

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

LUIS FERNANDO CALCIOLARI FERRAREZI

**APLICAÇÃO DO TEOREMA DE DUHAMEL PARA DETERMINAÇÃO
DAS TEMPERATURAS E FLUXOS DE CALOR DE UMA PAREDE
PLANA SUJEITA A CONDIÇÃO DE CONTORNO PERIÓDICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

GUARAPUAVA

2017

LUIS FERNANDO CALCIOLARI FERRAREZI

**APLICAÇÃO DO TEOREMA DE DUHAMEL PARA DETERMINAÇÃO
DAS TEMPERATURAS E FLUXOS DE CALOR DE UMA PAREDE
PLANA SUJEITA A CONDIÇÃO DE CONTORNO PERIÓDICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada como requisito parcial à obtenção do título Bacharel em Engenharia Mecânica, do Coordenação de Engenharia Mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Dalmás

Co-orientador: Prof. Dr. Christian Naaktgeboren

GUARAPUAVA

2017



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Guarapuava

Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Coordenação de Engenharia Mecânica
Engenharia Mecânica



TERMO DE APROVAÇÃO

APLICAÇÃO DO TEOREMA DE DUHAMEL PARA DETERMINAÇÃO DAS TEMPERATURAS E FLUXOS DE CALOR DE UMA PAREDE PLANA SUJEITA A CONDIÇÃO DE CONTORNO PERIÓDICA

por

LUIS FERNANDO CALCIIOLARI FERRAREZI

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado em 04 de dezembro de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Dr. Sérgio Dalmás
Prof. Orientador

Dr. Christian Naaktgeboren
Prof. Co-orientador

Dra. Denise Alves Ramalho
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso -

RESUMO

FERRAREZI, Luis Fernando C. **Aplicação do Teorema de Duhamel para a determinação das temperaturas e fluxo de calor de uma parede plana sujeita a condição de contorno periódica.** 2017. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2017.

Em decorrência da necessidade de utilização eficiente de energia, evoluir os conhecimentos sobre as formas de armazená-la é crucial. Para determinados casos, o uso de material em mudança de fase é uma solução que vem tentando tornar-se viável. Este trabalho tem como objetivo encontrar uma solução analítica para um problema de condução de calor através de uma parede unidimensional, que se encontra entre uma temperatura constante e outra com variação periódica. Sendo esta solução obtida pelo Teorema de Duhamel e comparada com outra já desenvolvida com base na solução de problemas periódicos estáveis, tornou-se possível a verificação da equivalência entre as soluções, assim como as praticidades e limitações presentes nos métodos.

Palavras-chave: Material de mudança de fase (PCM). Transferência de calor. Teorema de Duhamel. Problemas periódicos estáveis.

ABSTRACT

FERRAREZI, Luis Fernando C. **Application of the Duhamel's Theorem in the Determination of the Temperatures and Heat Flux of a Plane Wall Subjected to a Periodic Boundary Condition.** 2017. 35 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Federal Technology University - Parana. Guarapuava, 2017.

As result of the necessity of efficient use of energy, evolve the knowledges about the ways to store it is crucial. For certain cases, the utilization of phase change material is a solution that have been trying to become viable. This work has as its objective find an analytical solution for a heat conduction problem through a one-dimensional wall, which is found among a steady temperature and another with periodic variance. This solution being obtained by Duhamel's Theorem and compared to other already developed based in a solution of stable periodic problems, it became possible the check of the equivalency amongst the solutions, as well as the practicalities and limitations existent in the methods.

Keywords: Phase change material. Heat conduction. Duhamel's Theorem. Steady periodic problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Parede com condições de contorno.....	12
Figura 2 - Condição de contorno dependente do tempo em $x = 0$	16
Figura 3 - Perfil de temperatura $TD = Tm + aD(x, t)$, de 0 à 30 segundos	22
Figura 4 - Perfil de temperatura $TN = Tm + a\theta(\xi, \tau)$, de 0 à 30 segundos	22
Figura 5 - Perfil de temperatura $TD = Tm + aD(x, t)$, de 30 à 60 segundos	23
Figura 6 - Perfil de temperatura $TN = Tm + a\theta(\xi, \tau)$, de 30 à 60 segundos	23
Figura 7 - Perfil de temperatura $TD = Tm + aD(x, t)$, de 60 à 120 segundos	24
Figura 8 - Perfil de temperatura $TN = Tm + a\theta(\xi, \tau)$, de 60 à 120 segundos	24
Figura 9 - Comparação dos termos dos somatórios das soluções.....	27
Figura 10 - Influência do número de termos no somatório	29
Figura 11 - Fluxo de calor por Duhamel 0 à 60 segundos.....	31
Figura 12 - Fluxo de calor por Naaktgeboren de 0 à 60 segundos.....	31
Figura 13 - Fluxo de calor por Duhamel 60 à 120 segundos.....	32
Figura 14 - Fluxo de calor por Naaktgeboren de 60 à 120 segundos.....	32

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	6
1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA	6
2 OBJETIVOS	8
2.1 OBJETIVO GERAL	8
2.2 OBJETIVO ESPECÍFICO.....	8
3 JUSTIFICATIVA	9
4 REFERENCIAL TEÓRICO	10
4.1 ESTUDOS RECENTES SOBRE PCM.....	10
4.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	11
4.3 A SOLUÇÃO JÁ EXISTENTE	12
4.4 O TEOREMA DE DUHAMEL.....	15
5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	17
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	18
6.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA AUXILIAR DO TEOREMA DE DUHAMEL.....	18
6.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA POR DUHAMEL	19
6.3 COMPARAÇÃO DOS GRÁFICOS DE PERFIS DA TEMPERATURA.....	20
6.4 COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES.....	25
6.5 FLUXO DE CALOR.....	28
6.6 GRÁFICOS FLUXO DE CALOR	30
7 CONCLUSÃO	33
REFERÊNCIAS	34

1 INTRODUÇÃO

Em todos os fenômenos compreendidos pela humanidade, um fator primordial é a incessante transformação de energia. Sendo assim, para que sejam obtidos grandes avanços tecnológicos são essenciais conhecimentos que aperfeiçoem a forma de transformar a energia, e a capacidade de armazená-la.

As formas de energia são vastas, assim como as possibilidades de conversão, conforme pode ser visto no Quadro 1.

Ano	Pesquisador	Conversão
1768	Watt (1736–1819)	Térmica → cinética (máquina térmica)
1800	Volta (1745–1827)	Química → elétrica (pilha)
1820	Oersted (1777-1851)	Elétrica → magnética (eletroímã)
1821	Seebeck (1770-1831)	Térmica → elétrica (termopar)
1831	Faraday (1791-1867)	Magnética → elétrica (indução eletromagnética)
1840	Joule (1818-1889)	Elétrica → térmica (efeito joule)

Quadro 1 – Algumas conversões conhecidas até o final das quatro primeiras décadas do século XIX

Fonte: Bucussi (2006).

Mesmo conhecendo a possibilidade de converter formas de energia e o princípio da conservação, a transformação não é, necessariamente, realizada em sua totalidade para a forma desejada. Nesse processo a dissipação em outras formas não almejadas é quase que inevitável, sendo assim, são necessárias análises aprofundadas nas etapas intermediárias das transformações, com intuito de minimizar as dissipações, assim como avaliar seus efeitos.

1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA

Uma das formas de armazenar energia, na forma térmica, é através da utilização de materiais de mudança de fase, PCM (em inglês: *Phase Change Material*). Um material sofre aumento ou queda em sua temperatura conforme recebe ou cede calor, sendo este armazenado como energia sensível se o material se mantiver na mesma fase. Ao se atingir a temperatura de fusão ou ebulição, inicia-se o processo de mudança de fase, no qual duas fases do material podem se manter em equilíbrio. Durante todo o processo de mudança de fase a temperatura

se mantém praticamente constante, tendo, portanto, como consequência do ganho ou perda de calor, o aumento ou a diminuição da energia térmica, respectivamente, armazenada na forma de energia latente.

O PCM vem sendo estudado para que cada vez mais seja viável o seu uso, inclusive quanto ao seu encapsulamento, para satisfazer diferentes aplicações, com o objetivo de reduzir o consumo de energia, possibilitando reaproveitar energia que anteriormente seria apenas dissipada.

Entretanto não há um modelo simples para uma análise focada na transição entre o PCM encapsulado e o exterior, que leve em consideração a parede pela qual o calor seja conduzido.

2 OBJETIVOS

O trabalho conta com objetivos gerais e objetivos específicos, os quais estão detalhados a seguir.

2.1 OBJETIVO GERAL

Expandir o conhecimento a respeito do comportamento de uma parede que apresenta uma condição específica, a qual é similar ao encapsulamento do PCM, determinando o perfil de temperatura e fluxos de calor através do Teorema de Duhamel.

2.2 OBJETIVO ESPECÍFICO

Resolver o problema proposto com base no Teorema de Duhamel, que permitirá que outras condições transitórias sejam analisadas.

Comparar a solução encontrada com uma solução já desenvolvida para a solução de problemas periódicos estáveis, para verificar a equivalência de ambas em suas partes estáveis.

Calcular o fluxo de calor em cada face para maior compreensão da influência do método utilizado para buscar a solução.

3 JUSTIFICATIVA

Uma análise de uma solução adicional às já existentes pode contribuir para muitos avanços, já que qualquer passo dado pode sempre ser o impulso inicial para algo ser movido por muito tempo.

Em um estudo com duas diferentes soluções são fornecidos dados com passos distintos, levando, portanto, a mais detalhes que podem ser analisados sob diferentes pontos de vista.

Para explorar algo novo, olhar por diversos ângulos é essencial, isso permite descobrir, caso haja, limitações de uma das partes através da outra, sendo esta, portanto, uma forma que permite obter avanços no tema que será estudado.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão abordados alguns conteúdos fundamentais para a realização do estudo.

4.1 ESTUDOS RECENTES SOBRE PCM

No estudo experimental de Loschi (2013), realizado para avaliar o comportamento do PCM aplicado em tecidos, utilizou-se microcápsulas poliméricas com morfologia do tipo núcleo-casca. Estas microcápsulas possuíam limitações quanto a seu custo de encapsulamento, e quanto a sua falta de estabilidade. Para contornar estas limitações devem ser realizados estudos a respeito de novas maneiras e diferentes materiais para encapsular o PCM, sendo assim, conhecer os fluxos de calor nas faces da cápsula contribui para reduzir os custos de encapsulamento.

