

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**CARLOS HENRIQUE SCHELBAUER**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS IMPLÍCITO  
PARA OBTENÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NA  
SEÇÃO TRANSVERSAL DO TUBO RECEPTOR DE UM COLETOR  
SOLAR CILÍNDRICO PARABÓLICO**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**GUARAPUAVA**

**2019**

**CARLOS HENRIQUE SCHELBAUER**

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS IMPLÍCITO  
PARA OBTENÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NA  
SEÇÃO TRANSVERSAL DO TUBO RECEPTOR DE UM COLETOR  
SOLAR CILÍNDRICO PARABÓLICO**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, do Curso de Engenharia Mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Dalmás

**GUARAPUAVA**

**2019**



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Campus Guarapuava

Diretoria de Graduação e Educação Profissional  
Coordenação de Engenharia Mecânica  
Engenharia Mecânica



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS IMPLÍCITO PARA  
OBTENÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NA SEÇÃO TRANSVERSAL  
DO TUBO RECEPTOR DE UM COLETOR SOLAR CILÍNDRICO PARABÓLICO

por

CARLOS HENRIQUE SCHELBAUER

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado em 25 de junho de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

---

Dr. Sérgio Dalmás  
Prof. Orientador

---

Dra. Denise Alves Ramalho  
Membro titular

---

Dr. Christian Naaktgeboren  
Membro titular

---

Dr. Aldo Przybysz  
Coordenador do curso

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso -

*“Convicção é a crença de estar, em algum ponto do conhecimento, de posse da verdade absoluta. Esta crença pressupõe, então, que existam verdades absolutas; e, igualmente, que tenham sido achados os métodos perfeitos para alcançá-las; por fim, que todo aquele que tem convicções se utilize desses métodos perfeitos. Todas as três asserções demonstram de imediato que o homem das convicções não é o do pensamento científico; ele se encontra na idade da inocência teórica e é uma criança, por mais adulto que seja em outros aspectos”.*

(Friedrich Nietzsche)

## RESUMO

SCHELBAUER, Carlos H. **Aplicação do método das diferenças finitas implícito para obtenção da distribuição de temperaturas na seção transversal do tubo receptor de um coletor solar cilíndrico parabólico**. 2019. 56f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2019.

Este trabalho consiste da aplicação do método das diferenças finitas (MDF) implícito, transiente e bidimensional para a equação do calor em coordenadas cilíndricas no tubo receptor de um coletor solar cilíndrico parabólico (CSCP). O objetivo principal é a determinação do perfil de temperaturas na seção transversal do tubo depois de atingido o regime permanente. As condições de contorno e as propriedades dos materiais são consideradas constantes. A condição de contorno de fluxo de radiação solar ao redor do tubo receptor é determinada pela aplicação de um método numérico bidimensional, baseado no Monte Carlo Ray Tracing Method (MCRT), que considera a geometria do CSCP e o diâmetro do receptor. Ambos os métodos foram aplicados com a criação de algoritmos implementados em linguagem de programação Python. Também é realizado o estudo do refinamento da malha e do passo de tempo. A validação da aplicação do MDF é realizada através de comparações com métodos analíticos simplificados de transferência de calor encontrados na literatura. O fluxo de radiação obtido é validado por comparações com outras referências. É obtida a distribuição de temperaturas no interior da seção transversal do tubo para três diferentes tipos de materiais, sujeitos às mesmas condições de contorno e condição inicial, além do comportamento da distribuição de temperaturas na fronteira interior e exterior do tubo. Observa-se que a condutividade térmica do material influencia fortemente o comportamento do perfil de temperaturas do tubo no regime permanente.

**Palavras-chave:** Transferência de calor. Método das diferenças finitas implícito. Distribuição de temperaturas. Coletor solar cilíndrico parabólico. Monte Carlo Ray-Tracing Method.

## ABSTRACT

SCHELBAUER, Carlos H. **Implicit finite difference method application to determine the temperature distribution in the cross section of the receiver tube of a parabolic trough solar collector**. 2019. 56p. Trabalho de Conclusão de Curso – Mechanical Engineering, Federal University of Technology - Paraná. Guarapuava, 2019.

This paper consists of the application of the implicit, transient and two-dimensional finite difference method (FDM) for the heat equation in cylindrical coordinates in the receiver tube of a parabolic trough collector (PTC). The main objective is to find the steady state temperature distribution in the cross sectional area of the receiver. The boundary conditions and properties of materials are considered constant. The solar heat flux boundary condition around the receiver is determined by a two-dimensional numerical method based on the Monte Carlo Ray Tracing Method (MCRT) that takes into consideration the geometry of the PTC and the diameter of the receiver. Both methods are applied writing algorithms implemented in Python programming language. Mesh refinement and the time step size are studied. The validation of the FDM algorithm is carried out with comparisons to simplified analytical methods of heat transfer. The heat flux obtained is validated by comparisons with other references. The temperature distribution is obtained for three different types of materials, subject to the same boundary and initial conditions. The temperature distributions on the inner and outer surfaces of the receiver are also shown. It is observed that the thermal conductivity of the material strongly influences the behavior of the temperature distribution of the tube in the steady state.

**Keywords:** Heat transfer. Implicit finite difference method. Temperature distribution. Parabolic trough collector. Monte Carlo Ray Tracing Method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Parábola e suas características .....	16
Figura 2 – Concentrador Cilíndrico Parabólico. ....	17
Figura 3 – Seção transversal do tubo receptor isolado a vácuo com fluxos de calor e resistências térmicas.....	18
Figura 4 – Seção transversal de um CSCP .....	19
Figura 5 – Absorção, reflexão e transmissão da radiação incidente em um material ....	20
Figura 6 – Volume de controle diferencial em coordenadas cilíndricas .....	24
Figura 7 – Rede nodal.....	25
Figura 8 – Volume de controle para geometria cilíndrica.....	26
Figura 9 – Posição de um raio arbitrário (em amarelo).....	28
Figura 10 – Intervalos que compõem a superfície externa do receptor .....	30
Figura 11 – Comparação entre o fluxo de radiação presente e o encontrado por Jeter (1986) .....	32
Figura 12 – Fluxo de radiação para propriedades da .....	34
Figura 13 – Distribuição da temperatura da água no contato com o receptor.....	34
Figura 14 – Volume de controle geometria cilíndrica e energias entrando .....	36
Figura 15 – Volume de controle nas fronteiras interna e externa. (a) Fronteira interna. (b) Fronteira externa. ....	37
Figura 16 – Comparação de temperaturas para o 1° caso .....	42
Figura 17 – Comparação de temperaturas para o 2° caso sem geração interna .....	43
Figura 18 – Comparação de temperaturas para o 2° caso com geração interna. ....	43
Figura 19 – Comparação de temperaturas para o 3° caso .....	44
Figura 20 – Comportamento das temperaturas interna e externa em função de $n$ .....	45
Figura 21 – Comportamento das temperaturas interna e externa em função de $m$ .....	46
Figura 22 – Comportamento da diferença entre temperatura máxima e mínima no tempo em função de $\Delta t$ .....	47
Figura 23 – Parte da malha utilizada, mostrando as coordenadas de referência e as condições de contorno .....	48
Figura 24 – Distribuição de temperaturas para receptor de alumínio .....	49
Figura 25 – Distribuição de temperaturas para receptor de cobre .....	49
Figura 26 – Distribuição de temperaturas para receptor de aço inox.....	50
Figura 27 – Comportamento da $T_{med}$ em função do tempo para diferentes materiais..	51
Figura 28 – Distribuição de temperaturas na superfície externa no receptor .....	51

Figura 29 – Distribuição de temperaturas na superfície interna do receptor .....	52
Figura 30 – Taxa de transferência de calor para a água nos diferentes materiais e taxa de transferência de calor devido ao fluxo solar na superfície externa .....	53

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades do coletor e condições envolvidas .....	33
Tabela 2 – Propriedades do receptor para os testes .....	40
Tabela 3 – Propriedades dos materiais dos receptores.....	45

## LISTA DE SÍMBOLOS

$f$	comprimento focal, $m$
$\varphi$	ângulo entre $\overline{F\bar{A}}$ e a reta de simetria da parábola
$\Phi_r$	ângulo de abertura do concentrador
$\theta_{sol}$	abertura angular do cone óptico solar
$D$	diâmetro do receptor, $m$
$L$	comprimento do concentrador, $m$
$W$	largura do concentrador, $m$
$GC$	concentração geométrica
$r$	raio de abertura, $m$
$N$	número de raios gerados/ iterações
$r_{max}$	máximo raio de abertura, $m$
$G$	irradiação, $W/m^2$
$\alpha$	absortividade
$\rho_r$	refletividade
$\tau$	transmissividade
$\varepsilon$	emissividade
$G_s$	irradiância solar total, $W/m^2$
$r, \theta, z$	coordenadas cilíndricas
$\theta$	Variação angular do receptor, com o centro do tubo como referência, $deg$
$T$	temperatura, $^{\circ}C$
$t$	tempo, $s$
$k$	condutividade térmica, $W/(m \cdot K)$
$\dot{q}$	taxa de geração por unidade de volume, $W/m^3$
$\rho$	densidade, $kg/m^3$
$c_p$	calor específico a pressão constante, $J/(kg \cdot K)$
$m$	coordenada de referência na direção radial / número que divisões radiais
$n$	coordenada de referência na direção angular / número de divisões angulares
$\theta_r$	ângulo de inclinação do raio solar
$\beta$	ângulo do receptor onde o raio solar incide
$a_i$	intervalos na superfície do receptor
$LCR$	razão de concentração local
$q_{sol}$	radiação solar direta normal, $W/m^2$
$q_i$	radiação média em um $a_i$ , $W/m^2$
$p_i$	pontos que interceptam o receptor em um $a_i$

$S_i$	área de um $a_i$ , $m^2$
$r_0$	raio interno do receptor, $m$
$r_1$	raio externo do receptor, $m$
$h_w$	coeficiente convectivo interno, $W/(m^2 \cdot K)$
$h_\infty$	coeficiente convectivo externo, $W/(m^2 \cdot K)$
$T_w$	temperatura no contato água e receptor, $^\circ C$
$T_\infty$	temperatura ambiente, $^\circ C$
$T_0$	temperatura inicial do receptor, $^\circ C$
$q''$	fluxo de calor, $W/m^2$
$p$	inteiro que representa o numero de passos de tempo
$m_{m,n}$	massa de uma região nodal de coordenadas (m,n), $kg$
$V_{m,n}$	volume de uma região nodal de coordenadas (m,n), $m^3$
$T_{med}$	temperatura media, $^\circ C$
$\epsilon$	critério de parada

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	OBJETIVOS	14
1.2	OBJETIVOS ESPECIFICOS	14
1.3	JUSTIFICATIVA	15
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>16</b>
2.1	CONCENTRADOR SOLAR CILÍNDRICO PARABÓLICO	16
2.1.1	Receptor	17
2.1.2	Geometria	18
2.2	PROPRIEDADES RADIOATIVAS	20
2.2.1	Absortividade, Refletividade e Transmissividade	20
2.2.2	Emissividade	22
2.3	RADIAÇÃO SOLAR	22
2.4	EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO	23
2.5	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: REDE NODAL	25
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>FLUXO DE RADIAÇÃO INCIDENTE NA SUPERFÍCIE DO RECEPTOR</b>	<b>28</b>
4.1	VALIDAÇÃO	31
4.2	ESCOLHA DAS CARACTERÍSTICAS DO COLETOR PARA A SIMULAÇÃO	32
<b>5</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR: MÉTODO IMPLÍCITO</b>	<b>35</b>
5.1	TEMPERATURA MÉDIA	40
5.2	VALIDAÇÃO	40
5.3	DETERMINAÇÃO DOS VALORES DE $\Delta r$ e $\Delta \theta$	44
5.4	DETERMINAÇÃO DO $\Delta t$	46
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>54</b>
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A geração de energia com base em fontes renováveis vem apresentando considerável crescimento nos últimos anos, isso devido a alguns fatores como o aumento da demanda de energia em países emergentes, diminuição dos custos de geração, popularização dos sistemas renováveis e consciência sobre os impactos ambientais da utilização de combustíveis fósseis. Atualmente no mundo, cerca de 80% de toda a energia utilizada é provinda de combustíveis fósseis, sendo que, apenas 26,5% de toda a energia elétrica produzida provêm de fontes renováveis (REN21, 2018). O principal problema da utilização de combustíveis fósseis são as emissões de dióxido de carbono ( $CO_2$ ), que absorve radiação infravermelha emitida pela superfície da terra, ocasionando o chamado efeito estufa (ÇENGEL, 2012).

A energia solar é uma das mais importantes fontes de energia renovável devido a sua abundância e aos minimizados impactos ambientais causados pela sua coleta. Essa energia pode ser transformada em energia térmica (sistemas para aquecimento de fluidos) e elétrica (placas fotovoltaicas), sendo que em muitos casos a irradiação solar é primeiramente convertida em energia térmica, que depois é convertida em trabalho (energia elétrica) utilizando de sistemas convencionais de geração de eletricidade.

O concentrador solar cilíndrico parabólico (CSCP) é uma das tecnologias que atualmente está mais desenvolvida, sendo que esse dispositivo consegue atingir eficiências que podem passar de 70%(TZIVANIDIS et al., 2015). Esses concentradores possuem refletores no formato cilíndrico parabólico e um absorvedor cilíndrico (tubo receptor) que é posicionado na linha focal da superfície, tendo a função de absorver a energia dos raios solares concentrados e transferi-la para um fluido de trabalho, que escoar no interior do tubo. O tubo receptor é um elemento de suma importância para o projeto de construção dos CSPC, portanto são necessários estudos detalhados, para se encontrar o tipo de receptor que será mais vantajoso para cada aplicação desses sistemas.

