UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

THIAGO PHELIPPE ABBEG

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO: HISTÓRIA, RESOLUÇÃO NUMÉRICA E TECNOLOGIA EDUCACIONAL

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2015

THIAGO PHELIPPE ABBEG

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO: HISTÓRIA, RESOLUÇÃO NUMÉRICA E TECNOLOGIA EDUCACIONAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Rubens Robles Ortega Junior, Dr.

CURITIBA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

A124e Abbeg, THiago Phelippe
2014 Equações algébricas no ensino médio : história, resolução numérica e tecnologia educacional / Thiago Phelippe Abbeg.-- 2014.
45 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2014.
Bibliografia : f. 44-45.

1. Equações. 2. Álgebra. 3. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). 4. Análise numérica. 5. Professores de matemática - Formação. 6. Prática de ensino. 7. Tecnologia educacional. 8. Software - Matemática. 9. Matemática - Dissertações. I. Ortega Junior, Rubens Robles, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 024

“Equações Algébricas no Ensino Médio: História, Resolução Numérica e Tecnologia Educacional”

por

Thiago Phelippe Abbeg

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 17 de dezembro de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Rubens Robles Ortega Junior, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Profa. Deise Maria Bertholdi Costa, Dra.
(UFPR)

Prof. Luiz Fernando Nunes, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

AGRADECIMENTOS

. À minha querida Mamãe Ana Marise.

. Aos meus irmãos Toy, André e Valéria, e ao Nosso Amigo que sempre estiveram me apoiando.

. À minha Amada Esposa Letícia, por ter passado noites em claro ao meu lado.

. Aos meus colegas pelo companheirismo e amizade nestes anos de estudo e esforço.

. Aos meus professores da UTFPR, que por esses dois anos, estiveram ao nosso lado ensinando e orientando.

. Aos colégios e escolas que trabalhei durante esse período, pela colaboração e compreensão.

. À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

. À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

. Ao meu orientador Rubens pela orientação e produção deste trabalho.

RESUMO

ABBEG, Thiago Phelippe. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO: HISTÓRIA, RESOLUÇÃO NUMÉRICA E TECNOLOGIA EDUCACIONAL. 47 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

O assunto Equações Algébricas é estudado na 3ª Série do Ensino Médio. Basicamente, os estudantes aprendem que, se a equação possui solução racional então esta pertencerá a um conjunto que pode ser estabelecido. No entanto, caso a equação possua alguma raiz irracional, nenhum método é abordado. Além disso, pelo fato de os exemplos praticados serem todos de equações com raízes racionais, muitos estudantes concluem o ciclo básico acreditando que se pode resolver qualquer equação utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini. Com objetivo de completar esta lacuna deixada na formação do estudante, o presente trabalho propõe um recurso mais amplo para o estudo de Equações Algébricas, que combina três ingredientes: visão histórica do tema, implementação de um método numérico simples e eficaz (o da Bisseção), e utilização da Tecnologia Educacional proporcionada pelo aplicativo GeoGebra.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Equações Algébricas, Método da Bisseção, GeoGebra.

ABSTRACT

ABBEG, Thiago Phelippe. ALGEBRAIC EQUATIONS IN SECONDARY EDUCATION: HISTORY, NUMERICAL RESOLUTION AND EDUCATIONAL TECHNOLOGY. 47 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

The Algebraic Equations subject are studied in the High School. Basically, the students learn that, if the equation has rational solution then this will belong to a set that can be established. However, if the equation has some irrational root, no method is approached. Furthermore, because the examples are all practiced with equation with rational roots, many students complete the basic cycle believing that we can solve any equation using the algorithm of Briot-Ruffini. In order to complete this gap left in the student's formation, this work proposes a broader approach to the study of Algebraic Equations, which combines three ingredients: historical overview of the issue, implementing a simple and effective numerical method (of the Bisection) and use of Educational Technology provided by GeoGebra.

Keywords: Teaching of Mathematics, Algebraic Equations, Method of Bisection, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos ainda não conquistaram espaço de destaque na matemática do Ensino Médio. Dos currículos oficiais à prática docente em sala de aula, existem vários caminhos, sobre os quais os métodos se dispersam. O apreço exacerbado à exatidão, a dificuldade dos educandos de realizarem as operações, a própria cultura escolar desarticulada da história da matemática, vêm desagregar ainda mais os conteúdos escolares, que por fim acabam por preencher o espaço do ensino de matemática com conteúdos gerais. Quanto ao ensino de equações, atualmente, esse argumento fica enfraquecido, pois temos à disposição ferramentas como calculadoras e computadores que facilitam o trabalho dos educadores. As resistências mesmo perenes postas e a urgência das necessidades contemporâneas propõem e exigem novas abordagens, outros métodos, sobre problemas antigos.

Cada docente é responsável pela qualidade do ensino da Matemática e isto exige uma preparação adequada de cada aula apresentada aos estudantes, com o intuito de acrescentar algo a sua vida e não somente prepará-los para o vestibular. Tendo em vista esta responsabilidade e trabalhando atualmente com a 3ª Série do Ensino Médio, onde o assunto Equações Algébricas é estudado, nota-se basicamente que os estudantes aprendem que, se a equação possui solução racional então esta pertencerá a um conjunto que pode ser estabelecido. No entanto, caso a equação possua alguma raiz irracional, nenhum método é abordado. Além disso, pelo fato de os exemplos praticados serem todos de equações com raízes racionais, muitos estudantes concluem o ciclo básico acreditando que se pode resolver qualquer equação utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini.

Com objetivo de completar esta lacuna deixada na formação do estudante, o presente trabalho propõe aos docentes do ensino médio, especialmente aos da 3ª Série, um recurso mais amplo para o estudo de Equações Algébricas, que combina três ingredientes: visão histórica do tema, implementação de um método numérico simples e eficaz (o da Bisseção), e utilização da Tecnologia Educacional proporcionada pelo aplicativo GeoGebra.

Como dito em (CARNEIRO, 1999), pode-se utilizar desses preceitos, recursos e tecnologias para desenvolver um ensino de matemática, uma nova matemática, que esteja mais próxima da realidade instrumental dos educandos e professores.

Cita-se a calculadora, assim como a planilha eletrônica, como ferramentas tecnológicas ricas na decisão de problemas, para superar as dificuldades cotidianas que abrangem os conceitos e métodos de equações. Deste modo, é importante imprimir sobre a educação as perspectivas de método para uso dessas ferramentas, aspectos que necessitam ser instigados. Atualmente, temos a educação básica desenrolando-se por doze anos, sem que o educando consiga empregar as funções básicas de uma calculadora, nem aplicar equações numa planilha eletrônica. Esta educação deve ser indagada, passar por um inquérito, tendo visto o avanço cotidiano das tecnologias, necessitando revisitar e reconstruir maneiras de utilizar essas importantes ferramentas.

Mais que compreender o uso das tecnologias, cumpre indagar os caminhos históricos das equações, sua conjunção no ensino brasileiro, o papel dos métodos numéricos (neste caso particular o Método da Bisseção), para culminar no uso das tecnologias para o ensino. Um caminho a ser percorrido para compreender novas formas de utilizar as tecnologias no ensino da matemática.

2 BREVE VISÃO HISTÓRICA DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Ao estudar o campo da resolução dos problemas matemáticos, pode-se lançar mão de inúmeros artifícios, sendo comumente utilizado um retrocesso histórico, partindo das acepções e descobertas que ora possuem uma origem incerta, uma disputa de criação, ou ora um instante de genialidade semelhante a um duelo entre o possível e o tangível.

Partindo dos resquícios na história da matemática, passíveis de equívocos e caminhos tortuosos, dado o estado das fontes históricas e seu preenchimento de lacunas ao longo do próprio processo histórico, podemos situar e compreender toda a problemática posta na presente dissertação. Incita-se que o uso de métodos e tecnologias para a resolução de problemas advém de longa data (VALENTE, 2007; ROQUE, 2008; GARBI, 2007). Neste processo de descoberta, há quase quatro mil e quinhentos anos, em uma cidade ao sul da Síria, uma civilização chamada Ebla principiou os primeiros vestígios de uma equação numa pequena tábua de barro redonda, denominada atualmente de TM75G1693 (MARACCHIA, 2007), observada na Figura 1.

Figura 1: Tábua Ebla - Primeira Inscrição de Equação (MARACCHIA, 2007).

Esta tábua torna-se um importante vestígio para elucidar o caminho da álgebra, pois é o primeiro registro de um mecanismo para a solução de problemas deste ramo da matemática. A evidência em TM75 estabelece uma provável sequência de equações a serem resolvidas, com a compreensão de uma dada incógnita. Em uma proposta, que supõe uma resolução desconhecida, nota-se a construção do conhecimento matemático. Este que se fez presente e determinante na história da humanidade, partícipe das revoluções, mazelas, confrontos e disputas, articulador e destruidor de sociedades. Utilizado na construção e na resolução de problemas cada vez mais complexos, postos à prova de homens de seu tempo.

Os egípcios demonstraram grande afinidade na resolução de problemas. Segundo (TOSCANO, 2012) e (GARBI, 2007), estão presentes entre os documentos históricos particulares da matemática papiros egípcios de reconhecida importância. São estes o Papiro de Moscou (de aproximadamente 1850 a.C.) e o Papiro de Rhind (de aproximadamente 1650 a.C.) que, além de fornecerem informações sobre a produção da matemática egípcia, demonstram de forma minuciosa e retórica, sem a utilização de símbolos para denominação da incógnita, a solução de vários problemas envolvendo as áreas de aritmética, geometria e álgebra, podendo ser considerados os mais reconhecidos documentos matemáticos de seu tempo.

Os matemáticos egípcios construíram métodos de resolução para esse tipo de equação, que veio a ser chamado de método da “falsa posição”, utilizando-se de conceitos de proporcionalidade (GARBI, 2007). Entretanto, nem os papiros egípcios nem as tábuas Ebla revelam o uso de símbolos algébricos. Os problemas e as resoluções estão descritas como redações e as incógnitas, como área, comprimento e largura, são chamadas de “coisas”.

Entre diversos povos da antiguidade, os babilônios, os gregos e os próprios egípcios, já conheciam a resolução de problemas para encontrar dois números, conhecidos sua soma e seu produto, que podem ser escritos como equações do segundo grau.

Em uma tábua babilônica de autoria anônima, de aproximadamente 2.000 a.C., foi encontrado um problema no qual se pede para determinar o lado de um quadrado, em que, subtraída da área a medida do próprio lado, resulta 870 (TOSCANO, 2012, p. 59). A resolutiva desta tábua aponta para uma receita, que equivale atualmente à fórmula de resolução de equação do segundo grau ensinada a nossos alunos. Porém, não foram encontrados, nem em egípcios nem nos babilônicos, qualquer menção às soluções negativas, uma vez que não existia esse conceito (ROQUE, 2008; TOSCANO, 2012; LIVIO, 2008).

Segundo (ASSIS; OLIVEIRA, 2012), algumas dessas tábuas ilustram como se resolviam equações algébricas de grau 2, pelo método de completar quadrados, e também como se discutiam algumas equações algébricas de grau 3 e biquadradas. A existência de uma tábua babilônica com uma tabela dos valores dos quadrados e cubos dos números inteiros de 1 a 30, além dos valores de $n^2 + n^3$, mostra alguns problemas que levam a equações da forma $x^3 + x^2 = b$, e que eram resolvidos utilizando a tábua de $n^2 + n^3$.

Ao se resolver um problema do tipo: “Somei o volume e o dobro de uma superfície do meu cubo e obtive como resultado 3136, encontre o comprimento do lado” (ASSIS; OLIVEIRA, 2012), a equação equivalente a esse problema é $x^3 + 2x^2 = 3136$ e sua resolução, feita através da Figura 2, dá 14.

n	n^2	n^3	$n^2 + n^3$	$n^3 + 2n^2$
1	1	1	2	3
2	4	8	12	16
3	9	27	36	45
4	16	64	80	96
5	25	125	150	175
6	36	216	252	288
7	49	343	392	441
8	64	512	576	640
9	81	729	810	891
10	100	1000	1100	1200
11	121	1331	1452	1573
12	144	1728	1872	2016
13	169	2197	2366	2535
14	196	2744	2940	3136
15	225	3375	3600	3825
16	256	4096	4352	4608
17	289	4913	5202	5491
18	324	5832	6156	6480
19	361	6859	7220	7581
20	400	8000	8400	8800
21	441	9261	9702	10143
22	484	10648	11132	11616
23	529	12167	12696	13225

Figura 2: Resolução da equação $x^3 + 2x^2 = 3136$ (Adaptado de (ASSIS; OLIVEIRA, 2012)).