De acordo com Azambuja (2015), os materiais em mudança de fase tornam possível a incorporação de sustentabilidade à indústria das edificações. Em seu estudo realizou-se uma simulação energética através do software *DesignBuilder*, avaliando de forma numérica o impacto na temperatura interna de um ambiente ao adicionar PCM no revestimento do local, mostrando a vantagem de se projetar componentes e sistemas que utilizem PCM, de forma a obter o mínimo consumo de energia em sua utilização.

Teixeira (2013) ressalta que um grande investimento com equipamentos e materiais para comparar diversas soluções que utilize PCM seria dispensável caso fosse possível encontrar resultados de forma teórica que permita modificar parâmetros e realizar comparações, em busca da melhor combinação de propriedades para otimizar a transferência de calor.

Grade (2013) denota a necessidade de comparar PCM com maior ponto de fusão, para aplicação na argamassa, durante o verão, apesar da temperatura possuir variação periódica devido ao passar do dia, ela apresenta valores maiores se comparado ao inverno, e o uso de PCM menor ponto de fusão para o inverno. Nesses casos, o ponto de fusão do PCM é análogo à temperatura constante em

uma face da parede estudada, e a comparação entre verão e inverno refletem na temperatura da outra face como uma função periódica com diferentes amplitudes.

4.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Demonstraremos aqui a equação base deste trabalho, que é a equação do calor (Özişik, 2012), aplicada para o caso particular de parede unidimensional.

Considerando um volume de controle qualquer, o balanço de energia térmica é dado por

$$\dot{E}_{arm} = \dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_{ger} \quad (4.1)$$

As taxas de energia presente na equação (4.1) representa que a taxa de energia armazenada é igual à diferença entre a taxa de energia que entra e que sai, somada à taxa de energia gerada. Estas taxas podem ser escritas como integrais de área e volume, resultando em

$$\int_V \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_A \vec{q} \cdot d\vec{A} + \int_V \dot{q} dV \quad (4.2)$$

Aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_A \vec{q} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \quad (4.3)$$

$$\int_V \left(\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \dot{q} \right) dV = 0 \quad (4.4)$$

Então, como o volume é arbitrário, para que essa integral seja nula, é necessário que o integrando seja nulo

$$\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.5)$$

Esta é a forma geral da equação diferencial de transferência de calor. Ela é multidimensional, transitória, e válida para qualquer sistema de coordenadas. Para o caso particular de uma parede unidimensional sem geração de energia, a equação se reduz a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.6)$$

onde cada termo tem como unidade K/s^2 e a difusividade térmica (m/s^2) é definida como

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (4.7)$$

4.3 A SOLUÇÃO JÁ EXISTENTE

Uma parede unidimensional de largura l e condições de contorno correspondentes a uma face com temperatura com variação periódica e a outra com temperatura constante, é representada na Figura 1.

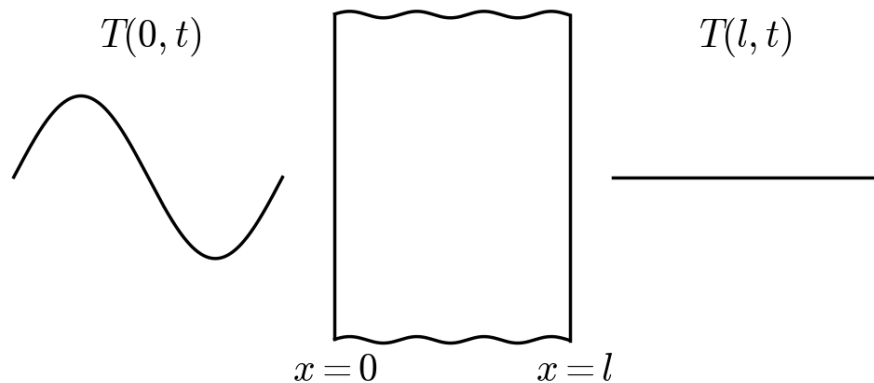


Figura 1 - Parede com condições de contorno
Fonte: Autoria própria

Uma solução analítica para o problema retratado na Figura 1 foi desenvolvida por Naaktgeboren (2007).

Este problema de valor de contorno tem condições de contorno, e equação governante dadas por

$$\begin{cases} T_N(0, t) = T_m + a \cos(\omega t) \\ T_N(l, t) = T_m \\ \frac{\partial T_N}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_N}{\partial x^2} \end{cases} \quad (4.8)$$

De modo que, por se tratar da parede que reveste um PCM, T_m é a temperatura de fusão (em inglês: *melt temperature*), e a é a amplitude da temperatura periódica em uma face.

Naaktgeboren (2007) inicialmente adimensionalizou este problema através das variáveis

$$\theta = \frac{T_N - T_m}{a}; \quad \tau = \omega t; \quad \xi = \frac{x}{l} \quad (4.9)$$

as quais simplificam a equação governante

$$\begin{aligned}\frac{\partial(T_m + a\theta)}{\partial\left(\frac{\tau}{\omega}\right)} &= \alpha \frac{\partial^2(T_m + a\theta)}{\partial(l\xi)^2} \rightarrow \\ \omega a \frac{\partial\theta}{\partial\tau} &= \frac{\alpha\alpha}{l^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} \rightarrow \\ \frac{\partial\theta}{\partial\tau} &= \frac{\alpha}{\omega l^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}\end{aligned}\quad (4.10)$$

Pela equação (4.10) vemos que é conveniente definir uma constante f como sendo

$$f \equiv \frac{\alpha}{\omega l^2} \quad (4.11)$$

Substituindo as variáveis adimensionais nas demais equações, obtém-se

$$\begin{cases} \theta(0, \tau) = \cos(\tau) \\ \theta(1, \tau) = 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = f \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} \end{cases} \quad (4.12)$$

Acrescentando-se o problema auxiliar

$$\begin{cases} \theta^*(0, \tau) = \sin(\tau) \\ \theta^*(1, \tau) = 0 \\ \frac{\partial\theta^*}{\partial\tau} = f \frac{\partial^2\theta^*}{\partial\xi^2} \end{cases} \quad (4.13)$$

e multiplicando a equação governante do sistema (4.13) pela unidade imaginária i , e somando-a com a do sistema (4.12) obtém-se

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + i \frac{\partial\theta^*}{\partial\tau} = f \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + if \frac{\partial^2\theta^*}{\partial\xi^2} \quad (4.14)$$

que leva a

$$\frac{\partial(\theta + i\theta^*)}{\partial\tau} = f \frac{\partial^2(\theta + i\theta^*)}{\partial\xi^2} \quad (4.15)$$

Definindo-se uma nova variável dependente por

$$\mu(\xi, \tau) = \theta(\xi, \tau) + i\theta^*(\xi, \tau) \quad (4.16)$$

com condições de contorno, e equação governante dadas por

$$\begin{cases} \mu(0, \tau) = e^{i\tau} \\ \mu(1, \tau) = 0 \\ \frac{\partial\mu}{\partial\tau} = f \frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2} \end{cases} \quad (4.17)$$

a qual pode ser escrita como função exponencial, tornando mais fácil que a solução seja encontrada

$$\mu(\xi, \tau) = \beta(\xi)e^{i\tau} \rightarrow \mu(\xi, \tau) = [\beta_r(\xi) + i\beta_i(\xi)][\cos(\tau) + i\sin(\tau)] \quad (4.18)$$

como soluções para $\beta(\xi)$ foi obtido

$$\beta(\xi) = -\frac{\sinh[ip(\xi - 1)]}{\sinh(ip)}; \quad p = \frac{i - 1}{\sqrt{2f}} \quad (4.19)$$

Expandindo (4.19) e separando a parte real e a parte imaginária, temos

$$\beta_r(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cosh[(\xi - 2)r] \cos(\xi r) - \cosh(\xi r) \cos[(\xi - 2)r]}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \right\} \quad (4.20)$$

$$\beta_i(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sinh[(\xi - 2)r] \sin(\xi r) - \sinh(\xi r) \sin[(\xi - 2)r]}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \right\} \quad (4.21)$$

sendo r definido por

$$r \equiv \frac{1}{\sqrt{2f}} \quad (4.22)$$

Como $\theta(\xi, \tau)$ é a parte real de $\mu(\xi, \tau)$, mostrado em (4.16), ao substituir os resultados de $\beta_r(\xi)$ e $\beta_i(\xi)$ em (4.18) é possível encontrar $\theta(\xi, \tau)$ como sendo

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \tau) = & \frac{\cos(\tau)}{2} \left\{ \frac{\cosh[(\xi - 2)r] \cos(\xi r) - \cosh(\xi r) \cos[(\xi - 2)r]}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \right\} \\ & + \frac{\sin(\tau)}{2} \left\{ \frac{\sinh(\xi r) \sin[(\xi - 2)r] - \sinh[(\xi - 2)r] \sin(\xi r)}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

O fluxo de calor foi adimensionalizado por Naaktgeboren (2007) por

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow \psi'' = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (4.24)$$

Como o interesse são os fluxos de calor nas faces da parede, pode ser determinada as funções ψ_0'' e ψ_1'' , as quais representam o fluxo de calor quando $\xi = 0$ e $\xi = 1$, respectivamente

$$\begin{aligned} \psi_0''(\tau) = & \frac{r \cos(\tau) [\sin(r) \cos(r) + \sinh(r) \cosh(r)]}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \\ & + \frac{r \sin(\tau) [\sin(r) \cos(r) - \sinh(r) \cosh(r)]}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \\ \psi_1''(\tau) = & \frac{r \cos(\tau) [\sin(r) \cosh(r) + \sinh(r) \cos(r)]}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \\ & + \frac{r \sin(\tau) [\sin(r) \cosh(r) - \sinh(r) \cos(r)]}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.4 O TEOREMA DE DUHAMEL

O Teorema de Duhamel foi desenvolvido por Jean-Marie Duhamel em 1833 para solucionar os inúmeros problemas de engenharia com condições de contorno e geração interna de energia dependentes do tempo (Özişik, 2012).

Considere inicialmente o problema simples de condução de calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad 0 < x < L; \quad t > 0 \quad (4.26)$$

com condições de contorno e iniciais dadas por

$$\begin{cases} T(0, t) = f(t) \\ T(L, t) = 0 \\ T(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Este problema não pode ser resolvido diretamente por separação de variáveis devido a condição dependente do tempo em $x = 0$.

