genérico em relação ao tamanho elementar h_o
\bar{x}	sistema de coordenadas normalizado no elemento linear genérico
$\Delta\mu(\bar{x})$	função densidade de energia de deformação em um elemento linear genérico
$\Delta\mu_o^e$	coeficiente relacionado ao termo constante da função $\Delta\mu(\bar{x})$
g^e	coeficiente relacionado ao termo linear da função $\Delta\mu(\bar{x})$
H^e	coeficiente relacionado ao termo quadrático da função $\Delta\mu(\bar{x})$
$E(h)$	erro total em energia definido em um elemento linear de dimensão genérica
E_{new}	erro total em energia definido em um elemento linear da nova malha
η^*	erro relativo global estimado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	OBJETIVO	19
2.1	OBJETIVO GERAL	19
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	19
3	JUSTIFICATIVA	20
4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
4.1	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	21
4.2	ERROS DE SOLUÇÃO	25
4.3	ESTIMATIVAS DE ERRO POR RECUPERAÇÃO	26
4.4	REFINO ADAPTATIVO DE MALHA	28
5	FORMULAÇÃO DOS ESTIMADORES DE ERRO E DAS TÉCNICAS DE REFINO H-ADAPTATIVO	30
5.1	ESTIMATIVA DO ERRO BASEADA NA NORMA EM ENERGIA	30
5.2	ESTIMATIVAS DE ERRO POR RECUPERAÇÃO	31
5.3	ÍNDICE DE EFETIVIDADE	32
5.4	RECUPERAÇÃO BASEADA NA MÉDIA NODAL SIMPLES (MNS)	33
5.5	RECUPERAÇÃO SEGUNDO ZIENKIEWICZ E ZHU	35
5.6	RECUPERAÇÃO BASEADA EM SUPER CONVERGÊNCIA EM SUBDOMÍNIOS	36
5.7	DEFINIÇÃO DO CRITÉRIO DE REFINAMENTO E DE OTIMALIDADE DE MALHA	38
5.8	ESTRATÉGIAS DE REFINO ADAPTATIVO DE MALHA	39
5.8.1	Metodologia Ch^p	39
5.8.2	Metodologia IEDR	39
6	METODOLOGIA	43
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	45
7.1	CASO 1 - CARREGAMENTO LINEAR	47
7.1.1	Verificação da formulação implementada	48
7.1.2	Estimativa de erro a posteriori	56
7.1.3	h-Adaptatividade	60
7.2	CASO 2 - CARREGAMENTO QUADRÁTICO	69
7.2.1	Verificação da formulação implementada	70
7.2.2	Estimativa de erro a posteriori	76
7.2.3	h-Adaptatividade	81
7.3	CASO 3 - CARREGAMENTO SENOIDAL	90
7.3.1	Verificação da formulação implementada	91
7.3.2	Estimativa de erro a posteriori	92
7.3.3	h-Adaptatividade	97
7.4	CASO 4 - CARREGAMENTO NOVOTNY	104
7.4.1	Verificação da implementação da formulação	105
7.4.2	Estimativa de erro à posteriori	112
7.4.3	h-Adaptatividade	116
8	CONCLUSÃO	125

1 INTRODUÇÃO

Problemas de engenharia são governados por sistemas físicos, e tais sistemas podem, geralmente, ser modelados matematicamente como equações diferenciais ordinárias ou sistemas de equações diferenciais parciais. É comum que a solução desses modelos envolvam grande complexidade. Em alguns casos, é até mesmo impossível a obtenção de uma solução exata, dependendo da geometria do domínio de análise, das condições de contorno e carregamentos, das propriedades materiais envolvidas, etc. Frente a isso, fez-se necessária a utilização de métodos numéricos para se obter uma solução aproximada para estes problemas.

Os métodos de aproximação desenvolvidos para a solução de problemas de engenharia se mostraram vantajosos, em termos de velocidade na obtenção das aproximações, demonstrando também boa precisão nos resultados e possibilidade de automatização do processo de cálculo. Existem alguns métodos tradicionais, tais como: Método de Elementos Finitos (MEF), Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG), Método das Diferenças Finitas, Métodos Sem Malha, etc. Neste trabalho, o método abordado será o MEF.

Segundo Reddy (2006), o MEF envolve 3 etapas. Primeiro, o domínio do problema, que pode ser relativamente complexo, é subdividido em subdomínios geometricamente simples chamados de elementos finitos. Esse subdomínio é a região geométrica sobre a qual as equações que regem o problema serão resolvidas. Segundo, equações algébricas que fornecem a quantidade de interesse são desenvolvidas sobre cada elemento utilizando as equações governantes do problema. Terceiro, realiza-se a compatibilização de todos os elementos do domínio original utilizando relações inter elementares, afim de se obter uma solução aproximada global. Como algumas referências básicas sobre o MEF, vale citar: Zienkiewicz e Taylor (2000), Reddy (2006) e Fish e Belytschko (2007).

Contudo, por se tratar de uma solução numérica, existem erros associados à aproximação obtida pelo método. Dentre os tipos de erros que podem ocorrer na aplicação do MEF, destacam-se: erros de discretização, erros de aproximação do domínio, erros de quadratura e os erros da solução do sistema de equações algébricas. O foco deste trabalho é a avaliação de erros de discretização. No que se refere a erros de discretização, na segunda etapa do MEF que foi descrita no parágrafo anterior, supõe-se em cada elemento algumas funções aproximadoras para a representação dos campos incógnitos. Portanto, a grosso modo, pode-se dizer que erros de discretização são erros associados à incapacidade destas funções escolhidas de representarem fielmente a variação espacial das grandezas que se pretende calcular.

Uma boa avaliação do erro apresentado por uma solução de elementos finitos é de extrema importância para as tomadas de decisão em uma situação de projeto. Devido a isso, grandes esforços foram concentrados na pesquisa e desenvolvimento de metodologias de estimativa de erros e também em técnicas de manipulação da malha de elementos finitos afim de se possibilitar uma contabilização confiável do erro e da mesma forma permitindo a melhora da

qualidade da aproximação.

No que se refere a estimativa de erro, classificam-se em duas vertentes: estimativas de erro a priori e estimativas de erro a posteriori. As estimativas a priori permitem que, antes mesmo de se obter a solução numérica, se tenha informação acerca do comportamento assintótico do erro de discretização, em contrapartida não fornece o valor verdadeiro do erro (Grätsch e Bathe, 2005). As estimativas a posteriori, por sua vez, utilizam a própria solução aproximada para estimar o valor verdadeiro do erro de discretização (Grätsch e Bathe, 2005). Este trabalho se dedica, entre outros aspectos de avaliação e melhoramento da qualidade das aproximações, às estimativas de erro a posteriori utilizando metodologias de recuperação do gradiente da solução de elementos finitos.

Em termos de projeto, o erro de solução estimado pode se mostrar insatisfatório quanto aos requisitos do projetista. Existem diversas causas para isso, tais como a utilização de uma malha inadequada ou a utilização de funções de aproximação muito simples. Dessa forma, pode-se aprimorar o valor de erro obtido através de modificações na discretização do problema. Esse tipo de modificação é chamado de refino. Contudo, é interessante que o processo de refino seja otimizado, tomando como base algum critério de avaliação da qualidade da aproximação para que não sejam realizadas modificações desnecessárias, e permita sua automatização. Para isso desenvolveu-se o processo de refino adaptativo. Nele, os parâmetros de discretização são modificados com base na comparação entre o erro estimado da solução aproximada e um valor de erro permitido pelo projetista (Zienkiewicz e Zhu, 1987).

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), existem vários tipos de refino adaptativo, podendo-se citar alguns dos mais comuns: o refino h , em que se realizam modificações na quantidade e tamanho dos elementos e da malha como um todo; refino p , em que se realizam modificações no grau das funções de aproximação elementares, e refino r , em que se realiza uma variação na posição e tamanho dos elementos sem alterar sua quantidade. É possível ainda combinar dois ou mais tipos de refino adaptativo. Neste trabalho, a abordagem será sobre o refino h ou refino h -adaptativo, no qual se busca uma malha ótima através da modificação dos tamanhos e quantidade dos elementos. Um exemplo de refino h -adaptativo utilizando estimativa de erro a posteriori pode ser observado na Fig. 1

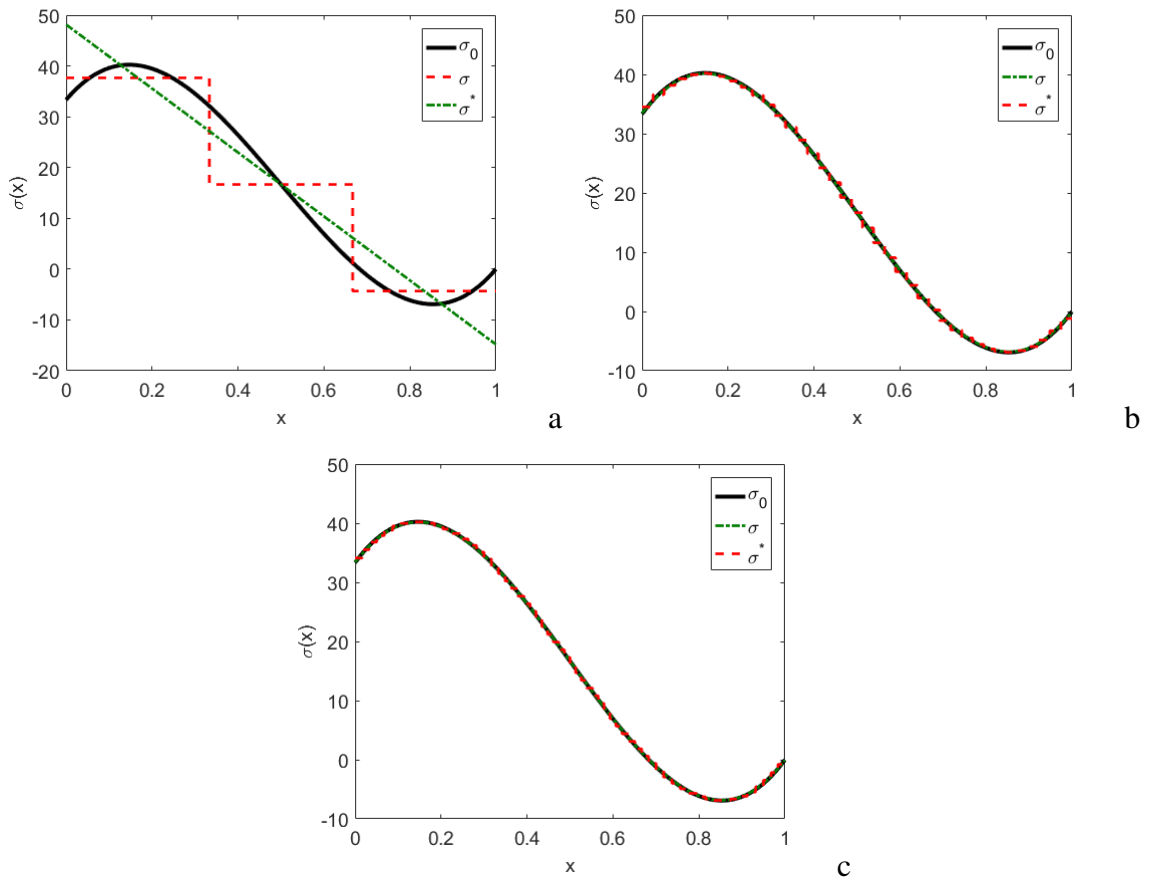


Figura 1 – Exemplo de refino h-adaptativo em um problema de elasticidade onde se busca obter a distribuição de tensão no domínio. Tem-se malha inicial com 3 elementos (a), primeiro refino gerando 39 elementos na malha (b) e a malha ótima para o problema com 60 elementos (c).

Fonte: Próprio autor (2018).

Levando em consideração esse contexto, este trabalho tem como meta avaliar o comportamento de técnicas de refino h-adaptativo mediante a utilização de metodologias de estimativa de erros de discretização *a posteriori*. Isto, para um problema de elasticidade unidimensional em barra deformável.

2 OBJETIVO

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é realizar um estudo acerca da influência de diferentes metodologias de recuperação na qualidade da estimativa do erro de discretização de uma solução de elementos finitos para um problema de elasticidade unidimensional em barra deformável. Da mesma forma, objetiva-se verificar a influência da estimativa de erro das diferentes metodologias de recuperação no comportamento de diferentes técnicas de refino h-adaptativo.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Pode-se especificar o objetivo geral em algumas etapas:

- Implementação de uma rotina computacional para a solução de um problema de elasticidade unidimensional em barra deformável através do MEF.
- Implementar três metodologias de recuperação de gradiente de solução a fim de se estimar o erro de discretização em termos de energia. São elas: Média Nodal Simples (MNS), Zienkiewicz e Zhu (ZZ) e Superconvergent Patch Recovery ou Recuperação por Super Convergência em Subdomínios (SPR).
- Avaliar a efetividade das estimativas realizadas por cada metodologia para casos em que a solução analítica do problema é conhecida. Isso é feito com o intuito de se observar as particularidades de cada uma das metodologias de recuperação.
- Implementar duas técnicas de refino h-adaptativo: uma baseada na convergência assintótica do erro, técnica Ch^p (Zienkiewicz e Zhu, 1987), e a outra baseada na recuperação quadrática do erro em energia, IEDR (Pereira et al. (2016)). Na segunda técnica, o termo quadrático parte da premissa de uma função densidade do erro em energia, que é resultado da utilização de funções de forma lineares na aproximação por MEF.
- Comparar a influência de cada metodologia de recuperação no desempenho de cada uma das técnicas de refino.
- Comparar o desempenho entre as duas técnicas de refino h-adaptativo submetidas a uma estimativa de erro proveniente da mesma metodologia de recuperação.
- No que se refere a técnica IEDR, avaliação de dois casos particulares que podem ser identificados através da observação da influência dos diferentes coeficientes da equação característica que fornece o novo tamanho ótimo de elemento (seção 5.8.2).

3 JUSTIFICATIVA

A fim de se realizar qualquer tomada de decisão em um projeto de engenharia é necessário que a informação na qual o projetista se baseia seja confiável. Em uma situação em que não se dispõe da capacidade de se obter a solução exata de um problema, uma estimativa precisa do erro que uma solução aproximada possui fornece a confiabilidade requerida. Dentro deste contexto, o estudo de metodologias de recuperação para estimativa de erros de discretização a posteriori se mostra relevante uma vez que procura avaliar qual método consegue fornecer uma estimativa mais adequada e próxima do valor real. Da mesma forma, o estudo acerca de técnicas de refino h-adaptativo não só possibilita a melhora de uma solução de elementos finitos, como também promove a automatização do processo de cálculo de maneira otimizada. Uma boa estimativa associada a capacidade de aumento da precisão da solução aproximada de maneira automatizada, tende a fornecer resultados cada vez melhores minimizando a necessidade de intervenção humana.

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

4.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Uma vasta gama de fenômenos físicos podem ser modelados matematicamente como equações diferenciais parciais. Por conta disso, a solução analítica desse tipo de problema pode se mostrar extremamente complexa. O método de elementos finitos (MEF) é um método de solução desses problemas utilizando uma metodologia de aproximação. No escopo da engenharia, esse método é uma ferramenta para resolver problemas como análise de tensões, transferência de calor, escoamento de fluidos ou eletromagnetismo, com auxílio de simulação computacional (Fish e Belytschko, 2007).

Para Reddy (2006), um sistema físico pode ser modelado matematicamente na forma de um problema de valor de contorno contendo as equações governantes do problema e as condições de contorno. Esse problema, por sua vez, tem a existência da solução garantida, sendo esta única e continuamente dependente dos dados (Oden e Reddy, 1976). Na Fig. 2(a) tem-se a representação de um problema de elasticidade unidimensional em que uma barra deformável, com movimento restringido por um engaste em uma extremidade e livre na outra, está submetida a um carregamento distribuído axialmente em todo o comprimento. Como descrito na Fig. 2(b), em problemas deste tipo, normalmente o objetivo é conhecer o quanto a seção transversal em um determinado ponto x da barra se desloca mediante a aplicação do carregamento ou quanto duas seções transversais quaisquer separadas por Δx se deslocaram em relação uma a outra, caracterizando uma deformação axial.

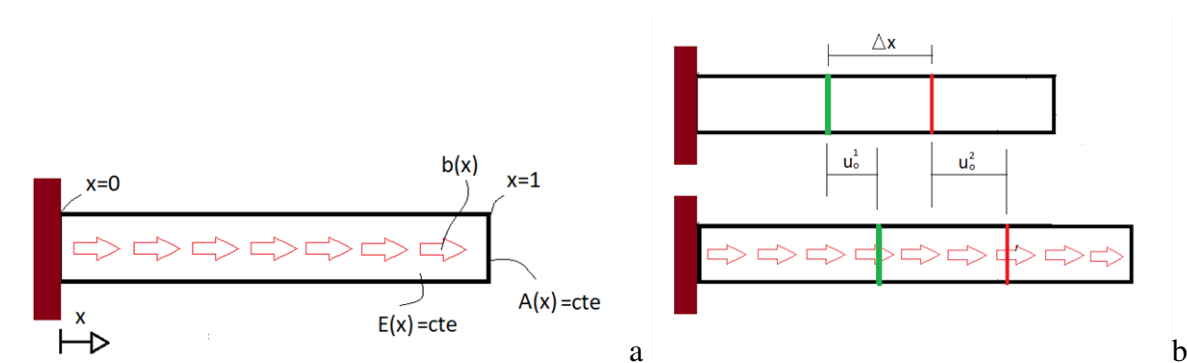


Figura 2 – (a) Problema de elasticidade unidimensional em barra deformável e (b) configuração deformada do sistema.

Fonte: Próprio autor (2018).

O sistema físico descrito na figura pode ser modelado matematicamente como uma equação diferencial ordinária da forma

$$\frac{d}{dx} \left(A(x)E(x) \frac{du_0(x)}{dx} \right) + b(x) = 0, \quad \text{com} \quad x \in \Omega = [0, 1], \quad (4.1)$$

em que Ω representa o domínio no qual o problema está definido, neste caso é o comprimento da barra que varia de 0 até 1 m, $u_o(x)$ é a função que caracteriza o deslocamento de cada seção transversal da barra em cada ponto do domínio, $b(x)$ é a função que representa o carregamento axial ao qual a barra está submetida, $A(x)$ é uma função que representa o valor da área da seção transversal da barra em uma posição do domínio e $E(x)$ é função que determina o valor do módulo de elasticidade do material da barra em um ponto do domínio. Devido à configuração do sistema físico tomado como exemplo, é possível definir as condições de contorno do problema, que são

$$u_o(0) = 0 \quad e \quad \frac{du_o(1)}{dx} = 0. \quad (4.2)$$

A condição $u_o(0) = 0$ representa um deslocamento nulo na posição $x = 0$, isso ocorre devido a restrição de movimento imposta pelo engaste na extremidade esquerda da barra. Já a condição $\frac{du_o(1)}{dx} = 0$ representa a derivada da solução nula na extremidade livre da barra.

O conjunto formado pela equação diferencial (4.1) e as condições de contorno configura um problema de valor de contorno chamado de forma forte, sendo que a solução $u_o(x)$ buscada deve satisfazer a equação diferencial em todo o ponto x do domínio. Em análises estruturais de engenharia, é comum o desejo de se conhecer as tensões e as deformações presentes no sólido. A deformação ϵ_o em um ponto x do domínio pode ser calculada pela relação cinemática,

$$\epsilon_o(x) = \frac{du_o(x)}{dx}, \quad (4.3)$$

já a tensão σ_o pode é obtida pela lei de Hooke, dada por

$$\sigma_o(x) = E(x)\epsilon_o(x). \quad (4.4)$$

Através de um método variacional, como por exemplo resíduos ponderados, introduz-se uma função ponderação $w_o(x)$ e realiza-se a transformação da forma forte para uma forma integral equivalente que contém informações tanto das equações governantes quanto das condições de contorno do problema. Após isso, realiza-se o enfraquecimento dessa forma integral reduzindo os requisitos de continuidade da solução $u_o(x)$, esse formato é denominado forma fraca. A formulação da forma fraca pode ser enunciada da seguinte maneira:

Encontrar $u_o \in \mathcal{U}_o$, tal que

$$\mathcal{B}(u_o, w_o) = \mathcal{F}(w_o), \quad \forall w_o \in \mathcal{W}_o \quad (4.5)$$

onde \mathcal{U}_o e \mathcal{W}_o são espaços de Hilbert, espaço vetorial das funções que juntamente com suas primeiras derivadas são quadraticamente integráveis no sentido de Lebesgue (Oden e Reddy, 1976), definidos no domínio de análise $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ (\mathbb{R}^1 no caso de um problema unidimensional). Ademais, \mathcal{B} é a forma bilinear continua definida no espaço $\mathcal{U}_o \times \mathcal{W}_o$ onde

$$\mathcal{B}(u_o, w_o) = \int_{\Omega} \frac{dw_o(x)}{dx} A(x) E(x) \frac{du_o(x)}{dx} dx, \quad (4.6)$$

w_o é uma função arbitrária cinematicamente admissível e \mathcal{F} é um funcional linear contínuo definido no espaço \mathcal{W}_o , sendo

$$\mathcal{F}(w_o) = \int_{\Omega} w_o(x)b(x)dx. \quad (4.7)$$

Uma vez definida a forma fraca, realiza-se a discretização espacial substituindo a função que define a solução analítica u_o por uma função u discretizada na forma de uma combinação linear de funções de base, tais como o somatório de Galerkin. Dessa maneira o problema variacional pode ser escrito como:

Encontrar $u \in \mathcal{U}$, tal que

$$\mathcal{B}(u, w) = \mathcal{F}(w), \quad \forall w \in \mathcal{W} \subset \mathcal{W}_o \quad (4.8)$$

sendo

$$u = \sum_{k=1}^n N_k \bar{u}_k = [N_1(x) N_2(x) \cdots N_k(x)] [\bar{u}_1 \bar{u}_2 \cdots \bar{u}_k]^T = \mathbf{N}^T \mathbf{U} \quad (4.9)$$

$$w = \sum_{k=1}^n N_k \bar{w}_k = [N_1(x) N_2(x) \cdots N_k(x)] [\bar{w}_1 \bar{w}_2 \cdots \bar{w}_k]^T = \mathbf{N}^T \mathbf{W} \quad (4.10)$$

onde n é o número de nós na malha, \mathbf{N} é o vetor de funções de interpolação que obedecem aos requisitos de continuidade do problema, \mathbf{U} é o vetor de coeficientes nodais associados a variável de interesse do problema, que no caso é o deslocamento nos nós, e \mathbf{W} é o vetor de coeficientes nodais arbitrários associadas a função ponderação w . Como as mesmas funções de aproximação $N_k(x)$ podem ser utilizadas para u e w , é comum definir $\bar{w}_k = \delta \bar{u}_k$. Tais variações podem ser associadas à quantidades virtuais, como deslocamento, por exemplo (Brebbia, 1984).

Em MEF, \mathcal{U} e \mathcal{W} são os subespaços de funções, geralmente, polinomiais por partes de ordem p (grau polinomial da classe do elemento finito utilizado), contidos em \mathcal{U}_o e \mathcal{W}_o . \mathcal{U} é o subespaço das funções de aproximação e \mathcal{W} é o subespaço das funções de variação admissíveis.

Aplicando a forma variacional discretizada (4.8) a cada elemento finito el , pode-se obter uma matriz de rigidez local, \mathbf{K}^{el} , e um vetor de carregamento local, \mathbf{F}^{el} , dados por

$$\mathbf{K}^{el} = \int_{\Omega_{el}} \mathbf{B}^{elT} \mathbf{A}(x) \mathbf{E}(x) \mathbf{B}^{el} dx \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^{el} = \int_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^{elT} b(x) dx., \quad (4.11)$$

onde

$$\mathbf{N}^{el} = [N_{ij}(x) N_{i,j+1}(x) \cdots N_{i,p+1}(x)] \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^{el} = \frac{d\mathbf{N}^{el}}{dx}, \quad (4.12)$$

em que $N_{ij}(x)$ representa a j -ésima função de forma associada ao j -ésimo nó do i -ésimo elemento da malha, p é o grau polinomial das funções de forma, no caso de funções de forma lagrangeanas, de um elemento i contendo $p + 1$ nós.

Por exemplo, para um elemento finito linear, as funções de forma são conforme a Fig.

3.

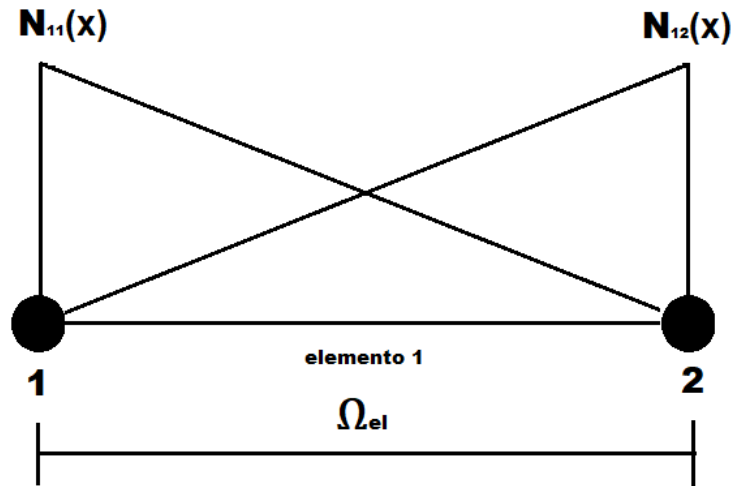


Figura 3 – Elemento finito linear contendo dois nós, cada um deles associado a uma função de forma de aproximação linear, definida no domínio elementar Ω_{el} .

Fonte: Próprio autor (2018).

Usando (4.12) em (4.11), tem-se a matriz de rigidez e o vetor de carregamento elementar na forma matricial como

$$K^{el} = \int_{\Omega_{el}} \begin{bmatrix} \frac{dN_{11}(x)}{dx} A(x) E(x) \frac{dN_{11}(x)}{dx} & \frac{dN_{11}(x)}{dx} A(x) E(x) \frac{dN_{12}(x)}{dx} \\ \frac{dN_{12}(x)}{dx} A(x) E(x) \frac{dN_{11}(x)}{dx} & \frac{dN_{12}(x)}{dx} A(x) E(x) \frac{dN_{12}(x)}{dx} \end{bmatrix} dx \quad (4.13)$$

$$F^{el} = \int_{\Omega_{el}} \begin{bmatrix} N_{11}(x) b(x) \\ N_{12}(x) b(x) \end{bmatrix} dx. \quad (4.14)$$

O esquema de numeração utilizado em (4.13) e (4.14) segue o mesmo padrão do usado em (4.12).

Superpondo os resultados de todos os elementos da malha, constrói-se uma matriz de rigidez global, K , e um vetor de carregamento global, F , irrestritos (Babuska et al. 2011) através da compatibilização dos elementos conforme largamente discutido na literatura (Reddy, 2006; Fish e Belytschko, 2007; Szabo e Babuska, 2011). Após isso, aplica-se as restrições associadas às condições de contorno do problema a matriz e ao vetor, permitindo a obtenção do vetor global de variáveis primárias U através da solução do sistema linear de equações algébricas, da forma

$$U = K^{-1}F. \quad (4.15)$$

Uma vez conhecido U , é possível determinar a energia de deformação global do sistema, $\|u\|$:

$$\|u\| = \frac{1}{2} U^T K U, \quad (4.16)$$

neste caso a matriz de rigidez global \mathbf{K} é empregada sem a aplicação das restrições associadas as condições de contorno.

Na sequência, se apresentam os tipos de erros de solução que podem ser encontrados. Aqui vamos estimar somente os erros de discretização.

4.2 ERROS DE SOLUÇÃO

Soluções obtidas através de métodos de aproximação podem estar associadas a erros em relação a solução real do problema. Segundo Reddy (2006), existem três tipos básicos de erros:

1. Erros de aproximação de domínio: uma malha mais refinada tende a representar melhor o domínio do problema, gerando menores erros desse tipo. Em problemas unidimensionais os domínios são representados por linhas retas, dessa forma os erros de aproximação de domínio não são inseridos na solução de elementos finitos. Por outro lado, em problemas 2D e 3D esses erros podem tornar-se relevantes.
2. Erros numéricos e de quadratura: erros numéricos são erros de arredondamento ou truncamento em operações elementares, cometidos quando se esgota o número limite de algarismos para se armazenar um número no computador. Os erros numéricos também se manifestam na solução do sistema de equações. O tamanho do sistema e seu condicionamento são fatores que interferem neste erro. O condicionamento de um sistema está associado ao número de condição de uma matriz, razão entre o maior e o menor autovalor, e se essa razão é elevada a matriz é dita mal condicionada. O mal condicionamento acarreta na propagação dos erros numéricos. Os erros de quadratura, por sua vez, estão associados à integração numérica e dependem do tipo de função que se pretende integrar.
3. Erros de discretização: são erros provenientes da substituição da função que representa a solução exata do problema por uma função de aproximação. No MEF essa função geralmente é polinomial por partes.

A indisponibilidade de uma solução analítica para um problema requer que a avaliação da qualidade da solução aproximada seja realizada através de uma estimativa do erro que ela apresenta. No âmbito do MEF, tem-se dividido as estimativas em dois grupos: as estimativas a priori e as a posteriori.

Segundo Grätsch e Brathe (2005), a estimativa a priori traz a informação de como o erro se comporta, antes mesmo se ter em mãos uma solução aproximada, frente a alterações nos parâmetros do problema, tais como quantidade de elementos na malha ou grau polinomial das funções de aproximação utilizadas, porém não fornece verdadeiramente um valor para o erro, permitindo somente uma análise qualitativa. Por outro lado, uma estimativa a posteriori parte

de uma solução aproximada conhecida e permite a obtenção de um valor para o erro, ou seja, trata-se de uma análise quantitativa.

Ainsworth e Oden (1997) afirmam que os estimadores a posteriori podem ser subdivididos em dois grupos: estimadores baseados em resíduos e estimadores baseados em recuperação. Dentro dos estimadores baseados em resíduos existem os estimadores explícitos e os estimadores implícitos.

Segundo Grätsch e Bathe (2005), os estimadores explícitos baseiam-se no cálculo dos resíduos no interior de um elemento para realizar a estimativa da norma em energia do erro. Como alguns destaques no assunto, tem-se: Babuska e Rheinboldt (1978a, 1978b) e Babuska e Miller (1987). Diferentemente, os estimadores implícitos partem de problemas de valor de contorno auxiliares, avaliados localmente em um elemento ou em subdomínio formado por um conjunto de elementos, cuja solução permite uma aproximação do erro (Grätsch e Bathe, 2005).

Os estimadores por recuperação abordam uma estimativa de erro a partir de uma solução de elementos finitos conhecida. O objetivo desse tipo de estimador é realizar um pós-processamento do gradiente da solução pelo MEF a fim de se elevar seu grau de continuidade. Por fim, estima-se o erro comparando a diferença entre a solução pós-processada e a primeira solução (Ainsworth e Oden, 1997).

Na sequência, será dada ênfase nos estimadores baseados em recuperação, visto que são objetivo do trabalho.

4.3 ESTIMATIVAS DE ERRO POR RECUPERAÇÃO

Tratando-se de estimativas de erro a posteriori por recuperação, Zienkiewicz e Zhu (1987) são pioneiros no assunto. Em seu trabalho, a dupla apresentou duas metodologias para a recuperação do gradiente da solução de elementos finitos em um problema mecânico, a Média Nodal Simples (MNS) e a Zienkiewicz e Zhu (ZZ), que em essência pode ser interpretada como uma média ponderada na área dos elementos (num caso 2D por exemplo), com as quais era possível obter os valores recuperados nodais de tensão e construir um novo campo de tensões. Os autores propuseram que a estimativa deve ser realizada comparando a solução recuperada com a solução aproximada original.

Anos depois, Zienkiewicz e Zhu (1992) propuseram uma nova metodologia para recuperação do gradiente da solução se baseando na teoria dos pontos super convergentes, chamada de Recuperação por Super Convergência em Subdomínios (SPR). A ideia desse estimador é construir um subdomínio formado pelo nó de análise e por pontos super convergentes nos elementos adjacentes, onde a taxa de convergência do gradiente da solução aproximada é superior a taxa de convergência global do método. Sobre cada subdomínio é realizada uma suavização do gradiente da solução aproximada por mínimos quadrados a fim de se obter um valor do

gradiente recuperado no nó de análise (Zienkiewicz e Zhu, 1992).

Wiberg e Abdulwahab (1992), propuseram uma variação para o estimador SPR. O aprimoramento da metodologia foi feita considerando que o SPR comum não considera a satisfação da equação governante ou a equação de equilíbrio do problema. Dessa maneira, uma formulação foi proposta de forma que a estimativa fosse feita considerando as condições de equilíbrio, de forma que elas sejam satisfeitas no sentido de mínimos quadrados. Essa modificação deu origem a estimativa baseada em Recuperação por Super Convergência de Subdomínios utilizando Condições de Equilíbrio (SPRE).

Zienkiewicz et al. (1993) propuseram algumas modificações para o estimador SPR após detectarem a dificuldade de aplicá-lo em problemas que utilizam funções de forma de elevado grau, devido à singularidade do sistema de equações resultante do mínimos quadrados, a eq. (5.32). Como alternativa, introduziu-se um procedimento que utiliza coordenadas espaciais localmente normalizadas no subdomínio capazes de melhorar o condicionamento da matriz e superar a dificuldade mencionada.

Segundo Wiberg et al. (1994), tanto a estimativa SPR como a SPRE tem melhor desempenho no interior do domínio de análise do que em regiões próximas aos contornos. Tendo isso em vista, propuseram uma variação ao SPRE que considera a satisfação das condições de contorno do problema, tanto essenciais como naturais, que ficou conhecida como estimativa Recuperação por Super Convergência em Subdomínios utilizando Condições de Equilíbrio e Contorno (SPREB)

Partindo da premissa de uma aplicação em que pontos super convergentes não existam, Boroomand e Zienkiewicz (1997) desenvolveram a Recuperação por Equilíbrio em Subdomínios (REP). Essa metodologia para estimativa de erro é análoga a SPR, uma vez que parte do princípio de se realizar uma suavização do gradiente da solução de elementos finitos conhecida dentro de um subdomínio. Contudo, a REP baseia-se em atender a restrição de que a solução recuperada deve satisfazer as mesmas condições de equilíbrio que a solução por elementos finitos em um subdomínio.

Ubertini (2004) desenvolveu uma técnica de estimativa de erro análoga a SPR e a REP chamada de RCP, baseada na obtenção das tensões recuperadas em um subdomínio para construir um campo de tensões recuperado interpolando-as com as funções de forma de aproximação do problema. Na RCP, os subdomínios são formados pelos elementos adjacentes ao nó de análise. O campo de tensões recuperado local é calculado através da minimização energia complementar associada ao subdomínio considerado como um sistema diferente juntamente com o deslocamento aproximado calculado pela análise de elementos finitos.

Diez et al. (2007) introduziram um novo estimador de erro por recuperação baseado no equilíbrio local do campo de tensões, produzindo um limite superior para o erro. O equilíbrio é obtido subdomínio a subdomínio e a continuidade é reforçada por um pós processamento baseado no princípio da partição da unidade. Com o pós processamento, espera-se que as características locais de equilíbrio do campo de tensão se preservem. No entanto, os autores verificaram

que essa etapa de pós processamento modifica o equilíbrio, não sendo mais obtido de maneira exata. A nova metodologia leva em conta essa falta de equilíbrio para realizar a estimativa do limite superior do erro.

Um melhoramento da estimativa SPR foi proposta por Ródenas et al. (2007). Tal modificação na técnica, que ficou conhecida por SPR-C ou Constrained SPR, baseia-se em utilizar equações de restrição com o intuito de se obter polinômios de interpolação de tensão no subdomínio, permitindo que o equilíbrio interno no subdomínio e nos contornos do domínio global possam ser atingidos. A SPR-C mostrou ainda um melhor desempenho na estimativa do que a técnica SPREB (Ródenas et al. 2007).

4.4 REFINO ADAPTATIVO DE MALHA

As estimativas de erro podem ser utilizadas para se avaliar se uma solução de MEF é adequada ou não de acordo com a necessidade do projetista. Caso não seja, modificações na discretização espacial, chamadas de refino, baseadas no erro estimado podem ser implementadas de forma a atingir a adequação numa nova análise do problema. Esse tipo procedimento é chamado de Método de Elementos Finitos Adaptativo. O foco deste trabalho é a adaptatividade de malha ou h-adaptatividade, onde se utiliza o erro estimado para se realizar o refino de malha de um problema de maneira otimizada.

Zienkiewicz e Zhu (1987) foram uns dos pioneiros no desenvolvimento de metodologias de refino h-adaptativo. A estratégia de refino proposta pelos autores baseia-se no cálculo de um parâmetro de refinamento elementar dado pela razão entre a norma em energia do erro, obtida pela eq. (4.16) porém substituindo deslocamento pelo correspondente erro previsto na eq. (5.1), em um elemento da malha corrente e um erro admissível dado pela energia total do sistema igualmente distribuída por todos os elementos da malha e associada a um valor percentual mínimo admissível para o problema especificado pelo projetista. Caso a norma em energia do erro e o erro admissível sejam iguais admite-se que o tamanho do elemento de análise possui um tamanho ótimo, caso contrário deve-se realizar uma redução ou uma expansão do tamanho do elemento de acordo com o valor do parâmetro de refinamento. Essa metodologia ficou conhecida como Ch^p e é uma das quais serão estudadas neste trabalho.

Até então, o novo tamanho de um elemento era calculado como função do parâmetro de refinamento e do grau polinomial das funções de forma utilizadas na aproximação, contudo, notando que a premissa na qual essa formulação se baseia não era válida para regiões do domínio próximas a singularidades, agora no sentido de gradientes infinitos, Zienkiewicz e Zhu (1988) propuseram uma nova maneira para se calcular o novo tamanho do elemento considerando um valor associado a taxa de convergência a priori da solução de elementos finitos para o problema com singularidades ao invés do grau polinomial das funções de forma.

Em seu trabalho, Oñate e Bugada (1993) propôs um critério de otimalidade de malha

alternativo ao proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987): o critério de otimalidade de malha baseado na equidistribuição do erro específico. Esse critério assume que uma malha é ótima se o quadrado do erro por unidade de área (2D) ou volume (3D) for o mesmo sobre toda a malha. Dessa forma, foi formulada uma nova expressão para o parâmetro de refino que depende não só da norma em energia do erro em relação energia total do sistema como também da geometria de um elemento em relação a malha.

Li e Bettes (1995), considerando que uma malha é dita ótima quando a distribuição da norma em energia do erro é igual entre cada elemento existente, desenvolveram um problema de otimização capaz de calcular o número mínimo de elementos necessários em uma nova malha para que o critério fosse atendido. Esse conhecimento permitiu que Li et al. (1995) apresentassem uma nova formulação para o cálculo do novo tamanho do elemento que, segundo os autores, apresentou um melhor desempenho na adaptatividade e taxas de convergência de erro mais altas se comparada com a estratégia de refino proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987).

Bugeda (2006) apresentou uma formulação para uma estimativa de erro baseado na metodologia SPR. A partir dessa formulação, Bugeda propôs uma nova estratégia de refino h-adaptativo. Após alguns testes, notou-se que a nova estratégia é capaz de produzir malhas simples e que possibilitam o cálculo de valores precisos das tensões em pontos específicos.

Castellazzi et al. (2010), em seu trabalho, verificou como a metodologia de estimativa de erro por recuperação RCP, de Ubertini (2004), se comportava em conjunto a estratégia de refino Ch^p em problemas planos. Os resultados mostraram que a metodologia RCP permitiu uma boa estimativa do erro para os casos testados e sua utilização no refino h-adaptativo mostrou-se muito eficiente.

No trabalho de Silva et al. (2014), propôs-se uma análise comparando os estimadores de erro MNS, ZZ e SPR em uma situação de refino h-adaptativo. A estratégia de refino foi pautada no critério da equidistribuição do erro entre os elementos de uma malha ótima proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987) com a adição de um fator de amortecimento a fim de se controlar o crescimento desordenado dos elementos. Resultados do trabalho mostraram um bom desempenho para as três estimativas, podendo ser observado um máximo de dois remalhamentos para que se alcançasse o erro prescrito para os casos testados. O presente trabalho busca realizar um estudo similar ao proposto por Silva et al. (2014), no sentido de se realizar as análises em um problema 1D.

Pereira et al. (2016) apresenta uma nova técnica para projeção isotrópica do tamanho elementar (IEDR) baseada na recuperação quadrática do erro (RQE). Essa técnica busca encontrar o tamanho ótimo de cada elemento para que um valor limite do erro não seja ultrapassado. Neste trabalho, pretende-se comparar o desempenho da técnica RQE com a técnica Ch^p em uma situação de refino h-adaptativo.

Nesta seção se encerra o referencial bibliográfico no qual o trabalho se baseia. No capítulo seguinte, será apresentada a formulação dos métodos de recuperação de tensão para estimativas de erro e das técnicas de refino h-adaptativo que serão analisadas.

5 FORMULAÇÃO DOS ESTIMADORES DE ERRO E DAS TÉCNICAS DE REFINO H-ADAPTATIVO

5.1 ESTIMATIVA DO ERRO BASEADA NA NORMA EM ENERGIA

Por definição, o erro local da discretização, no sentido de campo, ou seja, que pode ser conhecido para cada posição x de Ω , pode ser calculado pela diferença entre a solução exata $u_o(x)$ (solução da forma forte, eq.(4.1)) e a solução aproximada $u(x)$ (solução da forma fraca discretizada, eq.(4.8)) (Zienkiewicz e Taylor, 2000).

$$e_u(x) = u_o(x) - u(x). \quad (5.1)$$

Da mesma forma, pode-se calcular o erro local em deformação $e_\varepsilon(x)$ ou em tensão $e_\sigma(x)$ (Ainsworth; Oden, 2000), conforme:

$$e_\sigma(x) = \sigma_o(x) - \sigma(x) \quad \text{e} \quad e_\varepsilon(x) = \varepsilon_o(x) - \varepsilon(x). \quad (5.2)$$

A avaliação de erros locais, como o da eq. (5.1), no sentido que poderiam ser calculados em qualquer posição x do domínio de análise, permitem a verificação pontual do erro no domínio. Daqui em diante, a notação será simplificada removendo a dependência explícita em x . Na presença de descontinuidade material, descontinuidade de área de seção transversal e ainda na presença de singularidades, como as oriundas de uma força externa pontual, podem-se apresentar descontinuidades ou singularidades de tensões e deformações. Além disso, nos pontos em que as singularidades se manifestam, geram-se valores de erro infinitos que não tem contribuição prática. . Frente a isso, estabeleceram-se normas que pudessem representar o erro no domínio como um todo, através de um valor escalar global.