Na Grécia tivemos os avanços de Diofanto de Alexandria, que viveu em meados de 250 a.C., muitas vezes chamado pai da álgebra, autor de uma coleção de 16 livros chamada de Aritmética (TOSCANO, 2012). Muitos desses livros se perderam, porém os que ficaram trazem a resolução de equações algébricas sem um apego geométrico, como muitos pensadores gregos faziam na época. Diofanto também trabalhava com potências superiores a três, que não eram consideradas por outros pensadores gregos, por não terem aplicações geométricas. Diofanto também utilizou abreviações e símbolos algébricos.

Dentre os estudos persas sobre matemática podemos citar os trabalhos de al-Khwarizmi, um dos principais matemáticos persas que viveu entre os séculos VI e VII. Um de seus trabalhos, que traz um compilado de regras de resolução clara e precisa de equações quadráticas, influenciou durante muitos séculos a matemática em toda a Pérsia e a Europa (TOSCANO, 2012; GARBI, 2007).

O próximo momento que estabeleceu grande fervor foi a Renascença, que é um dos termos empregados para identificar o momento da História entre a conclusão do século XIII e a metade do século XVII. Empregou-se esse termo em relação à semelhança da descoberta e valorização da cultura da era Greco-Romana, que orientaram as transformações desta época em rumo de uma ideia do ser mais humanista e naturalista.

Nessa época, o desenvolvimento da matemática decorreu de assumir parte da responsabilidade do progresso de toda ciência. No século XV, observa-se um grande acréscimo na "fabricação" de trabalhos no ramo da matemática. Alguns fatos históricos foram de extrema importância para isso ocorrer: a queda de Constantinopla, que difundiu grande parte do conhecimento até então, as grandes navegações e a invenção da imprensa, que permitiu que a publicação de livros se tornasse muito mais fácil e aumentasse a difusão das obras.

No entanto, a matemática das faculdades era bem diferente, recheada de abstrações, tinha base na refinada geometria de Euclides e buscava a harmonia. Mas havia também a preocupação com a matemática utilitária com serventia ao exercício das profissões. Assim, a proposta pedagógica das cidades italianas da época era dirigir os alunos para duas áreas: a das letras, como literatura e línguas, e a da escola de cálculo, destinada à matemática para o mercado (TOSCANO, 2012).

Naquela época os duelos matemáticos eram conhecidos por estarem na moda. Eles funcionavam da seguinte maneira: um estudioso mandava a outro diversas questões e este, desafiado, devia procurar resolvê-las em um certo tempo, mandar as resoluções e propor suas próprias questões.

Estes duelos não valiam apenas para prestígio, pois os vencedores ganhavam prêmios em dinheiro, novos alunos e aquisição de cadeiras em faculdades.

Muitos matemáticos e também não matemáticos participaram de disputas intelectuais. Entre eles, o famoso matemático Leonardo Fibonacci descreve em suas obras alguns problemas enviados a ele por estudiosos de Palermo.

Um de nossos protagonistas que disputou duelos foi Nicolo Tartaglia que nasceu em Bréscia, cidade ao norte da Itália, provavelmente no ano de 1499. Quando Nicolo tinha 13 anos de idade, sua cidade foi invadida por tropas francesas e, para se proteger, abrigou-se na igreja junto com sua irmã e sua mãe. Porém, foram encontrados, e Nicolo foi ferido na cabeça. Sua mãe cuidou de suas feridas, que acabaram em cicatrizes. Por conta dos graves ferimentos, Nicolo passou a ter problemas na fala (gagueira), de onde provém seu apelido Tartaglia, que ele acabou adotando como sobrenome.

Com relação aos estudos, por volta de 5 ou 6 anos de idade foi mandado a uma escola que o ensinou a ler e, por volta dos 14 anos, aprendeu a escrever. Como autodidata começou a se dedicar a estudos da matemática a partir dos 15 anos. Como diversos livros que compunham as referências matemáticas da época eram escritos em latim, Nicolo se viu obrigado a aprender também este idioma.

Segundo (TOSCANO, 2012), entre 17 e 19 anos Tartaglia mudou-se para Verona e, com 20 anos, casou-se com Domenica, uma mulher de 34 anos e com uma filha de 8 anos. Passado algum tempo, o casal teve uma filha, que se chamou Margherita. Nicolo sustentava sua família atuando como professor de cálculo, naquela época chamado professor de matemática prática.

A fama de Nicolo como professor de matemática, e a baixa remuneração que recebia, fazia com que ele atuasse como consultor de engenheiros, mercadores, arquitetos, que o procuravam quando lhes faltava solução para uma questão de matemática.

Em 1530, um duelo aguardava Nicolo. Um professor de matemática da Bréscia, Zuanne de Tonini da Coi, propôs-lhe diversos problemas, como por exemplo: "Ache um número que, multiplicado pela sua raiz mais 3, dê 5". Nicolo compreendeu que os problemas de Zuanne resultavam em uma equação do terceiro grau, que até então não possuía fórmula geral para sua solução, salvo em casos particulares, sendo que a possibilidade de sua existência havia sido negada por alguns matemáticos ilustres da época. Nicolo começou a meditar sobre o assunto.

Aos 35 anos Nicolo se mudou para Veneza e, três anos depois, lecionava desde a geometria de Euclides até balística. Suas atividades e fama aumentaram, a ponto de ser desafiado publicamente por Antônio Maria Fior, professor de matemática também em Veneza, para um duelo.

Nicolo e Fior se propuseram cada um 30 questões e, para cada problema não resolvido, o perdedor devia pagar a conta de um banquete em uma cantina. Nicolo resolveu todas as trinta questões de Fior em algumas horas, enquanto seu adversário não apresentou solução para nenhuma questão de Tartaglia.

O fato de Nicolo haver conseguido resolver as questões propostas por Fior se deveu a que estas levavam a equações cúbicas da forma $x^3 + bx = c$, cuja fórmula resolutiva havia sido deduzida por Nicolo pouco tempo antes.

Outro de nossos protagonistas na descoberta da fórmula resolutiva da equação do terceiro grau é Gerolamo Cardano. Seu pai, Fazio, era um jurista e consultor de Leonardo da Vinci quando este precisava de esclarecimentos sobre matemática. Fazio, quando ainda solteiro, conheceu uma viúva, Chiara Micheri, e teve um filho, Gerolamo, que cresceu entre doenças e pestes, que levaram seus irmãos e que quase também o levaram. Com muita frequência era maltratado pelos seus pais. Começou cedo a ter lições de escrita e aritmética e aos 12 anos já estudara 6 livros dos Elementos de Euclides.

Aos 19 anos iniciou o curso de medicina na faculdade de Pávia. Além de ir muito bem nos estudos, Gerolamo foi convidado a lecionar geometria, dialética e metafísica. Aos 22 anos mudou-se para Veneza e continuou seus estudos na Universidade de Pádua e, com 23 anos, obteve o titulo de bacharel em medicina e filosofia. Um ano depois foi eleito decano dos estudantes da Universidade de Pádua, cargo que lhe deu grande influência. Todavia lhe faltava dinheiro e, como já gastara grande parte da herança de seu pai, falecido há um ano, Gerolamo começou a ganhar dinheiro com jogos de azar.

Com 30 anos Gerolamo mudou-se para Sacco, perto de Pádua, onde exercia medicina e vivia uma vida tranquila. Lá conheceu Lucia Bandareni, com a qual se casou e teve três filhos: Giovanni, Chiara e Aldo. Gerolamo também destinava seu tempo a estudos sobre magia, horóscopo e adivinhações (TOSCANO, 2012).

Com 31 anos, após o casamento, Gerolamo mudou-se novamente para Milão para conseguir novos empregos. No início, teve dificuldades para conseguir trabalho. Começou a trabalhar após encontrar um diplomata milanês, que lhe deu o emprego que era de seu pai, de professor de Aritmética. Tempos depois obteve novamente emprego como médico, até chegar a ser reitor do Colégio de Medicina de Milão.

Gerolamo publicava artigos em diversas áreas, desde jogos de azar até matemática prática. Este último tema lhe despertou mais interesse quando, ao receber o visitante Zuanne de Tonini da Coi, ficou sabendo que em Veneza Nicolo havia descoberto uma fórmula geral para a resolução de uma equação de terceiro grau.

Após vasta troca de cartas entre Gerolamo e Nicolo, onde Gerolamo solicitava que Tartaglia revelasse sua maravilhosa descoberta, Nicolo cedeu aos apelos e, por meio de um poema, indicou a Cardano como proceder:

> “Quando o cubo somado com as coisas
> Se iguala a algum número discreto
> Encontra nele outros dois diferentes.
> Depois verás, num procedimento usual,

> Que o produto deles é sempre igual
> Ao terceiro cubo das coisas exato,
> O resíduo, então, geral
> De suas raízes cúbicas subtraídas
> Será o valor da tua coisa principal.
> No segundo desses atos
> Quando o cubo fica sozinho
> Aplicarás esses outros contratos,
> Do número farás duas partes, de modo
> que, multiplicando uma pela outra, surja exato
> O terceiro cubo das coisas em conjunto.
> Delas, depois, com procedimento usual,
> Somarás as raízes cúbicas
> E esse total será o resultado final.
> A terceira dessas nossas contas
> Resolve-se por meio da segunda, se olhares bem,
> Porque por natureza são quase parentes.
> Achei esses, e não com passos lerdos
> Em mil quinhentos, quatro e trinta
> Com fundamentos bem sólidos e robustos
> Na cidade circundada pelo mar." (TOSCANO, 2012, p.154)

Porém, mesmo assim, Gerolamo não conseguiu decifrar a fórmula, precisando de mais explicações. Desta forma, Nicolo lhe mostrou através de carta a resolução de algumas equações de terceiro grau. Nicolo talvez tenha feito isso pela influência política que Gerolamo tinha com o governador de Milão. Entretanto, existia a promessa formal de Cardano de não divulgar a fórmula até que Nicolo a publicasse.

Contudo, Nicolo Tartaglia não foi o primeiro a resolver equações do terceiro grau por meio dos seus coeficientes. O bolonhês Scipione del Ferro já havia descoberto a fórmula alguns anos antes, porém a guardou em segredo para ser utilizada como vantagem em duelos, repassando-a a apenas a seus aprendizes, como foi Fior. Quando descobriu isso, Gerolamo Cardano se considerou desligado da promessa feita a Tartaglia sobre a não publicação da fórmula.

Com grande ajuda de seu discípulo Ferrari, Cardano publicou os resultados obtidos no campo da Álgebra em sua obra "Grande Arte".

Na Figura 3, temos o trecho que Cardano cita a importância da obra de Tartaglia para a resolução destes problemas. Mesmo com os elogios de Cardano, Nicolo ficou indignado com a quebra da promessa deste, e publicou, um ano depois, seu livro *Quesitos et inventioni*

CAPVT XI.

De Cubo & rebus æqualibus Numero.

SCIPIO Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta fermè capitulum hoc inuenit, tradidit verò Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cùm in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellense aliquando venisset, occasionem dedit, vt Nicolaus inuenerit & ipse, qui cum nobis rogantibus tradidisset, suppressâ demonstratione, freti hoc auxilio, demonstrationem quæsiuimus, eámque in modos, quod difficillimum fuit, redactam sic subiiciemus.

Figura 3: Trecho de Ars Magna (CARDANO, 1545).

diverse (Figura 4), que pode ser traduzido como *Questões e invenções diversas*. Neste livro, ao tratar das questões propostas por Fior, Tartaglia relata a promessa quebrada por Cardano, de não publicar antes dele a sua descoberta. Este fato provocou forte reação de Ferrari, discípulo de Cardano.

di in Milano alli.12.di Marzo.1539.

Hieronimus Cardanus Medicus totus uester.

NICOLO. *Honorandißimo messer Hieronimo ho riceputo una uostra insieme con una delle uostre, opere della quale ue ne ringratio, & quantunque al presente non habbia tempo di poterla uedere ordinnariamente come si de, si per esser molto occupato nella ispeditione di Euclide si per esser anchora mezzo amalato, nondimeno ui ho dato una occchiata cosi disligata, & ho guardato quel uostro modo di formar el rotto di quello residuo che rimane nella estratione della radice cuba al.23 capi.alla carta signata D.iiij.doue che uostra eccellentia uole che si metta quel detto residuo che auanza nella estratione delle radice cube, sopra una uirgula per numeratore, & di sotto di tal uirgula quella uole che si ue metta el treppio del quadrato della radice per denominatore nella qual cosa uostra eccellentia erra tanto de grosso che me ne stupisco, perche cadauno che hauesse solamente mezzo un'occhio lo potria uedere, & sel non fusse che quella con essempij la ua replicando io haueria giudicato che fusse errore di stampa, & che el sia el uero che tal uostra regola sia falsißima se puo conoscere uolendo cauar la Radice cuba propinqua de.24.la quale primamente saria.2. & auanzaria.16.el qual.16.partēdolo per el treppio del quedrato del.2.(qual saria.12.)ne uenira.1.$\frac{1}{3}$. qual gionto con la prima radice, cioe con.2.fara.3.$\frac{1}{3}$.& cosi secondo tal uostra rego*

Figura 4: Trecho de *Quesitos et inventioni diverse* (TARTAGLIA, 1554).