Consideremos, então, o problema auxiliar

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \\ \Phi(0, t) = 1 \\ \Phi(L, t) = 0 \\ \Phi(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Essa formulação corresponde à substituição da não homogeneidade pela função degrau unitário

$$f(t) \rightarrow U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

O problema da equação (4.28) pode ser resolvido por superposição, deslocando a não homogeneidade da condição de contorno para a condição inicial.

A solução de $\Phi(x, t)$ apenas não satisfaz o problema inicial na condição de contorno dependente do tempo.

Agora é necessário encontrar a solução $T(x, t)$ em termos de $\Phi(x, t)$. Observa-se, inicialmente, que

$$T(x, t) \cong f(0)\Phi(x, t); \quad 0 \leq t \leq \tau_1 \quad (4.30)$$

para um pequeno τ_1 , já que as equações são satisfeitas pela multiplicação de $\Phi(x, t)$ por uma constante.

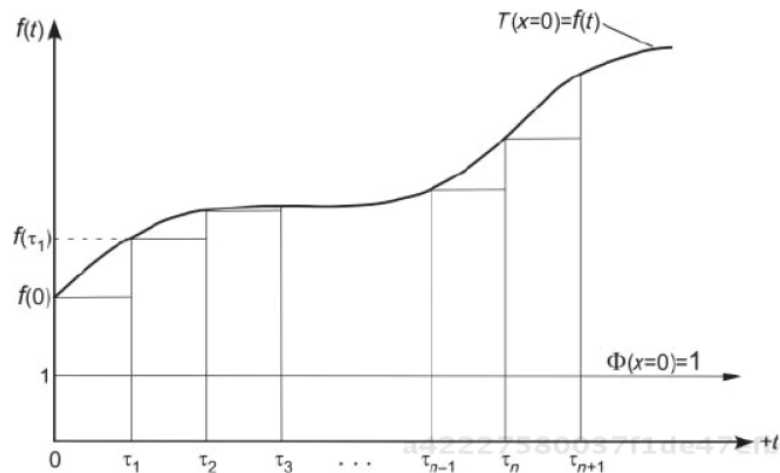


Figura 2 - Condição de contorno dependente do tempo em $x = 0$
Fonte: Özişik (2012)

A equação (4.30) representa uma solução aproximada, a qual é exata para $t = 0$ e perde sua exatidão conforme τ_1 aumenta, como representado na Figura 2. Porém a aproximação pode ser estendida por incrementos adicionais, obtidos deslocando as soluções com degraus unitários

$$T(x, t) \cong f(0)\Phi(x, t) + [f(\tau_1) - f(0)]\Phi(x, t - \tau_1) + [f(\tau_2) - f(\tau_1)]\Phi(x, t - \tau_2) + \dots + [f(\tau_n) - f(\tau_{n-1})]\Phi(x, t - \tau_n) \quad (4.31)$$

Incluindo a seguinte notação

$$\Delta f_m = f(\tau_m) - f(\tau_{m-1}) \quad (4.32)$$

$$\Delta \tau_m = \tau_m - \tau_{m-1} \quad (4.33)$$

podemos representar a equação (4.31) como sendo

$$T(x, t) \cong f(0)\Phi(x, t) + \sum_{m=1}^N \Phi(x, t - \tau_m) \left(\frac{\Delta f_m}{\Delta \tau_m} \right) \Delta \tau_m \quad (4.34)$$

Fazendo $N \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, $\Delta \tau_m \rightarrow 0$, obtém-se a solução exata para o problema original

$$T(x, t) = f(0)\Phi(x, t) + \int_{\tau=0}^t \Phi(x, t - \tau) \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4.35)$$

que é a integral de superposição de Duhamel.

Uma forma alternativa pode ser obtida após realizar integração por partes

$$T(x, t) = - \int_{\tau=0}^t f(\tau) \frac{\partial \Phi(x, t - \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.36)$$

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O problema da parede que encapsula o PCM será primeiramente resolvido com base na solução publicada pelo matemático francês Jean-Marie Duhamel em 1833, o *Duhamel's Theorem*, conteúdo disponível em Özişik (2012).

Uma solução já desenvolvida por Naaktgeboren (2007) com base na solução de problemas periódicos estáveis, SPP (em inglês: Steady Periodic Problems), conteúdo de Arpaci (1966) será utilizada para realização de uma comparação entre as soluções para verificar que a solução já feita é um caso particular da solução que será desenvolvida nesse trabalho, validando a igualdade entre ambas no estado estacionário.

Por fim ocorrerá uma comparação do fluxo de calor em cada face da parede para avaliar limitações de cada solução.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Primeiramente pode ser encontrada a solução de $\Phi(x, t)$, a qual é necessária para a utilização da equação (4.36) do Teorema de Duhamel.

6.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA AUXILIAR DO TEOREMA DE DUHAMEL

A solução de $\Phi(x, t)$ pode ser encontrada separando a função em não homogênea e homogênea

$$\Phi(x, t) = \Phi_{nh}(x) + \Phi_h(x, t) \quad (6.1)$$

onde a equação governante e as condições de contorno de $\Phi_{nh}(x)$ são

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_{nh}(x)}{\partial x^2} = 0 \\ \Phi_{nh}(x=0) = 1 \\ \Phi_{nh}(x=L) = 0 \end{cases} \quad 0 < x < L \quad (6.2)$$

que tem solução

$$\Phi_{nh}(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (6.3)$$

Analisando a parte homogênea da função, a equação governante, as condições de contorno e inicial de $\Phi_h(x, t)$ são dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_h(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi_h(x, t)}{\partial t} \\ \Phi_h(0, t) = 0 \\ \Phi_h(L, t) = 0 \\ \Phi_h(x, 0) = -\Phi_{nh}(x) = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \end{cases} \quad 0 < x < L; \quad t > 0 \quad (6.4)$$

Uma solução geral para $\Phi_h(x, t)$ pode ser expressa da seguinte forma (Özişik, 2012)

$$\Phi_h(x, t) = \sum_n (A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x) e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \quad (6.5)$$

Pelas condições de contorno e inicial (6.4) é possível obter os coeficientes A_n , B_n e λ_n

$$\Phi_h(0, t) = \sum A_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} = 0 \rightarrow A_n = 0 \quad (6.6)$$

Como $A_n = 0$, para a segunda condição de contorno temos que

$$\Phi_h(L, t) = \sum_n B_n \sin \lambda_n L e^{-\lambda_n^2 \alpha t} = 0 \rightarrow \sin \lambda_n L = 0 \rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}; n = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

aplicando a condição inicial

$$\Phi_h(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (6.8)$$

Para encontrar B_n multiplica-se ambos os lados da equação por $\sin \frac{m\pi x}{L}$ e integra-se no intervalo $[0, L]$

$$\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \left(\frac{x}{L} - 1\right) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \quad (6.9)$$

quando $n \neq m$, $\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0$, e quando $n = m$

$$B_m \int_0^L \sin^2 \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{l(\sin m\pi - \pi m)}{\pi^2 m^2} \rightarrow B_m \frac{L}{2} = -\frac{L}{\pi m} \quad (6.10)$$

Logo, o B_n é dado por

$$B_n = -\frac{2}{n\pi} \quad (6.11)$$

Portanto, temos como solução para $\Phi(x, t)$ a seguinte função

$$\Phi(x, t) = 1 - \frac{x}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha t} \quad (6.12)$$

Substituindo (6.12) no Teorema de Duhamel (4.36)

$$T(x, t) = - \int_{\tau=0}^t f(\tau) \frac{\partial \left[1 - \frac{x}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} \right]}{\partial \tau} d\tau \quad (6.13)$$

que pode ser simplificada para

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi\alpha}{L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \int_{\tau=0}^t f(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha (t-\tau)} d\tau \quad (6.14)$$

6.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA POR DUHAMEL

As equações iniciais do problema apresentado por Naaktgeboren (2007), se comparadas com o problema resolvido pelo Teorema de Duhamel, podemos reescrevê-las da seguinte forma

$$\begin{cases} T_N(0, t) = T_m + a \cos(\omega t) \\ T_N(l, t) = T_m \\ \frac{\partial T_N}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_N}{\partial x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_D(0, t) = T_m + aD(0, t) \\ T_D(l, t) = T_m \\ \frac{\partial T_D}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_D}{\partial x^2} \end{cases} \quad (6.15)$$

de modo que $D(x, t)$ será a solução encontrada pelo método de Duhamel, a qual possui as seguintes condições de contorno e inicial

$$\begin{cases} D(0, t) = \cos(\omega t) \\ D(l, t) = 0 \\ D(x, 0) = 0 \end{cases} \quad 0 < x \leq l; t \geq 0 \quad (6.16)$$

Ao comparar com a (4.27) é possível notar a semelhança com o problema original, portanto

$$f(\tau) = \cos(\omega\tau) \quad (6.17)$$

Fazendo uso da função encontrada em (6.14) e introduzindo (6.17) obtém-se

$$D(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi\alpha}{l^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_{\tau=0}^t \cos(\omega\tau) e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha(t-\tau)} d\tau \quad (6.18)$$

A integral presente em (6.18) pode ser resolvida pelo método de integração por partes ou por substituição pela identidade de Euler, resultando em

$$\begin{aligned} & \int_{\tau=0}^t \cos(\omega\tau) e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{l^2 \left[l^2 \omega \sin(\omega t) + \pi^2 n^2 \alpha \cos(\omega t) - \pi^2 n^2 \alpha e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha t} \right]}{\pi^4 n^4 \alpha^2 + l^4 \omega^2} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Portando, temos como determinar o perfil de temperatura na parede, o qual é descrito por $T_D(x, t)$ sendo

$$\begin{aligned} T_D(x, t) &= T_m \\ &+ a \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi\alpha \sin \frac{n\pi x}{l} \left[\frac{\left(l^2 \omega \sin(\omega t) + \pi^2 n^2 \alpha \cos(\omega t) - \pi^2 n^2 \alpha e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \alpha t} \right)}{\pi^4 n^4 \alpha^2 + l^4 \omega^2} \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

6.3 COMPARAÇÃO DOS GRÁFICOS DE PERFIS DA TEMPERATURA

Dada a solução adimensional encontrada por Naaktgeboren (4.23), é possível descrever a temperatura na parede pela seguinte função

$$\begin{aligned}
& T_N(x, t) \\
&= T_m + a \frac{\cos(\tau)}{2} \left\{ \frac{\cosh[(\xi - 2)r] \cos(\xi r) - \cosh(\xi r) \cos[(\xi - 2)r]}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \right\} \\
&+ a \frac{\sin(\tau)}{2} \left\{ \frac{\sinh(\xi r) \sin[(\xi - 2)r] - \sinh[(\xi - 2)r] \sin(\xi r)}{\sinh^2(r) + \sin^2(r)} \right\}
\end{aligned} \quad (6.21)$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{x}{l} \\
\tau &= \omega t \\
r &= \frac{l\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\alpha}}
\end{aligned} \quad (6.22)$$

Uma primeira maneira para verificar a equivalência entre as soluções $T_N(x, t)$ e $T_D(x, t)$ foi realizada a partir do traçado dos perfis de temperatura.

