



**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE**  
**MATERIAIS**  
**DISSERTAÇÃO**

**FRANCISCO LUIZ CAMPOS HIDALGO**

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO PROBLEMA DE FLEXÃO**  
**ESTOCÁSTICA DE UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI, APOIADA**  
**EM FUNDAÇÃO DE PASTERNAK, UTILIZANDO O MÉTODO**  
**ESTOCÁSTICO DE GALERKIN E O MÉTODO DOS ELEMENTOS**  
**FINITOS ESTOCÁSTICOS**

**CURITIBA**

**MAIO - 2014**

FRANCISCO LUIZ CAMPOS HIDALGO

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO PROBLEMA DE FLEXÃO  
ESTOCÁSTICA DE UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI, APOIADA  
EM FUNDAÇÃO DE PASTERNAK, UTILIZANDO O MÉTODO  
ESTOCÁSTICO DE GALERKIN E O MÉTODO DOS ELEMENTOS  
FINITOS ESTOCÁSTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba, como requisito parcial de aprovação.

**Orientador:** Prof. Claudio Roberto Ávila da Silva Júnior, Dr.

**Coorientador:** Prof. Hilbeth Parente Azikri de Deus, Dr.

**CURITIBA**

**MAIO - 2014**

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

FRANCISCO LUIZ CAMPOS HIDALGO

### **QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO PROBLEMA DE FLEXÃO ESTOCÁSTICA DE UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI, APOIADA EM FUNDAÇÃO DE PASTERNAK, UTILIZANDO O MÉTODO ESTOCÁSTICO DE GALERKIN E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS**

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do título de mestre em engenharia, área de concentração em mecânica dos sólidos, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais.

---

Prof. Paulo César Borges, Dr.  
Coordenador do Programa

#### **Banca Examinadora**

---

Prof. Claudio R. Ávila da Silva Jr, Dr.  
PPGEM / UTFPR

---

Prof André Teófilo Beck, Dr.  
PGEE / USP

---

Prof. Ivan Moura Belo, Dr.  
PPGEM / UTFPR

Curitiba, 12 de dezembro de 2014

## RESUMO

HIDALGO, Francisco L. Campos. **Quantificação da incerteza do problema de flexão estocástica de uma viga de Euler-Bernoulli, apoiada em fundação de Pasternak, utilizando o método estocástico de Galerkin e o método dos elementos finitos estocásticos.** Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 87p., 2014.

Este trabalho apresenta uma metodologia, baseada no método de Galerkin, para quantificar a incerteza no problema de flexão estocástica da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação de Pasternak. A incerteza nos coeficientes de rigidez da viga e da fundação é representada por meio de processos estocásticos parametrizados. A limitação em probabilidade dos parâmetros randômicos e a escolha adequada do espaço de soluções aproximadas, necessárias à posterior demonstração de unicidade e existência do problema, são consideradas por meio de hipóteses teóricas. O espaço de soluções aproximadas de dimensão finita é construído pelo produto tensorial entre espaços (determinístico e randômico), obtendo-se um espaço denso no espaço das soluções teóricas. O esquema de Wiener-Askey dos polinômios do caos generalizados é utilizado na representação do processo estocástico de deslocamento da viga. O método dos elementos finitos estocásticos é apresentado e empregado na solução numérica de exemplos selecionados. Os resultados, em termos de momentos estatísticos, são comparados aos obtidos por meio de simulações de Monte Carlo.

**Palavras-chave:** Lema de Lax-Milgram, polinômios do caos, esquema de Askey-Wiener, viga de Euler-Bernoulli, Fundação de Pasternak, método de Galerkin, método dos elementos finitos estocásticos.

## ABSTRACT

HIDALGO, Francisco L. Campos. **Quantification of uncertainty in the stochastic bending problem of an Euler-Bernoulli beam, resting on Pasternak foundation, using the stochastic Galerkin method and the stochastic finite element method.** Dissertation – Graduate Program in Mechanical and Materials Engineering, Federal Technological University of Paraná, Curitiba, 87p., 2014.

This study presents a methodology, based on the Galerkin method, to quantify the uncertainty in the stochastic bending problem of an Euler-Bernoulli beam resting on a Pasternak foundation. The uncertainty in the stiffness coefficients of the beam and foundation is represented by parametrized stochastic processes. The probability limitation on the random parameters and the choice of an appropriated approximate solution space, necessary for the subsequent demonstration of uniqueness and existence of the problem, are considered by means of theoretical hypothesis. The finite dimensional space of approximate solutions is built by tensor product between spaces (deterministic and randomic), obtaining a dense space in the theoretical solution space. The Wiener-Askey scheme of generalizes chaos polynomials is used to represent the stochastic process of the beam deflection. The stochastic finite element method is presented and employed in the numerical solution of selected examples. The results, in terms of statistical moments, are compared to results obtained through Monte Carlo simulations.

**Keywords:** Lax-Milgram lemma, chaos polynomials, Askey-Wiener scheme, Euler-Bernoulli beam, Pasternak foundation, Galerkin method, stochastic finite element method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Pórtico com conexões articuladas entre viga e colunas.....	7
Figura 2 –	Pórtico com conexões rígidas entre viga e colunas .....	8
Figura 3 –	Tubulação para transporte de fluido suportada pelo solo.....	8
Figura 4 –	Modelo não-linear para o solo.....	9
Figura 5 –	Analogia para a fundação de Winkler.....	11
Figura 6 –	Descontinuidade do deslocamento no modelo de Winkler.....	12
Figura 7 –	Representação esquemática do modelo de fundação de Pasternak ...	13
Figura 8 –	Funções de aproximação do espaço de soluções determinístico correspondentes aos graus de liberdade do problema estático .....	36
Figura 9 –	Matriz de rigidez calculada para $p=1$ , $s=4$ e $m=4$ .....	39
Figura 10 –	Matriz de rigidez calculada para $p=3$ , $s=4$ e $m=4$ .....	39
Figura 11 –	Matriz de rigidez local resultante da aplicação do método dos elementos finitos estocásticos.....	41
Figura 12 –	a) Exemplo de discretização espacial. b) Matriz de rigidez global resultante.....	41
Figura 13–	Matriz de rigidez global com condições de contorno aplicadas.....	42
Figura 14 –	Viga de seção retangular simplesmente apoiada em fundação de Pasternak .....	45
Figura 15 –	Histograma do módulo de elasticidade de uma liga de aço estrutural.....	47
Figura 16 –	Histograma experimental e histograma gerado com o processo estocástico parametrizado, com $x^*$ fixo, através de SMC.....	47
Figura 17 –	Evolução do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga $u_4$ , na SMC. Exemplo 1a.....	50
Figura 18 –	Evolução da variância, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga $u_4$ , na SMC. Exemplo 1a.....	50
Figura 19 –	Valor esperado do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1a .....	51
Figura 20 –	Variância do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1a .....	51
Figura 21 –	Erro relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1a.....	52

Figura 22 – Erro relativo na variância do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1a .....	52
Figura 23 – Coeficiente de variação do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 1a .....	54
Figura 24 – Erro relativo no coeficiente de variação, do processo estocástico $u_i$ nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 1a .....	54
Figura 25 – Histogramas da variável randômica $u_4$ , exemplo 1a .....	55
Figura 26 – Estimativa da FDPA da variável randômica $u_4$ , exemplo 1a .....	55
Figura 27 – Evolução do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga $u_4$ , na SMC. Exemplo 1b.....	58
Figura 28 – Evolução da variância, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga $u_4$ , na SMC. Exemplo 1b.....	59
Figura 29 – Valor esperado do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1b .....	59
Figura 30 – Variância do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1b .....	60
Figura 31 – Erro relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1b .....	60
Figura 32 – Erro relativo na variância do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1b .....	60
Figura 33 – Coeficiente de variação do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 1b .....	62
Figura 34 – Erro relativo no coeficiente de variação, do processo estocástico $u_i$ nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 1b .....	62
Figura 35 – Histogramas da variável randômica $u_4$ , exemplo 1b .....	63
Figura 36 – Estimativa da FDPA da variável randômica $u_4$ , exemplo 1b .....	63
Figura 37 – Evolução do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga $u_4$ , na SMC. Exemplo 2a.....	64
Figura 38 – Evolução da variância, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga $u_4$ , na SMC. Exemplo 2a.....	65
Figura 39 – Valor esperado do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2a .....	65

Figura 40 – Variância do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2a .....	66
Figura 41 – Erro relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2a .....	66
Figura 42 – Erro relativo na variância do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2a .....	66
Figura 43 – Coeficiente de variação do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 2a .....	68
Figura 44 – Erro relativo no coeficiente de variação, do processo estocástico $u_i$ nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 2a .....	68
Figura 45 – Histogramas da variável randômica $u_4$ , exemplo 2a .....	69
Figura 46 – Estimativa da FDPA da variável randômica $u_4$ , exemplo 2a .....	69
Figura 47 – Evolução do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga $u_4$ , na SMC. Exemplo 2b .....	70
Figura 48 – Evolução da variância, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga $u_4$ , na SMC. Exemplo 2b .....	71
Figura 49 – Valor esperado do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2b .....	71
Figura 50 – Variância do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2b .....	72
Figura 51 – Erro relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2b .....	72
Figura 52 – Erro relativo na variância do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2b .....	72
Figura 53 – Coeficiente de variação do processo estocástico de deslocamento $u_i$ nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 2b .....	74
Figura 54 – Erro relativo no coeficiente de variação, do processo estocástico $u_i$ nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 2b .....	74
Figura 55 – Histogramas da variável randômica $u_4$ , exemplo 2b .....	75
Figura 56 – Estimativa da FDPA da variável randômica $u_4$ , exemplo 2b .....	75



## LISTA DE TABELAS

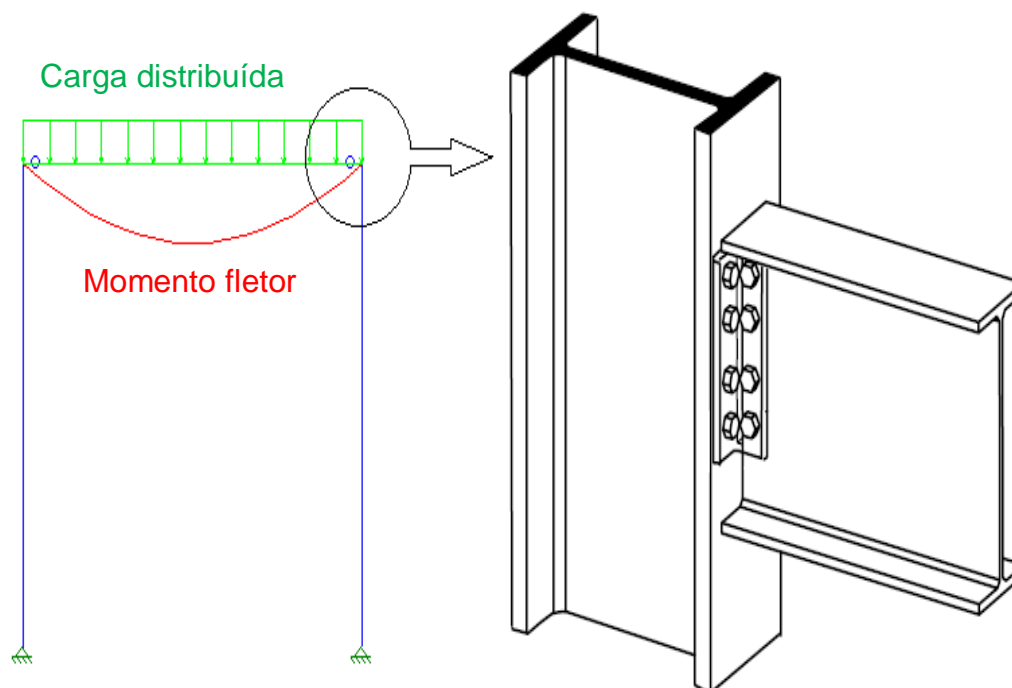
Tabela 1 –	Correspondência entre variáveis aleatórias e os polinômios do esquema de Askey-Wiener .....	33
Tabela 2 –	Média e desvio padrão dos parâmetros estocásticos.....	46
Tabela 3 –	Erros relativos da aplicação do método de Galerkin, no problema determinístico da viga biapoiada em fundação de Pasternak .....	49
Tabela 4 –	Erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento no centro do vão $u_4$ , exemplo 1a.....	53
Tabela 5 –	Coefficientes resultantes da aplicação do MEFE no exemplo 1a, utilizando 2 elementos finitos estocásticos e polinômios de grau $p=1$ ..	57
Tabela 6 –	Erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento no centro do vão $u_4$ , exemplo 1b.....	61
Tabela 7 –	Erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento no centro do vão $u_4$ , exemplo 2a.....	67
Tabela 8 –	Erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento no centro do vão $u_4$ , exemplo 2b.....	73
Tabela 9 –	Desvio relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento no centro da viga, em relação ao problema determinístico .....	76
Tabela 10 –	Tempo computacional para a obtenção da solução numérica dos exemplos .....	77

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>7</b>
1.1	Revisão da Literatura	10
1.2	Objetivos	15
1.3	Estrutura do Trabalho	16
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS</b>	<b>17</b>
2.1	Espaço de Probabilidades	17
2.2	Espaço de Sobolev $H^m(a,b)$	18
2.3	Lema de Lax-Milgram	19
<b>3</b>	<b>ABORDAGEM ESTOCÁSTICA DA VIGA DE EULER-BERNOULLI REPOUSANDO EM FUNDAÇÃO DE PASTERNAK</b>	<b>21</b>
3.1	Definição do Problema Estocástico	21
3.2	Problema Variacional	24
3.3	Teorema de Unicidade e Existência de Solução	25
<b>4</b>	<b>REPRESENTAÇÃO DE INCERTEZA</b>	<b>27</b>
4.1	O Esquema de Askey-Wiener	29
<b>5</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS</b>	<b>34</b>
5.1	Momentos Estatísticos	43
<b>6</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>45</b>
6.1	Definição da Malha Espacial	48
6.2	Exemplo 1a - Incerteza no Módulo Elástico da Viga	49
6.3	Exemplo 1b - Incerteza na Altura da Viga	58
6.4	Exemplo 2a - Incerteza no Parâmetro de Rigidez de Pasternak	64
6.5	Exemplo 2b - Incerteza no Parâmetro de Rigidez de Winkler	70
6.6	Comparação entre os Exemplos	76
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>78</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>80</b>

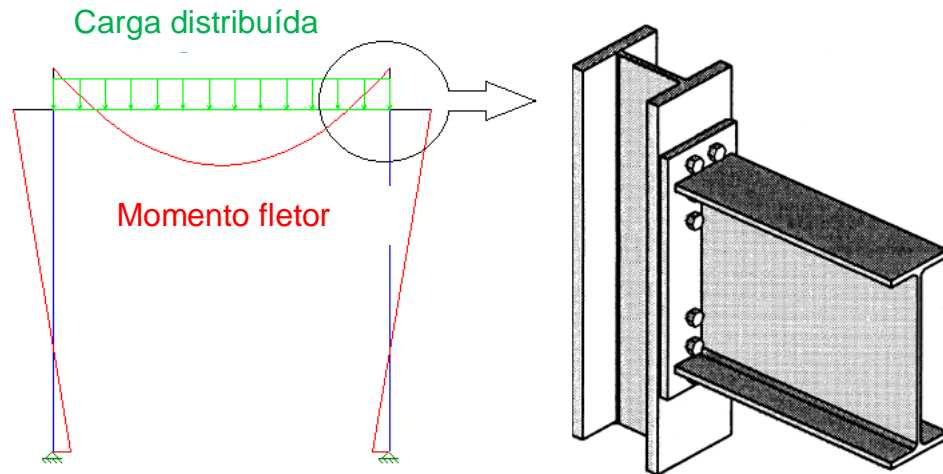
## 1 INTRODUÇÃO

Estruturas apoiadas são amplamente utilizadas na engenharia de estruturas. A posição e o comportamento mecânico dos suportes são determinantes na resposta mecânica do conjunto. Ligações entre membros estruturais metálicos são um exemplo da influência que o vínculo entre os elementos exerce sobre um conjunto estrutural. Por exemplo, a ligação metálica entre elementos do pórtico ilustrado na figura 1 não transfere esforços de flexão. Em contrapartida, o vínculo apresentado na figura 2 transmite momento fletor às colunas. Algumas aplicações práticas no campo da mecânica estrutural utilizam de estruturas continuamente suportadas por um meio deformável que na maioria dos casos é o solo. Sistemas como trilhos rodoferroviários, dutos para transporte de fluidos (figura 3), estacas de fundações profundas e tanques de armazenamento podem ser citados como exemplos de estruturas lateralmente contidas pelo solo. Devido à simplicidade geométrica, estas estruturas podem ser adequadamente avaliadas utilizando-se modelos lineares, como as teorias de viga de Euler-Bernoulli e placa de Kirchhoff, considerando ainda a influência do meio de apoio.



**Figura 1 – Pórtico com conexões articulares entre viga e colunas.**

**Fonte: Adaptado de The Steel Construction Institute, 2002, p.10.**



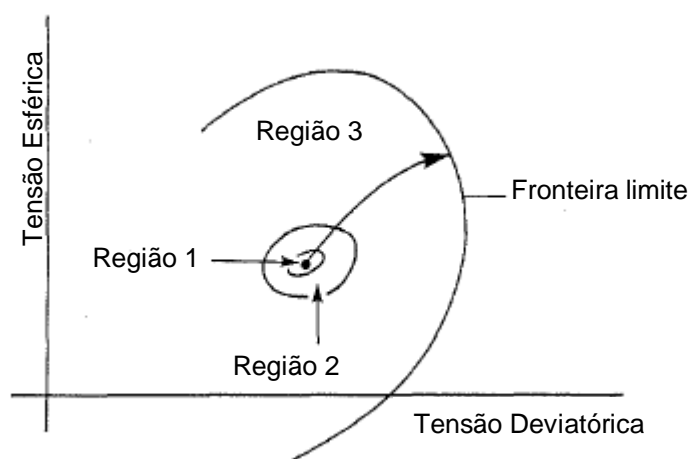
**Figura 2 – Pórtico com conexões rígidas entre viga e colunas.**  
**Fonte: Adaptado de The Steel Construction Institute, 1997, p.50.**



**Figura 3 – Tubulação para transporte de fluido suportada pelo solo.**  
**Fonte: American Iron and Steel Institute, 2007, p.25.**

Jardine (1992) propôs um modelo reológico não-linear para os solos. Neste modelo o estado de tensões do meio é descrito em uma relação entre tensões deviatóricas e tensões esféricas, conforme ilustrado na figura 4. Na região 1 o solo apresenta um comportamento elástico linear, dentro da região 2 o comportamento é elástico não-linear atribuído ao efeito do contato mecânico entre as partículas constituintes, na região 3 o solo se deforma irreversivelmente (comportamento

predominantemente plástico). Jardine afirma em seu estudo, que a posição das fronteiras de subescoamento é dependente do estado inicial de tensões (1992). A resposta mecânica dos solos depende ainda de características que podem variar significativamente ao longo da região de suporte da estrutura de interesse. Fatores como a composição, tamanho de grão, teor de umidade e nível de compactação são determinantes na rigidez do meio.



**Figura 4 – Modelo não-linear para o solo.**

**Fonte: Adaptado de Jardine, 1992, p. 2.**

A análise de sistemas estruturais que repousam em um meio deformável pode ser conduzida utilizando-se, por exemplo, modelos lineares de fundação elástica, ou uma abordagem da mecânica do contato. A maior parte dos modelos lineares baseia-se em hipóteses sobre o comportamento da reação que o solo exerce sobre o modelo mecânico da estrutura suportada, Dinev (2012). Destacam-se o modelo pioneiro de viga repousando em fundação elástica de Winkler (1867) e o modelo de Pasternak (1954). Em seu trabalho, Timoshenko (1940) afirma que para o problema de trilhos rodoferroviários, o modelo de Winkler apresentava boa concordância com medições experimentais. Utilizando o modelo de Winkler, Jones (1997) ilustra a solução numérica de diversos problemas práticos. A análise destes sistemas empregando a formulação de contato unilateral apresenta maiores dificuldades e custo computacional. O problema de contato é não-linear, mesmo para o caso em que os meios que experimentam contato possuem comportamento linear, Wriggers (2006). A não-linearidade é decorrente do fato de não se conhecer previamente a região dos corpos que experimentará contato na condição de

equilíbrio. A energia potencial total do sistema nesta condição é encontrada iterativamente e descrita de maneira explícita com a utilização de métodos como o da penalidade e o do multiplicador de Lagrange. Tanto as formulações lineares, quanto a de contato unilateral estão sujeitas à incerteza nos parâmetros que caracterizam o solo. Jones (1997) enfatiza que “o solo pode ser um material muito variável, a grande dificuldade na aplicação do modelo de fundação de Winkler é determinar o módulo de reação do solo (o parâmetro que caracteriza o meio de apoio) a ser utilizado na análise”. O mesmo autor afirma ser imperativo, considerar uma faixa de valores do módulo de reação na análise para se verificar a sensibilidade da resposta mecânica da estrutura. A aplicação de modelos lineares no contexto da mecânica estocástica é uma alternativa à prática corrente no campo da engenharia de estruturas (realizar simulações de Monte Carlo). A próxima seção é dedicada a apresentar alguns dos modelos lineares de viga repousando em fundação elástica e também estudos recentes no campo da mecânica estocástica.

## 1.1 Revisão da Literatura

### Modelos Mecânicos Lineares de Viga apoiada em Fundação Elástica

Tais abordagens utilizam um modelo mecânico para a estrutura suportada e consideram a influência do solo por meio de um carregamento externo. Originalmente Winkler (1867) utilizou a teoria de viga de Euler-Bernoulli como modelo mecânico da estrutura de interesse, descrita pelo seguinte problema de valor de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in C^4(0,1), \text{ tal que,} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right] (x) = f(x), \quad \forall x \in (0,1); \\ u(x=0) = u_0; \quad u(x=1) = u_1; \\ \frac{du}{dx}(x=0) = \theta_0; \quad \frac{du}{dx}(x=1) = \theta_1, \end{array} \right. \quad (1)$$

sendo  $(EI)$  a rigidez à flexão da viga e  $f$  o carregamento externo.

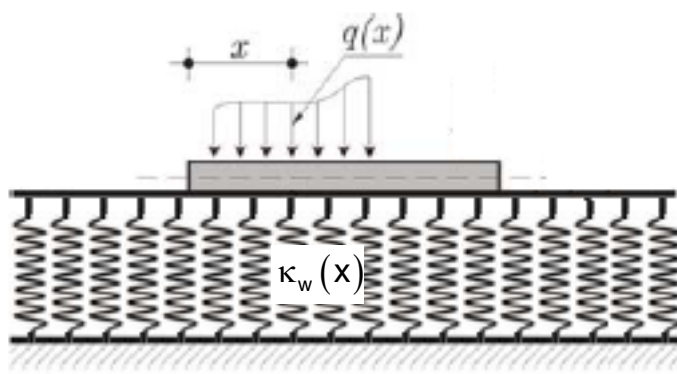
### Fundação de Winkler

O modelo de Winkler (1867) assume que a força de reação que o solo exerce sobre um determinado ponto da viga, é proporcional à deflexão da viga neste ponto. Dinev (2012) faz uma analogia deste modelo com um sistema de molas verticais, independentes e de rigidez  $\kappa_w$ , conforme ilustrado na figura 5. A partir disso, o carregamento externo resultante na viga assume a forma:

$$f(x) = q(x) - (\kappa_w u)(x). \quad (2)$$

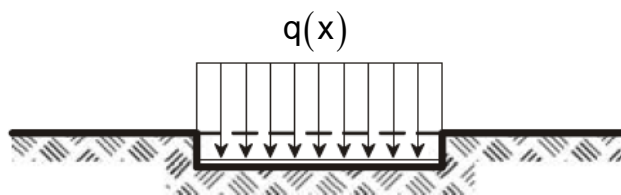
Substituindo a equação (2) na equação (1) obtém-se a formulação clássica da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação de Winkler (base elástica):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in C^4(0,1), \text{ tal que,} \\ \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \kappa_w u \right] (x) = q(x), \quad \forall x \in (0,1); \\ u(x=0) = u_0; \quad u(x=1) = u_1; \\ \frac{du}{dx}(x=0) = \theta_0; \quad \frac{du}{dx}(x=1) = \theta_1. \end{array} \right. \quad (3)$$



**Figura 5 – Analogia para a fundação de Winkler.**  
**Fonte: Adaptado de Teodoru e Musat, 2008, p. 71.**

O trabalho de Teodoru et al. (2006) destaca que a principal deficiência do modelo de Winkler, é a existência de descontinuidades de deslocamento, na interface entre regiões carregadas e não-carregadas, conforme é representado na figura 6.