Segundo Zienkiewicz e Zhu (1987), em problemas de elasticidade é comum representar o erro através da norma energia. A norma energia do erro mostra o quanto a solução aproximada se distâcia da solução exata em termos de energia de deformação. Por definição ela é dada por:

$$\|e_u\|_E = \left[\int_{\Omega} \frac{de_u}{dx} AE \frac{de_u}{dx} dx \right]^{1/2}. \quad (5.3)$$

Em termos de erro em deformação e em tensão, a norma do erro em energia pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\|e_u\|_E = \left[\int_{\Omega} e_\varepsilon AE e_\varepsilon dx \right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} e_\varepsilon A e_\sigma dx \right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} e_\sigma AE^{-1} e_\sigma dx \right]^{1/2}. \quad (5.4)$$

Ainda, a norma energia do erro pode ser avaliada para qualquer porção do domínio. Da mesma maneira, o somatório dos quadrados das normas em energia do erro calculadas em cada ele-

mento fornece o quadrado da norma energia do erro global. Assim, pode-se escrever

$$\|e_u\|_E^2 = \sum_{el=1}^m \left(\|e_u\|_{E}^2 \right)_{el} \quad (5.5)$$

onde el refere-se individualmente a um elemento que compõe o domínio Ω e m refere-se ao número total de elementos na malha.

Pode-se avaliar o comportamento do erro da solução aproximada de um problema de análise de tensões, através da análise do quanto a norma energia do erro representa, em termos percentuais, a norma energia de deformação exata do sistema. Esse valor é definido como um parâmetro η , denominado erro relativo global, dado pela relação

$$\eta = \frac{\|e_u\|_E}{\|u_o\|} 100\%, \quad (5.6)$$

onde

$$\|u_o\| = \left[\int_{\Omega} \frac{du_o}{dx} AE \frac{du_o}{dx} dx \right]^{1/2}. \quad (5.7)$$

Segundo Oden e Reddy (1976), a norma energia exata obedece a uma propriedade de ortogonalidade que pode ser escrita como:

$$\|u_o\| = \left(\|u\|^2 + \|e_u\|_E^2 \right)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Na sequência, será apresentada a formulação para a realização de estimativa de erro utilizando um solução recuperada em tensão.

5.2 ESTIMATIVAS DE ERRO POR RECUPERAÇÃO

Como geralmente a solução exata não é conhecida, algumas alternativas foram desenvolvidas a fim de possibilitar a avaliação dos erros da solução aproximada. Uma alternativa é o pós-processamento da solução por elementos finitos de forma a se realizar uma suavização dessa solução, quer seja da variável primária (deslocamento), no sentido de aumentar o grau polinomial da aproximação, quer seja das variáveis secundárias (deformação e tensão), no sentido de aumentar a continuidade do gradiente da aproximação. Nesse caso, a solução suavizada possui uma taxa de convergência mais acentuada, no sentido de representar melhor a solução exata do que a solução aproximada obtida via MEF é capaz. Esse tipo de tratamento é classificado como recuperação e é utilizado em estimadores de erro a posteriori baseados em recuperação (Zienkiewicz e Zhu, 1987).

Segundo Zienkiewicz e Zhu (1992b), a norma energia do erro pode ser estimada simplesmente substituindo a solução analítica, u_o , pela solução recuperada, u^* , nas equações anteriores, dessa maneira a norma do erro pode ser escrita como

$$\|e_u\|_E \approx \|e_u^*\|_E = \|u^* - u\|_E. \quad (5.9)$$

Então, a norma energia do erro pode ser aproximada pela norma energia associada aos campos de tensão ou deformação recuperados conforme

$$\|e_u^*\|_E = \left[\int_{\Omega} e_{\varepsilon}^* A E e_{\varepsilon}^* d\Omega \right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} e_{\varepsilon}^* A e_{\sigma}^* d\Omega \right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} e_{\sigma}^* A E^{-1} e_{\sigma}^* d\Omega \right]^{1/2} \quad (5.10)$$

onde $e_{\varepsilon}^* = (\varepsilon^* - \varepsilon)$ e $e_{\sigma}^* = (\sigma^* - \sigma)$.

Ainda, pode-se definir a norma energia com base na propriedade da ortogonalidade do erro de maneira semelhante a apresentada em (5.8), dada por:

$$\|u_o\| \approx (\|u\|^2 + \|e_u^*\|_E^2)^{1/2}. \quad (5.11)$$

Sendo que (5.8) se difere de (5.11) somente pelo \approx .

5.3 ÍNDICE DE EFETIVIDADE

No que se refere a avaliação do estimador, o primeiro passo da verificação consiste da sua aplicação em problemas com solução exata da forma forte conhecida. Deste modo, é possível mensurar a confiabilidade do estimador através de um valor denominado índice de efetividade, θ .

Esse índice é definido pela razão entre a norma energia do erro calculada com base na solução recuperada e a norma energia do erro calculada com base na solução exata (Zienkiewicz e Zhu, 1992b)

$$\theta = \frac{\|e_u^*\|_E}{\|e_u\|_E}. \quad (5.12)$$

O estimador de erro é dito assintoticamente exato se θ se aproxima da unidade quando a norma energia do erro exato $\|e_u\|_E$ tende a zero, da mesma forma quando o tamanho de elemento tende a zero ou quando o grau polinomial da função de forma de aproximação tende ao infinito (Zienkiewicz e Zhu, 1992b). Isso significa que o erro estimado irá sempre convergir ao erro exato à medida que este diminui perante a redução do tamanho dos elementos. Em seu trabalho, Zienkiewicz e Zhu (1992b) desenvolveram um teorema que demonstra como um estimador de erro assintoticamente exato pode ser obtido:

Teorema 1.

Suponha que $\|e_u'\|_E = \|u_o - u^*\|$ é a norma do erro da solução recuperada em comparação com a solução exata, então a norma energia do erro recuperado, que neste caso é o erro estimado, $\|e_u^*\|_E$ é assintoticamente exato se

$$\frac{\|e_u'\|_E}{\|e_u\|_E} \rightarrow 0 \quad (5.13)$$

quando $\|e_u\|_E \rightarrow 0$

Prova.

A norma energia do erro recuperado é definida como

$$\|e_u^*\|_E = \|u^* - u\| = \|(u_o - u) - (u_o - u^*)\| \quad (5.14)$$

Utilizando a propriedade da desigualdade triangular (Zienkiewicz e Zhu, 1992b), tem-se

$$\|u_o - u\| - \|u_o - u^*\| \leq \|e_u^*\|_E \leq \|u_o - u\| + \|u_o - u^*\|. \quad (5.15)$$

ou

$$\|e_u\|_E - \|e'_u\|_E \leq \|e_u^*\|_E \leq \|e_u\|_E + \|e'_u\|_E \quad (5.16)$$

Pode-se inserir θ na inequação reescrevendo a eq. 5.16 da seguinte maneira:

$$1 - \frac{\|e'_u\|_E}{\|e_u\|_E} \leq \theta \leq 1 + \frac{\|e'_u\|_E}{\|e_u\|_E}. \quad (5.17)$$

A eq. 5.17 mostra que o índice de efetividade θ se aproxima da unidade quando a razão $\frac{\|e'_u\|_E}{\|e_u\|_E}$ tende a zero. Para que a condição do Teorema 1 ocorra, $\|e'_u\|_E$ deve convergir a uma taxa maior que $\|e_u\|_E$. De forma que, se $\|e'_u\|_E$ for super convergente, a exatidão assintótica do estimador é assegurada.

Ainda, assumindo que o erro verdadeiro da aproximação de elementos finitos converge obedecendo (Oden e Reddy, 1976)

$$\|e_u\|_E = O(h^p), \quad (5.18)$$

onde a norma energia do erro é da ordem de h^p , sendo h o tamanho dos elementos na malha e p o grau polinomial das funções de forma utilizadas, e o erro da solução recuperada como, sendo $\alpha > 0$,

$$\|e'_u\|_E = O(h^{p+\alpha}), \quad (5.19)$$

então pode-se escrever um corolário direto do Teorema 1 (Zienkiewicz e Zhu, 1992b), tal que

$$1 - O(h^{p+\alpha}) \leq \|e_u^*\|_E \leq 1 + O(h^{p+\alpha}), \quad (5.20)$$

sendo que $\theta \rightarrow 1$ quando $h \rightarrow 0$.

Na seções seguintes será dada ênfase a formulação do métodos de recuperação de solução e das técnicas de refino avaliadas neste trabalho.

5.4 RECUPERAÇÃO BASEADA NA MÉDIA NODAL SIMPLES (MNS)

A MNS é o método de recuperação do campo de tensões aproximado mais simples entre os três escolhidos. Dado um campo gradiente da solução de elementos finitos, podendo ser definido como um campo de tensões σ , sabe-se que em um nó compartilhado por Nel

elementos, de maneira geral, existem Nel diferentes valores de σ quando as funções de forma são seccionalmente lineares, como visto na Fig. 4.

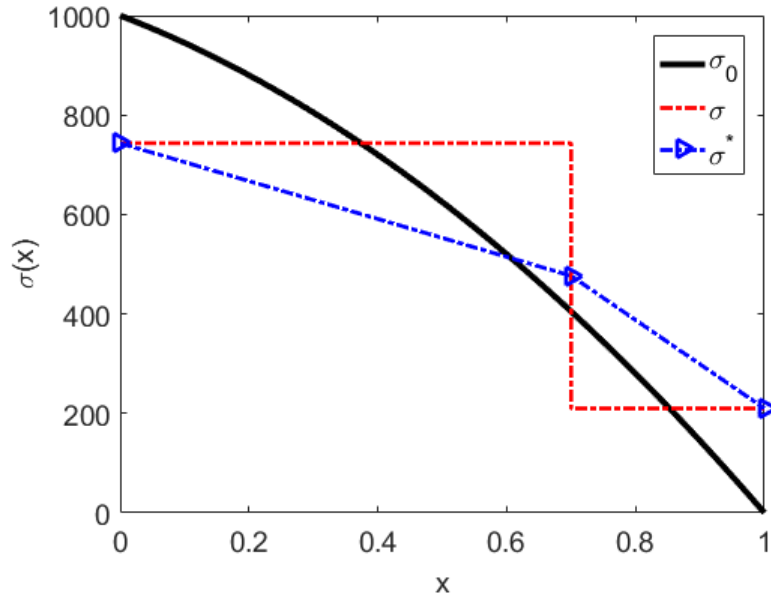


Figura 4 – Exemplo da recuperação de gradiente utilizando a MNS para uma malha com dois elementos lineares.

Fonte: Próprio autor (2018).

A figura 4 mostra, especificamente, o caso de deslocamento seccionalmente linear, ou seja, usando funções como as mostradas na Fig. 3. Vale enfatizar que mesmo usando funções de forma de grau superior, escolhidas de maneira que deva existir uma função correspondente a cada nó da malha sendo que cada função assume o valor 1 no seu nó correspondente e 0 em todos os outros nós (Fish e Belytschko, 2007), como estas funções são lagrangeanas (pelo menos as que foram usadas neste trabalho) a descontinuidade em σ também irá ocorrer, podendo ser percebida na figura através da linha vermelha onde existe a interface entre os dois elementos.

Dessa forma, é possível calcular uma média das tensões em um dado nó com base na quantidade de elementos conectados a ele e nos valores de tensão associados a esses elementos, dessa maneira (COOK, 2002):

$$\sigma_n^* = \frac{1}{Nel} \sum_{i=1}^{Nel} (\sigma)_i \quad (5.21)$$

onde Nel é o número de elementos adjacentes ao nó em questão. No caso de problemas 1D assume o valor de 2 em todos os nós com exceção da fronteira. Logo, um campo de tensões suavizado σ^* pode ser construído interpolando o vetor de tensões recuperadas, σ_{rec} , obtido através dos valores de tensões médios σ_n^* de todos os nós da malha com as mesmas funções de forma utilizadas para se obter a solução aproximada u , eq. (4.9). Assim, campo de tensões recuperado é definido como:

$$\sigma^* = N\sigma_{rec} \quad (5.22)$$

5.5 RECUPERAÇÃO SEGUNDO ZIENKIEWICZ E ZHU

O segundo método de recuperação escolhido foi proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987) e é comumente conhecido como ZZ. Esse método é similar à metodologia MNS, contudo não realiza somente uma média aritmética entre os valores de tensão nos elementos adjacentes ao nó de análise afim de se obter um valor de tensão recuperada. O método leva em conta, também, a influência do tamanho de cada elemento adjacente. A Fig. 5 mostra um exemplo de recuperação ZZ para uma malha contendo dois elementos lineares de tamanhos distintos.

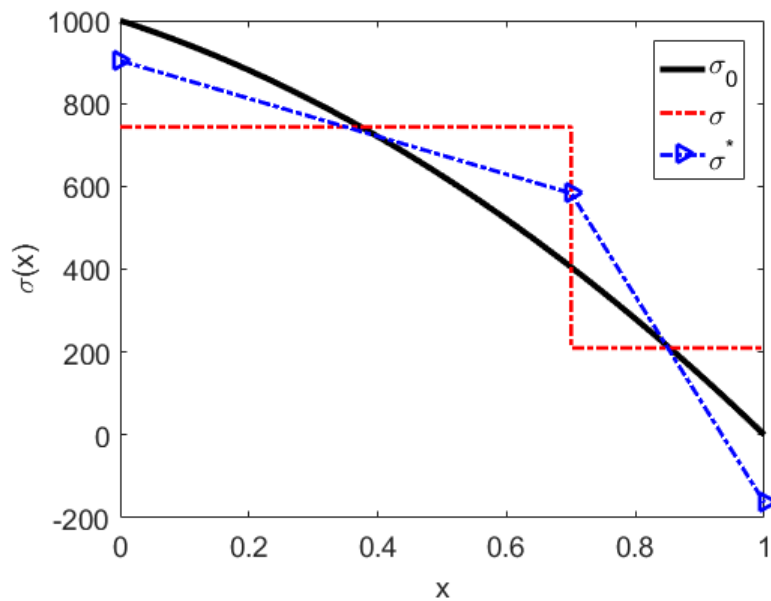


Figura 5 – Exemplo da recuperação de gradiente utilizando a recuperação ZZ para uma malha com dois elementos lineares de tamanhos distintos.

Fonte: Próprio autor (2018).

Pode-se perceber na ilustração que o valor de tensão recuperada no nó em $x = 0,7$ está mais próxima do valor de tensão no elemento maior.

A formulação do método consiste em se definir uma matriz M^{el} , comumente conhecida como matriz de massa, que contém a informação do tamanho de um elemento el , dada por

$$M^{el} = \int_{\Omega_{el}} N^{elT} N^{el} dx \quad , \quad (5.23)$$

e por um vetor S^{el} que contém a informação da tensão no elemento el , sendo

$$S^{el} = \int_{\Omega_{el}} N^{elT} \sigma(x) dx \quad . \quad (5.24)$$

A critério de exemplo, na forma matricial e considerando um problema utilizando elementos

lineares, as eq. 5.23 e 5.24 são da forma

$$M^{el} = \int_{\Omega_{el}} \begin{bmatrix} N_{11}(x)N_{11}(x) & N_{11}(x)N_{12}(x) \\ N_{12}(x)N_{11}(x) & N_{12}(x)N_{12}(x) \end{bmatrix} dx \quad (5.25)$$

e

$$F^{el} = \int_{\Omega_{el}} \begin{bmatrix} N_{11}(x)\sigma(x) \\ N_{12}(x)\sigma(x) \end{bmatrix} dx \quad , \quad (5.26)$$

sendo N_{ij} a função de forma correspondente ao j -ésimo nó do i -ésimo elemento da malha.

Realizando uma sobreposição da contribuição de cada um dos elementos da malha, constrói-se por meio da compatibilidade de elementos uma matriz de massa global M e um vetor S global. Dessa forma, calcula-se o vetor global de tensões recuperadas nos nós através da solução do sistema linear de equações dado por

$$\sigma_{rec} = M^{-1}S \quad . \quad (5.27)$$

O campo de tensões recuperadas pode ser construído utilizando a eq. 5.22

5.6 RECUPERAÇÃO BASEADA EM SUPER CONVERGÊNCIA EM SUBDOMÍNIOS

O último método de recuperação considerado aqui foi proposto por Zienkiewicz e Zhu(1992a), ficando conhecido como método SPR. No SPR, assume-se que o vetor de tensões recuperadas σ_{rec} é composto por valores de tensão obtidos através de uma expansão polinomial σ_p^* de mesmo grau p das funções de forma N utilizadas para aproximar o campo deslocamentos, conforme eq. (4.9), expansão esta que é considerada válida num subdomínio formado pelos elementos adjacentes a um dado nó. Então, por consequência, em princípio se calcula uma função σ_p^* para cada nó. A expansão polinomial para um subdomínio pode ser escrita como

$$\sigma_p^* = Pa, \quad (5.28)$$

onde P contém os termos polinomiais apropriados e a é um conjunto de parâmetros, em princípio, desconhecidos. Para o caso unidimensional com elementos de grau p , pode-se escrever

$$P = [1, x, x^2, \dots, x^p] \quad e \quad a = [a_1, a_2, \dots, a_{p+1}] \quad (5.29)$$

sendo que os termos do vetor P se referem a posição global do nó de análise. O vetor é calculado a partir da minimização da distância quadrática $\Pi(a)$ entre a solução aproximada por elementos finitos σ e a expansão polinomial σ_p^* avaliadas no conjunto de pontos super convergentes¹

¹ Pontos super convergentes são pontos no domínio em que a tensão aproximada por elementos finitos possui maior taxa de convergência se comparada a qualquer outro ponto. No caso de problemas 1D, esses pontos coincidem com os pontos de quadratura de Gauss iguais em número a p (Zienkiewicz e Zhu, 1992c).

existentes no subdomínio considerado. Desse modo, escreve-se

$$\prod(a) = \sum_{k=1}^{nps} (\sigma(x_k) - \sigma_p^*(x_k)) = \sum_{k=1}^{nps} (\sigma(x_k) - P(x_k)a), \quad (5.30)$$

onde x_k é a coordenada global do k-ésimo ponto super convergente no subdomínio, nps é o número total de pontos super convergentes no subdomínio. A minimização de $\prod(a)$ implica que a satisfaz

$$\sum_{k=1}^{nps} P^T(x_k)P(x_k)a = \sum_{k=1}^{nps} P^T(x_k)\sigma(x_k). \quad (5.31)$$

Essa equação pode ser escrita na forma matricial como

$$a = A^{-1}b \quad (5.32)$$

onde

$$A = \sum_{k=1}^{nps} P^T(x_k)P(x_k) \quad \text{e} \quad b = \sum_{k=1}^{nps} P^T(x_k)\sigma(x_k). \quad (5.33)$$

A critério de exemplo, considera-se o subdomínio apresentado na Fig. 6 formado por dois elementos lineares dois quais o nó de análise faz parte e cada elemento apresenta um ponto super convergente. Em cada subdomínio realiza-se a expansão polinomial para se obter um campo de tensões recuperado linear, com o qual é possível se obter o valor de tensão recuperada no nó de análise.

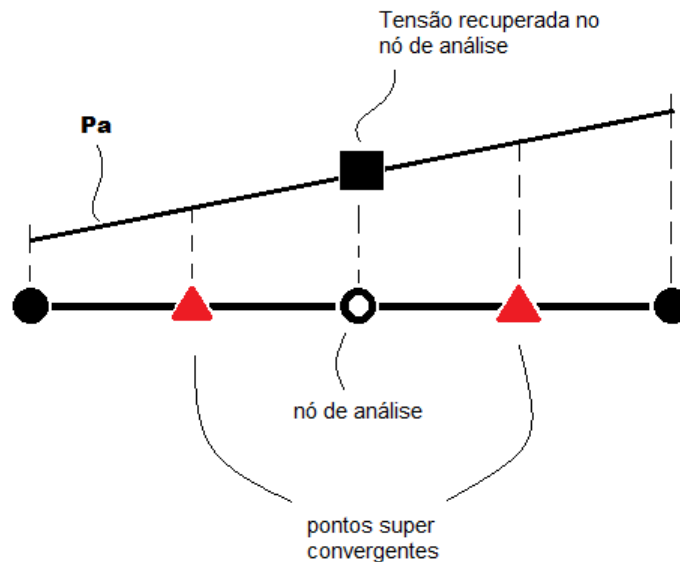


Figura 6 – Exemplo da expansão polinomial em um subdomínio formado por elementos lineares.

Fonte: Próprio autor (2018).

É importante observar que, originalmente, o campo de tensões aproximado seria descontínuo, em se tratando de dois elementos lineares, como é o caso da figura. Dessa maneira, a

matriz A e o vetor b podem ser construídos da forma:

$$A = \begin{bmatrix} nps & \sum_{k=1}^{nps} x_k \\ \sum_{k=1}^{nps} x_k & \sum_{k=1}^{nps} x_k^2 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$b = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{nps} \sigma(x_k) \\ \sum_{k=1}^{nps} x_k \sigma(x_k) \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Caso o nó de análise se encontre em um dos extremos do domínio, não é possível se construir o subdomínio para realizar a expansão polinomial e, conseqüentemente, não se consegue obter o vetor a . Nessa situação, extrapola-se o vetor de coeficientes do nó vizinho afim de se calcular a tensão recuperada no nó da fronteira (Zienkiewicz e Zhu, 1992b).

Por fim, o campo de tensões recuperado pode ser calculado através da eq. 5.22.

5.7 DEFINIÇÃO DO CRITÉRIO DE REFINAMENTO E DE OTIMALIDADE DE MALHA

Zienkiewicz e Zhu (1987) propuseram um critério de refinamento baseado na avaliação da norma energia do erro global e localmente.

Globalmente, pode-se definir que uma solução qualquer é satisfatória quando obedece a inequação

$$\eta \leq \eta' \quad (5.36)$$

em que η representa o erro relativo global dado pela eq. 5.6 e η' representa um valor máximo de erro percentual prescrito para a solução normalmente definido pelo projetista.

Localmente, Zienkiewicz e Zhu (1987) definiram que, em uma malha ótima, o erro é igualmente distribuído entre todos os elementos. Dessa maneira, pode-se traduzir a restrição da eq. 5.36 através da imposição de um valor limite para o erro em cada elemento da malha. Logo,

$$\left(\|e_u\|_E \right)_{el}^{old} \leq \eta' \left(\frac{\|u_o\|^2}{m} \right)^{1/2} \equiv e_m, \quad (5.37)$$

em que $(\|e_u\|_E)_{el}^{old}$ é a norma energia do erro em um elemento qualquer de uma malha corrente, m é o número de elementos na malha corrente e e_m é o máximo erro admissível em termos energéticos para qualquer elemento da malha. Uma vez que não se conhece a norma energia global da solução exata, pode-se substituir o termo $\|u_o\|^2$ por outro aproximadamente equivalente obedecendo ao critério de ortogonalidade presente na eq. 5.11. Dessa maneira e_m pode ser escrito como

$$e_m \equiv \eta' \left(\frac{\|u\|^2 + \|e_u^*\|_E^2}{m} \right)^{1/2}, \quad (5.38)$$

onde $\|u\|^2$ é a norma energia global da solução aproximada que se dispõe e $\|e_u^*\|$ é a norma energia global do erro estimado.

5.8 ESTRATÉGIAS DE REFINO ADAPTATIVO DE MALHA

Nesta seção será apresentada a formulação para as duas técnicas de refino h-adaptativo que serão comparadas neste trabalho: Ch^p e IEDR

5.8.1 Metodologia Ch^p

A fim de se definir o novo tamanho do elemento, Zienkiewicz e Zhu (1987) desenvolveram uma técnica de refinamento assumindo um comportamento assintótico da taxa de convergência do erro, previsto na eq. 5.18, em que o erro converge obedecendo uma função composta por uma constante atrelada ao problema em específico, C , e o tamanho dos elementos utilizados na malha, h , elevado ao grau polinomial, p , da função de forma utilizada na análise.

Inicialmente, define-se um parâmetro de refinamento elementar ξ_{el} ,

$$\xi_{el} = \frac{(\|e_u\|_E)_{el}^{old}}{e_m}, \quad (5.39)$$

onde o numerador representa a norma energia do erro em um elemento qualquer de uma malha corrente e o denominador representa o máximo erro admissível em termos energéticos para qualquer elemento da malha. Com base na restrição imposta na eq. 5.37, deve-se refinar o elemento quando $\xi_{el} > 1$ e aumentar o tamanho do elemento quando $\xi_{el} < 1$. Caso $\xi_{el} = 1$, tem-se que o tamanho do elemento é ótimo (Zienkiewicz e Zhu, 1987).

Dessa maneira, o novo tamanho do elemento é calculado por (Zienkiewicz e Zhu, 1987)

$$h_{new} = \frac{h_{old}}{\xi_{el}^{\frac{1}{p}}}, \quad (5.40)$$

sendo h_{new} o novo tamanho para o elemento el e h_{old} é o tamanho elemento corrente el .

5.8.2 Metodologia IEDR

A segunda metodologia de refino escolhida para ser empregada neste trabalho, a IEDR, proposta por Pereira et al. (2016), é fundamentada no conceito da recuperação quadrática do erro em termos de densidade de energia de deformação, com solução auxiliada por técnicas de otimização.

Por se tratar de uma metodologia recentemente desenvolvida, a sua utilização restringe-se, a princípio, a somente elementos finitos lineares (Pereira et al, 2016).

A formulação do método parte da análise de um elemento finito linear em um problema de elasticidade 1D, conforme a Fig. 7.

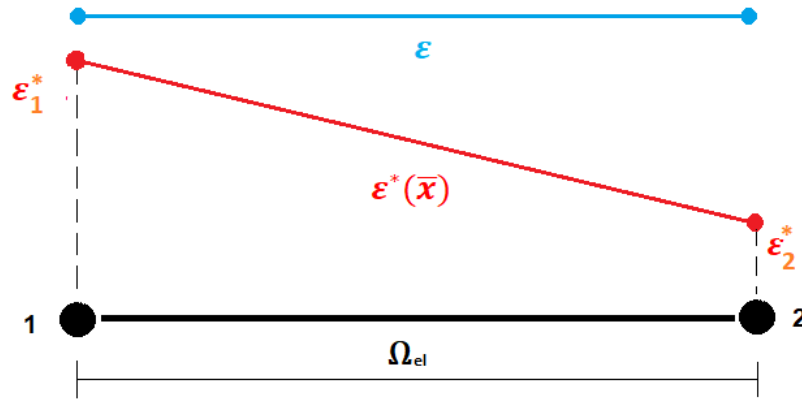


Figura 7 – Construção de uma função deformação recuperada em um elemento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na figura (7) ε_1^* e ε_2^* são as deformações recuperadas nos nós locais 1 e 2, respectivamente, definidos no domínio elementar $\Omega_{el} = (-\frac{h_o}{2}, \frac{h_o}{2})$, sendo h_o a dimensão original do elemento finito, num sistema de coordenadas normalizado \bar{x} . Uma função recuperada que descreve o comportamento da derivada da solução no elemento pode ser escrita como uma função linear dada por:

$$\varepsilon^*(\bar{x}) = \bar{B}_o + \bar{B}_1\bar{x}, \quad (5.41)$$

onde os coeficientes \bar{B}_o e \bar{B}_1 são definidos por $\bar{B}_o = (\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*)/2$ e $\bar{B}_1 = (\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)/h_o$. Então, uma função erro em deformação, $e_\varepsilon(x)$, é definida como

$$\begin{aligned} e_\varepsilon(\bar{x}) &= \varepsilon^*(\bar{x}) - \varepsilon \\ &= (\bar{B}_o - \varepsilon) + \bar{B}_1\bar{x} \\ &= B_o + B_1\bar{x}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde $B_o = \bar{B}_o - \varepsilon$ e $B_1 = \bar{B}_1$. Dessa forma é possível definir uma função densidade do erro em energia

$$\begin{aligned} \Delta\mu(\bar{x}) &= e_\varepsilon(\bar{x})AEe_\varepsilon(\bar{x}) \\ &= AE(B_o + B_1\bar{x})^2 = AE(B_o^2 + 2B_oB_1\bar{x} + B_1^2\bar{x}^2) \\ &= \Delta\mu_o^e + g^e\bar{x} + H^e\bar{x}^2 \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde $\Delta\mu_o^e = AEB_o^2$, $g^e = AE2B_oB_1$ e $H^e = AEB_1^2$, sendo $\Delta\mu(\bar{x})$ quadrática em \bar{x} . Logo, o quadrado do erro total em energia pode ser definido em um elemento de dimensão genérica:

$$E^2(h) = \int_{-\frac{h_o}{2}}^{\frac{h_o}{2}} \Delta\mu(\bar{x})dx = \Delta\mu_o^e h + \frac{H^e}{12} h^3 \quad (5.44)$$

É importante notar na eq. 5.44 que o coeficiente g^e associado ao termo linear na eq. 5.43 desaparece e isso se deve ao intervalo de integração utilizado no sistema de coordenadas assumido. Outro ponto importante é notar que a medida $E(h)$ é definida ao quadrado para se fazer associação direta a norma energia do erro em (5.3).

Frente ao objetivo de se determinar um novo tamanho de elemento, que seja o maior possível, mas que contenha uma quantidade limitada de erro, e_m , é possível definir um problema de otimização, posto como:

$$P = \begin{array}{l} \text{minimizar} : -h_{new} \\ \text{sujeito a} : E_{new}^2 \leq e_m^2 \end{array} \quad (5.45)$$

quando escrito em termos de uma função restrição do erro no elemento, g , e uma função objetivo, f , o problema de otimização P , torna-se:

$$P = \begin{array}{l} \text{minimizar} : f(h_{new}) = -h_{new} \\ \text{sujeito a} : g(h_{new}) = E_{new}^2 - e_m^2 \leq 0 \end{array} \quad (5.46)$$

Com base na equação 5.44 pode-se definir o erro quadrático total em um elemento da nova malha, da forma:

$$E_{new}^2 = \Delta\mu_o^e h_{new} + \frac{H^e}{12} h_{new}^3 \quad (5.47)$$

Segundo Bertsekas (1995), P pode ser resolvido através da teoria dos multiplicadores de Lagrange. Dessa maneira, se h_{new}^* é o mínimo tamanho de elemento que satisfaz a restrição, então a seguinte relação é válida:

$$\nabla f(h_{new}^*) + \sum_{i=1}^k \lambda_i^* \nabla g_i(h_{new}^*) = 0, \quad (5.48)$$

onde ∇f e ∇g são os gradientes das funções objetivo e restrição respectivamente, e λ_i corresponde ao i -ésimo multiplicador de Lagrange correspondente a i -ésima função de restrição capaz de satisfazer a condição necessária de otimalidade representada pela eq. 5.48.

Convenientemente, pode-se escrever P através de uma única função equivalente denominada função Lagrangeano, definida por

$$L(h_{new}, \lambda) = f(h_{new}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(h_{new}). \quad (5.49)$$

Logo, a condição necessária de primeira ordem é atendida se

$$\nabla_{h_{new}} L(h_{new}^*, \lambda^*) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_{\lambda} L(h_{new}^*, \lambda^*) = 0. \quad (5.50)$$

Dessa maneira, a função lagrangeano é definida por

$$L(h_{new}, \lambda) = -h_{new} + \lambda \left[\Delta\mu_o^e h_{new} + \frac{H^e}{12} h_{new}^3 - e_m^2 \right]. \quad (5.51)$$

Aplicando as condições necessárias de primeira ordem presentes na eq. 5.50, tem-se

$$\frac{dL(h_{new}^*, \lambda^*)}{dh_{new}} = 0 = -1 + \lambda^* \left[\Delta\mu_o^e + \frac{H^e}{4} (h_{new}^*)^2 \right] \quad (5.52)$$

$$\frac{dL(h_{new}^*, \lambda^*)}{d\lambda^*} = 0 = \Delta\mu_o^e h_{new}^* + \frac{H^e}{12} (h_{new}^*)^3 - e_m^2 = g(h_{new}^*). \quad (5.53)$$

Dessa forma, sabendo-se que os coeficientes $\Delta\mu_o^e$ e H^e são positivos, tem-se $\lambda^* > 0$ dado por

$$\lambda^* = \left[\Delta\mu_o^e + \frac{H^e}{4} (h_{new}^*)^2 \right]^{-1}. \quad (5.54)$$

Portanto, o tamanho de elemento ótimo h_{new}^* é obtido a partir da solução real positiva da eq. 5.53, da forma

$$\frac{H^e}{12} (h_{new}^*)^3 + \Delta\mu_o^e h_{new}^* - e_m^2 = 0, \quad (5.55)$$

incorporando então o erro prescrito e_m .

6 METODOLOGIA

Este capítulo tem por finalidade elaborar e organizar os procedimentos experimentais que serão realizados para se alcançar os objetivos propostos neste trabalho.

A avaliação de cada objetivo específico será realizada separadamente. As simulações se desenvolverão sobre um problema de elasticidade unidimensional em barra deformável, o mesmo presente na figura (2), modelado matematicamente através da eq. (4.1), reproduzida aqui:

$$\frac{d}{dx} \left(A(x)E(x) \frac{du_o(x)}{dx} \right) + b(x) = 0, \quad (6.1)$$

onde $u_o(x)$ é a função exata em deslocamento que se busca aproximar e $b(x)$ é uma função duplamente integrável no domínio de análise que representa o carregamento externo sob o qual a barra está submetida.

Serão avaliados 4 casos distintos. Em cada caso, serão avaliados diferentes carregamentos e condições de contorno, posteriormente especificados no capítulo 7. Para cada um dos casos será analisado o desempenho das metodologias de recuperação de solução para estimativa de erro e das técnicas de refino h-adaptativo.

A obtenção dos resultados será realizada com o auxílio de uma rotina computacional capaz de resolver o problema proposto através do MEF. Será implementada na rotina a formulação do MEF capaz de realizar a aproximação utilizando funções de forma de até grau polinomial cúbico, os métodos de estimativa de erro por recuperação (MNS, ZZ e SPR) e as metodologias de refino adaptativo (Ch^p e IEDR).

A justificativa de se implementar o método de elementos finitos para a obtenção de soluções aproximadas utilizando elementos de até grau três se deve, inicialmente, à necessidade da validação da implementação da formulação, uma vez que não há janela para discussão da formulação já consagrada como o MEF. Para a validação, serão comparadas as taxas de convergência do erro relativo em energia com valores típicos definidos na literatura para cada grau polinomial das funções de forma utilizadas submetidas a um refino aninhado. Na presença de diferentes graus de refinamento, serão realizadas simulações utilizando elementos de grau um, dois e três. Para a malha inicial, serão utilizados 3 elementos de tamanhos iguais, para a segunda malha dividem-se os elementos da primeira pela metade e, da mesma maneira, para terceira dividem-se os elementos da segunda ao meio.

A necessidade de se verificar o desempenho das estimativas de erro por recuperação é outro fator que justifica a implementação de aproximações utilizando elementos de até grau três. A fim de se analisar como cada método de recuperação de solução se comporta, serão realizadas simulações com o intuito de verificar a influência do tipo de elemento utilizado na aproximação da solução e a influência da quantidade de elementos utilizados na malha, ou seja, deseja-se verificar como as estimativas se comportam perante refino h e p. Para isso, para cada

um dos tipos de elemento disponíveis serão calculados os índices de efetividade das estimativas de erro considerando cada um dos três métodos de recuperação de solução propostos (MNS, ZZ e SPR). A mesma estratégia de refino aninhado utilizada na validação da rotina computacional será reproduzida nesta etapa, comparando o comportamento dos valores do índice de efetividade calculados mediante ao aumento do número de elementos na malha, utilizando um mesmo tipo de elemento em todo o domínio.

Por fim, será realizada uma comparação entre o desempenho das duas técnicas de refino adaptativo de malha. Nesta etapa, as simulações serão feitas utilizando somente malhas contendo elementos lineares devido à limitação imposta pela construção da metodologia IEDR. Será avaliado o comportamento de cada uma das técnicas frente às estimativas de erro provenientes de cada um dos métodos de recuperação e também a diferentes valores de erros prescritos. De maneira geral, pretende-se identificar com esses últimos experimentos se o método de recuperação do campo de tensões utilizado na estimativa de erro exerce influência significativa no desempenho do processo de refino h-adaptativo. Paralelamente, busca-se definir qual método melhor se adéqua a cada técnica de refino avaliada, visando um processo adaptativo que utiliza o menor número de elementos possíveis para atingir a convergência.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta capítulo serão apresentados os experimentos numéricos realizados para as verificações previstas nos objetivos deste trabalho.

Serão avaliados 4 casos. Os casos analisados se diferem entre si em termos do carregamento externo axial empregado e das condições de contorno que derivam do tipo de sistema físico. Para cada um dos casos, os experimentos serão realizados em 3 etapas de baterias de simulação.

A primeira etapa consiste na verificação da implementação da formulação MEF. Nesta etapa, o objetivo é avaliar se a formulação MEF foi implementada corretamente na rotina computacional. Para isso, serão realizadas simulações utilizando elementos de grau 1, 2 e 3. Para cada grau elementar, serão realizadas 3 simulações num regime de refino aninhado de malha, ou seja, é empregado um refino padronizado: a primeira malha contendo 3 elementos de tamanhos iguais, a segunda malha, com 6 elementos, é gerada dividindo os elementos da primeira pela metade e, por fim, a última malha, com 12 elementos, é criada dividindo os elementos da segunda malha pela metade. Feito isso, serão construídas curvas que mostram o comportamento do erro relativo exato da solução aproximada em função do número de elementos da malha para cada um dos tipos de elemento utilizados com o intuito de comparar os valores de inclinação da curva obtida com valores típicos presentes na literatura.

A segunda etapa consiste na verificação do índice de efetividade das estimativas provenientes dos 3 métodos de recuperação de solução abordados neste trabalho (MNS, ZZ e SPR). O procedimento das simulações que serão realizadas nesta etapa é idêntico ao que será realizado na etapa anterior. A diferença é que o objetivo aqui é extrair curvas que evidenciem o comportamento de como as estimativas realizadas com base nos diferentes estimadores se comportam frente ao refino p ao refino h .

A última etapa engloba a comparação entre as técnicas de refino h -adaptativo. As simulações desta etapa se restringirão ao uso de elementos lineares devido a natureza da técnica IEDR, daqui em diante será mencionada como RQE por conveniência. Serão extraídas curvas de erro relativo estimado da solução aproximada em função do número de elementos na malha. Essa análise será efetuada para estimativas feitas a partir dos 3 métodos de recuperação de solução.

Atribuindo um mesmo valor de erro prescrito e uma mesma malha inicial, extraíram-se valores de erro relativo em energia estimado η^* , o número de elementos na malha utilizada para a aproximação, o índice de efetividade θ para a estimativa e um parâmetro definido como escalamento que se refere ao quanto a malha adaptada precisa ser ajustada para que seu comprimento total seja igual ao comprimento do domínio do problema. A fig. (8) contém um exemplo de um processo h -adaptativo utilizando uma malha inicial contendo 2 elementos que ajuda a exemplificar como se dá a geração da malha adaptada e o que é o escalamento.

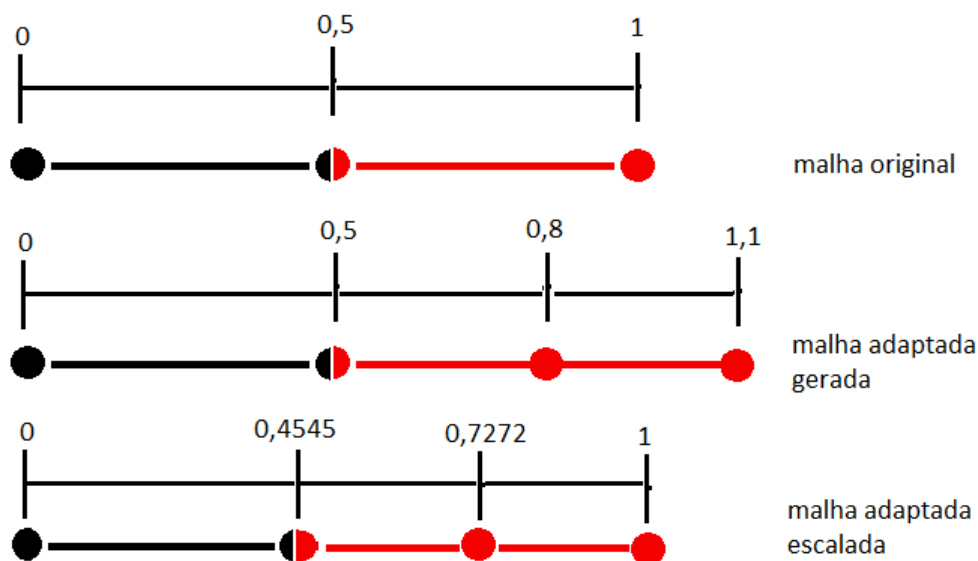


Figura 8 – Exemplificação do escalamento presente na geração da nova malha adaptada.

Fonte: Próprio autor (2018).

Considerando que uma técnica de refino adaptativo qualquer determinou, através de um critério de otimalidade de malha, que o novo tamanho do elemento em vermelho, com tamanho original $h_{old} = 0,5$, deverá ser $h_{new} = 0,3$. Entretanto, como existe uma sobra de 0,2 em relação ao tamanho do elemento original, é preciso que o espaço seja preenchido com um novo elemento. Para realizar isso, o gerador de malha utilizado calcula a razão $\frac{h_{old}}{h_{new}}$. Se o resultado dessa razão não for um número inteiro, o resultado é arredondado para cima e o valor final representa quantos novos elementos de tamanho h_{new} deverão ser introduzidos no lugar do elemento original de tamanho h_{old} . Na figura, o tamanho ótimo para o elemento em vermelho de tamanho $h_{old} = 0,5$ foi definido como $h_{new} = 0,3$. O gerador de malha determinou que a razão $\frac{h_{old}}{h_{new}}$ é igual a aproximadamente 1,66. Dessa forma, arredondando para cima, tem-se que dois novos elementos de tamanho $h_{new} = 0,3$ devem ser introduzidos no lugar do elemento original de tamanho $h_{old} = 0,5$. Contudo, nota-se que a soma do tamanho de todos os elementos da malha adaptada gerada excede o comprimento do domínio, resultando na necessidade de um ajuste. Esse ajuste é realizado pelo parâmetro de escalamento que foi definido anteriormente. Para o exemplo da figura, ele é calculado pela razão entre o comprimento de malha original, 1, e o comprimento da malha adaptada gerada, 1,1, resultando em um valor aproximadamente igual a 0,9090. Desse modo, cada elemento da malha adaptada escalada, mesmo o elemento em preto que não precisou ser refinado, é multiplicado pelo parâmetro de escalamento, gerando uma malha adaptada escalada com comprimento idêntico ao comprimento do domínio do problema.

Devido a esta natureza do gerador de malha adaptada, jugou-se necessário avaliar também se um controle do refino tem influencia significativa na adaptatividade. Para isso, alguns testes estabelecendo restrições de crescimento e redução do tamanho de elemento serão realizados.

De maneira geral, esta etapa busca determinar qual das duas técnicas de refino apresenta o melhor desempenho para um determinado carregamento e qual dos métodos de recuperação maximizam esse desempenho.