Para a construção dos gráficos foram inseridos valores para temperatura de fusão (T_m), amplitude (a) e frequência (ω) da temperatura periódica, espessura da parede (l) e difusividade térmica do material (α). Estes estão expressos na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros para construção dos perfis de temperatura

T_m [K]	a	ω [Hz]	l [m]	α [m ² /s]	r
357	11	$\frac{2\pi}{60}$	0.02	$14 \cdot 10^{-6}$	1.2231

Fonte: Autoria própria

Fazendo uso desses parâmetros na solução da temperatura obtida pelo método de Duhamel e também na solução de Naaktgeboren, foram obtidos os perfis de temperatura na extensão de $x = 0$ até $x = l$ em diferentes intervalos de tempo.

Primeiramente foram obtidos os perfis para a função $T_D(x, t)$ no intervalo de tempo de $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 30$ segundos, conforme pode ser observado na Figura 3.

Posteriormente foram obtidos os perfis para a função $T_N(x, t)$ no mesmo intervalo de tempo, de modo que pode ser constatado na Figura 4.

Comparando os resultados para o intervalo dos 30 segundos iniciais é possível notar o período transitório na solução por Duhamel, isso fica muito evidente com as diferentes temperaturas no interior na parede nos segundos iniciais.

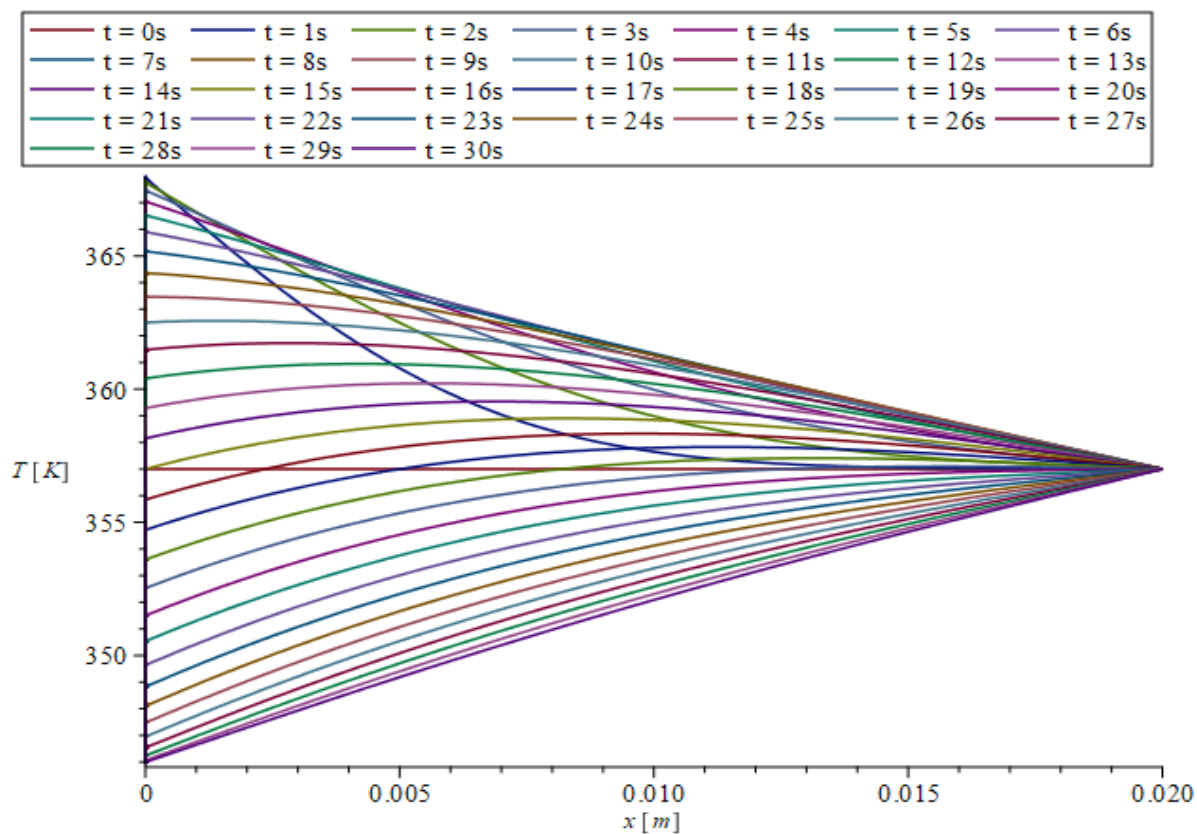


Figura 3 - Perfil de temperatura $T_D = T_m + aD(x, t)$, de 0 à 30 segundos
Fonte: Autoria própria

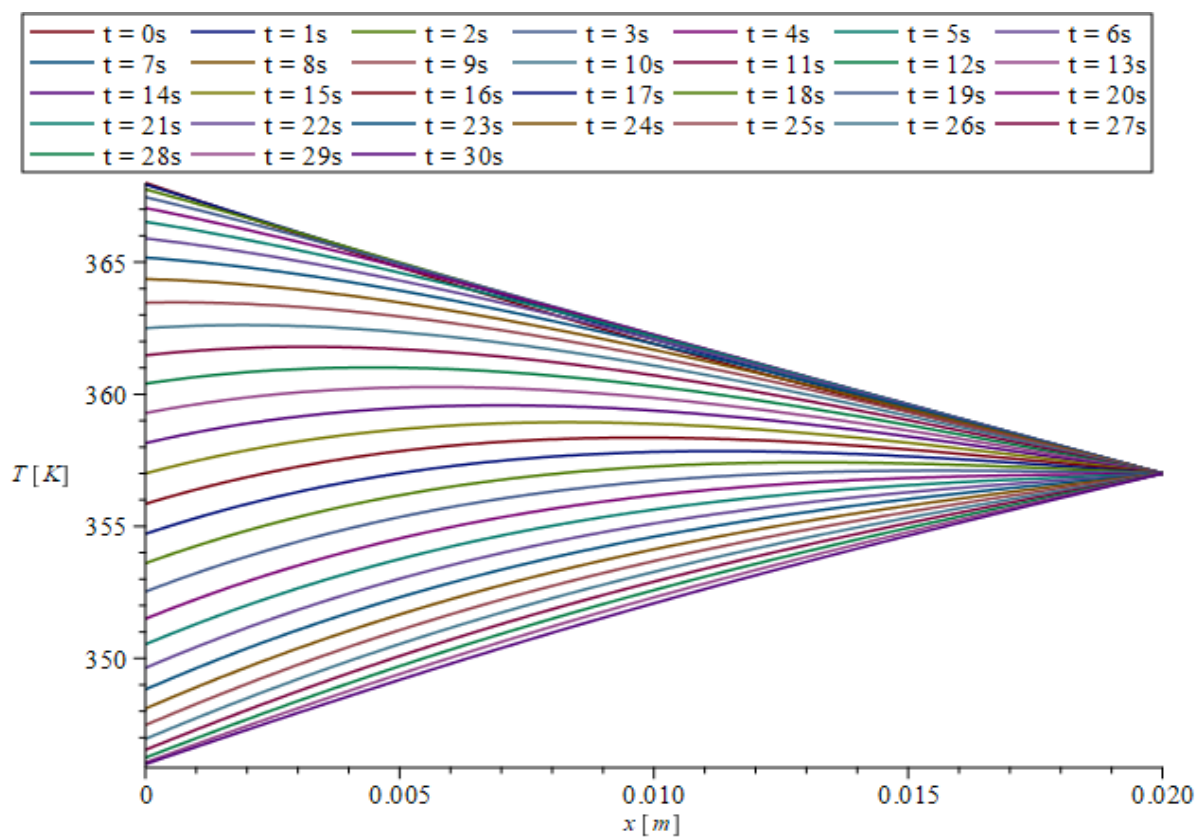


Figura 4 - Perfil de temperatura $T_N = T_m + a\theta(\xi, \tau)$, de 0 à 30 segundos
Fonte: Autoria própria

Prosseguindo com a construção dos perfis de temperatura, o período agora utilizado para analisar o comportamento de ambas soluções foi $t = 30, 31, 32, \dots, 60$.

Com base no valor dado à ω , temos que a Figura 5 e a Figura 6 represente a segunda metade do período da temperatura periódica, nessa etapa ambas parecem iguais, porém sua transição para periódico permanente não concluiu.