**Figura 6 – Descontinuidade do deslocamento no modelo de Winkler.**  
**Fonte: Adaptado de Teodoru e Musat, 2008, p. 70.**

### Fundação de Pasternak

O modelo de Pasternak (1954) restaura a continuidade do deslocamento da viga, introduzindo um termo difusivo à força de reação do solo. Desta forma, o carregamento externo resultante torna-se:

$$f(x) = q(x) - (\kappa_w u)(x) + \frac{d}{dx} \left( \kappa_p \frac{du}{dx} \right) (x). \quad (4)$$

Por conseguinte, a formulação clássica da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação elástica de Pasternak, é enunciada da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in C^4(0,1), \text{ tal que,} \\ \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( \kappa_p \frac{du}{dx} \right) + \kappa_w u \right] (x) = q(x), \forall x \in (0,1); \\ u(x=0) = u_0; \quad u(x=1) = u_1; \\ \frac{du}{dx}(x=0) = \theta_0; \quad \frac{du}{dx}(x=1) = \theta_1. \end{array} \right. \quad (5)$$

Os modelos de fundação de Pasternak (1954), de Filonenko-Borodich (1940), Hentenyi (1946), Reissner (1958) e Vlasov-Leontiev (1966) utilizam o parâmetro adicional  $\kappa_p$ , e são usualmente denominados modelos de fundação a dois parâmetros. No modelo de Pasternak o segundo parâmetro representa o módulo de cisalhamento de uma camada virtual, que interage com os elementos de mola verticais (figura 7). A formulação de Vlasov-Leontiev (1966) considera o solo um meio elástico-linear, isotrópico, contínuo e homogêneo. Assume-se ainda que a partir de



uma determinada profundidade conhecida do solo, os efeitos do carregamento externo da estrutura são desprezíveis. Vlasov e Leotiev (1966) utilizaram hipóteses sobre o campo de deslocamentos do solo até esta profundidade e consideraram a contribuição da energia de deformação do solo no funcional de energia potencial total da viga de Euler-Bernoulli. Da condição de equilíbrio deste funcional resulta (5). O modelo de Hentenyi (1946) adquire continuidade de deslocamentos ao considerar o solo um meio composto por três camadas. A primeira camada, imediatamente abaixo da estrutura apoiada, e a terceira são fundações de Winkler com parâmetros de rigidez independentes. Abaixo da terceira camada considera-se que a fundação não experimenta deslocamentos. A segunda camada é um elemento de viga hipoteticamente imerso no solo. Relacionando os carregamentos atuantes nas vigas (suportada e imersa) às duas fundações de Winkler, obtém-se um problema de valor de contorno de oitava ordem, que pode ser expresso em termos de duas constantes características do solo.

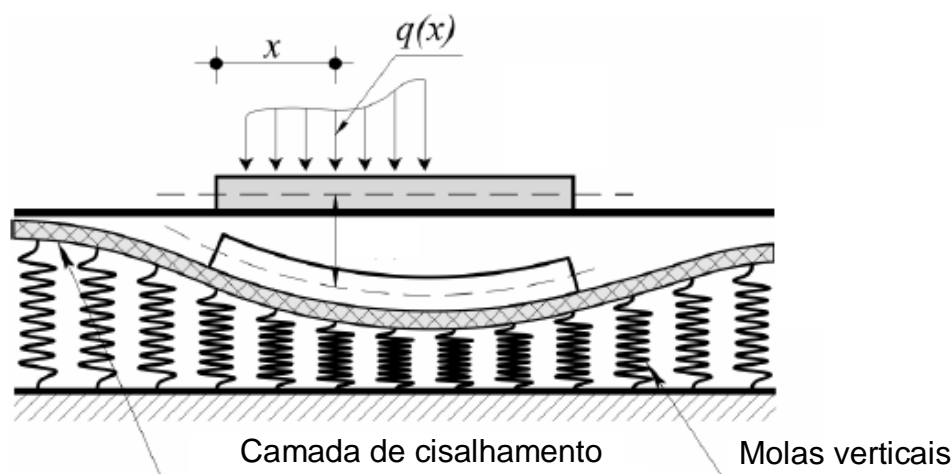


Figura 7 – Representação esquemática do modelo de fundação de Pasternak.  
Fonte: Adaptado de Teodoru e Musat, 2010, p. 2.

### Retrospecto no Campo da Mecânica Estocástica em Problemas de Flexão Estocástica de Vigas

A mecânica estocástica incorpora a aleatoriedade ou incerteza na formulação matemática dos problemas mecânicos. Por outro lado, o campo mais estabelecido da confiabilidade estrutural considera a aleatoriedade e a incerteza utilizando-se modelos mecânicos determinísticos.

A utilização de métodos numéricos tem tornado a análise de sistemas estocásticos atrativa nos últimos anos. Inicialmente o método dos elementos finitos

foi combinado com Simulações de Monte Carlo (SMC) para a obtenção de estatísticas associadas à solução de problemas mecânicos. Em seu estudo, Araújo e Awruch (1994) comparam resultados obtidos aplicando os métodos de SMC, SMC combinadas a expansões de Neumann e Expansões em Séries de Taylor, juntamente com a aplicação do método dos elementos finitos tradicional, na solução do problema de flexão estocástica de uma viga (problema com incerteza nas propriedades de rigidez do material ao longo do domínio). Spanos e Ghanem (1989) utilizaram o método de Galerkin, para solucionar um problema de flexão de uma viga com incerteza no módulo de Young, que foi descrito como um processo Gaussiano. O espaço de soluções aproximadas foi gerado utilizando-se um subconjunto finito de funções, de um sistema total no espaço das variáveis aleatórias com variância finita.

O trabalho de Babuska, Tempone e Zouraris (2004) representou um grande avanço para o campo da mecânica estocástica ao apresentar uma versão estocástica do lema de Lax-Milgram, utilizado para avaliar a existência e unicidade de solução de problemas de valor de contorno elípticos. Estes autores demonstraram que para alguns problemas mecânicos, a utilização de processos Gaussianos para representar a incerteza em parâmetros pode acarretar a perda de coercividade da forma bilinear associada ao problema. Esta dificuldade foi encontrada também por Silva Jr. (2004) resultando na não-convergência da solução para um problema de flexão de placas com propriedades estocásticas. Esta deficiência na solução também ocorre nos métodos da Perturbação e de Monte Carlo e decorre da utilização de processos Gaussianos na modelagem dos parâmetros aleatórios, não garantindo a unicidade e existência da solução. Não há validade nos resultados obtidos com uma formulação inconsistente, entretanto ainda encontram-se estudos recentes, nos quais se utilizam processos Gaussianos para representar propriedades mecânicas estritamente positivas. Os trabalhos de Chen e Guedes Soares (2008), Sett et al. (2011) e Sarsri et al. (2011) são exemplos. Grande esforço tem sido empregado na representação da incerteza através de processos não-Gaussianos. Xiu e Karniadakis (2002) apresentam o esquema de Askey-Wiener, que representa uma família de polinômios que são densos no espaço de probabilidade de diferentes variáveis aleatórias.

Vanmarcke e Grigoriu (1983) estudaram a flexão de uma viga de Timoshenko com incerteza no módulo de cisalhamento. Elishakoff (1995) empregou a teoria do cálculo Médio Quadrático para obter as equações governantes da média e da

variância de deslocamentos em problemas de flexão estocástica de vigas. Ghanem e Spanos (1991) utilizaram o método de Galerkin, juntamente com a decomposição espectral de Karhunen-Loeve para representar a incerteza no módulo de flexão de uma viga por meio de um processo Gaussiano. Chakraborty e Sarkar (2000) aplicou a série de Neumann o método de Monte Carlo para obter estimativas dos momentos estatísticos da deflexão de vigas curvas com incerteza na rigidez da fundação de apoio. Apesar de apresentarem resultados numéricos para o problema de flexão de vigas, estes autores não avaliam a existência e unicidade de solução em seus trabalhos.

Tendo em vista o panorama apresentado nos parágrafos anteriores, são definidos a seguir os objetivos deste trabalho.

## **1.2 Objetivos**

O presente estudo tem como objetivo geral a análise teórico-numérica do problema de flexão estocástica da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação de Pasternak. O modelo de Pasternak será utilizado devido à simplicidade de sua formulação e capacidade de descrever aplicações práticas. O problema estocástico será caracterizado pela incerteza nos parâmetros de rigidez da viga e da fundação, em substituição à análise de sensibilidade usualmente conduzida no campo da engenharia para a aplicação do modelo de Winkler, Jones (1997). Uma metodologia baseada no método de Galerkin será empregada para a obtenção de soluções aproximadas do deslocamento transversal da viga. A existência e unicidade de solução serão demonstradas utilizando-se a versão do lema de Lax-Milgram apresentada no estudo de Babuska et al. (2005). O espaço de soluções aproximadas será gerado utilizando-se uma família de polinômios pertencentes ao esquema de Askey-Wiener, permitindo assim a aplicação do método de Galerkin na formulação estocástica proposta. Este estudo apresenta uma metodologia que pode ser aplicada na solução de problemas estocásticos de diferentes áreas da engenharia, analogamente à metodologia proposta por Silva Jr., Beck e Suarez (2013).

### 1.3 Estrutura do Trabalho

O conteúdo deste trabalho é apresentado em sete capítulos. O capítulo introdutório contextualiza o problema de uma estrutura repousando em fundação elástica, apresentando aplicações práticas e abordagens possíveis. Alguns modelos lineares de fundação e trabalhos relevantes no campo da mecânica estocástica são expostos na revisão da literatura, fundamentando os objetivos definidos para o estudo. O segundo capítulo resume conceitos das teorias de probabilidades e de espaços de funções utilizados no trabalho.

O capítulo três apresenta o problema estocástico da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação elástica de Pasternak. O espaço de Sobolev de soluções é definido, no qual é demonstrada a unicidade e existência de solução. O capítulo quatro demonstra a metodologia para a representação do espaço das variáveis aleatórias com variância finita através de uma família de funções adequadas. Encontra-se ainda presente neste capítulo a construção dos processos parametrizados que descrevem a incerteza nos coeficientes de rigidez da viga e da fundação.

O capítulo cinco é dedicado à aplicação do método dos elementos finitos estocásticos na formulação variacional proposta, e também à análise das implicações computacionais do problema aproximado obtido. O sexto capítulo apresenta a solução analítica do problema determinístico, assim como uma avaliação da discretização espacial empregada na solução aproximada. São ilustrados exemplos numéricos da aplicação do método dos elementos finitos estocásticos e os resultados são comparados, em termos de momentos estatísticos, aos obtidos por meio de simulações de Monte Carlo. Por fim, o capítulo sete apresenta as principais conclusões deste trabalho.

## 2 DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

O presente capítulo tem como objetivo expor os principais conceitos matemáticos utilizados neste trabalho, tomando como referência os trabalhos de Rao e Swift (2010), Kreizsig (1989) e Adams (1975).

### 2.1 Espaço de Probabilidades

Considera-se o conjunto não vazio  $\{\Omega\}$ , denominado espaço amostral, constituído por todos os resultados elementares  $\omega$  de um experimento randômico;  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra de  $\{\Omega\}$ , constituída por subconjuntos do mesmo; e  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma medida de probabilidade tal que  $0 \leq P(A)$ ,  $\forall A \in \mathcal{F}$ , e  $P(\Omega) = 1$ . A partir disto, a tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é denotada espaço de probabilidades.

Uma variável aleatória  $X(\omega): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável na  $\sigma$ -álgebra de Borel:

$$\Lambda = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

que associa a cada evento  $\Lambda$ , um valor real  $x$ . A função distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X$  é um mapeamento  $F_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dado por:

$$F_x(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

A variável aleatória  $X$  é absolutamente contínua se e somente se  $\exists \rho_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho_x(x) \geq 0$ , tal que:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \rho_x(s) ds, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

na qual  $\rho_x(\cdot)$  é a função densidade de probabilidade.

A variável aleatória  $X$  possui um valor esperado, se é integrável no senso:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega). \quad (9)$$

## 2.2 Espaço de Sobolev $H^m(a,b)$

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial, munido de produto interno e completo (toda sequência de Cauchy de elementos do espaço converge para um elemento do mesmo). Este espaço generaliza os conceitos de ortogonalidade e comprimento, para espaços vetoriais de qualquer dimensão. Em particular, o espaço de Hilbert  $L^2(a,b)$  é constituído por funções reais e contínuas no intervalo, e possui produto interno definido por:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(a,b)} = \int_a^b (u \cdot v)(x) dx \quad \forall u, v \in L^2(a,b). \quad (10)$$

Este produto interno induz a seguinte norma:

$$\|u\|_{L^2(a,b)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L^2(a,b)}}, \quad \forall u, v \in L^2(a,b). \quad (11)$$

O espaço de Sobolev  $H^m(a,b)$  é um espaço de Hilbert, de funções que pertencem a  $L^2(a,b)$ , tal que as derivadas de ordem até 'm' também pertencem a  $L^2(a,b)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . O produto interno em  $H^m(a,b)$  é definido da seguinte forma:

$$\langle u, v \rangle_{H^m(a,b)} = \int_a^b (u \cdot v + Du \cdot Dv + \dots + D^m u \cdot D^m v)(x) dx \quad \forall u, v \in H^m(a,b). \quad (12)$$

O espaço de soluções do problema variacional abstrato (P.V.A.) a ser apresentado é um espaço de Sobolev.

O espaço das variáveis aleatórias contínuas com variância finita é um espaço de Hilbert, denotado por  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . O produto interno neste espaço é expresso em termos do operador esperança:

$$\langle X, Y \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)} = \mathbb{E}[X \cdot Y] \quad \forall X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (13)$$

Entende-se por espaço Gaussiano linear um subconjunto de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  composto por variáveis aleatórias Gaussianas centradas (média zero). Um espaço Gaussiano de Hilbert  $\mathcal{H} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é um espaço Gaussiano linear completo. Seja  $\eta(\omega)$  um vetor  $n$ -dimensional cujas componentes são variáveis aleatórias Gaussianas padronizadas e independentes, tem-se:

$$\text{span}\{\eta_1(\omega), \dots, \eta_n(\omega)\} = \left\{ X \in \mathcal{H}_n \mid X = \sum_{i=1}^n a_i \eta_i(\omega), \quad a_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (14)$$

como um exemplo de espaço Gaussiano de Hilbert (Alexanderian, 2013).

Conforme exposto no trabalho de Kreizsig (1989), um isomorfismo  $T$  de um espaço de produto interno  $H$  no espaço de produto interno  $\hat{H}$ , é um operador linear bijetivo  $T : H \rightarrow \hat{H}$  que preserva a estrutura do produto interno (e a métrica induzida):

$$\langle u, v \rangle_H = \langle Tu, Tv \rangle_{\hat{H}}, \quad \forall u, v \in H. \quad (15)$$

O mesmo autor afirma que espaços isomórficos são algebricamente indistinguíveis, diferindo apenas na natureza de seus elementos.

### 2.3 Lema de Lax-Milgram

As medidas de norma e produto interno do espaço de Sobolev permitem a avaliação de mapeamentos com domínio neste espaço (funcionais e formas). As propriedades e definições de espaços de Hilbert, que serão utilizadas na demonstração de unicidade e existência de solução do P.V.A., são as seguintes:

**Def (Funcional linear limitado).** Seja  $V$  um espaço de Hilbert e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear,  $f$  é limitado (e contínuo) se  $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$ , tal que:

$$|f(v)| \leq c \|v\|_V, \quad \forall v \in V; \quad (16)$$

**Def (Forma bilinear limitada).** Seja  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear,  $a$  é limitada (e contínua) se  $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$ , tal que:

$$|a(u,v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u,v \in V; \quad (17)$$

**Def (Forma bilinear coerciva).** A forma bilinear  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é coerciva se  $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$ , tal que:

$$|a(u,u)| \geq c \|u\|_V^2, \quad \forall u,v \in V; \quad (18)$$

**Def (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).** A desigualdade de Cauchy-Schwarz para o espaço de Hilbert  $V$  é expressa por:

$$|\langle u,v \rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u,v \in V. \quad (19)$$

O capítulo seguinte apresenta a formulação estocástica do problema da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação de Pasternak, no contexto dos espaços de funções anteriormente definidos.



### 3 ABORDAGEM ESTOCÁSTICA DA VIGA DE EULER-BERNOULLI REPOUSANDO EM FUNDAÇÃO DE PASTERNAK

#### 3.1 Definição do Problema Estocástico

A formulação forte do problema a ser estudado, a viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação de Pasternak com incerteza nos parâmetros de rigidez, é definida da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in L^2((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}); H^4(0,1)), \text{ tal que,} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left( \kappa_p \frac{du}{dx} \right) + \kappa_w u = q, \forall (x, \omega) \in (0,1) \times \Omega; \quad \text{q.s.} \\ u(0, \omega) = u(1, \omega) = 0; \\ \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{(0, \omega)} = \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{(1, \omega)} = 0, \quad \forall \omega \in \Omega; \quad \text{q.s.} \end{array} \right. \quad (21)$$

na qual  $EI$ ,  $\kappa_p$  e  $\kappa_w$  são processos estocásticos. Neste estudo a viga será considerada simplesmente apoiada nas extremidades. As seguintes hipóteses são necessárias à verificação de existência e unicidade de solução do problema variacional associado à formulação forte:

$$\mathbf{H1}: \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}(\omega \in \Omega : EI(x, \omega) \in [\underline{a}, \bar{a}], \forall x \in [0,1]) = 1; \\ \exists \underline{b}, \bar{b} \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \kappa_p(x, \omega) \in [\underline{b}, \bar{b}], \forall x \in [0,1]) = 1; \\ \exists \underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \kappa_w(x, \omega) \in [\underline{c}, \bar{c}], \forall x \in [0,1]) = 1. \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\mathbf{H2}: q \in L^2((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}); H^0(0,1))$$

A hipótese **H1** é necessária para assegurar que para qualquer evento  $\omega$ , os coeficientes de rigidez da viga e da fundação são estritamente positivos, e ainda limitados em probabilidade, Babuska et al. (2002). A hipótese **H2** garante que o carregamento externo seja um processo estocástico com variância finita.

A demonstração de unicidade e existência de solução utilizará de resultados clássicos de análise funcional e da teoria dos espaços de Sobolev; Babuska et al. (2005), Yoshida (1978) e Adams (1975). O estudo de unicidade e existência de

solução fornece informações importantes na escolha dos espaços de aproximação do problema variacional, permitindo a obtenção de soluções numéricas para o problema. O espaço de soluções do problema variacional associado à formulação (21) é o espaço de Sobolev  $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; Q)$ . Neste espaço, tem-se que para um evento fixo  $\omega \in \Omega$ :

$$Q = \left\{ u(\cdot, \omega) \in H^2(0,1) \mid u(0, \omega) = u(1, \omega) = 0 \wedge \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{(0, \omega)} = \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{(1, \omega)} = 0 \right\}. \quad (23)$$

Para um evento  $\omega \in \Omega$ , fixado, o campo deslocamentos da viga  $u(\cdot, \omega)$  pertence ao espaço de Sobolev  $H^2(0,1)$ . Neste espaço, o produto interno entre  $u, v \in H^2(0,1)$  é definido por:

$$\langle u, v \rangle_{H^2(0,1)} = \int_0^1 \left( u \cdot v + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \right) (x) dx, \quad (24)$$

o qual induz a norma:

$$\|u\|_{H^2(0,1)} = \left[ \int_0^1 \left( u^2 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 \right) (x) dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Visto que  $u \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; Q)$ , tem-se que:

$$\int_{\Omega} \|u(\omega)\|_{H^2(0,1)}^2 dP(\omega) < +\infty. \quad (26)$$

A equação (26) implica que  $u \in V : (0,1) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável. Por outro lado, para uma posição fixa  $x \in (0,1)$ , no domínio espacial, tem-se que:

$$u(x, \cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad (27)$$

é uma variável aleatória, ou seja,  $u(x, \cdot): (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{F}_x)$ .

A aplicação do método de Galerkin requer uma representação explícita do espaço de soluções  $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; Q)$ . O espaço de soluções a ser utilizado no problema variacional será gerado utilizando-se um isomorfismo entre o espaço de soluções teórico  $V$  e o espaço obtido através do produto tensorial  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q$ . Seguindo Treves(1967) e Besold (2000), define-se o produto tensorial entre  $g \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e  $w \in Q$  como  $u := w.g$ . Nota-se que de maneira equivalente à equação (23), para um evento fixo  $\omega \in \Omega$  tem-se:

$$u(\cdot, \omega) = w(\cdot).g(\omega) \in Q, \quad (28)$$

e em concordância com (27), para uma posição fixa do domínio espacial  $x \in (0,1)$  segue:

$$u(x, \cdot) = w(x).g(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (29)$$

Os espaços  $V$  e  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q$  são isomorfos se a medida presente em  $V$ , explicitada na equação (26), for conservada. Para tanto, é necessário definir o operador derivada  $D^\alpha : L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes L^2(0,1)$ . Este operador atua sobre um elemento  $u \in V$  da seguinte forma, Matthies e Keese (2005):

$$D^\alpha u : \left( \frac{d^\alpha w}{dx^\alpha} \right)(x).g(\omega), \quad (30)$$

no qual  $\alpha \in \mathbb{N}$  e  $\alpha \leq 2$ . Desta forma, o produto interno entre elementos  $u := w.g$  e  $v := q.h$  de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q$  é expresso por:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q} = \int_{\Omega} \int_0^1 \left( w \cdot g \cdot q \cdot h + g \cdot h \cdot \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dq}{dx} + g \cdot h \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \cdot \frac{d^2q}{dx^2} \right) (x, \omega) dx dP(\omega), \quad (31)$$

e conseqüentemente, para a norma em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q$  tem-se:

$$\|u\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q} = \left[ \int_{\Omega} \int_0^1 \left( (g \cdot w)^2 + \left( g \cdot \frac{dw}{dx} \right)^2 + \left( g \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \right) (x, \omega) dx dP(\omega) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (32)$$

A equação (32) preserva a medida apresentada na equação (26) de tal forma que  $V \sim L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q$ , são espaços isomorfos, observando que para  $(u)_V = (w \cdot g)_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q}$ , tem-se:

$$\left( \int_{\Omega} \|u(\omega)\|_{H^2(0,1)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q}. \quad (33)$$

Portanto,  $V \sim L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q$  será o espaço de soluções do problema variacional definido sobre  $V$ . Considerando o operador derivada apresentado em (30),  $V$  é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{\Omega} \int_0^1 (u \cdot v + Du \cdot Dv + D^2u D^2v) (x, \omega) dx dP(\omega). \quad (34)$$

Utilizando o resultado clássico de espaços de Hilbert, o produto interno definido em (34) induz a norma  $\|u\|_V = \langle u, u \rangle_V^{\frac{1}{2}}$ .

### 3.2 Problema Variacional

A formulação variacional associada ao problema da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação elástica de Pasternak é obtida projetando-se a equação (21) em  $v(x, \omega) \in V$ , ou seja:

$$\int_{\Omega} \int_0^1 \left[ D^2(EI D^2 u) - D \left( \kappa_p \frac{du}{dx} \right) + \kappa_w u \right] v(x, \omega) dx dP = \int_{\Omega} \int_0^1 (qv)(x, \omega) dx dP. \quad (35)$$

A equação (35) pode ser simplificada integrando-se por partes o termo ao lado esquerdo da igualdade. Aplicando a condição de contorno de simples apoio equação (21), obtém-se a formulação variacional do problema:

$$\int_{\Omega} \int_0^1 (\kappa_w uv + \kappa_p DuDv + EI D^2 u D^2 v)(x, \omega) dx dP(\omega) = \int_{\Omega} \int_0^1 (qv)(x, \omega) dx dP, \quad (36)$$

a qual pode ser descrita utilizando-se o problema variacional abstrato:

$$\begin{cases} \text{Encontre } u \in V, \text{ tal que,} \\ a(u, v) = f(v), \forall v \in V. \end{cases} \quad (37)$$

no qual,  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear e  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear, definidos a seguir:

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \int_0^1 (\kappa_w uv + \kappa_p DuDv + EI D^2 u D^2 v)(x, \omega) dx dP(\omega); \\ f(v) = \int_{\Omega} \int_0^1 (qv)(x, \omega) dx dP. \end{cases} \quad (38)$$

### 3.3 Teorema de Unicidade e Existência de Solução

Nesta seção é apresentado o teorema, baseado na versão estocástica do lema de Lax-Milgran proposta por Babuska et. al (2005), que garante a unicidade e existência de solução do P.V.A. definido na equação (37).