Uma vasta troca de folhetos entre Ferrari e Tartaglia continuou com regularidade de junho a outubro de 1547. Tartaglia tentava demonstrar a desonra de Cardano por não ter cumprido o juramento. Por outro lado, Ludovico Ferrari mantinha a sua posição de que o livro de Tartaglia não continha os fatos corretos, que estavam distorcidos. Depois de seis folhetos de Ferrari e outros tantos de Tartaglia, o desfecho desse embate ocorreu em Milão, na igreja de Santa Maria do Jardim. Muitas pessoas foram assistir ao duelo, dentre elas grandes personalidades de Milão.

Cardano não compareceu a esse duelo, deixando-o a cargo de seu discípulo Ludovico Ferrari. Por não se ter um registro oficial do encontro, não se sabe ao certo o que realmente ocorreu no duelo. Sabe-se que, no segundo dia, Tartaglia se retirou do evento alegando que o público ali presente não o deixara falar.

Provavelmente devido às repercussões do embate, Ferrari recebeu diversas propostas de emprego, desde uma cátedra em Roma até um convite para servir o imperador Carlos V como professor de seu filho. Oito anos depois, por problemas de saúde, mudou-se para Bolonha, onde foi morar com sua irmã. Em 1564 foi chamado para uma cátedra do liceu local. Morreu jovem, aos 40 anos, provavelmente envenenado por sua irmã (TOSCANO, 2012, p. 228).

Por sua vez, Nicolo Tartaglia perdeu o emprego de docente na Bréscia e voltou a seu emprego de professor de cálculo em Veneza. Em sua vida venceu muitos duelos matemáticos, entretanto o último foi mortal. Tartaglia publicou parte de seu livro o "Tratado Geral de Números e Medidas" em 1556, e morreu em 13 de dezembro de 1557, na solidão e na miséria, deixando outras quatro partes desta obra para publicação póstuma.

O seu último livro, o Tratado Geral, é uma grande enciclopédia de matemática, que teve grande difusão após a morte do autor. Nesta obra encontra-se a famosa tabela que na Itália recebe o nome de "triângulo de Tartaglia", e que em quase todo o mundo é conhecida com "triângulo de Pascal".

Gerolamo Cardano aproveitou-se de conhecimentos de outros e, graças a isso, publicou diversos livros sobre quase todos os assuntos de sua época. Sua competência no exercício da medicina era reconhecida, pois recebeu até propostas para ser médico de reis e Papas. Apesar de toda essa glória, em 1560 teve o infortúnio de ver seu primeiro filho ser condenado à morte por haver envenenado a esposa. Por causa dos boatos, Cardano se mudou para Bolonha, onde obteve a cátedra de medicina local. Passou por mais desgraças, quando denunciou seu filho mais novo por roubo de dinheiro e jóias.

Cardano foi preso por heresia, condenação aplicada pela Inquisição. Não se tem conhecimento das acusações, mas pode-se supor que foi por obras como "o Horóscopo de Jesus" ou "um Elogio a Nero". Depois de solto, foi proibido de publicar livros. Dois anos depois mudou-se para Roma e se aposentou, levando uma vida retirada e dedicando-se a sua autobiografia. A morte o levou em 20 de setembro de 1576, três anos depois da data que ele havia previsto para sua própria morte (5 de dezembro de 1573).

Para conseguirmos ir além das equações de grau quatro, a busca inicia com Paolo

Ruffini, também médico e matemático, nascido em Valentano, Itália, no dia 22 de setembro de 1765. Paolo realizou seus estudos de matemática e medicina na Universidade de Modena, onde recebeu o grau de doutor (LIVIO, 2008).

Com 23 anos, Paolo foi escolhido como professor de análise. No ano de 1791, chegou à cátedra de matemática elementar. Entretanto, não deixou de lado a dedicação pelo estudo e pela prática da medicina.

Em 1802, Ruffini recebeu medalha de ouro por sua dissertação, cujo tema era um método de aproximação das raízes de equações. Após alguns anos, Paolo Ruffini rejeitou a cátedra de matemática em Pávia, pois não queria abandonar sua prática como médico. Porém, em 1806, aceitou uma cadeira de matemática na escola militar recém criada. Oito anos depois, Francisco IV de Módena escolheu Paolo como reitor e também como professor de medicina e matemática.

Em 1813, Ruffini demonstrou a impossibilidade de resolver algebricamente uma equação de quinto grau completa, sobre a qual escreveu vários livros, e também demonstrou a impossibilidade da quadratura do círculo.

Outro matemático que realizou grande contribuição no campo das equações algébricas foi Niels Henrik Abel, norueguês, nascido em 5 de agosto de 1802. Sua contribuição de maior importância foi a primeira prova rigorosa de que não é possível resolver uma equação de quinto grau completa em função de seus coeficientes, problema que desde Ferrari não havia sido resolvido.

O pai de Niels Henrik Abel era pastor e tinha formação em teologia e filosofia. Abel e seus irmãos não frequentaram a escola regular, porém seu pai passava a eles lições de letras e matemática.

Com 13 anos de idade, Abel entrou na Escola Catedral e seu irmão mais velho entrou um ano após. Eles repartiam o mesmo dormitório e tiveram algumas aulas juntos. Entretanto, o professor, Bernt Michael Holmboe, viu a propensão de Niels Abel para estudos na matemática e começou a incentivar Niels a se dedicar cada vez mais, dando-lhe apoio inclusive em encontros depois das aulas.

Segundo (LIVIO, 2008), com 19 anos Abel entrou na universidade, já sendo um notável matemático e de destaque na Noruega. Seu professor não tinha mais nada que soubesse ensinar a Niels. Nisso, Abel iniciou um estudo das equação do quinto grau. Abel inicialmente pensou que havia encontrado a solução para a equação do quinto grau em função de seus coeficientes, porém ele mesmo descobriu um erro em seu desenvolvimento.

Abel demonstrou que não existe uma regra geral para determinar a solução de uma equação de grau superior a quatro e, para isso, desenvolveu a teoria de grupos de forma independente de Galois.

Depois de uma viagem de estudos e visitas a matemáticos da Alemanha e da França, Abel publicou seu primeiro trabalho notável em 1824, "Memória sobre equações algébricas", onde a impossibilidade de resolver a equação geral do quinto grau é comprovada.

Abel contraiu tuberculose e faleceu no dia seis de abril de 1829.

O interesse de Évariste Galois pela política partiu de seu pai, Nicolas Gabriel Galois, que acabou sendo prefeito de Bourg-la-Reine, uma comunidade ao sul de Paris. Nicolas Gabriel tinha prestígio por ser erudito e cortês, sendo venerado pela pequena população da comunidade que era prefeito.

Aos dezesseis anos Galois iniciou estudos em um curso específico de matemática e, por sua grande genialidade, seus conhecimentos matemáticos imediatamente excederam aos dos seus professores. Assim, tornou-se autodidata, estudando livros escritos pelos maiores matemáticos daquele período, e absorvendo conceitos mais modernos. Com dezessete anos, escreveu e publicou um pequeno artigo nos Annales de Gergonne, primeira revista de grande importância em matemática.

De gênio impulsivo e ousado, Galois adquiriu a antipatia dos seus professores e de seus colegas e, quando tentou admissão para a École Polytechnique, o mais conceituado colégio da França, seus modos grosseiros e a carência de esclarecimentos no teste oral fizeram com que sua admissão fosse negada.

Não se deixando abater por suas reprovações, Galois permaneceu confiando em seu talento para a matemática. Assim, continuou suas investigações com empenho na procura das raízes de determinadas equações, como as equações do quarto e do quinto graus.

Cauchy ficou admirado com o trabalho de Galois, e o indicou para participar de uma competição da Academia. O trabalho de Galois não proporcionava a solução para as equações de grau cinco, porém dava uma noção formidável que até diversos matemáticos, inclusive Cauchy, avaliavam-no como o possível vitorioso. No entanto, para surpresa de todos, o trabalho não recebeu o prêmio porque não havia sido oficialmente inscrito. Fourier, que ficara responsável de receber os trabalhos, morrera algumas semanas antes da deliberação dos juízes. O trabalho jamais foi achado e a injustiça foi historiada por um jornalista. O prêmio foi concedido a Abel e a Jacobi.

Évariste Galois considerava que seu trabalho fora extraviado de propósito, por questões políticas da Academia. No ano seguinte, outro trabalho foi rejeitado, sob alegação de que o desenvolvimento não era claro o suficiente para ser avaliado com precisão. Galois concluiu então que existia uma conspiração para não incluí-lo na Academia de Matemática. Évariste passou, então, a dar menos importância aos seus trabalhos matemáticos, e a se dedicar mais à luta pela causa republicana (LIVIO, 2008).

Nessa época, Évariste estudava na École Normale Supérieure, e cada vez se tornava mais crítico político do que matemático. Na revolução de 1830, quando Carlos X escapou da França e revoltas políticas agitavam as ruas de Paris, Évariste foi trancado, como os demais alunos, em seus quartos, para que eles não pudessem lutar. Seu fervor aumentou quando a revolta dos republicanos terminou em derrota. Depois desse evento Évariste foi expulso da escola, pois escreveu uma carta com tom satírico, fazendo acusações ao diretor do colégio.

Segundo (LIVIO, 2008), Évariste se tornou republicano ferrenho, chegando a ser preso e enviado ao presídio de Sainte-Pélagie por quase um mês, sob acusação de ameaça à vida do rei. Foi absolvido em seu julgamento, pois a ameaça havia sido feita em um banquete agitado e ninguém foi capaz de fazer uma acusação direta.

Um mês depois, Galois foi novamente levado à prisão com uma sentença de seis meses. Percebendo um retraimento dos seus amigos e de sua família, juntamente com a frequente rejeição de seus trabalhos sobre matemática, Évariste entrou em depressão e, unindo-se à bebida, chegou a tentar o suicídio.

O que aconteceu nas semanas seguintes está relacionado a Stéphanie Félice Poterinedu, uma moça que estava comprometida com Pescheux d'Herbinville e tinha um caso com Évariste.

Após descobrir que Stéphanie era infiel, Pescheux desafiou Évariste para um duelo real ao início do dia. Como Évariste tinha conhecimento sobre a habilidade com armas de seu desafiante, resolveu, na noite que antecedeu ao duelo, escrever aos seus amigos:

> Eu peço aos patriotas, meus amigos, que não me censurem por morrer por outro motivo que não pelo meu país. Eu morri vítima de uma infame namoradeira e dos dois idiotas que ela envolveu. Minha vida termina em consequência de uma miserável calúnia. Ah! Por que tenho que morrer por uma coisa tão insignificante e desprezível? Eu peço aos céus que testemunhem que foi apenas pela força e a coação que eu cedi à provocação que tentei evitar por todos os meios (LIVIO, 2008).

Évariste trabalhou durante toda sua última noite em vida, no teorema que explicaria a impossibilidade de resolver equações de grau cinco. Este trabalho era um apanhado dos trabalhos enviados a Cauchy e Fourier. Ao final Évariste escreveu uma carta com explicações a Auguste Chevalier, que era seu amigo, com pedidos que aquele trabalho fosse enviado aos grandes matemáticos da época.

> Meu Querido Amigo: Eu fiz algumas novas descobertas em análise. A primeira se refere à teoria das equações do quinto grau e as outras, a funções integrais. Na teoria das equações eu pesquisei as condições para a solução de equações por radicais. Isto me deu a oportunidade de aprofundar esta teoria e descrever todas as transformações possíveis em uma equação, mesmo que ela não seja resolvida pelos radicais. Está tudo aqui nesses três artigos... Em minha vida eu frequentemente me atrevi a apresentar ideias sobre as quais não tinha certeza. Mas tudo que escrevi aqui estava claro em minha mente durante um ano e não seria do meu interesse deixar suspeitas de que anunciei um teorema dos quais não tenho a demonstração completa. Faça um pedido público a Carl Gustav Jakob Jacobi ou Gauss para que dêem suas opiniões, não pela verdade mas devido à importância desses teoremas. Afinal, eu espero que alguns homens achem valioso analisar esta confusão. Um abraço caloroso (LIVIO, 2008).

Naquela quarta-feira, 30 de maio de 1832, Évariste estava sozinho quando foi baleado no estômago. Seu irmão apenas chegou horas depois do ocorrido e, mesmo levando Évariste ao hospital, já era tarde demais. Évariste Galois faleceu no dia seguinte.