7.1 CASO 1 - CARREGAMENTO LINEAR

No primeiro caso a ser tratado, a barra tem movimento de corpo rígido restrito por um engaste em uma das extremidades enquanto a outra é livre. Ao longo do comprimento, existe um carregamento externo axial distribuído. O sistema físico descrito pode ser visualizado na Fig. 9.



Figura 9 – Barra engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um carregamento axial distribuído ao longo do comprimento.

Fonte: Próprio autor (2018).

Para este caso, o carregamento é modelado como uma função polinomial linear definida no domínio de análise do problema e está representado na Fig. 10

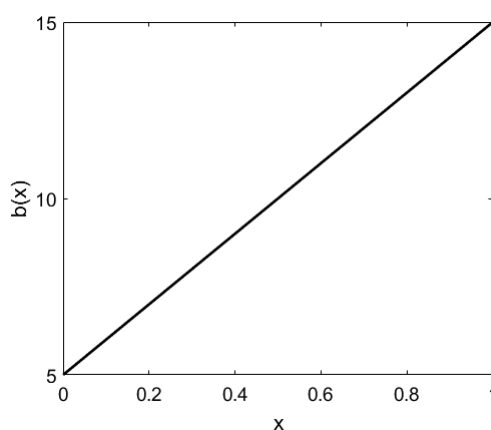


Figura 10 – Carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

A curva é gerada através da função $b(x)$ e fornece valores em unidades de força [N], da forma

$$b(x) = 10x + 5, \quad (7.1)$$

onde $x = [0, L]$, sendo L o comprimento da barra igual a 1 m. A área da seção transversal, A , da barra é igual a $0,01 \text{ m}^2$ e módulo de elasticidade do material, E , igual a 100 Pa. Da configuração do sistema físico, pode-se definir as condições de contorno do problema como sendo

$$u_o(x=0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{du_o(x=L)}{dx} = 0. \quad (7.2)$$

Definidas as condições de contorno do problema, pode-se calcular a solução exata em deslocamento, $u_o(x)$, e a solução em tensão associada, $\sigma_o(x)$, dadas por

$$u_o(x) = \frac{-5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 10x \quad \text{e} \quad (7.3)$$

$$\sigma_o(x) = -500x^2 - 500x + 1000. \quad (7.4)$$

Na sequência, serão apresentados e discutidos os experimentos numéricos utilizados para a realização dos objetivos propostos neste trabalho, especificamente para o caso do carregamento linear.

7.1.1 Verificação da formulação implementada

Tendo conhecimento da solução exata do problema, eq. 7.3 e 7.4, é possível calcular o erro relativo exato da solução aproximada, em termos de energia, a fim de se verificar as taxas de convergência do erro relativo em energia em função do número de elementos na malha.

As soluções em deslocamento e em tensão para o grupo utilizando elementos lineares podem ser observadas nas Fig. 11 e 12.

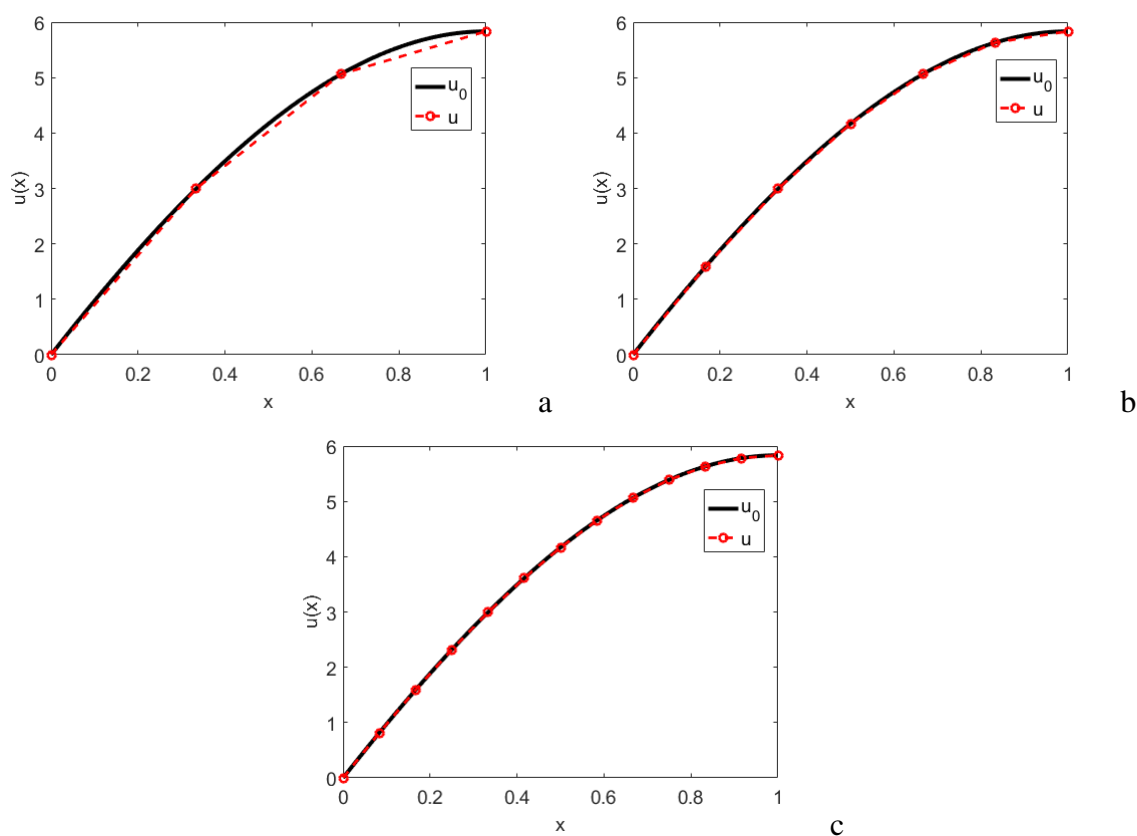


Figura 11 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

É possível notar na Fig. 11 que a condição de contorno essencial, dada por $u_0(x = 0) = 0$, é atendida. Na formulação posta na eq. (4.8) deslocamento é a variável primária que é discretizada conforme (4.9). Portanto os parâmetros nodais representam deslocamentos nos nós, visto que as funções de aproximação usadas são interpoladoras.

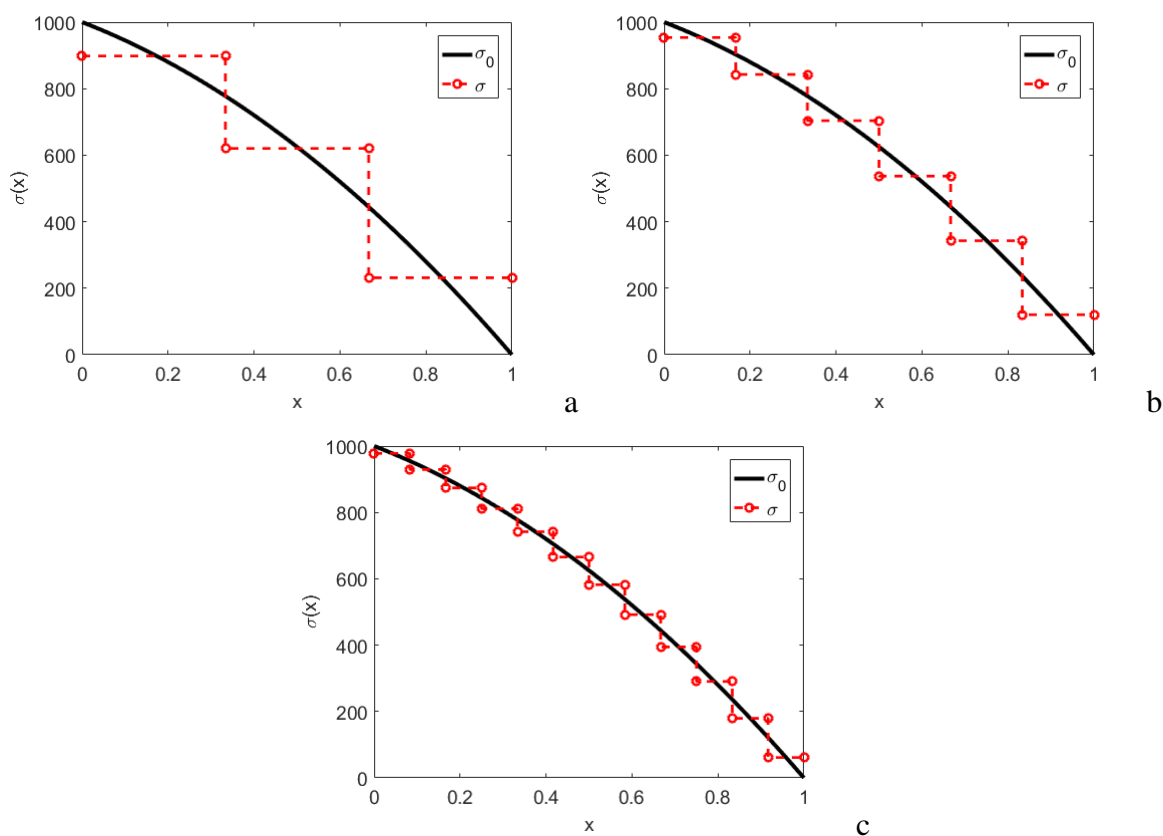


Figura 12 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 12, nota-se que a condição de contorno natural, $\frac{du_o(x=1)}{dx} = 0$ não é atendida. Isso ocorre pois tensão é uma variável secundária. A tensão é obtida pela lei de Hooke, na qual tem-se a deformação. A deformação por sua vez é obtida através da relação cinemática com o deslocamento. Portanto, tensão e deformação não são variáveis nodais e não é possível garantir que elas se adequem às condições de contorno.

Como as funções de forma são seccionalmente lineares, suas derivadas são constantes em cada elemento. Isso acarreta em uma solução em tensão constante no elemento e descontínua entre dois elementos. Percebe-se também uma característica dessas discontinuidades quando os elementos são todos do mesmo tamanho: a diferença entre os valores de tensão em um nó é maior quando a inclinação da curva da solução em tensão exata é maior.

As soluções em deslocamento e em tensão para o grupo utilizando elementos quadráticos podem ser observadas nas Fig.13 e 14

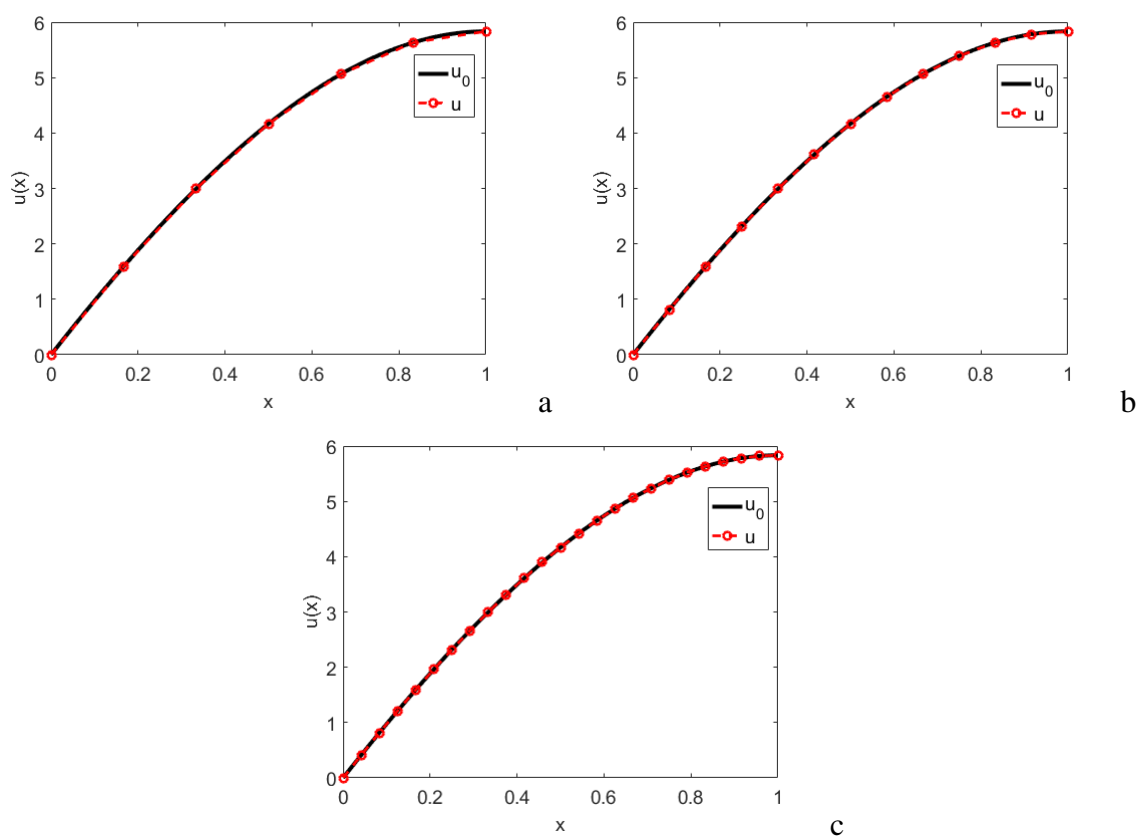


Figura 13 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 2$ para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

A utilização de elementos quadráticos proporcionou uma aproximação melhor da solução exata se comparada com a aproximação utilizando elementos lineares, pode-se perceber já na Fig. 13a que a curva em vermelho está bem mais próxima da curva preta se comparado com a Fig. 11a.

Nota-se, também, que a condição de contorno essencial permanece garantida com a utilização das funções de forma quadráticas.

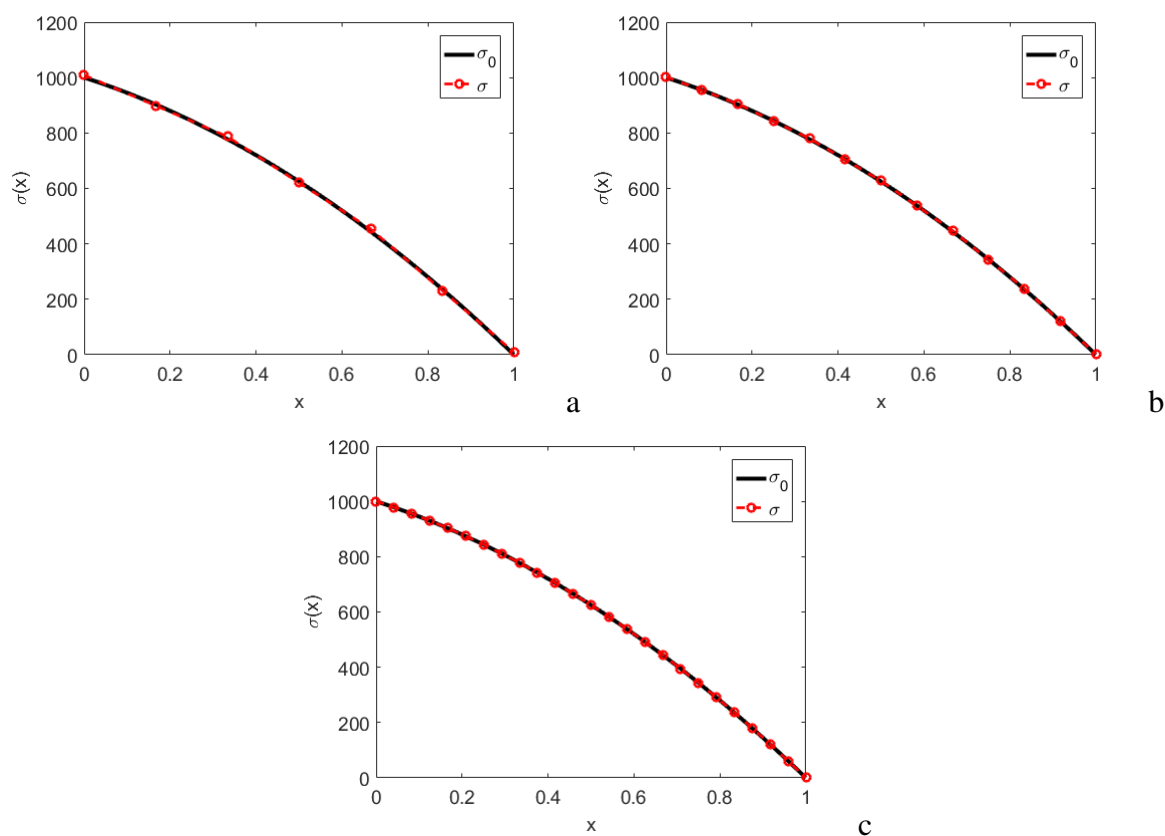


Figura 14 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 2$ para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na aproximação em tensão, presente na Fig. 14, pode-se notar uma melhora significativa se comparada com a aproximação utilizando elementos lineares. Quando $p = 1$, a tensão nos elementos é constante e descontínua, enquanto que para $p = 2$ a tensão é linear e, particularmente para este caso de carregamento linear, contínua, ou seja, não existem saltos entre os valores de tensões nos nós de conexão entre os elementos. Deve-se enfatizar que esta continuidade aqui verificada não é imposta, sendo somente casualidade. De maneira geral, as tensões seriam descontínuas visto que as funções de aproximação são de classe $C^0(\Omega)$.

As soluções em deslocamento e em tensão utilizando elementos cúbicos podem ser observadas nas Fig.15 e 16

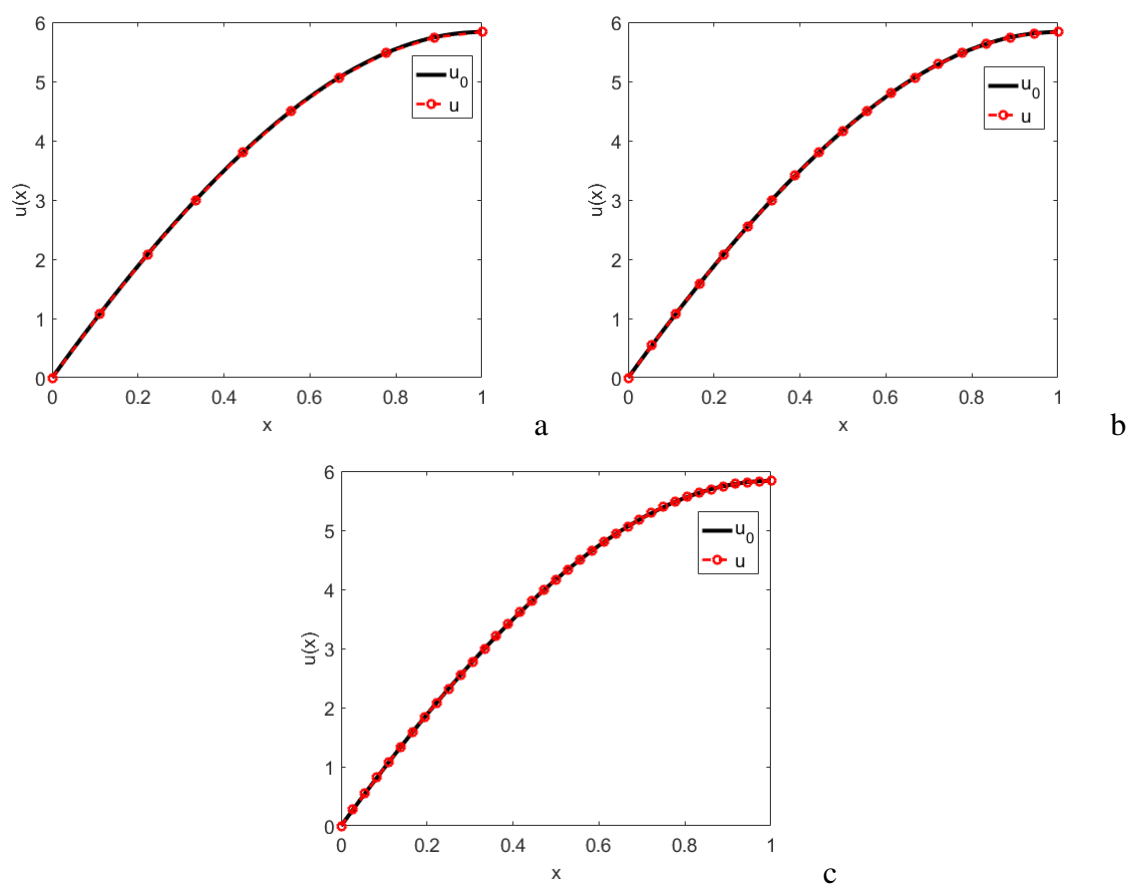


Figura 15 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 3$ para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Conforme o esperado, a malha contendo elementos cúbicos forneceu a melhor aproximação uma vez que é capaz de reproduzir exatamente a solução real do problema, também cúbica.

Dessa forma, não só a condição de contorno essencial é assegurada, como também se garantirá a condição de contorno natural na extremidade direita.

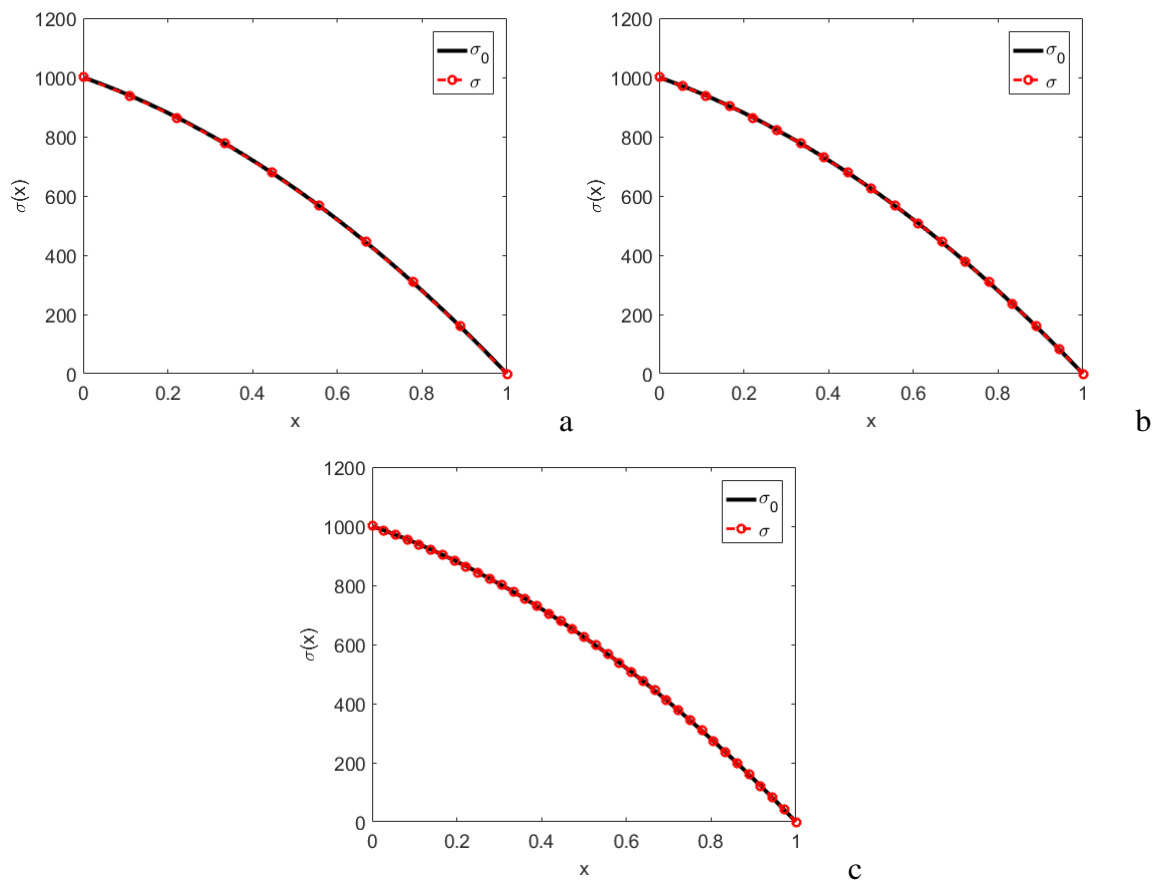


Figura 16 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 3$ para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Uma vez conhecida a solução exata deste problema, foi possível calcular o erro relativo em energia para cada uma das simulações. Na Fig. 17, estão presentes as curvas de erro relativo em energia em função do número de elementos na malha para simulações utilizando elementos lineares, quadráticos e cúbicos.

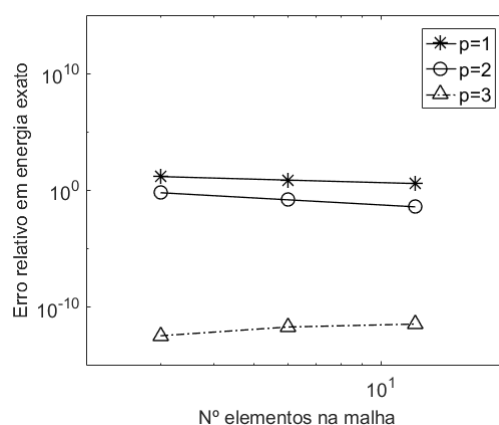


Figura 17 – Comparação entre as curvas de convergência do erro relativo em energia para as malhas contendo elementos lineares, quadráticos e cúbicos obedecendo a um refino aninhado para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Nesta figura percebe-se que a curva $p = 3$ apresenta valores de erro relativo muito baixos se comparados aos valores apresentados para $p = 1$ e $p = 2$. Esse comportamento se deve ao fato de que, para carregamentos lineares, uma aproximação utilizando elementos cúbicos é capaz de aproximar exatamente a solução exata do problema. Portanto, os valores de erro relativo apresentados, da ordem 10^{-10} , representam erro associado à máquina, por exemplo, erros de arredondamento ou truncamento e não erro de discretização do problema. Contudo, ainda pode-se observar na curva $p = 3$ que o valor do erro aumenta conforme o número de elementos na malha aumenta. Isso ocorre, possivelmente, porque tendo mais elementos, mais operações são realizadas, tais como: mais elementos para integrar matriz de rigidez e vetor de força, maior sistema de equações para resolver, mais contribuições elementares de erro para integrar, etc.

No que se refere às curvas $p = 1$ e $p = 2$, nota-se que a taxa de convergência do erro relativo em energia, ou seja a inclinação da curva, é constante. Segundo Szabo e Bhabuska (2011), para problemas unidimensionais sem singularidades e em um refino aninhado, as taxas de convergência do erro relativo em função do número de graus de liberdade na malha é igual ao grau polinomial das funções de forma que foram utilizadas na aproximação. Portanto, para a curva $p = 1$, espera-se que a taxa de convergência do erro seja igual a 1, e para a curva $p = 2$, espera-se que a taxa de convergência do erro seja igual a 2. Os valores de taxa de convergência do erro relativo calculados a partir das curvas presentes na Fig. 17 são 0,997 e 2,001, para $p = 1$ e $p = 2$ respectivamente. É importante notar que a figura 17 apresenta uma curva do erro relativo exato em energia em função do número de elementos na malha, enquanto que na literatura a taxa de convergência do erro típica conhecida é extraída de uma curva do erro relativo em função do número de graus de liberdade. No caso de um problema unidimensional de barra engastada em uma extremidade e livre na outra, o número de graus de liberdade é igual ao número de elementos na malha multiplicado pelo tipo p do elemento utilizado. Consequentemente, a

inclinação da curva calculada em função do número de elementos, na escala logarítmica, é idêntica à calculada em função do número de graus de liberdade.

A avaliação da taxa de convergência do erro relativo mostraram que os valores obtidos se aproximam dos valores propostos no trabalho de Szabo e Bhabuska (2011), dessa forma é seguro dizer que para o carregamento em questão a formulação foi implementada apropriadamente.

7.1.2 Estimativa de erro a posteriori

As Fig. 18-20 apresentam uma comparação entre as soluções exata, aproximada e recuperada em termos de tensão, para os métodos de recuperação MNS, ZZ e SPR respectivamente. Nas figuras, a curva em preto representa a solução exata conhecida, a curva em vermelho tracejado com marcador circular representa a solução aproximada e a curva em azul tracejado com marcador triangular representa a solução recuperada em tensão.

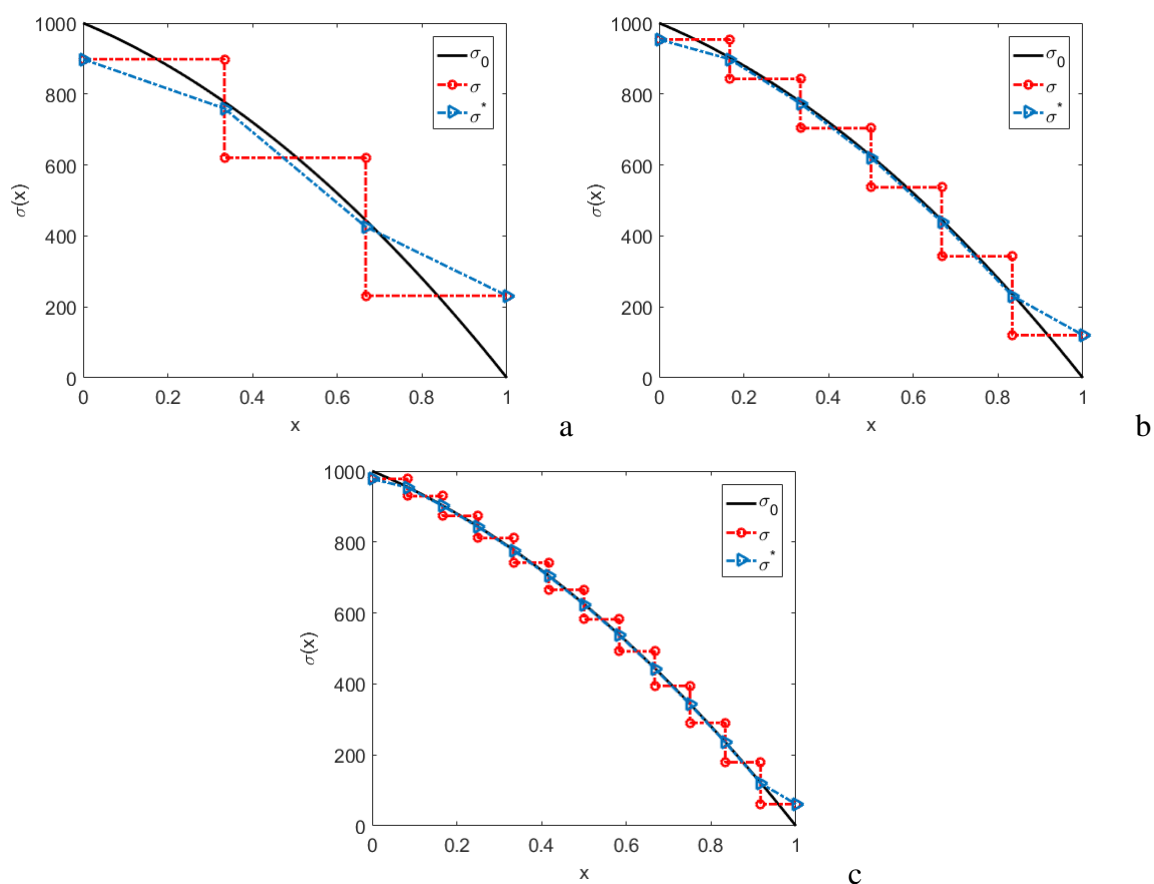


Figura 18 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via MNS para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 18, observa-se de maneira clara a suavização do campo de tensões através do método de recuperação, uma vez que o campo de tensões recuperado é contínuo. No caso do MNS, as tensões recuperadas foram calculadas realizando uma média entre os valores nodais das tensões aproximadas pelo MEF. No caso dos nós do contorno, o valor da tensão recuperada se iguala ao da tensão aproximada uma vez que associado a estes nós só existe um valor de tensão correspondente ao elemento do qual ele faz parte.

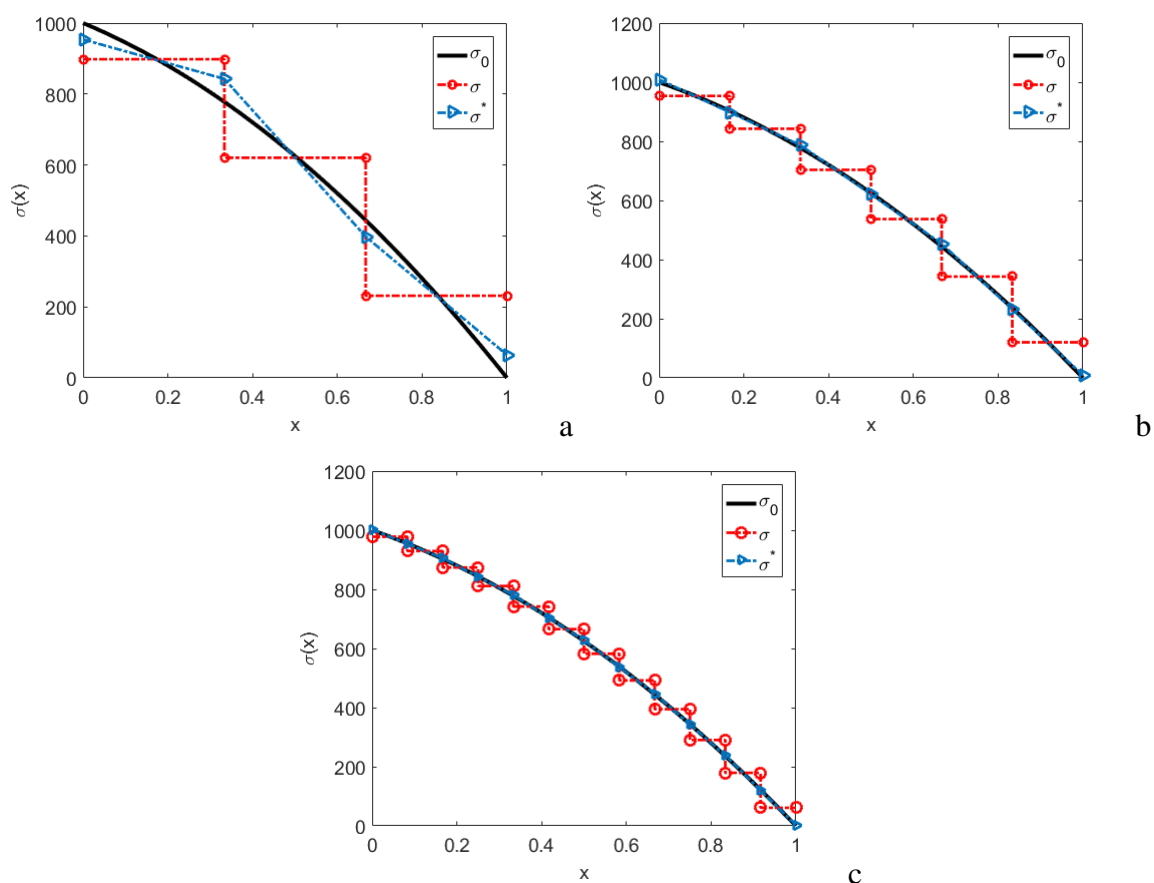


Figura 19 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via ZZ para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 19, observa-se a comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada utilizando o método ZZ. Ao se avaliar a solução suavizada em tensão se percebe que o método de recuperação fornece um campo de tensões que obedece a um padrão de simetria local. Os valores de tensão recuperada em um elemento apresentam um padrão de oposição, isto é, esses valores de tensão recuperada se distanciam da tensão aproximada na mesma proporção, tomando-se como ponto de origem a metade do elemento. Dessa maneira, a diferença entre a tensão recuperada e a tensão aproximada é igual para cada nó de um mesmo elemento, no caso de $p=1$.

Nota-se que isso exerce influência também na característica de ponderação relacionada

à matriz de massa, eq. (5.23). Isso fica evidente na Fig. 19a, onde o valor de tensão recuperado no segundo nó, $x=0,3333$ é mais próximo do valor de tensão do elemento da esquerda, muito embora ambos os elementos adjacentes ao nó tenham o mesmo tamanho.

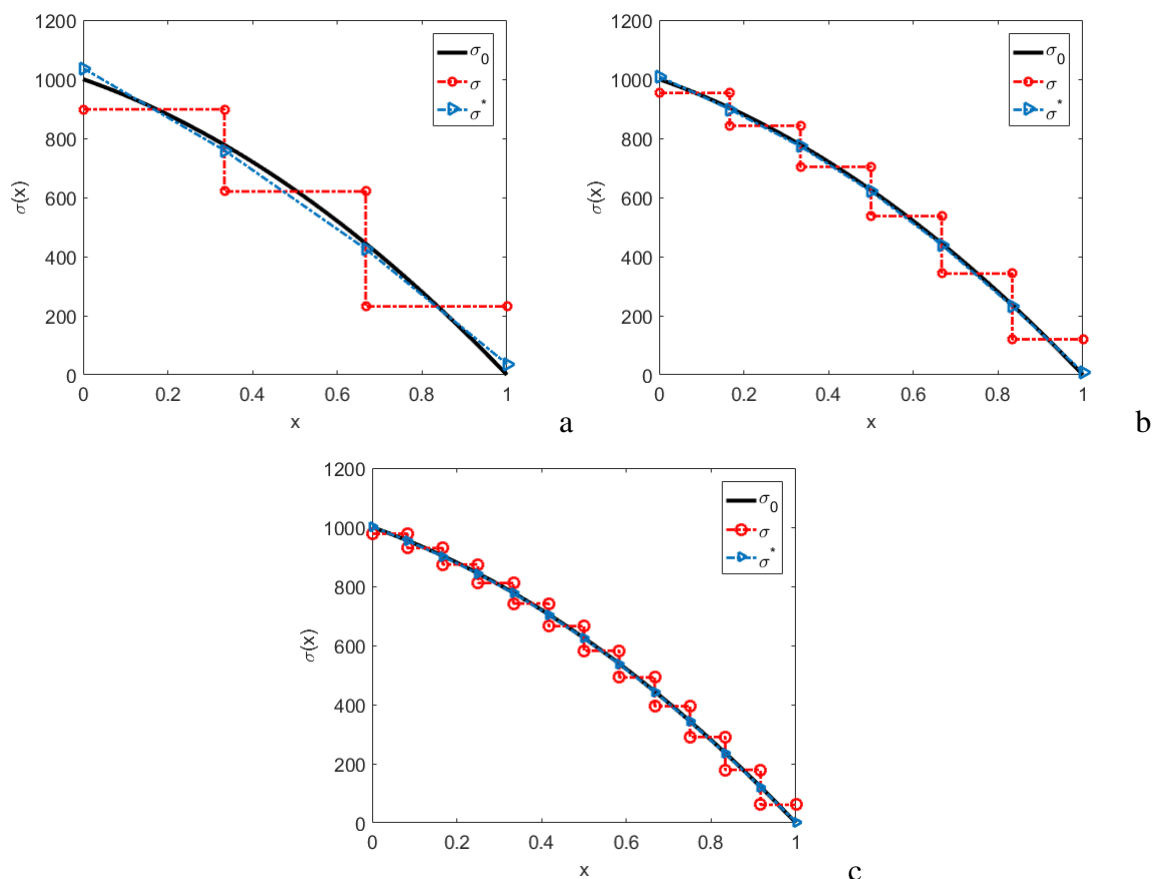


Figura 20 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via SPR para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

A Fig. 20 apresenta a comparação entre as soluções exata, aproximada e recuperada utilizando o método SPR. Pelas figuras, nota-se que a solução recuperada se aproxima bastante da solução exata já na primeira malha.

Realizando uma análise entre os três métodos de recuperação, na malha com 3 elementos se observa a diferença entre as suavizações nos elementos dos extremos e o elemento interno. Para o elemento interno, os três métodos forneceram um campo de tensões recuperadas que se aproxima bem da solução exata. Porém, nos elementos dos extremos pode-se avaliar o quão bem a recuperação é realizada. Nestes elementos, a recuperação MNS é a que mais se distancia da solução exata, seguida pela recuperação ZZ e por fim, com a melhor aproximação das três, tem-se a recuperação SPR.

A avaliação dos métodos de recuperação foi realizada também para malhas contendo elementos quadráticos e cúbicos, porém optou-se pela não apresentação das curvas comparando

as soluções exata, aproximada e recuperada uma vez que as mesma características observadas para $p = 1$ podem ser observadas para $p = 2$ e $p = 3$.

Na Fig. 21 tem-se a comparação entre o comportamento do índice de efetividade, eq. (5.12), de cada método de recuperação para malhas utilizando elementos lineares, quadráticos e cúbicos em uma situação de refino aninhado.

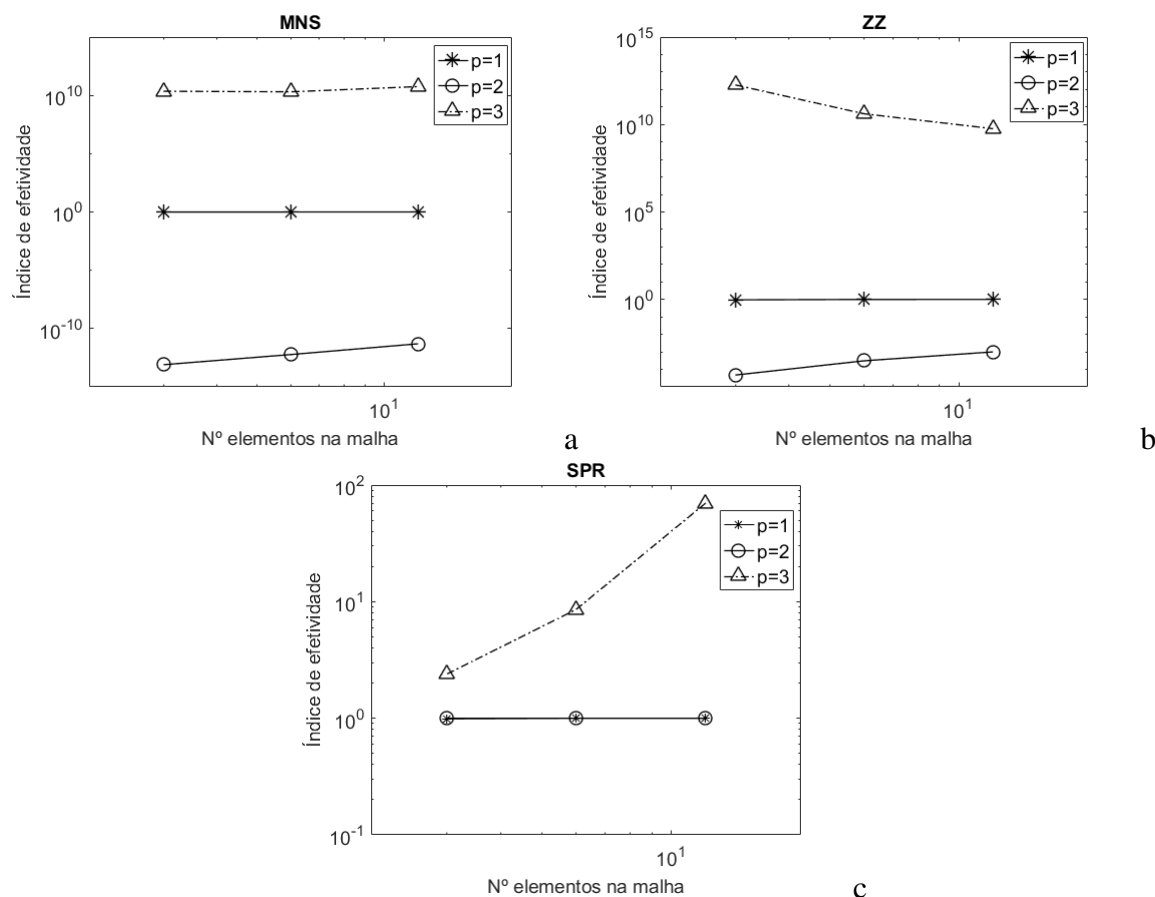


Figura 21 – Comparação entre o desenvolvimento dos índices de efetividade na situação de refino aninhado e diferentes graus elementares para as estimativas baseadas na recuperação (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 21a tem-se a avaliação do índice de efetividade para a recuperação MNS. Neste caso, as malhas utilizando elementos lineares apresentaram uma boa estimativa do erro relativo exato. Nota-se que para $p = 1$ o índice permanece muito próximo da unidade em todas as etapas de refino, na situação em que o índice de efetividade se iguala a 1 o erro estimado se iguala ao erro verdadeiro. Já para malhas utilizando elementos quadráticos e cúbicos, observam-se índices de efetividade muito distantes do valor ótimo. Particularmente, para $p = 3$ o comportamento apresentado na figura é esperado uma vez que o erro relativo exato calculado é da ordem 10^{-14} enquanto que o erro relativo estimado com base na recuperação é de ordem 10^{-3} , ou seja, a recuperação de tensão realizada para este caso resultou em uma superestimação considerável do erro da solução exata. Já para o caso em que $p = 2$ a situação se inverte, a ordem de grandeza

do erro relativo exato é de 10^{-1} enquanto que para o erro relativo recuperado é 10^{-14} , portanto também ocorreu um distanciamento entre a recuperação e a solução exata. Nesse caso, pode-se dizer que o método de recuperação não é capaz de realizar uma boa estimativa utilizando elementos quadráticos.