**Teorema (Existência e unicidade de solução do P.V.A).** Sejam  $EI$ ,  $\kappa_p$  e  $\kappa_w$  parâmetros de rigidez do P.V.A. que satisfazem a condição **H1**, e 'q' um termo de carregamento externo que satisfaz **H2**, então a solução do problema (37) existe e é única.

**(Demonstração).** Nota-se que o funcional  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , é linear no espaço de Hilbert  $V$ , e ainda limitado (e contínuo) considerando a hipótese teórica **H2**. Com relação à forma bilinear  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , considerando-se a hipótese teórica **H1** e através de comparações, verifica-se sua coercividade:

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= \int_{\Omega} \int_0^1 \left( \kappa_w u^2 + \kappa_p (Du)^2 + EI (D^2u)^2 \right) (x, \omega) dx dP(\omega) \\
 &\geq \int_{\Omega} \int_0^1 \left( \underline{c} u^2 + \underline{b} (Du)^2 + \underline{a} (D^2u)^2 \right) (x, \omega) dx dP(\omega) \\
 &\geq m \int_{\Omega} \int_0^1 \left( u^2 + (Du)^2 + (D^2u)^2 \right) (x, \omega) dx dP(\omega) \geq m \langle u, u \rangle_V = m \|u\|_V^2,
 \end{aligned} \tag{39}$$

sendo  $m = \min\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ . A continuidade da forma bilinear é demonstrada utilizando-se ainda a desigualdade de Cauchy-Schwarz, equação (19),

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \int_0^1 (\kappa_w uv + \kappa_p DuDv + EID^2uD^2v) (x, \omega) dx dP(\omega) \right| \\
 &\leq \bar{c} \left| \int_{\Omega} \int_0^1 (uv) dx dP(\omega) \right| + \bar{b} \left| \int_{\Omega} \int_0^1 (DuDv) dx dP(\omega) \right| + \bar{a} \left| \int_{\Omega} \int_0^1 (D^2uD^2v) dx dP(\omega) \right| \\
 &\leq \bar{c} \left[ \int_{\Omega} \int_0^1 u^2 (x, \omega) dx dP(\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} \int_0^1 v^2 (x, \omega) dx dP(\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \bar{b} \left[ \int_{\Omega} \int_0^1 (Du)^2 (x, \omega) dx dP(\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} \int_0^1 (Dv)^2 (x, \omega) dx dP(\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \bar{a} \left[ \int_{\Omega} \int_0^1 (D^2u)^2 (x, \omega) dx dP(\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} \int_0^1 (D^2v)^2 (x, \omega) dx dP(\omega) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \bar{c} \|u\|_V \|v\|_V + \bar{b} \|u\|_V \|v\|_V + \bar{a} \|u\|_V \|v\|_V \leq C \|u\|_V \|v\|_V,
 \end{aligned} \tag{40}$$

com  $C/3 = \max\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ . Desta forma o lema de Lax-Milgram garante que a solução do P.V.A., definido na equação (37), existe e é única. Soluções teóricas para o problema (37) são obtidas em  $V \sim L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \otimes Q$ .

A partir disso, serão obtidas soluções numéricas do P.V.A. utilizando-se funções contínuas de classe  $C^2$ , densas em  $Q$ , e para representar o comportamento estocástico da solução, os polinômios do caos pertencentes ao esquema de Askey-Wiener serão empregados.

## 4 REPRESENTAÇÃO DE INCERTEZA

Em muitos problemas de engenharia, uma análise dos momentos estatísticos de ordem superior não é possível. Na maioria das aplicações, as informações estatísticas disponíveis são os momentos de primeira e segunda ordem. Geralmente, a função de distribuição de probabilidade a ser utilizada na descrição de processos estocásticos, é escolhida com base na experiência ou heurística. Partindo-se de informações incompletas a respeito da distribuição de probabilidade de um parâmetro, assume-se, por hipótese, que o comportamento aleatório deste, pode ser representado em um espaço de dimensão finita, conforme discutido em Boyaval et al. (2009) e Lin et al. (2010). A partir disso, a incerteza sobre um dado parâmetro do problema  $\vartheta: (0,1) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  será representada em termos de um conjunto finito de variáveis aleatórias,

$$\vartheta(\mathbf{x}, \omega) = \vartheta(\mathbf{x}, \xi(\omega)) = \vartheta(\mathbf{x}, \xi_1(\omega), \dots, \xi_N(\omega)), \quad (41)$$

sendo  $\xi: (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}^N$  um vetor randômico. Com base nesta escolha, a incerteza nos coeficientes de rigidez da viga e da fundação será modelada através de processos estocásticos parametrizados. Estes processos são expressos como combinações lineares de funções determinísticas e variáveis aleatórias,

$$\vartheta(\mathbf{x}, \omega) = \mu_\vartheta(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) \xi_i(\omega) = \mu_\vartheta(\mathbf{x}) + \Phi^t(\mathbf{x}) \cdot \xi(\omega), \quad (42)$$

na qual  $\mu_\vartheta(\mathbf{x})$  é o valor esperado do processo estocástico  $\vartheta(\cdot, \cdot)$ ,  $\Phi: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^N$  um vetor cujas componentes são funções  $\varphi_i \in C_0(0,1) \cap C^2(0,1)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ , e  $\xi(\omega) = \{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^N$  é um vetor de variáveis aleatórias independentes, tal que:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\xi_i] = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\ \mathbb{P}(\omega \in \Omega : \xi_i(\omega) \in \Gamma_i) = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{cases} \quad (43)$$

sendo  $\Gamma_i$  o conjunto imagem da variável aleatória  $\xi_i$ , isto é,  $\Gamma_i = \xi_i(\Omega)$ . Este é um conjunto limitado tal que  $\Gamma_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$  e  $|\Gamma_i| = |b_i - a_i| < \infty, \forall i \in \{1, \dots, N\}$ . Considerando a independência das variáveis aleatórias  $\xi_i$ , a imagem do vetor aleatório  $\xi : \Omega \rightarrow (\Gamma \subset \mathbb{R}^N)$  pode ser expressa em termos de  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$ , explicitamente  $\Gamma = \prod_{i=1}^N \Gamma_i$ . A função densidade de probabilidade conjunta do vetor aleatório é dada por:

$$\rho(\xi(\omega)) = \prod_{i=1}^N \rho_i(\xi_i), \quad (44)$$

na qual  $\rho_i(\cdot)$  é a função densidade de probabilidade da variável  $\xi_i$ . A teoria de medida e integração, Fernandez (2002), estabelece que neste caso, a medida de probabilidade é obtida através do produto entre os espaços de probabilidade associados ao vetor aleatório  $\xi(\omega) = \{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^N$ , com  $\xi_i : \Omega \rightarrow \Gamma_i$ . Desta forma a medida de probabilidade  $dP(\cdot)$  é expressa por:

$$dP(\xi(\omega)) = \prod_{i=1}^N \rho_i(\xi_i) d\xi_i. \quad (45)$$

Do lema de Doob-Dynkin apresentado por Rao e Swift (2010), o processo estocástico de deflexão da viga será função das variáveis aleatórias  $\xi(\omega) = \{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^N$  que descrevem os parâmetros de entrada:

$$u(\mathbf{x}, \omega) = u(\mathbf{x}, \xi(\omega)) = u(\mathbf{x}, \xi_1(\omega), \dots, \xi_N(\omega)). \quad (46)$$

Adicionalmente, o esquema de Askey-Wiener será utilizado na construção de uma base polinomial para o espaço de Hilbert das variáveis aleatórias com variância finita, o qual compõe o espaço de soluções do problema (37).



#### 4.1 O Esquema de Askey-Wiener

O esquema de Askey-Wiener, apresentado no trabalho de Xiu e Karniadakis (2002), também conhecido como Wiener-Caos é, essencialmente, uma generalização da teoria dos polinômios do caos, proposta originalmente por Norbert Wiener (1938). Neste estudo os polinômios do caos surgiram com o propósito de permitir a representação da dinâmica de gases no contexto da mecânica estatística. Xiu e Karniadakis (2002) evidenciaram a relação entre os resultados apresentados por Wiener (1938) e aqueles encontrados por Askey e Wilson (1985), para a representação de processos estocásticos utilizando polinômios ortogonais. Xiu e Karniadakis (2002) estenderam os estudos de Ghanem e Spanos (1991) e Ogura (1972) para os polinômios pertencentes ao esquema de Askey-Wiener.

O teorema de Cameron-Martin (1947) mostrou que os polinômios do esquema de Askey-Wiener, formam uma base para um subespaço denso no espaço das variáveis aleatórias com variância finita,  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Seja  $\mathcal{H} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço Gaussiano de Hilbert e  $\mathcal{H} = \text{span}\left\{\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\right\}$  uma base ortonormal de variáveis aleatórias Gaussianas com média zero. O esquema de Askey-Wiener permite a representação de qualquer variável aleatória,  $u \in L^2(\Omega, \sigma(\mathcal{H}), \mathbb{P})$ , sendo  $\sigma(\mathcal{H})$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{H}$ . Considerando o espaço vetorial  $\mathcal{P}_n(\mathcal{H}) \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , composto por polinômios multivariados de grau menor ou igual a “n”:

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{H}) = \left\{ \begin{array}{l} \Psi\left(\{\xi_i\}_{i=1}^N\right) : \Psi \text{ polinômio de grau } \leq n; \\ \xi_i \in \mathcal{H}, \forall i = 1, \dots, N; \quad N < \infty \end{array} \right\}. \quad (47)$$

Alexanderian (2013) ressalta que  $\mathcal{P}_n(\mathcal{H})$  é um espaço vetorial devido ao fato de que os momentos estatísticos, de todas as ordens, do produto entre variáveis aleatórias Gaussianas independentes é igual ao produto dos momentos individuais. Denotando por  $\overline{\mathcal{P}}_n$  o fecho do conjunto  $\mathcal{P}_n$  em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e analisando a equação (47), nota-se que:

- $\mathcal{P}_0(\mathcal{H}) = \overline{\mathcal{P}}_0(\mathcal{H})$  é o conjunto das variáveis aleatórias constantes;
- $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$  é formado por variáveis aleatórias Gaussianas;

- $\{\mathcal{P}_0(\mathcal{H}), \mathcal{P}_1(\mathcal{H}), \mathcal{P}_2(\mathcal{H}), \dots\}$  é uma família de subconjuntos estritamente crescentes.

Utilizando-se estes conjuntos de polinômios é possível formar uma família de subconjuntos de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\{\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2, \dots\}$ , tal que estes subconjuntos sejam ortogonais aos pares. Para tanto, define-se:

$$\mathcal{H}^0 = \overline{\mathcal{P}_0(\mathcal{H})}, \quad \mathcal{H}^n = \overline{\mathcal{P}_n(\mathcal{H})} \cap \overline{\mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{H})}^\perp. \quad (48)$$

Nesta equação, o conjunto  $\mathcal{H}^n$  possui apenas polinômios de ordem 'n' que são ortogonais aos polinômios de ordem 'n-1'. Jason (1997) demonstra que o espaço  $L^2(\Omega, \Sigma(\mathcal{H}), \mathbb{P})$  admite a seguinte decomposição ortogonal,

$$L^2(\Omega, \Sigma(\mathcal{H}), \mathbb{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^n. \quad (49)$$

A equação (49) é uma decomposição ortogonal de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , conhecida como decomposição de Wiener-Caos, na qual o espaço  $L^2(\Omega, \Sigma(\mathcal{H}), \mathbb{P})$  é a soma direta dos subespaços  $\mathcal{H}^n$ .

Uma aplicação desta decomposição é a representação de um elemento  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  em termos de elementos  $X_n \in \mathcal{H}^n$ :

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \quad (50)$$

Equivalentemente  $X_n$  é a projeção da variável aleatória  $X$  no espaço  $\mathcal{H}^n$ . É importante ressaltar que a equação (50) representa um resultado importante para a teoria de aproximação, aplicada a sistemas estocásticos. A solução de sistemas estocásticos é expressa como uma função não-linear em termos de variáveis aleatórias. Esta função é expandida em termos de polinômios de caos (generalizados) conforme equação (51),

$$u_i(\omega) = \sum_{p \geq 0} \sum_{n_1 + \dots + n_r = p} \sum_{i_1, \dots, i_r} u_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_r} \psi_p(\xi_{i_1}(\omega), \dots, \xi_{i_r}(\omega)), \quad (51)$$

sendo  $\psi_p$  o polinômio generalizado de grau “p” e  $u_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_r}$  coeficientes. O índice superior  $(\cdot)^{j_1, \dots, j_r}$  refere-se ao número de ocorrências de  $\xi_{i_k}(\omega)$ . Como um exemplo de expansão em polinômios generalizados de grau “p”, têm-se os polinômios multivariados de Hermite, definidos em termos de variáveis aleatórias Gaussianas padrão  $\xi(\omega) = \{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^r$ . Estes polinômios formam um conjunto total em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Introduzindo o mapeamento nos conjuntos de índices  $\{i_k\}_{k=1}^r$  e  $\{j_k\}_{k=1}^r$ , por meio de uma enumeração no conjunto dos números naturais, a equação (51) pode ser reescrita como:

$$u(\omega) = \sum_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda \psi_\lambda(\xi(\omega)). \quad (52)$$

Para o espaço Gaussiano de Hilbert  $\mathcal{H}$ , os polinômios generalizados são polinômios de Hermite multidimensionais:

$$\psi_\lambda(\xi(\omega)) = \prod_{m=1}^{\infty} h_{\lambda_m}(\xi_m(\omega)), \quad (53)$$

sendo  $h_{\lambda_m}(\cdot)$  o polinômio de Hermite definido na variável aleatória  $\xi_m$ . Estes polinômios formam um sistema ortonormal completo em relação à medida de probabilidade,

$$\psi_0 = 1, \quad \langle \psi_i, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)} = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \quad (54)$$

sendo o produto interno em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  definido na equação (13), e  $\delta_{ij}$  o símbolo delta de Kronecker.

Para demonstrar a expansão através dos polinômios generalizados, considera-se a aproximação da variável aleatória  $u(\omega) \in L^2(\Omega, \sigma(\mathcal{H}), P)$ , com a

utilização de polinômios de Hermite de grau até dois, definidos em termos de duas variáveis aleatórias Gaussianas padrão  $\xi(\omega) = \{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\omega) \approx u_1 \psi_{(0,0)}(\xi) + u_2 \psi_{(0,1)}(\xi) + u_3 \psi_{(1,0)}(\xi) \\ \quad + u_4 \psi_{(1,1)}(\xi) + u_5 \psi_{(0,2)}(\xi) + u_6 \psi_{(2,0)}(\xi); \\ \\ \psi_{(i,j)}(\xi) = h_i(\xi_1) h_j(\xi_2); \quad i, j \in \{0, 1, 2\}; \\ \\ h_0(\xi_k) = 1; \quad h_1(\xi_k) = 2\xi_k; \quad h_2(\xi_k) = 4\xi_k^2 - 2; \quad k \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \quad (55)$$

É importante observar que na equação (55) os polinômios são ortogonais em relação à função densidade de probabilidade conjunta do vetor  $\xi$ . A taxa de convergência é exponencial, para o caso em que a variável aleatória  $u(\omega)$  é Gaussiana, Xiu e Karniadakis (2002). Para outras variáveis aleatórias a taxa de convergência é inferior.

O esquema de Askey-Wiener estende o resultado apresentado na equação (52) para outras famílias de polinômios. Analogamente à equação (47), considerando-se  $\mathcal{P}_n(\mathcal{H}) = \text{span}\langle \{\psi_i\}_{i=1}^n \rangle$ , com  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert de variáveis aleatórias com variância finita, tem-se que  $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\mathcal{H})$  é uma família de polinômios do esquema de Askey-Wiener, que formam um sistema total em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

O esquema de Askey-Wiener representa uma família de sub-espços gerados por polinômios ortogonais, que são solução de equações diferenciais ordinárias, Xiu e Karniadakis (2002). Como exemplos podem ser citados os polinômios de Hermite, Laguerre, Jacobi e Legendre. Todo sub-espço gerado por estes polinômios é um sistema completo em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . A ortogonalidade entre os polinômios é definida com relação a uma função peso, a qual é idêntica à função densidade de probabilidade de uma determinada variável aleatória. Por exemplo, a função densidade Gaussiana é utilizada como função peso para se obter ortogonalidade entre os polinômios Hermite. A tabela 1 ilustra a correspondência entre subconjuntos

de polinômios pertencentes ao esquema de Askey-Wiener e as funções densidade de probabilidade adequadas.

**Tabela 1 – Correspondência entre as variáveis aleatórias e os polinômios do esquema de Askey-Wiener.**

Variável aleatória	Polinômio	Função peso	Suporte
Gaussiana	Hermite	$e^{-\frac{ x ^2}{2}}$	$\mathbb{R}$
Gama	Laguerre	$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \xi^\alpha e^{-\xi}$	$[0, +\infty)$
Beta	Jacobi	$\frac{2^{-(\alpha+\beta+1)} \Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta e^{-\xi}$	$[a, b]$
Uniform	Legendre	$\frac{1}{b-a}$	$[a, b]$

O esquema de Askey-Wiener será empregado na proposição de uma solução aproximada para o processo estocástico de deslocamento transversal da viga, que é dependente das variáveis aleatórias empregadas na modelagem dos parâmetros com incerteza. A escolha do tipo de variável aleatória a ser utilizada na modelagem dos parâmetros randômicos, deve levar em consideração as características do parâmetro a ser modelado. Por exemplo, para a modelagem de parâmetros que podem assumir valores limitados, as variáveis aleatórias uniforme e beta podem ser utilizadas.

## 5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS

O método dos elementos finitos estocásticos (MEFE) é muito útil para abordagem de problemas em mecânica que levam em conta incertezas em suas formulações, Ghanem e Spanos (1991). Semelhantemente ao que ocorre no método dos elementos finitos convencional, que é amplamente aplicado a problemas determinísticos, Reddy (2006), procede-se a ortogonalização do resíduo sobre o espaço  $V$ . Assim, para um elemento genérico  $(x_e, x_{e+1}) \subset (0,1)$  da partição do domínio espacial do problema (21), tem-se:

$$0 = \int_{\Omega} \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\kappa_w uv + \kappa_p DuDv + EI.D^2uD^2v - qv)(x, \omega) dx dP(\omega) + \int_{\Omega} \left( \left[ v.(D(EI.D^2u - \kappa_p Du)) \right]_{x_e}^{x_{e+1}} - \left[ Dv.(EI.D^2u) \right]_{x_e}^{x_{e+1}} \right) (\omega) dP(\omega), \quad \forall v \in V \quad (56)$$

Nota-se que a formulação variacional (56), definida no domínio de um elemento finito, requer que a solução aproximada seja de classe  $C^2([x_e, x_{e+1}], \mathbb{R})$ . Por outro lado, para que a solução aproximada atenda à continuidade ao longo do domínio global  $(0,1)$ , a solução aproximada em cada elemento deve satisfazer quatro condições de contorno essenciais na fronteira,  $[u(x, \omega)]_{x_e}^{x_{e+1}}$  e  $[(Du)(x, \omega)]_{x_e}^{x_{e+1}}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} u(x_e, \omega) &= u_1(\omega), \quad -Du(x_e, \omega) = \theta_1(\omega), \\ u(x_{e+1}, \omega) &= u_2(\omega), \quad -Du(x_{e+1}, \omega) = \theta_2(\omega), \end{aligned} \quad (57)$$

tendo em vista que no modelo mecânico da viga de Euler-Bernoulli, a rotação ‘ $\theta$ ’ das seções corresponde à derivada do deslocamento. Cada elemento finito requer a especificação de quatro condições de contorno, portanto a solução aproximada pode ser descrita através de um polinômio de terceiro grau:

$$u(x, \omega) \approx u_M(x, \omega) = C_1(\omega) + C_2(\omega)x + C_3(\omega)x^2 + C_4(\omega)x^3. \quad (58)$$

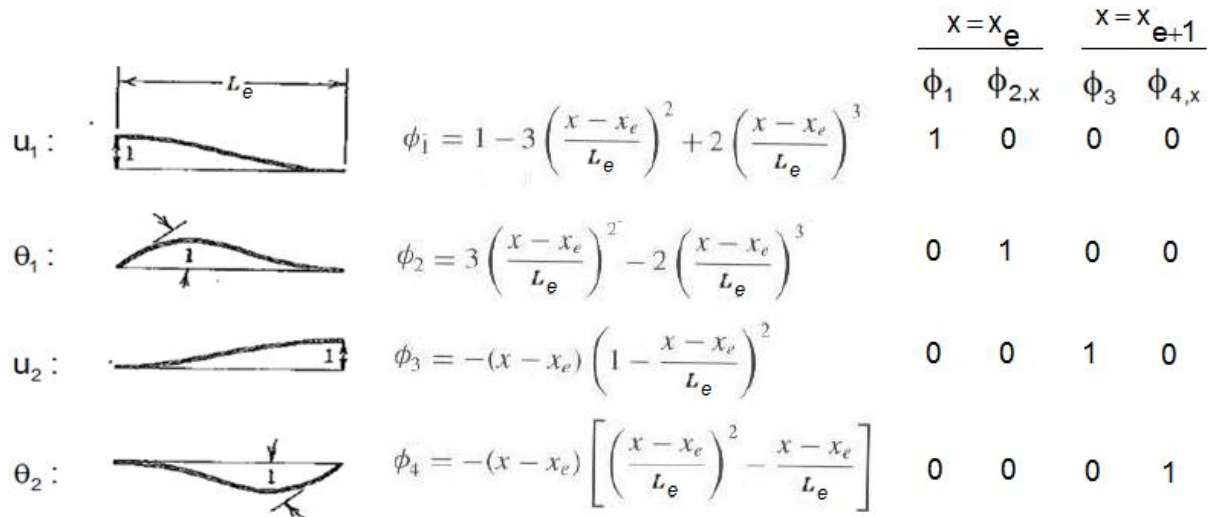
Nota-se que ao satisfazer as condições de contorno essenciais, a solução aproximada atende os requisitos de continuidade da formulação variacional, Reddy (2006). Os coeficientes estocásticos  $\{C_j(\omega)\}_{j=1}^4$  da solução aproximada  $u_M(x, \omega)$  podem ser expressos em termos dos “graus de liberdade estocásticos” de deslocamentos e rotações nas extremidades do elemento, notando que:

$$\begin{cases} u_1(\omega) = u_M(x_e, \omega) = C_1(\omega) + C_2(\omega)x_e + C_3(\omega)x_e^2 + C_4(\omega)x_e^3; \\ \theta_1(\omega) = -Du_M(x_e, \omega) = -C_2(\omega) - 2C_3(\omega)x_e - 3C_4(\omega)x_e^2; \\ u_2(\omega) = u_M(x_{e+1}, \omega) = C_1(\omega) + C_2(\omega)x_{e+1} + C_3(\omega)x_{e+1}^2 + C_4(\omega)x_{e+1}^3; \\ \theta_2(\omega) = -Du_M(x_{e+1}, \omega) = -C_2(\omega) - 2C_3(\omega)x_{e+1} - 3C_4(\omega)x_{e+1}^2. \end{cases} \quad (59)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (59) para  $\{C_j(\omega)\}_{j=1}^4$ , a solução aproximada  $u_M(x, \omega)$  pode ser reescrita na seguinte forma,

$$u_M(x, \omega) = u_1(\omega)\phi_1(x) + \theta_1(\omega)\phi_2(x) + u_2(\omega)\phi_3(x) + \theta_2(\omega)\phi_4(x), \quad (60)$$

na qual  $\phi_j(x)$  são os polinômios de Hermite ilustrados na figura 8, com  $L_e = x_{e+1} - x_e$ . Nota-se que para fornecer significado físico aos coeficientes estocásticos  $\{C_j(\omega)\}_{j=1}^4$  da solução aproximada, os polinômios utilizados na representação dos graus de liberdade do modelo mecânico possuem valor unitário na posição correspondente ao grau descrito, e zero para os demais.