## 1.1 OBJETIVOS

O fluxo de radiação solar concentrada que o tubo receptor recebe é não uniforme e depende principalmente da geometria de construção do coletor. Dada essa característica, este trabalho tem como objetivo determinar a distribuição de temperaturas na seção transversal de um tubo receptor. Para isso, será aplicado o método das diferenças finitas (MDF) implícito, em coordenadas cilíndricas, bidimensional e transiente, para condições de contorno constantes e próximas das condições em tubos receptores reais. São desenvolvidos dois algoritmos, um para determinação do perfil do fluxo de radiação na superfície externa do tubo receptor e outro para a aplicação do MDF.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- 1 – Elaborar o algoritmo para obter o fluxo de radiação solar na superfície do tubo receptor;
- 2 – Validar os resultados através de comparações com outras referências;
- 3 – Elaborar o algoritmo de aplicação do MDF implícito transiente, bidimensional em coordenadas cilíndricas;
- 4 – Validar o algoritmo de aplicação do MDF com base em conceitos gerais de transferência de calor;
- 5 – Determinar o refinamento necessário da malha;
- 6 – Aplicar o MDF para tubos receptores, compostos por três diferentes materiais, sujeitos a condições de funcionamento semelhantes.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

Em diversas aplicações de engenharia condições complexas estão presentes, sendo normalmente necessária a utilização de um programa específico para resolver ou analisar o problema. As soluções analíticas para as equações diferenciais que governam muitos desses problemas, não são de fácil obtenção e muitas vezes nem são conhecidas. Para contornar este problema, métodos numéricos são amplamente utilizados, sendo aplicados de maneira direta, com o desenvolvimento de algoritmos de solução, ou indireta, com a utilização de programas vendidos comercialmente.

Dado o problema da determinação da distribuição de temperaturas no tubo receptor de um CSCP, o MDF aplicado à equação do calor se mostra muito viável em sua solução. A distribuição de temperaturas pode ser utilizada para averiguar propriedades estruturais do material, determinando tensões, expansões e deflexões térmicas, como dito por Bergman et al. (2014). Visto que transferência de calor é uma das áreas de grande importância da engenharia mecânica, este trabalho consiste da aplicação de um método numérico muito bem consolidado para este complexo problema de engenharia. Além disso, a solução do problema envolve a compreensão da forma de como os cálculos são realizados pelo computador, além do entendimento da natureza física do problema e a correta interpretação dos resultados.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 CONCENTRADOR SOLAR CILÍNDRICO PARABÓLICO

Considerando uma reta diretriz  $r$  e um ponto  $F$  (foco), a parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que tem mesma distância entre  $F$  e  $r$ . Enquanto que o foco e a reta diretriz são utilizados na definição da parábola, existem outros três elementos que a identificam: parâmetro, vértice e eixo de simetria. O parâmetro é a distância entre o foco e a diretriz. O vértice é o ponto na parábola mais próximo da diretriz. O eixo de simetria é a reta perpendicular à diretriz e que passa pelo vértice, como na Figura 1 (SILVA, 2019). Uma das características do formato de parábola é que todos os raios paralelos ao eixo de simetria e que refletem na parábola são direcionados para o foco  $F$ .

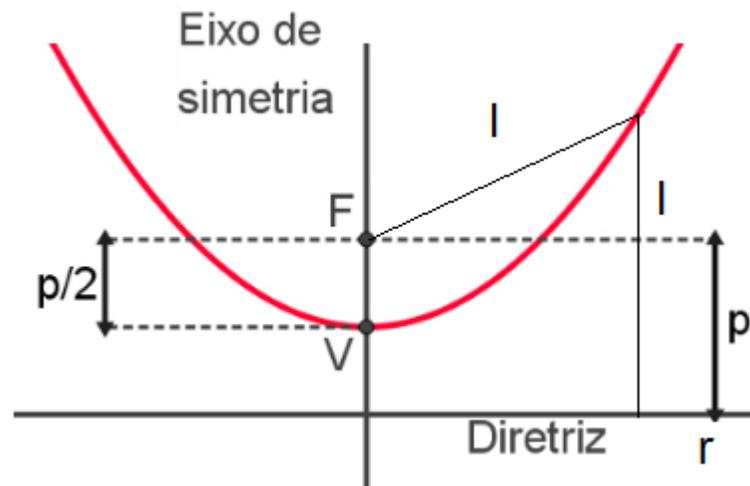


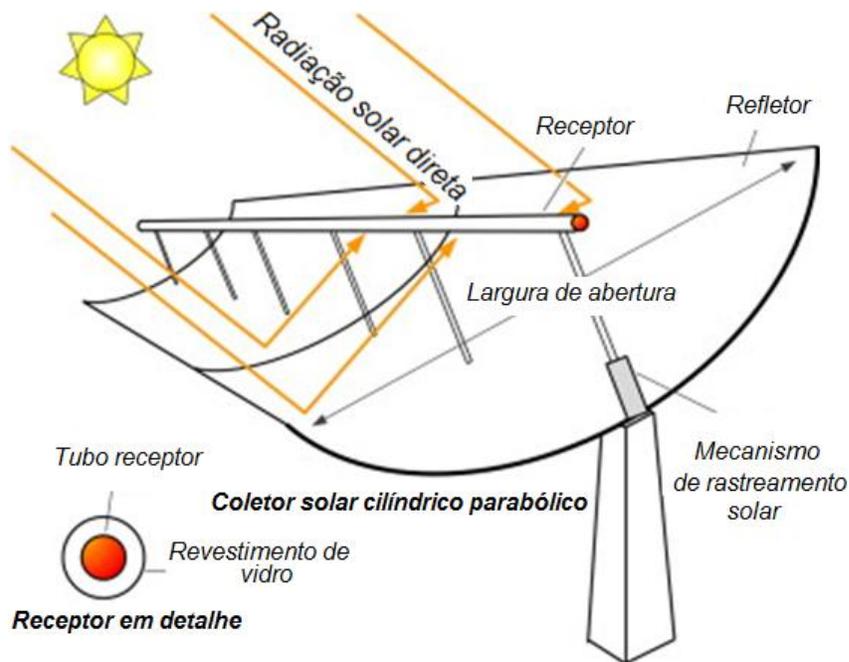
Figura 1 – Parábola e suas características

Fonte: Adaptado de Silva (2019).

O CSCP (Figura 2) utiliza do formato de uma parábola para concentrar os raios solares em um tubo posicionado na linha focal e que funciona como um trocador de calor, absorvendo a radiação solar concentrada para aquecer um determinado fluido. A

construção básica dos sistemas convencionais CSCP consiste em um refletor linear cilíndrico-parabólico e um tubo receptor posicionado ao longo da linha focal.

A tecnologia desses concentradores é atualmente a mais estudada e a que demonstra maior desenvolvimento tecnológico. Pesquisas para o aumento da eficiência e diminuição dos custos para implementação dessa tecnologia vem se mostrando cada vez de maior interesse para a comunidade científica.



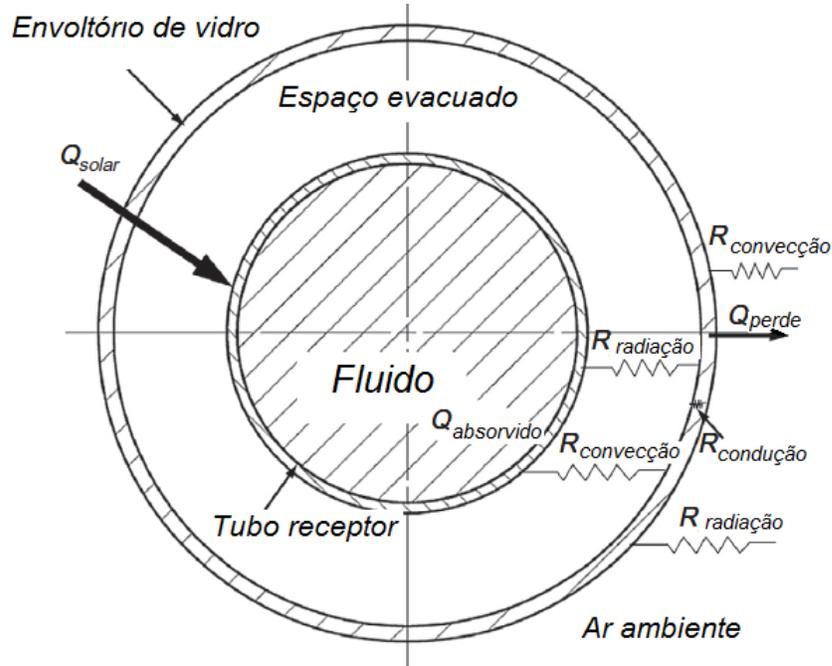
**Figura 2 – Concentrador Cilíndrico Parabólico.**

**Fonte: Adaptado de Cabrera (2015).**

### 2.1.1 Receptor

O receptor, Figura 3, é uma superfície destinada a coletar energia solar, portanto deve ter altos valores de absorvidade, e baixos valores de emissividade. É comum se utilizar de uma cobertura de vidro ao redor do receptor, aprisionando ar entre os dois tubos, assim reduzindo a troca de calor com o ambiente. Também é comum a utilização de isolamento a vácuo, assim as perdas de energia pelo receptor são apenas por radiação. Um dos pontos negativos da utilização desse sistema de cilindros concêntricos é que o cilindro exterior de vidro pode prejudicar a incidência de radiação

no coletor, por este motivo é necessário escolher um material com alta transmissividade, além de manter a superfície sempre limpa (MALAGUETA, 2012).



**Figura 3 – Seção transversal do tubo receptor isolado a vácuo com fluxos de calor e resistências térmicas**

Fonte: Adaptado de Wu (2014).

### 2.1.2 Geometria

A distribuição do fluxo de calor na superfície do receptor é não uniforme e depende das dimensões do concentrador, da angulação dos raios solares e também do diâmetro e posicionamento do receptor. A Figura 4 mostra a esquematização dos parâmetros utilizados na determinação do fluxo de radiação incidente no receptor, considerando um modelo bidimensional. A distância entre  $F$  e o vértice  $V$  é representado por  $f$ . O ângulo  $\varphi$  é formado entre o eixo de simetria e o segmento que liga  $F$  ao ponto  $A$ , sendo  $A$  o ponto de incidência dos raios solares em determinado  $x$ . O ângulo de abertura é  $\varphi_r$ , sendo que o ponto  $B$  é o final do concentrador, dado uma largura  $W$ . O valor de  $\theta_{sol}$  representa a abertura angular dos raios solares, calculado com base no diâmetro do Sol e da distância média entre o Sol e a Terra. O diâmetro do

receptor é  $D$  e o comprimento do concentrador é  $L$ .

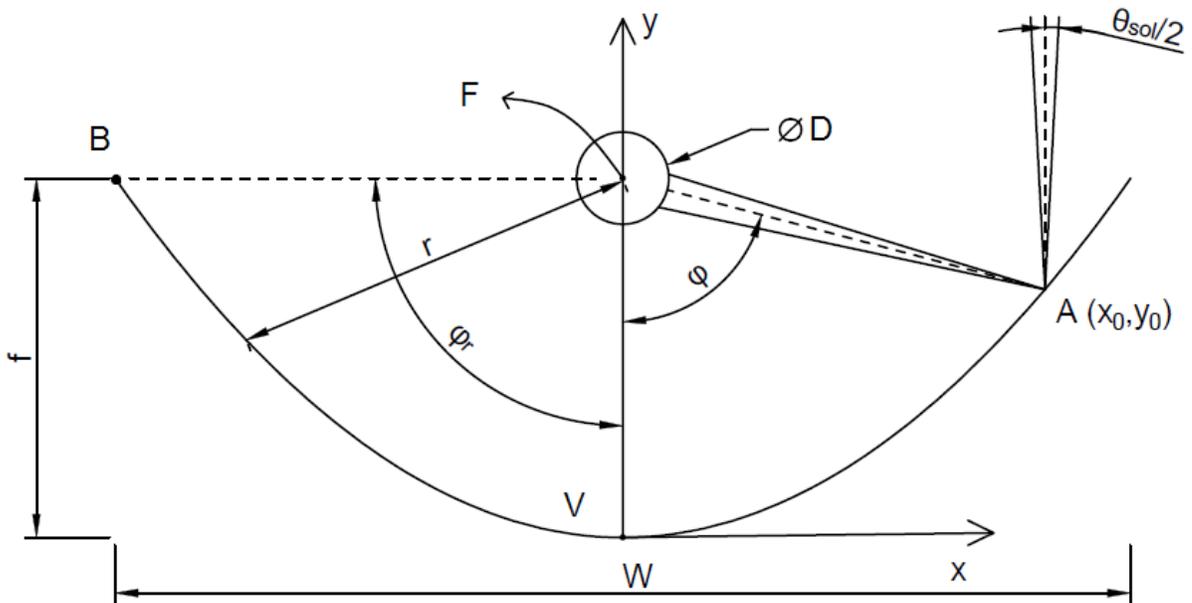


Figura 4 – Seção transversal de um CSP

Fonte: Adaptado de Carvalho (2018).

A concentração geométrica é definida como a razão entre a área superficial do receptor e a área de abertura do concentrador  $WL$  (CARVALHO, 2018).

$$GC = \frac{W}{\pi D} \quad (1)$$

À distância  $r$  é o raio de abertura, sendo que seu maior valor,  $r_{max}$ , corresponde ao seu valor no ângulo de abertura e é calculado da seguinte forma:

$$r_{max} = \frac{W}{2 \sin \varphi_r} \quad (2)$$

O comprimento focal é então:

$$f = \frac{r_{max}(1 + \cos(\varphi_r))}{2} \quad (3)$$

Devido à  $\theta_{sol}$  o receptor precisa de um diâmetro mínimo para que todos os raios refletidos pelo coletor atinjam a superfície do receptor.

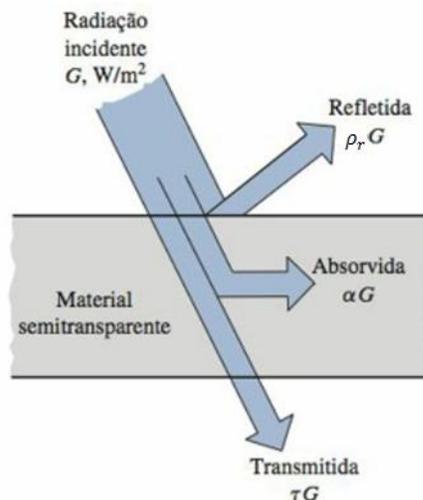
$$D_{min} = 2r_{max} \text{sen}(\theta_{sol}) \quad (4)$$

## 2.2 PROPRIEDADES RADIOATIVAS

Aqui serão mostradas as propriedades radioativas que devem ser levadas em consideração no estudo do receptor.