No caso da recuperação via ZZ, assim como no caso MNS, o método não foi capaz de produzir boas estimativas de erro para os casos $p = 2$ e $p = 3$, enquanto que $p = 1$ o índice de efetividade manteve-se constantemente próximo ao valor ótimo.

No caso da recuperação SPR, as melhores estimativas foram produzidas usando elementos lineares e quadráticos. Para elementos cúbicos, por outro lado, a estimativa já na primeira malha é ruim e tende a piorar com o refino h . Contudo, levando-se em consideração a particularidade da utilização de elementos cúbicos para o caso de carregamento linear, em que o erro é aproximadamente nulo devido a capacidade de se obter uma aproximação igual a solução a exata, então qualquer erro que seja estimado gera um índice de efetividade muito grande, pode-se concluir que o método SPR foi o que apresentou o melhor desempenho.

7.1.3 h-Adaptatividade

Na fig. (22) tem-se a comparação entre as curvas de erro relativo estimado em função do número de elementos na malha para as duas técnicas de refino, Ch^p em vermelho e RQE em preto, e na tab. (1) estão presentes os valores numéricos dos parâmetros extraídos para a análise de comparação de desempenho. Neste caso, nenhuma restrição foi imposta sobre o refino adaptativo e um erro prescrito de 2% foi estabelecido.

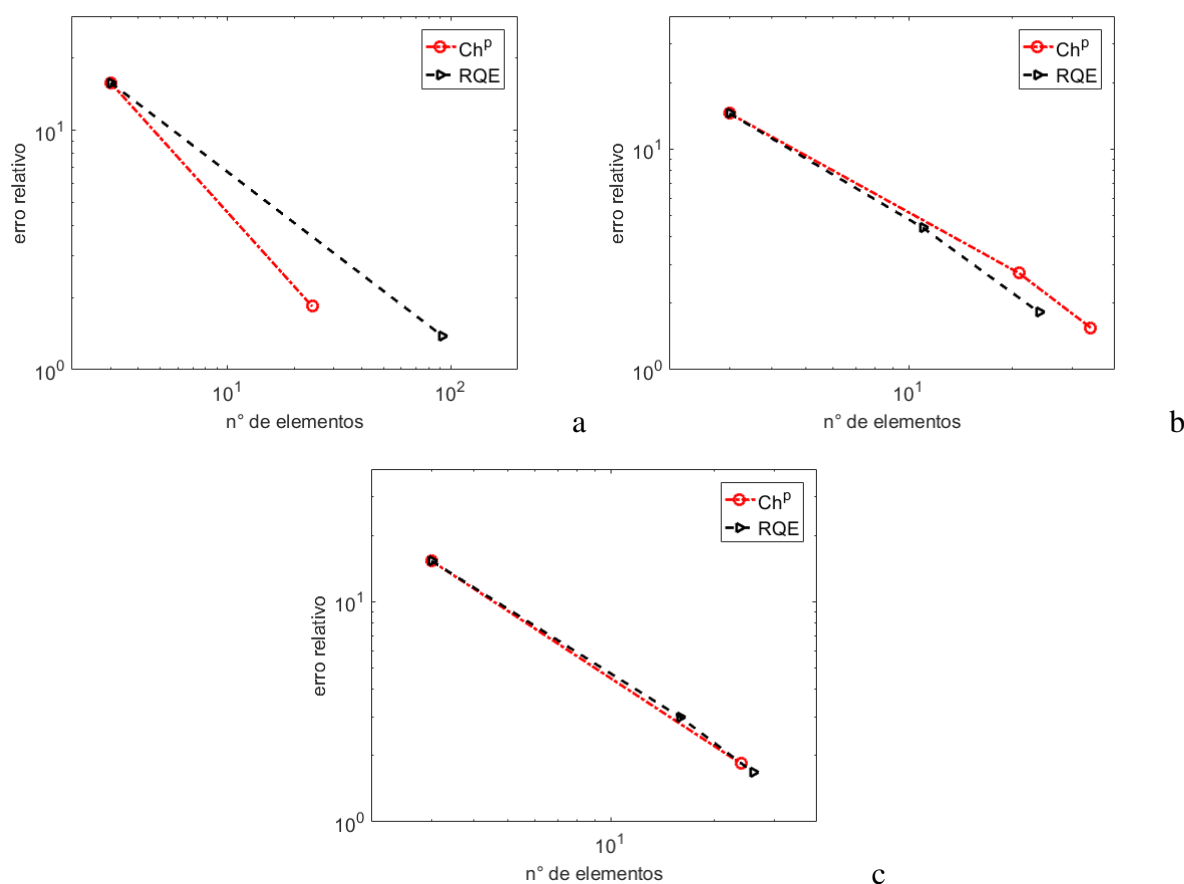


Figura 22 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

Para a estimativa de erro via MNS, fig. (22a), ambas as técnicas de refino necessitaram de apenas 1 refino para atingir um erro relativo menor que 2%. Contudo, observando a inclinação das curvas fica claro que a taxa de convergência do erro para a técnica Ch^p é mais elevada do que para a técnica RQE.

Analisando a fig. (22b) nota-se que duas etapas de refino foram necessárias em ambas as técnicas quando se utilizou a estimativa via ZZ. Contudo, em termos de taxa de convergência do erro, não se observa grande diferença entre a inclinação das curvas em nenhuma das etapas de refino. Ainda para este caso, é possível observar uma característica marcante do refino adaptativo: um aumento da taxa de convergência de uma etapa de refino em relação a uma etapa anterior.

Para o caso utilizando estimativa via SPR, (22c), nota-se que somente uma etapa de refino foi necessária para atingir a convergência para a técnica Ch^p enquanto que duas etapas foram necessárias para a técnica RQE. Porém, comparando as duas curvas, percebe-se que as taxas presentes nos refinamentos RQE são muito próximas da apresentada pela Ch^p .

Tabela 1 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear para um carregamento linear.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
15,8289	3	0,9861	0,9305	15,8289	3	0,9861	0,9413
1,8393	24	0,9998		1,3817	92	0,9702	
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
14,5022	3	0,9460	0,9048	14,5022	3	0,9460	0,9262
2,7381	21	0,9890	0,6308	4,4021	11	1,0020	0,7140
1,5494	34	0,9503		1,8214	24	1,0002	
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
15,3114	3	0,9861	0,9305	15,3114	3	0,9861	0,8472
1,8400	24	1,0007		2,9821	16	1,0009	0,7455
				1,6835	26	1,0015	

Fonte: Próprio autor (2018).

Analisando os dados da tab. (1), nota-se que, para a estimativa MNS, embora ambas as técnicas permitiram atingir a convergência com apenas um refino, a RQE mostrou-se mais agressiva em relação ao refinamento, resultando em uma malha com aproximadamente 3,8 vezes mais elementos que a técnica Ch^p . Em termos de índice de efetividade, todas as aproximações resultaram em uma estimativa de erro com θ próximo a unidade. Neste caso, para ambas as técnicas o parâmetro de escalamento calculado foi menor que 1, indicando que o comprimento do domínio distorcido é maior que o original. Contudo, nota-se que a distorção gerada pela Ch^p foi maior que gerada pela RQE.

Ao contrário do que foi observado na estimativa via MNS, para a estimativa via ZZ resultou em uma malha com o número de elementos necessário para a convergência menor para a técnica RQE do que para a Ch^p . Porém, a diferença nesse caso não foi tão significativa. Em termos de qualidade de estimativa, as aproximações realizadas utilizando malhas adaptadas utilizando a técnica RQE apresentaram um índice de efetividade mais próximo à unidade que as utilizando adaptatividade via Ch^p . A distorção no domínio na primeira etapa de refino foi maior, em ambos os casos, se comparada a estimativa via MNS. Na segunda etapa de refino percebe-se um parâmetro de escalamento ainda mais distante de 1 do que na primeira, indicando uma distorção grande. É importante citar que grandes distorções empobrecem a qualidade da malha adaptada. O motivo disso é que no processo de construção da malha adaptada, cada elemento, já com tamanho otimizado pelo critério de otimalidade de malha, é multiplicado pelo parâmetro

de escalamento para que o comprimento da malha adaptada seja o mesmo comprimento do domínio. No fim, a malha final não é mais a malha ótima calculada pela técnica de refino com base numa estimativa via recuperação, mas sim uma malha adaptada e escalado.

Impondo uma restrição no aumento dos elementos da forma $h_{new} \leq h_{old}$, notou-se que o parâmetro de escalamento calculado para a segunda malha foi mais próximo de um se comparado com o caso sem restrições, sendo 0,8119 para a técnica Ch^p e 0,7140 para a técnica RQE. Ainda, notou-se para ambas as técnicas que a quantidade de elementos em cada etapa de refino permaneceu a mesma, assim como os valores de erro calculados e índices de efetividade.

Na Fig. (23) e na Tab. (2) a comparação entre as duas técnicas de refino h-adaptativo utilizando uma restrição imposta da forma $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e erro relativo prescrito igual a 2%.

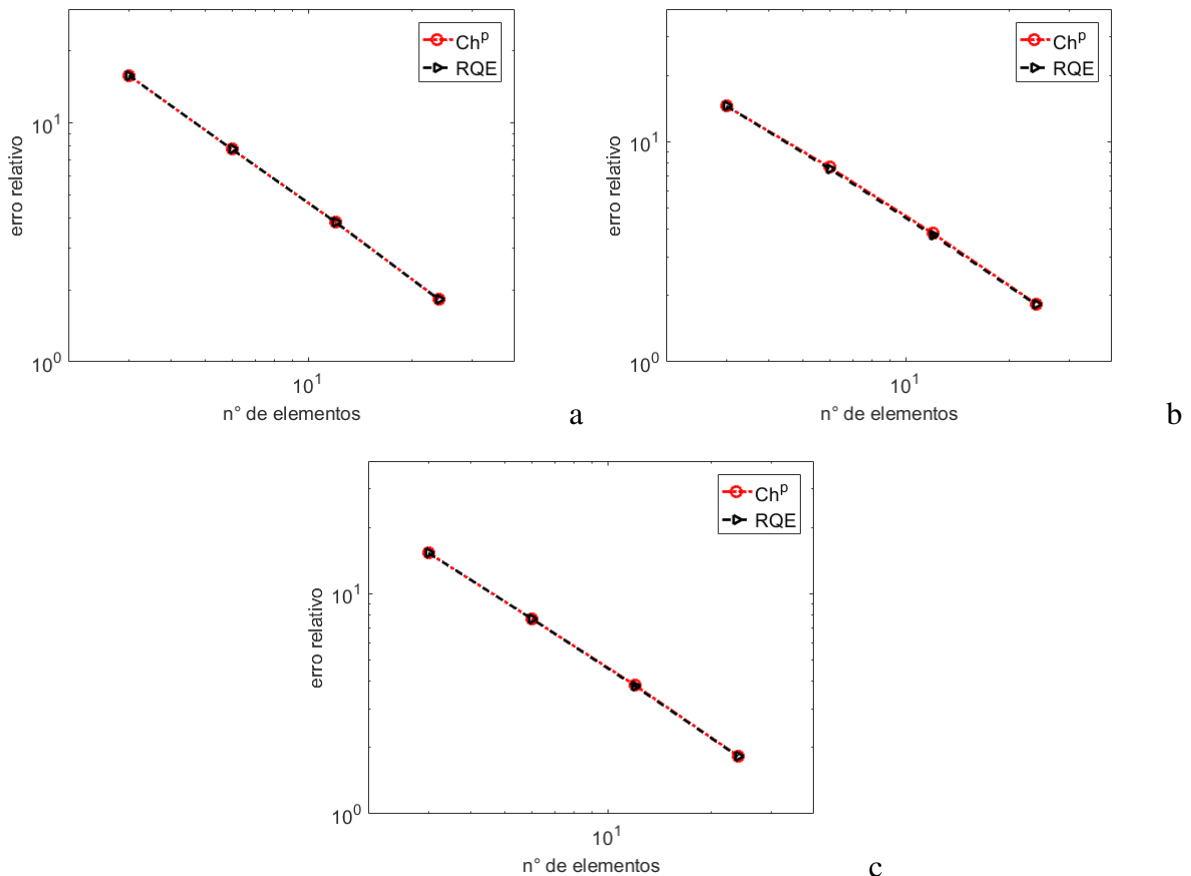


Figura 23 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.

Fonte: Próprio autor (2018).

A figura mostra que a curva relacionada a técnica RQE sobrepõe a curva relacionada a técnica Ch^p , indicando que a taxa de convergência do erro foi a mesma em todas as etapas de refino em ambos os casos. Ainda, não é possível notar um aumento significativo da taxa de

convergência entre uma etapa de refino e a etapa anterior. Isso mostra que o refino de malha empregado não foi otimizado.

Tabela 2 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
15,8289	3	0,9861	1,0000	15,8289	3	0,9861	1,0000
7,7611	6	0,9965	1,0000	7,7611	6	0,9965	1,0000
3,8520	12	0,9991	0,8071	3,8520	12	0,9991	0,7268
1,8314	24	1,0007		1,8266	24	1,0005	
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
14,5021	3	0,9460	1,0000	14,5021	3	0,9460	0,9688
7,6487	6	0,9965	1,0000	7,5229	6	0,9964	0,9920
3,8366	12	0,9991	0,8014	3,7587	12	0,9991	0,7231
1,8343	24	0,9997		1,8219	24	0,9997	
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
15,3114	3	0,9861	1,0000	15,3114	3	0,9861	1,0000
7,6997	6	0,9965	1,0000	7,6997	6	0,9965	0,9840
3,8444	12	0,9991	0,8071	3,8081	12	0,9998	0,7246
1,8327	24	1,0022		1,8248	24	1,0016	

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise da tabela mostra que, para a estimativa de erro via MNS, ambos os métodos apresentaram as mesmas malhas, mesmos valores de erro estimados, mesmos índices de efetividade e mesmos parâmetros de escalamento para as duas primeiras etapas de refino. Somente na última etapa de refino foi observado uma pequena diferença entre as duas em termos de parâmetro de escalamento, isso resultou em uma pequena diferença na qualidade das estimativas mesmo as malhas finais geradas pelas duas técnicas conterem o mesmo número de elementos.

No caso da estimativa via ZZ, embora em ambas as técnicas as malhas adaptadas geradas possuam o mesmo número de elementos, nota-se uma diferença entre os valores de erro calculados desde a primeira etapa de refino. A qualidade das estimativas, determinada pelo índice de efetividade, nas duas primeiras malhas foi a mesma para ambas as técnicas, enquanto que para as duas etapas finais mostraram-se bem próximas em termos do valor de θ . Os valores do parâmetro de escalamento para a técnica Ch^p , que se referem à construção a duas primeiras malhas adaptadas, sendo iguais a 1 sugerem que o refino se deveu completamente a restrição im-

posta. Por outro lado, pode-se perceber para a técnica RQE que a construção das mesmas duas malhas teve influência dos critérios de tamanho ótimo de elemento, uma vez que os parâmetros de escalamento são diferentes de 1.

Para a adaptatividade utilizando estimativas via SPR, notou-se um comportamento semelhante ao apresentado no caso via ZZ com a diferença de que o valor do parâmetro de escalamento igual a 1 referente à primeira etapa de refino na técnica RQE, sugere que o tamanho dos novos elementos foram calculados somente com base na restrição imposta.

Outro teste foi realizado com uma restrição mais abrangente para o aumento do tamanho de elemento, da forma: $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq 1,5h_{old}$. Contudo, não foi possível observar qualquer diferença entre os resultados obtidos para este caso em comparação ao caso anterior.

A Fig. (24) e a Tab. (3) a comparação entre as técnicas de refino utilizando uma restrição imposta da forma: $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$. O erro relativo prescrito é de 2%.

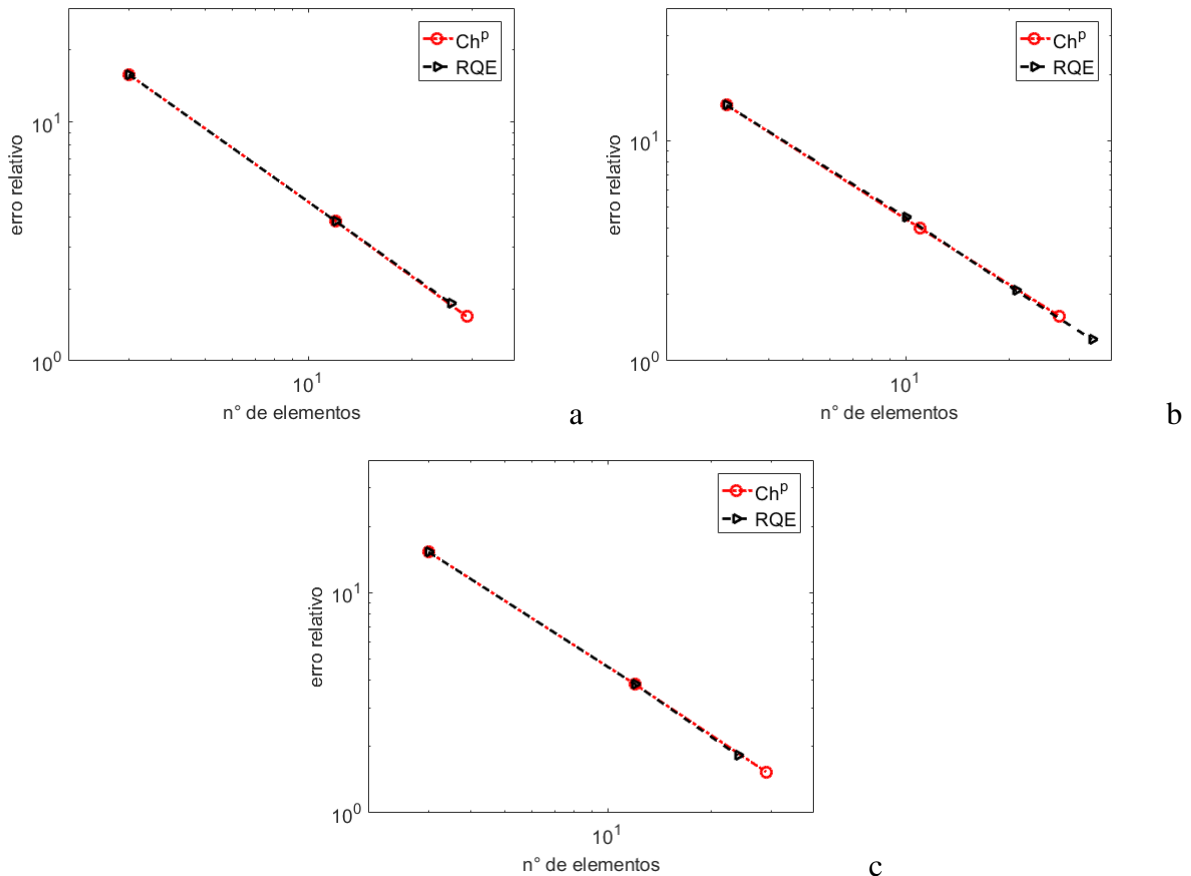


Figura 24 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2%.

Fonte: Próprio autor (2018).

Pela figura é possível notar que a utilização de uma restrição com um intervalo maior para o novo tamanho de elemento possibilitou a manifestação de uma diferença maior entre

as duas técnicas de refino. Contudo, nota-se que a taxa de convergência de refino na primeira etapa de refino é praticamente a mesma em ambas as técnicas, isso sugere que o refino foi regido somente pela restrição imposta. A partir da segunda etapa de refino, nota-se uma diferença de desempenho entre as duas técnicas. Para as estimativas via MNS e SPR, fig. (24a) e (24c) respectivamente, duas etapas de refino foram necessárias para atingir a convergência em ambas as técnicas de refino. Contudo, nota-se para o caso MNS que a inclinação da curva referente à técnica RQE é menor que a inclinação da curva referente à técnica Ch^p . Isto indica que a taxa de convergência do erro para a técnica RQE foi menor do que a da técnica Ch^p . Já para o caso SPR, se observa o inverso: a taxa de convergência da técnica RQE é maior que a da técnica Ch^p na segunda etapa de refino.

Para o caso da estimativa de erro via ZZ, nota-se que a técnica de RQE necessitou de uma etapa de refino a mais que a Ch^p . Isso sugere o refino foi regido também pela técnica adaptativa a partir da primeira etapa.

Tabela 3 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
15,8289	3	0,9861	0,8333	15,8289	3	0,9861	0,8333
3,8520	12	0,9991	0,7389	3,8520	12	0,9991	0,7181
1,5328	29	1,0008		1,7450	26	0,9991	
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
14,5021	3	0,9460	0,8291	14,5021	3	0,9460	0,8579
4,0133	11	0,9935	0,7660	4,4945	10	0,9984	0,7962
1,6024	28	0,9999		2,0838	21	0,9982	0,6243
				1,2501	35	0,9997	
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
15,3114	3	0,9861	0,8333	15,3114	3	0,9861	0,8333
3,8444	12	0,9991	0,7389	3,8444	12	0,9991	0,7203
1,5344	29	1,0024		1,8250	24	1,0016	

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise dos dados presentes na tabela permitiram validar o que foi observado nas figuras. Para os casos MNS e SPR, nota-se pelo parâmetro de escalamento igual a 0,8333 que a primeira etapa de refino, em ambas as técnicas, baseia-se completamente na na restrição imposta. Já para o caso utilizando estimativa via ZZ, não se observa a manifestação da dominância

da restrição no processo de refino em nenhuma das etapas, independente da técnica. Contudo, nota-se uma redução gradativa nos valores do parâmetro de escalamento calculados para a técnica RQE. Isso indica um empobrecimento cada vez maior do processo adaptativo conforme os refinamentos de malha se sucedem.

Na Fig. (25) e na Tab. (4) está presente a comparação entre as técnicas de refino utilizando uma restrição da forma: $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ para um erro relativo prescrito de 2%.

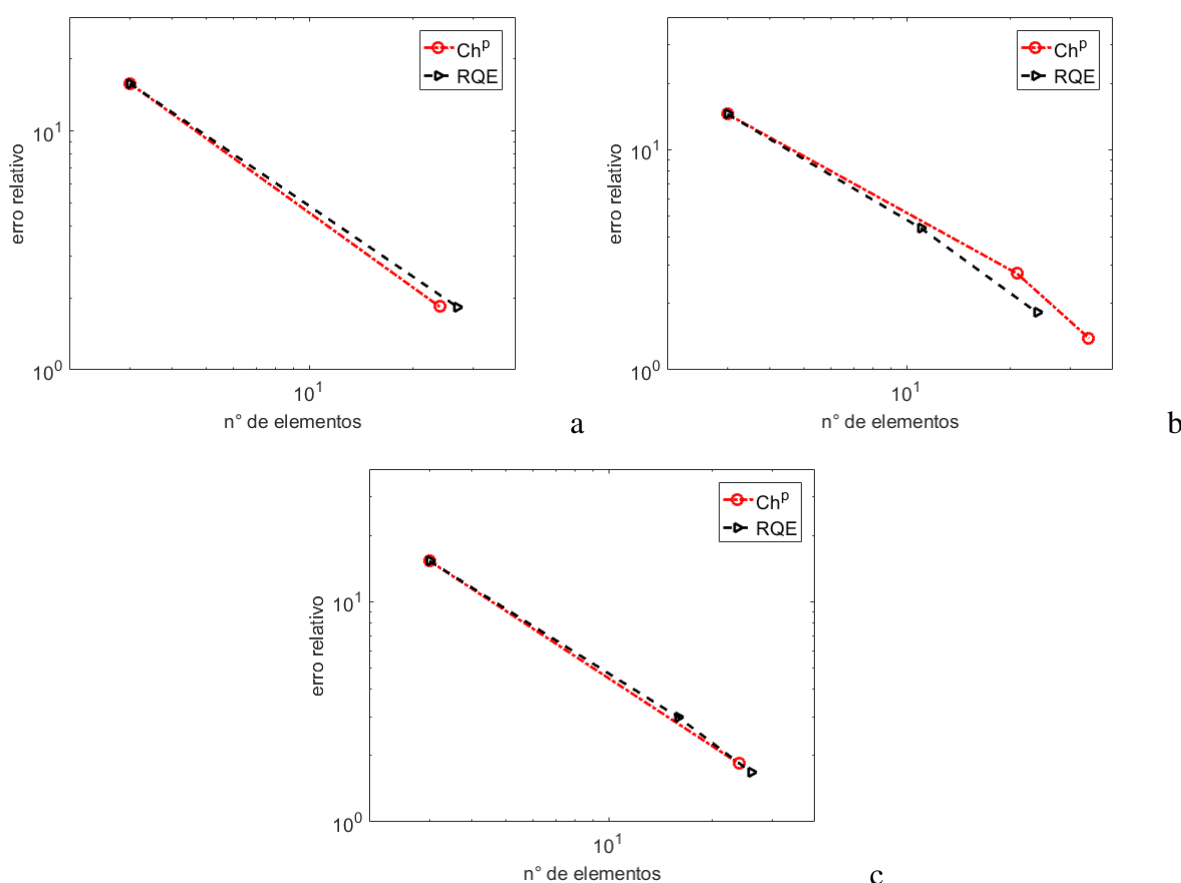


Figura 25 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2%.

Fonte: Próprio autor (2018).

Analisando a figura, nota-se que o comportamento das curvas comparando as duas técnicas nos três casos de método de recuperação apresentado para este caso se assemelham ao comportamento apresentado por elas no caso sem restrições, Fig. (22) e Tab.(1). A principal diferença entre os dois casos é na estimativa via MNS. No caso sem restrições, a diferença entre as taxas de convergência do erro apresentadas pelas técnicas de refino foram bem maiores do que a apresentada neste caso. Para os casos ZZ e SPR, não se percebem diferenças significativas do casos sem restrições para este.

Tabela 4 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento linear.

MNS							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
15,8289	3	0,9861	0,9305	15,8289	3	0,9861	0,9495
1,8393	24	0,9998		1,8354	27	0,9946	
ZZ							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
14,5021	3	0,9460	0,9048	14,5021	3	0,9460	0,9262
2,7380	21	0,9890	0,6943	4,4021	11	1,0020	0,7140
1,3950	34	0,9932		1,8214	24	1,0002	
SPR							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
15,3114	3	0,9861	0,9305	15,3114	3	0,9861	0,8472
1,8400	24	1,0007		2,9821	16	1,0009	0,7455
				1,6835	26	1,0015	

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise dos dados da tabela permitiram constatar que a utilização da restrição $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ resultou em um desempenho das técnicas de refino muito semelhante ao apresentado no caso sem restrições para o caso da estimativa de erro via ZZ. Neste caso, nota-se que somente na segunda etapa de refino pela técnica Ch^p uma malha diferente da malha gerada no caso sem restrições foi gerada neste caso, embora ambas contenham o mesmo número de elementos. Por outro lado, para a estimativa via SPR o desempenho das duas técnicas de refino neste caso foi idêntico ao apresentado no caso sem restrições.

Já para o caso utilizando estimativa via MNS, nota-se que a técnica Ch^p obteve desempenho idêntico ao apresentado na comparação sem restrições. Já para a técnica RQE, nota-se que o número de elementos necessários para atingir a convergência nesse caso foi 27, enquanto que no caso sem restrições foi 92. Isso indica que a imposição da restrição favoreceu o processo de refino uma vez que menos elementos foram utilizados na aproximação, conseqüente um menor custo computacional foi necessário para se obter uma solução aproximada satisfatória.

Foram realizados testes utilizando restrições $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$, porém com um valor de erro prescrito de 0,1%. Os resultados obtidos apresentaram um comportamento semelhante para ambos os casos. Como foi utilizado um valor de erro prescrito menor, mais etapas de refino foram necessárias para a convergência se comparado aos casos com as mesmas restrições, porém com um valor de erro prescrito de 2%. No entanto, o que se observou, para ambas as técnicas de refino, foi um comportamento semelhante

ao apresentado pelo caso $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ anterior. Nas primeiras etapas de refino, a critério dominante no calculo do novo tamanho dos elementos foi a restrição imposta. Enquanto que a manifestação da influência técnicas Ch^p e RQE no refino são mais facilmente percebidas somente quando o número de elementos na malha corrente é alto o suficiente. Isso indica que a utilização de restrições impostas neste caso tendem a inibir o processo de refino otimizado quando o número de elementos na malha e o erro prescrito são baixos.

7.2 CASO 2 - CARREGAMENTO QUADRÁTICO

O segundo caso a ser tratado é um problema unidimensional de elasticidade em barra deformável, igual a aquele avaliado no Caso 1: uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um carregamento distribuído axialmente conforme Fig. 9.

Para este caso, o carregamento ao qual a barra está submetida é modelado como uma função polinomial quadrática definida no domínio de análise do problema, como

$$b(x) = -8x^2 + 8x - 1, \quad (7.5)$$

onde $x = [0,L]$, sendo L o comprimento da barra igual a 1 m. Essa função é representada graficamente conforme a Fig. 26

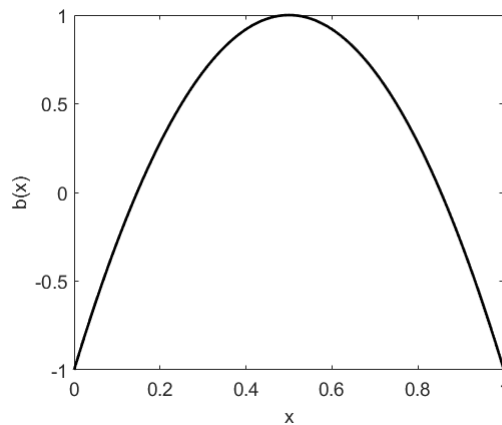


Figura 26 – Carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Da configuração do sistema físico, similar ao considerado na seção 7.1, pode-se definir as condições de contorno do problema como sendo

$$u_o(x=0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{du_o(x=L)}{dx} = 0. \quad (7.6)$$

Dessa maneira, pode-se calcular a solução exata em deslocamento, u_o , e a solução em tensão associada, $\sigma_o(x)$, dadas por

$$u_o(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x \quad \text{e} \quad (7.7)$$

$$\sigma_o(x) = \frac{800}{3}x^3 - 400x^2 + 100x + \frac{100}{3}. \quad (7.8)$$

7.2.1 Verificação da formulação implementada

A fim de assegurar a validade da formulação empregada na rotina computacional, foram realizados os mesmos grupos de simulações utilizadas na verificação para o caso do carregamento linear. Dessa forma, tendo conhecimento das soluções exatas em deslocamento e em tensão para o carregamento quadrático, eq. 7.7 e 7.8, foram calculados os valores de erro relativo em energia para malhas contendo elementos com grau polinomial $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$ e sujeitas a um refino aninhado. A partir disso, uma comparação entre as taxas de convergência do erro relativo calculada e as taxas de convergência do erro relativo teoricamente conhecidas presentes na literatura é realizada.

Na Fig. 27 tem-se a comparação entre as soluções exata (linha contínua preta) e aproximada (linha tracejada em vermelho), para o caso de $p = 1$ em um refino aninhado de malha.

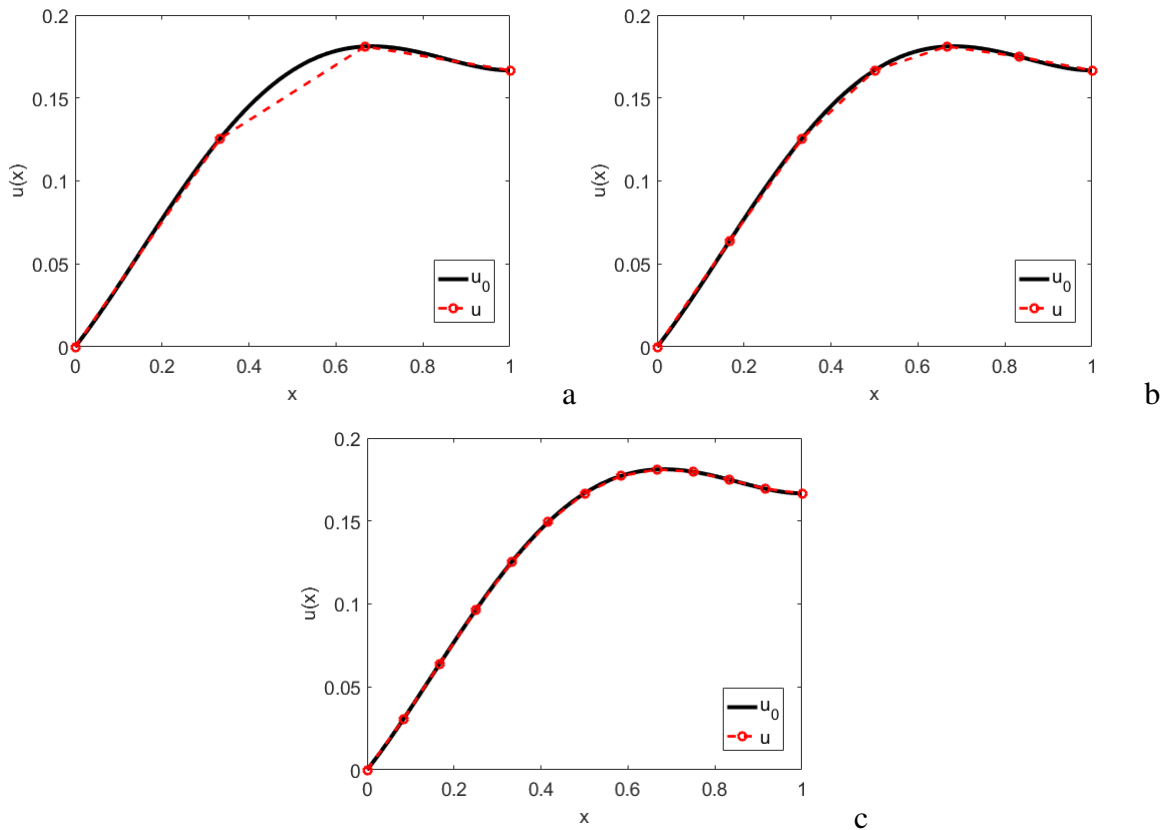


Figura 27 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Conforme esperado, como a solução exata do problema é um polinômio de grau 4, uma malha utilizando elementos $p = 1$ não foi capaz de aproximá-la exatamente. Entretanto, é notável que a qualidade da aproximação aumenta conforme o número de elementos na malha aumenta e, mais uma vez, a condição de contorno essencial é assegurada na aproximação.

Na Fig. 28, tem-se a comparação entre a solução exata em tensão e a solução aproximada em tensão utilizando elementos $p = 1$ em um refino aninhado de malha.

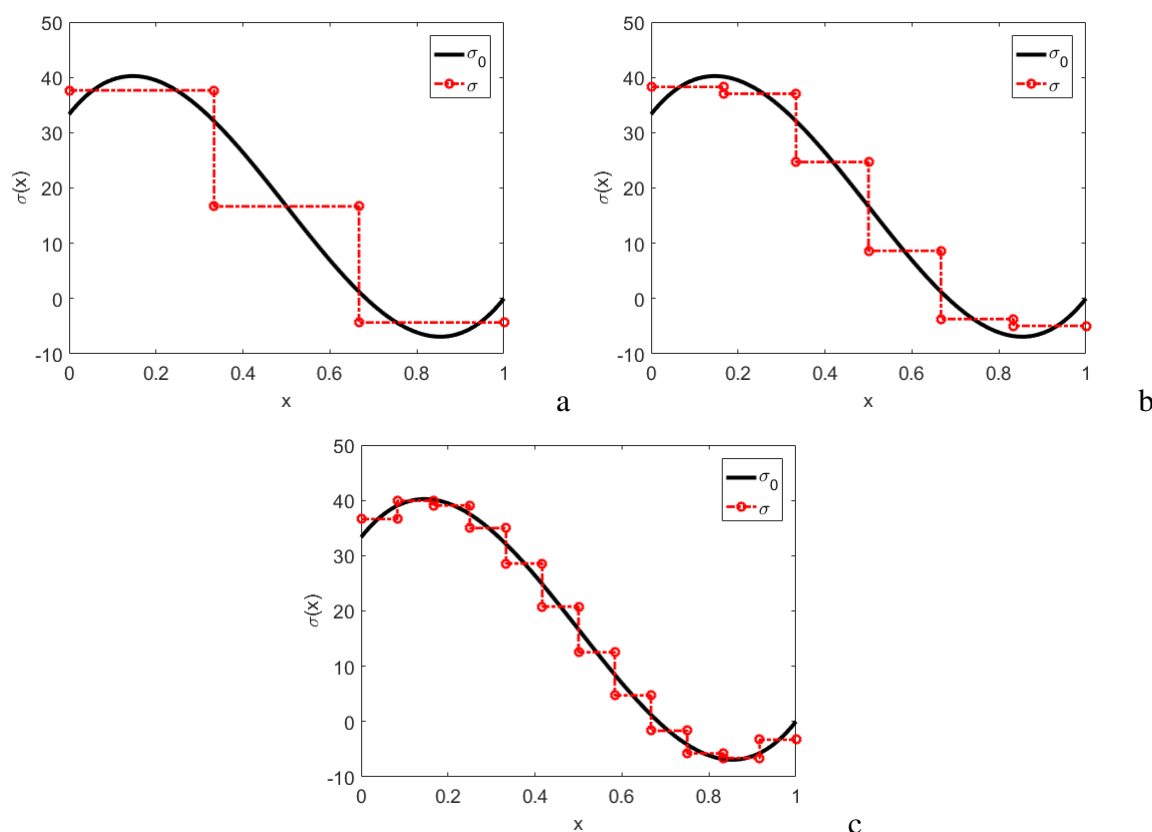


Figura 28 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Conforme pode ser observado na Fig. 28, para aproximações utilizando elementos lineares, a solução em tensão assume um valor constante no elemento e é descontínua nas junções elementares. Pode-se destacar que as derivadas das soluções apresentam um erro pontual muito maior se comparadas com as próprias soluções, isso fica nítido se for observado o quão mais distante a solução aproximada se encontra da solução exata na Fig. 28 em comparação com a Fig. 27 para uma malha com o mesmo número de elementos.

Algumas questões apontadas no caso do carregamento linear se reproduziram neste caso, como o tamanho da descontinuidade dos valores de tensão de um elemento para o outro ser influenciado pela inclinação da curva da solução exata naquela região quando elementos de tamanhos iguais são utilizados. Na Fig. 28b, por exemplo, é possível notar a diferença entre os

valores de tensão nos dois primeiros elementos nas extremidades é bem pequena. Isso ocorre porque o nó, $x=0,1666$, em que a descontinuidade se encontra está em uma posição do domínio na qual a inclinação da curva da solução exata é próxima de zero. Em contrapartida, a descontinuidade de tensão é bem maior entre os dois elementos centrais uma vez que a inclinação da curva que representa a solução exata é grande.

As soluções em deslocamento e em tensão utilizando elementos quadráticos podem ser observadas nas Fig.29 e 30

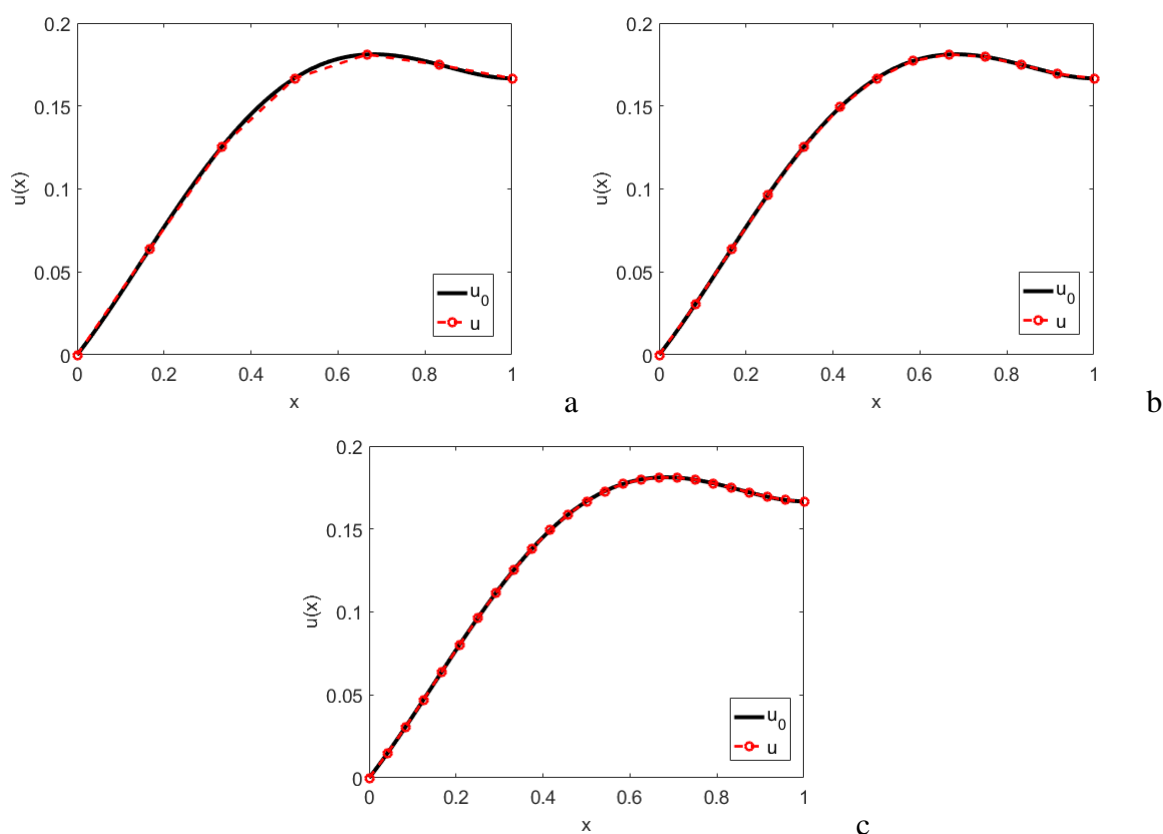


Figura 29 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 2$ para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Conforme o esperado, a solução aproximada utilizando elementos $p = 2$ conseguiu representar a solução exata melhor do que a aproximação obtida utilizando elementos $p = 1$ para um mesmo número de elementos.