**Figura 8 – Funções de aproximação do espaço de soluções determinístico correspondentes aos graus de liberdade do problema estático.**

Fonte: Adaptado de Cook, 1989, p. 101.

O comportamento estocástico da solução aproximada é representado utilizando-se a família de polinômios de caos  $\Psi = \text{span} \left\langle \{ \psi_i \}_{i=1}^{\infty} \right\rangle$ , que formam um conjunto denso no espaço  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Considerando a hipótese de representação da incerteza em um espaço de dimensão finita, o espaço das variáveis aleatórias com variância finita será aproximado pelo espaço  $\Psi_n = \text{span} \left\langle \{ \psi_i \}_{i=1}^n \right\rangle$ . Aplicando-se a decomposição do caos nas variáveis aleatórias que representam os deslocamentos generalizados obtém-se:

$$\begin{aligned}
 u_M(x, \omega) &= \sum_{k=1}^n (u_1)_k \psi_k(\xi(\omega)) \phi_1(x) \\
 &+ \sum_{k=1}^n (\theta_1)_k \psi_k(\xi(\omega)) \phi_2(x) \\
 &+ \sum_{k=1}^n (u_2)_k \psi_k(\xi(\omega)) \phi_3(x) \\
 &+ \sum_{k=1}^n (\theta_2)_k \psi_k(\xi(\omega)) \phi_4(x) = \sum_{j=1}^{m-4} \sum_{k=1}^n U_{jk} \phi_j(x) \psi_k(\xi(\omega)),
 \end{aligned} \tag{61}$$



sendo  $U_{jk}$  um coeficiente de deslocamento estocástico generalizado e 'm' a dimensão do vetor de polinômios determinísticos  $\Phi_m = \{\phi_j\}_{j=1}^m$ . A representação do comportamento randômico da solução aproximada através da combinação linear de polinômios do caos, que são definidos em termos de variáveis aleatórias, é permitida notando que o espaço dos polinômios, equação (47), é um espaço linear. A dimensão do espaço  $\Psi_n$  ( $n = \dim\langle\Psi_n\rangle$ ) depende da dimensão do vetor aleatório  $\xi(\omega)$  e do grau da decomposição em polinômios generalizados do caos (PCG). Denotando por "s" a dimensão de  $\xi(\omega) = \{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^s$  e "p" o grau da decomposição em PCG, Ghanem e Spanos (1989) demonstram que a dimensão de  $\Psi_n$  é dada por:

$$n = \frac{(s+p)!}{s!p!}. \quad (62)$$

Observando que  $\dim\langle\Phi_m\rangle < \infty$  e  $\dim\langle\Psi_n\rangle < \infty$ , a dimensão do espaço das soluções aproximadas  $V_M = \Phi_m \otimes \Psi_n$  é expressa por, Ryan (2002),

$$M = \dim(V_M) = \dim(\Phi_m \otimes \Psi_n) = \dim(\Phi_m) \cdot \dim(\Psi_n) = m \cdot n. \quad (63)$$

Aplicando-se uma enumeração adequada aos componentes de  $U_{jk}$  e  $\phi_j \cdot \psi_k$ , equação (61), a solução aproximada do processo estocástico de deslocamento transversal da viga pode ser escrita de maneira compacta:

$$u_M(x, \omega) = \sum_{i=1}^M u_i N_i(x, \xi(\omega)), \quad (64)$$

sendo,

$$N_i(x, \xi(\omega)) = \phi_j(x) \cdot \psi_k(\xi(\omega)). \quad (65)$$

Considera-se a seguinte notação para as condições de contorno naturais da equação (56),  $\left[ \left( D(EI.D^2u - \kappa_p Du) \right) (x, \omega) \right]_{x_e}^{x_{e+1}}$  e  $\left[ (EI.D^2u) (x, \omega) \right]_{x_e}^{x_{e+1}}$ ,

$$\begin{cases} -F_1(\omega) = \left( D(EI.D^2u - \kappa_p Du) \right) (x_e, \omega) \approx \sum_{k=1}^n (Q_1)_k \psi_k(\xi(\omega)), \\ -M_1(\omega) = (EI.D^2u) (x_e, \omega) \approx \sum_{k=1}^n (Q_2)_k \psi_k(\xi(\omega)), \\ F_2(\omega) = \left( D(EI.D^2u - \kappa_p Du) \right) (x_{e+1}, \omega) \approx \sum_{k=1}^n (Q_3)_k \psi_k(\xi(\omega)), \\ M_2(\omega) = (EI.D^2u) (x_{e+1}, \omega) \approx \sum_{k=1}^n (Q_4)_k \psi_k(\xi(\omega)), \end{cases} \quad (66)$$

sendo  $\sum_{k=1}^n (Q_j)_k \psi_k(\xi(\omega))$  a decomposição do caos, dos esforços cortantes  $F_1(\omega)$  e  $F_2(\omega)$ , e momentos fletores  $M_1(\omega)$  e  $M_2(\omega)$  estocásticos, nos nós do elemento finito.

Procedendo de modo análogo ao método dos elementos finitos usual, o método de Galerkin é aplicado através da ortogonalização do resíduo sobre o espaço de soluções aproximadas, formado pelas funções teste  $N_j(x, \xi(\omega))$ , obtendo-se a forma discretizada do problema apresentado na equação (37):

$$\begin{cases} \text{Encontre } \{u_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M, \text{ tal que,} \\ \sum_{i=1}^M a(N_i, N_j) u_i = f(N_j), \forall N_j \in V_M; \end{cases} \quad (67)$$

na qual,

$$\begin{cases} a(N_i, N_j) = \int_{\Omega} \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\kappa_w \cdot N_i \cdot N_j + \kappa_p D N_i \cdot D N_j + EI.D^2 N_i \cdot D^2 N_j) (x, \omega) dx dP(\omega), \\ f(N_j) = \int_{\Omega} \int_{x_e}^{x_{e+1}} (q N_j) (x, \omega) dx dP - q_j(\omega). \end{cases} \quad (68)$$

Na equação (68),  $q_j(\omega) = (Q_i)_k \psi_k(\xi(\omega))$  é uma enumeração equivalente à utilizada na equação (65), para os componentes das decomposições do caos, dos carregamentos externos nodais.

Neste contexto, o sistema de equações algébricas resultante pode ser reescrito do seguinte modo,

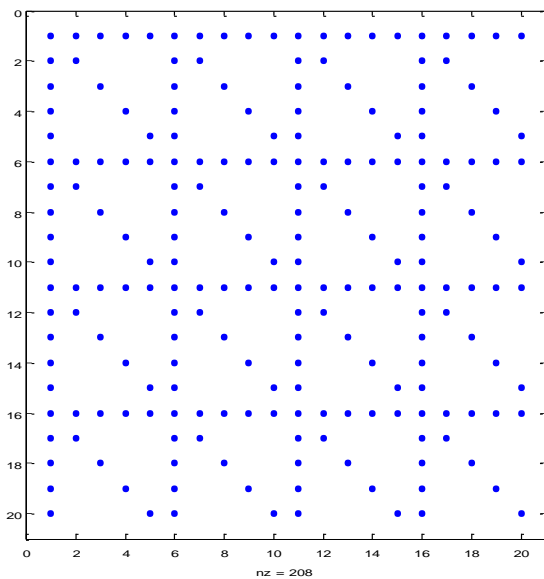
$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (69)$$

sendo  $\mathbf{K} \in \mathbb{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$  uma matriz quadrada, definida sobre o campo escalar  $\mathbb{R}$  e com ordem  $M \times M$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^M$  o vetor de carregamento e  $\mathbf{U} = \{u_i\}_{i=1}^M$  o vetor de coeficientes a determinar. Os elementos da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e do vetor de carregamento  $\mathbf{F}$  são dados por:

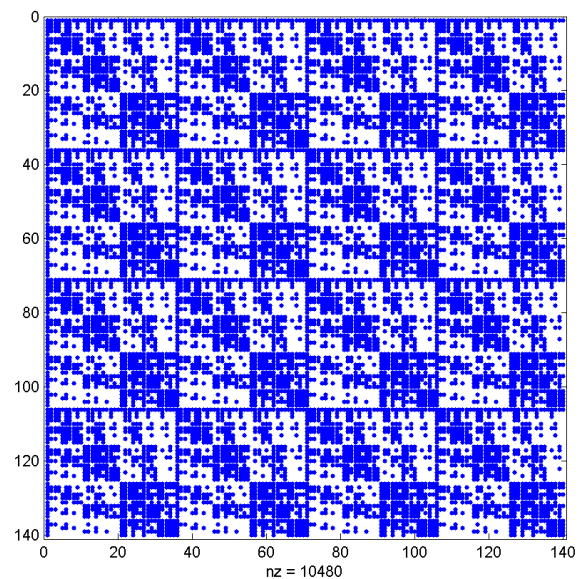
$$\begin{aligned} \mathbf{K} = [k_{ij}]_{M \times M}, \quad k_{ij} = & \int_{\Omega} \int_{x_e}^{x_e+1} (\kappa_w \cdot N_i \cdot N_j)(x, \omega) dx dP(\omega) \\ & + \int_{\Omega} \int_{x_e}^{x_e+1} (\kappa_p \cdot D N_i \cdot D N_j)(x, \omega) dx dP(\omega) \\ & + \int_{\Omega} \int_{x_e}^{x_e+1} (EI \cdot D^2 N_i \cdot D^2 N_j)(x, \omega) dx dP(\omega), \end{aligned} \quad (70)$$

$$\mathbf{F} = \{f_j\}_{j=1}^M, \quad f_j = \int_{\Omega} \int_{x_e}^{x_e+1} (q \cdot N_j)(x, \omega) dx dP(\omega) - q_j(\omega). \quad (71)$$

Nota-se na equação (70) que a ordem da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , depende da dimensão do espaço de soluções aproximadas, equação (63). O custo computacional para a obtenção de soluções aproximadas cresce com o aumento do grau da decomposição do caos utilizada. A eficiência do método dos elementos finitos estocásticos pode ser melhorada se a estrutura de esparsidade da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  for considerada, evitando-se a computação de elementos nulos e utilizando armazenamento esparsa de  $\mathbf{K}$ . Esta estrutura é ilustrada nas figuras 9 e 10, para o problema de uma viga de seção retangular com incerteza na altura, variando-se o grau 'p' da decomposição em polinômios generalizados.



**Figura 9 – Matriz de rigidez calculada para  $p=1$ ,  $s=4$  e  $m=4$ .**



**Figura 10 – Matriz de rigidez calculada para  $p=3$ ,  $s=4$  e  $m=4$ .**

Definindo-se graus de liberdade estocásticos de deslocamentos e rotações, em cada elemento da partição (ou malha) do domínio espacial do problema, a matriz de rigidez global do sistema é obtida através da sobreposição dos graus de liberdade comuns às matrizes de cada elemento. De maneira análoga é construído o vetor de carregamentos global. As condições de contorno do problema são impostas aplicando-se os valores prescritos dos deslocamentos estocásticos generalizados no sistema de equações algébricas gerado.

Para exemplificar a construção da matriz de rigidez global utilizando o MEFE, considera-se o problema de uma viga em fundação de Pasternak biapoiada, em que o módulo elasticidade é modelado através de um processo estocástico parametrizado  $E(x, \xi(\omega))$ , o qual é descrito por quatro variáveis aleatórias uniformes e independentes ( $s=4$ ). Da tabela 1, os polinômios generalizados adequados à função peso da variável uniforme são os polinômios de Legendre, definidos até o grau três na equação a seguir:

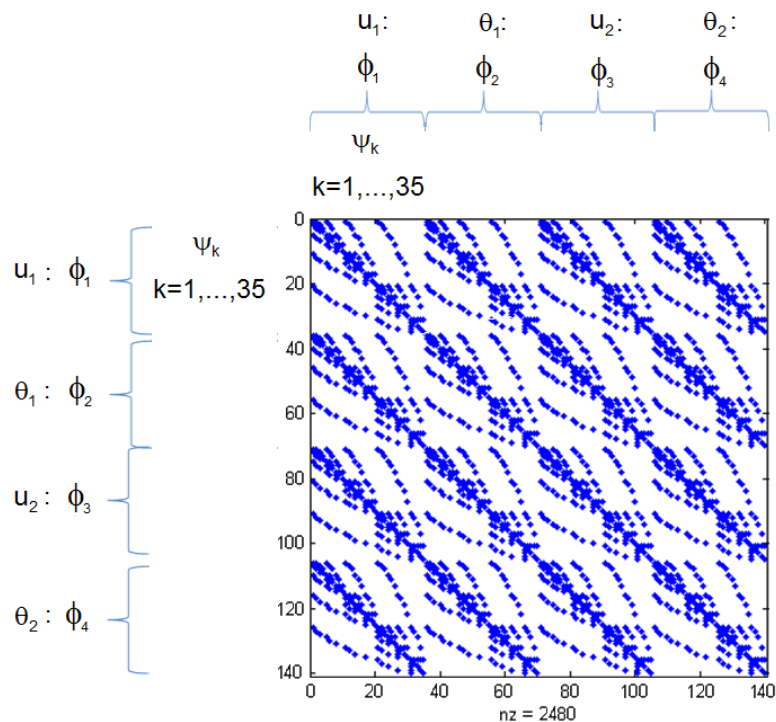
$$\begin{aligned} h_0(\xi_j) &= 1; & h_1(\xi_j) &= \xi_j; \\ h_2(\xi_j) &= \frac{1}{2}(3\xi_j^2 - 1); & h_3(\xi_j) &= \frac{1}{2}(5\xi_j^3 - 3\xi_j). \end{aligned} \quad (72)$$

Aplicando uma decomposição em polinômios generalizados de grau até três ( $p=3$ ), obtém-se um espaço  $\Psi_n$  com dimensão  $n=35$ , formado por polinômios multivariados de grau  $(i+j+m+n) \leq 3$ :

$$\Psi_k = \Psi_{(i,j,m,n)} = h_i(\xi_1)h_j(\xi_2)h_m(\xi_3)h_n(\xi_4), \quad i,j,m,n \in \{0,1,2,3\}, \quad (73)$$

sendo o índice  $k \in \{1, \dots, 35\}$  uma enumeração do multi-índice. Na figura 11 é apresentada a matriz de rigidez de um elemento finito estocástico, obtida para o exemplo em questão, ilustrando os índices determinístico e estocástico do espaço de soluções aproximadas.

A figura 12 ilustra a discretização do domínio espacial do problema utilizando-se dois elementos finitos estocásticos, assim como a matriz de rigidez global obtida com a sobreposição das matrizes elementares.



**Figura 11 – Matriz de rigidez local resultante da aplicação do método dos elementos finitos estocásticos.**

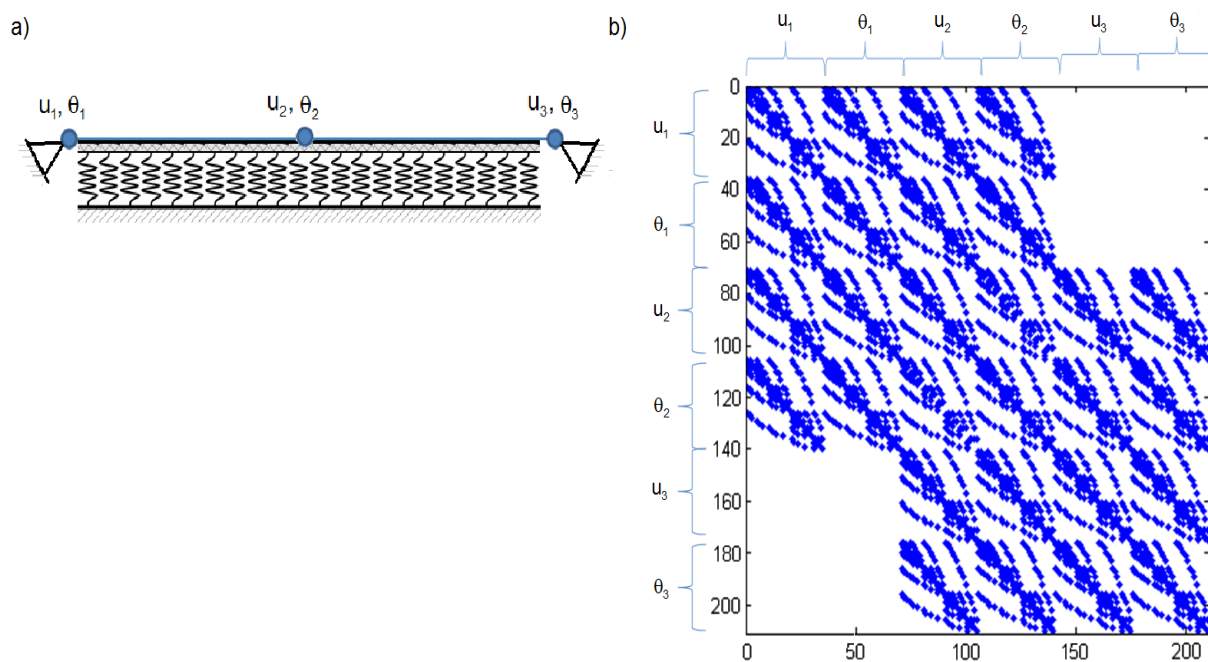


Figura 12 - a) Exemplo de discretização espacial. b) Matriz de rigidez global.

No exemplo da viga simplesmente apoiada, com a imposição dos deslocamentos  $u_1(\omega) = u_3(\omega) = 0$ , que implica em  $(u_1)_k = (u_3)_k = 0, \forall k \in \{1, \dots, 35\}$ , visto que os polinômios do caos são ortogonais, o sistema de equações (69) é simplificado. O sistema de equações lineares resultante é formado por uma matriz de rigidez, figura 13, e um vetor de carregamentos com condições de contorno aplicadas.

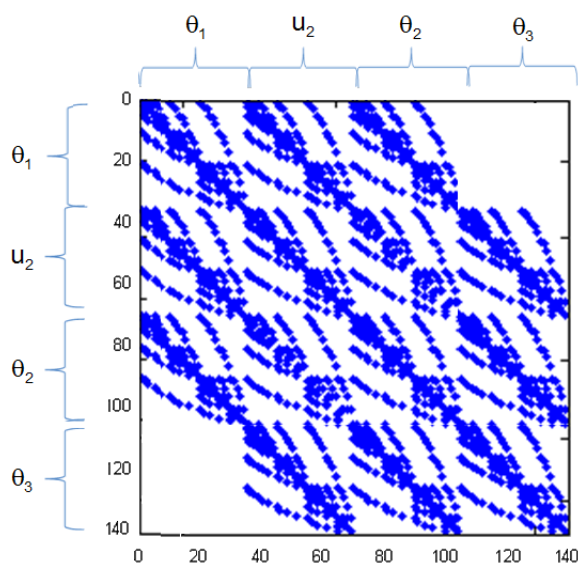


Figura 13 – Matriz de rigidez global com condições de contorno aplicadas.

## 5.1 Momentos Estatísticos

Os processos estocásticos de deslocamento e rotação nos nós dos elementos finitos estocásticos são expressos por:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i(\xi(\omega)) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}_i)_k \psi_k(\xi(\omega)), \\ \theta_i(\xi(\omega)) = \sum_{k=1}^n (\theta_i)_k \psi_k(\xi(\omega)), \end{cases} \quad (74)$$

sendo  $(\mathbf{u}_i)_k$  e  $(\theta_i)_k$  os coeficientes correspondentes aos graus de liberdade  $u_i$  e  $\theta_i$ , respectivamente, obtidos com a solução do sistema de equações (69). Os momentos estatísticos, de primeira e segunda ordem, destes processos estocásticos, são estimados no MEFE utilizando-se o operador esperança matemática:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\mathbf{u}_i] = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}_i)_k \psi_k dP(\omega), \\ \mathbb{E}[\theta_i] = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n (\theta_i)_k \psi_k dP(\omega), \end{cases} \quad (75)$$

e o operador variância:

$$\begin{cases} \sigma^2[\mathbf{u}_i] = \mathbb{E}[(\mathbf{u}_i)^2] - \mathbb{E}[\mathbf{u}_i]^2, \\ \sigma^2[\theta_i] = \mathbb{E}[(\theta_i)^2] - \mathbb{E}[\theta_i]^2. \end{cases} \quad (76)$$

O desempenho do MEFE é avaliado comparando-se os momentos estatísticos obtidos com a solução numérica aproximada, às respectivas estimativas obtidas com simulações de Monte Carlo (SMC). A simulação de Monte Carlo consiste na execução de três etapas: geração das amostras das variáveis aleatórias que modelam a incerteza; obtenção do conjunto de realizações do processo estocástico de solução; e a partir do conjunto de realizações, a estimativa dos momentos estatísticos. Os valores randômicos amostrais das variáveis aleatórias

são gerados com a rotina “rand” do programa computacional MATLAB. Para diminuir a correlação espúria do processo de geração, Olsson e Sandberg (2002), implementou-se o método Latin Hypercube Sampling (LHS). Em cada realização ‘j’ da SMC, a função determinística do parâmetro randômico é obtida, e o problema da viga em fundação de Pasternak, equação (5), é solucionado com a aplicação do método dos elementos finitos usual. Os deslocamentos  $u_i(\xi(\omega_j))$  e rotações  $\theta_i(\xi(\omega_j))$  nos nós são determinados, gerando-se uma amostra de tamanho ‘N’. Nos exemplos numéricos, os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, são calculados utilizando-se uma amostra de tamanho  $N=50.000$ . Na SMC, o valor esperado e a variância do processo estocástico  $u_i$  são definidos a seguir:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{u_i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_i(\xi(\omega_j)); \\ \hat{\sigma}_{u_i}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N [u_i(\xi(\omega_j)) - \hat{\mu}_{u_i}]^2. \end{cases} \quad (77)$$

Os momentos estatísticos obtidos por meio de simulações de Monte Carlo são considerados como valores de referência. Os valores resultantes da aplicação do MEFE são avaliados com a definição dos erros relativos:

$$\begin{cases} E_{\%}^{\mathbb{E}}(\mathbb{E}[u_i]) = \frac{|\mathbb{E}[u_i] - \hat{\mu}_{u_i}|}{\hat{\mu}_{u_i}}; \\ E_{\%}^{\sigma^2}(\sigma^2[u_i]) = \frac{|\sigma^2[u_i] - \hat{\sigma}_{u_i}^2|}{\hat{\sigma}_{u_i}^2}; \end{cases} \quad (78)$$

A amostra obtida com a SMC possibilita a geração do histograma e do gráfico de distribuição de probabilidade acumulada do processo estocástico de deflexão da viga. Os mesmos gráficos são obtidos no MEFE, através de ‘N’ realizações, gerando-se valores para as variáveis aleatórias que descrevem os processos estocásticos definidos na equação (74).



## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

O presente capítulo apresenta exemplos numéricos da aplicação do MEFE, ao problema de flexão estocástica da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação de Pasternak. Os exemplos avaliam o problema de uma viga simplesmente apoiada, de seção transversal retangular. Os valores dos parâmetros geométricos, e do termo de carregamento distribuído, comuns aos exemplos, são ilustrados na figura 14.

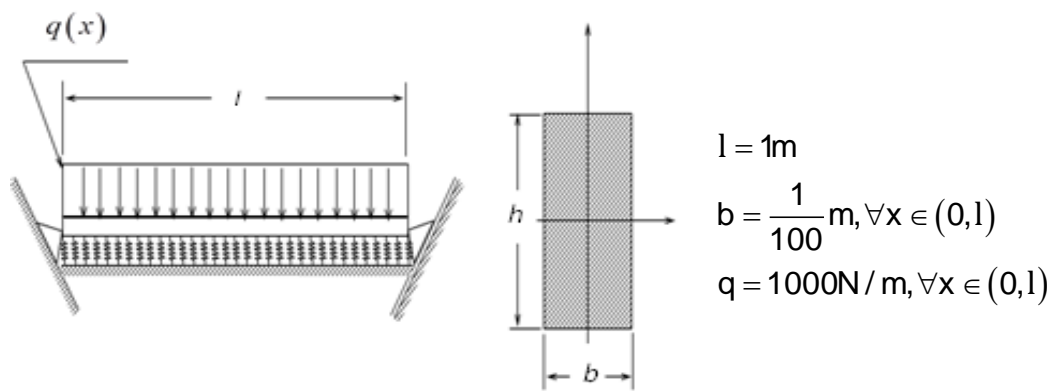


Figura 14 – Viga de seção retangular simplesmente apoiada em fundação de Pasternak.