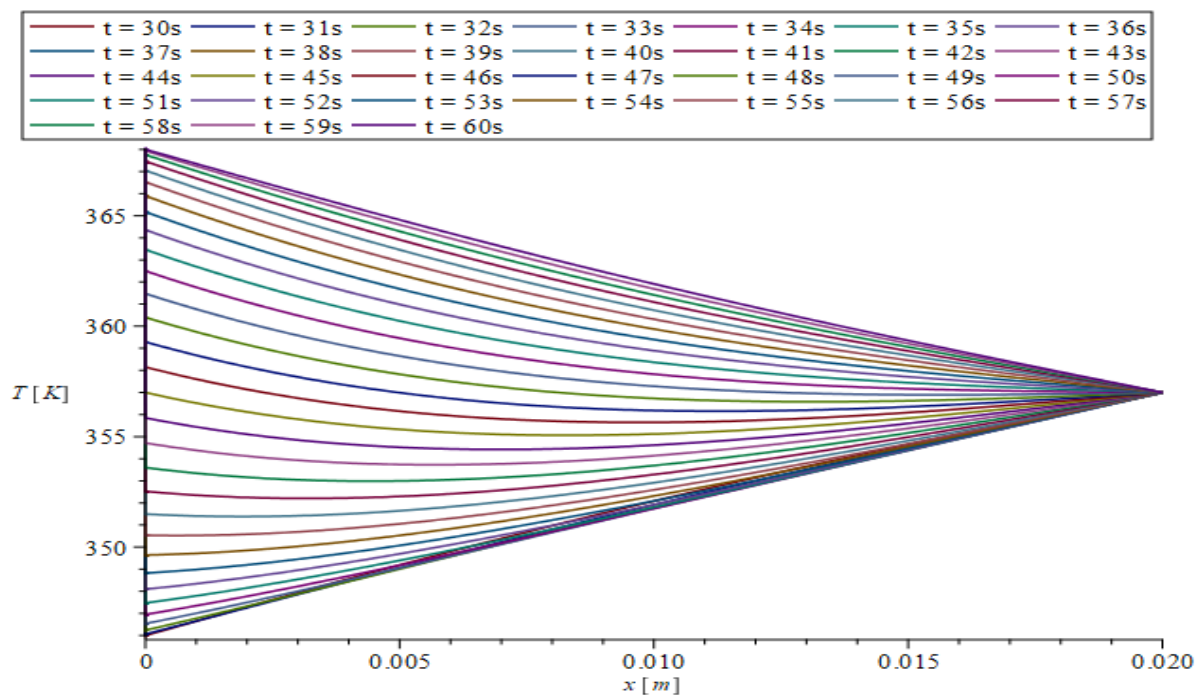


Figura 5 - Perfil de temperatura $T_D = T_m + aD(x, t)$, de 30 à 60 segundos
Fonte: Autoria própria

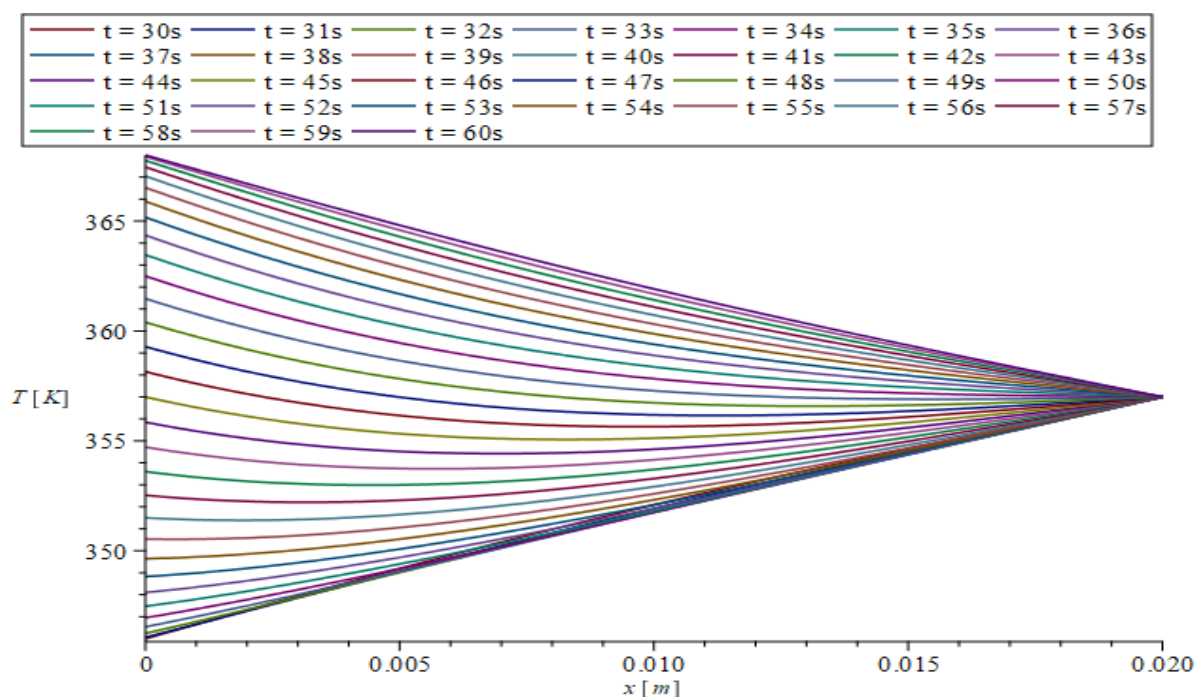


Figura 6 - Perfil de temperatura $T_N = T_m + a\theta(\xi, \tau)$, de 30 à 60 segundos
Fonte: Autoria própria

Passado um período da temperatura presente na face com $x = 0$, a solução obtida pelo método de Duhamel encontra-se no período estacionário, seus perfis de temperatura passam a ter gráficos idênticos aos de Naaktgeboren. Esse resultado pode ser observado ao comparar a Figura 7 e a Figura 8.

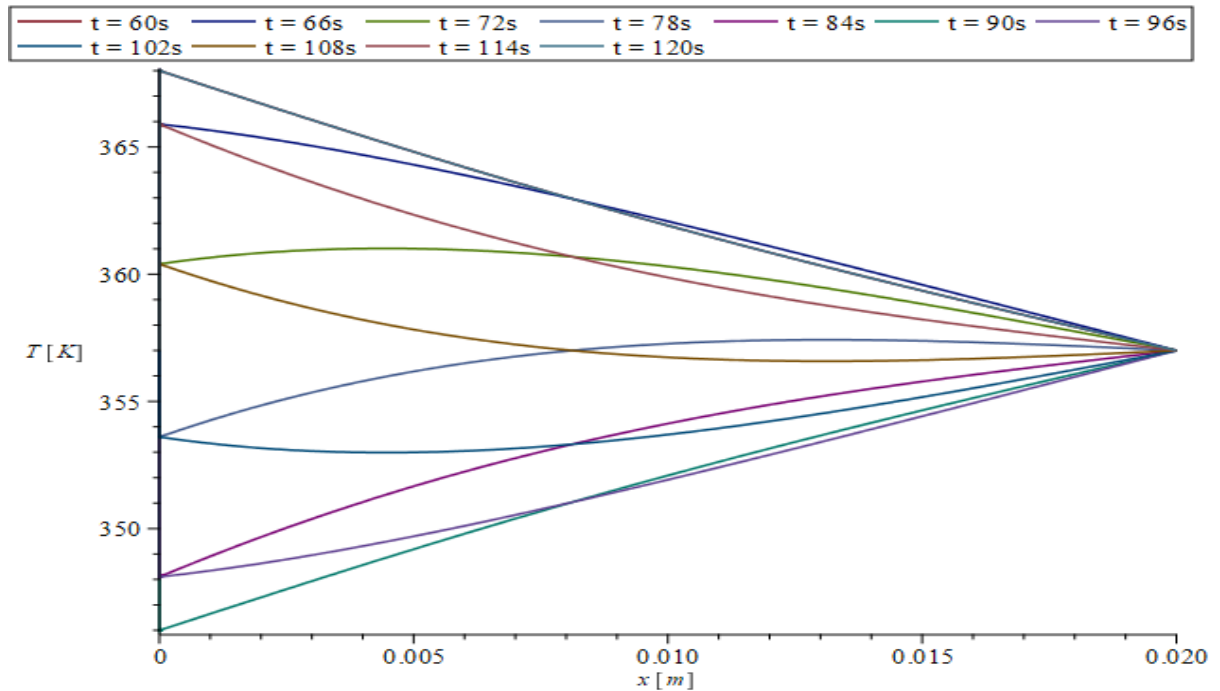


Figura 7 - Perfil de temperatura $T_D = T_m + aD(x, t)$, de 60 à 120 segundos
Fonte: Autoria própria

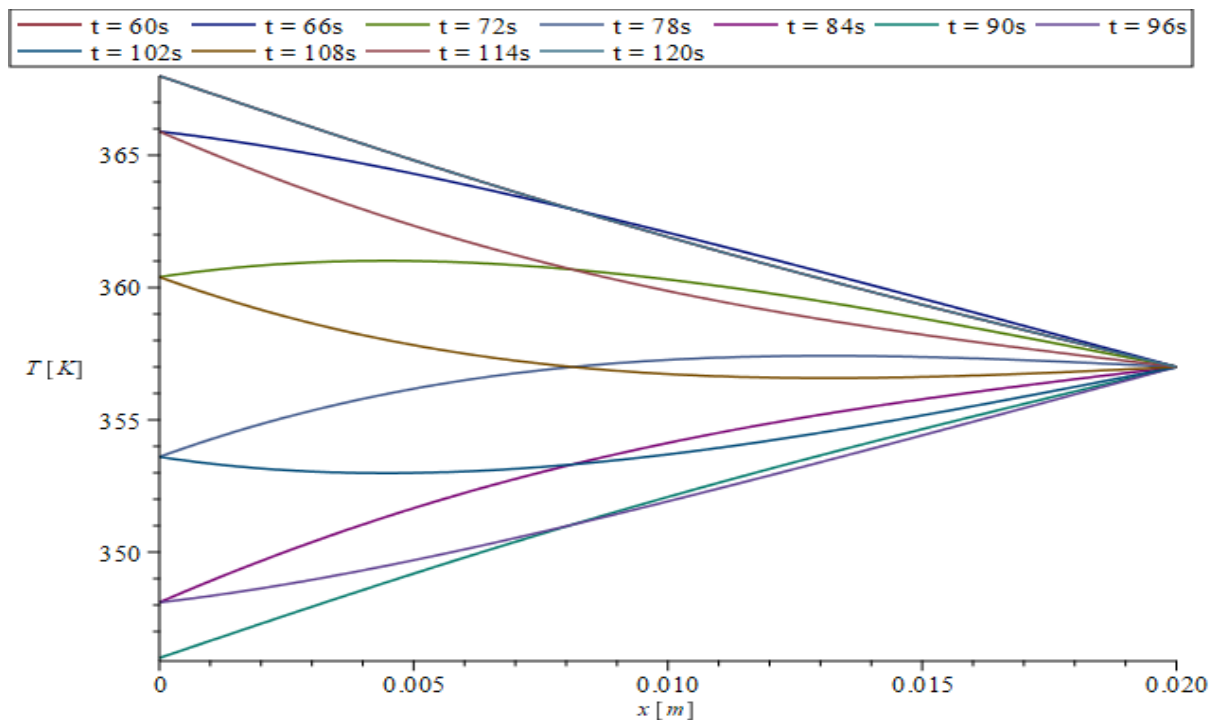


Figura 8 - Perfil de temperatura $T_N = T_m + a\theta(\xi, \tau)$, de 60 à 120 segundos
Fonte: Autoria própria