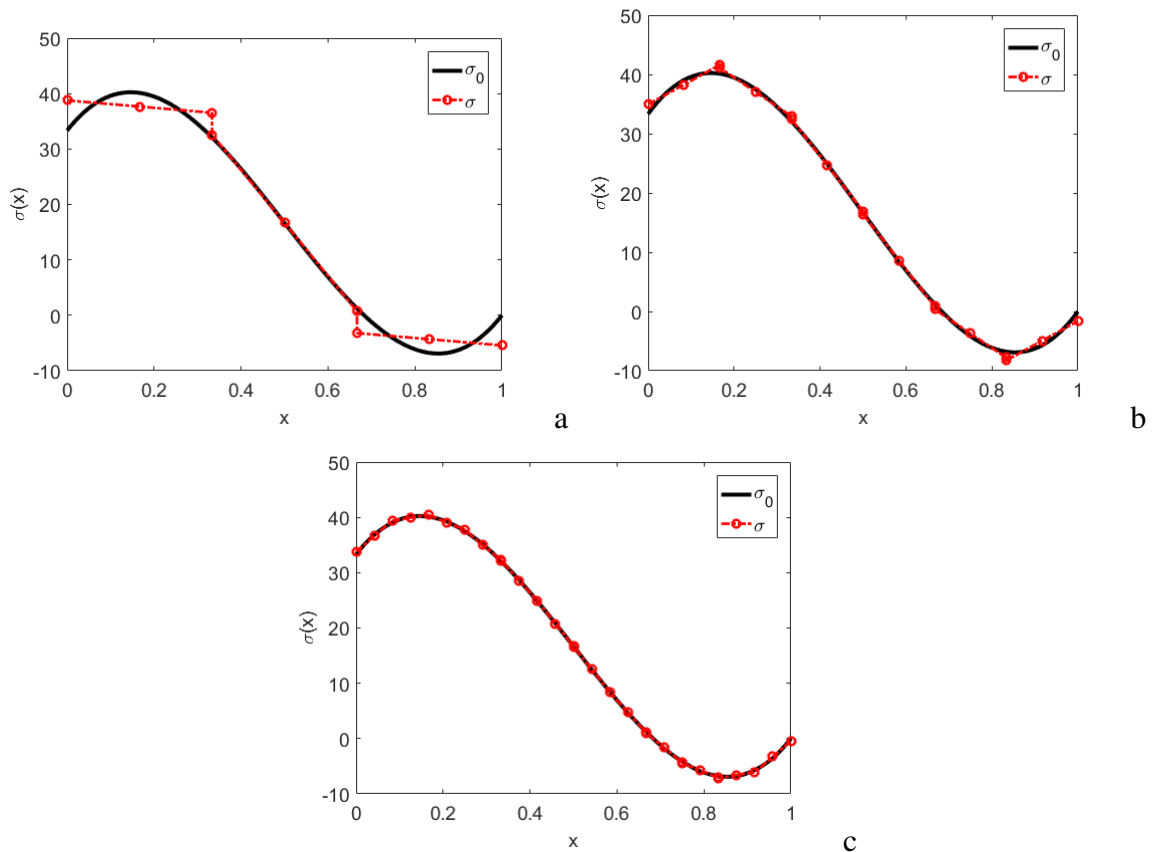


Figura 30 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 2$ para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

No caso da solução em tensão, conforme Fig. 30, nota-se que para $p = 2$ a solução aproximada em tensão varia linearmente dentro do elemento. É possível observar uma melhora significativa na aproximação se comparada com a Fig. 28, porém ainda existe descontinuidade de tensões entre os elementos embora não tão acentuada se comparada com a aproximação $p = 1$.

As soluções em deslocamento e em tensão para o grupo utilizando elementos cúbicos podem ser observadas nas Fig.31 e 32

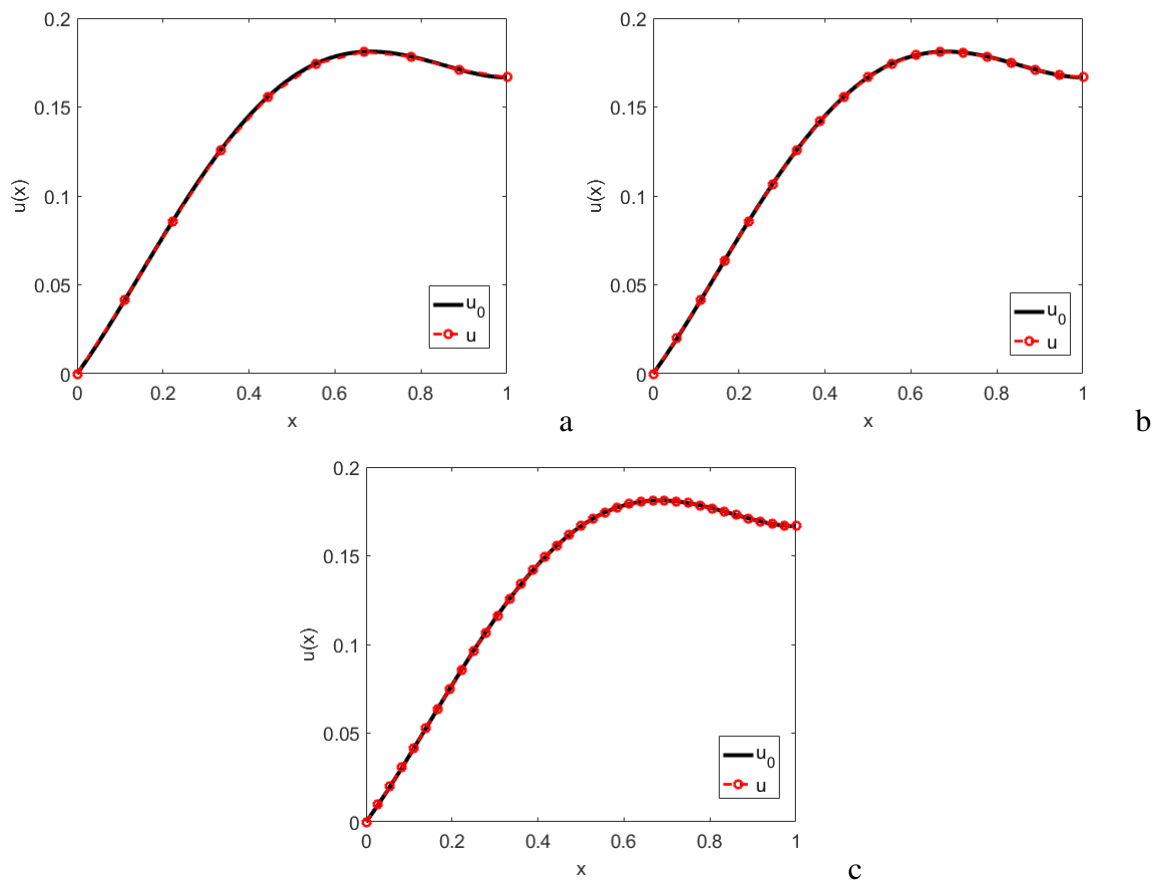


Figura 31 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 3$ para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 31, tem-se a comparação entre a solução exata e a solução aproximada utilizando elementos com $p = 3$. Conforme o esperado, este é o caso em que a solução por MEF melhor aproxima a solução exata.

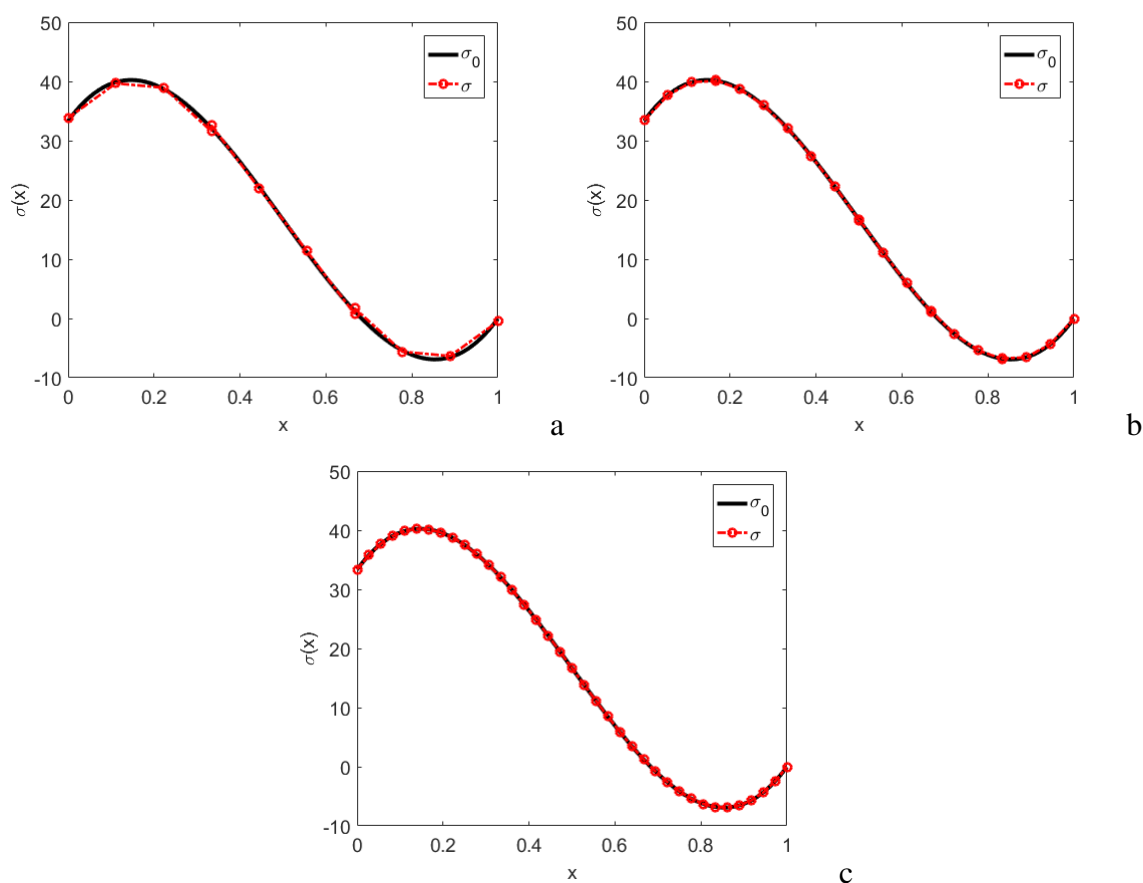


Figura 32 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 3$ para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 32, compara-se a solução exata em tensão com a correspondente solução aproximada, neste caso é uma função polinomial quadrática. Nota-se ainda descontinuidade de tensão na interface dos elementos. Porém, para a primeira malha, Fig. 32a, a descontinuidade observada, $x=0,3333$, já é a menor dentre os três o tipos de elementos avaliados.

A Fig. 33 mostra o comportamento do erro relativo em energia exato em função do número de elementos na malha utilizando elementos $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$.

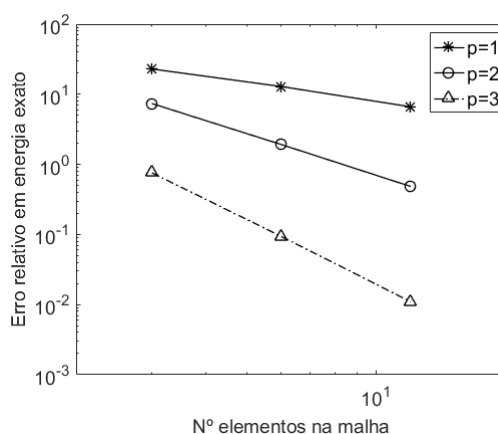


Figura 33 – Comparação entre as curvas de convergência do erro relativo em energia para os malhas contendo elementos lineares, quadráticos e cúbicos obedecendo a um refino aninhado para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Uma vez conhecido o comportamento do erro relativo em energia exato para cada um dos casos, calculou-se a taxa de convergência do erro relativo obtendo os seguintes resultados: 0,895 para $p = 1$, 1,963 para $p = 2$ e 3,000 para $p = 3$. Segundo Szabo e Babhuska (2011), os valores esperados para a taxa de convergência do erro relativo em problemas unidimensionais sem singularidades devem ser iguais ao grau polinomial p referente ao tipo de elemento utilizado na aproximação. Comparando os resultados esperados com os calculados, nota-se que a diferença entre eles é da ordem de 10% para $p = 1$ e de 1% a 2% para $p = 2$ e $p = 3$. É importante notar ainda que a discrepância de 10%, aparentemente grande, pode indicar que os valores de erro encontrados ainda se encontrem num chamado regime pré-assintótico. Realizar o experimento com $p = 1$ usando mais que 12 elementos pode ajudar a verificar tal hipótese. Ainda assim, com base nos valores obtidos é seguro validar a implementação adequada da formulação MEF na rotina computacional.

7.2.2 Estimativa de erro a posteriori

As Fig. 34-36 apresentam a comparação entre a solução exata em tensão, por MEF e recuperada utilizando recuperação via MNS, ZZ e SPR, respectivamente. Optou-se por apresentar somente os casos para $p = 1$ pois para os outros graus fica difícil realizar a distinção entre as curvas.

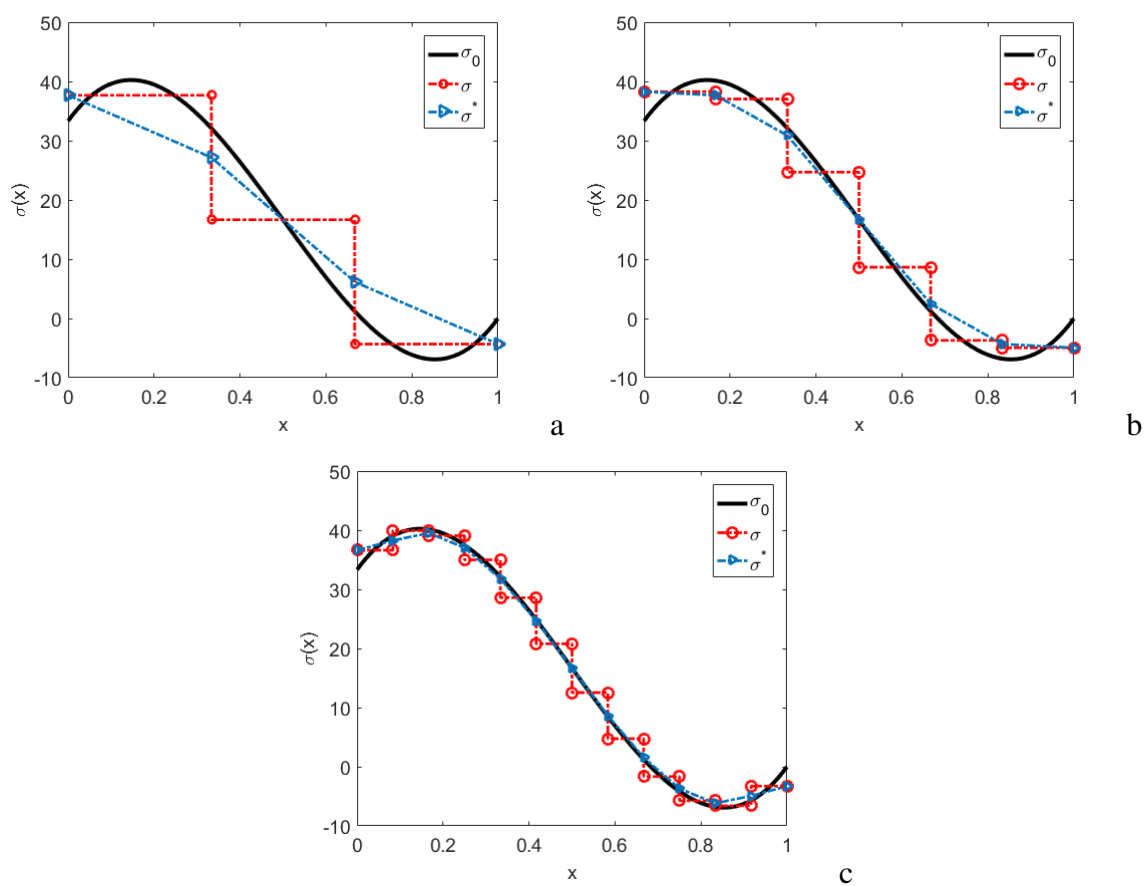


Figura 34 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via MNS para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

A Fig. 34 mostra a recuperação via MNS utilizando um refino aninhado começando com uma malha de 3 elementos, em seguida 6 elementos e, finalmente, 12 elementos. Pode-se notar claramente que os valores de tensão recuperada nos nós encontram-se no ponto médio entre os valores de tensão.

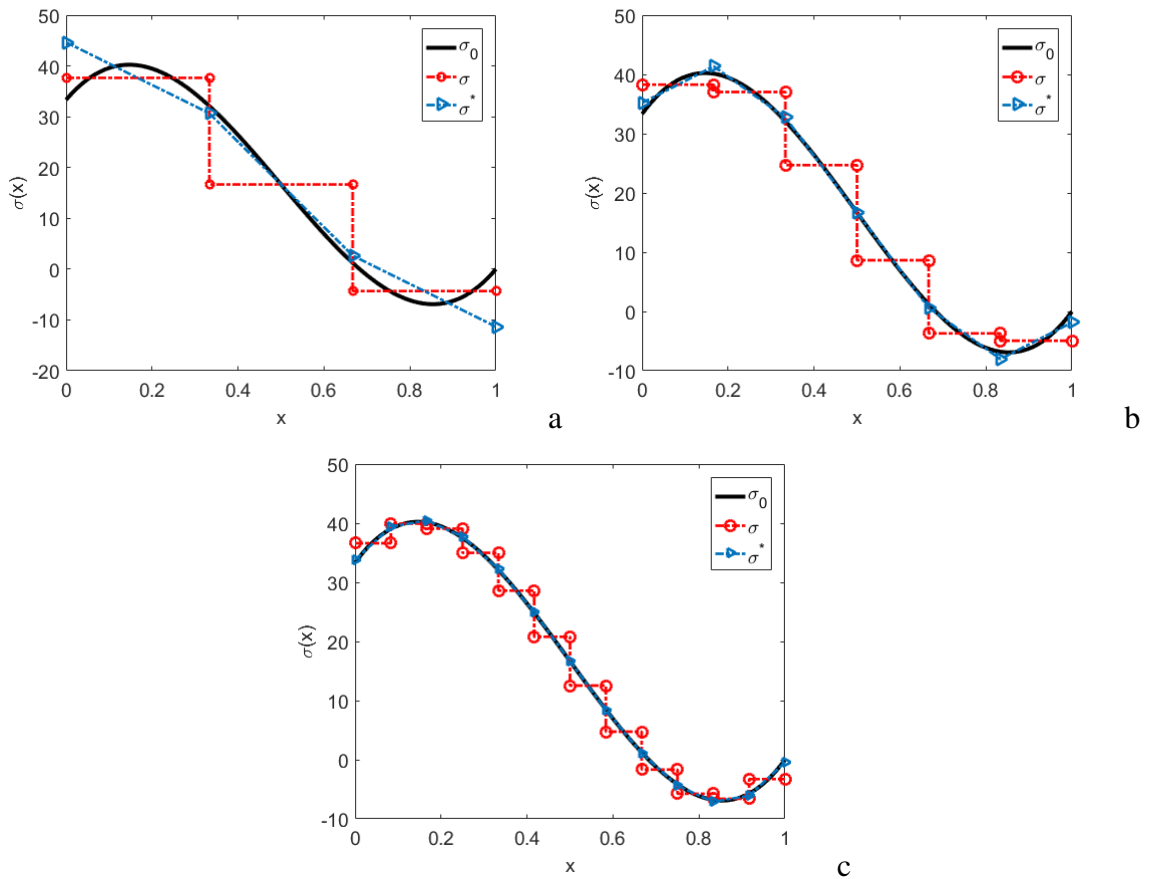


Figura 35 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via ZZ para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

A Fig. 35 mostra a recuperação via ZZ utilizando o mesmo padrão de refino aninhado que foi utilizado no caso anterior. As mesmas características apresentadas pelos valores de tensão recuperadas que foram discutidas no caso do carregamento linear se reproduziram neste caso. Pode-se observar um padrão de simetria entre os valores de tensão no interior de cada elemento. É notável que, para as malhas com 6 e 12 elementos, a tensão recuperadas nos extremos se aproxima bastante dos valores exatos.

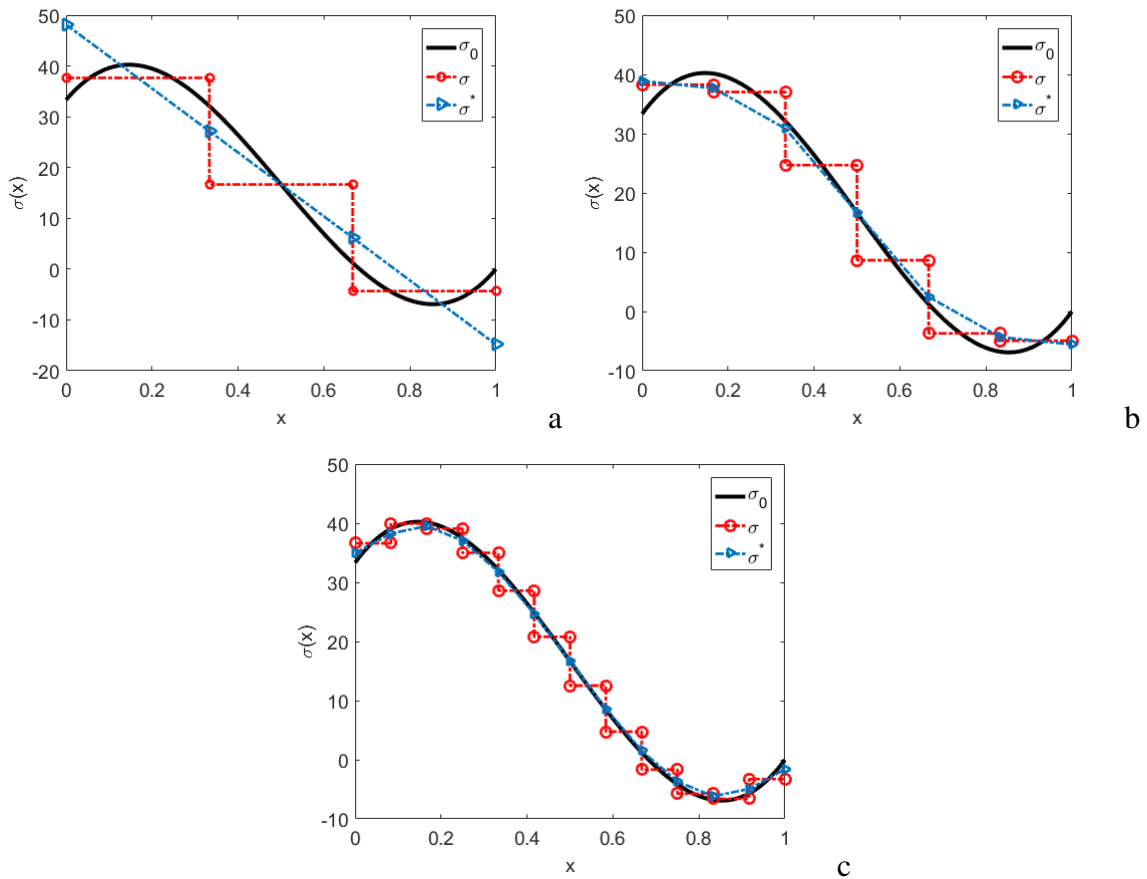


Figura 36 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via SPR para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

A Fig. 36 mostra a recuperação via SPR. Ao contrario do que pode ser observado nas figuras para carregamento linear, a recuperação SPR não mostra ser a que mais se aproxima da solução exata no caso do carregamento quadrático. Comparando as curvas, nas fig. (34b) e (35b) nota-se que a recuperação ZZ consegue representar melhor a solução exata.

Na Fig. 37 estão apresentadas as curvas do índice de efetividade em função do número de elementos da malha. Foram avaliadas malhas com elementos $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$.

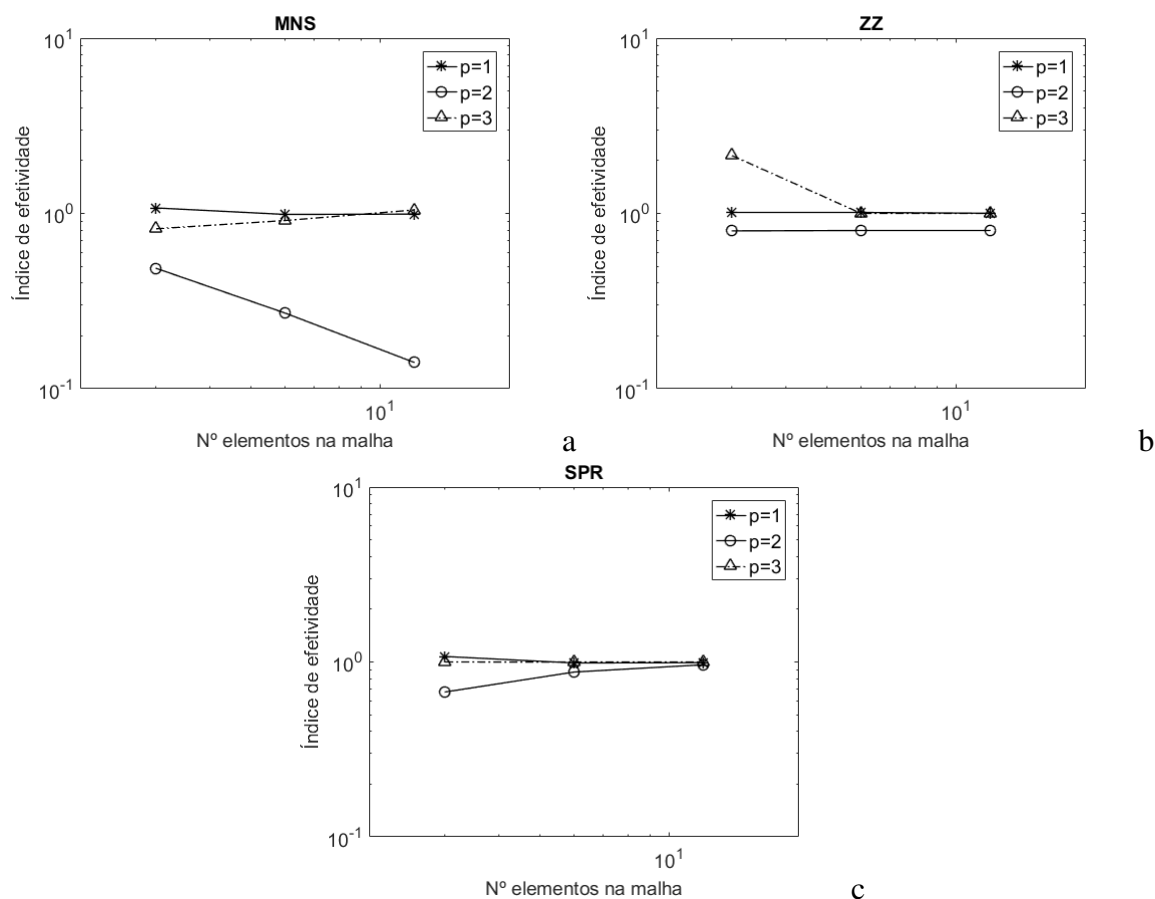


Figura 37 – Comparação entre o desenvolvimento dos índices de efetividade na situação de refino aninhado e diferentes graus elementares para as estimativas baseadas na recuperação (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Através da avaliação dos resultados presentes nas Fig. 37, nota-se que para os três métodos de recuperação a utilização de elementos lineares forneceu estimativas acuradas, cujos índices de efetividade se aproximam da unidade, independentemente do modo de recuperação.

Particularmente para malhas utilizando elementos $p = 2$, a recuperação via MNS apresentou o pior desempenho. A efetividade se distancia do valor ótimo conforme se aumenta a quantidade de elementos na malha. Já para a recuperação ZZ, o índice de efetividade mantém-se aproximadamente constante em 0,8 conforme realiza-se o refino, subestimando o erro exato. No caso da recuperação SPR, foi a que apresentou o melhor desempenho entre as três, subestimando o erro na malha inicial, porém alcançando efetividade próxima a unidade à medida que o refino h se desenvolve.

De maneira geral, os três métodos de recuperação apresentaram um bom desempenho para $p = 3$. No caso MNS, inicialmente a recuperação forneceu uma estimativa que subestima o erro exato, contudo o índice de efetividade se aproxima da unidade conforme se refina a malha. Para a recuperação ZZ, o índice de efetividade se desenvolve de maneira semelhante, a malha com três elementos forneceu uma estimativa que superestimou o erro enquanto que o refino

acarreta em uma convergência à unidade. Por fim, a recuperação SPR forneceu uma estimativa cujo índice de efetividade manteve-se constante próximo de 1 para todas as malhas testadas.

No que se refere exclusivamente à recuperação MNS, o comportamento do índice de efetividade frente ao grau de elemento utilizado sugere o que Babuska e Strouboulis (?) chamam de dicotomia, ou seja, existe diferença entre o comportamento do erro para aproximações de grau par e ímpar. Outra característica que pode ser observada é que os Índices de efetividade para $p = 1$ e $p = 3$ tendem a ficar mais próximos de 1 com o refino de malha. O que é chamado de robustez-h.

Quanto à estimativa via ZZ, é possível notar também indícios de robustez-h quando elementos cúbicos foram utilizados e também de dicotomia uma vez que não se percebe tendência de melhora nas estimativas quando $p = 2$.

Por sua vez, a recuperação SPR produziu estimativas que apresentaram robustez-h para todos os graus. Também pode-se notar dicotomia, principalmente na primeira malha onde o índice de efetividade para $p = 2$ está mais distante da unidade se comparado com $p = 1$ e $p = 3$.

7.2.3 h-Adaptatividade

Na Fig. (38) e Tab. (5) tem-se a comparação entre as técnicas de refino adaptativo, Ch^p e RQE, considerando estimativas de erro baseadas nos três métodos de recuperação de solução. Para este caso, não foram impostas restrições de aumento ou diminuição dos novos tamanhos de elemento e um erro relativo prescrito de 2% foi estabelecido.

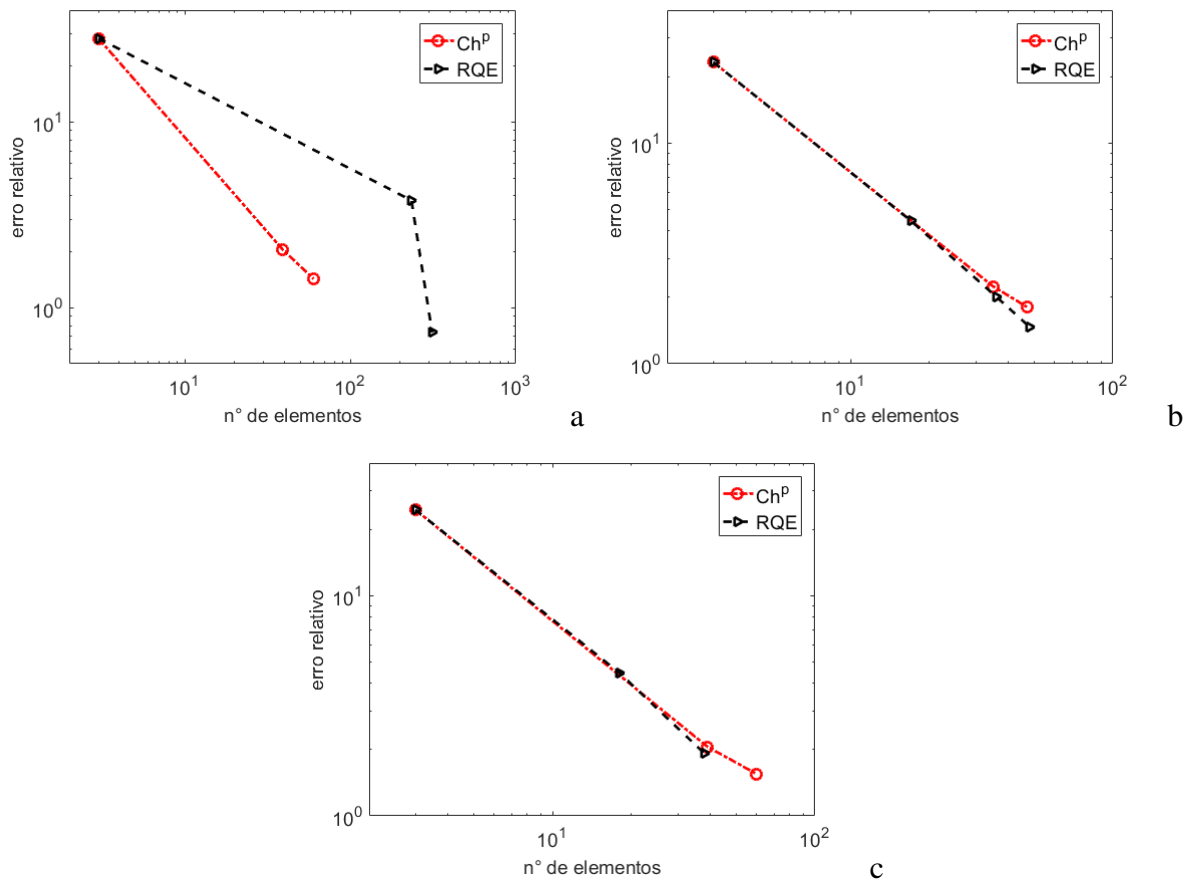


Figura 38 – Comparação entre as metodologias de refino Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Pelas figuras, nota-se que o caso utilizando estimativa via MNS foi o que apresentou uma maior diferença no desempenho entre as duas técnicas de refino. A fig. (38a) mostra que ambas as técnicas efetuaram duas etapas de refino para atingir a convergência. Contudo, na técnica Ch^p não se observa grandes alterações entre as taxas de convergência das duas etapas de refino, enquanto que na técnica RQE se percebe um aumento significativa da inclinação da curva na segunda etapa em relação a primeira.

Para os casos com estimativa de erro via ZZ e SPR, por outro lado, não se observou grandes diferenças entre as taxas de convergências das duas técnicas.

Tabela 5 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
28,2082	3	1,0753	0,9449	28,2082	3	1,0753	0,9549
2,0567	39	0,9986	0,5068	3,7851	234	0,9766	0,1367
1,4303	60	1,0636		0,7365	312	0,9556	
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
23,2411	3	1,0138	0,9302	23,2411	3	1,0138	0,8477
2,2384	35	0,9991	0,6335	4,4383	17	0,9977	0,7511
1,8909	47	1,0874		2,0060	36	1,0251	0,7054
				1,4727	48	1,0285	
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
24,5681	3	1,0753	0,9449	24,5681	3	1,0753	0,8873
2,0583	39	0,9986	0,5068	4,4566	18	0,9949	0,7704
1,5485	60	1,1488		1,9163	38	1,0160	

Fonte: Próprio autor (2018).

Através da análise da tabela, observa-se que para o caso com estimativa via MNS a diferença entre as malhas geradas pela técnica Ch^p e RQE, em termos de número de elementos, é bem grande. Como investigação sobre os motivos que levaram a essa diferença, foram analisados os campos de tensão, aproximado e recuperado, gerados pelas malhas adaptadas e algumas características foram observadas. A fig. (34a) mostra a comparação entre os campos de tensão exato, aproximado e recuperado para o carregamento quadrático, para a malha inicial contendo 3 elementos. Nessa figura é possível notar que nos elementos dos dois extremos do domínio, $x = [0;0,3333]$ e $x = [0,6666;1]$, que o valor de tensão aproximada em um dos nós é idêntico ao valor de tensão recuperada no mesmo nó. Uma análise dos campos de tensão nas malhas adaptadas subsequentes permitiu observar que, nos referidos elementos, a técnica RQE proporcionou um refino muito mais intenso se comparado com qualquer outro elemento que não apresenta essa característica. Ainda, a comparação entre as duas técnicas para os mesmos elementos dos extremos do domínio mostrou que o refino proporcionado pela Ch^p foi bem menos intenso do que o observado na RQE.

Em contrapartida, a comparação entre o número de elementos nas malhas adaptadas geradas pelas duas técnicas evidencia que os refinamentos baseados na RQE foram menos intensos que os baseados na Ch^p , em estimativas de erro via ZZ e SPR. No caso ZZ, além de a técnica

RQE ter efetuado uma etapa de refinamento a mais, pode-se notar que o aumento do número de elementos de uma etapa para a subsequente é menor se comparado com a da técnica Ch^p . O mesmo se observa no caso SPR, porém ambas as técnicas realizaram a mesma quantidade de etapas de refino.

A Fig. (39) e a Tab. (6) apresentam uma comparação entre as técnicas, porém utilizando a restrição $h_{new} \leq h_{old}$ e um erro relativo prescrito de 2%.

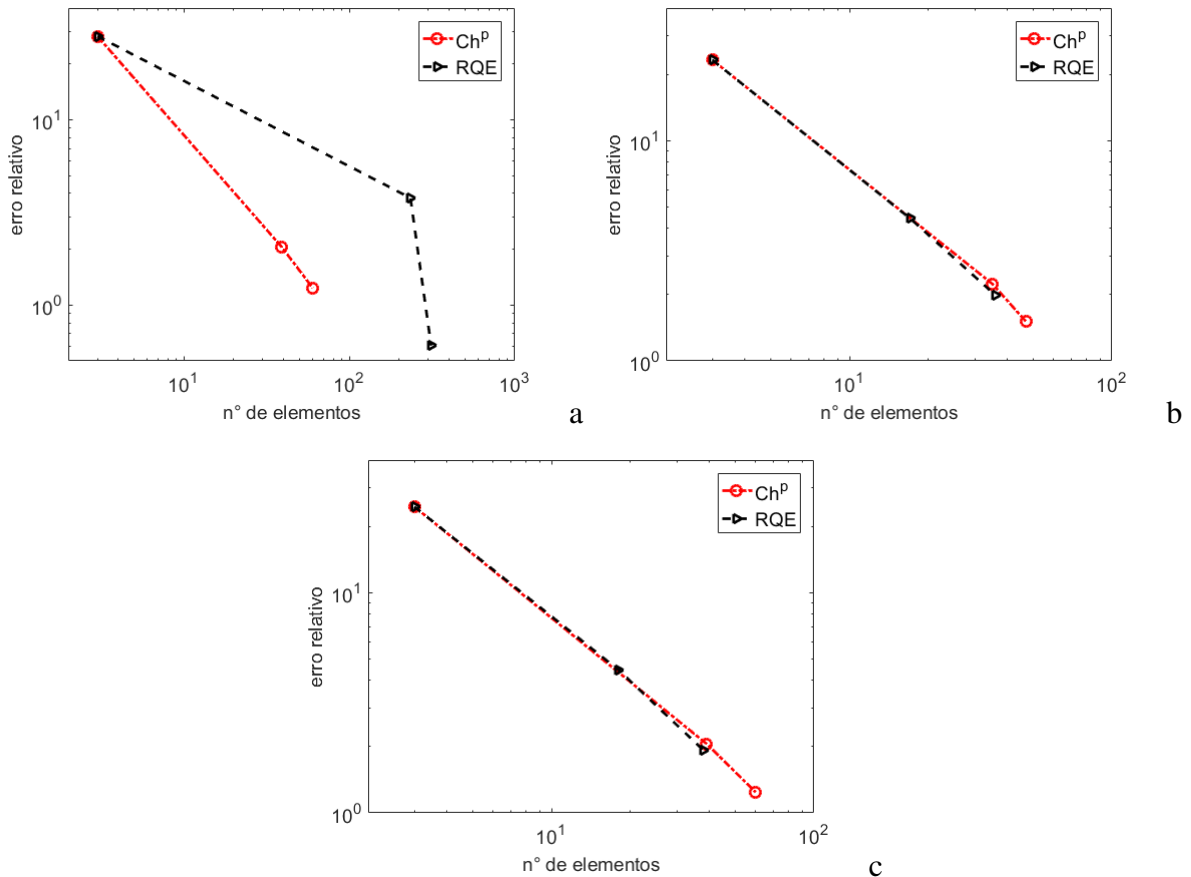


Figura 39 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Através da análise da Fig. (39), não é possível notar diferenças significativas entre as taxas de convergência das técnicas de refino apresentadas neste caso com o caso anterior, sem restrições.

Tabela 6 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
28,2082	3	1,0753	0,9449	28,2082	3	1,0753	0,9549
2,0567	39	0,9986	0,7603	3,7851	234	0,9766	0,9752
1,2382	60	1,0003		0,6043	312	0,9939	
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
23,2411	3	1,0138	0,9302	23,2411	3	1,0138	0,8477
2,2384	35	0,9991	0,8901	4,4383	17	0,9977	0,7610
1,5105	47	1,0025		1,9844	36	1,0165	
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
24,5681	3	1,0753	0,9449	24,5681	3	1,0753	0,8873
2,0583	39	0,9986	0,7603	4,4566	18	0,9949	0,7808
1,2410	60	1,0020		1,9217	38	1,0106	

Fonte: Próprio autor (2018).

A Tab. (6) permite observar que o desempenho demonstrado pelas técnicas de refino, em termos de número de elementos necessários para atingir menor ou igual ao permitido, no caso de estimativa via MNS, foi idêntico ao apresentado no caso sem restrições. Contudo, uma diferença que se destaca são os valores de escalamento calculados neste caso com os calculados naquele, para ambas as técnicas de refino. Enquanto que os parâmetros de escalamento calculados referentes a terceira malha foram 0,5068 e 0,1367, respectivamente, para Ch^p e RQE. Por outro lado, os valores calculado para o caso em que se restringe o crescimento dos elementos foram 0,7603 para Ch^p e 0,9752 para RQE. Isto evidencia de que o processo adaptativo no caso anterior foi bem mais empobrecido devido a grande distorção que o comprimento da malha adaptada apresentou em relação ao comprimento do domínio. Ainda, nota-se que isso também influenciou na qualidade da estimativa de erro na última malha. O caso sem restrições apresentou uma estimativa pior, com $\theta = 1,0636$ para Ch^p e $\theta = 0,9556$ para RQE, se comparado com este último, com $\theta = 1,0003$ para Ch^p e $\theta = 0,9939$ para RQE.