As contribuições de Galois para a matemática foram publicadas na íntegra na edição de outubro-novembro de 1846 do Jornal de Mathématiques Pures et Appliquées. Seu mais famoso resultado foi que a equação de grau cinco não pode ser resolvida por radicais. Ainda que Abel tenha demonstrado a impossibilidade de solução por radicais em 1824, e Ruffini em 1799 (contendo falhas), os métodos de Galois levaram a pesquisas aprofundadas no que hoje é chamado de Teoria de Galois (LIVIO, 2008). Recomendamos a referência (SILVA, 1984) para outros interessantes elementos sobre a vida de Galois.

3 SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POR MEIO DE SEUS COEFICIENTES

A equação geral de grau 1 tem a forma $ax+b=0$ e resolve-se facilmente, com operações algébricas, obtendo-se que $x=-b/a$.

A equação algébrica do segundo grau da forma $ax^2+bx+c=0$ resolve-se da seguinte maneira: Multiplicamos cada lado da igualdade por $4a$, e obtemos

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0.$$

Agora, somando b^2 em cada lado tem-se

$$4a^2x^2+4abx+b^2+4ac=b^2.$$

Fatorando o quadrado perfeito tem-se

$$(2ax+b)^2+4ac=b^2.$$

Isolando $(2ax+b)^2$, chega-se a

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

e, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, encontra-se

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}.$$

Finalmente,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Outra maneira de interpretar a equação do segundo grau é encontrar dois números conhecidos sua soma e seu produto, isto é, encontrar x e y tais que:

$$\begin{cases} x + y = S \\ x \,.\, y = P \end{cases}$$

Esse sistema equivale a $x^2 - Sx + P = 0$, que tem como solução

$$x = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

e

$$y = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}.$$

Existem diferentes formas de demonstrar a fórmula de resolução de uma equação de grau 3 (BASTOS, 1980) (JUNIOR, 2013) (QUEIROZ, 2013) (SANTOS, 2013) (SCHUVAAB, 2013).

Iniciamos a resolução da equação do terceiro grau fazendo uma mudança de variável. A partir da forma geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazendo $x = m + n$, a nova equação fica

$$a(m+n)^3 + b(m+n)^2 + c(m+n) + d = 0,$$

$$a(m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3) + b(m^2 + 2mn + n^2) + c(m+n) + d = 0,$$

$$am^3 + 3am^2n + 3amn^2 + an^3 + bm^2 + 2bmn + bn^2 + cm + cn + d = 0,$$

$$am^3 + m^2(3an + b) + m(3an^2 + 2bn + c) + (n^3a + bn^2 + cn + d) = 0.$$

Para eliminar o termo que possui m^2, faz-se $3an + b = 0$, ou seja, $n = -b/3a$, chegando a uma equação da forma $m^3 + pm + q = 0$. Resolvendo esta equação em m, encontra-se o valor de x, que é $x = m + n = m - b/3a$.

Portanto, basta resolver uma equação do tipo $m^3 + pm + q = 0$. Para isto, consideremos que m é da forma $m = A + B$. Logo,

$$m^3 = (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B),$$

$$m^3 = A^3 + B^3 + 3ABm,$$

$$m^3 - 3ABm - (A^3 + B^3) = 0.$$

Assim, $p = -3AB$ e $q = -(A^3 + B^3)$ e, portanto,

$$A^3 + B^3 = -q$$

e

$$A^3B^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Podemos interpretar estas igualdades como conhecidos a soma e o produto de dois números, A^3

e B^3, que tem como solução

$$A^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2}$$

e

$$B^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2}.$$

Como $m = A + B$, tem-se

$$m = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2}},$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Esta fórmula, que foi a mais importante descoberta matemática do século XVI, aparentemente apresenta apenas uma raiz. Ocorre que existem três números complexos cujo cubo dá

$$A^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

(digamos, A_1, A_2, A_3) e outros três cujo cubo dá

$$B^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

(digamos, B_1, B_2, B_3). Como o produto de qualquer par A_iB_j que compõe uma solução é tal que $A_iB_j = AB = \frac{-p}{3}$, deduzimos que a fórmula fornece, realmente, as três raízes da equação $m^3 + pm + q = 0$, pois, escolhido i, o j fica automaticamente determinado. Uma vez que a equação em m esteja resolvida, as raízes da equação original em x são obtidas a partir da mudança $x = m - b/3a$.

Para a equação de quarto grau que tem forma geral $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$, Ferrari descreve o método que deve ser seguido. Primeiro, utiliza-se a mudança de variável $y = x - \frac{b}{4a}$ para encontrar uma equação $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, sem o termo x^3. Agora, a ideia é reagrupar os termos de modo a escrever dois quadrados perfeitos, isto, é devemos encontrar α e β de forma que

$$\begin{aligned}
x^4+px^2+qx+r &= 0,\\
x^4+px^2+r &= -qx,\\
x^4+px^2+r+\alpha x^2+\beta &= -qx+\alpha x^2+\beta,\\
x^4+(p+\alpha)x^2+(r+\beta) &= \alpha x^2-qx+\beta.
\end{aligned}$$

Para que cada trinômio seja quadrado perfeito, cada discriminante deve ser igual a zero, isto é, deve satisfazer o sistema

$$\begin{cases} (p+\alpha)^2 & - & 4(r+\beta) & = & 0\\ q^2 & - & 4\alpha\beta & = & 0.\end{cases}$$

Isolando β na segunda equação e substituindo na primeira, temos

$$(p+\alpha)^2-4\left(r+\frac{q^2}{4\alpha}\right)=0.$$

Reagrupando os termos tem-se a equação cúbica em α,

$$\alpha^3+2p\alpha^2+(p^2-4r)\alpha-q^2=0.$$

Como a solução desta equação cúbica já é conhecida, podemos encontrar o valor de α e em seguida o valor de β. Porém, podemos também fazer da seguinte maneira, escrevendo a forma fatorada

$$\left(x^2+\frac{p+\alpha}{2}\right)^2=\left[\sqrt{\alpha}\left(y-\frac{q}{2\alpha}\right)\right]^2,$$

$$x^2+\frac{p+\alpha}{2}=\pm\sqrt{\alpha}\left(y-\frac{q}{2\alpha}\right),$$

$$x^2-\sqrt{\alpha}x+\left(\frac{p+\alpha}{2}+\frac{q}{2\sqrt{\alpha}}\right)=0 \quad \text{e} \quad x^2+\sqrt{\alpha}x+\left(\frac{p+\alpha}{2}-\frac{q}{2\sqrt{\alpha}}\right)=0.$$

Assim sendo, cada uma dessas equações fornece duas raízes da equação de quarto grau reduzida. Para encontrar a solução da equação $ay^4+by^3+cy^2+dy+e=0$, voltamos para a variável x com $x=y-\frac{b}{4a}$.

Esse processo nos mostra que é possível encontrar as soluções de uma equação algébrica de grau 4 utilizando apenas operações algébricas.

Agora, retornamos às equações cúbicas para mais considerações. Primeiro, como ilustração, vamos aplicar a fórmula à equação $x^3+3x-10=0$ [1]. Posto que $p=3$ e $q=-10$,

[1]Em carta enviada a Tartaglia no dia 9 de abril de 1539, Cardano pediu-lhe que resolvesse explicitamente esta

primeiramente calculamos $\Delta = \left(\frac{-10}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3 = 26$. Assim,

$$x = \sqrt[3]{5+\sqrt{26}} + \sqrt[3]{5-\sqrt{26}}.$$

Observamos que se $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ for um número negativo, a aplicação da fórmula exige conhecimentos de Números Complexos. Retrocedendo à época de sua descoberta, podemos dizer que, realmente, o caso $\Delta < 0$ foi o embrião dos posteriores estudos que conduziram ao desenvolvimento dos Números Complexos (GARBI, 2007). Portanto, seria natural que, tanto Cardano quanto Tartaglia não soubessem lidar com esta situação, o que pode ser evidenciado a partir de correspondências trocadas por eles, e que vale a pena aqui reproduzir. Em carta datada de 4 de agosto de 1539, Cardano assim escreveu para Tartaglia:

> Escrevo para dizer-lhe que estou bem e que lhe escrevi muitas outras cartas, às quais, porém, o senhor não se dignou responder [...] ainda mais que lhe pedi a solução de diversos quesitos que ficaram sem resposta, e um deles é o quesito de cubo igual a coisas e número [$x^3 = px + q$]. É verdade que eu entendi a regra, mas quando o cubo da terceira parte das coisas [$(p/3)^3$] excede o quadrado da metade do número [$(q/2)^2$], então não posso colocar depois deles a equação, como aparece. Portanto, me agradaria muito se o senhor resolvesse essa equação: um cubo igual a nove coisas mais dez [$x^3 = 9x + 10$]. Realmente, o senhor me faria um favor enorme (TOSCANO, 2012, p. 172).

Não querendo admitir seu desconhecimento sobre a questão, Tartaglia respondeu para Cardano da seguinte forma:

> Senhor Hierônimo [*Gerolamo*], recebi a sua carta, na qual me escreve que entendeu o capítulo de cubo igual a coisas e número [$x^3 = px + q$], mas que o cubo da terceira parte das coisas [$(p/3)^3$] excede o quadrado da metade do número [$(q/2)^2$], e assim, não pode continuar a equação, e que, por essa razão, me pede que lhe mande resolvido esse capítulo de um cubo igual a nove coisas mais dez [$x^3 = 9x + 10$]. E, portando, respondo-lhe e digo que não pegou o caminho correto para resolver esse capítulo; ao contrário, pegou um caminho totalmente errado (TOSCANO, 2012, p. 173 e 174).

Analogamente ao que ocorre com a equação algébrica do segundo grau, dependendo do sinal do discriminante Δ teremos distintas possibilidades para as raízes. De fato, pode-se mostrar que (LIMA, 1987):

1. Se $\Delta > 0$, a equação tem uma raiz real e duas complexas conjugadas;

equação, pois o mesmo ainda não havia conseguido decifrar a fórmula que Tartaglia lhe havia passado na forma de versos. Tartaglia respondeu a carta em 23 de abril de 1539, resolvendo também, adicionalmente, a equação $x^3 + x - 10 = 0$ (TOSCANO, 2012, p. 158).

2. Se $\Delta = 0$, a equação tem três raízes reais, sendo uma delas repetida;

3. Se $\Delta < 0$, a equação tem três raízes reais e distintas.

A seguir, ilustraremos os três casos anteriores, utilizando figuras construídas no (GEOGEBRA, 2014). Na Figura 5, movendo os controles para alterar os valores de p e de q, de tal forma que o discriminante Δ se mantenha positivo, vemos que a função polinomial $f(x) = x^3 + px + q$ (Janela de Álgebra) intersecta o eixo x sempre em um único ponto (A, na Janela de Visualização), o que significa que a equação $x^3 + px + q = 0$ possui apenas uma raiz real.

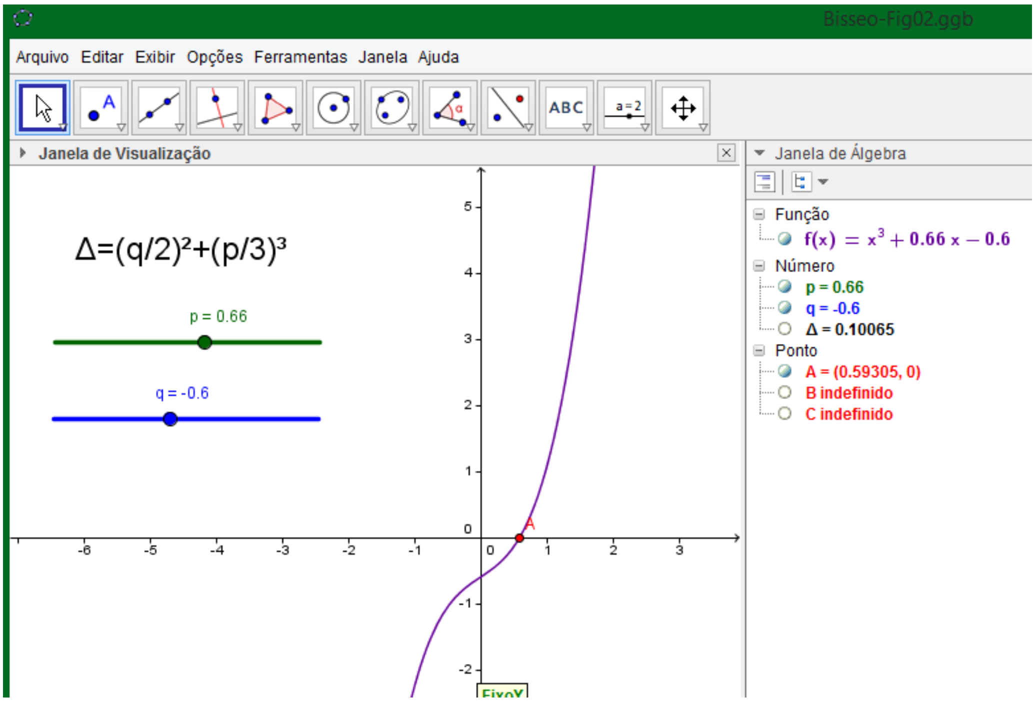


Figura 5: Caso $\Delta > 0$.