A incerteza está presente nos coeficientes de rigidez da fundação  $\kappa_p : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\kappa_w : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , na altura da viga  $h : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , e no módulo de elasticidade  $E : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Os parâmetros randômicos são modelados utilizando-se os processos estocásticos parametrizados:

$$E(x, \xi(\omega)) = \mu_E + \sqrt{3} \cdot \sigma_E \sum_{n=1}^N \left[ \xi_{2,n-1}(\omega) \cos\left(\frac{x}{n.l}\right) + \xi_{2,n}(\omega) \sin\left(\frac{x}{n.l}\right) \right], \quad (79)$$

$$h(x, \xi(\omega)) = \mu_h + \sqrt{3} \cdot \sigma_h \sum_{n=1}^N \left[ \xi_{2,n-1}(\omega) \cos\left(\frac{x}{n.l}\right) + \xi_{2,n}(\omega) \sin\left(\frac{x}{n.l}\right) \right], \quad (80)$$

$$\kappa_p(x, \xi(\omega)) = \mu_{\kappa_p} + \sqrt{3} \cdot \sigma_{\kappa_p} \sum_{n=1}^N \left[ \xi_{2,n-1}(\omega) \cos\left(\frac{x}{n.l}\right) + \xi_{2,n}(\omega) \sin\left(\frac{x}{n.l}\right) \right], \quad (81)$$

$$\kappa_w(x, \xi(\omega)) = \mu_{\kappa_w} + \sqrt{3} \cdot \sigma_{\kappa_w} \sum_{n=1}^N \left[ \xi_{2,n-1}(\omega) \cos\left(\frac{x}{n.l}\right) + \xi_{2,n}(\omega) \sin\left(\frac{x}{n.l}\right) \right], \quad (82)$$

que são descritos por quatro variáveis aleatórias uniformes e independentes ( $N=2$ ), definidas no intervalo  $[-1,1]$ . Os valores considerados nos exemplos, para a média e o desvio padrão dos parâmetros, são apresentados na tabela 2.

**Tabela 2 – Media e desvio padrão dos parâmetros estocásticos.**

Parâmetro	Média $\mu_{(\cdot)}$	Desvio padrão $\sigma_{(\cdot)}$
$E(x, \xi(\omega))$	210GPa	$\mu_E/10$
$h(x, \xi(\omega))$	$1/50$ m	$\mu_h/10$
$\kappa_p(x, \xi(\omega))$	1000N	$\mu_{\kappa_p}/10$
$\kappa_w(x, \xi(\omega))$	1000Pa	$\mu_{\kappa_w}/10$

Este modelo de representação da incerteza permite o ajuste da distribuição de probabilidade do processo estocástico parametrizado, de acordo com dados obtidos experimentalmente. Na figura 15 é ilustrado um histograma do módulo de elasticidade, de uma liga de aço estrutural utilizado na indústria naval, obtido através de ensaios mecânicos, Hess et al. (2002).

O histograma apresentado na figura 16 foi gerado por meio de simulações de Monte Carlo ( $N=50.000$ ), utilizando-se o modelo proposto para o módulo de elasticidade, equação (79), considerando-se um ponto fixo no domínio espacial  $x^* = L/2$ . Na mesma figura são ilustrados os dados experimentais apresentados no trabalho de Hess et al. (2002). Aplicando outros tipos de variáveis aleatórias na descrição dos processos parametrizados (tabela 1), é possível obter diferentes formas de distribuição de probabilidade para o parâmetro com incerteza, desde que a hipótese **H1** seja atendida.

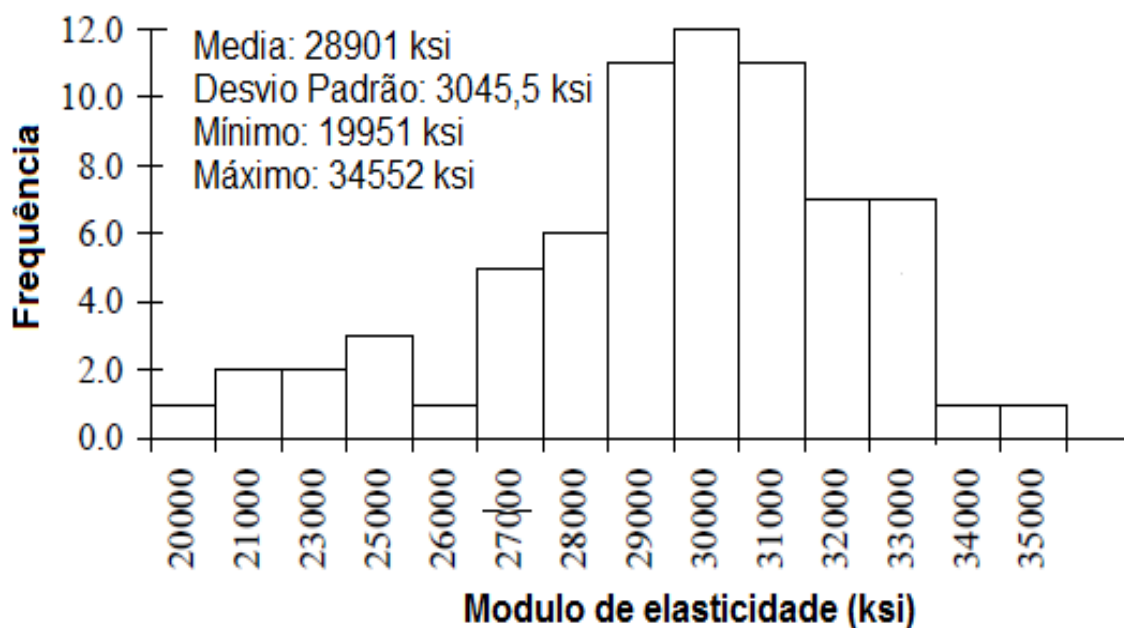


Figura 15 – Histograma do módulo de elasticidade de uma liga de aço estrutural.

Fonte: Hess et al., 2002, p. 37.

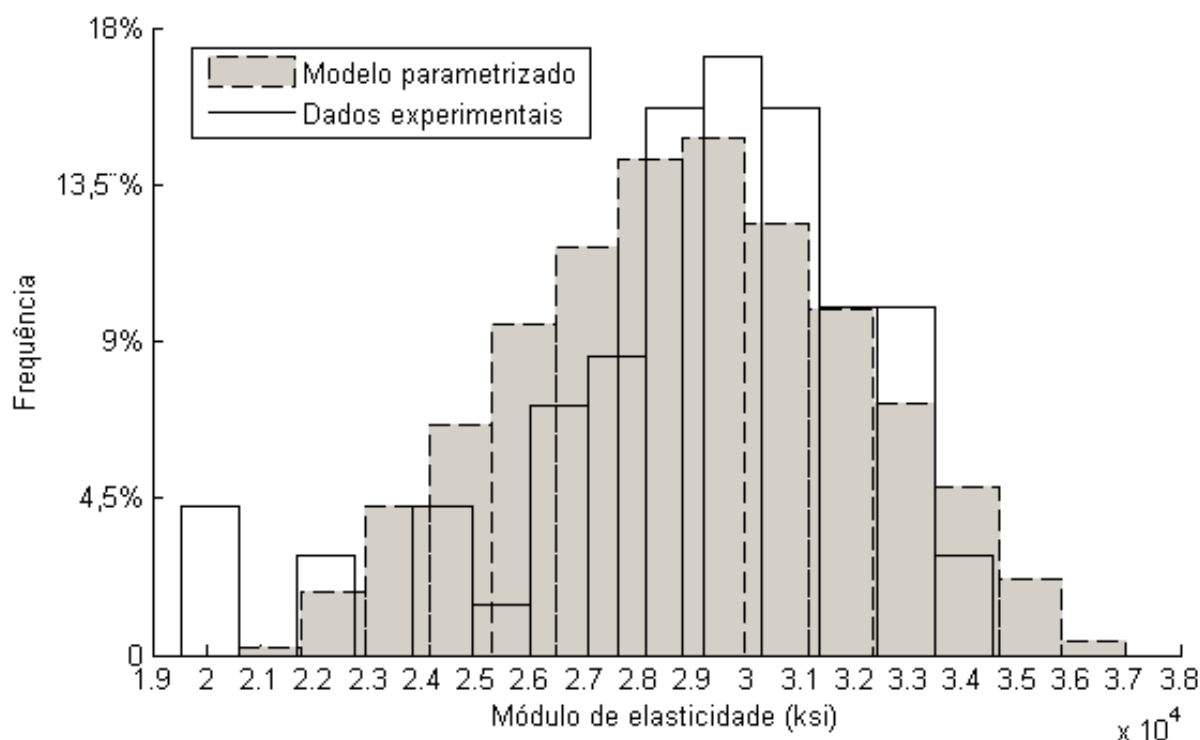


Figura 16 – Histograma experimental e histograma gerado com o processo estocástico parametrizado, com  $x^*$  fixo, através de SMC.

### 6.1 Definição da Malha Espacial

O número de elementos finitos estocásticos de viga, utilizados nos exemplos numéricos, é escolhido tendo como base o número de elementos necessários, para obter uma boa aproximação no problema determinístico da viga em fundação de Pasternak. A precisão da aproximação no espaço de probabilidades, do problema estocástico, é avaliada utilizando-se diferentes graus de expansão em polinômios generalizados.

O problema determinístico da viga de Euler-Bernoulli repousando em fundação de Pasternak, é descrito pela seguinte equação diferencial não-homogênea de quarta ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontre } u \in C^4(0,1), \text{ tal que,} \\ \left( EI \frac{d^4 u}{dx^4} - \kappa_p \frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa_w u \right) (x) = q(x), \forall x \in (0,1); \\ u(x=0) = u(x=1) = 0; \\ \frac{d^2 u}{dx^2}(x=0) = \frac{d^2 u}{dx^2}(x=1) = 0; \end{array} \right. \quad (83)$$

a qual possui solução analítica. Para modelos mecânicos de maior complexidade, outros métodos são empregados na avaliação do refino da malha, como por exemplo, a análise da continuidade de tensões entre elementos.

Considera-se o problema da viga biapoiada apresentado na seção anterior, tal que os parâmetros  $E$ ,  $\kappa_p$ ,  $\kappa_w$  e  $h$  são determinísticos e possuem valor igual à média apresentada na tabela 2. Os valores de deslocamento no centro do vão, obtidos com a solução analítica e utilizando-se o método de Galerkin, são comparados na tabela 3. No método de Galerkin, dois tipos de aproximações do espaço de soluções são consideradas: funções do tipo  $\sin\left(\frac{j.\pi.x}{l}\right)$  e o método dos elementos finitos determinístico (polinômios de Hermite, figura 10). Conforme ilustrado na tabela 3, utilizando-se 6 elementos finitos na discretização espacial, o erro relativo é inferior a  $10^{-3}\%$ .

**Tabela 3 – Erros relativos da aplicação do método de Galerkin, no problema determinístico da viga biapoada em fundação de Pasternak.**

Solução	$u(x=L/2)$ [m]	Erro Relativo [%]
Analítica	0.00861166804569	--
Combinação linear de $\text{sen}(j.\pi.x/L)$ , $k=1$ .	0.00864723839095	0.413048
Combinação linear de $\text{sen}(j.\pi.x/L)$ ; $k=1,2,3$ .	0.00860912663450	0.029511
Combinação linear de $\text{sen}(j.\pi.x/L)$ ; $k=1,2,3,4,5$ .	0.00861210564525	0.005081
MEF, 2 elementos	0.00861697166049	0.061586
MEF, 4 elementos	0.00861199565556	0.003804
MEF, 6 elementos	0.00861173261783	0.000750

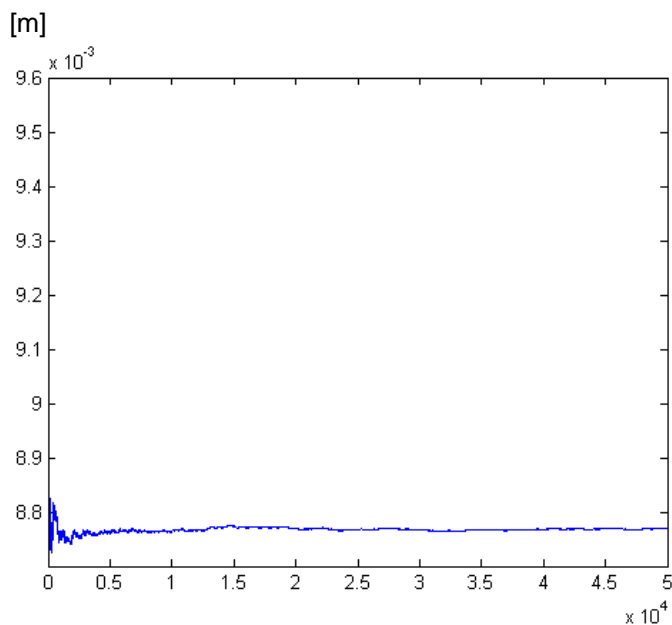
Nos exemplos numéricos da aplicação do MEF, são utilizados 6 elementos finitos estocásticos de viga em fundação de Pasternak, de igual comprimento. Os processos estocásticos de deslocamento nos cinco nós internos da viga,  $u_i(\xi(\omega))$ , são calculados aplicando-se a equação (74), utilizando polinômios de Legendre no esquema de Askey-Wiener, com decomposições de grau  $p=1,2$  e 3. Devido à condição de simples apoio, tem-se que os processos estocásticos de deslocamento nos nós correspondentes às extremidades da viga são nulos, ou seja,  $u_1(\xi(\omega)) = u_7(\xi(\omega)) = 0$ . Nas simulações de Monte Carlo, são utilizados 6 elementos finitos na discretização espacial.

## 6.2 Exemplo 1a - Incerteza no Módulo Elástico da Viga

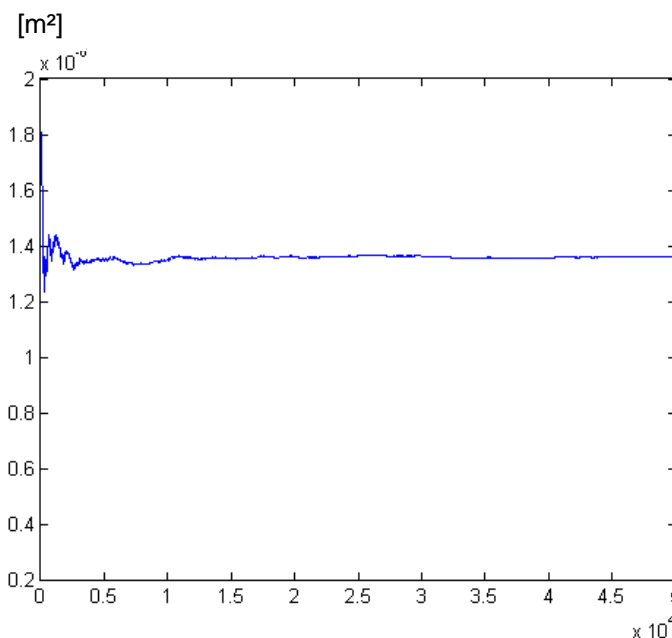
O presente exemplo apresenta incerteza no módulo de elasticidade  $E: (\Omega, \mathcal{F}, P) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , da viga ilustrada na figura 14, o qual é descrito com o processo estocástico parametrizado definido na equação (79). Os valores numéricos do valor esperado e desvio padrão, utilizados na modelagem do módulo elástico são apresentados na tabela 2. ' $\kappa_p$ ', ' $\kappa_w$ ' e ' $h$ ' são parâmetros determinísticos e possuem valor numérico igual ao valor esperado apresentado na tabela 2.

Utilizando-se o procedimento descrito da SMC, os deslocamentos nodais da viga  $u_i(\xi(\omega_j))$ , são calculados para cada realização 'j' da simulação. Os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, dos processos estocásticos de

deslocamento nos nós da viga, são estimados utilizando-se a equação (77). A evolução dos momentos estatísticos, do deslocamento estocástico no centro da viga  $u_4(\xi(\omega))$ , em relação ao número de realizações na SMC, é ilustrada nas figuras 17 e 18.

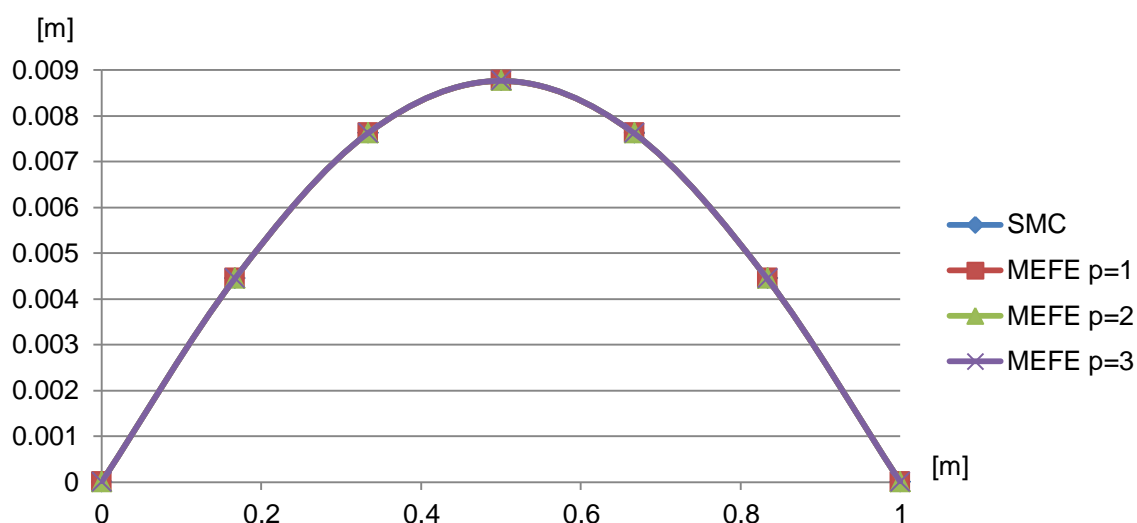


**Figura 17 – Evolução do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4$ , na SMC. Exemplo 1a.**

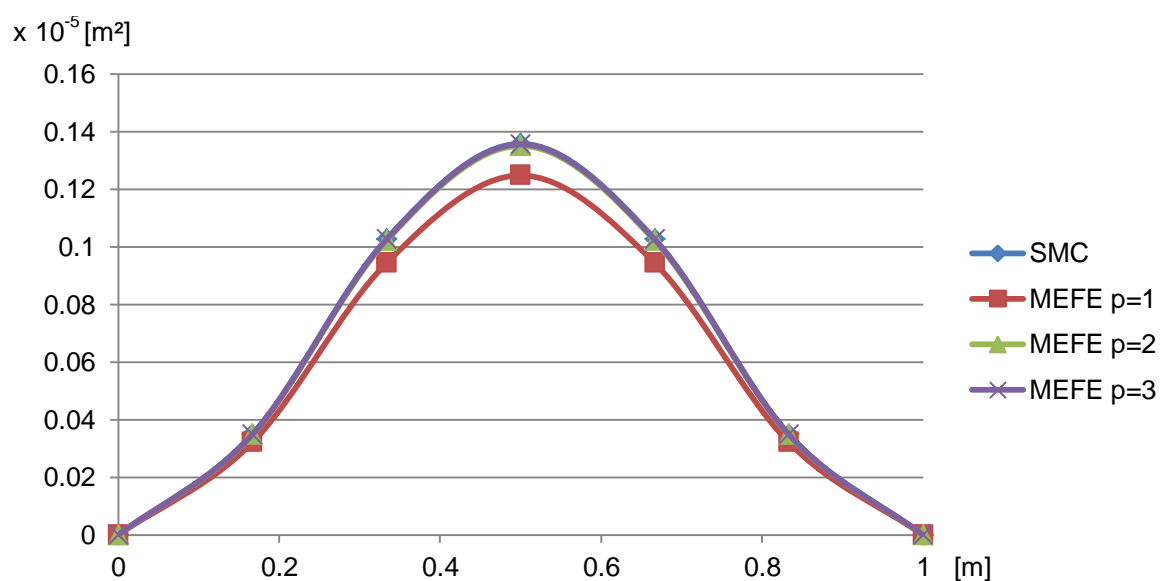


**Figura 18 – Evolução da variância, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4$ , na SMC. Exemplo 1a.**

O problema de incerteza no módulo de elasticidade também é solucionado com a aplicação do MEFE, equação (69). Os processos estocásticos de deslocamento nos cinco nós internos da viga  $u_i(\xi(\omega))$ , são obtidos com a utilização da equação (74), e as estimativas dos momentos estatísticos, calculadas com as equações (75) e (76). As estimativas do valor esperado e da variância, dos deslocamentos nodais estocásticos, obtidos com polinômios de Legendre de grau  $p=1, 2$  e  $3$ , são comparadas nas figuras 19 e 20, aos valores de referência da SMC.



**Figura 19 – Valor esperado do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1a.**



**Figura 20 – Variância do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1a.**

Os erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento nodal  $u_i(\xi(\omega))$ , são calculados utilizando-se a equação (78). Os valores resultantes são ilustrados nas figuras 21 e 22.

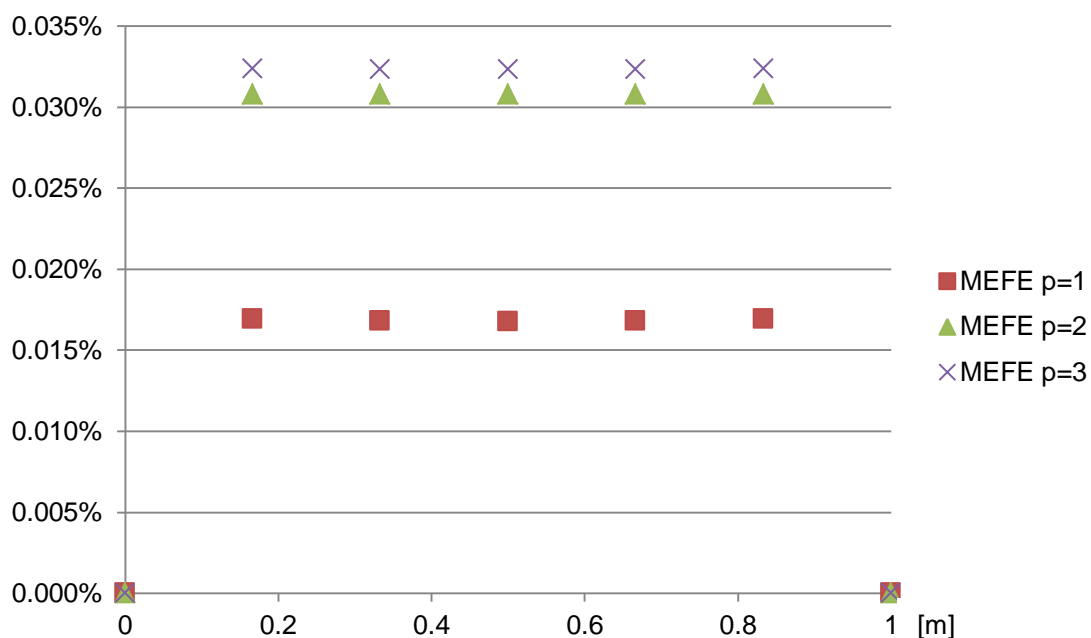


Figura 21 – Erro relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1a.