Ao contrário do que foi observado no caso sem restrições, a adaptatividade baseada na estimativa via ZZ necessitou menos elementos para convergência na técnica RQE do que na Ch^p , quando impondo restrição ao crescimento dos novos elementos. O mesmo comportamento é observado para a estimativa via SPR e se repete em todas as etapas de refino. Isso é um indicativo de que a técnica RQE tende a refinar menos que a técnica de Ch^p .

Uma análise teórica da formulação da técnica RQE mostrou que esse indicativo se confirma. Partindo da eq. (5.55), tem-se

$$h_{new}(\Delta\mu_o^e + \frac{H^e}{12}h_{new}^2) = e_m^2. \quad (7.9)$$

Dividindo a equação por $\Delta\mu_o^e$, obtém-se

$$h_{new}(1 + \frac{H^e h_{new}^2}{12\Delta\mu_o^e}) = \frac{e_m^2}{\Delta\mu_o^e} \quad (7.10)$$

Nas figuras (35a) e (36a), tem-se a comparação entre os campos de tensão exato, aproximado e recuperado para uma malha com 3 elementos. Em ambas as figuras, nota-se que para os elementos centrais, $x=[0,3333;0,6666]$, a mesma característica do campo de tensões se manifesta. Primeiro, o valor de tensão recuperada é igual ao valor tensão aproximada no ponto $x=0,5$, que corresponde ao meio do elemento. Segundo, a diferença entre os valores de tensão recuperada e aproximada, $\Delta\sigma = \sigma^* - \sigma$, no nó a esquerda do elemento possui a mesma magnitude porém sinal oposto à diferença de tensão no nó a direita do elemento. Quando isso ocorre, tem-se na eq. (7.10) que

$$\frac{H^e h_{new}^2}{12\Delta\mu_o^e} \gg 1, \quad (7.11)$$

logo pode-se considerar que o termo cúbico é o governante da eq. (7.10), dessa forma:

$$h_{new} = \left(\frac{12e_m^2}{H^e} \right)^{1/3}. \quad (7.12)$$

Considerando o erro obtido na malha corrente sendo

$$h_{old} = \left(\frac{12E^2(h_{old})}{H^e} \right)^{1/3}. \quad (7.13)$$

Comparando com o erro na malha corrente, tem-se

$$\frac{h_{new}}{h_{old}} = \left(\frac{e_m}{E(h_{old})} \right)^{2/3} = \frac{1}{\xi^{2/3}}. \quad (7.14)$$

A figura (40) mostra a comparação entre as técnicas de refinamento adaptativo em termos de intensidade de refinamento de tamanho de elemento, dada pela razão $\frac{h_{new}}{h_{old}}$ em função do parâmetro de refinamento ξ .

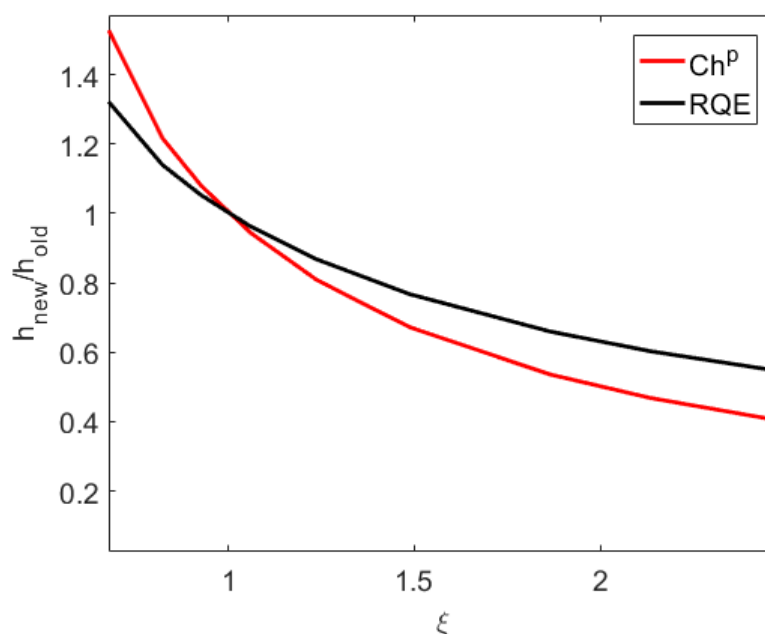


Figura 40 – Comparação entre as técnicas de refino adaptativo em termos de intensidade de refinamento de tamanho de elemento, dada pela razão $\frac{h_{\text{new}}}{h_{\text{old}}}$ em função do parâmetro de refinamento ξ .

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise da Fig. (40) confirma o que foi indicado pelos valores da Tab. (6). Quando se deve diminuir o tamanho de elemento, ou seja, intervalo em que $\xi > 1$, para um mesmo parâmetro de refinamento, a técnica Ch^p tende a calcular um tamanho de elemento ótimo menor que a técnica RQE.

A Fig. (41) e a Tab. (7) apresentam a comparação entre as técnicas Ch^p e RQE utilizando uma restrição agora também quanto a redução do tamanho do elemento, tal que $0,5h_{\text{old}} \leq h_{\text{new}} \leq h_{\text{old}}$ e mantendo o erro relativo prescrito igual 2%.

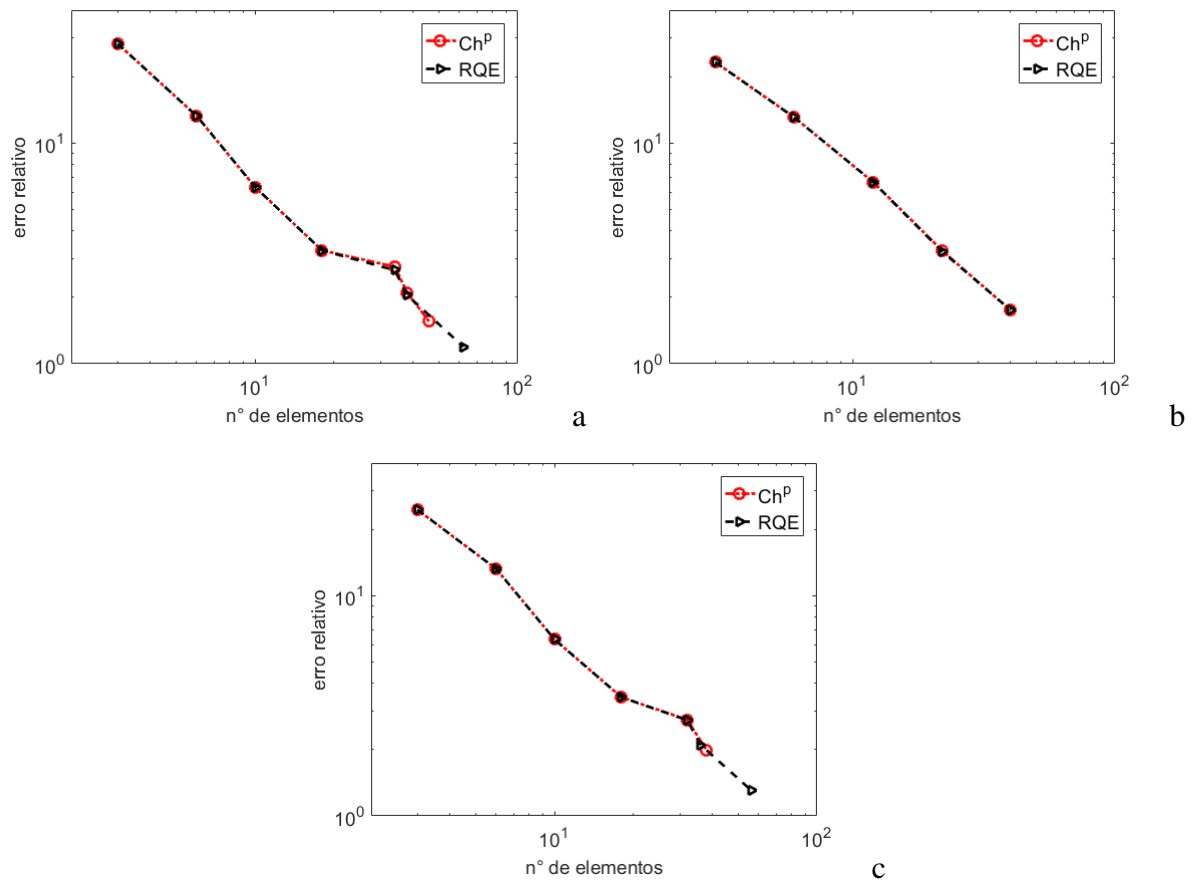


Figura 41 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.

Fonte: Próprio autor (2018).

Através da análise da Fig. (41) se percebe que, para os três métodos de recuperação utilizados nas estimativas, malhas adaptadas com o mesmo número de elementos foram geradas nas primeiras etapas de refino. Já para as últimas etapas, não se percebem diferenças significativas entre as técnicas no caso de estimativa via ZZ. Por outro lado, para os dois outros métodos de recuperação, nas últimas etapas nota-se um comportamento instável da taxa de refino no sentido de que existe um aumento e uma diminuição da inclinação da curva de maneira alternada conforme se sucedem as etapas de refino.

Tabela 7 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento quadrático.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
28,2082	3	1,0753	1,0000	28,2082	3	1,0753	1,0000
13,2649	6	0,9877	1,0000	13,2649	6	0,9877	1,0000
6,3216	10	0,8133	1,0000	6,3216	10	0,8133	1,0000
3,2616	18	0,5750	0,7979	3,2616	18	0,5750	0,8018
2,7534	34	0,8269	1,0000	2,6544	34	0,8953	1,0000
2,0895	38	0,9754	0,8882	2,0440	38	0,9881	0,6784
1,5545	46	1,0025		1,1948	62	1,0007	
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
23,2411	3	1,0138	1,0000	23,2411	3	1,0138	1,0000
13,0572	6	1,0131	1,0000	13,0572	6	1,0131	1,0000
6,6479	12	1,0027	0,9584	6,6479	12	1,0027	0,9273
3,2454	22	0,9872	0,8643	3,2168	22	0,9893	0,7702
1,7485	40	0,9969		1,7512	40	0,9984	
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
24,5681	3	1,0753	1,0000	24,5681	3	1,0753	1,0000
13,2122	6	0,9877	1,0000	13,2122	6	0,9877	1,0000
6,3262	10	0,8122	1,0000	6,3262	10	0,8122	1,0000
3,4550	18	0,6069	0,9175	3,4550	18	0,6069	0,8114
2,7331	32	0,8862	0,9485	2,7232	32	0,8861	1,0000
1,9865	38	0,9934		2,1023	36	0,9909	0,7199
				1,3105	56	1,0054	

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise dos valores da Tab. (7) permite observar que, além da instabilidade notada nas curvas presentes na Fig. (41), existe também uma instabilidade no índice de efetividade. Nos casos de estimativas via MNS e via ZZ, o índice de efetividade inicia próximo à unidade, 1,0753 para ambos os métodos de recuperação. Os refinamentos se sucedem com o valor do índice de efetividade diminuindo até atingir um mínimo, 0,5750 para MNS e 0,6069 para ZZ. A partir disso, os valores de índice de efetividade voltam a crescer tendendo à unidade até o processo adaptativo satisfazer o limite de erro prescrito.

Vale apontar, também, que a imposição da restrição eliminou a tendência da técnica RQE refinar menos intensamente que a técnica Ch^p , isso é indicado pelo fato de que em nenhum dos três casos a RQE utilizou menos elementos na malha que a Ch^p para atingir a con-

vergência. Além disso, os casos em que o parâmetro de escalamento é igual a 1 indicam que o refino foi dominado pela restrição imposta e não pela técnica de obtenção do novo tamanho elementar. Isso é confirmado quando as soluções geradas pelas malhas adaptadas, que possuem o mesmo número de elementos, pelas duas técnicas geraram valores de erro relativo e índice de efetividade idênticos.

Mais alguns testes foram realizados utilizando intervalos diferentes para as restrições quanto ao novo tamanho de elemento. Porém, apenas um relato das observações será feito na sequência. Fig.s e tabelas correspondentes serão omitidos para abreviar a discussão.

Utilizando $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq 1,5h_{old}$ e erro relativo prescrito 2%, percebeu-se que a instabilidade da inclinação da curva de erro relativo em energia em função do número de elementos da malha foi agravada, sendo que em algumas etapas de refino foi possível notar uma perda de convergência, ou seja, um aumento do valor de erro relativo conforme se aumentou o número de elementos da malha.

Com as restrições $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ utilizando erro relativo prescrito igual a 2% não foi mais observada instabilidade nas taxas de convergência do erro relativo. Além disso, notou-se que as restrições permitiram um melhor controle do refino no caso das estimativas via MNS. A imposição da restrição $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ foi capaz de melhorar, também, o desempenho da técnica Ch^p , em termos do número de elementos necessários para a convergência, para os casos ZZ e SPR. Ainda, o desempenho da técnica RQE para estimativas via ZZ piorou, enquanto que o desempenho para as estimativas via SPR permaneceu o mesmo.

Utilizando ainda as restrições $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$ com erro prescrito de 0,1%, percebeu-se o mesmo comportamento daquele manifestado no carregamento linear: as primeiras etapas de refino dominadas pelas restrições impostas e somente nos estágios finais se percebe influência das técnicas de refino.

7.3 CASO 3 - CARREGAMENTO SENOIDAL

O terceiro de carregamento ao qual a barra está submetida é modelado como uma função trigonométrica definida no domínio de análise do problema, dada por

$$b(x) = \sin(2\pi x), \quad (7.15)$$

onde $x = [0,L]$, sendo L o comprimento da barra igual a 1 m. A representação gráfica da função $b(x)$ está presente na Fig. 42.

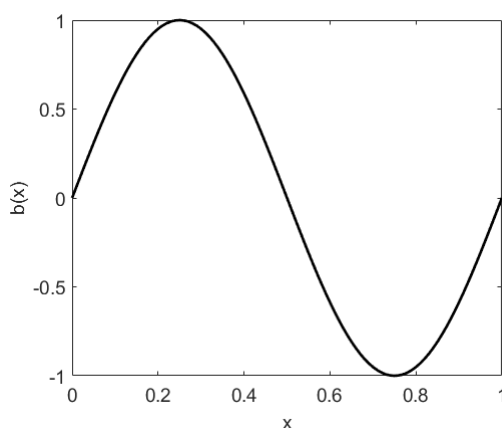


Figura 42 – Carregamento senoidal.

Fonte: Próprio autor (2018).

A configuração do sistema físico é similar à considerada para o carregamento linear, na seção 7.1, no que diz respeito às condições de contorno. Todavia, caso houvesse uma única restrição de deslocamento colocada exatamente no meio do domínio, tal carregamento poderia ser usado para modelar o efeito da força centrífuga atuando axialmente em uma hélice de helicóptero, por exemplo, quando esta se encontra em movimento angular com velocidade constante.

Definidas as condições de contorno do problema, pode-se calcular a solução exata em deslocamento, $u_o(x)$, e a solução em tensão associada, $\sigma_o(x)$, dadas por

$$u_o(x) = \frac{1}{4\pi^2} \sin(2\pi x) - \frac{1}{4\pi^2} x \quad \text{e} \quad (7.16)$$

$$\sigma_o(x) = \frac{50}{\pi} \cos(2\pi x) - \frac{50}{\pi}. \quad (7.17)$$

7.3.1 Verificação da formulação implementada

Tendo conhecimento da solução exata do problema, eq. 7.16 e 7.17, é possível calcular o erro relativo em energia exato da solução aproximada, a fim de se verificar as taxas de convergência do erro relativo em energia em função do número de elementos na malha.

Neste caso, optou-se pela não apresentação da comparação entre a solução exata e a aproximada em deslocamento. Isso se deve ao fato de que as principais características que foram apontadas nos casos anteriores também se reproduzem neste caso, não havendo necessidade de expô-las novamente.

Na Fig. 43 são apresentadas as curvas de erro relativo em energia exato em função do número de elementos na malha para os casos $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$.

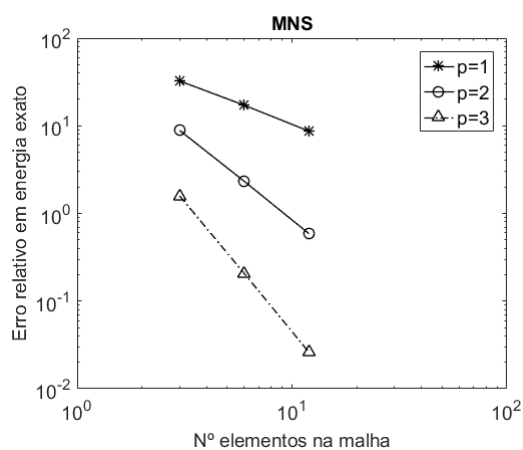


Figura 43 – Comparação entre as curvas de convergência do erro relativo em energia para os malhas contendo elementos lineares, quadráticos e cúbicos obedecendo a um refino aninhado para um carregamento senoidal.

Fonte: Próprio autor (2018).

Os valores de taxa de convergência do erro relativo em energia exato em função do número de elementos na malha foram: 0,951 para $p = 1$, 1,957 para $p = 2$ e 2,964 para $p = 3$. A diferença entre os valores de taxa esperados e os calculados varia entre 3,5% e 4,5%, portanto é seguro validar a formulação implementada para o caso do carregamento senoidal.

7.3.2 Estimativa de erro a posteriori

As Fig. 44 - 46 apresentam a comparação entre as soluções em tensão exata, aproximada e recuperada via MNS, ZZ e SPR, respectivamente.

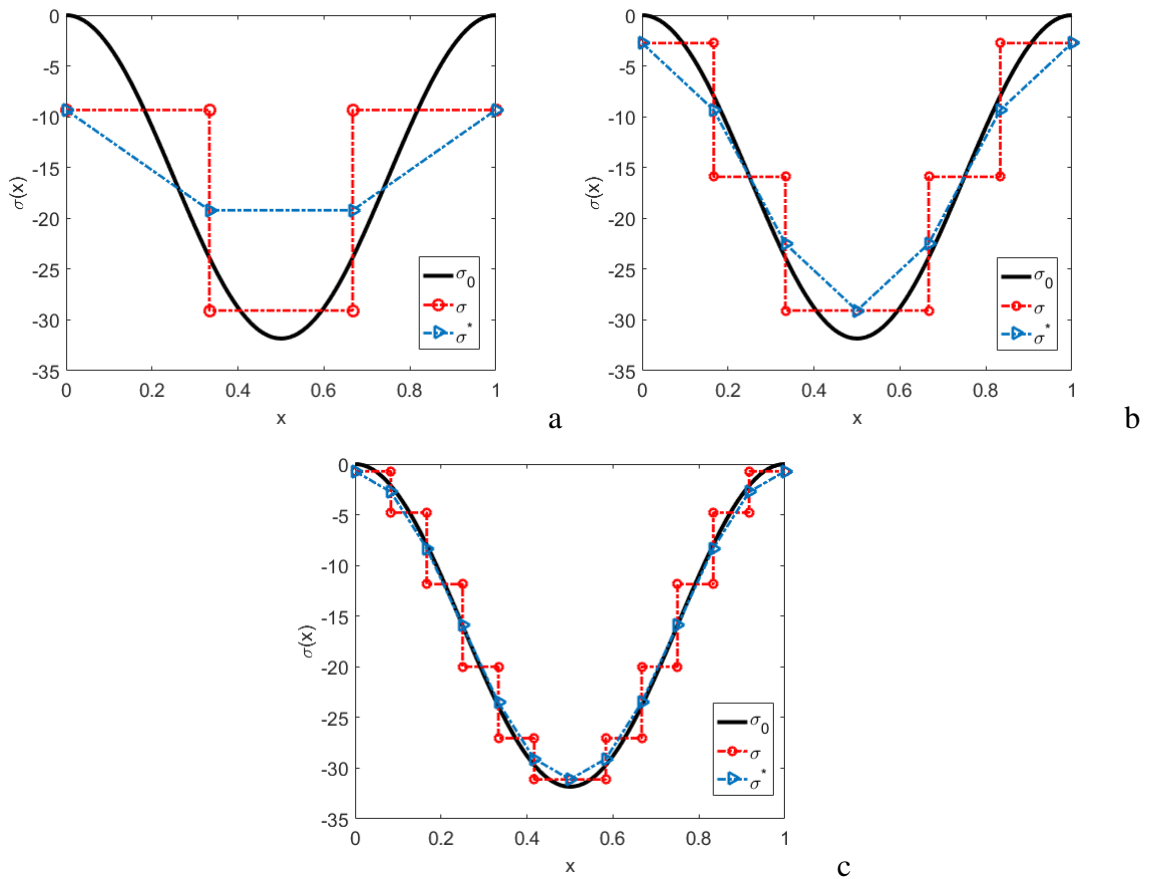


Figura 44 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via MNS para um carregamento senoidal.

Fonte: Próprio autor (2018).

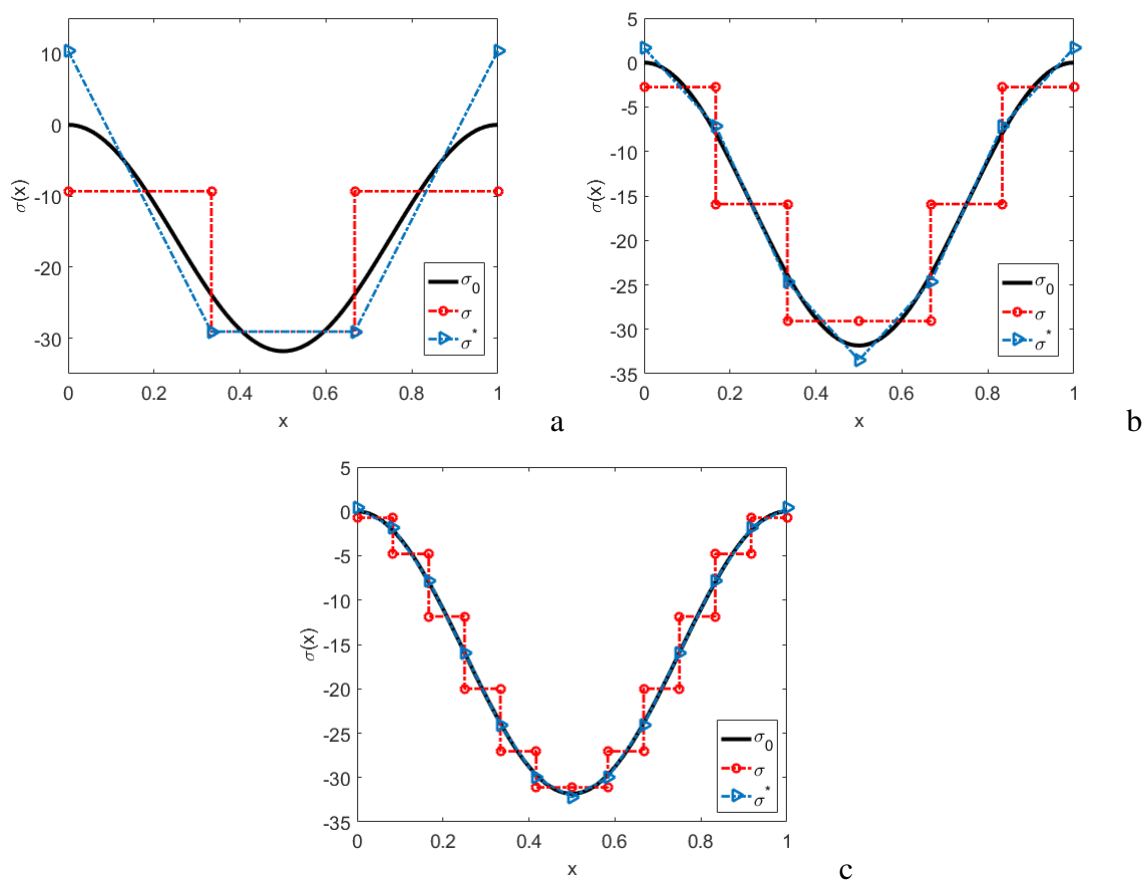


Figura 45 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via ZZ para um carregamento senoidal.

Fonte: Próprio autor (2018).

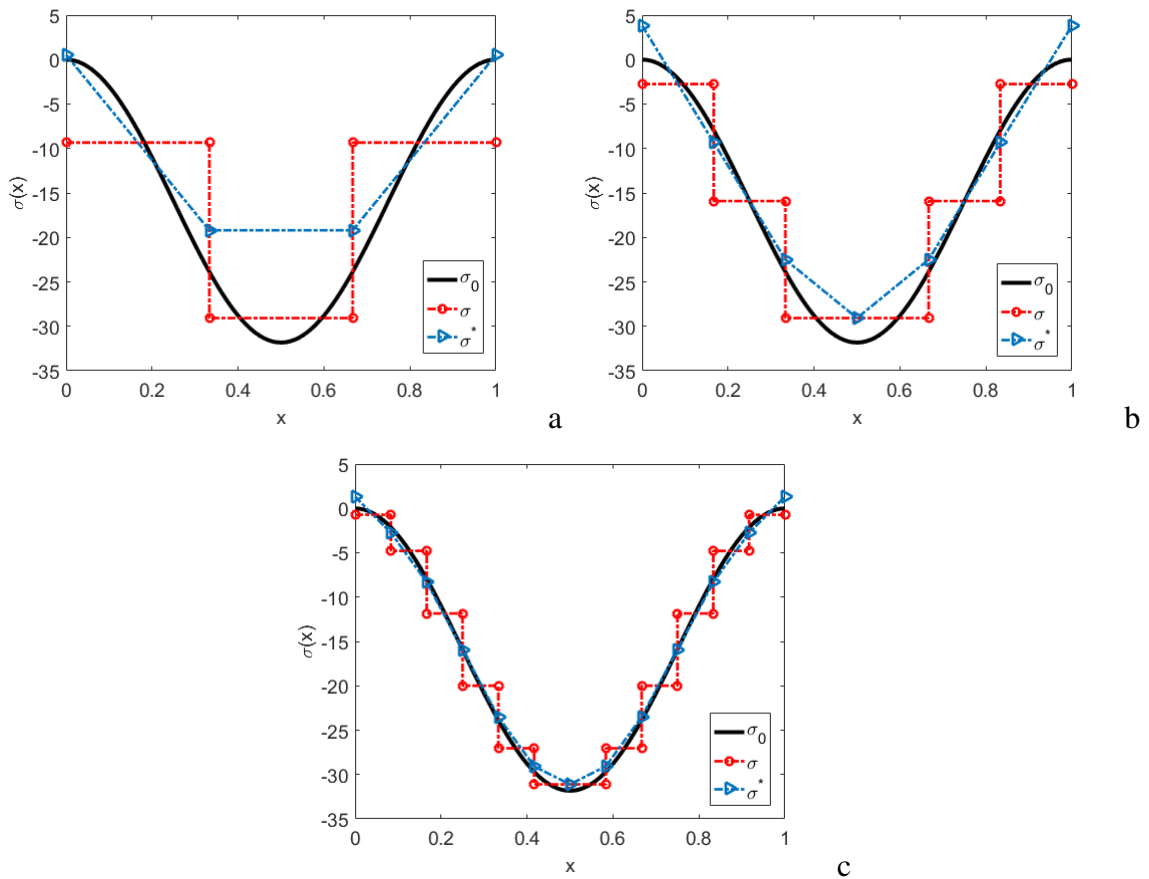


Figura 46 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via SPR para um carregamento senoidal.

Fonte: Próprio autor (2018).

Comparando-se as figuras, nota-se que a recuperação via ZZ apresentou o melhor desempenho, para $p = 1$. Ao se avaliar os Índices de efetividade, Fig. 47, essa observação se confirma. Embora na malha inicial a recuperação ZZ tenha fornecido a pior estimativa entre as três, nas malhas com 6 e 12 elementos a estimativa via ZZ foi a que forneceu um índice de efetividade que mais se aproximou da unidade.

A Fig. 47 apresenta as curvas de índice de efetividade em função do número de elementos na malha para os três métodos de recuperação, variando também o tipo de elementos utilizado.

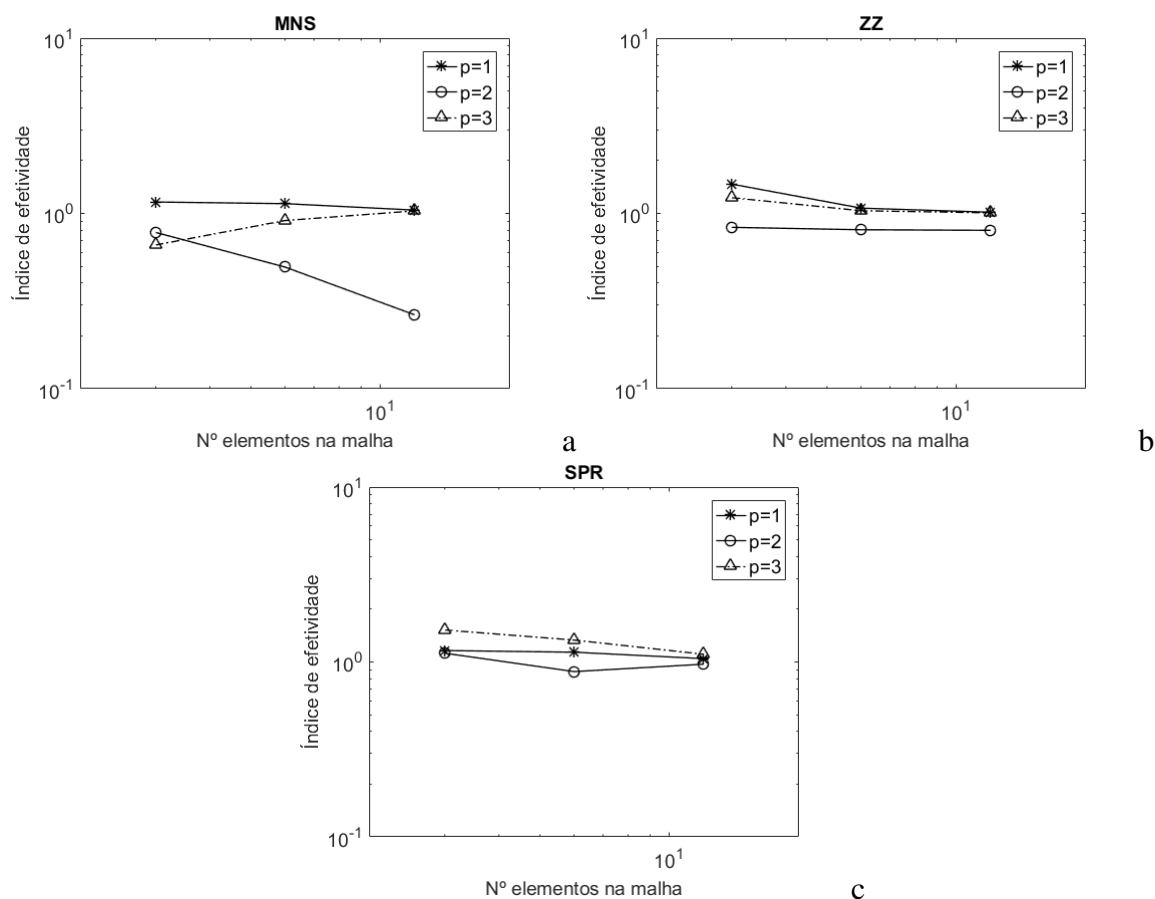


Figura 47 – Comparação entre o desenvolvimento dos índices de efetividade na situação de refinamento aninhado e diferentes graus elementares para as estimativas baseadas na recuperação (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR para um carregamento senoidal.

Fonte: Próprio autor (2018).

A estimativa via MNS apresentou valores de índice de efetividade permanecendo praticamente constante e bem próximo a unidade conforme refina-se a malha para elementos lineares. Já para elementos quadráticos, as estimativas foram piorando conforme o número de elementos cresce. Em contrapartida, as estimativas fornecidas pela recuperação MNS utilizando elementos cúbicos tenderam a melhorar conforme o número de elementos na malha foi aumentado. Esse comportamento do índice de efetividade em relação ao tipo de elemento utilizado sugere o fenômeno da dicotomia. Assim, verifica-se a robustez-h para malhas contendo elementos de tipo ímpar.

No caso da estimativa via recuperação ZZ, os Índices de Efetividade calculados para $p = 1$ e $p = 3$ apresentaram comportamento similar conforme realiza-se o refinamento da malha, sendo que em ambos o Índice tende a unidade conforme o número de elementos aumenta. Já para $p = 2$, o que se observa é um desenvolvimento constante do índice de efetividade conforme ocorre o refinamento da malha, de forma que a estimativa subestima o erro exato. Neste caso também é possível notar dicotomia e robustez-h por parte dos elementos lineares e cúbicos.

Para a recuperação SPR, observa-se que o índice de efetividade tende à unidade para os

três tipos de elementos testados conforme o refino avança, sugerindo robustez-h do estimador.

7.3.3 h-Adaptatividade

A Fig. (48) e a Tab. (8) apresentam a comparação entre as duas técnicas de refino para o um processo adaptativo sem restrições impostas sobre o novo tamanho de elemento e utilizando erro relativo prescrito igual 2 %.

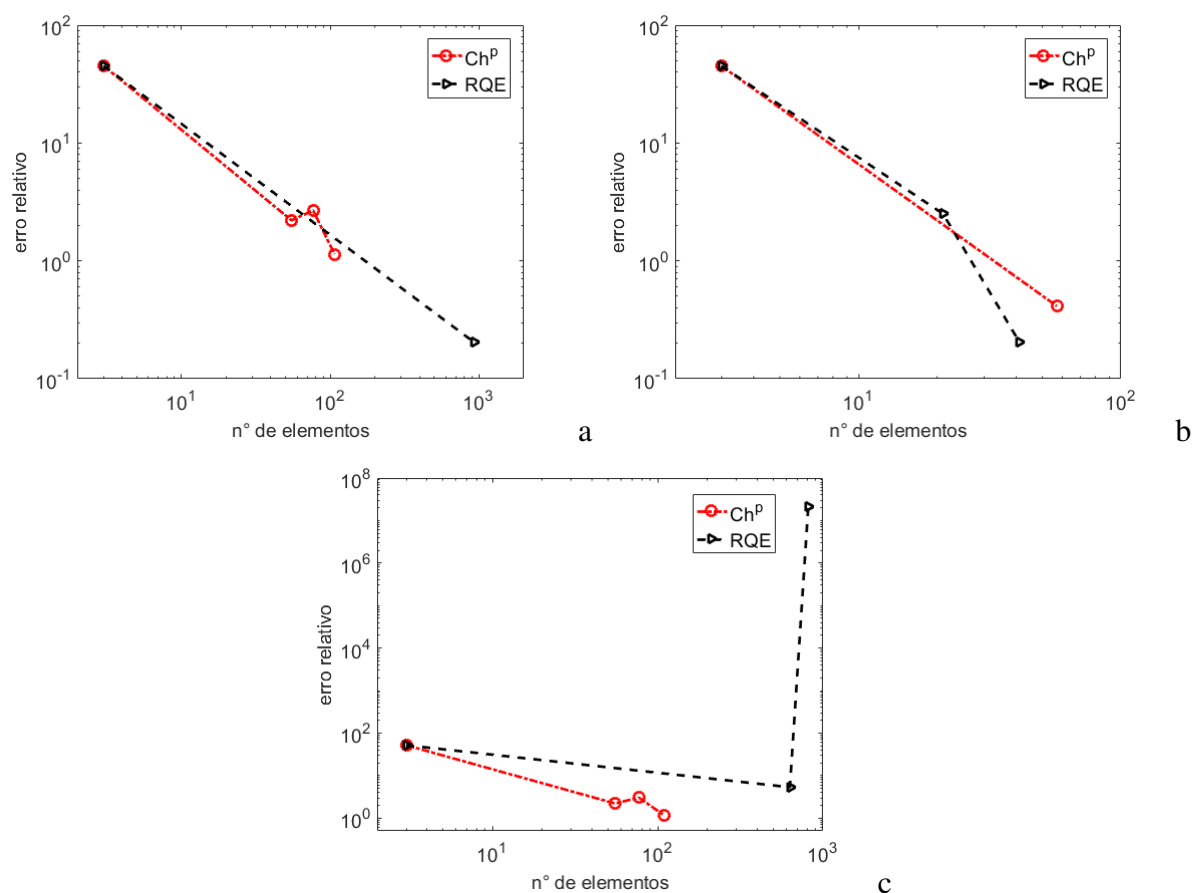


Figura 48 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento senoidal.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na fig. (48a) tem-se a utilização de estimativas de erro baseadas na recuperação MNS. Neste caso, nota-se que a técnica Ch^p precisou de 3 etapas de refino para atingir a convergência, enquanto que a técnica RQE necessitou apenas de 1. Observa-se também que existiu um perda de convergência na segunda etapa de refino no caso Ch^p , ainda assim a técnica de RQE utilizou mais elementos para atingir o valor de erro relativo prescrito.

A fig. (48b) mostra a comparação para o caso de estimativa via ZZ. Neste caso, a técnica RQE utilizou 2 etapas de refino, enquanto a Ch^p precisou de só uma. Contudo, o número de elementos utilizados na malha final foi menor para a técnica RQE do que na Ch^p .

No caso em que estimativa via SPR foi utilizada, fig. (48c), nota-se uma perda de convergência em ambas as técnicas. Contudo, a adaptatividade via Ch^p ainda foi capaz de atingir o erro relativo prescrito, enquanto que a técnica RQE elevou o erro para um valor acima do obtido para a malha inicial.

Tabela 8 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento senoidal.

MNS							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
45,2728	3	1,1628	0,9692	45,2728	3	1,1628	0,9976
2,2100	55	0,9998	0,8835	0,2035	929	0,9993	
2,6735	77	1,1194	0,4611				
1,3173	107	1,0021					
ZZ							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
45,0636	3	1,4709	$7,58 \times 10^{-5}$	45,0636	3	1,4709	0,0025
0,4133	57	0,0058		2,5061	21	0,03555	$3,96 \times 10^{-3}$
				0,2051	41	0,0029	
SPR							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
51,6797	3	1,1628	0,9692	51,6797	3	1,1628	0,9891
2,2134	55	1,0019	0,4220	5,3183	631	1,012	$1,62 \times 10^{-5}$
3,0102	77	1,2546	0,4645	$2,07 \times 10^7$	815	1,4146	
1,1468	110	1,0022					

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise da tabela permite a visualização de alguns aspectos do processo adaptativo para o caso sem restrições.

Para a estimativa via MNS, nota-se que a técnica RQE proporcionou um refino muito mais intenso que a técnica Ch^p . A mesma situação ocorreu para os carregamentos anteriores. Isto é mais um indicativo de que essa intensificação é resultado do campo de tensões gerado nos nós dois elementos dos extremos do domínio. Quanto à perda de convergência apresentada pela técnica Ch^p , uma investigação realizada sobre os campos de tensão gerados pelas malhas adaptadas mostraram algumas características que podem ter sido o motivo da manifestação deste fenômeno. Na primeira etapa do processo adaptativo se observou um refino intenso de

toda a malha. Na segunda etapa, nota-se um aumento do tamanho dos elementos da região central do domínio, ao entorno de $x=0,5$. Na última etapa, foram realizados novos refinamentos nos elementos que haviam sido aumentados na etapa anterior. Portanto, esse efeito intermitente de diminuição e aumento do tamanho dos elementos pode ter sido a causa para a perda de convergência observada.

Utilizando recuperação ZZ, nota-se que, apesar de não serem observadas perdas de convergência nas figuras, os índices de efetividade calculados para as aproximações realizadas utilizando as malhas adaptadas foram bem baixos, indicando que a qualidade das estimativas de erro foram bem ruins para ambas as técnicas de refino. A razão para isso pode ser observada na fig. (45a). Nesta figura está presente a comparação entre os campos de tensão exato, aproximado e recuperado via ZZ para o carregamento senoidal utilizando uma malha inicial com 3 elementos. Observa-se que, no elemento central $x=[0,3333;0,6666]$, o campo de tensões aproximado se iguala ao campo de tensão recuperado. Dessa maneira, não se estima erro algum neste elemento, mesmo ambos os campos não representando bem o campo exato. Isso gera um θ bem distante da unidade. No processo adaptativo, isso se reflete através da efetuação do refino de malha somente nos dois elementos dos extremos e de um grande aumento no tamanho do elemento central. Essa característica pode ser observada pelo parâmetro de escalamento próximo a zero referente as malhas adaptadas.

No caso da estimativa via SPR, observou-se as mesmas características notadas para a estimativa MNS quando a técnica Ch^p foi utilizada. Já para a técnica RQE a primeira etapa de refino foi similar à apresentada na estimativa via MNS, porém em menor intensidade uma vez que o campo de tensões recuperado via SPR nos elementos dos extremos do domínio não favorece a intensificação do refino. Neste caso, também se observou uma perda de convergência para a técnica RQE. A avaliação do valor do parâmetro de escalamento indica uma grande diferença entre o comprimento da malha ótima calculada e o comprimento do domínio. A fim de se descobrir o motivo para este fenômeno, analisou-se o processo adaptativo para este caso e perceberam-se algumas características. O refino foi muito mais intenso no elemento central que nos elementos dos extremos na primeira etapa. Devido a isso, na segunda etapa, os elementos da região do domínio foram aumentados em grande proporção em relação ao restante da malha. Tendendo a aumentar o valor de erro estimado consideravelmente.

Na Fig. (49) e na Tab. (9) estão presentes as comparações entre as técnicas Ch^p e RQE considerando os três métodos de recuperação para as estimativas de erro. Neste caso, a foi imposta uma restrição da forma $h_{new} \leq h_{old}$ e um erro relativo prescrito de 2% foi utilizado.