### 2.2.1 Absortividade, Refletividade e Transmissividade

Todos os corpos emitem radiação constantemente e a emissividade representa as características de emissão desses corpos. O fluxo de radiação incidente sobre uma superfície é chamado de irradiação, denotado por  $G$ .



**Figura 5 – Absorção, reflexão e transmissão da radiação incidente em um material semitransparente**

**Fonte: Çengel (2012).**

Ao atingir uma superfície, parte de radiação incidente é refletida, outra parte é absorvida e o restante é transmitido, conforme descrito na Figura 5. Define-se como absorvidade  $\alpha$  a fração de irradiação absorvida pela superfície, por refletividade  $\rho_r$  a fração refletida pela superfície e por transmissividade  $\tau$  a fração transmitida.

$$\alpha = \frac{(\text{Radiação absorvida})}{(\text{Radiação incidente})} = \frac{G_{ab}}{G} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5)$$

$$\rho_r = \frac{(\text{Radiação refletida})}{(\text{Radiação incidente})} = \frac{G_{ref}}{G} \quad 0 \leq \rho_r \leq 1 \quad (6)$$

$$\tau = \frac{(\text{Radiação transmitida})}{(\text{Radiação incidente})} = \frac{G_{tr}}{G} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (7)$$

Pela primeira lei da termodinâmica temos que a soma das radiações absorvida, refletida e transmitida,  $G_{ab}$ ,  $G_{ref}$  e  $G_{tr}$ , deve ser igual à radiação incidente, então:

$$G_{ab} + G_{ref} + G_{tr} = G \quad (8)$$

Dividindo a equação por  $G$ , chegamos:

$$\alpha + \rho_r + \tau = 1 \quad (9)$$

Essas relações são para propriedades hemisféricas totais, pois  $G$  é o fluxo de radiação incidente sobre a superfície considerando todas as direções do espaço hemisférico e todos os comprimentos de ondas. Então, os valores de  $\alpha$ ,  $\rho_r$  e  $\tau$  são propriedades médias, considerando todos os comprimentos de onda (ÇENGEL, 2012).

### 2.2.2 Emissividade

A emissividade  $\varepsilon$  de uma superfície é a representação da razão entre a radiação emitida pela superfície a uma determinada temperatura e a radiação emitida por um corpo negro na mesma temperatura. Esse valor varia entre 0 e 1,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . A emissividade pode ser entendida como a medida de quanto à superfície de um corpo se aproxima da de um corpo negro, na qual  $\varepsilon = 1$  (ÇENGEL, 2012).

## 2.3 RADIAÇÃO SOLAR

A radiação eletromagnética emitida pelo sol é conhecida como radiação solar, e quase toda ela se encontra entre os comprimentos de onda de  $0,3$  a  $3\mu m$ , sendo que, quase metade da radiação solar está na faixa visível, o restante é ultravioleta e infravermelho (ÇENGEL, 2012).

O Sol pode ser considerado como um corpo esférico de diâmetro de  $1,39 \cdot 10^9 m$  com uma massa de  $2 \cdot 10^{30} kg$ , sua distância média da Terra é de aproximadamente de  $1,50 \cdot 10^{11} m$ . O Sol em sua totalidade emite uma quantidade de radiação de  $3,8 \cdot 10^{26} W$  e de toda essa energia, apenas  $1,7 \cdot 10^{17} W$  atingem a Terra. Toda a radiação liberada pelo Sol é devida à reação de fusão na qual dois átomos de hidrogênio se fundem para formar um átomo de hélio. Devido a esse processo as temperaturas no núcleo solar podem chegar a  $40.000.000K$  e aproximadamente  $5.800K$  na superfície (ÇENGEL, 2012).

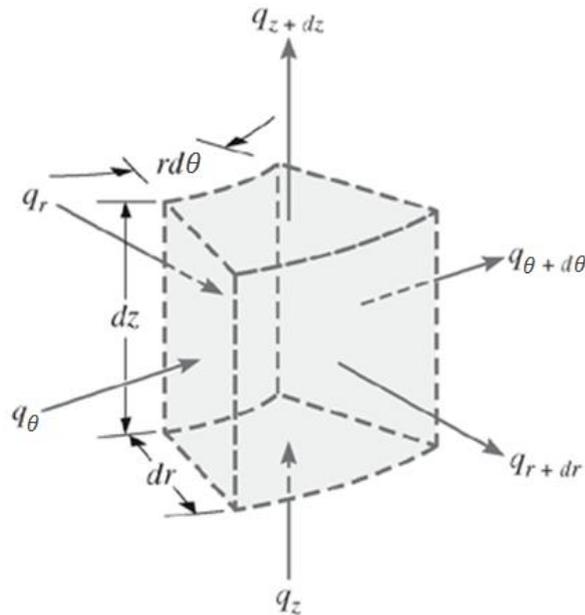
A energia que atinge a terra é denominada irradiância solar total e seu símbolo é  $G_s$ , cujo valor é  $1373 W/m^2$  e representa a taxa em que a energia solar incide sobre uma superfície normal aos raios do Sol, na extremidade externa da atmosfera quando a terra está na distância média do Sol. Esta perde força ao passar pela atmosfera devido à absorção pelos gases  $O_2$ ,  $O_3$  (ozônio),  $H_2O$  e  $CO_2$ . A camada de Ozônio presente nas regiões superiores da atmosfera é responsável pela absorção de boa parte da radiação ultravioleta, protegendo sistemas biológicos terrestres. Esses gases presentes na atmosfera também absorvem radiação em outros comprimentos de onda. Depois de

passar pela atmosfera a energia solar que atinge a superfície da terra tem o valor de aproximadamente  $950 \text{ W/m}^2$ , considerando um dia claro em regiões com pouca poluição atmosférica (ÇENGEL, 2012).

## 2.4 EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO

Na análise da condução do calor um dos principais objetivos é determinar a distribuição de temperaturas em determinado objeto sujeito a condições impostas em suas fronteiras. Uma vez que a distribuição de temperatura é conhecida, é possível determinar o fluxo de calor por condução em qualquer ponto do meio ou da superfície do objeto. Além disso, o conhecimento da distribuição de temperaturas também pode ser usado para averiguar a integridade estrutural, por meio da determinação de tensões expansões e deflexões térmicas (BERGMAN et al., 2014).

A equação da condução é uma expressão matemática que representa a conservação da energia em uma substância sólida (KREITH, 2014). Essa equação pode ser obtida a partir do balanço de energia em um volume de controle infinitesimal do material no qual o calor é transferido unicamente por condução, visto que transferência de calor por radiação só ocorre em um sólido transparente ou translúcido (BERGMAN et al., 2014; KREITH, 2014). O balanço de energia possibilita incluir geração interna de calor no material, que mais comumente ocorre pela passagem de uma corrente elétrica. Além disso, a equação também leva em consideração o armazenamento de energia interna no volume de controle que é proporcional ao aumento da temperatura (KREITH, 2014).



**Figura 6 – Volume de controle diferencial em coordenadas cilíndricas**

**Fonte: adaptado de Bergman (2014).**

Aplicando o balanço de energia no volume de controle diferencial da Figura 6 e utilizando a lei de Fourier obtém-se a forma geral da equação do calor em coordenadas cilíndricas (BERGMAN et al., 2014):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10)$$

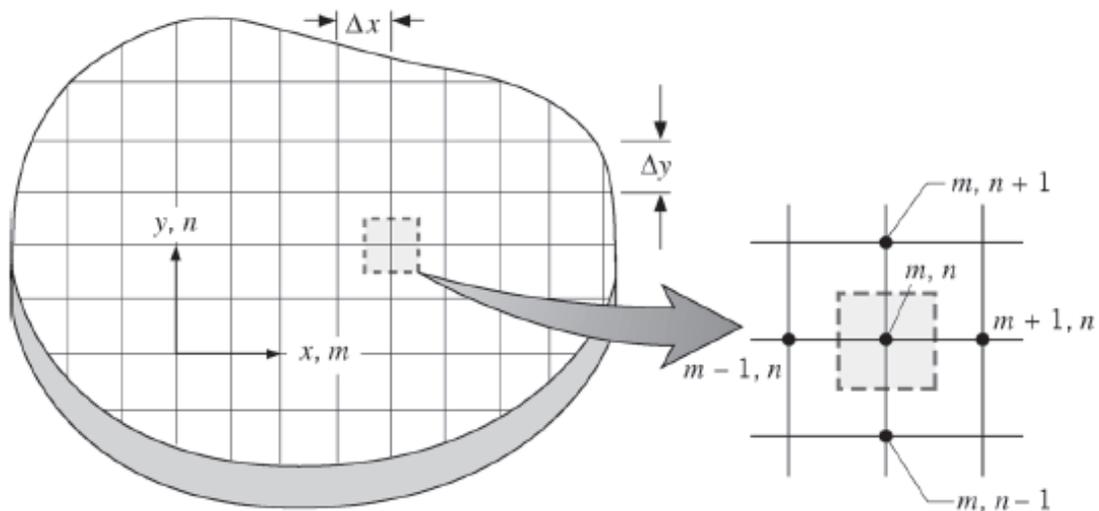
Um problema de transferência de calor é classificado como bidimensional e transiente quando a temperatura é uma função do tempo e de duas coordenadas de espaço. Para esse caso, onde a temperatura depende de  $r$ ,  $\theta$  e  $t$ , a equação do calor em coordenadas cilíndricas é:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

## 2.5 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS: REDE NODAL

As soluções analíticas transientes da equação do calor são restritas a problemas com condições de contorno e geometria simples. Em casos onde a geometria e/ou as condições de contorno são complexas é necessária a aplicação de métodos numéricos (BERGMAN et al., 2014).

Ao contrário da solução analítica que permite a determinação da temperatura em qualquer ponto do domínio em determinado meio, os métodos numéricos se limitam a determinar a temperatura em pontos discretos. A escolha destes pontos é a primeira etapa de qualquer análise numérica. Conforme a Figura 7, isto é feito subdividindo o meio em diversas partes e especificando para cada parte um ponto de referência central. Esse ponto de referência é frequentemente chamado de ponto nodal e o agregado de pontos é chamado de rede nodal, identificados com um esquema de numeração que, para um sistema bidimensional em coordenadas retangulares, pode ter a forma descrita na Figura 7, onde as posições  $x$  e  $y$  são identificadas pelos índices  $m$  e  $n$  respectivamente (BERGMAN et al., 2014).



**Figura 7 – Rede nodal**  
**Fonte: Bergman (2014).**

O mesmo sistema de referência pode ser aplicado em um sistema bidimensional em coordenadas cilíndricas (Figura 8), sendo que cada posição  $\theta$  e  $r$ , tem uma correspondente  $n$  e  $m$ , respectivamente.

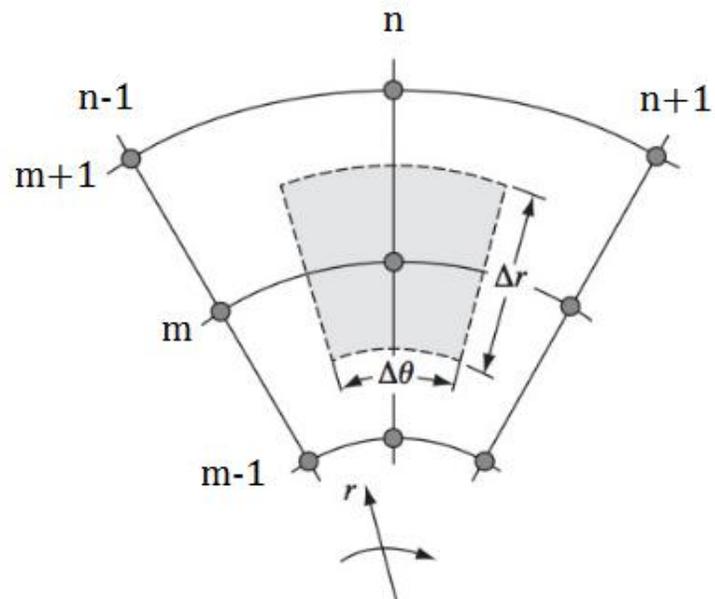


Figura 8 – Volume de controle para geometria cilíndrica

Fonte: adaptado de Kreith (2014).

Depois de definir a rede nodal é possível realizar os balanços de energia em cada nó e analisar a transferência de calor no meio.

### 3 METODOLOGIA

A primeira parte do trabalho consistiu na criação do algoritmo para a determinação do fluxo de radiação na superfície do receptor. As variáveis de entrada para a definição da geometria do concentrador são  $W$ ,  $GC$  e  $\varphi_r$ , portanto todos os outros parâmetros são dados em função destas três variáveis.

A seguir, foi criado o algoritmo de aplicação do MDF no tubo cilíndrico sujeito às condições de contorno impostas. Os códigos desenvolvidos foram escritos em linguagem Python (van ROSSUM, 1995) e todos os gráficos foram gerados utilizando a biblioteca Matplotlib (HUNTER, 2007).

Após a criação dos algoritmos foi necessário validá-los. Para o primeiro, que determina o fluxo de calor, os valores obtidos foram diretamente comparados com o trabalho de Jeter (1986). Para o segundo, de aplicação do MDF, foram realizadas comparações do comportamento do modelo desenvolvido com modelos simplificados já consolidados em transferência de calor.

Depois de realizados os testes de validação, foram determinados os valores de  $\Delta r$ ,  $\Delta \theta$  e  $\Delta t$ , considerando as propriedades do problema que será resolvido. Para determinação desses valores utilizou-se comparação gráfica para diversas configurações, sendo que o mesmo poderia ser feito com a escolha de um critério de parada. Após a definição da malha e do  $\Delta t$ , o algoritmo foi aplicado para as propriedades físicas e geométricas listadas nas Tabela 1 e Tabela 3. As especificações do modelo de coletor se baseiam em coletores reais, como em Carvalho (2018), que utilizou dados de fabricantes para fazer análise óptica e térmica de CSCP. O coeficiente de convecção para o escoamento interno e a distribuição de temperatura no contato entre a parede interna do tubo receptor e o fluido, foram determinados com aproximações retiradas de Tzivanidis (2015), que simulou um CSCP no *software* SolidWorks, trabalhando com água como fluido.