6.4 COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES

Outra forma para comparar a solução obtida anteriormente por Naaktgeboren (4.23) com a calculada pelo Teorema de Duhamel (6.20), é através da expansão em série de Fourier de senos da função $\theta(\xi, \tau)$ e comparar os coeficientes de ambos os somatórios de modo analítico. A função em série, $f_\theta(\xi, \tau)$, pode ser calculada da seguinte forma

$$f_\theta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (6.23)$$

onde o coeficiente b_n é dado por

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \theta(\xi, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (6.24)$$

Devido à complexidade da integral presente no termo b_n , optou-se pela realização da comparação inserindo os seguintes parâmetros em ambas soluções: a espessura da parede (l), a frequência da temperatura periódica (ω) e a difusividade térmica do material (α)

$$l = 0.02 \text{ mm};$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} \text{ Hz}; \quad (6.25)$$

$$\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Substituindo os parâmetros em $f_\theta(\xi, \tau)$, juntamente com um tempo onde a solução dada pelo Teorema de Duhamel já se encontra estável, $t = 100\text{s}$, para os três primeiros termos do somatório, temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} f_\theta(\xi, 100\omega) = & -0.4445882548 \sin(157.0796327x) \\ & -0.1790187654 \sin(314.1592654x) \\ & -0.1121662780 \sin(471.2388981x) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Realizando as mesmas substituições para $D(x, t)$ foi obtido

$$\begin{aligned} D(x, 100) = & -0.4445882550 \sin(157.0796327x) \\ & -0.1790187654 \sin(314.1592654x) \\ & -0.1121662781 \sin(471.2388981x) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Comparando os resultados obtidos para $f_\theta(\xi, 100\omega)$ e $D(x, 100)$, é possível notar a equivalência de ambos resultados, onde a diferença está presente apenas na ordem de 10^{-10} .

Para melhorar a forma de verificar a igualdade entre as soluções foi pensado na realização de uma comparação que mostre o quão próximo os valores são, mas que também leve em consideração a magnitude dos dados. Um modo que possibilita essa visualização é através da função de comparação adotada, a qual é dada por

$$\zeta_n(x, t) = 1 - \frac{D_n(x, t)}{f_{\theta, n}(\xi, \tau)} \quad (6.28)$$

Como interpretação para $\zeta_n(x, t)$, temos que quanto mais próximos os coeficientes dos somatórios para $D(x, t)$ e $f_{\theta}(\xi, \tau)$ estiverem, a função de comparação tende para zero, desde que o valor do denominador não seja zero. A Tabela 2 foi formada por $\zeta_n(x, t)$ com diferentes combinações de t e n .

Tabela 2 – Comparação das soluções no regime transitório

$\begin{matrix} n \\ t \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	0.68983	0.25053	0.04475	0.003992	1.78e-4	3.99e-6
2	0.48132	0.06346	2.02e-3	1.61e-4	3.28e-8,	-1.00e-9
3	0.33957	0.16255	9.26e-5	6.70e-8	-2.00e-9	-1.00e-9
4	0.24221	0.00421	4.29e-6	-1.e-9	-3.40e-9	-1.00e-9
5	0.17471	1.11e-3	2.06e-7	0	0	0
6	0.12749	2.94e-4	6.80e-9	3.10e-9	-5.00e-9	-1.00e-9
7	0.09418	7.94e-5	6.00e-10	-2.00e-9	1.30e-9	-1.00e-9
8	0.07052	2.18e-5	2.70e-9	0	-3.00e-9	-1.00e-9
9	0.05359	6.12e-6	-4.00e-9	-5.00e-9	3.20e-9	4.85e-8
10	0.04145	1.76e-6	-1.00e-9	0	6.00e-10	-1.00e-9
11	0.03273	5.28e-7	3.00e-9	3.00e-9	-5.00e-9	-5.10e-8
12	0.02652	1.61e-7	-4.00e-9	-3.00e-9	-4.90e-8	-1.00e-9
13	0.02223	5.40e-8	-2.00e-9	1.10e-9	-2.00e-9	4.88e-8
14	0.01955	2.32e-8	1.40e-9	-5.00e-9	4.38e-8	-2.00e-9
15	0.01854	1.67e-8	-4.00e-9	-5.00e-9	-5.00e-9	-5.80e-8
16	0.02020	-1.00e-8	-4.00e-9	3.70e-9	3.48e-8	0
17	0.03178	0	0	-3.00e-9	-1.80e-8	5.00e-8
18	-0.09630	3.50e-9	3.10e-9	1.30e-9	2.69e-8	-1.00e-9
19	-0.01087	-3.00e-9	-4.00e-9	4.52e-9	-2.70e-8	-5.1e-8
20	-0.00421	0	0	-2.00e-8	1.99e-8	0

Fonte: Autoria própria

De acordo com a Tabela 2 é possível observar que em tempos menores, os valores predominantes no somatório, que resultam no efeito transitório para a solução pelo método de Duhamel, são os primeiros termos, os quais tornam a comparação ainda não tão próxima de zero. Com o avanço do tempo torna evidente que os termos das soluções vão se aproximando cada vez mais, até chegar à etapa estável.

A análise desenvolvida pela observação pode ser complementada com o gráfico da função de comparação presente na Figura 9.

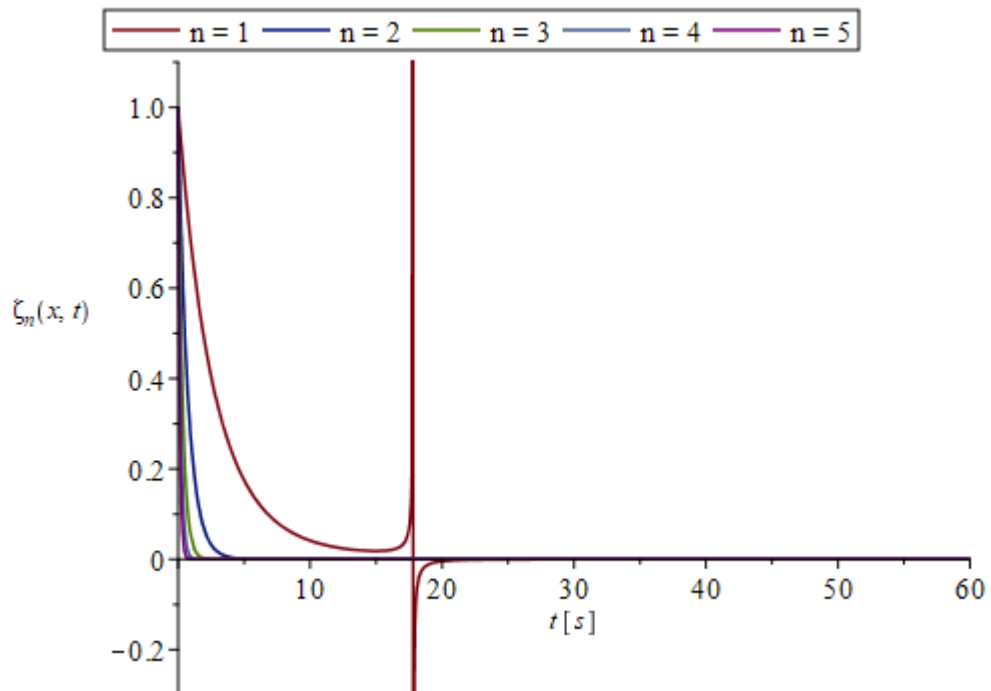


Figura 9 - Comparação dos termos dos somatórios das soluções
Fonte: Autoria própria

Um detalhe presente no gráfico mas não tão evidente na Tabela 2 é uma descontinuidade próximo aos 20 segundos. Retomando aos valores da tabela, notamos que de 17 para 18 segundos houve troca de sinal na função de comparação, pois nesse intervalo o primeiro termo do somatório de ambas soluções passou de

$$\begin{aligned} D_1(x, 17) &= 0.050024595 \sin(157.0796327x) \\ f_{\theta,1}(\xi, 17\omega) &= 0.051666468 \sin(157.0796327x) \end{aligned} \quad (6.29)$$

para

$$\begin{aligned} D_1(x, 18) &= -0.01323237915 \sin(157.0796327x) \\ f_{\theta,1}(\xi, 18\omega) &= -0.01207007854 \sin(157.0796327x) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Como ambas as funções são contínuas, entre os 17 e 18 segundos ambas passaram por zero, causando a descontinuidade presente na Figura 9.

Após passado o período transitório, a proximidade entre os coeficientes das soluções é válida desde o primeiro termo do somatório. A Tabela 3 conta com os valores da função de comparação no tempo de 60 à 65 segundos, nela fica evidente a igualdade dos somatórios presentes nas soluções $D(x, t)$ e $f_{\theta}(\xi, \tau)$ para o período estável.

Tabela 3 – Comparação das soluções no regime periódico permanente

$\frac{n}{t}$	1	2	3	4	5	6
60	4.10e-8	-1.00e-9	-2.20e-8	3.90e-8	-4.10e-8	-1.00e-9
61	1.90e-8	1.90e-9	-8.00e-9	-2.70e-8	5.50e-9	4.92e-8
62	-5.00e-8	-5.00e-9	4.80e-9	7.00e-9	-4.80e-8	-1.00e-9
63	1.00e-9	-1.00e-9	1.77e-8	4.07e-8	-2.00e-9	-5.10e-8
64	-3.00e-9	1.30e-9	3.15e-8	-2.50e-8	4.28e-8	-1.00e-9
65	3.70e-9	-5.00e-9	4.49e-8	9.30e-9	-1.00e-8	4.96e-8

Fonte: Autoria própria

6.5 FLUXO DE CALOR

O fluxo de calor é obtido a partir da derivada da função da temperatura. Como nesse trabalho os fluxos de calor de interesse são os das faces da parede, é necessário que a derivada seja calculada em $x = 0$ e $x = l$, podendo expressá-lo pela seguinte notação

$$q_D''_0(t) = -k \left. \frac{\partial T_D}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (6.31)$$

$$q_D''_l(t) = -k \left. \frac{\partial T_D}{\partial x} \right|_{x=l}$$

Porém, equações governantes tem como restrição do problema inicial, mostrado em (4.26), o domínio de $0 < x < L$, sendo assim, aplicar a derivada da temperatura nos extremos do domínio não é uma solução garantida. Esse problema também pode ser notado ao observar que solução encontrada em (6.20) é um somatório de infinitos termos em seno, isso faz com que a função sempre resulte na temperatura de fusão para $x = 0$.

$$D(0, t) = 0 \rightarrow T_D(0, t) = T_m \quad (6.32)$$

Utilizando os parâmetros da Tabela 1, estabelecendo um tempo de 60 segundos e variando o número de termos do somatório, foi possível obter a Figura 10. Dessa forma é possível notar o comportamento da função conforme $n \rightarrow \infty$, apesar da função tomar forma para o contorno adequado do perfil de temperatura, nas extremidades do intervalo os resultados não são válidos.