Na Figura 6, movendo os controles deslizantes de p e de q, até conseguir que o discriminante Δ fique nulo, vemos que a função polinomial $f(x) = x^3 + px + q$ (Janela de Álgebra) intersecta o eixo x sempre em dois pontos (A e $B \equiv C$, na Janela de Visualização), sendo que em A existe uma raiz simples e em $B \equiv C$ a raiz é dupla, pois a curva tangencia o eixo x.

Finalmente, na Figura 7, alterando os valores de p e q de tal forma que o discriminante Δ se mantenha negativo, vemos que a função polinomial $f(x) = x^3 + px + q$ (Janela de Álgebra) intersecta o eixo x sempre em três pontos (A, B e C na Janela de Visualização), o que significa que a equação $x^3 + px + q = 0$ possui três raízes reais distintas.

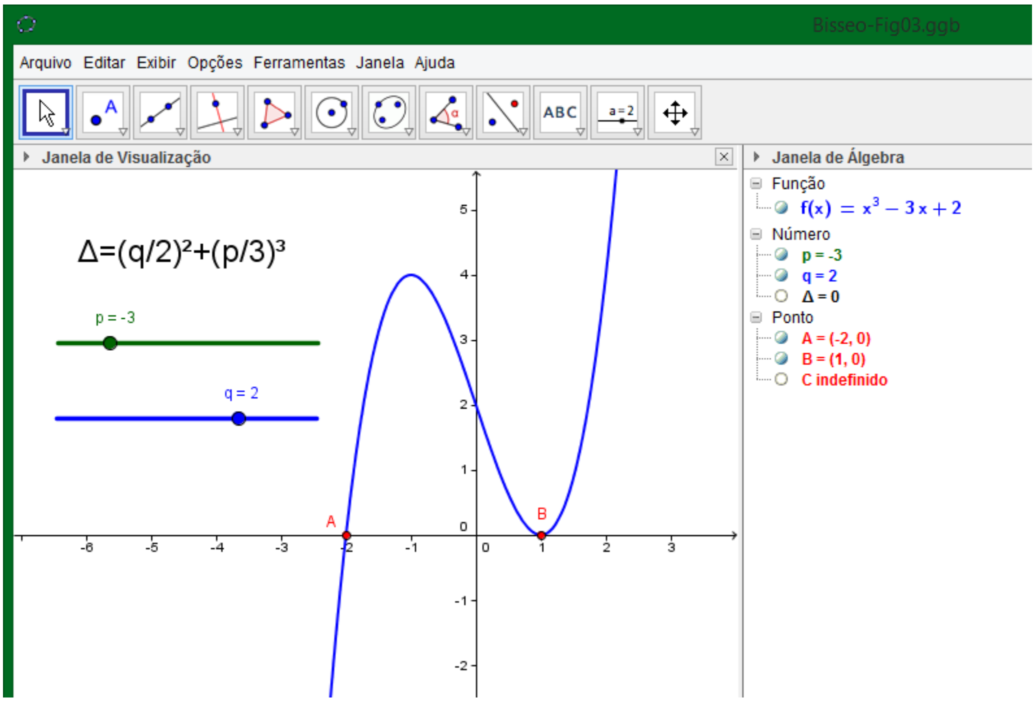


Figura 6: Caso $\Delta = 0$.

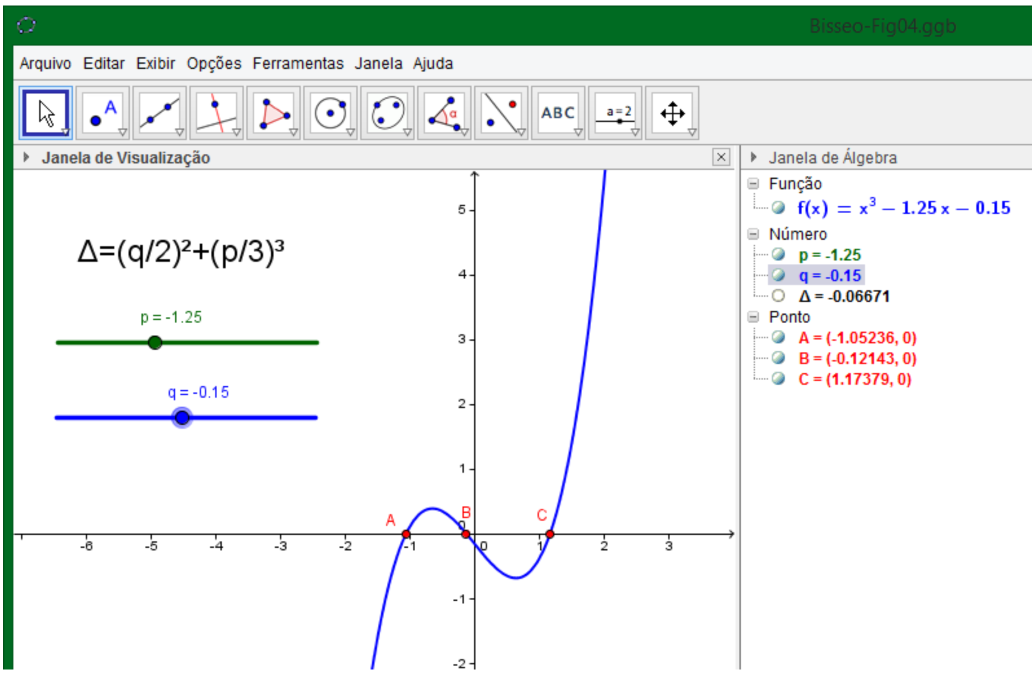


Figura 7: Caso $\Delta < 0$.

4 HISTÓRIA DO ENSINO DE EQUAÇÕES ÁLGEBRICAS NO BRASIL

Após abordar os caminhos da álgebra, dos seus primórdios arqueológicos até as bases modernas e contemporâneas, torna-se vital situar o campo do ensino de álgebra, sendo essencial nesse capítulo evidenciar, mesmo de modo sucinto e pontual, uma descrição de como transcorreu o ensino das equações algébricas no Brasil, concluindo pelas veredas de como atualmente é abordado o tema na educação básica. Utiliza-se para isto informações pertinentes a manuais didáticos, apostilamentos, paradigmas curriculares, enquanto engrenagens essenciais para execução do ensino.

Desta forma, concebe-se que os primeiros livros didáticos de matemática do Brasil datam de 1744. Servem ao ensino militar, sendo obrigatório aos oficiais serem aprovados na Aula de Artilharia e Fortificações. E nesse curso é estruturado um tratado de álgebra. Neste livro o tratamento das equações é realizado como, por exemplo, a regra de três, que era trabalhada da seguinte forma: "multiplica-se o segundo pelo 3º produto e se divide pelo primeiro; o quociente é o quarto termo buscado" (VALENTE, 2007, p. 53).

Assim, o estudo das Equações Algébricas no Brasil começou com o curso da Academia Real dos Guardas-Marinhas, que veio junto com a corte portuguesa em 1808 (VALENTE, 2007). No segundo ano de estudos iniciavam-se os princípios da álgebra até as equações do segundo grau, incluindo suas aplicações, juntamente com noções preliminares sobre a passagem da aritmética para a álgebra das equações.

Cerca de 1830, começaram a surgir os primeiros livros didáticos no Brasil. Segundo (VALENTE, 2007, p. 125), o livro de Aritmética de Oliveira, que teve edições em 1842 e em 1863, tinha como objetivo ser utilizado desde o ensino primário até o secundário, tendo o autor agregado os elementos de álgebra por assuntos: teoria dos logaritmos, progressões e suas propriedades, resoluções das equações de 1° e 2° graus, fórmulas de juros simples e compostos. E é durante o século 18 que, pela 1ª vez, o estudo de Álgebra é introduzido no ensino secundário brasileiro.

Este livro fora utilizado no plano de estudos do antigo Colégio Dom Pedro II, do Rio de

Janeiro, que no período imperial servia de referência para outros ginásios e colégios brasileiros, sendo normativo para emissão e validação dos certificados (VALENTE, 2007, p. 132).

Cerca de 1880, vários livros didáticos, de diferentes autores, traziam o programa do colégio Dom Pedro II, e estes sempre se limitavam ao ensino de equações do segundo grau. Alguns anos depois, cerca de 1910, um livro de álgebra adotado por exames preparatórios para a escola naval era "uma tradução fiel e completa do original em francês e trata dos seguintes temas: cálculo algébrico, equações do 1º grau, equações do 2º grau, progressões, logaritmos, juros, ..., representação gráfica de equações do 1º e 2º graus, ..., e noções sobre séries" (VALENTE, 2007, p. 187).

O advento da educação nova no Brasil, com inúmeras inovações pedagógicas advindas das bases científicas e tecnológicas, as alterações curriculares das reformas estaduais de ensino e das reformas nacionais - passando pela Reforma Francisco Campos (1931) e pela Reforma Capanema (1938-46), que culminaram na promulgação da primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 4.024/1961) - pouco ou quase nada interferiu nos conteúdos ensinados tanto na disciplina de matemática quanto nas acepções acerca da álgebra (ROMANELLI, 1982).

A partir da década de 60, inicia-se e intensifica-se o Movimento da Matemática Moderna, enquanto ensino predominantemente mecânico de caráter reprodutivo, sem clareza de seus processos, urgências e utilidades. Esse movimento apostava na introdução de elementos unificadores dos campos da Matemática, como a teoria dos conjuntos e as estruturas algébricas (GIL, 2008).

Após a implantação da Matemática Moderna e seu declínio, os educadores movimentaram-se para recuperar o ensino da Geometria, e a Álgebra acabou perdendo o seu lugar de destaque, que havia adquirido com o Movimento da Matemática Moderna, através dos elementos unificadores, indicando uma tendência da Geometria ocupar este lugar. Com estas novas propostas, a Álgebra pareceu retornar ao papel exercido anteriormente, conforme o citado abaixo (GIL, 2008):

> Mas se, por um lado, na proposta da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas) a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino da Aritmética e da Álgebra, por outro lado, o próprio ensino de Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática Moderna lhe havia atribuído como também parece retomar - sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo - o papel que ele desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório - descontextualizado e estático - necessário à resolução de problemas e equações (MIORIM et al., 2003).

Atualmente o estudo das equações é iniciado aos educandos no Ensino Fundamental I (1° ao 5º anos), quando é proposta atividades do tipo "Qual número somado com seis resulta em nove?", e geralmente já é introduzida a ideia de incógnita, como proposto na atividade "Adivinhe a carta escondida" de (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2008).

Esta atividade faz uso de cartões com números, distribuídos entre dois alunos, A e B. Em turnos, o aluno A abre um cartão na mesa e olha a carta seguinte do seu monte, sem mostrá-la a seu colega, o aluno B. Então, A anuncia o resultado da adição do valor das duas cartas, a que está visível e a que está virada para baixo, para seu colega B, que deve, então, descobrir o valor da carta escondida.

Se A enunciar errado o resultado da adição que realizou, ele impediu, com seu erro, que B acertasse qual o número do cartão escondido. Neste caso, ele perde os cartões para o colega B, que os guarda em um monte separado.

Se A enunciar corretamente o resultado, podem acontecer duas situações:

(a) B errar a resposta. Neste caso, o colega A, que propôs a adivinhação, ganha os cartões, ou

(b) B descobre corretamente o valor do cartão escondido. Neste caso, ele ganha os dois cartões.

Ganha o jogo o aluno que obtiver, ao final, o maior número de cartões.

Notoriamente, esta atividade desenvolve a noção de equação já nas séries iniciais. Assim: "Qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações" (GARBI, 2007).

Ao entrar no Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano), o aluno se depara com inúmeras equações aplicadas em diversas áreas. Por exemplo, explora-se em geometria que a soma do ângulos internos de um triângulo é 180º.

Atualmente, os conteúdos relacionados às Equações Algébricas são tratados na 3ª Série do Ensino Médio, logo após o estudo dos Números Complexos. Os principais resultados (IEZZI, 2005) apresentados aos estudantes são enunciados a seguir:

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio P de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz, real ou complexa.

Teorema das Raízes Complexas: Se uma equação algébrica de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = \alpha + \beta i$, com $(\beta \neq 0)$, então essa equação também admite como raiz o número $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Teorema de Bolzano: Sejam $P(x) = 0$ uma equação algébrica com coeficientes reais e (a,b) um intervalo real aberto. Se $P(a).P(b) > 0$, então a equação possui um número par de raízes reais (ou não possui raiz) em (a,b). Se $P(a).P(b) < 0$, então a equação possui um número ímpar de raízes reais em (a,b).