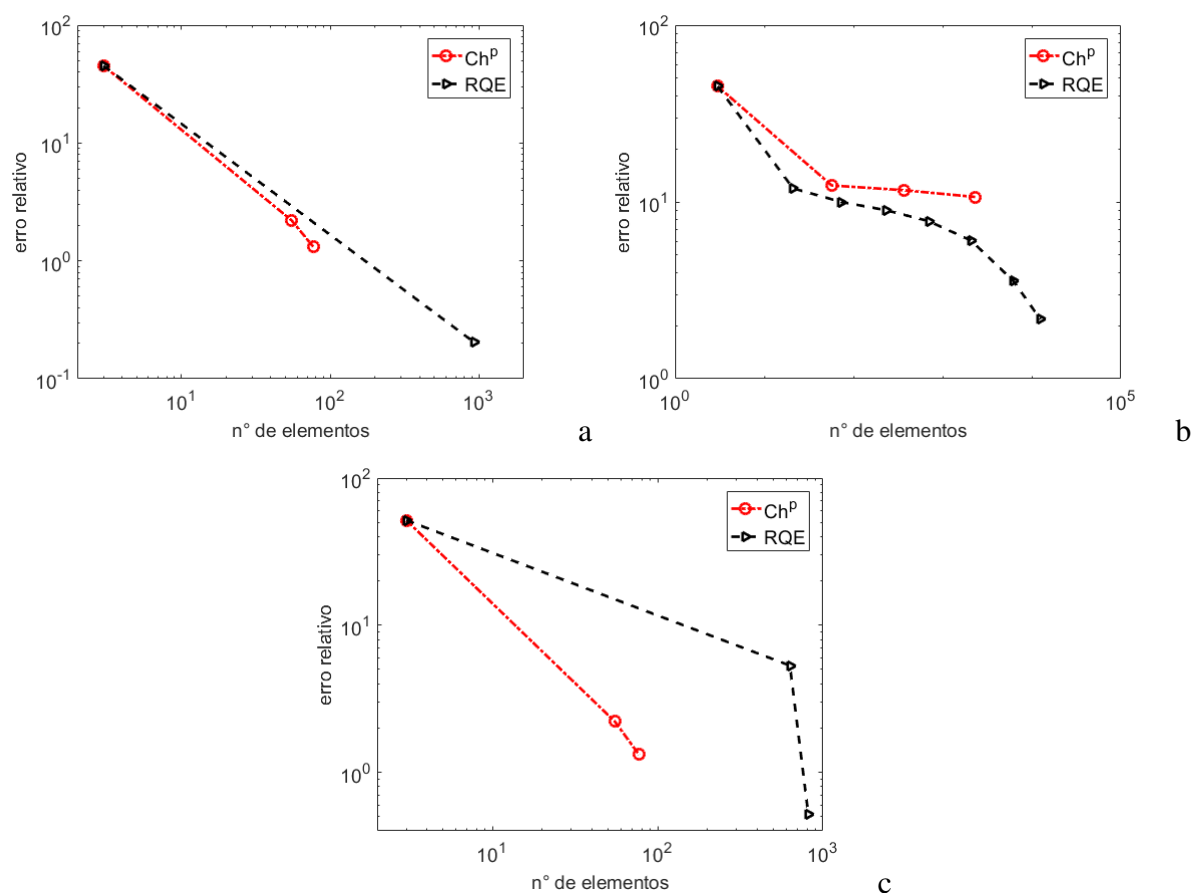


Figura 49 – Comparação entre as metodologias de refino h -adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento senoidal.

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise da figura mostra que a perda de convergência observada no caso sem restrições para as estimativas via MNS e SPR não se manifestou neste caso. Além de confirmar a hipótese de que a perda é causada pelo aumento e redução intermitente do tamanho dos elementos, isso mostra que a restrição imposta contribui de maneira positiva para o processo adaptativo no caso deste carregamento.

Para estimativas via ZZ, nota-se uma redução acentuada da taxa de convergência a partir da segunda etapa de refino em ambas as técnicas. Apesar da adaptatividade RQE ainda tender ao erro prescrito, nota-se que isso foi realizado sob um baixo aumento da inclinação da curva e demandou um quantidade grande de etapas de refino se comparado com os outros dois métodos de recuperação. Para adaptatividade baseada em Ch^p , por sua vez, nem mesmo notou-se a tendência a convergência após a primeira etapa de refino.

Tabela 9 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para um carregamento senoidal.

MNS							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
45,2728	3	1,1628	0,9692	45,2728	3	1,1628	0,9976
2,2100	55	0,9998	0,8835	0,2035	929	0,9993	
1,3173	77	1,0018					
ZZ							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
45,0636	3	1,4709	1,4709	45,0636	3	1,4709	0,9404
12,3993	57	1,7672	0,9631	11,9384	21	1,7177	0,9174
11,6473	369	1,8350	0,9456	9,9977	73	1,9541	0,9406
10,6680	2323	1,9174		8,9907	229	2,0709	0,9188
				7,7923	697	2,2038	0,8638
				6,0430	2089	2,4360	0,7471
				3,5627	6249	2,9316	0,7675
				2,1686	12497	3,4298	
SPR							
Ch ^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
51,6797	3	1,1628	0,9692	51,6797	3	1,1628	0,9891
2,2134	55	1,0019	0,8869	5,3183	631	1,0127	0,9576
1,3189	77	1,0042		0,5217	815	1,0021	

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise dos dados das tabelas mostram que, além de eliminar a perda de convergência, a imposição da restrição sobre o aumento do tamanho dos elementos proporcionou uma melhora no desempenho da técnica Ch^p nas estimativas via MNS e SPR em termos de número de elementos necessários na malha para a convergência. Neste caso, foram necessários 77 elementos tanto para MNS como para SPR, já no caso sem restrição foram 107 elementos para MNS e 110 para SPR.

No caso da técnica RQE, ainda considerando as estimativas via MNS e SPR, notou-se que a imposição da restrição não teve influência alguma sobre o adaptatividade em relação a quantidade de elementos gerados nas malhas, visto que o mesmo número de elementos gerados nas malhas adaptadas no caso sem restrições reproduzem-se neste caso. Ainda vale apontar que, assim como no caso sem restrições, o número de elementos nas malhas adaptadas foi muito maior para a técnica RQE que na técnica Ch^p .

Uma investigação mostrou que essa grande diferença entre a quantidade de elementos se reflete diretamente na formulação da técnica RQE. Considera-se a equação que fornece o

novo tamanho de elemento, eq. (7.10), reproduzida aqui:

$$h_{new}\left(1 + \frac{H^e h_{new}^2}{12\Delta\mu_o^e}\right) = \frac{e_m^2}{\Delta\mu_o^e} \quad (7.18)$$

Nas fig. (45b) e (46c) são apresentadas as comparações entre os campos de tensão exato, aproximado e recuperado em uma malha inicial contendo 3 elementos para os métodos ZZ e SPR respectivamente. Nota-se, nos elementos centrais compreendidos no intervalo $x=[0,3333,0,6666]$, que a diferença entre os valores de tensão recuperada e tensão aproximada nos dois nós do elemento são iguais. Quando isso ocorre, tem-se na eq. (7.18) que

$$\frac{H^e h_{new}^2}{12\Delta\mu_o^e} \ll 1. \quad (7.19)$$

Logo, pode-se considerar que o termo linear governa o novo tamanho do elemento, dessa maneira:

$$h_{new} = \frac{e_m^2}{\Delta\mu_o^e}. \quad (7.20)$$

Considerando o erro obtido na malha corrente, onde

$$h_{old} = \frac{E^2(h_{old})}{\Delta\mu_o^e}, \quad (7.21)$$

tem-se

$$\frac{h_{new}}{h_{old}} = \frac{e_m^2}{E^2(h_{old})} = \frac{1}{\xi^2}. \quad (7.22)$$

A fig. (50) mostra a comparação entre as técnicas de refino adaptativo em termos de intensidade de refinamento do tamanho de elemento, caracterizada pela razão $\frac{h_{new}}{h_{old}}$ em função do parâmetro de refinamento ξ .

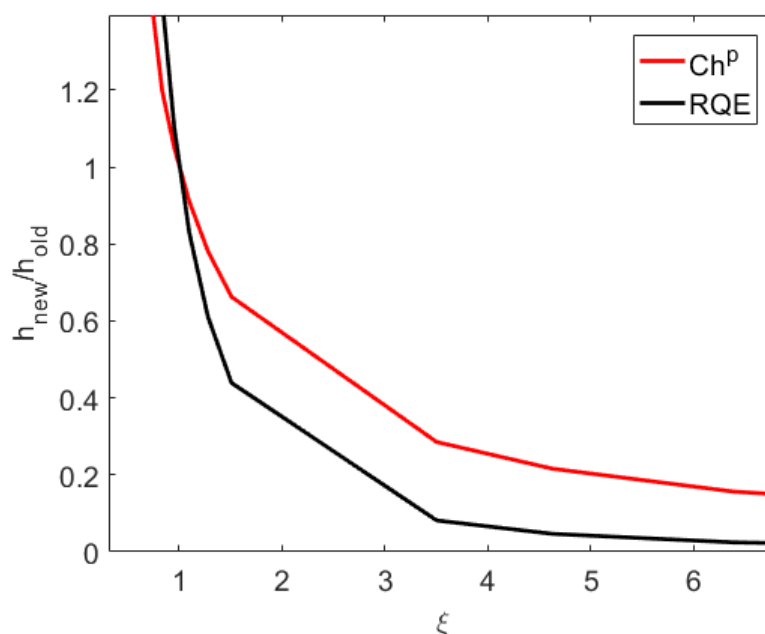


Figura 50 – Comparação entre as técnicas de refino adaptativo em termos de intensidade de refinamento do tamanho de elemento, caracterizada pela razão $\frac{h_{new}}{h_{old}}$ em função do parâmetro de refinamento ξ .

Fonte: Próprio autor (2018).

Pela figura, fica evidente quando uma diminuição do tamanho elementar se faz necessária, $\xi > 1$, a técnica RQE apresenta uma tendência de refinamento mais intensa se comparado com a Ch^p .

Ainda com base nos dados apresentados na Tab. (9), é possível observar alguns aspectos interessantes sobre o que foi notado na fig. (49b). Os valores mostram uma piora gradativa da qualidade das estimativas via ZZ, em ambas as técnicas, conforme as etapas de refino se sucedem e as taxas de convergência em cada etapa são muito baixas, contrariando o que foi observado no caso sem restrição. Tanto nos caso sem restrição quanto nesse caso, a qualidade das estimativas foi ruim. Contudo, no caso anterior a técnica Ch^p foi capaz de atingir a convergência. A possibilidade de expansão do tamanho elementar pode ser o motivo para isto ter ocorrido naquele caso e não neste. Como não se estima erro no elemento central, o processo adaptativo expande esse elemento de forma que ele ocupe quase inteiramente o domínio. Desse modo, em uma segunda aproximação, novamente não se estimará erro no elemento central, que agora ocupa a maior parte do domínio, isso faz com que o erro global seja menor do que erro prescrito. Logo, como não existe a possibilidade de expansão do tamanho elementar neste caso, o que se observa são refinamentos sucessivos dos elementos ao redor do elemento central, porém sem atingir a convergência.

Outras simulações utilizando restrições com intervalos de variação do tamanho elementar menores foram realizadas, tais como: $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$, $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq 1,5h_{old}$, $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$. O que se observou foi um comportamento

em comum em todas elas. Nas estimativas via MNS e SPR as primeiras etapas de refino foram dominadas pelos limites de variação impostos e a influência das técnicas de refino só foi observadas nas últimas etapas. Para as estimativa via ZZ, o mesmo comportamento manifestado no caso $h_{new} \leq h_{old}$ se reproduziu.

7.4 CASO 4 - CARREGAMENTO NOVOTNY

O último caso apresenta um sistema físico diferente dos casos tratados anteriormente. A barra agora tem movimentação restringida por engaste em ambas as extremidades. Ao longo do comprimento, existe um carregamento axial distribuído aplicado. O sistema físico descrito pode ser visualizado na Fig. 51.



Figura 51 – Barra engastada nas duas extremidades, submetida a um carregamento distribuído ao longo do comprimento.

Fonte: Próprio autor (2018).

Para este caso, o carregamento ao qual a barra está submetida é modelado como uma função dada por

$$b(x) = 2\alpha \left(\frac{1}{1 + \alpha(x - x_o)^2} + \frac{(x - x_o)(1 - x)\alpha^2}{(1 + \alpha(x - x_o)^2)^2} \right), \quad (7.23)$$

onde $x = [0, L]$, sendo L o comprimento da barra igual a 1 m. Nesta equação, α é uma constante referente à intensidade de uma singularidade, no sentido de elevados gradientes. Esta constante aqui é considerada igual a 50 e x_o é o ponto do domínio no qual a esta singularidade ocorre. Por um aspecto de conveniência, devido à uma limitação dos métodos de estimação do novo tamanho elementar aqui tratados, neste caso a singularidade será na posição $x_o = 1$ m. Na extremidade, garantidamente, sempre existirá um nó, independentemente da etapa de refino. A função carregamento $b(x)$ é representada graficamente na Fig. 52.

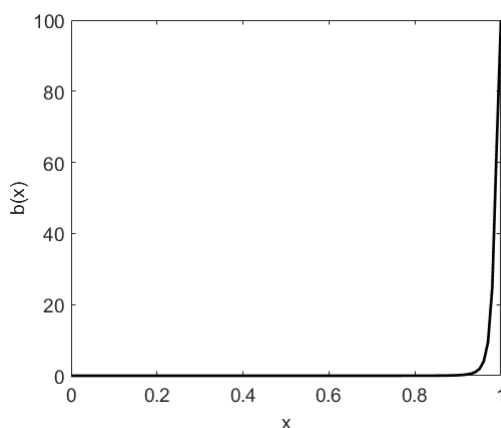


Figura 52 – Carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Este carregamento, com esta posição de singularidade, pode ser considerado para representar, num problema estático, o efeito inicial, na forma de uma onda elástica, que se formaria na ocasião de um impacto na extremidade direita da barra. Evidentemente, problemas transientes podem ser modelados incorporando o termo de inércia na equação diferencial do movimento discutida neste trabalho. Porém, mesmo fugindo do escopo deste texto, vale salientar que num processo de integração temporal também se requer que em cada instante se tenha um mínimo de confiabilidade dos valores de tensão e deslocamentos calculados para uma dada discretização espacial. Sendo assim, justifica-se a avaliação de um caso com singularidade, conforme segue.

A área da seção transversal, A , da barra é igual a $0,01 \text{ m}^2$ e módulo de elasticidade do material, E , igual a 100 Pa . Da configuração do sistema físico, pode-se definir as condições de contorno do problema como sendo

$$u_o(x=0) = 0 \quad \text{e} \quad u_o(x=1) = 0. \quad (7.24)$$

Definidas as condições de contorno do problema, pode-se calcular a solução exata em deslocamento, $u_o(x)$, e a solução em tensão associada, $\sigma_o(x)$, dadas por

$$u_o(x) = (1 - x_o) \arctan(\alpha(x - x_o)) + \arctan(\alpha x_o) \quad \text{e} \quad (7.25)$$

$$\sigma_o(x) = 100 \left(\frac{\alpha(1-x)}{1 + (\alpha(x-x_o))^2} - \arctan(\alpha(x-x_o)) - \arctan(\alpha x_o) \right). \quad (7.26)$$

7.4.1 Verificação da implementação da formulação

Tendo conhecimento da solução exata do problema, eq. 7.25 e 7.26, é possível calcular o erro relativo em energia exato da solução aproximada, a fim de se verificar as taxas de

convergência do erro relativo em energia em função do número de elementos na malha. Para isso, foram realizados três grupos de simulações: o primeiro utilizando elementos lineares, o segundo utilizando elementos quadráticos e o terceiro utilizando elementos cúbicos. Para cada grupo foram realizadas três simulações empregando um refino aninhado de malha, a primeira malha contendo 3 elementos, a segunda contendo 6 e a terceira contendo 12.

As soluções em deslocamento e em tensão para o grupo utilizando elementos lineares podem ser observadas nas Fig. 53 e 54.

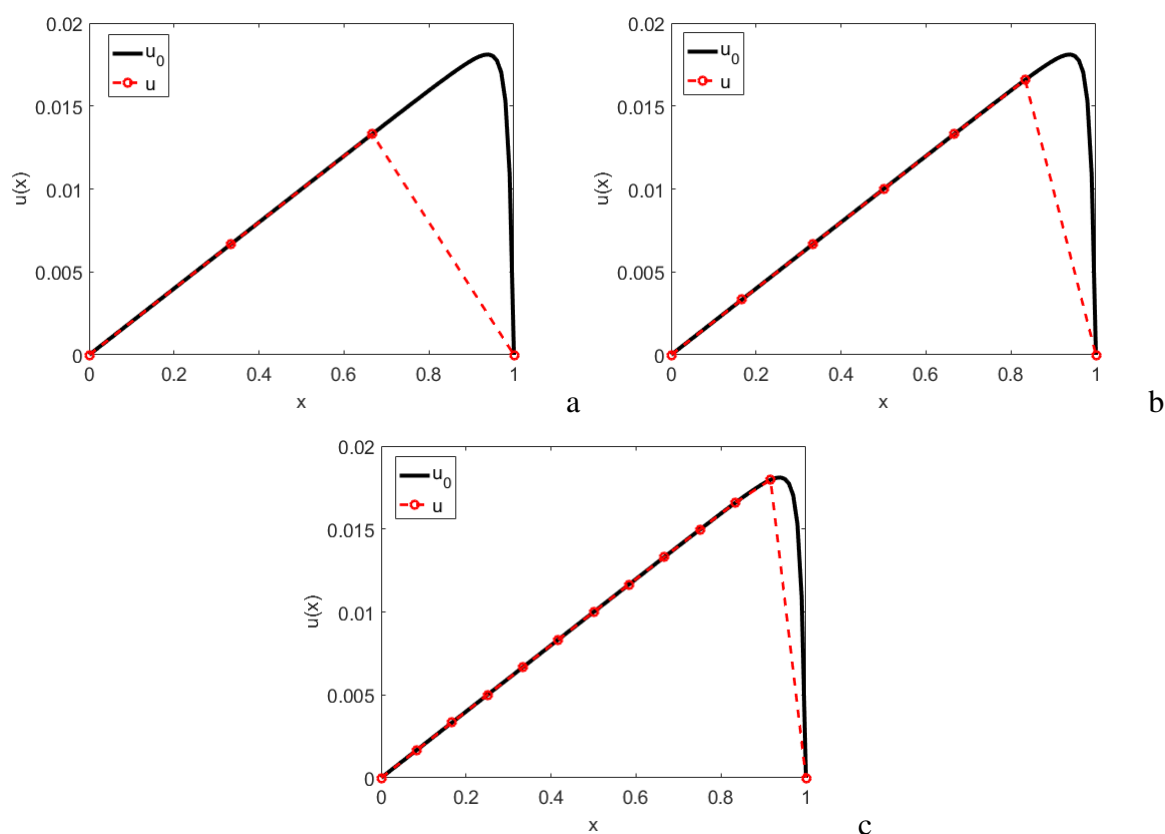


Figura 53 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 53 tem-se a comparação entre a solução em deslocamento exata e a solução aproximada por elementos finitos utilizando elementos lineares sob um refino aninhado. Nessa figura é importante notar que a existência de um nó na posição em que a singularidade se manifesta permite uma melhor aproximação da variável física naquele ponto do domínio. Nota-se, também, que neste caso as duas condições de contorno essenciais são asseguradas uma vez que ambas são impostas sobre variáveis nodais quando da resolução do sistema de equações.

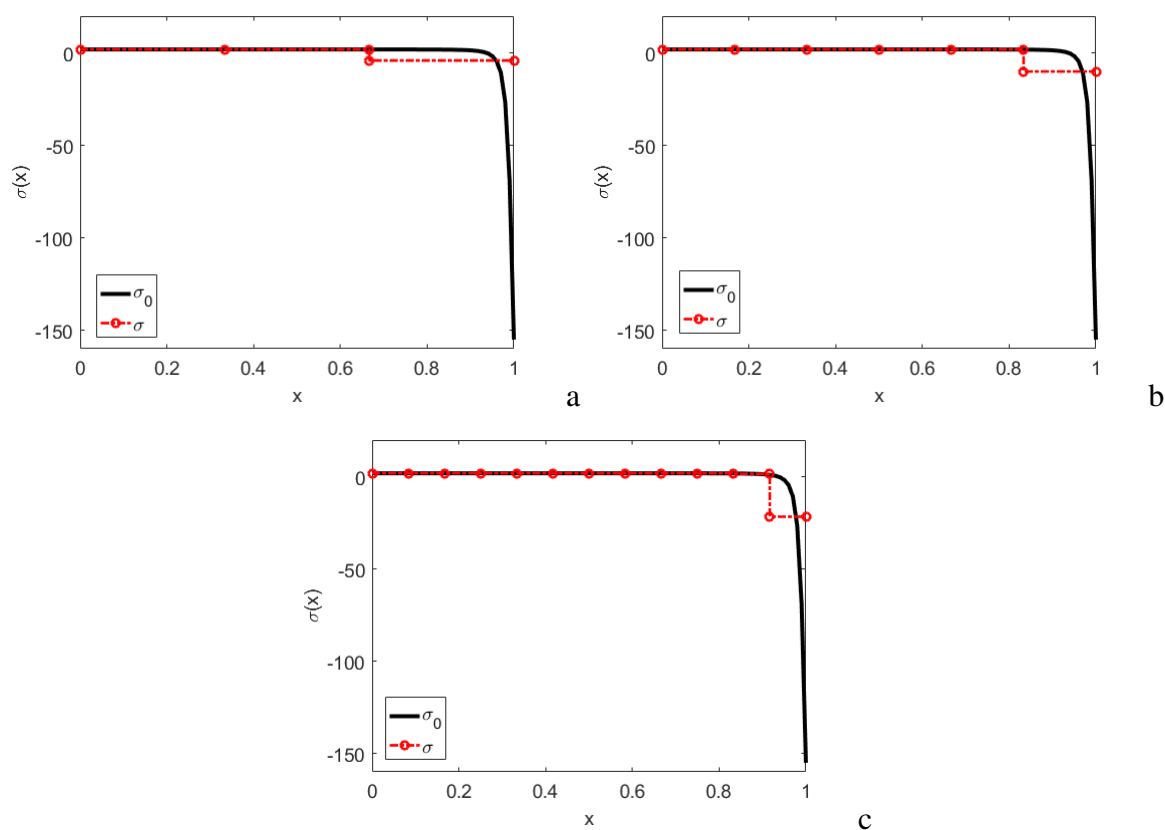


Figura 54 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Em contrapartida, na Fig. 54, pode-se perceber que a influência do nó na mesma posição em que a singularidade se manifesta não é significativa em se tratando da solução em tensão. Nota-se que a solução via MEF fornece uma boa aproximação para a solução exata na região em que os gradientes de tensão são pequenos. Porém, conforme aproxima-se da região de singularidade, onde os gradientes de tensão são bem elevados, a solução via MEF não é capaz de aproximar de maneira efetiva a solução exata. Comparando-se com os casos de carregamento sem singularidade, nota-se que neste caso o refinamento de malha apresenta um efeito de melhora bem menos significativo na solução aproximada. Logo, fica evidente que um procedimento de refinamento h que contemple prioritariamente a vizinhança da singularidade se faz necessário.

As soluções em deslocamento e em tensão para o grupo utilizando elementos quadráticos podem ser observadas nas Fig. 55 e 56

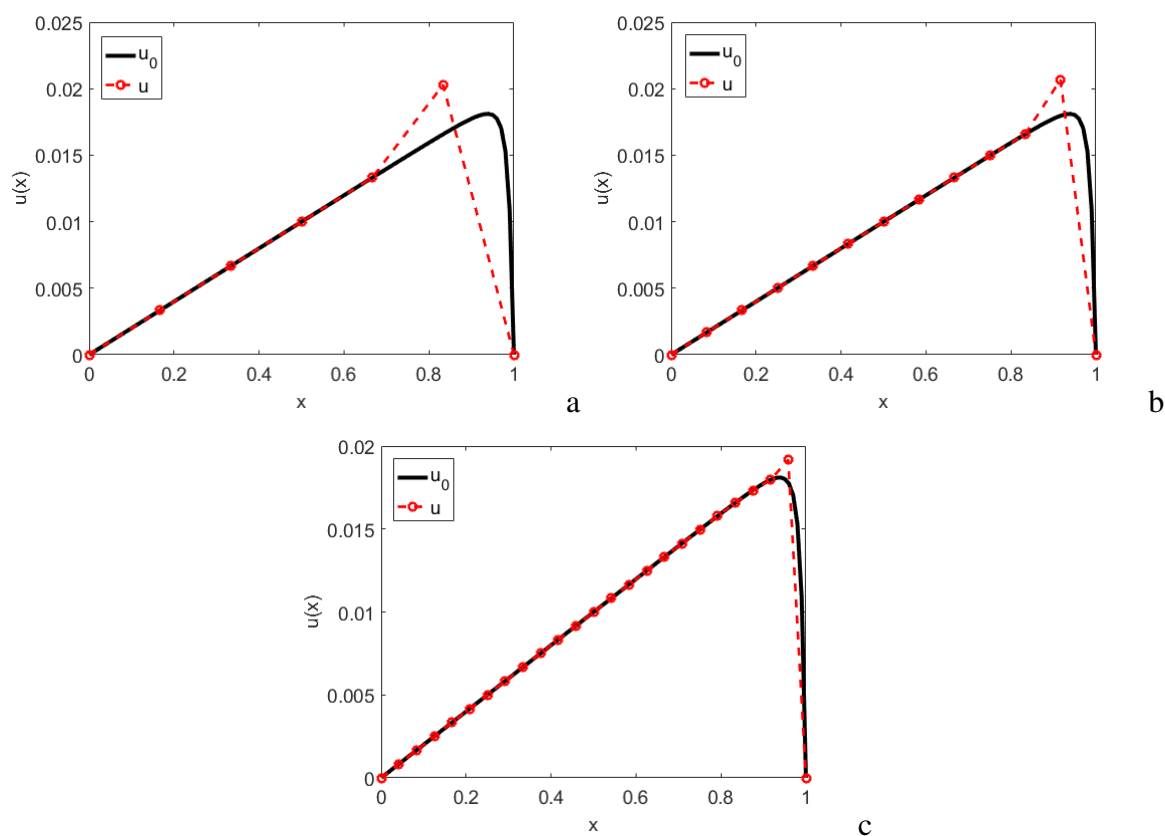


Figura 55 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 2$ para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 55 tem-se a comparação entre a solução exata e a solução aproximada para $p = 2$. Neste caso, observa-se que a solução via MEF fornece uma boa aproximação para a solução exata nas regiões em que a derivada é praticamente constante. Entretanto, na região próxima à singularidade, a solução via MEF fica comprometida na região em que os valores da derivada do deslocamento se tornam mais intensos.

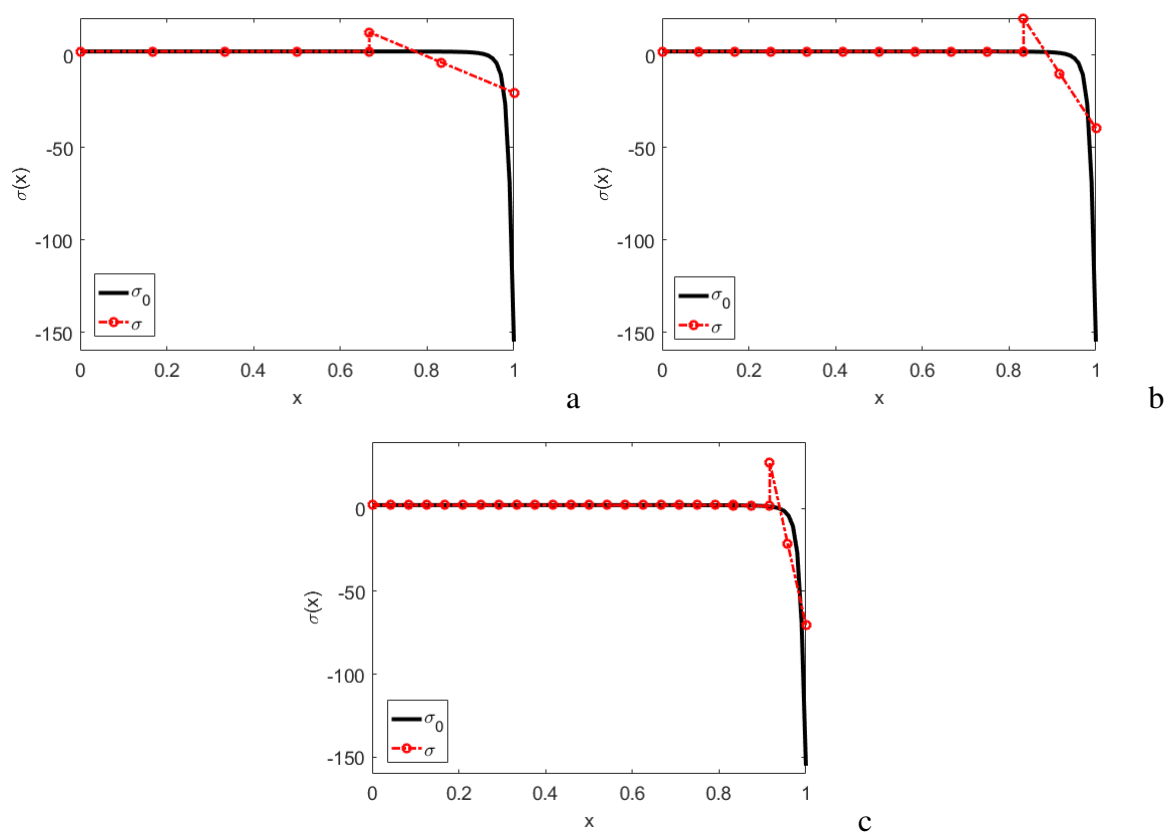


Figura 56 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 2$ para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 56 se nota que, assim como para $p = 1$, a solução via MEF em tensão não é capaz de aproximar muito bem a solução exata na região em que a singularidade se manifesta. Mesmo neste caso a solução aproximada em tensão sendo uma função linear no interior dos elementos, não houve grande diferença na capacidade de aproximação na região contendo a singularidade se comparado com o caso anterior quando a solução aproximada em tensão era uma função constante. Vale ainda observar como o valor de tensão aproximada na extremidade direita é distante do valor exato.

As soluções em deslocamento e em tensão para o grupo utilizando elementos cúbicos podem ser observadas nas Fig.57 e 58

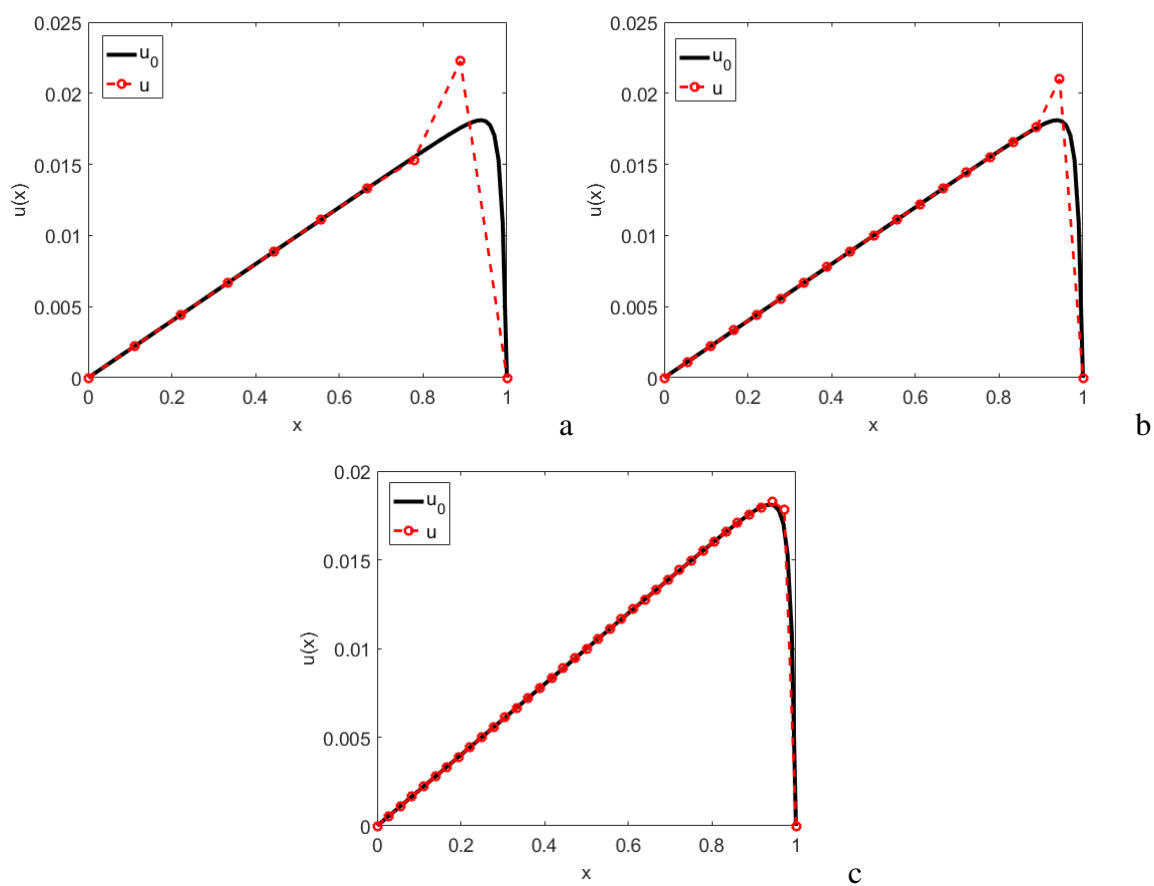


Figura 57 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em deslocamento para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 3$ para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 57, existe a comparação entre a solução exata e à aproximada via MEF para $p = 3$. Nota-se que ainda existe dificuldade para se aproximar na região próxima a singularidade em que a derivada se torna mais intensa. Contudo, a medida que o refino avança, percebe-se uma melhora significativa na aproximação nesta região, conforme pode ser visto na Fig. 57c.

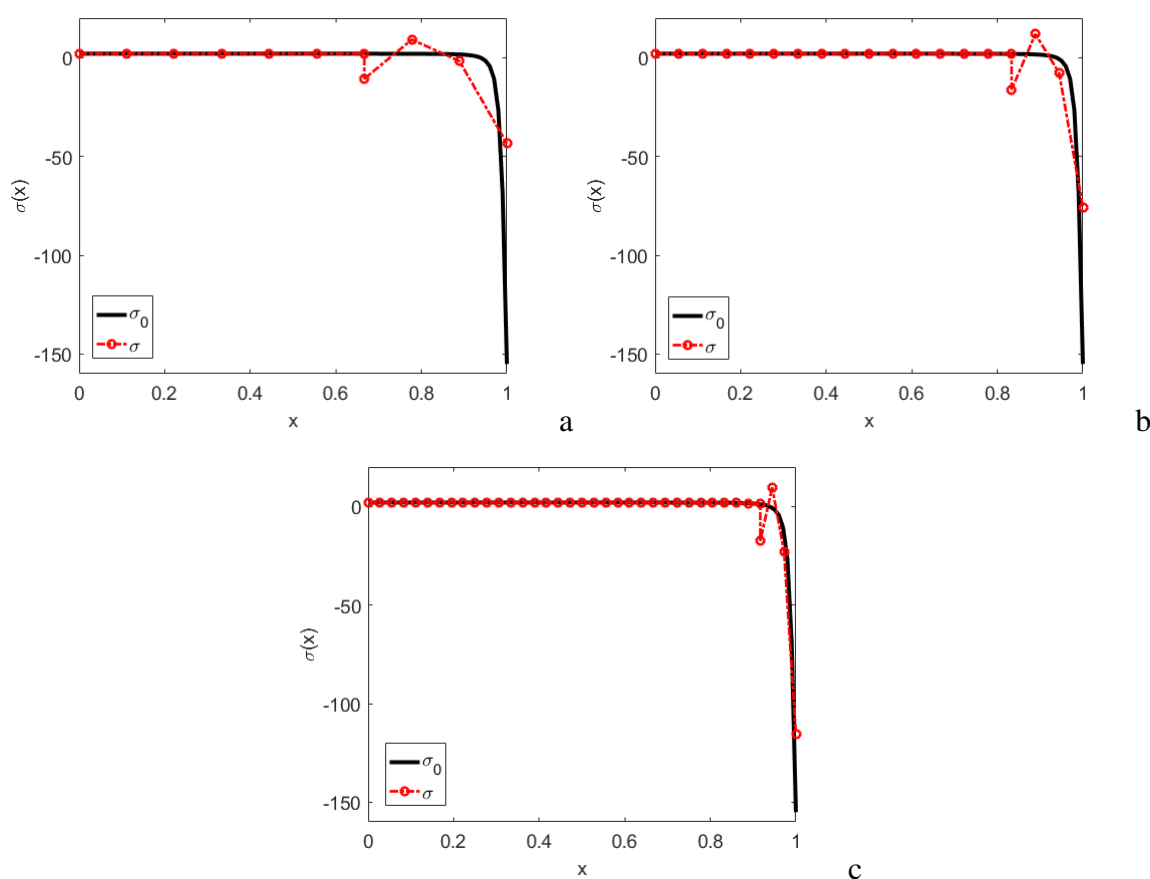


Figura 58 – Comparação entre as soluções exata e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 3$ para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Na Fig. 58 compara-se a solução exata em tensão com a solução aproximada também em tensão. Mesmo a solução obtida via MEF sendo uma função quadrática no interior dos elementos, ainda se nota a dificuldade da aproximação em representar a solução exata na região da singularidade. Essa característica se manteve para todos os tipos de elementos testados. Além disso, vale observar que a descontinuidade da tensão aproximada na junção entre os dois elementos próximos à extremidade direita aumenta à medida que se refina a malha, independentemente de se aumentar o grau p , vide figuras (56c) e (58c). Fica claro que funções de aproximação C^0 , como as utilizadas aqui, se mostram pouco eficazes na representação de elevados gradientes que se emanam de regiões com derivada praticamente nula.

Na Fig. 59 apresenta-se as curvas de erro relativo em energia exato em função do número de elementos na malha, para um padrão de refino aninhado e considerando elementos lineares, quadráticos e cúbicos.

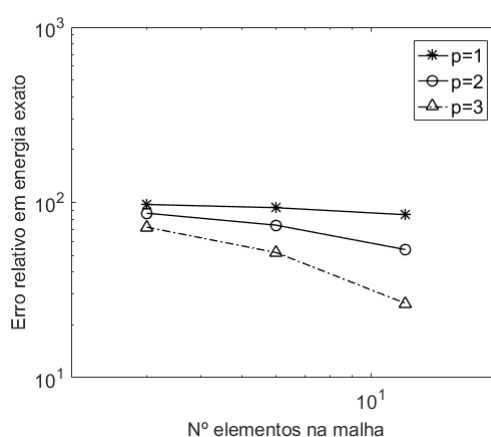


Figura 59 – Comparação entre as curvas de convergência do erro relativo em energia para os malhas contendo elementos lineares, quadráticos e cúbicos obedecendo a um refino aninhado para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise imediata dos valores de erro mostram um comportamento que difere daquele apresentado nos casos de carregamentos anteriores. Nenhuma das três curvas apresenta uma inclinação constante, isso quer dizer que as taxas teóricas de convergência não guardam relação direta com o grau polinomial pois a solução exata não é regular. Portanto, para este caso, o critério de validação utilizado nos 3 casos anteriores não se aplica. A análise dos valores de erro calculados mostram que a capacidade de aproximação da solução via MEF é bem baixa para malhas contendo poucos elementos e utilizando refino aninhado, mesmo aumentando o grau polinomial das funções de forma de aproximação dos elementos da malha. Em contrapartida, a influência do tipo de elemento utilizado se manifesta quando o refino de malha é realizado. É possível observar que as taxas de convergência do erro relativo crescem a uma velocidade maior para as aproximações utilizando elementos de grau superior. Ainda assim, de maneira geral a convergência para um valor de erro baixo, valendo ainda a observação de que os valores de erro apresentados para este caso são bem maiores que nos casos anteriores, é significativamente mais lenta do que se comparado aos outros casos avaliados neste trabalho.

7.4.2 Estimativa de erro à posteriori

Nas Fig. 60-62 tem-se a comparação entre as soluções exata, aproximada e recuperada em tensão para os métodos MNS, ZZ e SPR respectivamente.