#### 4 FLUXO DE RADIAÇÃO INCIDENTE NA SUPERFÍCIE DO RECEPTOR

O algoritmo criado é uma versão simplificada baseado no método *Monte Carlo Ray Tracing* (MCRT), que considera perfeitas refletividade do concentrador e absorptividade do receptor, além de desconsiderar os possíveis efeitos refratários do vidro ao redor do receptor. O equacionamento do problema e a lógica do algoritmo foram extraídos de Carvalho (2018). A Figura 9 mostra um ponto arbitrário  $P_1(x_1, y_1)$  que representa a posição onde o raio solar arbitrário intersecta o coletor e é refletido para o receptor com um ângulo  $\gamma$ . Depois de refletido, o raio solar intersecta o receptor em um ponto  $P_2(x_2, y_2)$ .

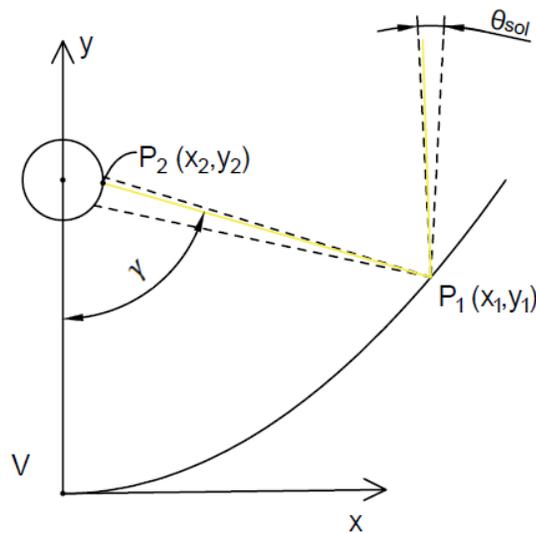


Figura 9 – Posição de um raio arbitrário (em amarelo)

Fonte: Adaptado de Carvalho (2018).

O círculo e a parábola são representados, respectivamente, por

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (12)$$

$$y = \frac{x^2}{4f} - f \quad (13)$$

No algoritmo, escolhe-se primeiramente a quantidade de raios solares, então é realizada uma iteração para cada raio, sendo que cada uma delas segue os seguintes passos:

O valor de  $x_1$  é escolhido aleatoriamente na seguinte restrição:

$$-\frac{W}{2} \leq x_1 \leq \frac{W}{2} \quad (14)$$

Se  $x_1$  incidir diretamente sobre o receptor, ou seja  $-D/2 \geq x_1 \geq D/2$ , então temos que o ponto  $P_2(x_2, y_2)$  é dado por:

$$x_2 = x_1 \quad (15)$$

$$y_2 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x_1^2} \quad (16)$$

caso contrário:

$$y_2 = \frac{x_1^2}{4f} - f \quad (17)$$

Então o raio reflete no coletor e é redirecionado com um ângulo  $\gamma$ :

$$\gamma = \varphi - \theta_r \quad (18)$$

Sendo que  $\theta_r$  é o ângulo de inclinação do raio solar ( $\theta_r = 0$  representa um raio perpendicular à diretriz), que é aleatoriamente escolhido segundo a restrição:

$$-\frac{\theta_{sol}}{2} \leq \theta_r \leq \frac{\theta_{sol}}{2} \quad (19)$$

Dado o ângulo  $\gamma$  é possível encontrar o ponto  $P_2$  que deve satisfazer as seguintes

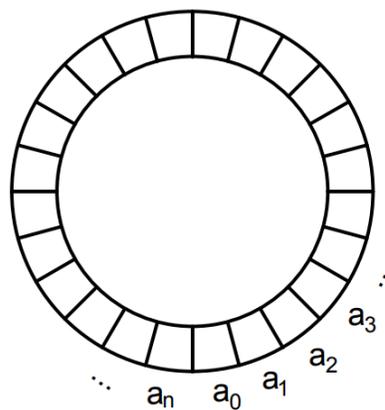
equações:

$$y_2^2 + x_2^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (20)$$

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\tan(\gamma) \quad (21)$$

que representam a intersecção do raio solar de reflexão com a superfície do receptor circular. Isolando  $x_2$  na equação (21) e substituindo na equação (20), chega-se numa equação do segundo grau, que é facilmente solucionada e retorna dois valores para  $x_2$ , sendo que o escolhido deve ser o mais próximo de  $x_1$ .

Tendo as coordenadas cartesianas do ponto  $P_2(x_2, y_2)$ , essas são convertidas para coordenadas polares, retornando um ângulo  $\beta$  onde o raio solar incidiu sobre o receptor. Em  $N$  iterações são armazenados  $N$  valores de ângulos em uma lista que contém os valores  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ , entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ . A secção transversal do receptor é então dividida em  $n$  intervalos,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  (Figura 10), de  $360^\circ/n$  cada. O valor de  $n$  também será levado em consideração no método das diferenças finitas, que será discutido posteriormente, pois quando utilizado o fluxo solar como condição de contorno o valor de  $n$  deve ser o mesmo do número de divisões radiais.



**Figura 10 – Intervalos que compõem a superfície externa do receptor**

O algoritmo conta a quantidade de pontos que estão dentro de cada intervalo  $a_i$  então calcula o *Local Concentration Ratio* (LCR), que é uma medida da concentração do fluxo

de radiação solar no intervalo:

$$LCR_i = \frac{q_{sol}}{q_i} \quad (22)$$

onde  $q_{sol}$  é a radiação solar direta normal, aqui considerada como  $1000Wm^{-2}$ , e  $q_i$  é a radiação média do intervalo  $i$  do receptor em  $Wm^{-2}$ . O valor de  $q_i$  é encontrado base na seguinte equação:

$$q_i = \frac{p_i q_{sol} WL}{n S_i} \quad (23)$$

sendo  $p_i$  a quantidade de pontos que intersectam o receptor em um intervalo  $a_i$ . O valor de  $S_i$  é a área do intervalo  $a_i$  e é dado por:

$$S_i = \frac{\pi DL}{n} \quad (24)$$

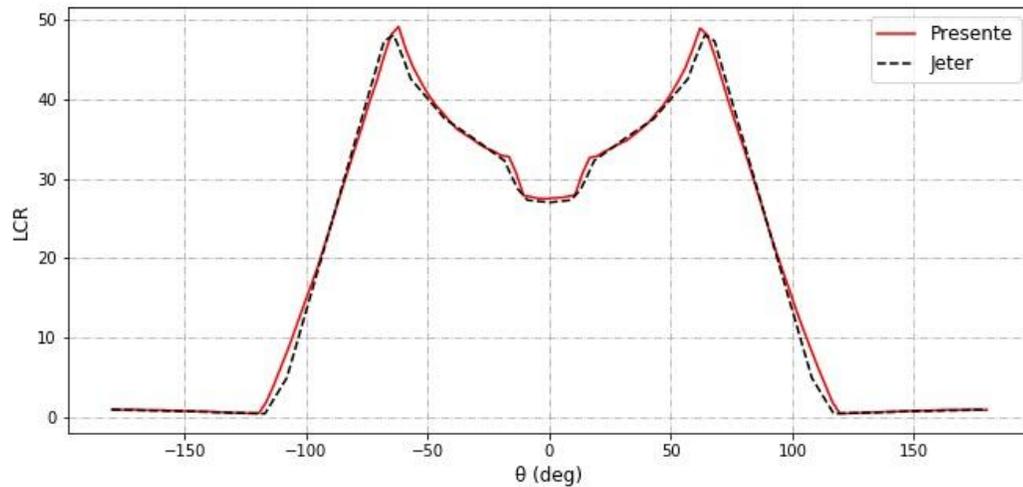
Com base nas equações (23), (24) e (1) temos que:

$$LCR_i = \frac{p_i GC n}{N} \quad (25)$$

onde  $N$  é o número de raios gerados.

#### 4.1 VALIDAÇÃO

Aplicando-se o método de determinação do fluxo encontrou-se uma aproximação numérica do fluxo de radiação ao redor do todo receptor. Para validar o algoritmo simulou-se um coletor com concentração geométrica 20, ângulo de abertura  $90^\circ$  e  $\theta_{sol}/2 = 0,0075 \text{ rad}$ , como utilizado por Jeter (1986). Foram gerados um total de  $10^7$  “raios solares” e o receptor foi dividido em  $n = 120$  intervalos de  $3^\circ$  cada, visto que para  $n > 120$  não houve diferenças significativas no perfil do fluxo de radiação. A Figura 11 mostra a comparação dos dois resultados.



**Figura 11 – Comparação entre o fluxo de radiação presente e o encontrado por Jeter (1986)**

O resultado obtido mostrou-se bem próximo pelo encontrado por Jeter (1986) o que mostra confiabilidade do algoritmo para o caso descrito. Os valores encontrados também foram comparados com os trabalhos de Cheng (2012) e Carvalho (2018), também mostrando concordância. Para o problema resolvido neste trabalho o ângulo  $\theta_{sol}$  será escolhido como  $\theta_{sol} = 0,00928 \text{ rad}$ , que é o valor obtido considerando o diâmetro do Sol e sua distância média até a Terra. O ângulo de abertura e a concentração geométrica são mantidos os mesmos.

#### 4.2 ESCOLHA DAS CARACTERÍSTICAS DO COLETOR PARA A SIMULAÇÃO

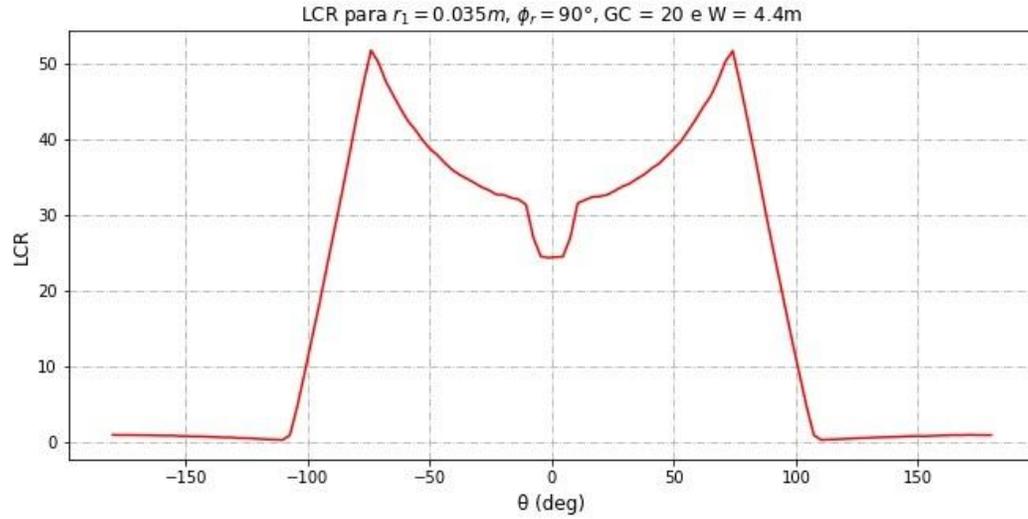
Depois de realizada a validação, foram determinadas as características do coletor que será posteriormente utilizado na determinação da malha, do  $\Delta t$  e nas simulações. A Tabela 1 mostra as propriedades e as condições do coletor.

Tabela 1 – Propriedades do coletor e condições envolvidas

Coletor	
Propriedade	Valor
$\varphi_r$	90°
$W$	4,4m
$\theta_{sol}$	0,53°
$GC$	20
$r_0$	0,033 m
$r_1$	0,035 m
Condições aplicadas	
$h_w$	1000 W/(m <sup>2</sup> · K)
$h_\infty$	0
$T_w$	<i>forma parabólica</i> (Figura 13)
$T_\infty$	20 °C
$T_0$	20 °C
$q'$	0
$q''$	<i>Fluxo não uniforme</i> (Figura 12)

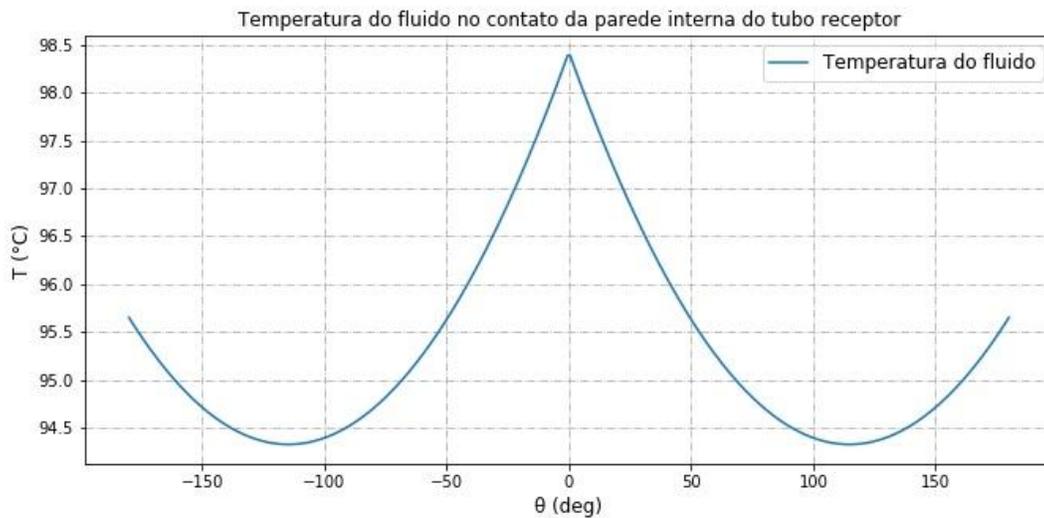
Além dos dados listados na tabela, para o receptor, considerou-se que a emissividade  $\varepsilon$  e a transmissividade  $\tau$  são 0, e que a absortividade  $\alpha$  é 1. Para o espelho do coletor a refletividade  $\rho_r$  é considerada como ideal e seu valor é 1. O comportamento do LCR na superfície do receptor para as propriedades da

Tabela 1 é mostrado na Figura 12 a seguir.