Teorema das Raízes Racionais: Se uma equação algébrica

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

com $a_n \neq 0$, de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional p/q, sendo p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Este resultado permite encontrar um conjunto de possíveis soluções de uma equação, ou seja, se a equação possui solução racional então estará dentro do conjunto anteriormente estabelecido. No entanto, caso a equação possua alguma raiz irracional, nenhum método é abordado no Ensino Médio. Além disso, pelo fato de os exemplos praticados serem todos de equações com raízes racionais, os estudantes concluem o ciclo acreditando que se pode resolver qualquer equação por este método.

É com base neste último resultado que os estudantes resolvem as equações que lhes são propostas. Por exemplo, para a equação $2x^3 + x^2 - 18x - 9 = 0$, conclui-se que o conjunto das possíveis raízes racionais é $\{-1,+1,-3,+3,-9,+9,-1/2,+1/2,-3/2,+3/2,-9/2,+9/2\}$. A partir daí, a aplicação do dispositivo de Ruffini-Horner (IEZZI, 2005) permite encontrar, neste conjunto, basicamente por inspeção, quem é raiz. Neste caso, $\{-3,+3,-1/2\}$ é o conjunto solução.

Outro exemplo é a equação $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$, cujo conjunto das possíveis raízes racionais é $\{2,1,-2,-1\}$. Testando a divisão do polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + 2$ pelos binômios $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+1)$ e $(x+2)$, encontramos que $x = 1$ é uma raiz da equação. E pela divisão dos polinômios reduzimos o grau da equação para 2, obtendo $x^2 - 2 = 0$, de onde se encontra que as outras raízes são $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$. Entretanto, a equação $x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = 0$ tem o mesmo conjunto de possíveis soluções, $\{2,1,-2,-1\}$, porém não possui raízes racionais, uma vez que elas são $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$.

Atualmente, existem aplicativos gratuitos, ao alcance de todos, que resolvem numericamente estas equações. Por exemplo, no versátil GeoGebra, pode-se digitar a equação na Janela CAS e obter a solução. A Figura 8 mostra as soluções dos três exemplos apresentados anteriormente.

Note-se que o programa funciona exatamente como uma calculadora e não mostra o

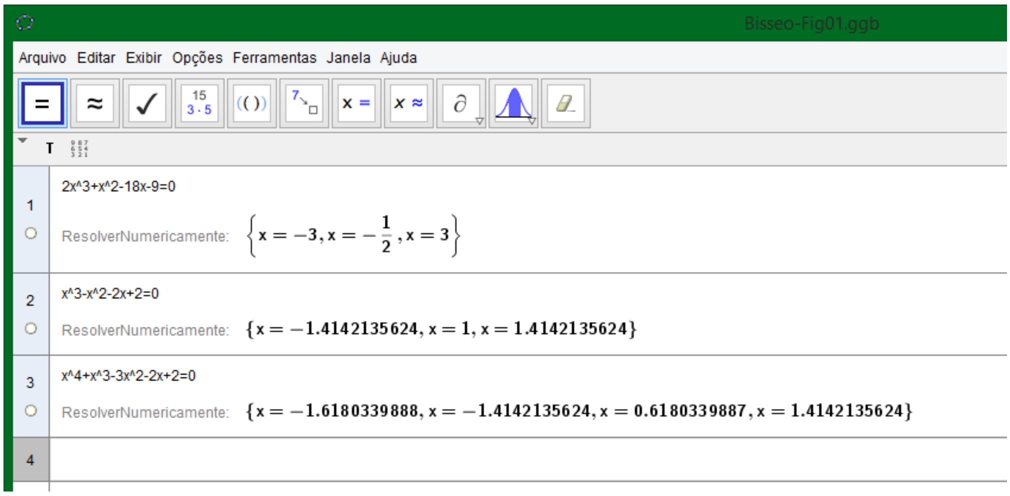


Figura 8: Resolução de Equações Algébricas no GeoGebra.

caminho para se chegar ao resultado. Apesar de que conhecer esta ferramenta é de grande importância, observa-se que muito mais interessante e pedagógico que o professor mostre aos estudantes um caminho matemático que faça com que se chegue à raiz, como por exemplo no caso da equação $2x^3+x^2-18x-9=0$. Afinal, o próprio programa tem um algoritmo implementado que permite chegar à solução.

5 O MÉTODO DA BISSEÇÃO

Este capítulo tem como proposta descrever um método numérico para a resolução de equações polinomiais. Entretanto, antes de definir funções e iterações, uma ideia inicial para motivação deve ser apresentada. Sendo assim, consideremos o seguinte exemplo: um casal de crianças brinca de adivinhar números entre 0 e 100. O menino pensa em um número e a menina deve descobri-lo. Primeiro a menina fala que é 50, e o menino responde que é maior que 50. Depois a menina fala que é 75, e o menino diz que é menor que 75. Então a menina pergunta se é 67, e o menino responde que é menor que 67 (SATUF, 2004). Seguindo esse procedimento, a menina conseguirá adivinhar o número em algumas tentativas. A nossa proposta é utilizar a mesma ideia para calcular aproximações das raízes de equações algébricas.

Calcular as raízes de uma equação fez parte dos objetivos de matemáticos durante séculos. As resoluções de Tartaglia, Cardano e Ferrari para equações do terceiro e quarto graus fornecem fórmulas muito complicadas, e por esse motivo são raramente usadas nos dias de hoje. E como Abel provou a impossibilidade de resolver as equações de graus maiores que 4 por meio de seus coeficientes, iniciou-se a procura por outros métodos para encontrar as raízes das equações, mesmo sendo soluções aproximadas.

Os métodos numéricos mostram uma aproximação do resultado, para isto são realizadas repetidas operações que são chamadas de iterações. E nisso pode-se pensar que esse resultado não é válido já que o resultado não é exato, porém conseguido realizar as repetidas iterações, consegue-se um resultado tão preciso quanto quiser, e em um problema prático, sempre se espera encontrar um valor o mais perto que se possa utilizar, isto é, uma aproximação.

Os métodos de aproximações consistem em iniciar com uma estimativa inicial, repetir em cada passo um mesmo procedimento diversas vezes, utilizando em cada passo como estimativa o resultado obtido no passo anterior.

O Método da Bisseção (SATUF, 2004) é um método numérico bastante simples, eficaz e intuitivo, podendo ser aplicado na busca de zeros de funções contínuas, e está baseado no Teorema do Valor Intermediário (LIMA, 2012), que garante que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e se $f(a).f(b) < 0$, então f possui pelo menos um zero em (a,b), isto é, existe $\bar{c} \in (a,b)$ tal que $f(\bar{c}) = 0$. Existe uma variação desse método, que muda apenas no tamanho que se divide o intervalo de procura; ao invés de se dividir exatamente ao meio, divide-se em razão áurea, e muitas vezes aumenta-se a velocidade do método.

Por se tratar de proposta para o Ensino Médio, deixaremos de lado outro método, o de Newton, mesmo possuindo mais rapidez de convergência, pelo fato de exigir conhecimentos de derivada. Para nossos propósitos didáticos, a simplicidade do método utilizado é mais relevante que a velocidade de convergência.

O algoritmo do Método da Bisseção fornece uma sequência de números (c_n) que converge para a solução procurada $\bar{c}$, da seguinte forma:

1. Se $f(a).f(b) < 0$ então existe ao menos uma raiz da equação $f(x) = 0$ no intervalo (a,b).
2. Calcula-se $c = (a+b)/2$, média aritmética entre a e b.
3. Se $f(c) = 0$ então c é raiz.
4. Se $f(a).f(c) < 0$ então a raiz estará no intervalo (a,c).
5. Se $f(a).f(c) > 0$ então a raiz estará no intervalo (c,b).
6. Repete-se, iterativamente, o procedimento anterior, até que se chegue à aproximação desejada.

Chamando o intervalo inicial (a,b), da 1ª etapa, de (a_1,b_1), e seu ponto médio c de c_1, os elementos da 2ª etapa de (a_2,b_2) e c_2, e sucessivamente, os elementos da n-ésima etapa de (a_n,b_n) e c_n, obtemos três sequências, (a_n), (b_n) e (c_n), tal que

$$a = a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n < b,$$

$$b = b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_{n-1} \geq b_n > a,$$

$$a_n \geq c_n \geq b_n$$

e

$$|c_n - \bar{c}| < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

para todo número natural n. Logo, se n for suficientemente grande, teremos que c_n estará próximo de $\bar{c}$. De fato, temos o seguinte

Teorema 5.1. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e se $f(a).f(b) < 0$, então o Método da Bisseção gera uma sequência (c_n) que converge para $\bar{c} \in (a,b)$, onde $f(\bar{c}) = 0$.*

Na prática, tomamos c_n como aproximação de $\bar{c}$ quando $|c_n - \bar{c}| < \varepsilon$, para o erro ε estipulado inicialmente.

Pelo fato de estarmos trabalhando exclusivamente com polinômios, podemos utilizar o Teorema de Bolzano (IEZZI, 2005), não havendo necessidade de falar aos estudantes do Ensino Médio sobre o Teorema do Valor Intermediário, que é mais geral e se aplica a qualquer função contínua.

Para exemplificar, mostraremos como se pode calcular a raiz da equação $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ no intervalo $[0,1]$, implementando o Método da Bisseção em uma planilha do GeoGebra, com aproximação de 4 casas decimais. Como $P(0).P(1) < 0$, sabemos que a equação admite uma raiz real no intervalo $(0,1)$. Na utilização da construção representada na Figura 9, temos que:

1. A Célula $A1$, a ser preenchida pelo usuário, recebe o valor do extremo inferior do intervalo $[a,b]$, que aqui é $a = 0$.

2. A Célula $B1$, também a ser preenchida pelo usuário, recebe o valor do extremo superior do intervalo $[a,b]$, que aqui é $b = 1$.

3. A Célula $C1$ será automaticamente preenchida com a média aritmética entre a e b, isto é, $C1 = (A1 + B1)/2$.

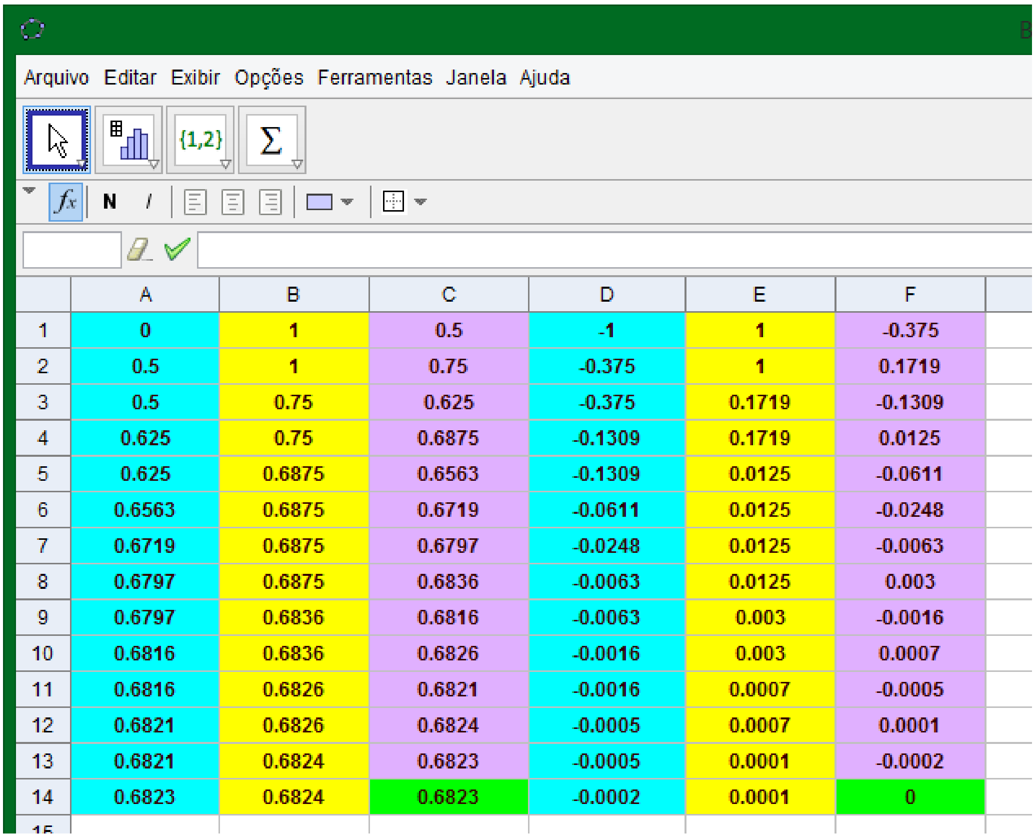
4. As Células $D1$, $E1$ e $F1$ serão automaticamente preenchidas com os valores $P(a)$, $P(b)$ e $P(c)$, isto é, $D1 = P(A1)$, $E1 = P(B1)$ e $F1 = P(C1)$.