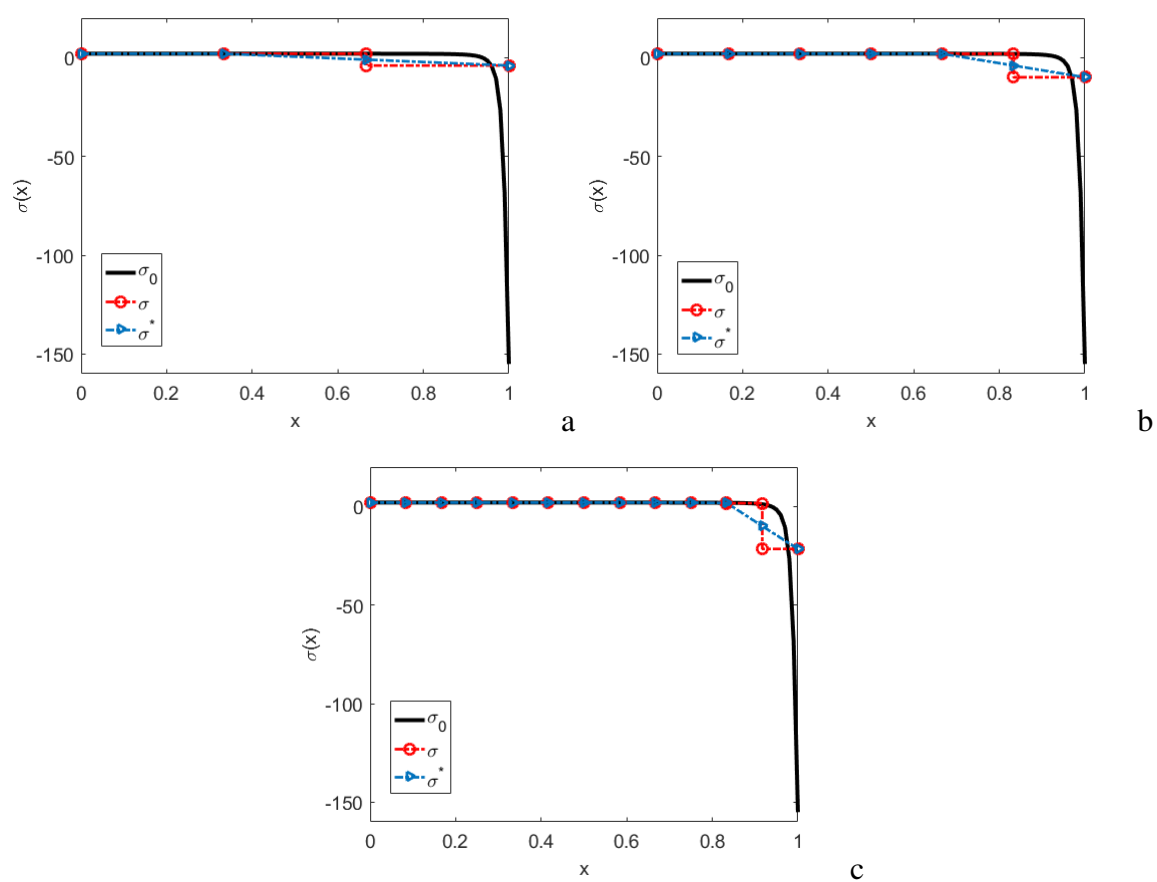


Figura 60 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via MNS no caso do carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

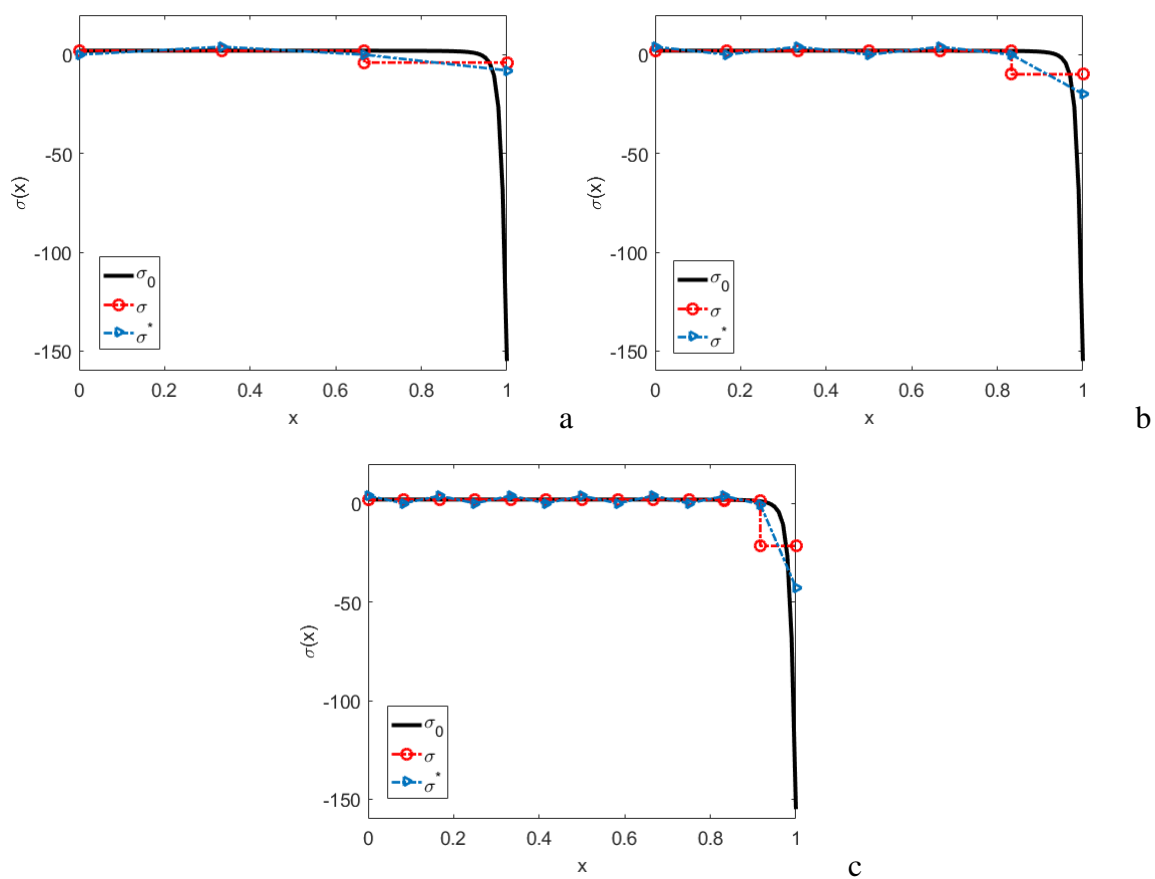


Figura 61 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via ZZ no caso do carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

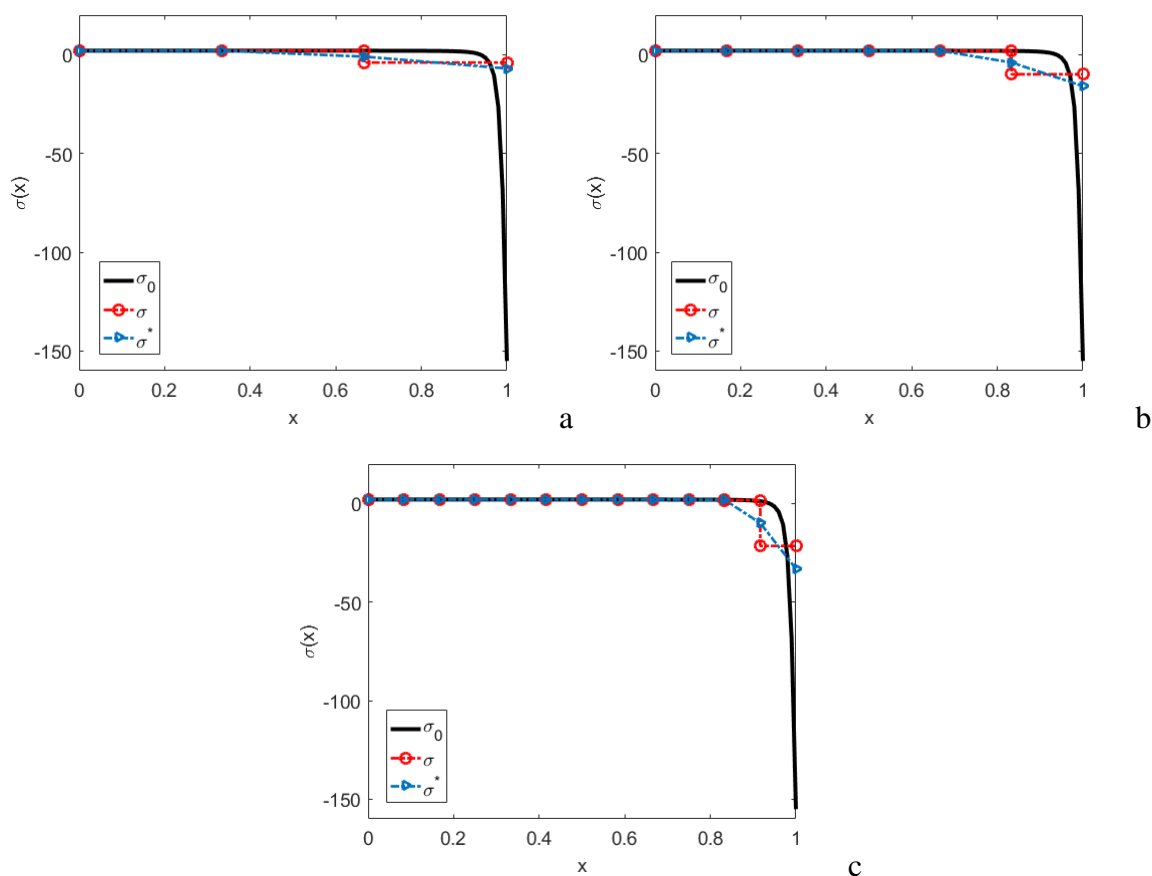


Figura 62 – Comparação entre as soluções exata, recuperada e aproximada em tensão para malhas com (a) 3 elementos, (b) 6 elementos e (c) 12 elementos, com $p = 1$ e recuperação via SPR no caso do carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Tratando-se das características particulares de cada métodos que já foram discutidas neste trabalho, elas se reproduzem mais uma vez neste casos. De maneira geral, a recuperação foi capaz de representar bem a solução exata na porção do domínio em que a tensão é praticamente constante. Contudo, na região onde a singularidade começa a manifestar sua influência a solução recuperada não conseguiu uma boa representação da solução exata. Esse comportamento se justifica, uma vez que a solução via MEF da qual a solução recuperada se origina também não é capaz de realizar uma boa aproximação nessa região.

Na Fig. 63 apresentam-se as curvas de índice de efetividade em função do número de elementos na malha para os três métodos de recuperação avaliados.

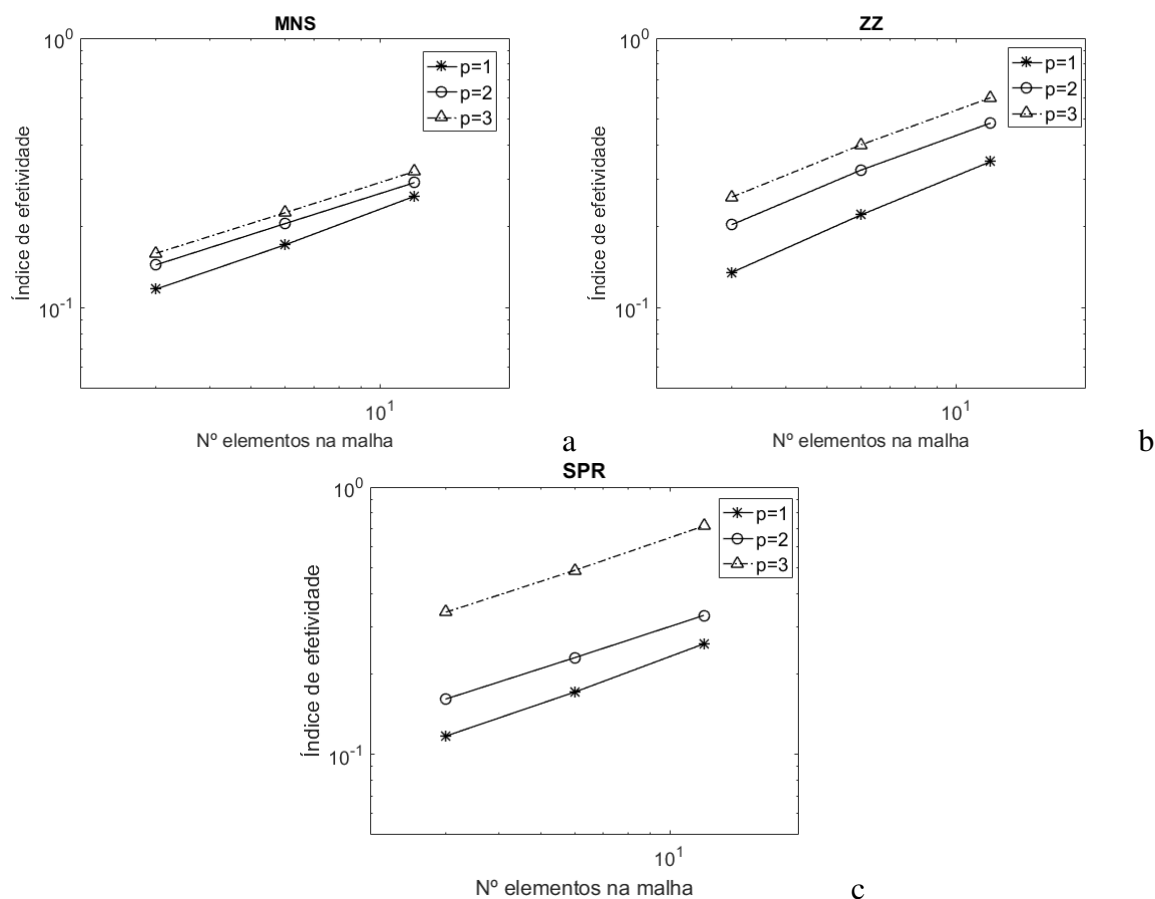


Figura 63 – Comparação entre o desenvolvimento dos índices de efetividade na situação de refinamento aninhado e diferentes graus elementares para as estimativas baseadas na recuperação (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR no caso do carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

Como esperado, se a solução recuperada não é capaz de representar bem a solução exata, o índice de efetividade calculado para o estimador de erro apresentará um valor distante da unidade. Para os três métodos de recuperação, pode-se notar que os índices de efetividade apresentaram valores bem baixos, da ordem de 0,1 a 0,2 para as malhas iniciais e este comportamento se estende aos três tipos de elementos avaliados. Por outro lado, percebe-se uma tendência de crescimento nos valores de índice de efetividade conforme o refinamento da malha é efetuado. Além disso, é possível notar que as taxas com as quais esse crescimento ocorre é aproximadamente igual para $p = 1$, $p = 2$ e $p = 3$ independentemente do tipo de recuperação utilizada.

7.4.3 h-Adaptatividade

Na Fig. (64) e na Tab. (64) apresenta-se a comparação entre as técnicas Ch^p e RQE considerando estimativas baseadas nos três métodos de recuperação de solução. Neste caso,

nenhuma restrição para o novo tamanho elementar foi imposta e um erro relativo prescrito de 2% foi estabelecido.

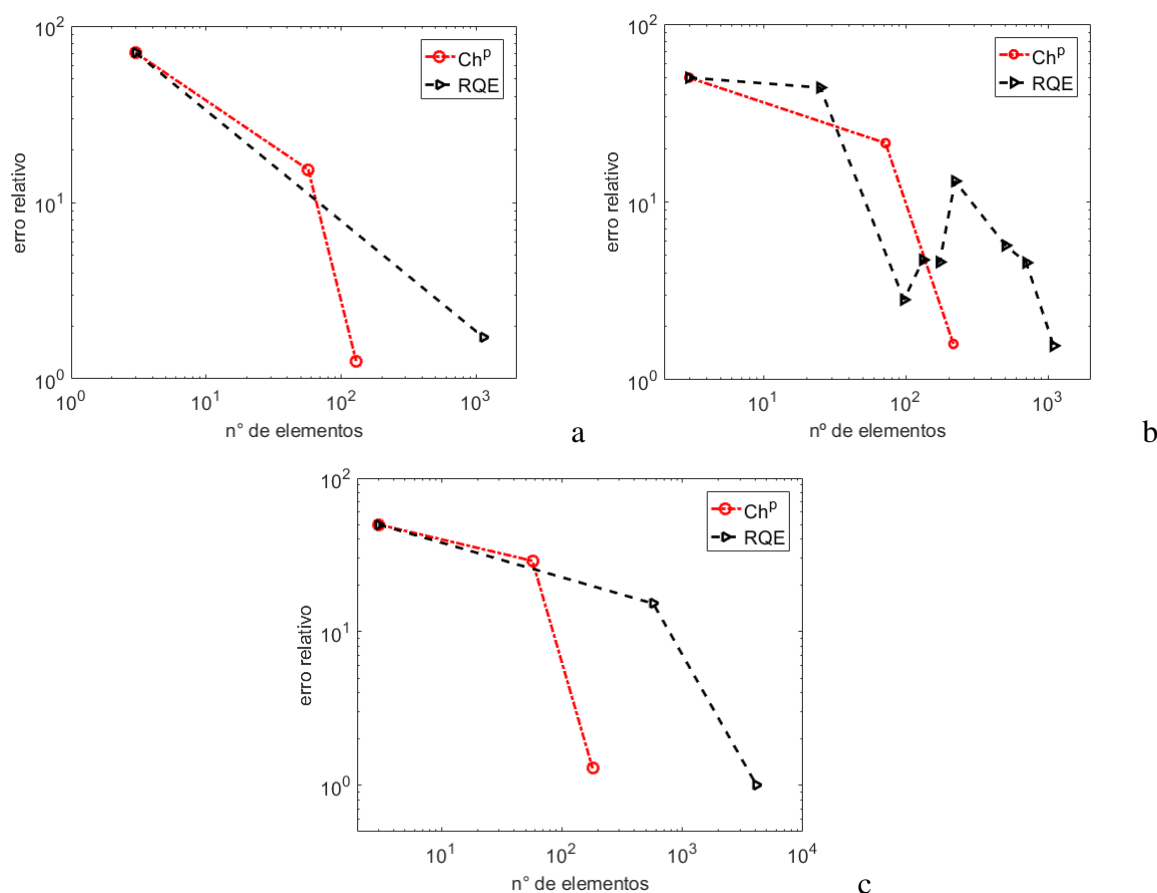


Figura 64 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

A fig. (64a) mostra o caso utilizando estimativa via MNS. Neste caso, nota-se que a técnica Ch^p utilizou duas etapas de refino, enquanto que a RQE precisou de apenas uma para atingir a convergência. Além disso, percebe-se que a taxa de convergência na primeira etapa de refino da técnica Ch^p é menor que a apresentada pela RQE, já na segunda etapa a situação se inverte.

Para estimativa ZZ, (64b), novamente a técnica Ch^p apresenta duas etapas de refino. Na técnica RQE, uma perda de convergência se manifesta a partir da terceira etapa de refino e passa a convergir novamente nas etapas finais.

Na estimativa SPR, (64c), ambas as técnicas apresentam duas etapas de refino. Contudo, apesar de possuírem taxas de convergência próximas na primeira etapa de refino, a intensidade desempenhada pela técnica RQE foi maior do que a Ch^p .

Tabela 10 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR sem quaisquer restrições de modificação de tamanho de elemento e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
70,6524	3	0,1171	0,0578	70,6524	3	0,1171	0,1278
15,3350	57	2,9020	0,8857	1,7235	1126	2,0699	
1,2612	129	1,0006					
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
49,9725	3	0,1352	0,9815	49,9725	3	0,1352	0,9723
21,4189	72	1,0059	0,6108	43,9528	25	0,6765	0,8016
1,5915	216	1,0242		2,8225	97	1,0028	0,0407
				4,7216	132	0,9850	0,0073
				4,5959	173	0,9813	0,0584
				13,0942	222	0,7870	0,5264
				5,6962	502	1,1567	0,7973
				4,5576	703	1,1187	0,5801
				1,5549	1094	1,0329	
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	n° ele.	θ	escalamento	η^*	n° ele.	θ	escalamento
49,9656	3	0,1171	0,0578	49,9656	3	0,1171	0,1917
28,9401	57	5,7729	0,8770	15,2644	573	0,9642	$8,00 \times 10^{-2}$
1,2923	180	1,0029		1,0060	4120	1,0007	

Fonte: Próprio autor (2018).

A tabela permite observar que, para os três métodos de recuperação, quando se tem uma baixa quantidade de elementos na malha as estimativas de erro são ruins, vide índice de efetividade bem distante da unidade. Consequentemente, isso empobrece o processo adaptativo, que se baseia nessas estimativas ruins, de forma a não gerar malhas verdadeiramente otimizadas.

Nota-se que, apesar de atingir a convergência com somente uma etapa de refino, a técnica RQE apresentou uma baixa qualidade da estimativa via MNS na malha adaptada, mesmo com um elevado número de elementos. Além disso, o número de elementos na última malha para a técnica Ch^p foi aproximadamente 9 vezes maior que a gerada pela RQE.

Na estimativa via ZZ, nota-se uma boa estimativa para todas as malhas adaptadas por Ch^p . Na técnica RQE, também se observam boas estimativas para a maioria das malhas adaptadas, mesmo nos casos em que ocorreu perda de convergência. Vale notar, também, que o parâmetro de escalamento calculados a partir do segunda etapa de refino foram bem distantes da unidade. Ao investigar as malhas adaptadas, nota-se que existe uma instabilidade de

refinamento, no sentido de aumentos e diminuições sucessivas do tamanho elementar, nas proximidades da singularidade, $x=[0,8,1]$.

Para a estimativa SPR, ambas as técnicas alcançam a convergência utilizando uma boa estimativa de erro nas aproximações. Contudo, o desempenho da técnica Ch^p , em termos de quantidade de elementos na última malha, foi bem superior ao da RQE. Vale notar, também, que o parâmetro de escalamento que se refere à última malha adaptada pela técnica RQE é baixíssimo, da ordem de 10^{-2} .

A Fig. (65) e a Tab. (11) apresentam a comparação entre as técnicas de refino considerando estimativas de erro via MNS, ZZ e SPR. Uma restrição da forma $h_{new} \leq h_{old}$ foi imposta à variação permitida ao tamanho dos elementos no processo adaptativo e um erro prescrito de 2% foi utilizado.

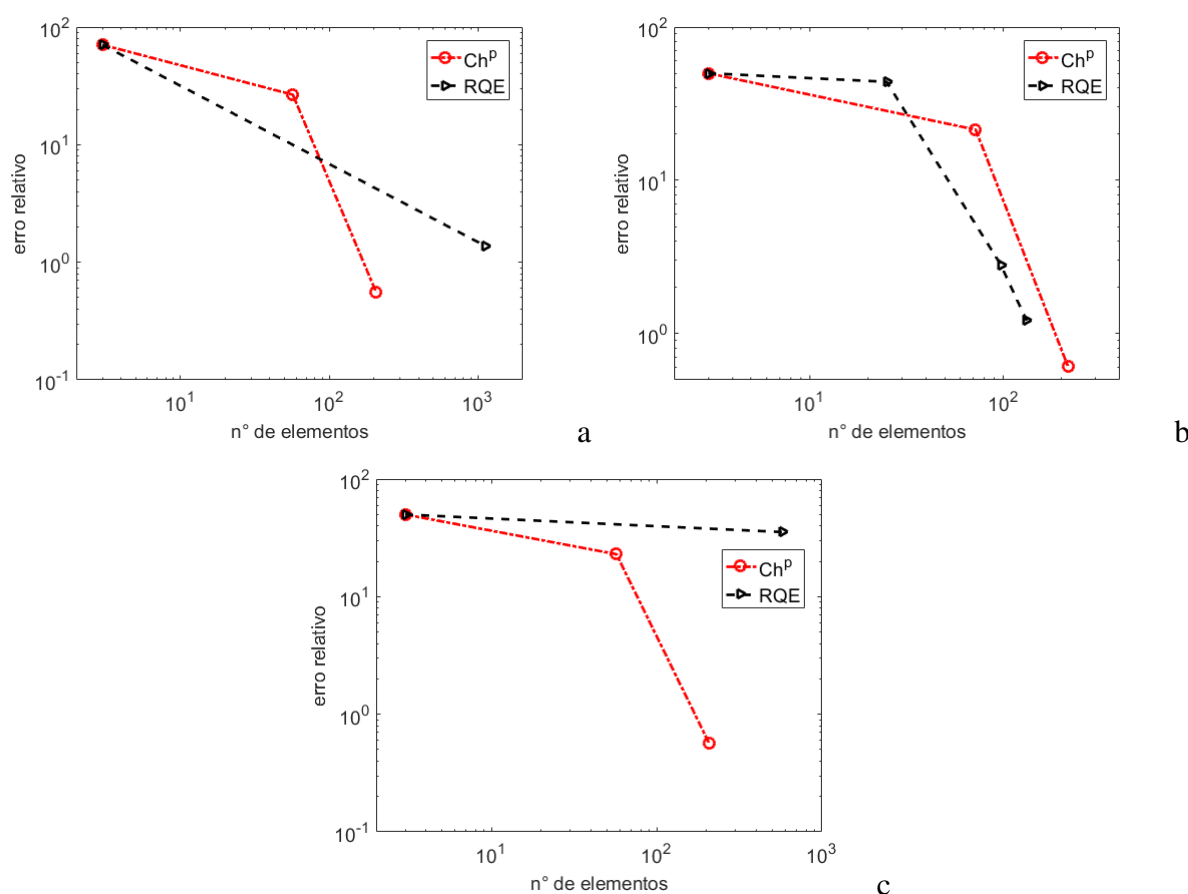


Figura 65 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

A fig. (65a) mostra a comparação entre as duas técnicas utilizando estimativas via MNS. Assim como no caso sem restrições, a técnica Ch^p contou com duas etapas de refino e a RQE precisou de somente uma para que a convergência fosse alcançada. Contudo, a diferença

entre a taxa de convergência apresentada pela Ch^p na primeira etapa em relação a apresentada pela RQE foi maior neste caso se comparado com o caso sem restrições.

Na fig. (65b), não se percebe perda de convergência na técnica RQE quando estimativas via ZZ foram utilizadas, ao contrário do que foi observado no caso sem restrições. Isso mostra que a aplicação de uma restrição sobre o aumento do tamanho elementar é benéfica para o processo adaptativo.

Na fig. (65c), observa-se apenas uma etapa de refino para técnica RQE, em que não se atingiu a convergência mesmo com um número de elementos na malha adaptada maior do que o necessário se comparado com a técnica Ch^p .

Tabela 11 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
70,6524	3	0,1171	0,9849	70,6524	3	0,1171	0,9991
26,5911	57	0,8557	0,9850	1,3704	1126	1,0001	
0,5558	207	0,9889					
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
49,9725	3	0,1352	0,9815	49,9725	3	0,1352	0,9723
21,4189	72	1,0059	0,9919	43,9528	25	0,6764	0,8000
0,6102	216	0,9995		2,8225	97	1,0028	0,9830
				1,2158	132	1,0004	
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
49,9656	3	0,1171	0,9849	49,9656	3	0,1171	0,9671
22,9676	57	0,8557	0,9850	35,4521	573	0,4556	
0,5711	207	1,0162					

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise dos dados da tabela mostraram um piora de desempenho para técnica Ch^p , em termos de quantidade de elementos na malha necessários para a convergência, quando se utiliza estimativa via MNS. Por outro lado, nota-se uma melhora na qualidade da estimativa de erro na malha final na técnica RQE, apesar de o número de elementos necessários para a convergência ter se mantido o mesmo em relação ao caso sem restrições.

Para estimativas via ZZ, percebe-se que o número de elementos necessário para a convergência se manteve quando a técnica Ch^p foi usada. Quanto a técnica RQE, nota-se que a perda de convergência apresentada no caso sem restrições foi eliminada. Ao mesmo tempo,

um número consideravelmente menor de elementos foi necessário para alcançar o erro relativo prescrito, 132 neste caso contra 1094 no caso sem restrições, superando até mesmo a técnica Ch^p .

Da mesma forma que na estimativa via MNS, na estimativa via SPR o desempenho da técnica Ch^p piorou em termos do número de elementos necessários para atendimento ao erro prescrito. Já para a técnica RQE, a técnica SPR apresentou uma interrupção no processo adaptativo devido à limitação de memória do computador utilizado nas simulações. Isso se deveu à grande dimensão da matriz de rigidez global. Uma investigação acerca da evolução das malhas adaptadas ao longo do processo mostrou um refino extremamente intenso na região correspondente ao elemento central da malha inicial. Já na malha inicial, nota-se que existe uma similaridade entre o campo de tensões recuperado via SPR no elemento central e os campos recuperados via MNS nos elementos dos extremos do domínio. Embora, para este caso, em nenhum dos nós do elemento central os valores de tensão recuperada e aproximada tenham se igualado, é possível observar que a diferença entre os dois valores de tensão no nó da esquerda é muito menor, em valores absolutos, que a diferença calculada no nó da direita. Isso é um indicativo de que, semelhantemente ao que ocorre nas estimativas via MNS, diferenças muito grandes na magnitude $\Delta\sigma = \sigma^* - \sigma$ entre os dois nós de um elemento acarretam em uma intensificação do refino.

A Fig. (66) e a Tab. (66) apresentam a comparação entre as técnicas utilizando uma restrição da forma $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e erro relativo prescrito de 2%.

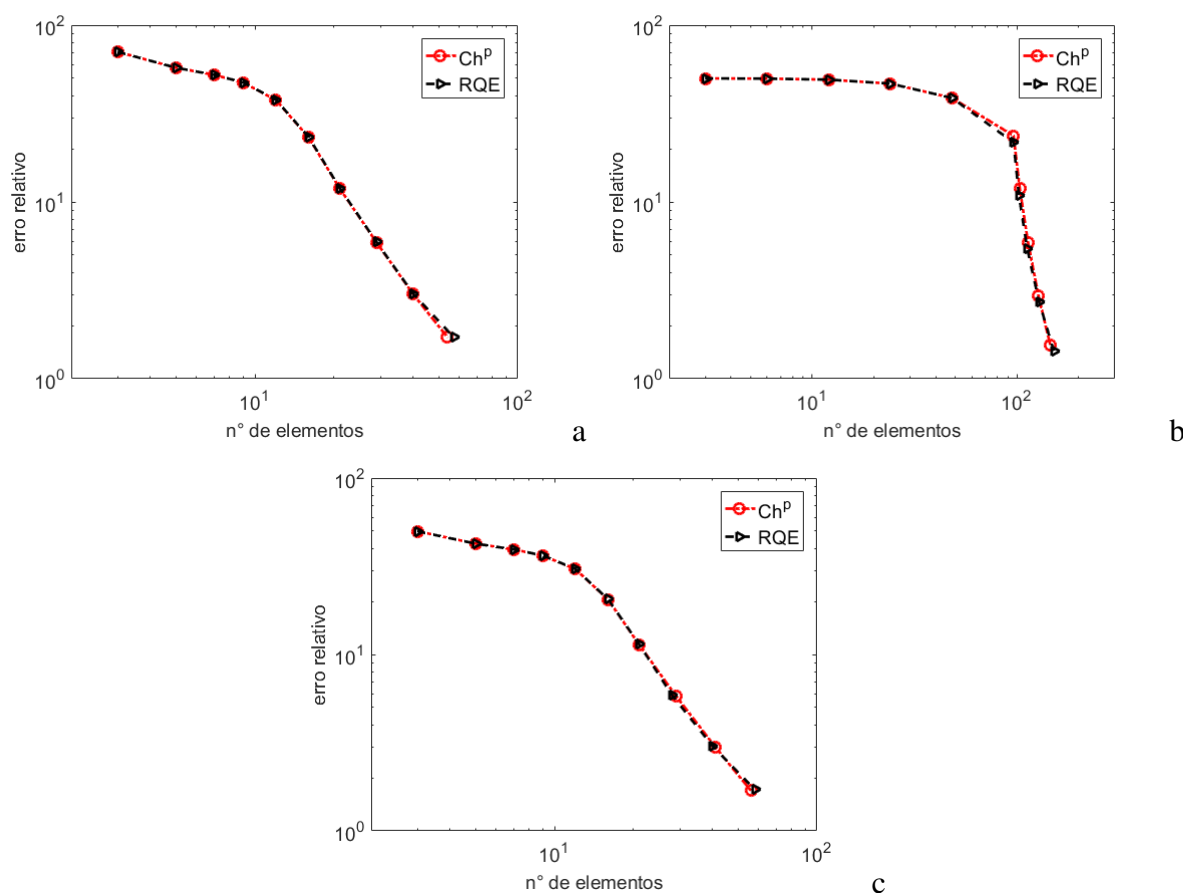


Figura 66 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação (a)MNS, (b)ZZ e (c)SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise das figuras permitem apontar algumas características em comum aos três casos. Nota-se que a taxas de convergência do erro para ambas as técnicas são praticamente iguais. Além disso, essas taxas são baixas nas primeiras etapas e tendem a aumentar conforme o refino se sucede. Por fim, só é possível notar alguma diferença significativa entre as técnicas nas últimas etapas de refino.

Tabela 12 – Comparação entre as metodologias de refino h-adaptativo Ch^p e RQE com estimativa de erro via recuperação MNS, ZZ e SPR, aplicando as restrições $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ e com erro relativo prescrito igual a 2% para o carregamento Novotny.

MNS							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
70,6524	3	0,1171	1,0000	70,6524	3	0,1171	1,0000
57,4530	5	0,1716	1,0000	57,4530	5	0,1716	1,0000
52,3123	7	0,2592	1,0000	52,3123	7	0,2592	1,0000
47,4153	9	0,4082	0,9896	47,4153	9	0,4082	0,9964
37,7530	12	0,6540	0,9856	37,8792	12	0,6513	0,9849
23,1694	16	0,9004	0,9981	23,2945	16	0,8989	0,9973
11,9384	21	0,9874	0,9937	12,0044	21	0,9872	0,9928
5,9066	29	1,0001	0,9965	5,9355	29	1,0001	0,9951
3,0047	40	1,0005	0,9973	3,0258	40	1,0005	0,9916
1,7144	54	1,0001	0,9946	1,7178	57	1,0003	0,9881
ZZ							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
49,9725	3	0,1352	1,0000	49,9725	3	0,1352	1,0000
49,8210	6	0,2212	1,0000	49,8210	6	0,2212	1,0000
49,1820	12	0,3487	1,0000	49,1820	12	0,3487	1,0000
46,7008	24	0,5503	1,0000	46,7008	24	0,5503	1,0000
38,7554	48	0,8284	0,9917	38,7554	48	0,8284	0,9038
23,6976	96	0,9982	0,9910	21,7079	96	1,0017	0,9993
11,8740	103	1,0043	0,9959	10,9084	102	1,0031	0,9959
5,9029	113	1,0006	0,9956	5,4297	112	1,0002	0,9884
2,9588	127	0,9996	0,9979	2,7140	128	0,9995	0,9905
1,5530	145	0,9993	0,9965	1,4334	151	1,000	0,9892
SPR							
Ch^p				RQE			
η^*	nº ele.	θ	escalamento	η^*	nº ele.	θ	escalamento
49,9656	3	0,1171	1,0000	49,9656	3	0,1171	1,0000
42,4861	5	0,1716	1,0000	42,4861	5	0,1716	1,0000
39,3616	7	0,2592	1,0000	39,3616	7	0,2592	1,0000
36,4294	9	0,4082	0,9896	36,4294	9	0,4082	0,9964
30,4973	12	0,6540	0,9858	30,5775	12	0,6513	0,9851
20,4713	16	0,9004	0,9981	20,5631	16	0,8990	0,9973
11,3816	21	0,9877	0,9936	11,4381	21	0,9875	0,9978
5,8295	29	1,0011	0,9916	5,8939	28	1,0015	0,9916
2,9839	41	1,0031	0,9962	3,0260	40	1,0034	0,9898
1,6911	56	1,0057	0,9948	1,7144	58	1,0036	0,9880

Fonte: Próprio autor (2018).

A análise dos dados da tabela mostram uma melhora de desempenho, em termos de número de elementos necessários para a convergência, se comparado com os simulações sem

restrição e com restrição $h_{new} \leq h_{old}$, tendo como exceção somente o caso RQE com estimativa via ZZ.

É possível notar que, nas três estimativas, o parâmetro de escalamento é igual a 1 para ambas as técnicas em malhas com baixa quantidade de elementos. Observa-se também que, nestas malhas, o número de elementos, erro relativo e índice de efetividade calculados para a técnica Ch^p são iguais aos calculados para a RQE. Isso indica que no início da adaptatividade, o refino foi baseado unicamente na restrição imposta. Por outro lado, nas últimas etapas de refino é possível observar a influência das técnicas, revelada devido à perda da igualdade entre os valores dos parâmetros calculados.

Outras simulações foram realizadas utilizando intervalos de variações de tamanho elementar. Foram testados: $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq 1,5h_{old}$, $0,3h_{old} \leq h_{new} \leq 1,7h_{old}$ e $0,1h_{old} \leq h_{new} \leq 1,9h_{old}$. Após os testes foi observado que o comportamento visualizado na Fig. (66) demonstrado pelas técnicas no caso $0,5h_{old} \leq h_{new} \leq h_{old}$ se reproduziu.

8 CONCLUSÃO

A análise dos valores de taxa de convergência obtidos para os casos de carregamento linear, quadrático e senoidal, quando usando refinamentos aninhados, mostraram que a formulação do MEF foi apropriadamente implementada na rotina computacional desenvolvida. No caso do carregamento com singularidade, o método escolhido para se validar a implementação da rotina não se mostrou satisfatório uma vez que não foi possível obter uma relação entre o grau das funções de forma utilizadas nas aproximações com as taxas de convergências de erro obtidas. Sabidamente, em problemas com singularidades, a taxa de convergência teórica do MEF é governada pela ordem da singularidade e não pelo grau das funções de aproximação utilizadas. Todavia, a avaliação da ordem da singularidade apresentada pela equação utilizada não é imediata, dada a sua complexidade.

No que tange às estimativas de erro via recuperação, de maneira geral, percebe-se que as melhores estimativas são obtidas quando elementos lineares são utilizados. Tanto a recuperação MNS quanto a ZZ produzem estimativas que tendem a melhorar com o aumento do número de elementos na malha, quando p é ímpar. Por outro lado, quando $p = 2$, as estimativas pioram ou mantêm-se ruins à medida que o tamanho dos elementos diminui. O método SPR foi o único que se mostrou capaz de estimar bem o erro independentemente do grau de elemento utilizado, notando-se ainda uma progressão da qualidade das estimativas com o aumento do número de elementos. Por fim, constatou-se que na presença de singularidades nenhum dos métodos é capaz de fornecer boas estimativas quando o número de elementos na malha é baixo, mesmo aumentando o grau p das funções de forma. Isso, de certa forma, confirma uma constatação da literatura no sentido de que o aumento do grau das funções não é apropriado na vizinhança de singularidades. Sabidamente, na presença de singularidades, a redução do tamanho dos elementos, mantendo-se baixo o grau das funções de aproximação, fornece melhores aproximações para o campo de tensões.

Quanto à h -adaptatividade, nota-se que o desempenho do refino, em termos de intensidade de refinamento, considerando-se para isso o número de elementos requeridos, depende fortemente do campo de tensões recuperado, tanto para a técnica Ch^p como na RQE. No caso das recuperações via MNS, foi possível notar uma característica comum em todos os casos de carregamento: o refino nos elementos dos extremos do domínio, em que a tensão recuperada nos nós $x = 0$, na extremidade esquerda, e $x = 1$, na extremidade direita, é igual à tensão aproximada, é muito mais intenso se comparado ao processo adaptativo nos mesmos elementos utilizando os outros dois métodos de recuperação das tensões. Devido a isso, é seguro dizer que o elevado número de novos elementos irá ocorrer nestas porções do domínio para qualquer que seja o carregamento avaliado. Contudo, notou-se que a imposição de uma restrição ao aumento da dimensão elementar tem efeito positivo no controle do refino quando esse fenômeno está presente.

De maneira geral, o processo adaptativo mostra-se mais eficiente quando se impõe a restrição ao crescimento do tamanho elementar e permite-se livremente a sua redução. A inexistência de restrições podem acabar gerando perdas de convergência do processo h-adaptativo devido a aumentos e reduções sucessivas do tamanho elementar. Constatou-se também que a restrição sobre o crescimento do tamanho elementar forneceu parâmetros de escalamento de malha mais próximos à unidade se comparado ao caso sem restrições. Em outras palavras, existe um maior empobrecimento do processo h-adaptativo se nenhuma restrição sobre o crescimento dos elementos é imposta. Por outro lado, restrições muito fortes sobre a diminuição do tamanho elementar acabam por inibir a influência das técnicas Ch^p ou RQE, não se mostrando favoráveis ao processo de refino otimizado.

Ainda, constatou-se que existe uma situação especial na qual a técnica RQE promove um refino menos intenso que a técnica Ch^p , assim como outra situação em que o inverso ocorre. Contudo, não é possível prever a ocorrência destas situações somente conhecendo a função carregamento que está sendo aplicada ao sistema e a malha inicial escolhida. Porém, tal conhecimento pode abrir caminho para tentativas de se combinar as duas técnicas de obtenção do tamanho elementar no processo h-adaptativo, com o intuito de se promover uma melhora de desempenho ainda maior se comparado à utilização de cada técnica separadamente. Uma possibilidade a ser testada em trabalhos futuros seria implementar uma sub-rotina que fizesse a escolha de qual técnica usar frente ao surgimento dessas situações especiais com base nas características dos campos de tensão recuperados e aproximados obtidos em cada elemento.

Outra sugestão para trabalhos futuros é a seleção de alguma metodologia de estimação de erro que tenha melhor desempenho perante singularidades no campo de tensões. Singularidades são, de longa data, uma dificuldade que motiva inúmeros desenvolvimentos no campo de métodos de aproximação espacial em problemas de valores no contorno variacionais.

BIBLIOGRAFIA

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. **Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering**, v. 142, p. 1-88, 1997.

BABUSKA, I.; STROUBOULIS, T. The finite element method and its reliability. Oxford, 2001.

BABUSKA, I.; MILLER, A. D. A feedback finite element method with a posteriori error estimation Part 1. **Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering**, v. 61, p. 565-589, 1987.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 18, p. 736-754, 1978a.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. A posteriori error estimates for the finite element method. **International Journal for Numerical Methods In Engineering**, v. 12, p. 1597-1615, 1978b.

BOROOMAND, B.; ZIENKIEWICZ, O. C. Recovery by equilibrium patches. **International Journal for Numerical Methods In Engineering**, v. 40, p. 137-154, 1997.

BUGEDA, G. A new adaptive remeshing scheme based on the sensitivity analysis of the SPR point wise error estimation. **Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 462-478, 2006.

CASTELLAZI, G.; de MIRANDA, S.; UBERTINI, F. Adaptivity based on the recovery by compatibility in patches. **Finite Elements In Analysis and Design**, v. 46, p.379-390, 2010.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. USA: 1. ed. John Wiley and Sons, 2002.

DÍEZ, P.; RÓDENAS, J. J.; ZIENKIEWICZ, O. C. Equilibrated patch recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error. **International Journal for Numerical Methods In Engineering**, v. 69, p. 2075-2098, 2007.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. West Sussex: John Wiley Sons, Ltd, 2007.

GRÄTSCH, T.; BATHE, J. K. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 83, p. 235-265, 2005.

LI, L.-Y.; BETTES, P. Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations. **Communications In Applied Numerical Mehtods**, v. 11, p. 911-915, 1995.

LI, L.-Y.; BETTES, P.; APPLGARTH, I. Theoretical formulations for adaptive finite element computations. **Communications In Applied Numerical Mehtods**, v. 11, p. 911-915, 1995.

NOVOTNY, A.; PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. A fast hp adaptive finite element mesh design. **Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 133-148, 2000.

ODEN, J. T.; REDDY, J. N. **An introduction to the mathematical theory of finite elements**. New York: Wiley, 1976

ONÃTE, E.; BUGEDA, G. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. **Engineering Computations**, v. 10, p.307-321, 1993.

PEREIRA, J. T.; SILVA, J.; GONÇALVES, J. C. L.. Método dos elementos finitos h-adaptativo: uma nova técnica para projeção isotrópica do tamanho elementar. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, Brasília, p.1-20, 6 nov. 2016.

REDDY, J. N. **An introduction to the Finite Element Method**. New York: 3. ed. Mc Graw Hill, 2006.

RÓDENAS, J. J.; TUR, M.; FUENMAYOR, F. J.; VERCHER, A. Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations : The SPR-C technique. **International Journal for Numerical Methods In Engineering**, v. 70, p. 705-727, 2007.

SILVA, J.; SILVA, F. E. C.; PEREIRA, J. T.; GONÇALVES, J. C. L. Análise de diferentes estimadores de erro a posteriori aplicados a problemas bidimensionais utilizando refino h-adaptativo. **Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria**. Caldas Novas, 2014.

SZABO, B.; BABUSKA, I. **Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation**. Wiley series on computational mechanics, 2011.

UBERTINI, F. Patch recovery based on complementary energy. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, p. 1501-1538, 2004.

WIBERG, N. - E.; ABDULWAHAB, F. An efficient postprocessing technique for stress problems based on superconvergent derivatives and equilibrium. **Numerical Methods In Engineering**, p 25-32, 1992.

WIBERG, N. - E.; ABDULWAHAB, F.; ZIUSKAS, S. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. **International Journal for Numerical Methods In Engineering**, v. 37, p. 3417-3440, 1994.

ZHU, J. Z.; ZIENKIEWICZ, O. C. Adaptive techniques in the finite element method. **Communications In Applied Numerical Methods**, v. 4, p. 197-204, 1988.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method** - Volume 1: The Basis. Oxford: 5. ed. Butterworth Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimator in the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 337-357, 1987.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. **International Journal for Numerical Methods In Engineering**, v. 32, p. 1331-1364, 1992a.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods In Engineering**, v. 33, p. 1365-1382, 1992b.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z.; WU, J. Superconvergent patch recovery technique - some further tests. **Communications In Numerical Methods In Engineering**, v. 9, p. 251-258, 1993.