**Figura 12 – Fluxo de radiação para propriedades da Tabela 1**

O valor da temperatura da água  $T_w$  foi aproximado por forma parabólica, baseado nos resultados de Tzivanidis (2015) e mostrado na Figura 13.



**Figura 13 – Distribuição da temperatura da água no contato com o receptor**

## 5 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR: MÉTODO IMPLÍCITO

Para obter a forma de diferenças finitas da equação (11), utiliza-se aproximação por diferença central para as derivadas espaciais. Além disso, é necessário discretizar o problema no tempo, sendo que a distribuição de temperaturas em um instante de tempo  $t$  pode ser representada pela multiplicação de um inteiro  $p$ , pelo intervalo temporal escolhido  $\Delta t$ . Espacialmente o domínio é dividido em coordenadas  $m$  e  $n$ . Portanto, temos que a discretização do problema fica da seguinte forma:

$$t = p\Delta t \quad (26)$$

$$r = r_0 + m\Delta r \text{ com } 0 \leq m \leq mm \quad (27)$$

$$\theta = n\Delta\theta \text{ com } 0 \leq n \leq nn \quad (28)$$

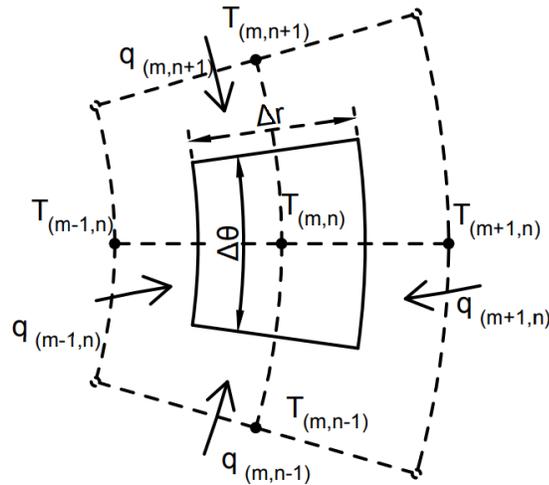
Os valores de  $\Delta r$  e  $\Delta\theta$  são dados em função dos valores de divisões radiais e angulares também nomeadas  $m$  e  $n$ , respectivamente, da seguinte forma:

$$\Delta r = \frac{r_1 - r_0}{m} \quad (29)$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{n} \quad (30)$$

Para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , os valores de  $m$  e  $n$  nas equações (29) (30) são o número de divisões em  $r$  e em  $\theta$ , respectivamente. Se o número de divisões radiais  $m$  é 1, existem dois pontos nodais em tal direção, de coordenadas radiais  $m = 0$  e  $m = 1$ . Para as coordenadas, é considerado que  $m = 0$  é a coordenada referente a  $r = r_0$  e  $m = mm$  é referente a  $r = r_1$ . Também que,  $n = 0$  para  $\theta = 0$  e para  $n = nn$  temos  $\theta = nn\Delta\theta$ .

A forma implícita da equação de diferenças finitas pode ser deduzida a partir do balanço de energia de um volume de controle em geometria cilíndrica, como mostra a Figura 14.



**Figura 14 – Volume de controle geometria cilíndrica e energias entrando**

Considerando um comprimento unitário da direção  $z$ , a área normal à direção radial é  $(r - \Delta r/2)\Delta\theta$  e  $(r + \Delta r/2)\Delta\theta$  nas partes esquerda e direita da Figura 14, respectivamente. Nas laterais a área é  $\Delta r$ . O volume do volume de controle é  $r\Delta\theta\Delta r$ . Por convenção, considera-se que toda a energia é transferida para dentro do volume de controle, sendo:

$$q_{m,n+1} = k\Delta r \frac{T_{m,n+1}^{p+1} - T_{m,n}^p}{r\Delta\theta} \quad (31)$$

$$q_{m,n-1} = k\Delta r \frac{T_{m,n-1}^{p+1} - T_{m,n}^p}{r\Delta\theta} \quad (32)$$

$$q_{m+1,n} = k \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta\theta \frac{T_{m+1,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta r} \quad (33)$$

$$q_{m-1,n} = k \left( r - \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta\theta \frac{T_{m-1,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta r} \quad (34)$$

A taxa na qual a energia é armazenada no volume de controle é:

$$\rho c_p r \Delta\theta \Delta r \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (35)$$

A taxa de geração de calor no interior do ponto nodal é:

$$\dot{q}_{m,n}^p r \Delta \theta \Delta r \quad (36)$$

O balanço de energia para o volume de controle é:

$$q_{m,n+1} + q_{m,n-1} + q_{m+1,n} + q_{m-1,n} + \dot{q}_{m,n}^{p+1} r \Delta \theta \Delta r = \rho c_p r \Delta \theta \Delta r \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (37)$$

Substituindo as equações (31), (32), (33), (34) e realizando as devidas simplificações temos (KEITH, 2015):

$$k \left( \frac{\Delta r}{r \Delta \theta} (T_{m,n+1}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) + \frac{r \Delta \theta}{\Delta r} (T_{m-1,n}^{p+1} - 2T_{m,n}^{p+1} + T_{m+1,n}^{p+1}) + \frac{\Delta \theta}{2} (T_{m+1,n}^{p+1} - T_{m-1,n}^{p+1}) \right) + \dot{q}_{m,n}^{p+1} r \Delta \theta \Delta r = \rho c_p r \Delta \theta \Delta r \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (38)$$

Para resolver o problema, são necessárias quatro condições de contorno e uma condição inicial. A condição inicial é dada por  $T_0$  que é a temperatura do receptor em  $p = 0$ . As condições de contorno na parte interna e externa são obtidas aplicando o balanço de energia nas respectivas fronteiras, que tem espessura  $\Delta r/2$  (Figura 15).

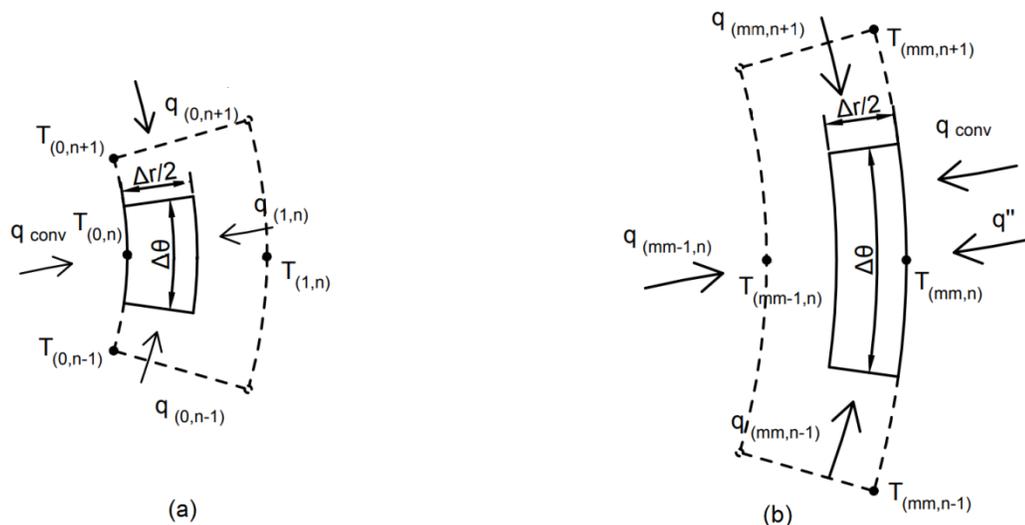


Figura 15 – Volume de controle nas fronteiras interna e externa. (a) Fronteira interna. (b) Fronteira externa.

Realizando o balanço de energia no nó da Figura 15 (a), temos:

$$\begin{aligned}
 & h_w r \Delta \theta (T_w^{p+1} - T_{0,n}^{p+1}) + k \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \frac{T_{1,n}^{p+1} - T_{0,n}^{p+1}}{\Delta r} + k \frac{\Delta r}{2} \frac{T_{0,n+1}^{p+1} - T_{0,n}^{p+1}}{r \Delta \theta} \\
 & + k \frac{\Delta r}{2} \frac{T_{0,n-1}^{p+1} - T_{0,n}^{p+1}}{r \Delta \theta} + \dot{q} \left( r + \frac{\Delta r}{4} \right) \Delta \theta \frac{\Delta r}{2} \\
 & = \rho c_p \left( r + \frac{\Delta r}{4} \right) \Delta \theta \frac{\Delta r}{2} \frac{T_{0,n}^{p+1} - T_{0,n}^p}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{39}$$

E para o nó da Figura 15 (b), temos:

$$\begin{aligned}
 & q'' r \Delta \theta + h_\infty \Delta \theta r (T_\infty - T_{mm,n}^{p+1}) + k \left( r - \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \frac{T_{mm-1,n}^{p+1} - T_{mm,n}^{p+1}}{\Delta r} \\
 & + k \frac{\Delta r}{2} \frac{T_{mm,n+1}^{p+1} - T_{mm,n}^{p+1}}{r \Delta \theta} + k \frac{\Delta r}{2} \frac{T_{mm,n-1}^{p+1} - T_{mm,n}^{p+1}}{r \Delta \theta} \\
 & + \dot{q} \left( r - \frac{\Delta r}{4} \right) \Delta \theta \frac{\Delta r}{2} = \rho c_p \left( r - \frac{\Delta r}{4} \right) \Delta \theta \frac{\Delta r}{2} \frac{T_{mm,n}^{p+1} - T_{mm,n}^p}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{40}$$

No problema que posteriormente será estudado, não há geração interna de calor, porém o termo não foi omitido dos balanços de energia, pois será útil na etapa de validação.

Também são necessárias condições de contorno nas “extremidades”, em  $T_{m,0}$  e em  $T_{m,nn}$ , quando  $\theta$  é  $0^\circ$  e  $360^\circ$ , respectivamente. Visto que a condição de contorno de uma extremidade recebe valores da outra extremidade, o valor de  $\Delta \theta$  não foi reduzido pela metade, como ocorreu em o  $\Delta r$  nas equações (39) e (40). Em vez disso, é imposto que  $T_{m,nn+1} = T_{m,0}$  e  $T_{m,-1} = T_{m,nn}$ , pois os valores de  $T_{m,nn+1}$ ,  $T_{m,-1}$  não fazem parte da malha, mas são utilizados nas equações.

Dadas essas condições de contorno, o número de pontos nodais na malha e de incógnitas em cada intervalo de tempo  $p + 1$  é o seguinte:

$$num_{incógnitas} = (m + 1)n \tag{41}$$

O método implícito requer a solução simultânea das equações nodais para todos os pontos nodais no tempo  $p + 1$  (BERGMAN, 2014). Cada iteração gera uma matriz dos coeficientes,  $A$ , uma matriz-coluna de constantes,  $B$ , e uma matriz-coluna de incógnitas  $X$ , que formam a equação matricial  $AX = B$ . Cada coluna da matriz  $A$  representa a referência para a temperatura de um nó,  $T_{m,n}^{p+1}$ . Cada ponto nodal tem uma equação, com um determinado número de incógnitas e uma constante que o representa. Cada uma dessas incógnitas tem uma coluna referência na matriz de coeficientes, portanto, na matriz dos coeficientes, cada coeficiente deve ocupar a coluna correspondente à incógnita que o multiplica. As constantes devem ser posicionadas nas linhas da matriz  $B$ , seguindo suas respectivas equações posicionadas em  $A$ . A matriz-coluna de incógnitas  $X$  tem, em linhas, o mesmo comprimento de colunas de  $A$ , e também deve seguir a mesma ordem para o posicionamento das incógnitas  $T_{m,n}^{p+1}$ . Os valores presentes na matriz  $B$  são constantes que dependem de  $T_{m,n}^p$  que é o campo de temperaturas no instante de tempo presente.

Expandido as equações (38), (39), (40) e separando de um lado da equação os termos constantes e do outro os termos dependentes de  $T_{m,n}^{p+1}$  os coeficientes da matriz  $A$  e  $B$  podem ser identificados e posicionados. Então, um método de solução de sistemas lineares pode ser aplicado, neste trabalho foi utilizado inversão de matriz.

Após a solução e determinação de todos os  $T_{m,n}^{p+1}$ , esses valores podem ser utilizados em uma nova iteração, fazendo  $T_{m,n}^p = T_{m,n}^{p+1}$ . O algoritmo deve iterar até atingir o regime permanente onde  $|T_{m,n}^p - T_{m,n}^{p-1}| \leq \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é o critério de parada. Como são muitos pontos, uma maneira de identificar quando o sistema atinge o regime permanente é observar o comportamento de  $T_{med}^p$  (um valor médio de temperatura que será definido posteriormente), tal que, quando o seu valor não se altera com o tempo significa que o sistema deixou de armazenar energia.

## 5.1 TEMPERATURA MÉDIA

Cada nó representa uma determinada região e a sua temperatura é uma medida da temperatura média da região nodal (BERGMAN, 2014). Cada uma dessas regiões tem uma massa  $m_{m,n}$  e um volume  $V_{m,n}$ . Considerando que  $c_p$  e  $\rho$  são constantes para toda a malha, é possível definir uma temperatura média  $T_{med}^p$  que representa a temperatura final atingida no equilíbrio térmico de todas as regiões nodais para dado instante de tempo  $p$ .

$$T_{med}^p = \frac{1}{V_{total}} \sum_{m=0}^{mm} \sum_{n=0}^{nn} T_{m,n}^p V_{m,n} \quad (42)$$

onde

$$V_{total} = \sum_{m=0}^{mm} \sum_{n=0}^{nn} V_{m,n} \quad (43)$$

## 5.2 VALIDAÇÃO

A validação do método foi realizada considerando três casos de comparação dos resultados obtidos com resultados provindos de modelos já consolidados em transferência de calor. Para realizar a validação foram estabelecidas as propriedades arbitrárias gerais presentes na Tabela 2, que indicam os valores das constantes relativas às condições de contorno. Todos os casos estudados utilizam desses valores exceto quando explícito o contrário.