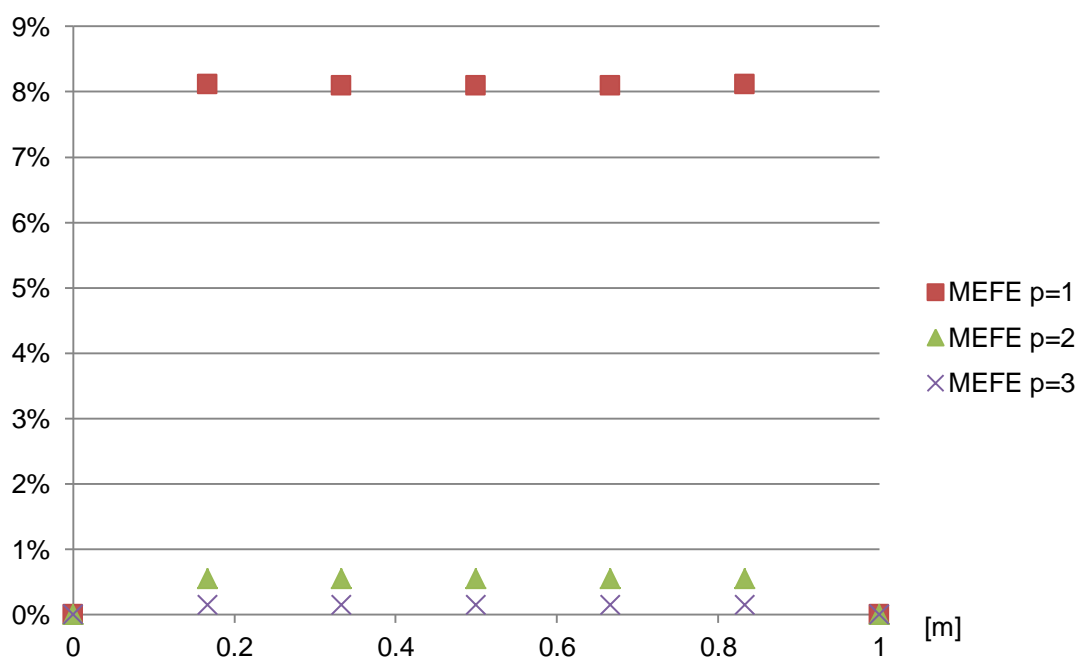


Figura 22 – Erro relativo na variância do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1a.



As curvas de valor esperado e variância dos processo estocástico de deslocamento nos nós, figuras 19 e 20, foram interpoladas graficamente a partir dos valores nodais calculados. Nota-se uma excelente concordância entre as curvas obtidas com a aplicação do MEFÉ e as curvas de referência obtidas com a SMC. Conforme ilustrado na figura 21, a utilização da expansão do caos com polinômios de grau  $p=1$  resulta em um erro relativo inferior a 0,1%, para a estimativa do valor esperado de  $u_i(\xi(\omega))$ . Por outro lado, observa-se na figura 22 que para obter uma boa aproximação na variância de  $u_i(\xi(\omega))$ , é necessária a utilização de uma expansão em polinômios de grau  $p=2$ , com a qual se obtém erros relativos inferiores a 1%.

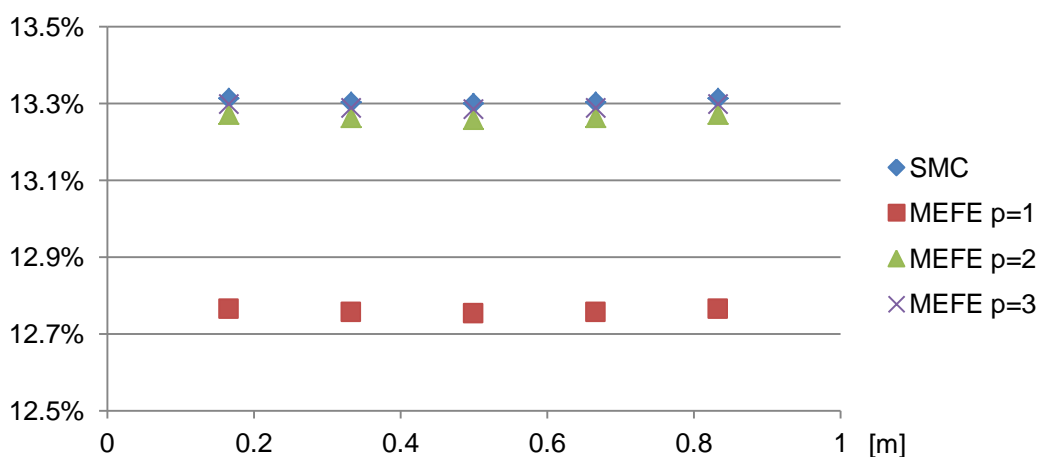
Observando as figuras 21 e 22, nota-se que com o aumento no grau 'p' da expansão do caos, os erros relativos na variância diminuem, enquanto que os erros relativos no valor esperado aumentam. Os valores numéricos dos erros relativos, para o processo estocástico de deslocamento transversal no centro do vão  $u_4(\xi(\omega))$ , são apresentados na tabela 4. Comparando o valor esperado do processo estocástico  $u_4(\xi(\omega))$ , ao deslocamento no centro do vão obtido no problema determinístico com os valores médios dos parâmetros da viga e da fundação, nota-se a existência de uma perturbação estocástica, que ocasiona um desvio de  $u_4(\xi(\omega))$  em relação ao valor obtido no problema determinístico.

**Tabela 4 – Erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento no centro do vão  $u_4$ , exemplo 1a.**

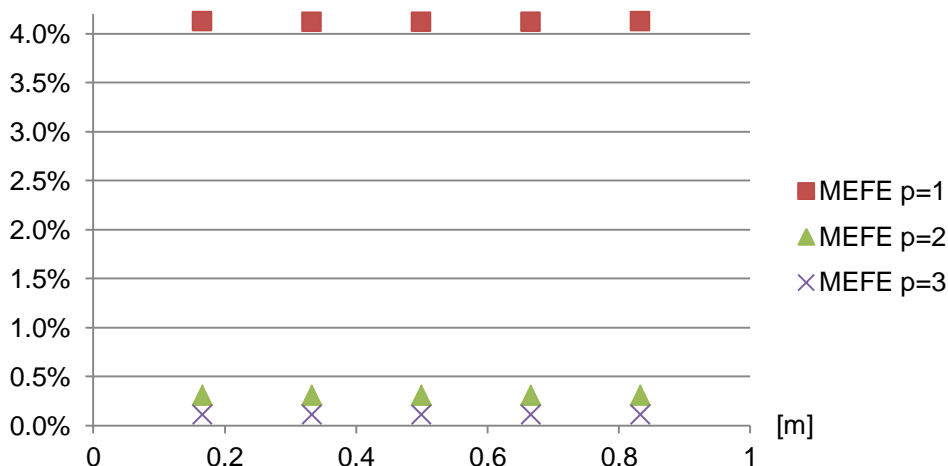
	Valor Esperado [m]	Erro Relativo no valor esperado [%]	Variância [m <sup>2</sup> ]	Erro Relativo na variância [%]
SMC	0.0087637987898	----	$0.135859871 \times 10^{-5}$	----
MEFE $p=1$	0.0087623316333	0.0167411	$0.124866158 \times 10^{-5}$	8.0919
MEFE $p=2$	0.0087664968641	0.0307866	$0.135111607 \times 10^{-5}$	0.5508
MEFE $p=3$	0.0087666318845	0.0323272	$0.135653429 \times 10^{-5}$	0.1520

Na figura 23, são apresentados os valores do coeficiente de variação (razão entre o desvio padrão e valor esperado), dos processos estocásticos de deslocamento nos nós da viga, obtidos com a SMC e com a aplicação do MEFÉ. A figura 24 apresenta os erros relativos, nos coeficientes de variação estimados no

MEFE, em relação aos valores de referência da SMC. Nota-se na figura 23 que o coeficiente de variação calculado na SMC e no MEFE para  $p=1, 2$  e  $3$ , é praticamente constante ao longo dos nós da viga. Este fato confirma a existência de continuidade de probabilidade ao longo do domínio espacial do problema, ao explicitar a correlação entre processos estocásticos de deslocamento em diferentes regiões da viga, quando estes processos possuem a mesma probabilidade de ocorrência. Observando a figura 24, conclui-se que o erro relativo no coeficiente de variação, diminui monotonamente com o aumento do grau 'p' da expansão do caos utilizada, sendo inferior a 0,5% para a expansão de grau  $p=2$ .



**Figura 23 – Coeficiente de variação do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 1a.**



**Figura 24 – Erro relativo no coeficiente de variação, do processo estocástico  $u_i$  nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 1a.**

Utilizando-se a amostragem de deslocamentos no centro da viga  $u_4(\xi(\omega_i))$ , obtida com a SMC, nas figuras 25 e 26 são plotados o histograma e a estimativa da função distribuição de probabilidade acumulada (FDPA), da variável randômica  $u_4(\xi(\omega))$ . No MEFE, a amostragem de deslocamentos no centro da viga  $u_4(\xi(\omega_i))$ , é obtida através de  $N=50.000$  realizações, em cada qual o deslocamento no centro da viga é calculado através da equação (74), utilizando a solução do MEFE com  $p=3$ .

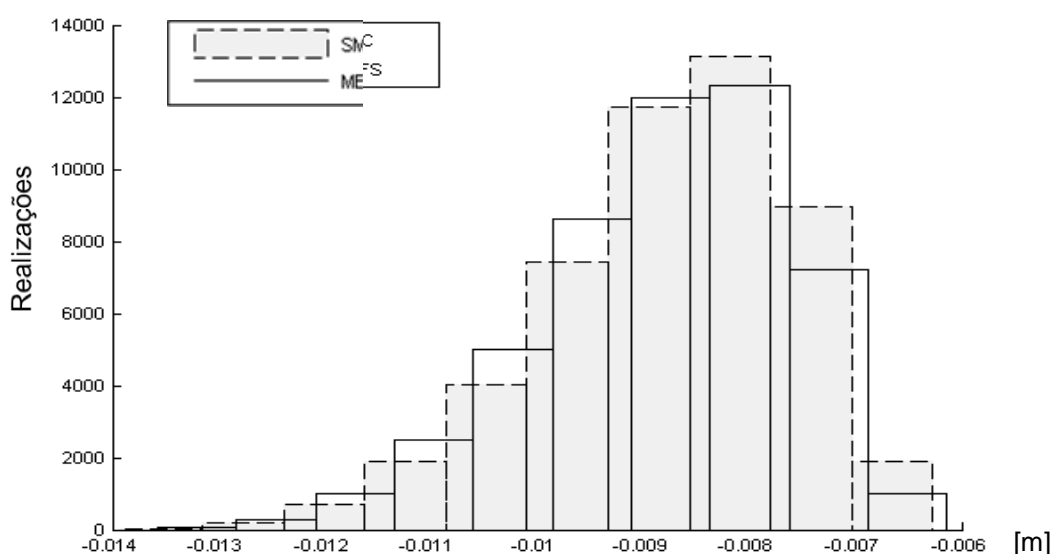


Figura 25 – Histogramas da variável randômica  $u_4$ , exemplo 1a.

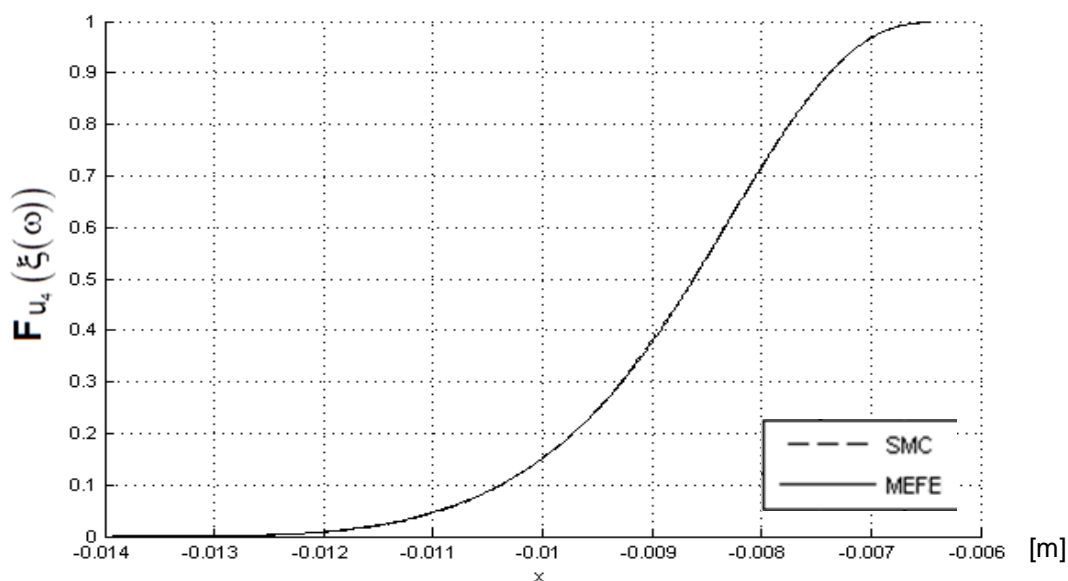


Figura 26 – Estimativa da FDPA da variável randômica  $u_4$ , exemplo 1a.

Observando a figura 25, nota-se uma boa concordância entre os histogramas e as estimativas da FDPA do processo estocástico  $u_4(\xi(\omega))$ , obtidos com a SMC e com o MEFE, demonstrando que o MEFE também fornece uma boa aproximação da função densidade de probabilidade de  $u_4(\xi(\omega))$ .

O problema de incerteza no módulo de elasticidade da viga, também foi solucionado com aplicação de dois elementos finitos estocásticos (figura 12), utilizando polinômios de Legendre de grau  $p=1$ . Os coeficientes obtidos com a aplicação do MEFE, equação (69), são apresentados na tabela 5, juntamente com as funções de aproximação do espaço de soluções. Os coeficientes correspondentes aos graus de liberdade (GDL)  $u_1$  e  $u_3$  são nulos devido à imposição das condições de contorno. A função aproximada, que descreve o processo estocástico de deslocamento transversal ao longo de cada um dos dois elementos estocástico de viga, é apresentada a seguir:

$$u_{\text{elem}}(x, \xi(\omega)) = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^5 U_{(i,k)} \phi_i \psi_k, \quad (84)$$

sendo  $\phi_i$  as quatro funções de aproximação do elemento em questão,  $\psi_k$  polinômios de Legendre e  $U_{(i,k)}$  os coeficientes correspondentes. Na tabela, ' $L_e$ ' denota o comprimento de cada elemento finito estocástico (0,5m). O processo estocástico de deslocamento transversal apresentado na equação (84) está definido localmente, com  $x \in [0, L_e]$ . A aplicação da esperança matemática e da variância, diretamente na equação (84), conduz aos mesmos resultados obtidos com o cálculo nodal, nas posições correspondentes.

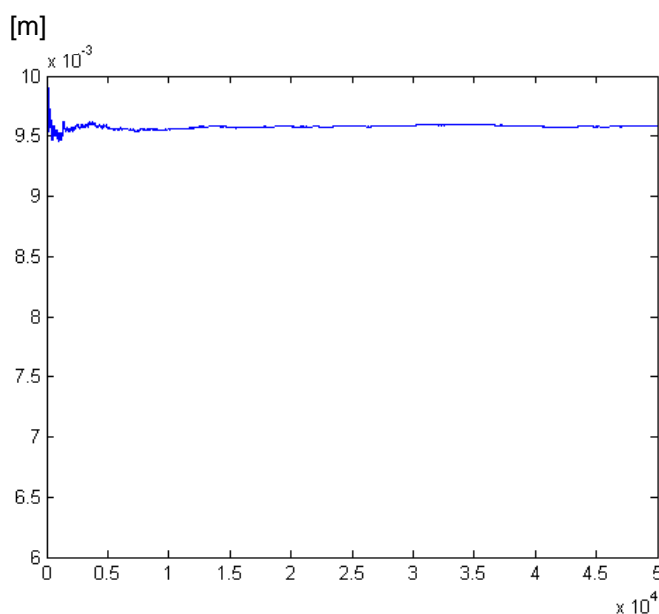
**Tabela 5 – Coeficientes resultantes da aplicação do MEF no exemplo 1a, utilizando dois elementos finitos estocásticos e polinômios de grau p=1.**

GDL	Função de aproximação do espaço determinístico $\phi_i$ (elemento 1)	Função de aproximação do espaço determinístico $\phi_i$ (elemento 2)	Polinômios de Legendre $\Psi_k$	<b>U (KU = F)</b>
$u_1$	$\phi_1 = 1 - \frac{3x^2}{L_e^2} + \frac{2x^3}{L_e^3}$		$\Psi_1 = 1$	0
			$\Psi_2 = \xi_1$	0
			$\Psi_3 = \xi_2$	0
			$\Psi_4 = \xi_3$	0
			$\Psi_5 = \xi_4$	0
$\theta_1$	$\phi_2 = x - \frac{2x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2}$		$\Psi_1 = 1$	0.028100503
			$\Psi_2 = \xi_1$	-0.000608679
			$\Psi_3 = \xi_2$	-0.002508154
			$\Psi_4 = \xi_3$	-0.001146199
			$\Psi_5 = \xi_4$	-0.002224074
$u_2$	$\phi_3 = \frac{3x^2}{L_e^2} - \frac{2x^3}{L_e^3}$	$\phi_1 = 1 - \frac{3x^2}{L_e^2} + \frac{2x^3}{L_e^3}$	$\Psi_1 = 1$	0.008766734
			$\Psi_2 = \xi_1$	-0.000198525
			$\Psi_3 = \xi_2$	-0.000777488
			$\Psi_4 = \xi_3$	-0.000370816
			$\Psi_5 = \xi_4$	-0.000678775
$\theta_2$	$\phi_4 = -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2}$	$\phi_2 = x - \frac{2x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2}$	$\Psi_1 = 1$	0
			$\Psi_2 = \xi_1$	0.000194989
			$\Psi_3 = \xi_2$	-4.97889E-05
			$\Psi_4 = \xi_3$	0.000346628
			$\Psi_5 = \xi_4$	-0.000189364
$u_3$		$\phi_3 = \frac{3x^2}{L_e^2} - \frac{2x^3}{L_e^3}$	$\Psi_1 = 1$	0
			$\Psi_2 = \xi_1$	0
			$\Psi_3 = \xi_2$	0
			$\Psi_4 = \xi_3$	0
			$\Psi_5 = \xi_4$	0
$\theta_3$		$\phi_4 = -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2}$	$\Psi_1 =$	-0.028100503
			$\Psi_2 = \xi_1$	0.000668307
			$\Psi_3 = \xi_2$	0.002492928
			$\Psi_4 = \xi_3$	0.001252199
			$\Psi_5 = \xi_4$	0.002166166

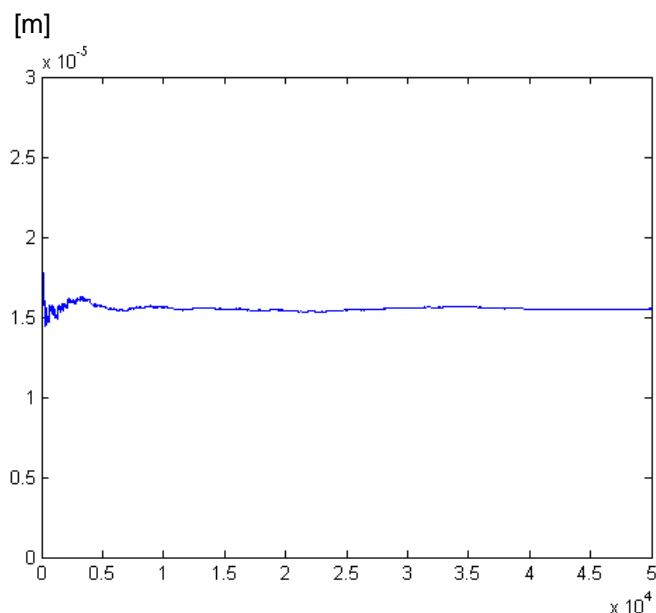
### 6.3 Exemplo 1b - Incerteza na Altura da Viga

O presente exemplo apresenta incerteza na altura da seção da viga  $h: (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida pelo processo estocástico parametrizado, equação (80). Os valores de média e desvio padrão, utilizados na modelagem da altura da seção, são apresentados na tabela 2. Neste exemplo, 'E', ' $\kappa_p$ ' e ' $\kappa_w$ ' são parâmetros determinísticos e possuem valor igual à média apresentada na tabela 2.

Através da SMC, obteve-se a amostra de deslocamentos nodais  $u_i(\xi(\omega_j))$ , com a qual são estimados os momentos estatísticos dos processos estocásticos de deslocamento nos nós. Nas figuras 27 e 28, é ilustrada a evolução do valor esperado e da variância, do processo estocástico de deslocamento transversal no centro da viga  $u_4(\xi(\omega))$ , em relação ao número de realizações na SMC.

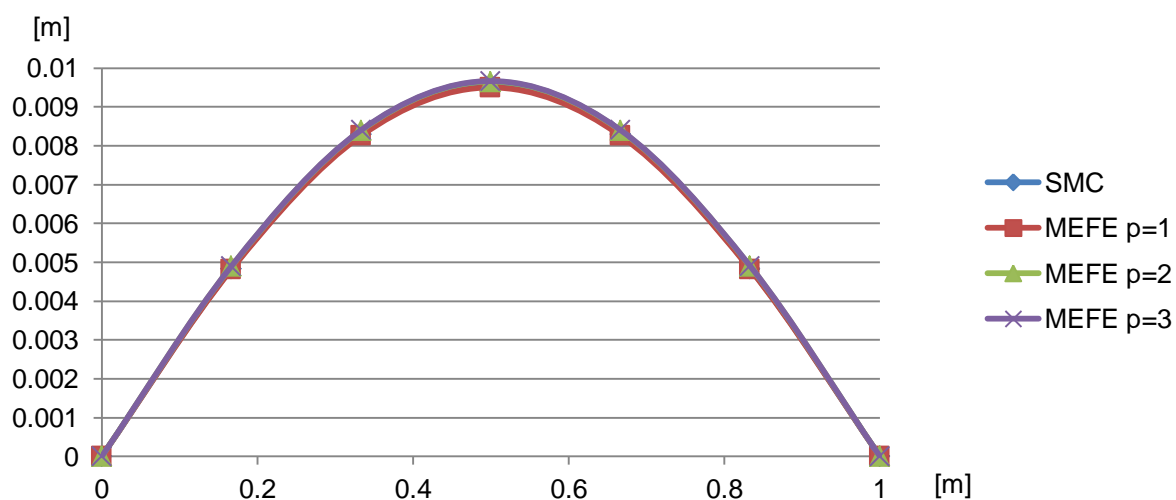


**Figura 27 – Evolução do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4$ , na SMC. Exemplo 1b.**



**Figura 28 – Evolução da variância, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4$ , na SMC. Exemplo 1b.**

Os processos estocásticos de deslocamento nos nós da viga são calculados com a aplicação do MEFE, e os momentos estatísticos obtidos com as equações (75) e (76). Nas figuras 29 e 30, são comparados os momentos estatísticos estimados com a aplicação do MEFE, utilizando polinômios de Legendre de grau  $p=1, 2$  e  $3$ , aos valores obtidos com a SMC. Nas figuras 31 e 32 são apresentados os erros relativos, nos resultados de valor esperado e de variância dos processos estocásticos  $u_i(\xi(\omega))$ , calculados com o MEFE.



**Figura 29 – Valor esperado do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1b.**

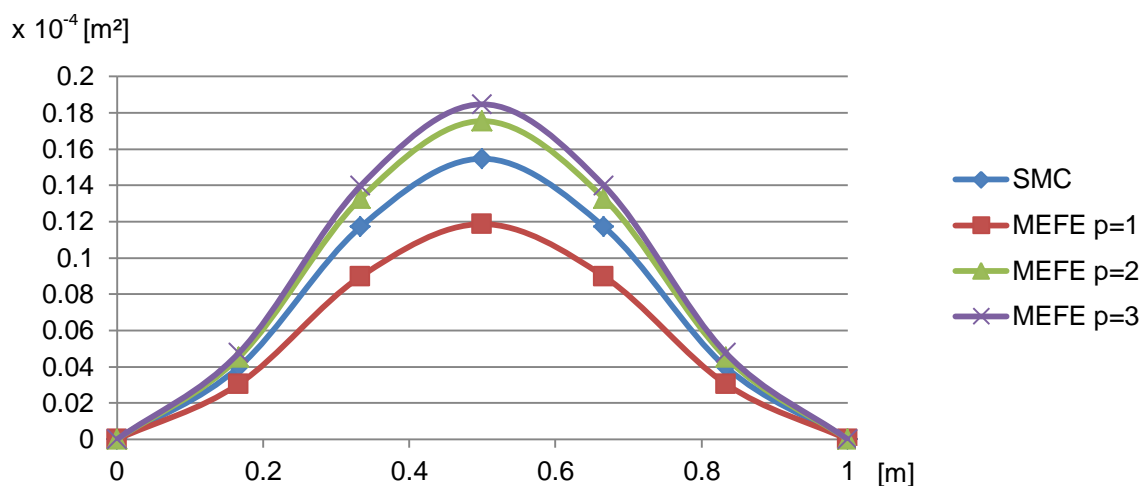


Figura 30 – Variância do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1b.