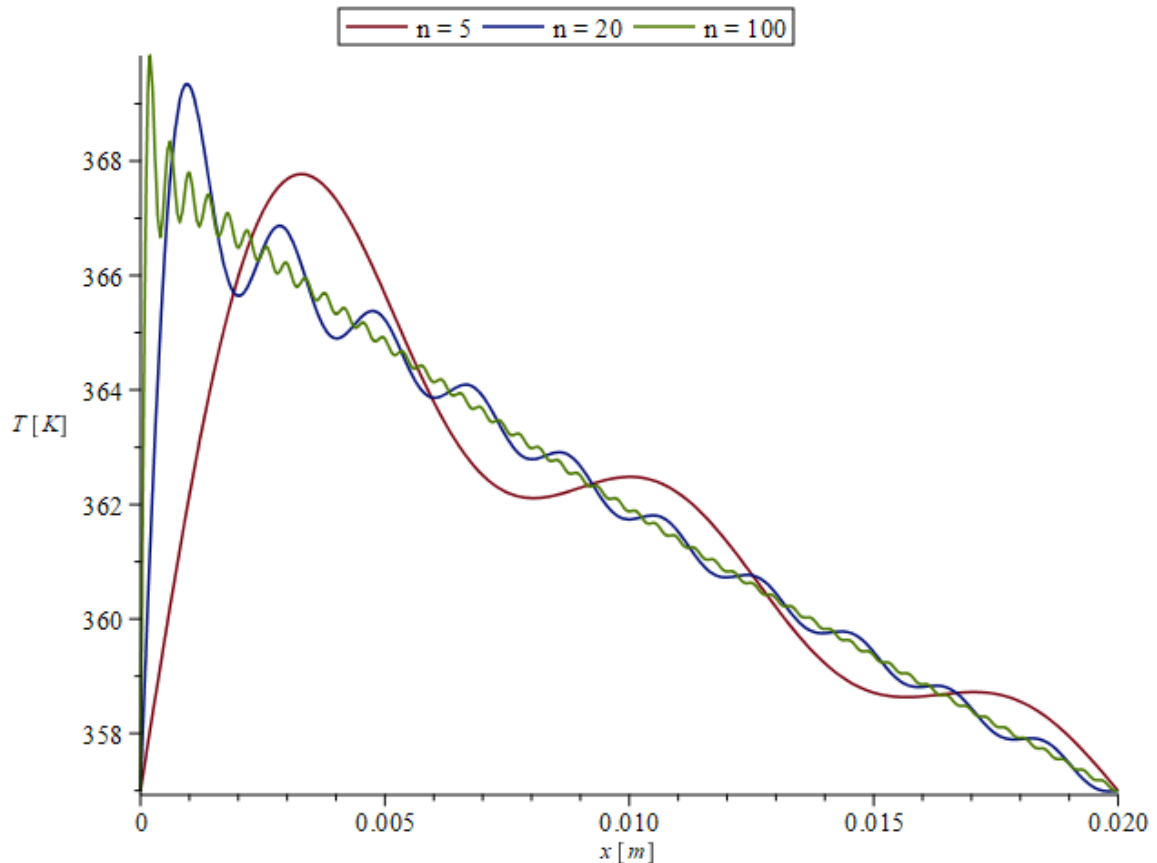


Figura 10 - Influência do número de termos no somatório
Fonte: Autoria própria

Uma maneira encontrada para contornar esse problema e conseguir obter os valores corretos de fluxo de calor nas faces da parede foi através da obtenção da derivada por definição. Como a região próxima demais da extremidade $x = 0$ da parede não correspondem ao valor real, foi descartado um intervalo de 0.5% da espessura total e só após essa margem realizado o cálculo para encontrar o fluxo. Na extremidade para $x = l$ não é necessário descartar um intervalo, mas apenas calcular pela definição. De modo que as funções são dadas por

$$q''_{D,0}(t) = -k \frac{T_D(1.5h, t) - T_D(h, t)}{0.5h}; \quad h = \frac{0.5}{100} l \quad (6.33)$$

$$q''_{D,l}(t) = -k \frac{T_D(l, t) - T_D(l - 0.1h, t)}{0.1h}$$

As soluções para o fluxo de calor encontrada por Naaktgeboren (2007) ψ_0'' e ψ_1'' estão em sua forma adimensional, porém, para efeito de comparação, elas serão utilizadas sem adimensionalização. Na face da parede com a temperatura periódica a equação do fluxo pode ser expressa por

$$q''_{N,0}(t) = -k \left. \frac{\partial [T_m + a\theta(\xi, \tau)]}{\partial x} \right|_{x=0} \rightarrow$$

$$q''_{N,0}(t) = -k \frac{ar}{2l} \left\{ \frac{\sinh(2r) [\cos(\tau) - \sin(\tau)]}{\cos^2(r) - \cosh^2(r)} + \frac{\sin(2r) [\cos(\tau) + \sin(\tau)]}{\cos^2(r) - \cosh^2(r)} \right\} \quad (6.34)$$

e na face da parede com temperatura constante a equação é calculada de modo que

$$q''_{N,l}(t) = -k \left. \frac{\partial [T_m + a\theta(\xi, \tau)]}{\partial x} \right|_{x=l} \rightarrow$$

$$q''_{N,l}(t) = -k \frac{ar}{l} \left\{ \frac{\sin(r) \cosh(r) [\cos(\tau) + \sin(\tau)]}{\cos^2(r) - \cosh^2(r)} + \frac{\cos(r) \sinh(r) [\cos(\tau) - \sin(\tau)]}{\cos^2(r) - \cosh^2(r)} \right\} \quad (6.35)$$

6.6 GRÁFICOS FLUXO DE CALOR

Após compreender os problemas em aplicar o fluxo de calor nas faces da parede, para a solução encontrada pelo método de Duhamel, e ser encontrado um outro caminho para a obtenção do fluxo nas extremidades, tornou viável a construção dos gráficos.

Ainda para os mesmos parâmetros adotados anteriormente, presentes na Tabela 1, foram traçados inicialmente os fluxos $q''_{D,0}(t)$ e $q''_{D,l}(t)$, para um ciclo da temperatura periódica, nesse caso, tempo de 0 à 60 segundos, como pode ser observado na Figura 11.

Assim como nos perfis de temperatura, é possível notar no fluxo de calor a etapa transitória. O que vale destacar nesse caso é que para um tempo muito pequeno o fluxo na face de $x = 0$ tem valores muito alto. Isso acontece devido ao fato de que no tempo inicial a parede toda está na temperatura T_m , adicionado à

circunstância de que a temperatura nessa face, para $t \ll 1$, parte para o valor máximo, $T_m + a$.

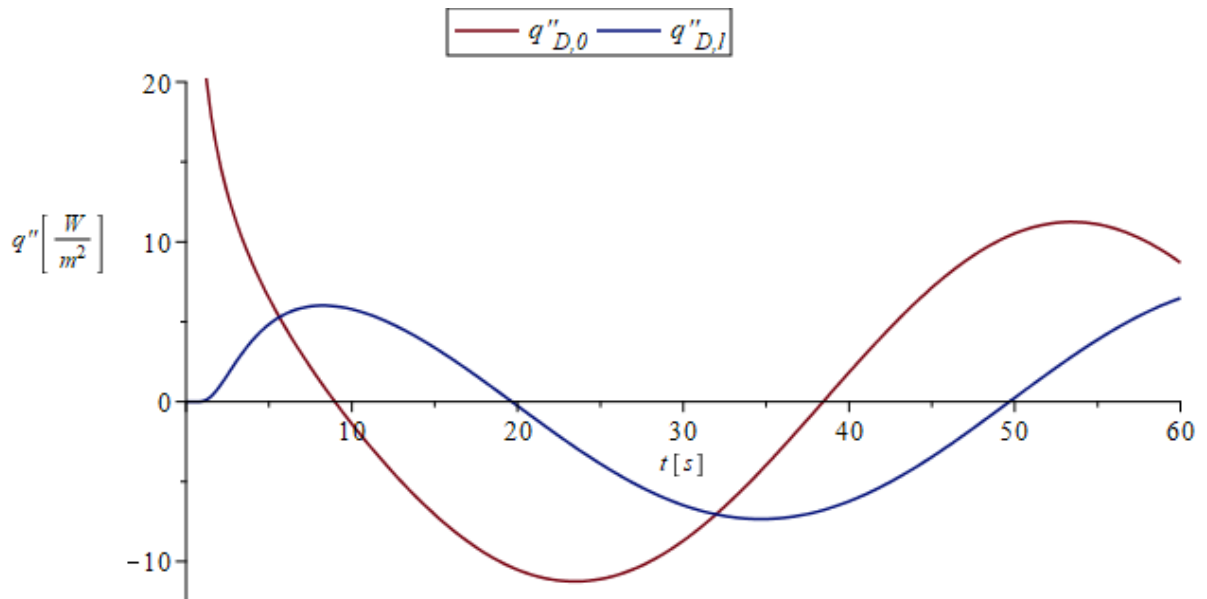


Figura 11 - Fluxo de calor por Duhamel 0 à 60 segundos
Fonte: Autoria própria

Utilizando os mesmos parâmetros, o fluxo de calor também foi construído para as funções $q''_{N,0}(t)$ e $q''_{N,l}(t)$, no mesmo intervalo de tempo, 0 à 60 segundos, demonstrado na Figura 12. Diferentemente dos fluxos anteriores, para esse caso é possível notar a periodicidade diretamente no primeiro ciclo de oscilação da temperatura periódica.