**Tabela 2 – Propriedades do receptor para os testes**

Propriedade	Valor
$k$	$10 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
$c_p$	$1000 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$

$\rho$	1000 kg/m <sup>3</sup>
$h_w$	500 W/(m <sup>2</sup> · K)
$h_\infty$	100 W/(m <sup>2</sup> · K)
$T_w$	100 °C
$T_\infty$	20 °C
$T_0$	20 °C
$\dot{q}$	1000000 W/m <sup>3</sup>
$q''$	10000 W/m <sup>2</sup>
$r_0$	0,01 m
$r_1$	0,02 m
$m$	10
$n$	150

**1ª caso:** A variação de  $T_{med}^p$ , em função de  $p$ , deve ser igual à variação da temperatura de um meio contínuo, com as mesmas propriedades físicas ( $m_{total}$  e  $c_p$ ), sujeito a mesma taxa  $Q$  de entrada de energia, no mesmo instante de tempo  $p\Delta t$ . No caso onde a energia entra pela superfície em uma área  $A_q$ , temos a seguinte relação para um meio contínuo:

$$T_{final} = T_0 + \frac{Q_{in}}{\pi\rho(r_1^2 - r_0^2)c_p} \quad (44)$$

Para a realização desse teste, considerou-se que o tubo recebe fluxo de calor em um terço da superfície, tal que a área sujeita ao fluxo de calor no MDF é  $A_q = \frac{1}{3}n\Delta\theta$ , portanto, para o meio contínuo, a energia que entra é  $Q_{in} = q''A_qp\Delta t$ . Também se considerou que receptor não perde calor, portanto  $h_w = h_\infty = 0$ . O intervalo de tempo foi escolhido como  $\Delta t = 10s$  e o tempo total foi de 300s, portanto  $p = 30$ . A equação (44) é linear em função do tempo e encontra a temperatura final do meio contínuo de forma direta para  $p\Delta t = 300s$ . O algoritmo itera  $p$  vezes e retorna a temperatura para cada iteração. A Figura 16 mostra a comparação dos dois métodos.

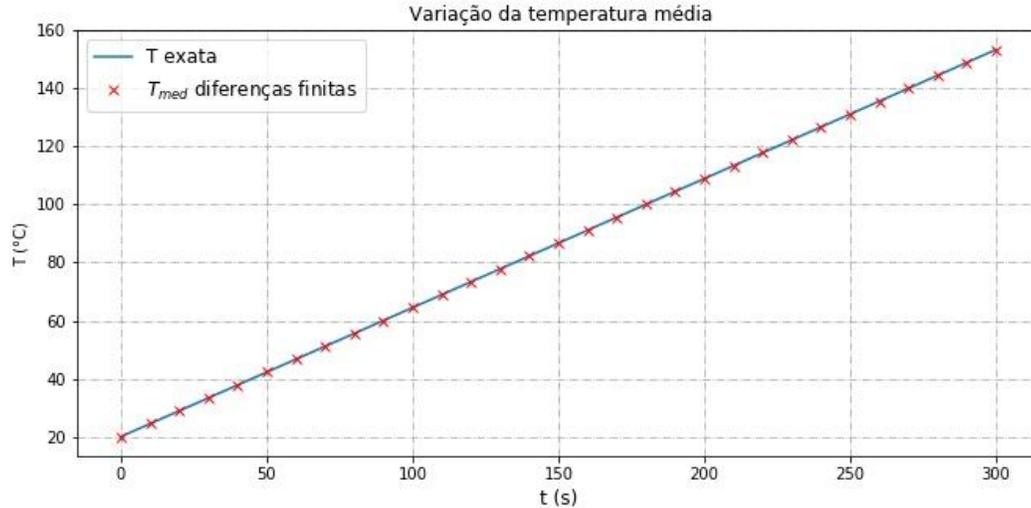


Figura 16 – Comparação de temperaturas para o 1° caso

**2° caso:** Em regime permanente a distribuição de temperaturas associada à condução radial, com geração interna de calor, através de uma parede cilíndrica é representada por (KEITH, 2015):

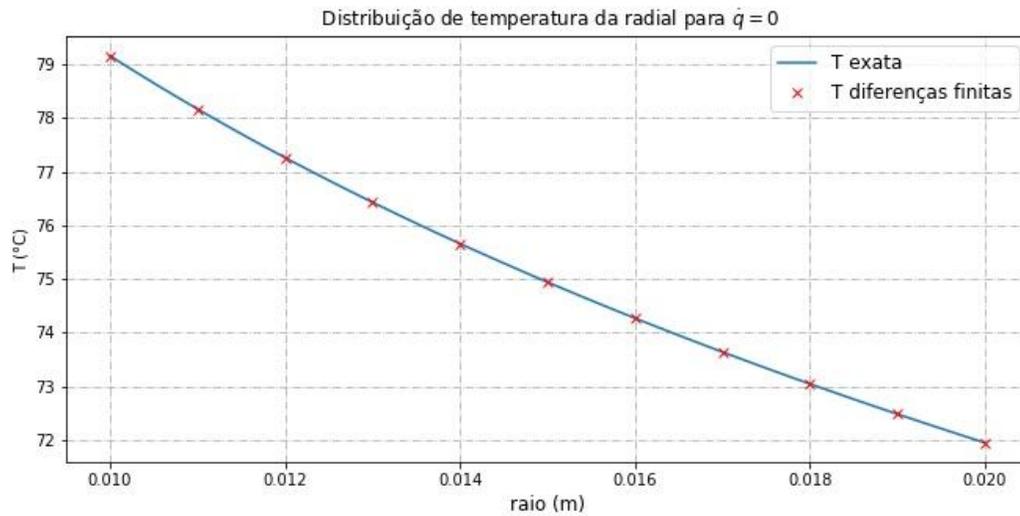
$$T(r) = T_{s,1} + \frac{\dot{q}r_1^2}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right) - \left[ \frac{\dot{q}r_1^2}{4k} \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) + (T_{s,1} - T_{s,0}) \right] \frac{\ln(r_1/r)}{\ln(r_1/r_0)} \quad (45)$$

Para um sistema sem geração de calor a representação é logarítmica e da equação (45) obtemos:

$$T(r) = \frac{T_{s,0} - T_{s,1}}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_{s,1} \quad (46)$$

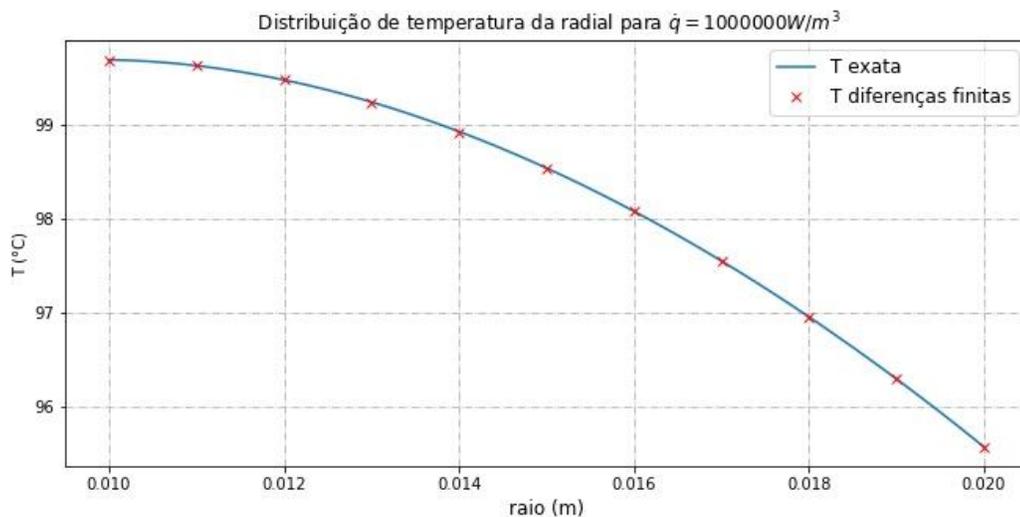
onde  $T_{s,0} = T(r_0)$  e  $T_{s,1} = T(r_1)$

Considerando as propriedades da Tabela 2 para  $\dot{q} = 0$  e  $q'' = 0$ , primeiro determinou-se a temperatura  $T_{s,0}$  e  $T_{s,1}$ , no regime permanente, utilizando o algoritmo e então essas foram utilizadas na equação (46) para determinação da distribuição de temperaturas exata. A comparação dos dois resultados é mostrada na Figura 12.



**Figura 17 – Comparação de temperaturas para o 2° caso sem geração interna**

De forma similar, considerando a equação (45) e com geração interna  $\dot{q}$ , foi obtido o seguinte resultado (Figura 18).



**Figura 18 – Comparação de temperaturas para o 2° caso com geração interna.**

**3° caso:** Se o sistema não perde calor para a vizinhança e recebe um fluxo de calor em sua superfície, a distribuição de temperaturas nos nós será não uniforme e  $T_{med}$  crescerá linearmente à medida que os instantes de tempo  $p$  aumentam. Considerando

que em um instante de tempo  $p = j$ , o fluxo de calor na superfície seja interrompido, a única troca de calor existente será entre as regiões nodais, até que o equilíbrio térmico seja atingido e a temperatura de todos os pontos nodais seja igual a  $T_{med}^{p=j}$ .

Considerando o as mesmas propriedades do 1º caso, o fluxo de calor é interrompido em  $t = 100\text{ s}$  e o algoritmo continua suas iterações até  $t = 300\text{ s}$ . As temperaturas máxima e mínima na rede nodal também são analisadas. A Figura 19 abaixo mostra o resultado obtido.

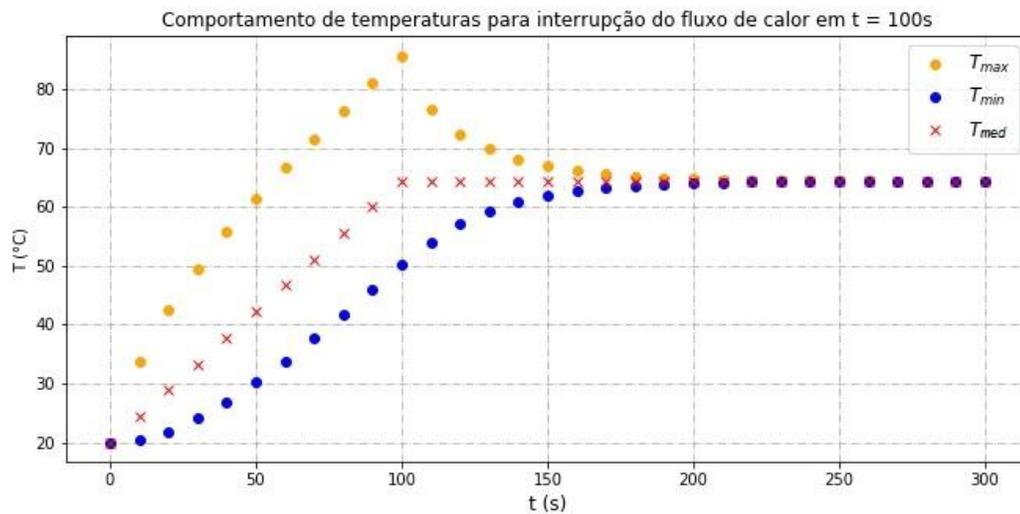


Figura 19 – Comparação de temperaturas para o 3º caso

### 5.3 DETERMINAÇÃO DOS VALORES DE $\Delta r$ e $\Delta \theta$

Como  $\Delta r$  e  $\Delta \theta$  são, respectivamente, dados em função de  $m$  e  $n$ , é necessário determinar seus valores tal que, dadas as equações (29) e (30),  $\Delta r$  e  $\Delta \theta$  sejam suficientemente pequenos para que os resultados independam de mais reduções em seus valores. Para comparar o comportamento das temperaturas para diferentes malhas, somaram-se os valores das temperaturas  $T_{mm,n}$  e  $T_{0,n}$  no regime permanente, a fim de considerar possíveis variações no perfil de temperaturas na parte exterior e interior do tubo. Como o objetivo final deste trabalho é analisar a distribuição de temperaturas em receptores de três diferentes tipos de material, para a escolha da

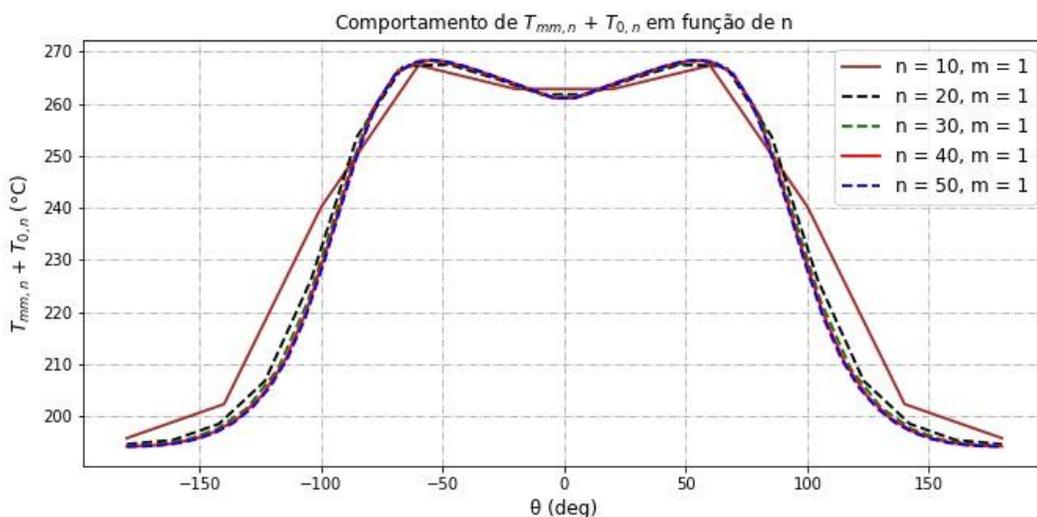
malha e do intervalo de tempo  $\Delta t$  serão escolhidos os valores médios das propriedades dos três materiais que são listados na tabela abaixo.