5. As Celulas $A2$ e $B2$ serão automaticamente preenchidas com os extremos do intervalo da segunda iteração .

6. As Células $C2$, $D2$, $E2$, e $F2$ serão preenchidas automaticamente como na Linha 1.

7. A partir da Linha 3, cada Linha $n+1$ será preenchida como na Linha n, bastando para isto que o usuário utilize o recurso de copiar e colar.

8. Quando aparecer zero na Coluna F, a raiz da equação estará visível na Coluna C da mesma linha. No nosso caso, o zero aparece na Célula $F14$ e a raiz $\bar{c} = 0,6823$ na Célula $C14$.



	A	B	C	D	E	F
1	0	1	0.5	-1	1	-0.375
2	0.5	1	0.75	-0.375	1	0.1719
3	0.5	0.75	0.625	-0.375	0.1719	-0.1309
4	0.625	0.75	0.6875	-0.1309	0.1719	0.0125
5	0.625	0.6875	0.6563	-0.1309	0.0125	-0.0611
6	0.6563	0.6875	0.6719	-0.0611	0.0125	-0.0248
7	0.6719	0.6875	0.6797	-0.0248	0.0125	-0.0063
8	0.6797	0.6875	0.6836	-0.0063	0.0125	0.003
9	0.6797	0.6836	0.6816	-0.0063	0.003	-0.0016
10	0.6816	0.6836	0.6826	-0.0016	0.003	0.0007
11	0.6816	0.6826	0.6821	-0.0016	0.0007	-0.0005
12	0.6821	0.6826	0.6824	-0.0005	0.0007	0.0001
13	0.6821	0.6824	0.6823	-0.0005	0.0001	-0.0002
14	0.6823	0.6824	0.6823	-0.0002	0.0001	0

Figura 9: Cálculo da raiz de $x^3+x-1=0$ em uma planilha do GeoGebra.

No exemplo anterior, foi dado o intervalo onde se buscava a solução, que é fundamental para aplicar o Método da Bisseção à equação $P(x)=0$. Assim, será importante encontrar números a e b, que serão, respectivamente, cotas inferior e superior das raízes reais da equação considerada, isto é, são extremos do intervalo fechado $[a,b]$ que contém o conjunto de todas as raízes reais de $P(x)=0$.

Como estamos buscando raízes da equação $(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $a_n>0$. Dividindo $P(x)$ por $x-b$, e fazendo uso do Teorema do Resto (IEZZI, 2005), podemos escrever $P(x)=(x-b)(a_nx^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\ldots+b_1x+b_0)+P(b)=0$.

Considerando a cota superior b positiva, $P(x)$ será positivo para todo x maior que b (logo não se anulará para todo x maior que b) quando todos os números b_{n-2}, b_{n-3}, ..., b_1, b_0 e $P(b)$ forem positivos. Fazendo uso do algoritmo de Ruffini-Horner (IEZZI, 2005), dividimos $P(x)$ sucessivamente por $x-1, x-2, \ldots$, até conseguir que a linha fique toda formada por números positivos.

Por outro lado, observando que as equações $P(x)=0$ e $P(-x)=0$ têm suas raízes diferindo apenas pelo sinal, podemos aplicar o mesmo raciocínio anterior para achar uma cota inferior a menor que zero, buscando uma cota superior $-a$ para $P(-x) = Q(x) = a_n(-x)^n + a_{n-1}(-x)^{n-1} + a_{n-2}(-x)^{n-2} + \ldots + a_1(-x) + a_0 = 0$. Observamos que, como os cálculos para se obter uma cota superior consideraram o coeficiente do termo de mais alto grau positivo, caso n seja ímpar trabalharemos com $-P(-x) = -Q(x) = 0$.

Nota-se que o algoritmo limita muito bem o conjunto das soluções, isto é, fornece o inteiro imediatamente inferior à menor raiz da equação e o inteiro imediatamente superior à maior raiz da equação.

Para exemplificar, criamos uma figura no GeoGebra para encontrar cotas superior e inferior para as raízes da equação cúbica $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Na Janela de Visualização da Figura 10, os controles deslizantes A, B, C e D definem os coeficientes da equação, cujos valores são transportados dinamicamente para a Linha 1 da planilha. Ao usuário, basta digitar valores inteiros positivos nas células da Coluna A, até que a linha apresente todos os valores positivos, após cálculos realizados pelo algoritmo de Ruffini-Horner. Neste caso, o último valor da Coluna A será uma cota superior. Para a cota inferior, consideramos $-P(-x) = -Q(x) = Ax^3 - Bx^2 + Cx - D = 0$ e repetimos o procedimento. Neste caso, o oposto do valor que aparece na linha positiva será uma cota inferior. A Figura 10 traz o acima descrito para a equação $2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$. Aqui, temos $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$ e $-P(-x) = -Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x + 6 = 0$. A cota superior aparece na Célula $A5$ e o oposto da cota inferior na Célula $A9$. As cotas são $a = -2$ e $b = 4$.

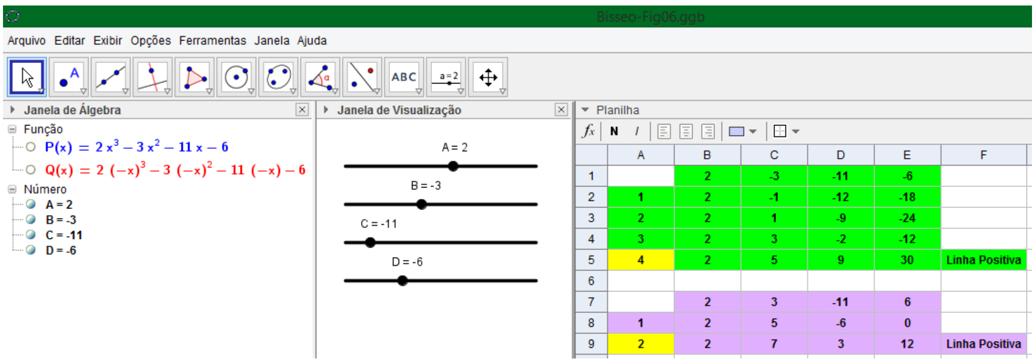


Figura 10: Cotas para as raízes da equação $2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$.

A seguir, apresentaremos outro exemplo, desta vez utilizando como referência (FERREIRA, 2013), para determinar o intervalo onde estão as raízes de uma equação. O resultado afirma que se uma função polinomial é da forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, um limite superior para suas raízes é dado por

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{M}{a_n}},$$

onde k é o grau do primeiro termo negativo e M é o módulo do menor coeficiente negativo. Para se obter um limite inferior, basta considerar a função $g(x) = f(-x)$ e calcular seu limite superior.

Neste exemplo de aplicação do Método da Bisseção, utilizaremos apenas uma calculadora. A equação considerada é $2x^3 + x^2 - x + 2 = 0$.

Primeiro, definimos o intervalo inicial. Para isto, deve-se determinar os limites superior e inferior de todas as raízes da função:

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{M}{a_n}} = 1 + \sqrt[3-1]{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \cong 1 + 0,7 = 1,7 \cong 2,$$

e para o limite inferior tomamos $g(x) = f(-x) = -2x^3 + x^2 + x + 2$. Como $a_n > 0$, tem-se $f(-x) = 2x^3 - x^2 - x - 2$, e assim o cálculo fica

$$-l = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{M}{a_n}} = 1 + \sqrt[3-2]{\frac{2}{2}} = 1 + 1 = 2,$$

isto é, -2 é um limite inferior.

Agora que temos $a = -2$ e $b = 2$, podemos aplicar o Método da Bisseção.

É claro que $c_1 = (a+b)/2 = (-2+2)/2 = 0$ e $f(0) = 2$, assim o novo intervalo fica sendo $[-2, 0]$.

Novamente $c_2 = (-2+0)/2 = -1$ e $f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 2 = 2(-1) + 1 + 1 + 2 = 2$, assim um novo intervalo é $[-2, -1]$.

Novamente $c_3 = (-2 + (-1))/2 = -3/2 = -1,5$ e $f(-1,5) = -1$, e disto temos o novo intervalo $[-1,5; -1]$.

Mais uma vez, $c_4 = \frac{-1,5+(-1)}{2} = -1,25$ e $f(-1,25) = 0,90625$, e encontra-se o intervalo $[-1,5; -1,25]$.

Com estas quatro iterações já conseguimos determinar que uma das raízes da equação está entre $-1,5$ e $-1,25$, e com mais uma iteração obtemos $c_5 = \frac{-1.5-1,25}{2} = -1,375$, que podemos dizer que é a aproximação da nossa solução.

Assim, com poucas iterações e utilizando apenas uma calculadora, foi possível encontrar uma boa aproximação para a raiz de uma equação de terceiro grau.

6 UTILIZANDO MAIS RECURSOS DO GEOGEBRA

Após apresentarmos o Método da Bisseção, nenhuma representação gráfica do problema de encontrar zeros de polinômios foi ainda proposta. Porém, esta é uma abordagem muito esclarecedora, que não podemos deixar de lado. E para isto, continuaremos utilizando o aplicativo GeoGebra, que possui uma grande variedade de recursos. Lembramos que nosso objetivo não é simplesmente encontrar a resposta, pois, como já vimos, o GeoGebra a produz de forma imediata. O que realmente queremos é mostrar ao estudante como um método numérico permite chegar à solução, que é base do algoritmo que produz a resposta rápida dada pelo aplicativo. Afinal, o GeoGebra tem na sua formulação ferramentas para métodos numéricos!

Retornando à equação $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$, onde utilizou-se apenas uma planilha (Figura 9), agora é encontrada a raiz pelo Método da Bisseção, com aproximação de 4 casas decimais, fazendo uso da representação gráfica, podendo, ainda, variar as cotas inferior (a) e superior (b). Na Figura 11 encontram-se representadas duas janelas e uma planilha. Na Janela de Álgebra, podemos ver a equação a ser resolvida, as cotas e a raiz. Na Janela de Visualização encontra-se a representação gráfica de $P(x) = x^3 + x - 1$ e, na Coluna C da Planilha, os valores obtidos pelas iterações do Método da Bisseção. Movendo os controles deslizantes de a e de b na Janela de Visualização, podemos verificar dinamicamente as diferentes sequências que convergem para a solução.

É provável que um estudante mais atento pergunte ao professor o que ocorre quando existe mais de uma raiz real no intervalo considerado, e qual delas o Método da Bisseção encontrará. Para responder a esta questão, sugerimos ao docente que mostre aos seus alunos uma situação concreta. Por exemplo, encontrar as raízes reais da equação $2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$. Sabendo que as três raízes reais se situam no intervalo $[-2, 4]$, pois estas cotas já foram obtidas anteriormente (Figura 10), primeiro utilizamos $a = -2$ e $b = 4$, obtendo que o Método da Bisseção fornece uma sequência que converge para a solução $C = 3,3860$, como mostra a Figura 12.

Em seguida, outras variações para o intervalo $[a, b]$ devem ser exploradas. Os controles

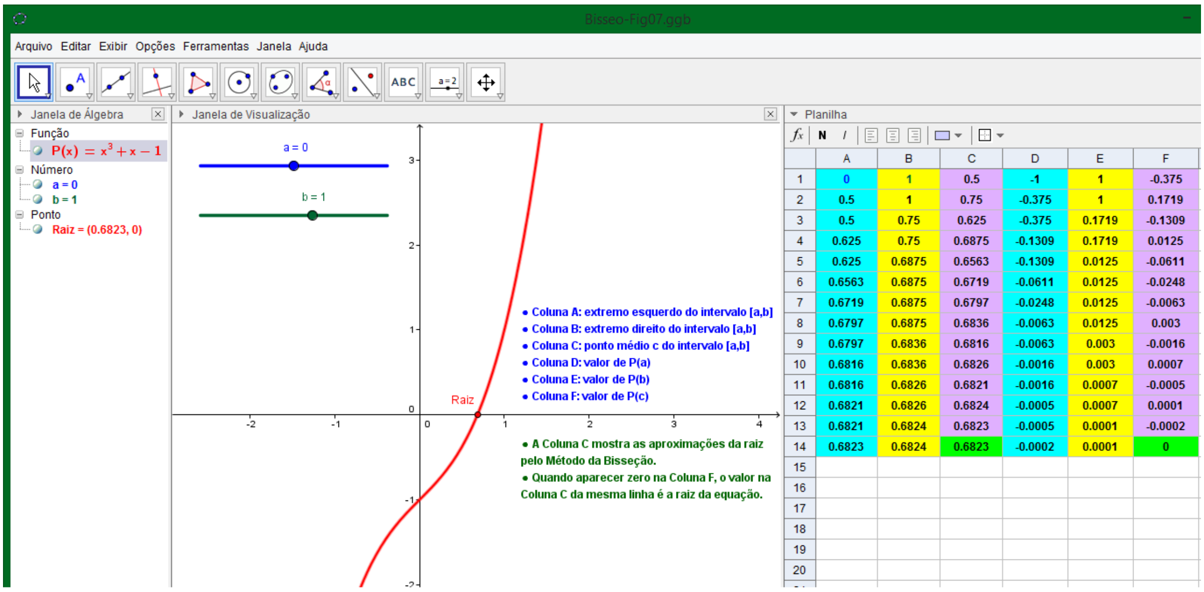


Figura 11: Cálculo da raiz e visualização de $P(x) = x^3 + x - 1 = 0$ no GeoGebra.