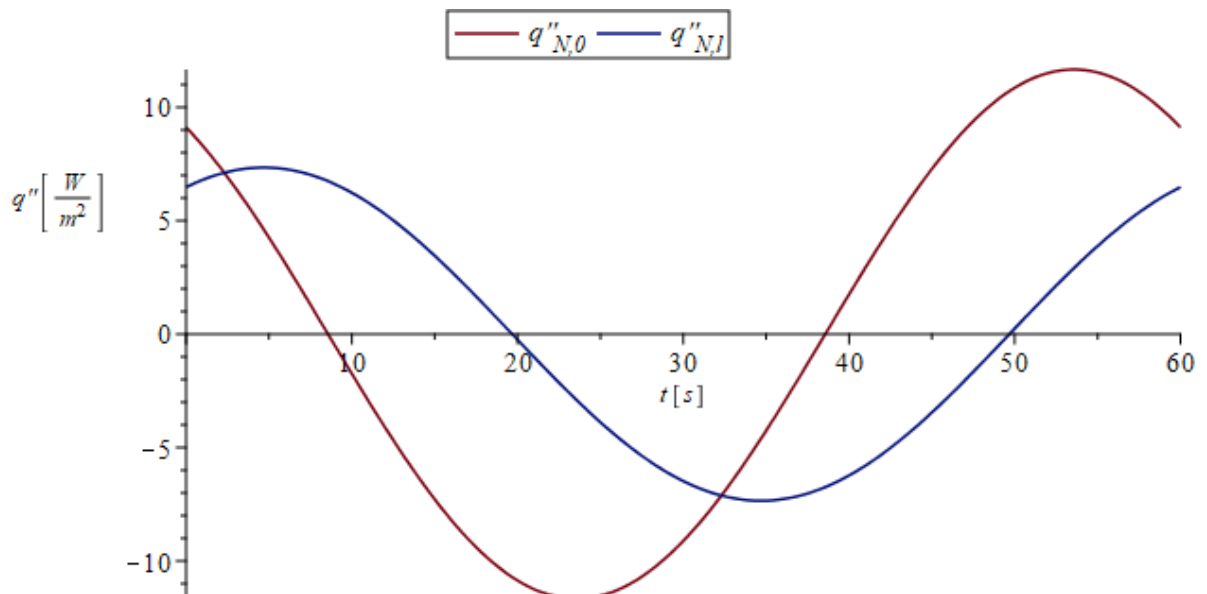


Figura 12 - Fluxo de calor por Naaktgeboren de 0 à 60 segundos
Fonte: Autoria própria

Por fim, ao observar os fluxos de calor $q''_{D,0}(t)$ e $q''_{D,l}(t)$ no intervalo de tempo do segundo ciclo da temperatura periódica, representado na Figura 13, pode-se observar seu comportamento periódico, pois a parede encontra-se em seu período estável.

Ao construir, no mesmo intervalo de tempo, o gráfico para $q''_{N,0}(t)$ e $q''_{N,l}(t)$, indicado na Figura 14, além dele ter mantido seu comportamento igual no primeiro ciclo, é notável também a equivalência com os fluxos encontrados pelo método de Duhamel após ter passado da etapa transitória.

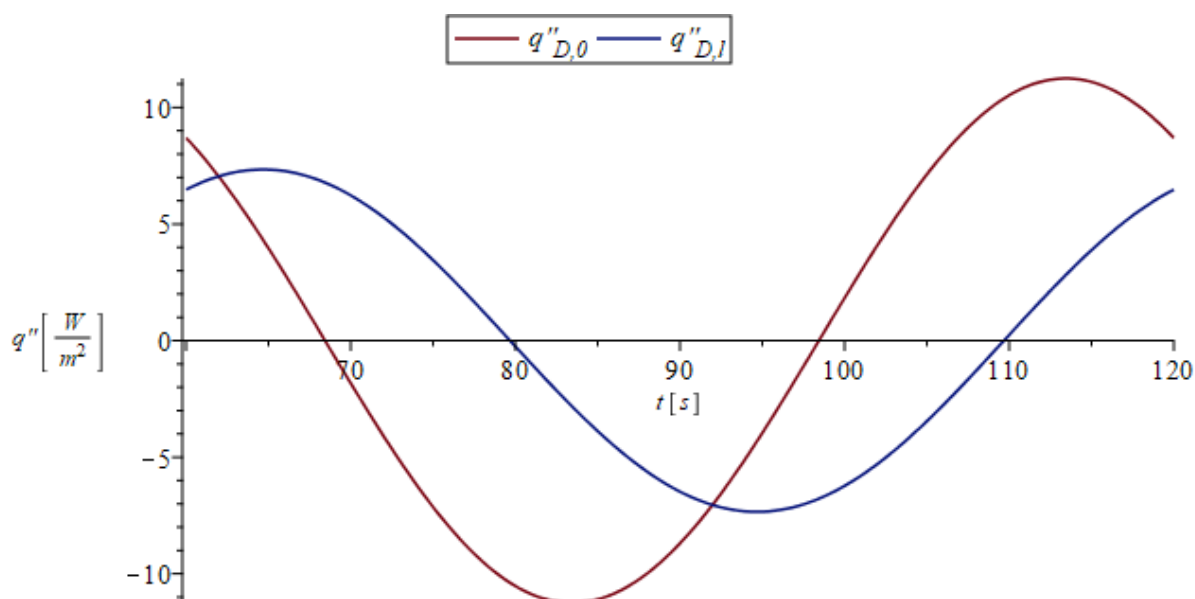


Figura 13 - Fluxo de calor por Duhamel 60 à 120 segundos
Fonte: Autoria própria

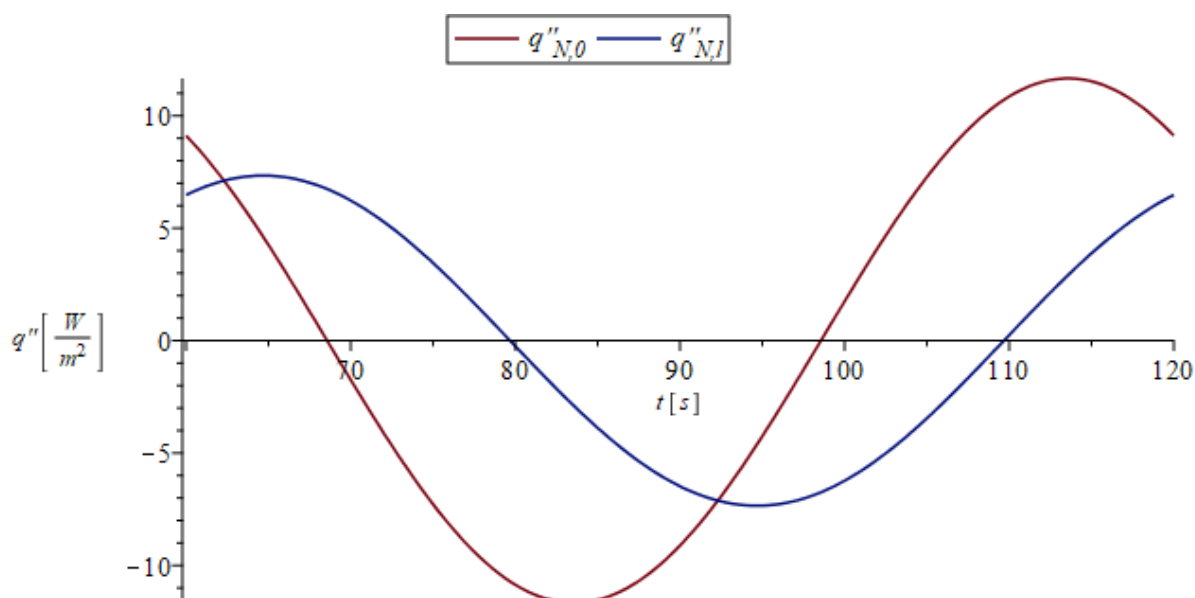


Figura 14 - Fluxo de calor por Naaktgeboren de 60 à 120 segundos
Fonte: Autoria própria

7 CONCLUSÃO

Com esse estudo foi possível avaliar uma solução alternativa para o problema da temperatura de uma parede com uma condição de contorno periódica e outra constante. A solução realizada nesse estudo foi validada através de sua comparação com a outra solução já previamente desenvolvida por Naaktgeboren (2007) baseado no problema periódico permanente.

A aplicação do Teorema de Duhamel para resolver o problema proposto, expandiu o conhecimento do comportamento da parede para a sua região transitória. A utilização desse método torna a resolução do problema prática por conta do equacionamento obtido com o raciocínio que o método aborda para resolver o problema com condição de contorno genérica.

Nesse estudo faz-se uso do método aplicado em apenas uma condição de contorno específica, a qual já havia solução por outro método, porém, o Teorema de Duhamel permite solucionar o problema na parede para diferentes funções na condição de contorno, o que não era possível pelo método anterior.

Por se tratar de um somatório infinito, a solução obtida acarreta em maior consumo de memória computacional para a realização dos cálculos. Foram também encontradas certas limitações ao fazer uma análise mais detalhada nas extremidades da parede, limitações essas que de certa forma puderam ser contornadas.

Diante do exposto, uma oportunidade de trabalho futuro é a realização de uma modelagem de um caso real experimentado pelo PCM em uma de suas aplicações.

REFERÊNCIAS

ARPACI, Vedat S. **Conduction heat transfer**. 1966.

AZAMBUJA, José Alberto; OLIVEIRA, Lucas Souza De. **Materiais de mudança de fase**. In: XI SEPesq—Semana de Extensão, Pesquisa e Pós-Graduação, 2015, Canoas/RS. Anais. Canoas: Centro Universitário Ritter dos Reis, 2015.

BERGMAN, Theodore L. et al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 7. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2014. 672 p.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, c2010. xiv, 607 p.

BUCUSSI, Alessandro A. Introdução ao conceito de energia. **Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física**, 2006.

GRADE, Paulo de Jesus Santos Pedroso da Silva. **Materiais de mudança de fase em revestimentos**. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2013. Dissertação de mestrado.

LOSCHI, P. A.. **Materiais de mudança de fase aplicados no design de tecidos inteligentes**. In: XXVI Prêmio Jovem Cientista, Brasília/DF, 2013.

NAAKTGEBOREN, Christian. **Solution of 1D conduction wall with periodic temperature in one face and constant temperature at the other**. 2007.

ÖZİŞİK, M. Necati; HAHN, David W. **Heat Conduction**, 3 ed. John Wiley & Sons, 2012.

TEIXEIRA, Pedro Miguel Batista. **Materiais de mudança de fase em processos de aquecimento: propriedades**. 2013. Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro.

VITORINO, Nuno Miguel Dias. **Utilização de materiais com mudança de fase em sistemas de acumulação de energia térmica**. 2009. Dissertação de Mestrado.