**Tabela 3 – Propriedades dos materiais dos receptores**

<i>Propriedades a 400K</i>			
<i>Composição</i>	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$k$ ( $W/(m \cdot K)$ )	$c_p$ ( $J/(kg \cdot K)$ )
<i>Alumínio - Liga 2024 - T6</i>	2770	186	925
<i>Cobre - Bronze comercial</i>	8800	52	460
<i>Aço inoxidável - AISI 304</i>	7900	16,6	515
<i>Valor médio</i>	6490	84,67	633,33

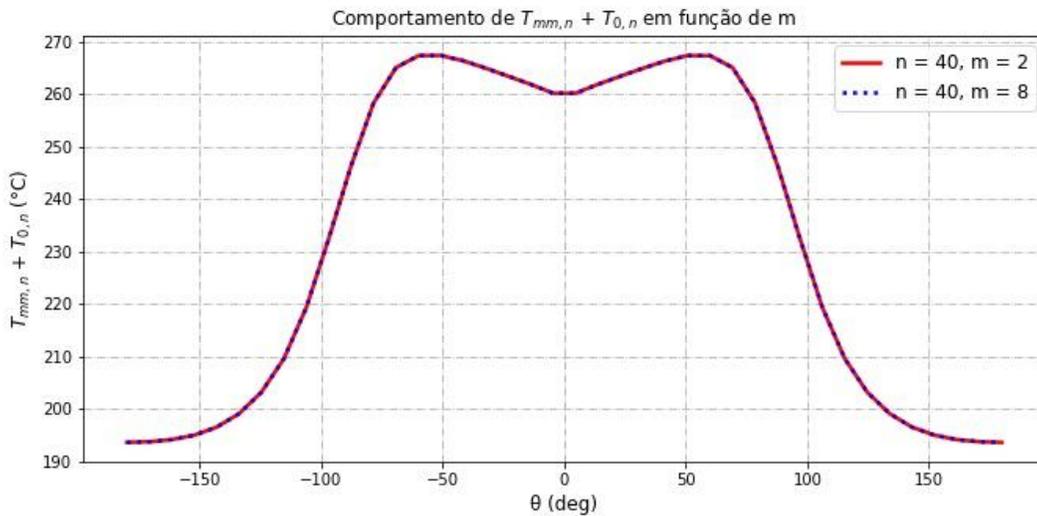
Portanto, na determinação da malha e do  $\Delta t$  será utilizado os valores o  $\rho = 6490 \text{ kg/m}^3$ ,  $k = 84,67 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$  e  $c_p = 633,33 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ .

Primeiramente o valor de  $m$  foi fixado em  $m = 1$  e então o valor de  $n$  foi variado para analisar a mudança no comportamento de  $T_{mm,n} + T_{0,n}$  no regime permanente. A figura a seguir mostra o comportamento de  $T_{mm,n} + T_{0,n}$  em função de  $n$ , com  $m = 1$ .



**Figura 20 – Comportamento das temperaturas interna e externa em função de  $n$**

Para valores de  $n$  maiores que 40, o perfil de temperaturas não sofre grandes alterações e o maior refinamento da malha apenas suaviza o comportamento de  $T_{mm,n} + T_{0,n}$ . Portanto a malha escolhida deve ter  $n \geq 40$ . A seguir, para  $n = 40$ , variou-se o valor de  $m$  e observou-se aumento do numero de divisões  $m$ , não teve influencia perceptível no comportamento de  $T_{mm,n} + T_{0,n}$ . Por comparação foi gerado o perfil de temperaturas para  $m = 2$  e  $m = 8$  (Figura 21).



**Figura 21 – Comportamento das temperaturas interna e externa em função de  $m$**

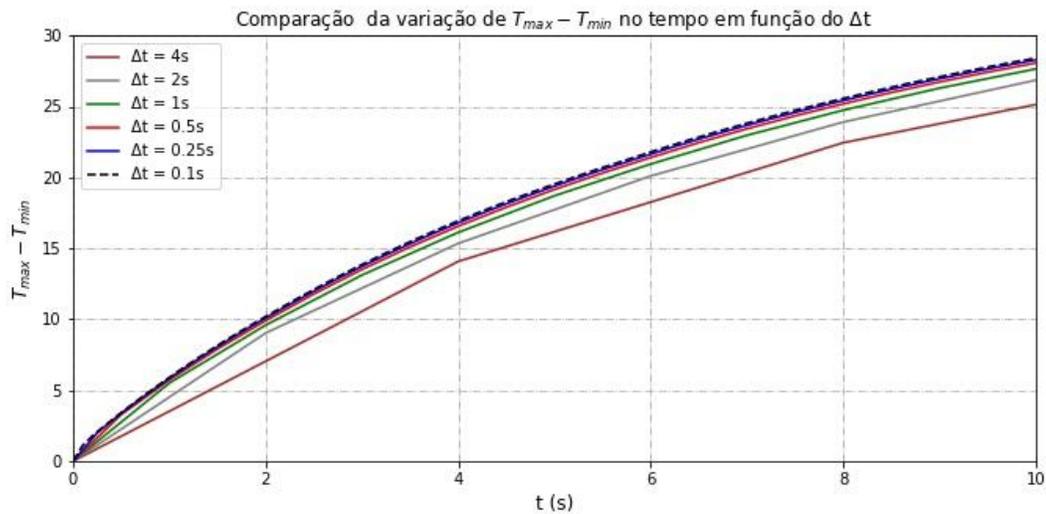
Visto que o valor de  $m$  não afetou a distribuição de temperaturas nas superfícies interior e exterior do tubo, outra análise foi realizada no perfil de temperaturas em  $r = 0,034m$  e, da mesma maneira, maiores valores de  $m$  também não demonstraram modificações no perfil da temperatura.

#### 5.4 DETERMINAÇÃO DO $\Delta t$

Uma das vantagens do método implícito sobre o explícito é que ele é incondicionalmente estável, ou seja, a solução permanece estável para todos os intervalos no espaço e no tempo, sem restrições de  $\Delta t$ ,  $\Delta \theta$  ou  $\Delta r$ . O valor de  $\Delta t$  deve

ser escolhido de forma a maximizar a precisão e minimizar o tempo computacional, portanto,  $\Delta t$  deve ser suficientemente pequeno para assegurar que os resultados independam de mais reduções em seu valor (BERGMAN, 2014).

Para a malha  $m = 2$  e  $n = 40$  foram realizadas iterações para diferentes valores de  $\Delta t$ . Para observar a sua influência no comportamento das temperaturas da malha, foram analisadas as variações do valor da subtração das temperaturas máxima e mínima em cada instante de tempo  $p$ . Para um intervalo de tempo de 10s as curvas de valores obtidos para cada  $\Delta t$  são mostradas a seguir (Figura 22).



**Figura 22 – Comportamento da diferença entre temperatura máxima e mínima no tempo em função de  $\Delta t$**

O comportamento de  $T_{max} - T_{min}$  fica muito similar para os valores de  $\Delta t$  iguais a 0,5; 0,25 e 0,1, portanto um  $\Delta t \leq 0.5 s$  é o necessário para a qualidade dos resultados.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Depois de realizada a validação dos algoritmos e determinado os valores mínimos de  $\Delta r$ ,  $\Delta \theta$  e  $\Delta t$ , foi simulado a distribuição de temperaturas do receptor, para os materiais da Tabela 3, seguindo as propriedades da Tabela 1. O número de pontos nodais mínimo para uma representação com a precisão desejada foi determinado anteriormente e um maior número de pontos apenas refina a qualidade dos resultados. Para evitar interpolação na representação gráfica da distribuição de temperaturas, utilizou-se uma malha com  $m = 4$  e  $n = 360$ , já que para esses valores a representação gráfica individual de todos os 1800 pontos nodais é quase uniforme. O valor escolhido de  $\Delta t$  foi 0,25 s. A Figura 23 mostra uma parte ampliada da malha utilizada nas simulações.

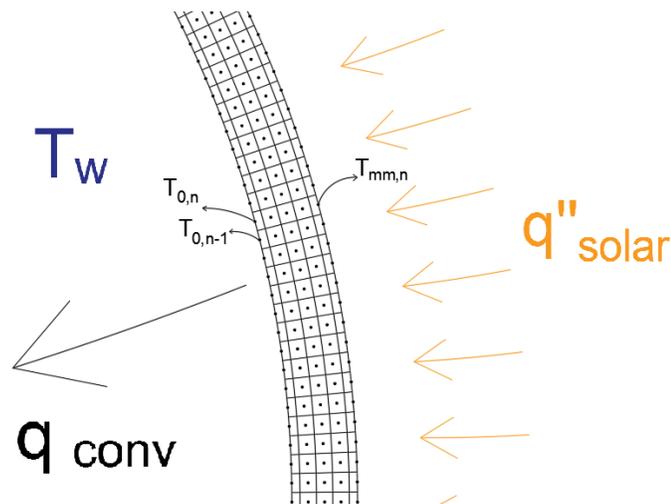


Figura 23 – Parte da malha utilizada, mostrando as coordenadas de referência e as condições de contorno

A seguir a Figura 24, Figura 25 e Figura 26 mostram o comportamento da temperatura na seção transversal do receptor para os três diferentes materiais da Tabela 3.

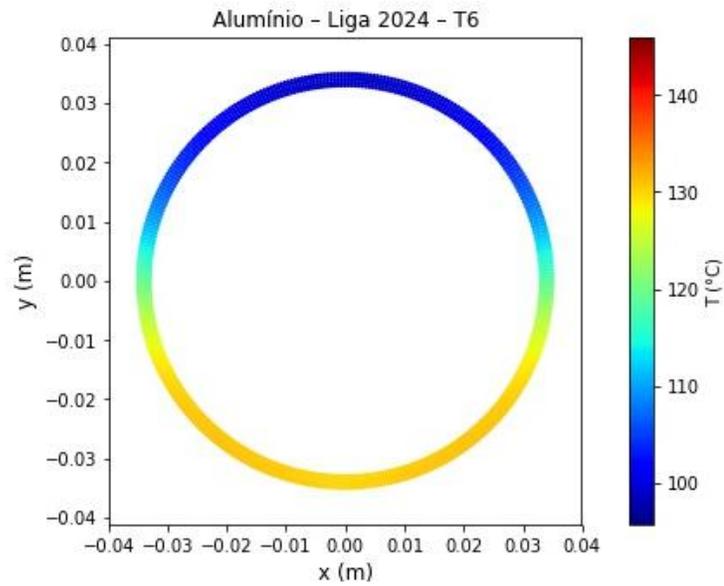


Figura 24 – Distribuição de temperaturas para receptor de alumínio

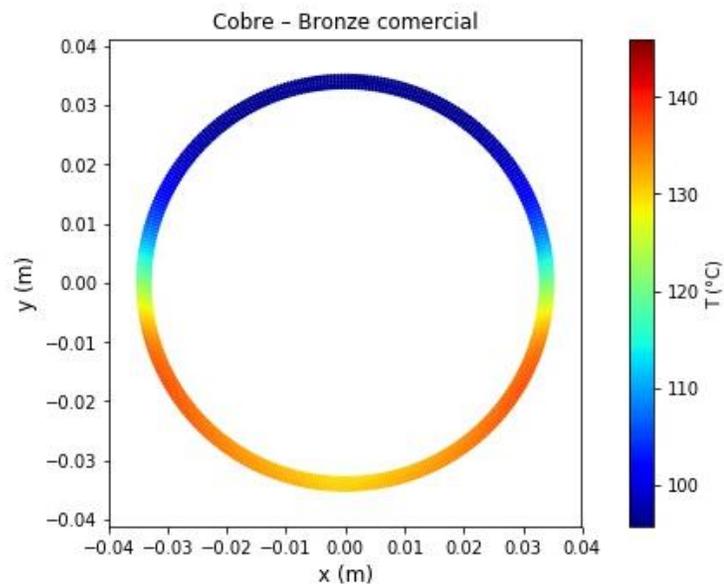
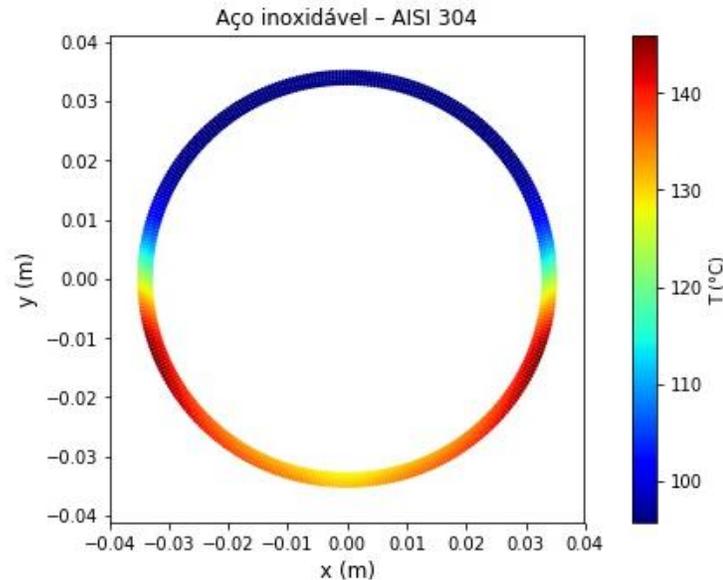


Figura 25 – Distribuição de temperaturas para receptor de cobre



**Figura 26 – Distribuição de temperaturas para receptor de aço inox**

Verificou-se que para um material com a maior condutividade térmica a distribuição de temperaturas se torna mais suave em toda a seção transversal do tubo (Figura 24). Por comparação, as temperaturas máximas encontradas na malha nos três casos simulados foram 131,18; 137,42 e 146,0 °C, para alumínio, cobre e aço, respectivamente. Da mesma forma, as temperaturas mínimas nas malhas foram 99,06; 96,46 e 95,67 °C, respectivamente. Para o aço inox, no caso onde  $k$  tem o menor valor (Figura 26), o comportamento da distribuição de temperaturas, se assemelha ao comportamento do fluxo de calor na superfície. Os valores de  $c_p$  e  $\rho$  não tem influência na distribuição de temperaturas da malha no regime permanente.

O critério de parada  $\epsilon$  que determina o início do regime permanente foi escolhido como  $\epsilon = 10^{-6}$ , ou seja, o algoritmo para de iterar quando a condição  $|T_{med}^p - T_{med}^{p-1}| < 10^{-6}$  é atingida. O comportamento da  $T_{med}$  em função do tempo até o regime permanente para todos os materiais é mostrado na figura abaixo.