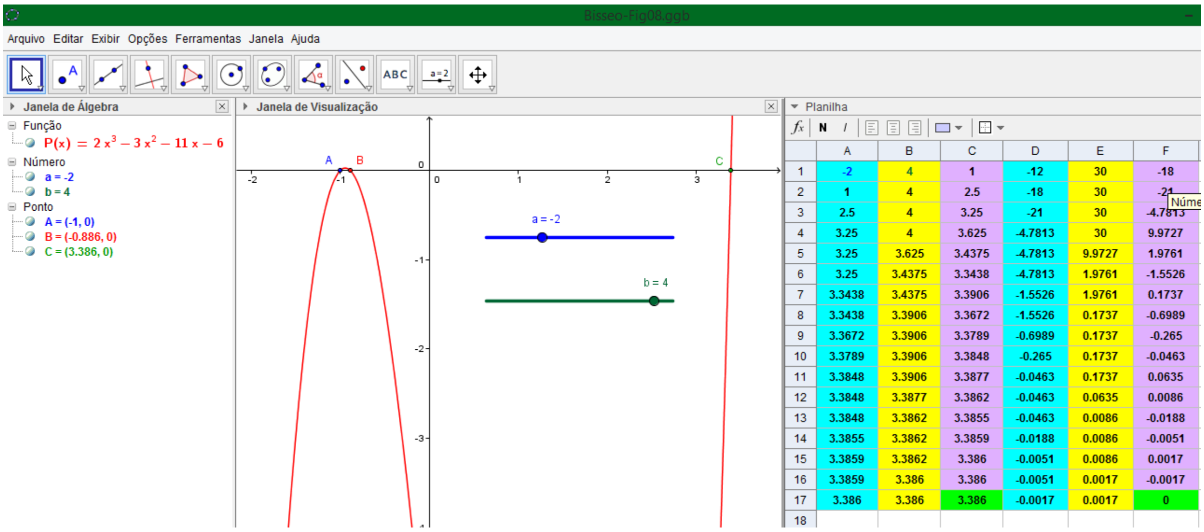


Figura 12: Cálculo da raiz de $2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$ no GeoGebra, utilizando $a = -2$ e $b = 4$.

deslizantes a e b podem ser movimentados livremente, mostrando dinamicamente os resultados interligados nas diversas janelas do GeoGebra, com as correspondentes sequências convergindo para cada uma das raízes.

Para $a = -0,9$ e $b = 0,1$, a sequência converge para a solução $B = -0,8860$, como mostra a Figura 13.

Para $a = -2$ e $b = -0,9$, a sequência converge para a solução $A = -1$, como mostra a Figura 14.

Acreditamos que os diversos resultados encontrados nesta atividade deverão ser suficientes para mostrar aos estudantes que a convergência para cada raiz dependerá das cotas a e

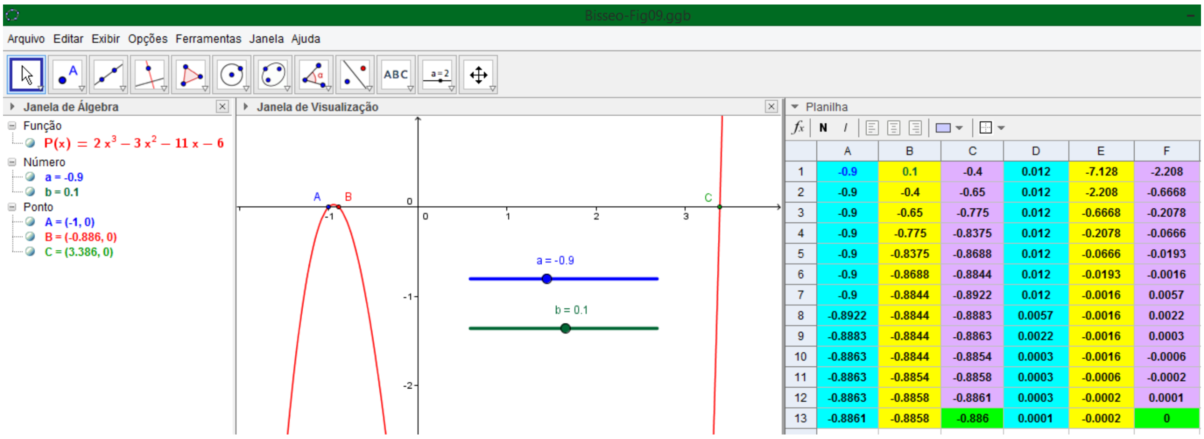


Figura 13: Cálculo da raiz de $2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$ no GeoGebra, utilizando $a = -0,9$ e $b = 0,1$.

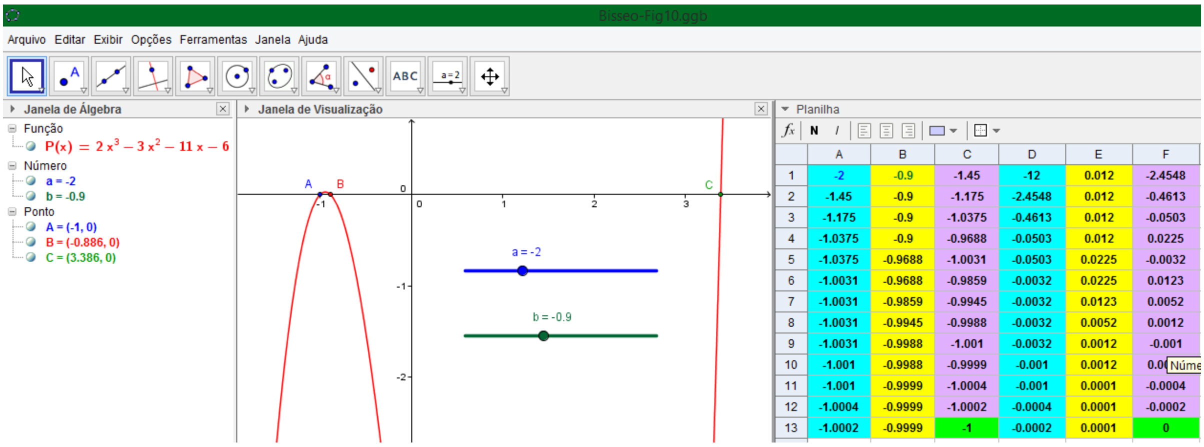


Figura 14: Cálculo da raiz de $2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$ no GeoGebra, utilizando $a = -2$ e $b = -0,9$.

b escolhidas na aplicação do Método da Bisseção.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Estudo de Equações Algébricas no Ensino Médio, da forma como habitualmente é desenvolvido, é bastante restrito, pois praticamente fornece apenas ferramentas para que se encontrem raízes racionais. Na proposta de acrescentar um método numérico, o da Bisseção, ao conteúdo clássico, permite ampliar consideravelmente a visão que o estudante pode ter sobre o tema. Além disso, fazendo uso de aplicativos, como por exemplo o GeoGebra, é possível facilmente implementar o método, de forma que a solução numérica seja encontrada rapidamente. A versatilidade do GeoGebra ao interagir a Janela de Álgebra, a de Visualização e a Planilha, dando diversas visões do mesmo objeto de estudo, ao mesmo tempo que modifica dinamicamente as três opções, é um poderoso e indispensável recurso que deve ser incentivado como auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Além do método numérico e do uso da tecnologia educacional, também acreditamos que a inserção da história nas aulas de matemática pode trazer benefícios nos resultados que se deseja obter, principalmente se tratando das Equações Algébricas que, sem dúvida, teve um bonito e intrigante desenrolar ao longo dos séculos. A disputa pela autoria da fórmula que resolve a equação do 3º grau, bem como sua elegante demonstração, não podem ser omitidos dos estudantes.

Este trabalho traz um incentivo ao uso de ferramentas de tecnologia no ambiente da sala de aula, e o recurso utilizado é o GeoGebra. Teve-se a oportunidade de aplicar os recursos desta dissertação em sala de aula, e pode-se dizer que esta proposta dedicou tempo, paciência e esforço para escolher as atividades, elaborar uma metodologia, para que este conteúdo, Equações Algébricas, pudesse ser estudado com entusiasmo e que os alunos pudessem preencher a lacuna que faltava na sua formação, ou seja, saber resolver as equações com raízes irracionais. Percebeu-se que alguns dos estudantes já possuíam habilidades para manusear os recursos tecnológicos; outros, porém, não possuíam tal habilidade ao interagir com os programas utilizados e, portanto, estes estudantes exigiram maior atenção. Contudo, conseguimos perceber que a ideia do que se estava estudando ficou clara para os estudantes. Para um próximo trabalho deseja-se aprofundar os estudos das Equações Algébricas, em especial sua história, e preparar uma metodologia para que outros professores possam ler e aplicá-las em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ASSIS, C. A. M. D.; OLIVEIRA, C. M. M. D. Equações algébricas de grau 3: Um passeio pela história. **Caderno Dá Licença**, p. 63–88, 2012.

BASTOS, G. G. Resolução de equações algébricas por radicais. **Sexta Escola de Álgebra**, Recife, p. 1–43, 1980.

CARDANO, G. **Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus**. 1ª. ed. Nürnberg: Officina Henricpetrina, 1545.

CARNEIRO, J. P. Q. Equações algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, n. 40, p. 31–40, 1999.

FERREIRA, J. Álvaro T. **Cálculo Numérico**. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2013.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GEOGEBRA. **Geogebra.org**. [s.n.], 2014. Disponível em: <www.geogebra.org>.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** Porto Alegre: Dissertação de Mestrado em Educação, em Ciências e Matemática - Fac. de Física, PUCRS, 2008.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual Editora, 2005.

JUNIOR, F. M. **Métodos de Resolução de Equações do Segundo e do Terceiro Grau**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado), Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2013.

LIMA, E. L. A equação do terceiro grau. **Matemática Universitária**, n. 5, p. 9–23, Julho 1987.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2012.

LIVIO, M. **A Equação que Ninguém Conseguia Resolver**. 1ª. ed. São Paulo: Record, 2008.

MARACCHIA, S. **Storia delle equazioni e dei sistemi di primo grado**. Roma: Dipartimento di Matematica, Università La Sapienza, 2007. Disponível em: <http://www3.ti.ch/DECS/sw/temi/scuoladecs/files/private/application/pdf/2549_2007_aggiornamento_maracchia_3.pdf>. Acesso em: 23 de maio de 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Pró-Letramento : Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/SEB, 2008. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download>. Acesso em: 13 de setembro de 2013.

MIORIM, M. Ângela; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, Porto Alegre, n. 1, p. 1–39, 2003.

QUEIROZ, C. D. C. **Funções e Equações Polinomiais, Comportamento da Função do 3º Grau**. Goiânia: Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística, 2013. Dissestação (Mestrado).

ROMANELLI, O. de O. **História da Educação no Brasil:1930-1973**. Petrópolis: Vozes, 1982.

ROQUE, T. **História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas**. 1ª. ed. São Paulo: Zahar, 2008.

SANTOS, S. R. dos. **As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus: sua História e suas Soluções**. São Cristóvão: Dissertação (Mestrado), Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT. Universidade Federal de Sergipe, 2013.

SATUF, F. O método da bisseção. **Matemática Universitária**, n. 36, p. 39–49, Junho 2004.

SCHUVAAB, J. L. **Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica**. Maringá: Dissertação (Mestrado), Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Maringá, 2013.

SILVA, C. P. da. Évariste galois: a vida efêmera de um gênio. **Soc. Paran. Mat.**, Curitiba, v. 1, p. 63–92, 1984.

TARTAGLIA, N. **Quesiti et inventioni diverse**. 1. ed. Nürnberg: La Nuova Cartografica, 1554.

TOSCANO, F. **A Fórmula Secreta**. 1. ed. Campinas - SP: Editora Unicamp, 2012.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. São Paulo: Annablume, 2007. (Selo universidade).