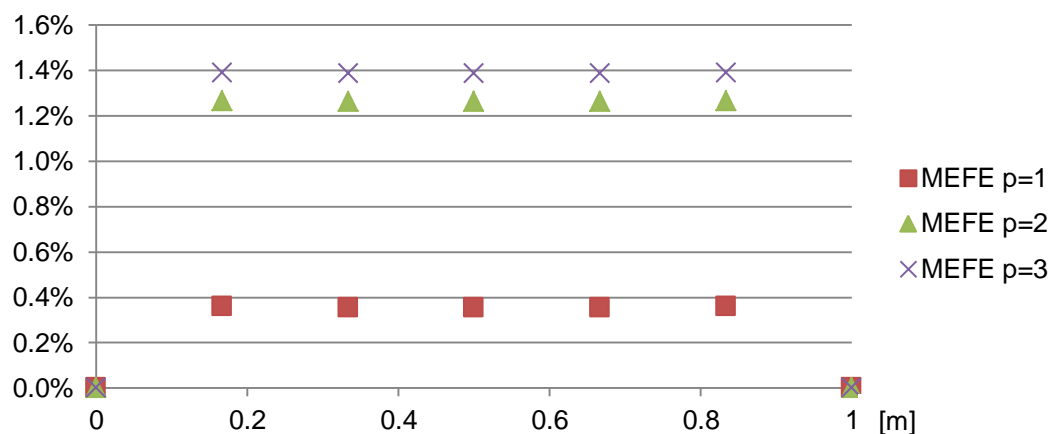


Figura 31 – Erro relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1b.

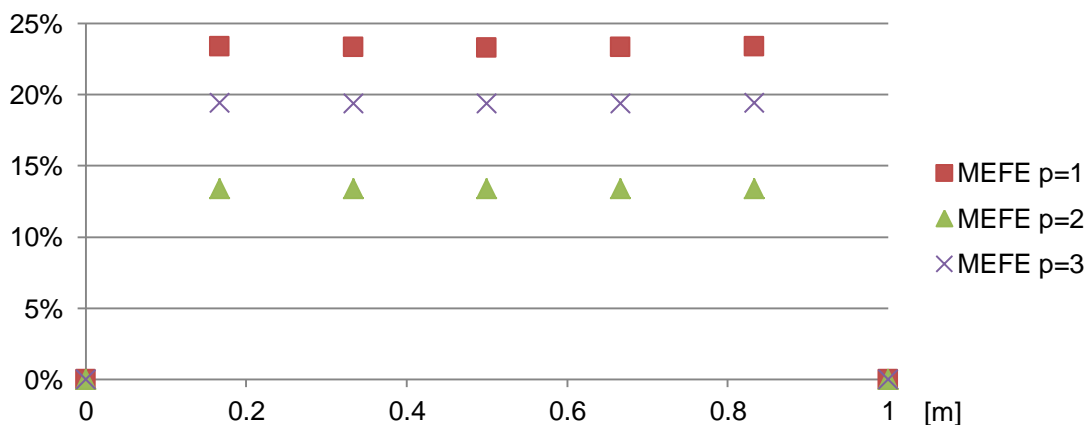


Figura 32 – Erro relativo na variância do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 1b.



Observando as figuras 29 e 31, nota-se que existe uma boa concordância entre as curvas de valor esperado obtidas com o MEFE e com a SMC, resultando em erros relativos inferiores a 1,4%. Por outro lado, devido ao fator cúbico da altura da viga, no cálculo do momento de inércia da seção, o momento estatístico de segunda ordem é aproximado com menor precisão. Os erros relativos mínimos na aproximação da variância são obtidos com a expansão de grau  $p=2$ . Neste caso, o aumento no grau da expansão do caos utilizada não é suficiente para se obter uma redução no erro relativo. Possivelmente a utilização de um número maior de variáveis aleatórias na descrição do processo estocástico  $h: (\Omega, \mathcal{F}, P) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , possibilite uma melhor aproximação do momento estatístico de segunda ordem.

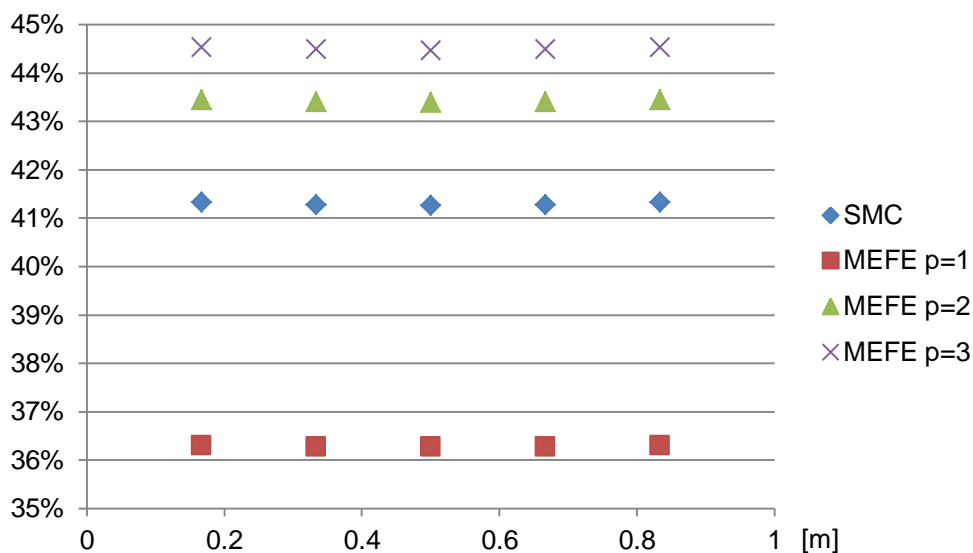
Os erros relativos, referentes ao processo estocástico de deslocamento transversal no centro da viga  $u_4(\xi(\omega))$ , são apresentados na tabela 6. Comparando o valor esperado de  $u_4(\xi(\omega))$ , ao deslocamento no centro da viga obtido no problema determinístico, nota-se que o MEFE fornece uma boa aproximação do desvio no valor esperado de  $u_4(\xi(\omega))$ , decorrente da perturbação estocástica, que neste exemplo foi significativo.

**Tabela 6 – Erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento no centro do vão  $u_4$ , exemplo 1b.**

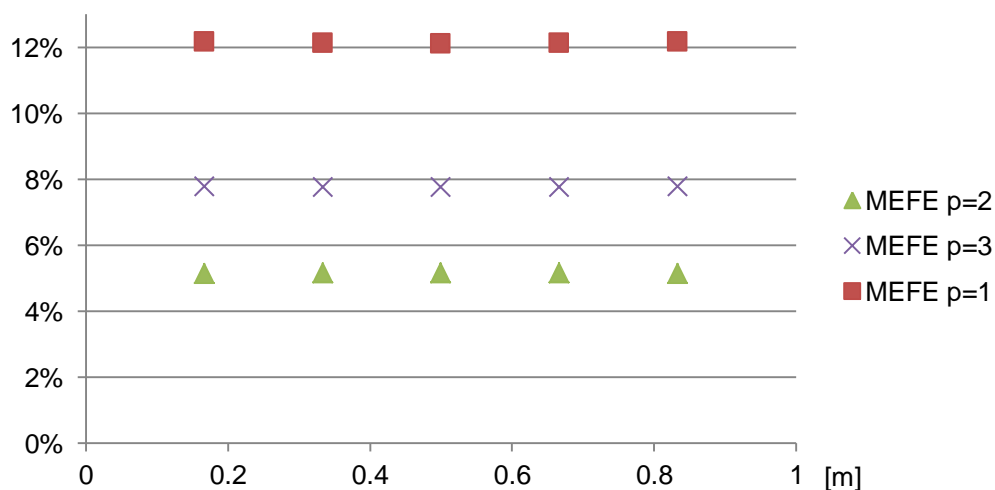
	Valor Esperado [m]	Erro Relativo no valor esperado [%]	Variância [m <sup>2</sup> ]	Erro Relativo na variância [%]
SMC	0.0095333337589	----	0.15471456 x10-4	----
MEFE $p=1$	0.0094996987182	0.3528	0.11866839 x10-4	23.2984%
MEFE $p=2$	0.0096536381540	1.2619	0.17546967 x10-4	13.4151%
MEFE $p=3$	0.0096654329809	1.3856	0.18470791 x10-4	19.3862%

Na figura 33, são apresentados os valores do coeficiente de variação, dos processos estocásticos de deslocamento nos nós da viga, obtidos com a SMC e com a aplicação do MEFE. Na figura 34 são ilustrados os erros relativos no coeficiente de variação, em relação aos valores de referência da SMC. Nota-se na figura 33 que o coeficiente de variação, evidencia a correlação entre processos

estocásticos de deslocamento em diferentes regiões da viga, em eventos com a mesma probabilidade de ocorrência.



**Figura 33 – Coeficiente de variação do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 1b.**



**Figura 34 – Erro relativo no coeficiente de variação, do processo estocástico  $u_i$  nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 1b.**

Utilizando a mesma metodologia aplicada no exemplo anterior, são gerados os histogramas e os gráficos da FDPA estimada, do processo estocástico de deslocamento transversal no centro do vão  $u_4(\xi(\omega))$ . Observando as figuras 35 e 36, nota-se que neste exemplo as diferenças entre os gráficos gerados com a SMC

e o MEFE, tornaram-se mais evidentes. Porém, ainda se verifica uma boa concordância entre as respostas obtidas pelos dois métodos.

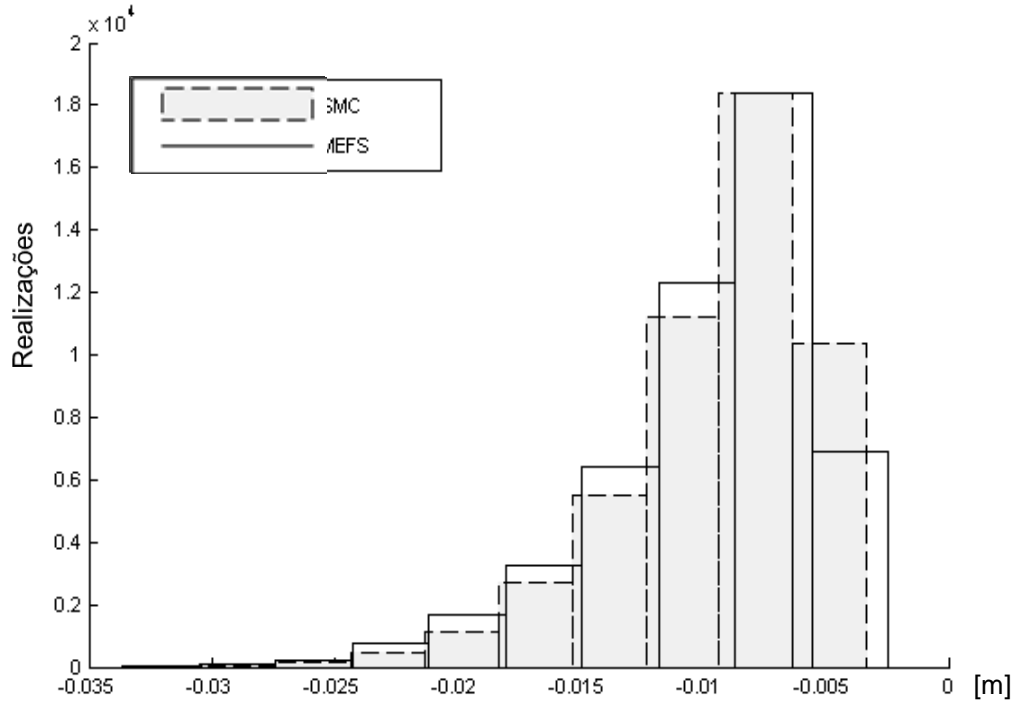


Figura 35 – Histogramas da variável randômica  $U_4$ , exemplo 1b.

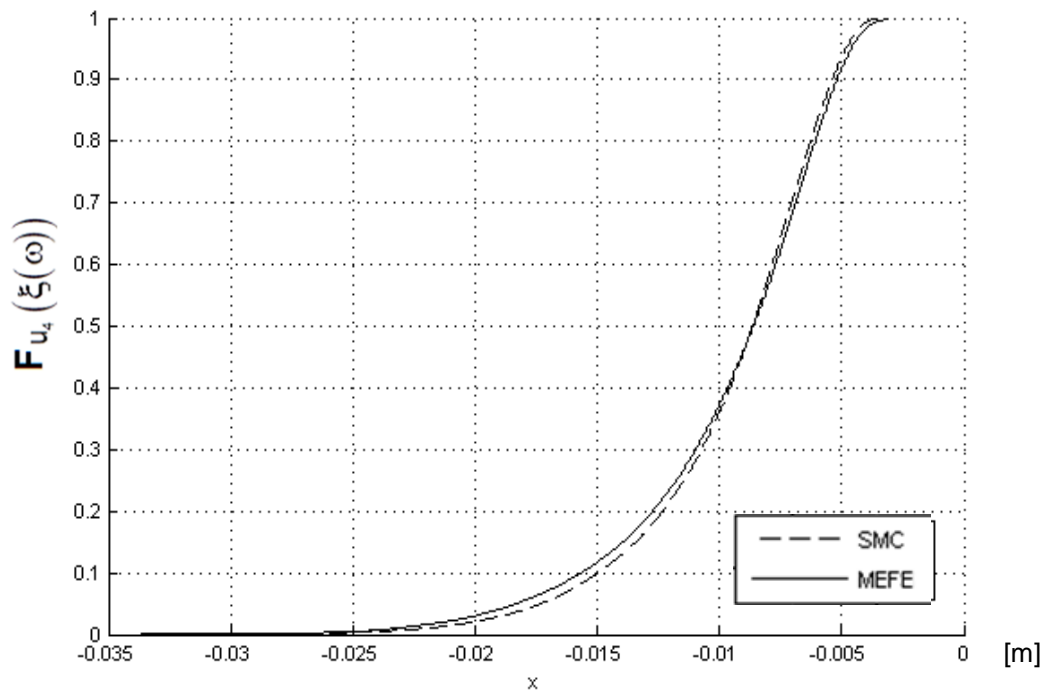
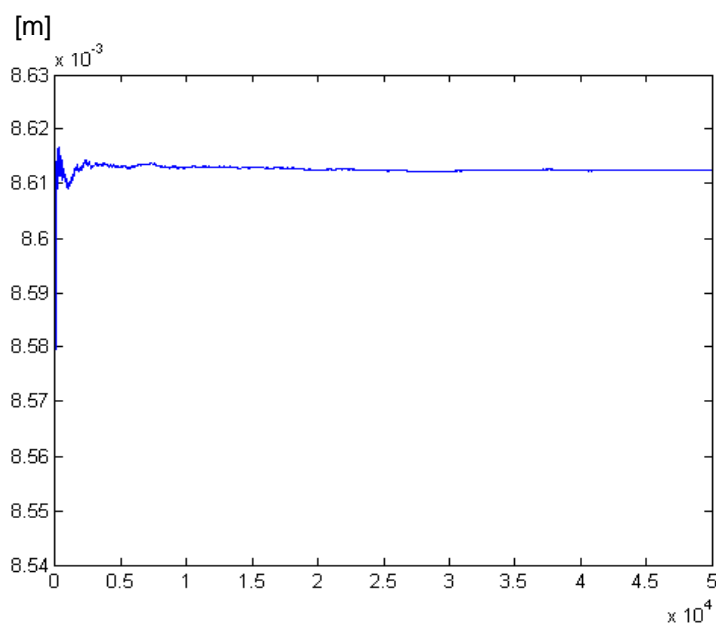


Figura 36 – Estimativa da FDP da variável randômica  $U_4$ , exemplo 1b

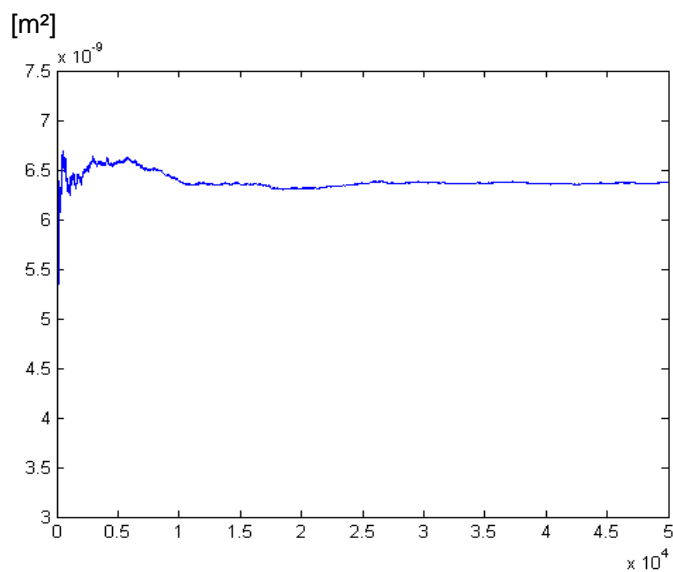
#### 6.4 Exemplo 2a - Incerteza no Parâmetro de Rigidez de Pasternak

O presente exemplo apresenta incerteza no parâmetro de Pasternak da fundação,  $\kappa_p : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Este parâmetro é modelado utilizando-se o processo estocástico parametrizado apresentado na equação (81). Os valores de média e desvio padrão, utilizados na descrição do parâmetro randômico de Pasternak, são apresentados na tabela 2. Neste problema, 'E', 'h' e ' $\kappa_w$ ' são parâmetros determinísticos e possuem valor igual à respectiva média apresentada na tabela 2.

Utilizando-se a amostra de deslocamentos nodais  $u_i(\xi(\omega_j))$ , gerada com a SMC, são estimados os momentos estatísticos dos processos estocásticos de deslocamento nos nós. Nas figuras 37 e 38, é apresentada a evolução dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, com o número de realizações na SMC, para o processo estocástico de deslocamento no centro do vão  $u_4(\xi(\omega))$ . De maneira similar aos exemplos anteriores, comparando as figuras 37 e 38, verifica-se que na SMC o momento estatístico de segunda ordem necessita de um número maior de realizações para atingir uma condição estacionária.

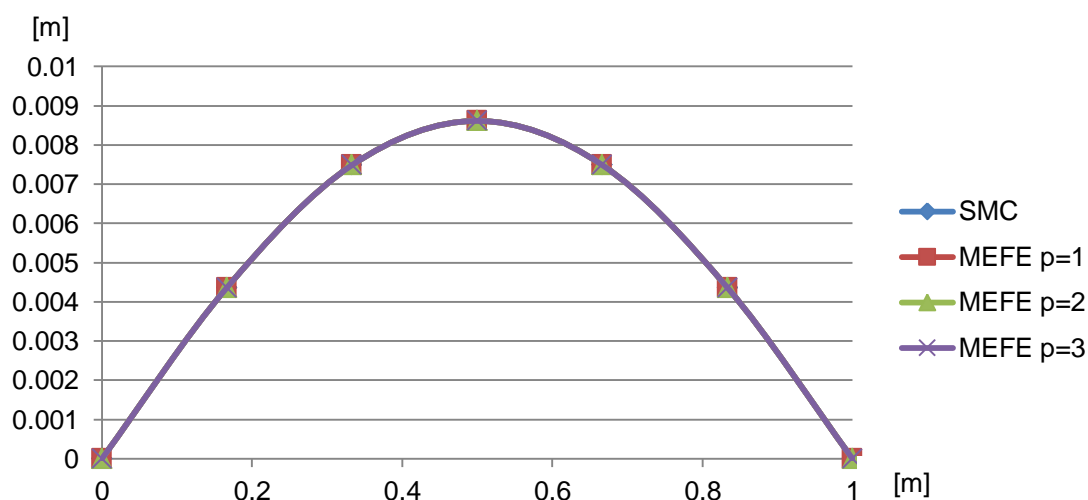


**Figura 37 – Evolução do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4$ , na SMC. Exemplo 2a.**



**Figura 38 – Evolução da variância, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4$ , na SMC. Exemplo 2a.**

O problema de incerteza no parâmetro de Pasternak é solucionado com a aplicação do MEFE, e os momentos estatísticos estimados com a utilização das equações (75) e (76). Os resultados de valor esperado e de variância, para os processos estocásticos de deslocamento transversal nos nós da viga  $u_i(\xi(\omega))$ , obtidos com a SMC e com o MEFE utilizando polinômios de Legende com  $p=1, 2$  e  $3$ , são comparados nas figuras 39 e 40. Os erros relativos, nos momentos estatísticos dos deslocamentos nodais estocásticos  $u_i(\xi(\omega))$ , resultantes da aplicação do MEFE, são plotados nas figuras 41 e 42.



**Figura 39 – Valor esperado do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2a.**

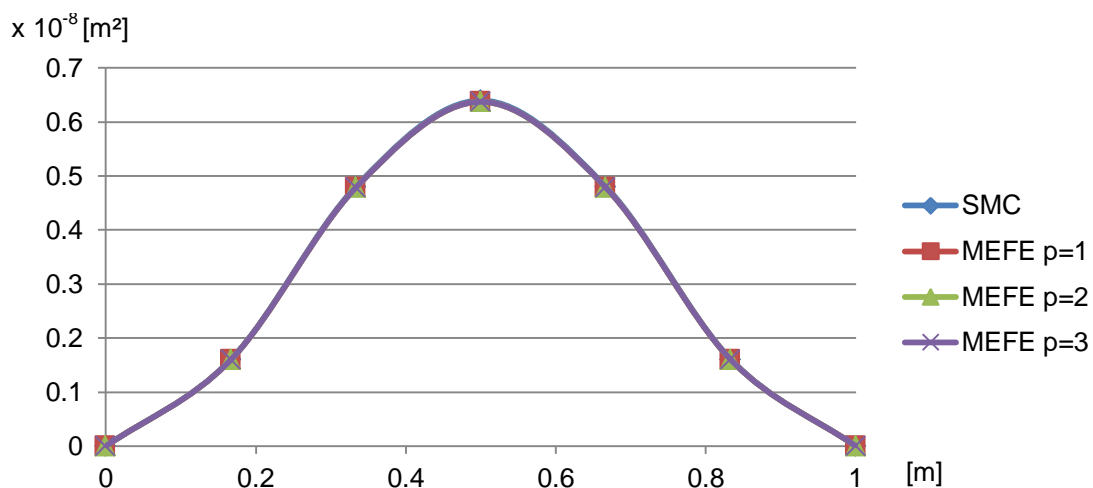


Figura 40 – Variância do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2a.

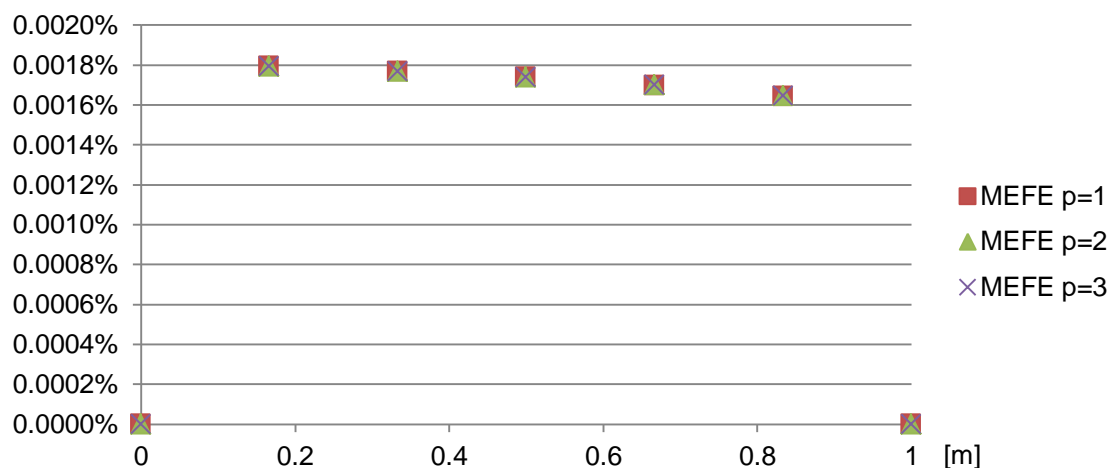


Figura 41 – Erro relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2a.