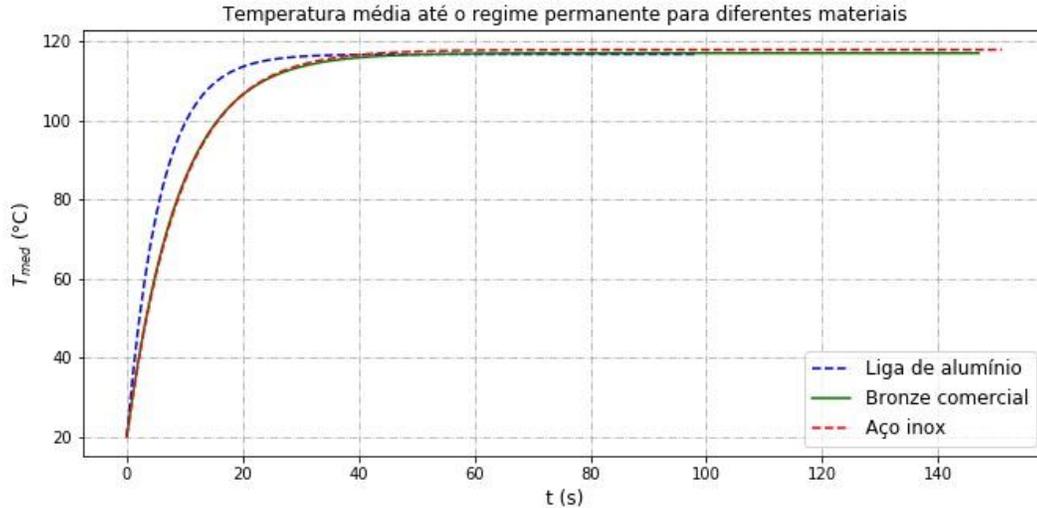


Figura 27 – Comportamento da  $T_{med}$  em função do tempo para diferentes materiais

O valor de  $T_{med}$  se estabiliza próximo a um tempo de 60 s, mas o algoritmo continua iterando até que o critério de parada seja atingido. As temperaturas médias finais foram 116,69; 116,98 e 117,84 °C para alumínio, bronze e aço, respectivamente. Outro dado importante a se extrair do problema é a distribuição de temperaturas na fronteira externa do tubo, como mostra a Figura 28.

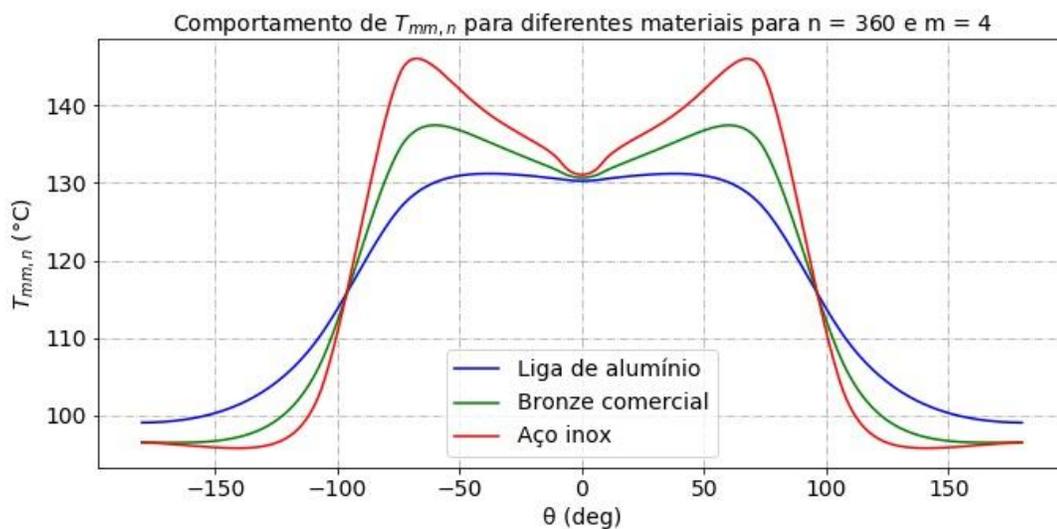
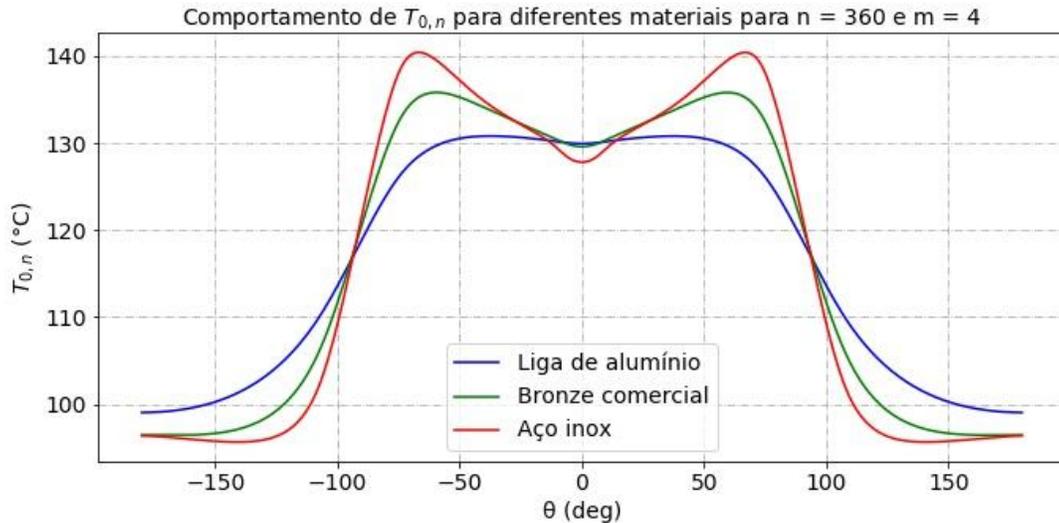


Figura 28 – Distribuição de temperaturas na superfície externa no receptor

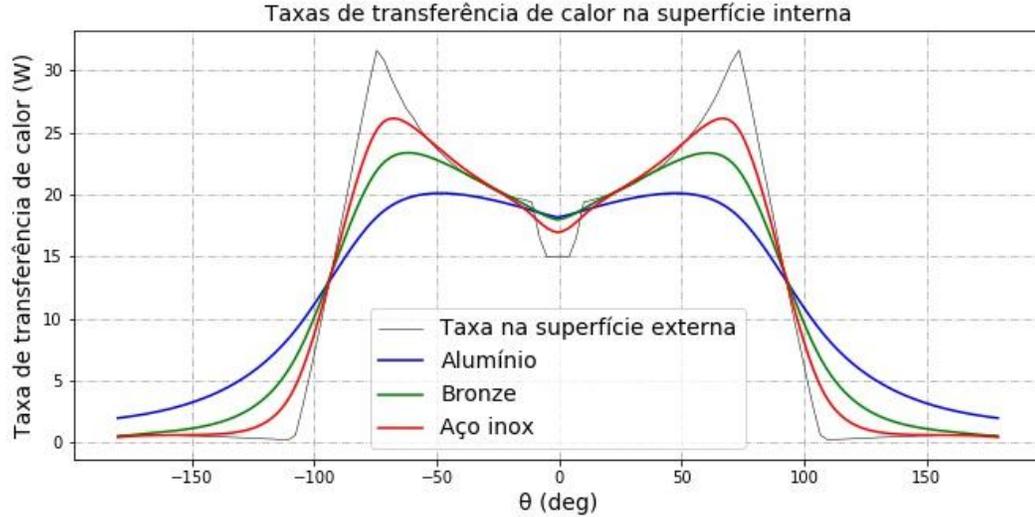
Também se analisou o comportamento do perfil de temperaturas na parte interna no coletor, no contato com a água. A Figura 29 abaixo mostra o perfil de temperaturas em  $T_{0,n}$ .



**Figura 29 – Distribuição de temperaturas na superfície interna do receptor**

É possível observar que o comportamento do perfil de temperaturas de  $T_{mm,n}$  e  $T_{0,n}$  é fortemente influenciado pelo valor da condutividade térmica do material. Das Figura 28 e da Figura 29 também é possível ver que a variação entre as temperaturas das partes interna e externa do receptor é maior para menores condutividades térmicas. Ao mesmo tempo, o aço inox atinge a maior e a menor temperatura de todos os casos, isso devido a sua menor condutividade térmica, que dificulta a transferência de calor na direção angular.

A taxa de transferência de calor na superfície interna, do receptor para a água, pode ser obtida a partir do perfil de temperaturas na superfície interior do tubo. A Figura 30 mostra a comparação das taxa de transferência de calor na superfície interna para os três materiais estudados. Ao fundo, em cinza, é mostrado a taxa na superfície externa.



**Figura 30 – Taxa de transferência de calor para a água nos diferentes materiais e taxa de transferência de calor devido ao fluxo solar na superfície externa**

Para o caso simulado, o tubo não perde calor em suas fronteiras externas, portanto, toda energia provinda do fluxo solar é transferida para a água. Dado isso, a condutividade térmica e a espessura da parede são os fatores que influenciam o comportamento da taxa de transferência de calor na superfície interna. Comparando o alumínio com o aço inox, é possível perceber que a maior condutividade térmica do alumínio faz com o calor seja mais bem distribuído angularmente no receptor, enquanto que no aço inox, a maior parte da transferência de calor para a água ocorre próxima aos pontos onde há maior fluxo externo incidente.

Devido à alta complexidade da transferência de calor por convecção para a água, o coeficiente convectivo foi fixado como constante, não permitindo a análise aprofundada da influência da distribuição de temperaturas na transferência de calor. Porém, foi possível observar que o perfil interno de temperaturas varia bastante para os diferentes materiais, o que pode ser fator de significância quando analisado a eficiência da transferência e calor do receptor para a água.

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram realizadas simulações para a determinação da distribuição de temperaturas na seção transversal do tubo receptor de um CSCP sujeito a condições de contornos constantes com fluxo de radiação solar não uniforme. Dado o problema proposto, a utilização do MDF implícito aplicado à equação do calor e implementando em linguagem Python, mostrou-se eficiente e adequado para solução do problema.

Determinou-se que a malha para que os resultados fossem independentes de maior refinamento, na precisão escolhida, deve ter duas divisões radiais e 40 divisões angulares ( $m = 1$  e  $n = 40$ ), totalizando 80 pontos nodais, e que para um passo de tempo  $\Delta t \leq 0,5s$  o comportamento do perfil de temperaturas ao decorrer do tempo não sofre modificações significativas.

Concluiu-se que o fluxo de radiação solar não uniforme e a condutividade térmica tem grande influência no comportamento da distribuição de temperaturas no tubo. Comparando materiais com maior e menor condutividade térmica, as temperaturas máximas atingidas no receptor são maiores para o material de menor condutividade e o perfil da distribuição de temperatura superficial tem grande similaridade com o comportamento do fluxo de calor superficial. O aumento da condutividade térmica faz com que a distribuição de temperaturas seja mais suave reduzindo a influência do comportamento do fluxo de radiação solar. Como consequência do comportamento do perfil de temperaturas, também foi possível observar que o aumento da condutividade térmica resulta em uma transferência de calor melhor distribuída angularmente no interior do receptor, transferindo energia para a água.

Apenas uma configuração de coletor foi simulada, mas os algoritmos criados permitem a variação de diversos parâmetros que modificam o comportamento da distribuição de temperaturas. Modificações no equacionamento do problema são relativamente simples e permitem a fácil alteração das condições de contorno impostas no receptor, caso outras propriedades, como a emissividade do receptor, sejam consideradas. Visto que neste trabalho varias idealizações foram impostas, futuros estudos podem levar em consideração a substituição destas idealizações por propriedades mais realistas, obtendo resultados ainda mais precisos.

## 8 REFERÊNCIAS

BERGMAN, Theodore L. et al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 7. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2014. 672 p.

CABRERA, F. J., Fernández-García, A., Silva, R. M. P., & Pérez-García, M. (2013). **Use of parabolic trough solar collectors for solar refrigeration and air-conditioning applications**. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 20, 103–118.

CARVALHO, Raquel Miguez. **Análise óptica e térmica de um coletor solar parabólico com tubo evacuado para aplicação em sistema de refrigeração por absorção**. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade Engenharia Mecânica. Campinas, SP, 2018.

CHENG, Z.D. et al. **Numerical simulation of a parabolic trough solar collector with non uniform solar flux conditions by coupling FVM and MCRT method**. *Solar Energy* 86 (2012) 1770–1784.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, Afshin J. **Transferência de calor e massa: uma abordagem prática**. 4. ed. São Paulo, SP: McGraw–Hill, Bookman, AMGH, 2012. 902 p.

HUNTER, J. D. "**Matplotlib: A 2D Graphics Environment**", *Computing in Science & Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 90-95, 2007.

JETER, S.M. **Calculation of the concentrated flux density distribution in parabolic trough collectors by a semi finite formulation**. *Solar Energy*, v.37, p.335-345, 1986.

KREITH, Frank; BOHN, Mark; MANGLIK, Raj. M. **Princípios da transmissão de calor**. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2014. 594 p.

MALAGUETA, Diego C. **Geração Heliotérmica: Princípios e Tecnologias**. Eletrobras/Cepel. Rio de Janeiro, 2012.

RENEWABLE ENERGY POLICY NETWORK FOR THE 21<sup>st</sup> CENTURY (REN21). **Global Overview**. Disponível em: <[http://www.ren21.net/gsr-2018/chapters/chapter\\_01/chapter\\_01/](http://www.ren21.net/gsr-2018/chapters/chapter_01/chapter_01/)> Acesso em: 06 jun. 2019.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. "**O que é parábola?**"; Brasil Escola. Disponível em <<https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-parabola.htm>>. Acesso em 01 de maio de 2019.

TZIVANIDIS, C. et al. **Thermal and optical efficiency investigation of a parabolic trough collector**. Case Studies in Thermal Engineering, 6, 226–237. 2015.

van Rossum, G. **Python tutorial**, Technical Report CS-R9526, Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), Amsterdam, May 1995.

WU, Z. et al. (2014). **Three-dimensional numerical study of heat transfer characteristics of parabolic trough receiver**. Applied Energy, 113, 902–911.