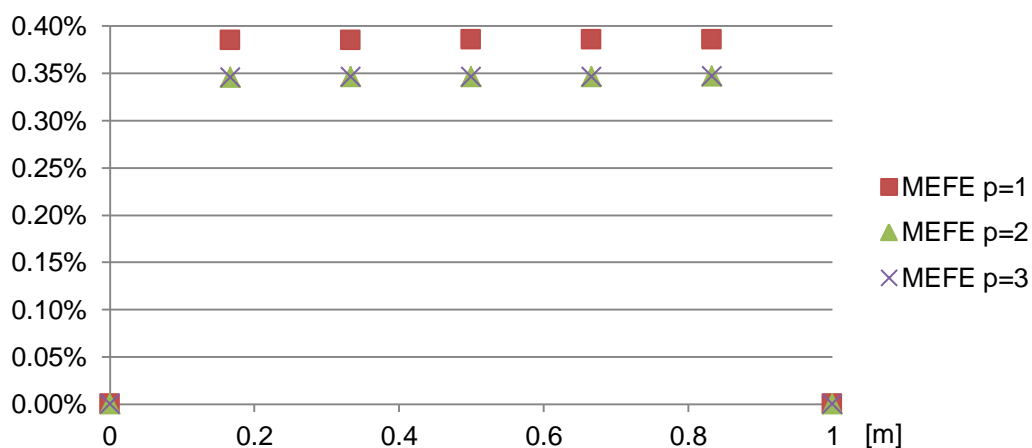


Figura 42 – Erro relativo na variância do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2a.

Nota-se nas figuras 39 e 40, que a aplicação do MEFE no problema de incerteza no parâmetro de Pasternak, utilizando uma expansão do caos de grau  $p=1$ , é suficiente para aproximar com boa precisão os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, dos deslocamentos nodais estocásticos. Nas figuras 41 e 42, observa-se que os erros relativos no valor esperado e na variância são inferiores a 0,002% e 0,4% respectivamente.

Na tabela 6 são apresentados os valores numéricos dos erros relativos, nos momentos estatísticos da variável randômica  $u_4(\xi(\omega))$ . Comparando o valor esperado de  $u_4(\xi(\omega))$ , ao deslocamento no centro da viga, calculado no problema determinístico com o valor médio de  $\kappa_p$ , nota-se que neste exemplo a perturbação estocástica é inferior aos exemplos anteriores. Este fato indica que a perturbação estocástica é mais acentuada quando a incerteza esta presente em parâmetros que se relacionam a derivada de ordem mais alta do deslocamento. Na formulação variacional do problema da viga de Pasternak, o parâmetro  $\kappa_p$  multiplica a derivada do deslocamento, enquanto que a rigidez da viga ( $EI$ ) multiplica a derivada de segunda ordem.

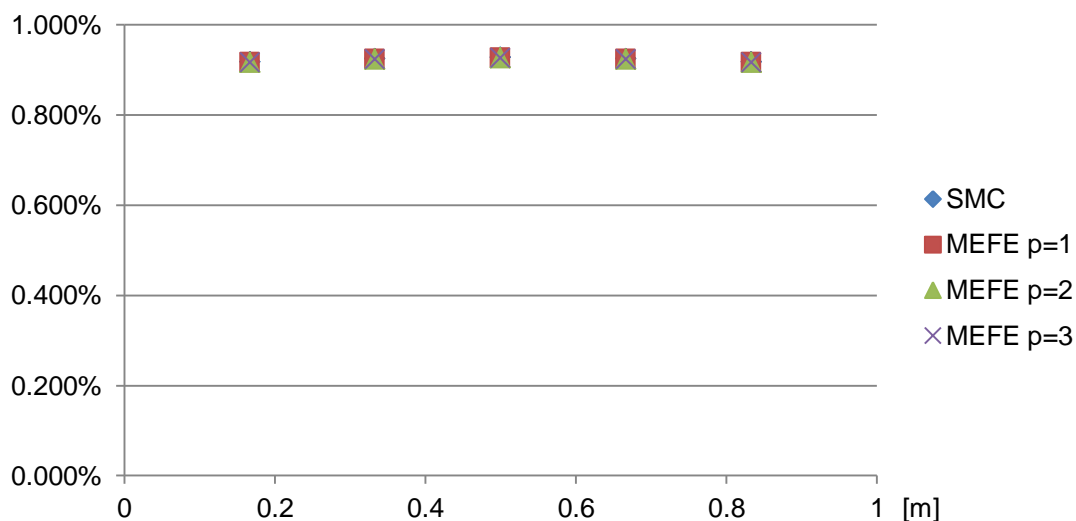
Neste exemplo, em que a propagação da incerteza é menos acentuada, nota-se na tabela 7 que os erros variam monotonamente com o aumento do grau 'p' da expansão do caos, diminuindo no caso da variância e aumentando no caso do valor esperado.

**Tabela 7 – Erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento no centro do vão  $u_4$ , exemplo 2a.**

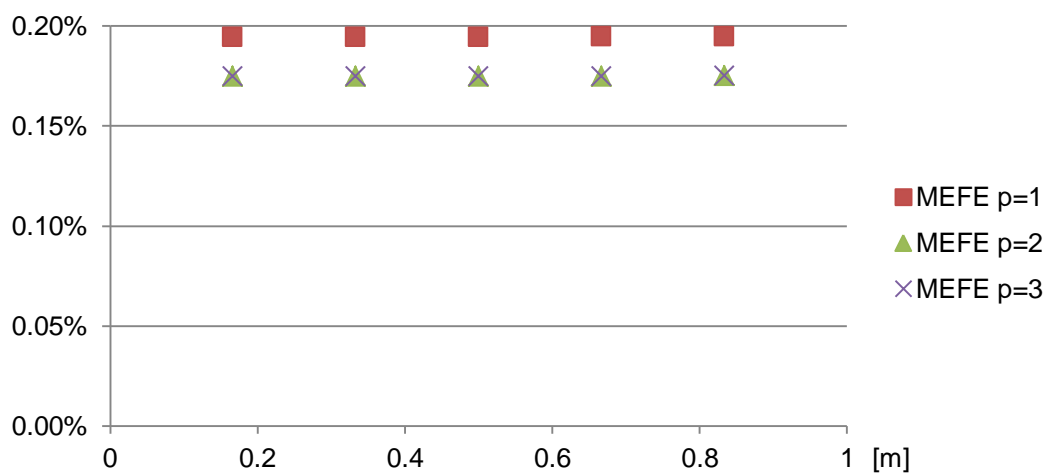
	Valor Esperado [m]	Erro Relativo no valor esperado [%]	Variância [m <sup>2</sup> ]	Erro Relativo na variância [%]
SMC	0.0086123211699	----	$0.63971800 \times 10^{-8}$	----
MEFE p=1	0.0086124708260	0.001738	$0.63725436 \times 10^{-8}$	0.385113
MEFE p=2	0.0086124709227	0.001739	$0.63750505 \times 10^{-8}$	0.345925
MEFE p=3	0.0086124709227	0.001739	$0.63750512 \times 10^{-8}$	0.345915

Os valores calculados para o coeficiente de variação das variáveis aleatórias  $u_i(\xi(\omega))$ , são ilustrados na figura 43, na qual se observa que o coeficiente de variação para cada solução, assume valores em uma faixa ainda mais estreita que

nos exemplos anteriores, evidenciando a correlação entre os processos estocásticos de deslocamento em diferentes regiões da viga. Na figura 44 nota-se que os erros relativos no coeficiente de variação são inferiores a 0,2% na aproximação com  $p=1$ , e diminuem com o aumento no grau da expansão.



**Figura 43 – Coeficiente de variação do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 2a.**



**Figura 44 – Erro relativo no coeficiente de variação, do processo estocástico  $u_i$  nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 2a.**

O histograma e a estimativa da FDP da do processo estocástico de deslocamento no centro do vão  $u_4(\xi(\omega))$ , são gerados com os resultados da SMC e do MEFE para  $p=3$ , utilizando o procedimento descrito na seção 5.1. Os histogramas obtidos através dos dois métodos são ilustrados na figura 45. Neste exemplo em que



a propagação da incerteza é menos acentuada e conseqüentemente, melhor aproximada com os polinômios de caos, observa-se que o histograma obtido com a aplicação do MEFE praticamente sobrepõe o gráfico gerado com a SMC. Na figura 46, verifica-se uma perfeita concordância entre a FDPA estimada com o MEFE, em relação à curva obtida com a SMC.

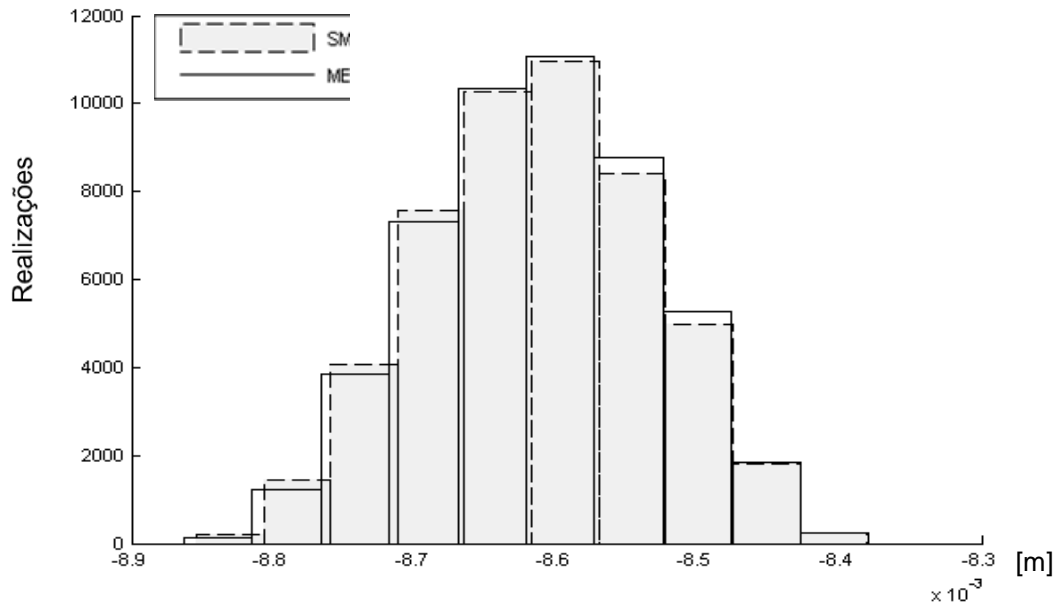


Figura 45 – Histogramas da variável randômica  $u_4$ , exemplo 2a.

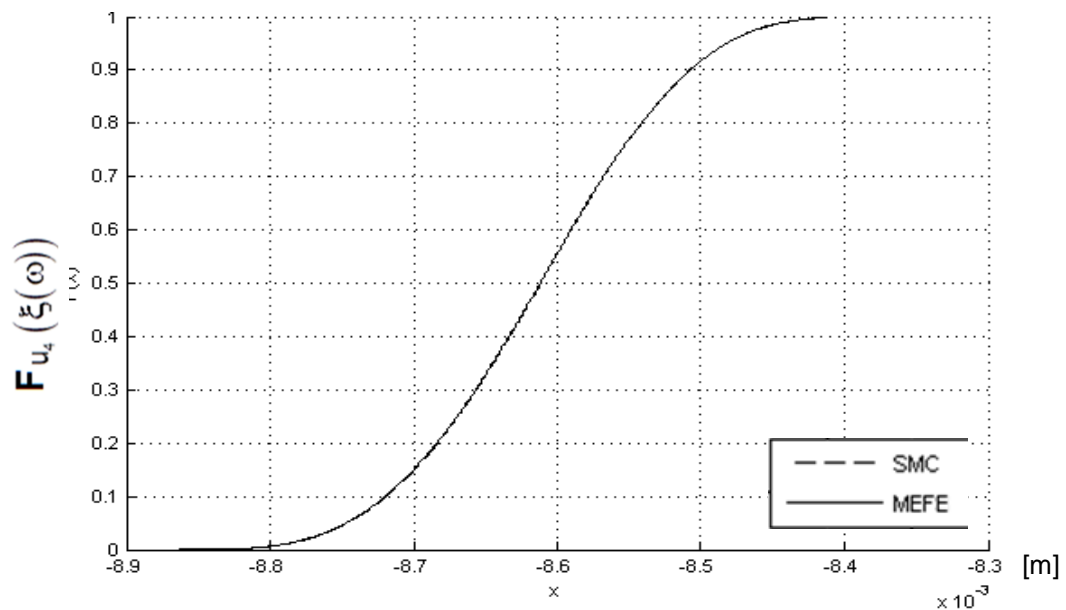
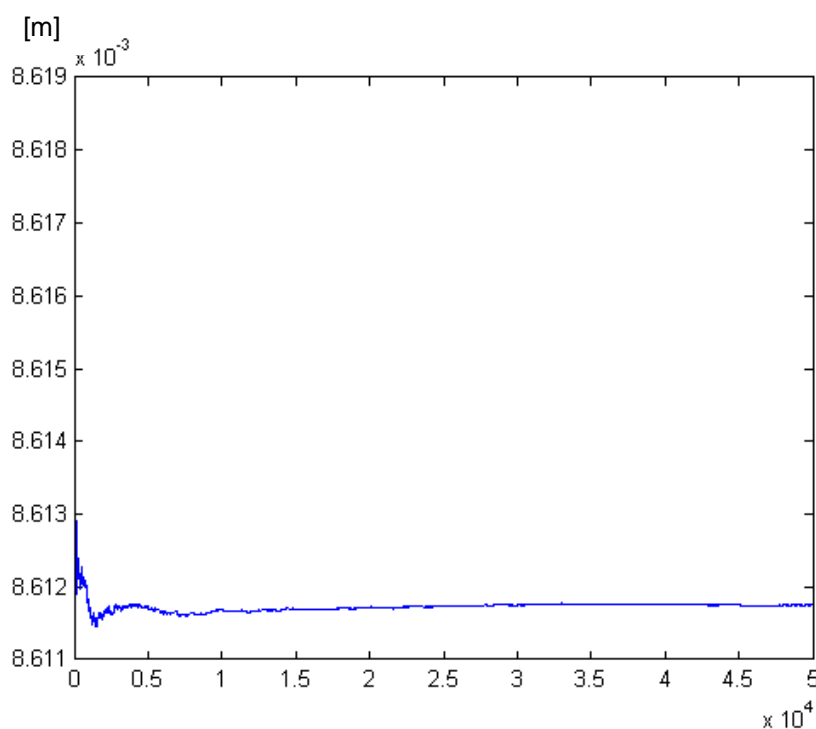


Figura 46 – Estimativa da FDPA da variável randômica  $u_4$ , exemplo 2a

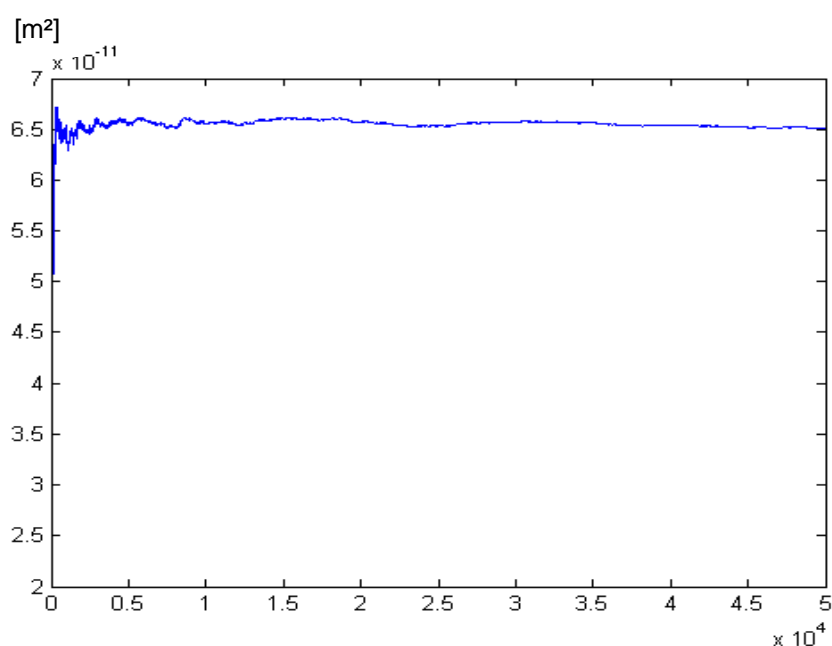
### 6.5 Exemplo 2b - Incerteza no Parâmetro de Rigidez de Winkler

O presente exemplo apresenta incerteza no parâmetro de Winkler da fundação  $\kappa_w : (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ . O parâmetro  $\kappa_w$  é modelado utilizando-se o processo estocástico parametrizado apresentado na equação (82). Os valores de média e desvio padrão, utilizados na modelagem deste parâmetro são apresentados na tabela 2. Neste problema, 'E', 'h' e ' $\kappa_p$ ' são parâmetros determinísticos e possuem valor igual à média apresentada na tabela 2.

Utilizando-se a amostra de deslocamentos nodais  $u_i(\xi(\omega_j))$ , gerada com a SMC, são estimados os momentos estatísticos dos processos estocásticos de deslocamento nodal. Nas figuras 47 e 48, é ilustrada a evolução dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem na SMC, para o processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4(\xi(\omega))$ . Novamente observa-se que a variância de  $u_4(\xi(\omega))$ , requer um número maior de realizações para atingir a condições de estacionariedade, do que momento de primeira ordem.

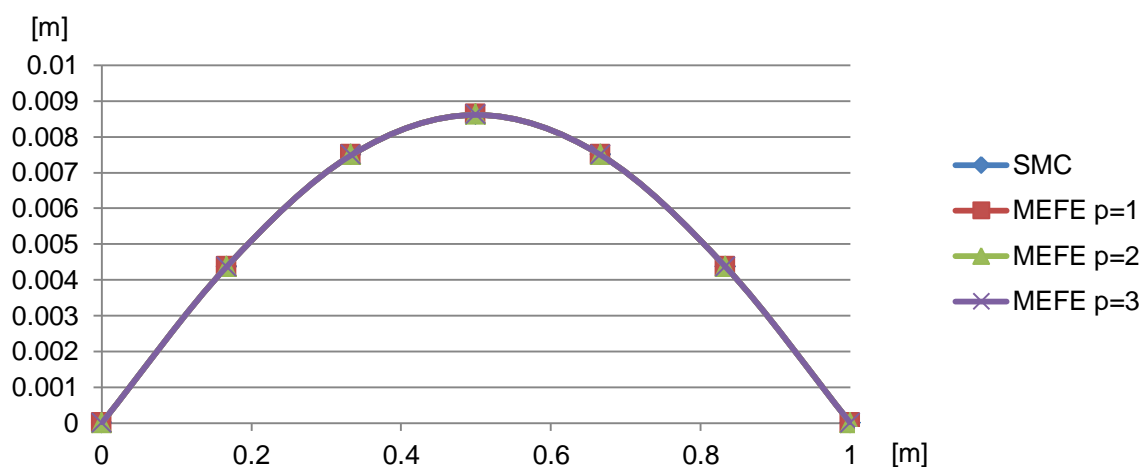


**Figura 47 – Evolução do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4$ , na SMC. Exemplo 2b.**



**Figura 48 – Evolução da variância, do processo estocástico de deslocamento no centro da viga  $u_4$ , na SMC. Exemplo 2b.**

Os momentos estatísticos estimados com a aplicação do MEFE, para decomposições de grau  $p=1, 2$  e  $3$  são calculados com as equações (75) e (76). Os resultados de valor esperado e de variância obtidos com os dois métodos, para os processos estocásticos de deslocamento transversal nos nós da viga  $u_i(\xi(\omega))$ , são comparados nas figuras 49 e 50. Os erros relativos na solução do MEFE são apresentados nas figuras 51 e 52.



**Figura 49 – Valor esperado do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2b.**

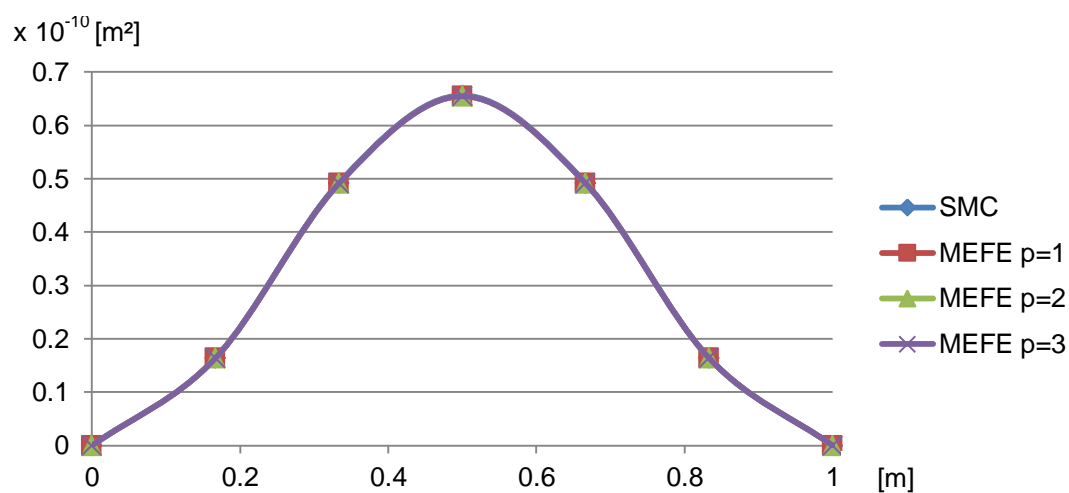
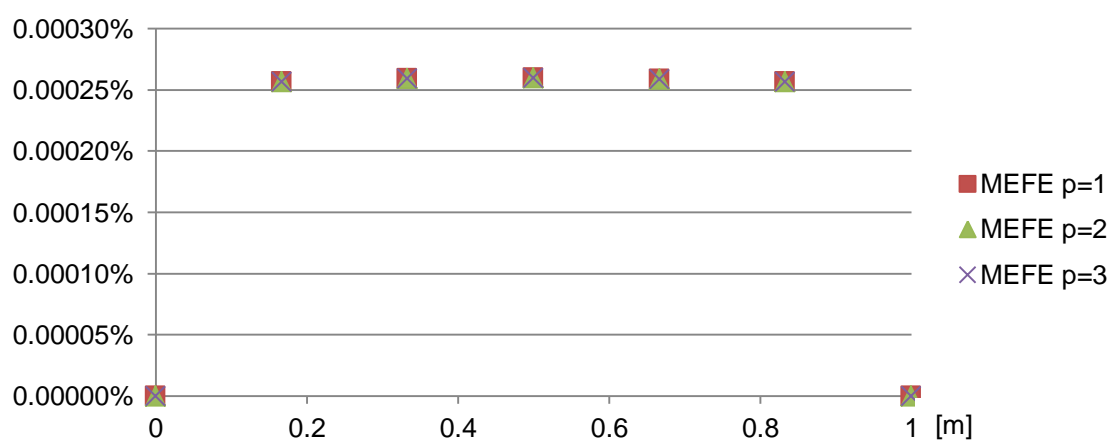


Figura 50 – Variância do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2b.



51 – Erro relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2b.

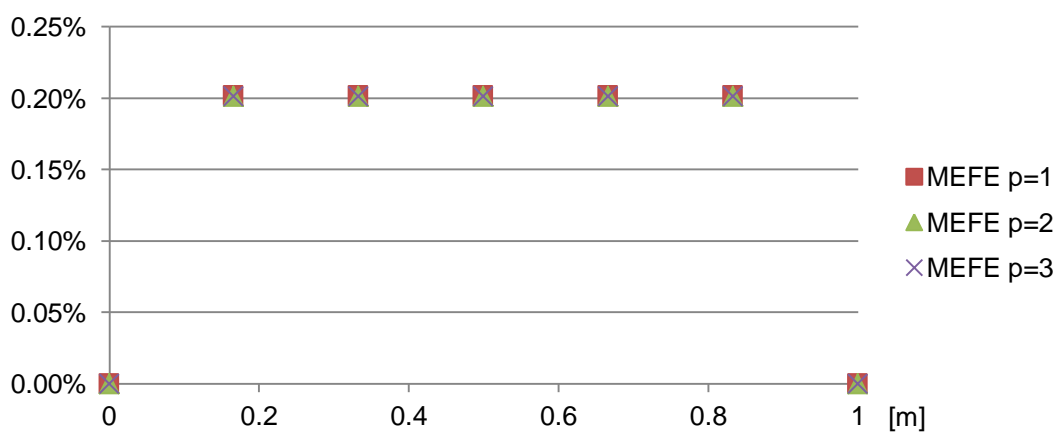


Figura 52 – Erro relativo na variância do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós da viga de Pasternak, exemplo 2b.

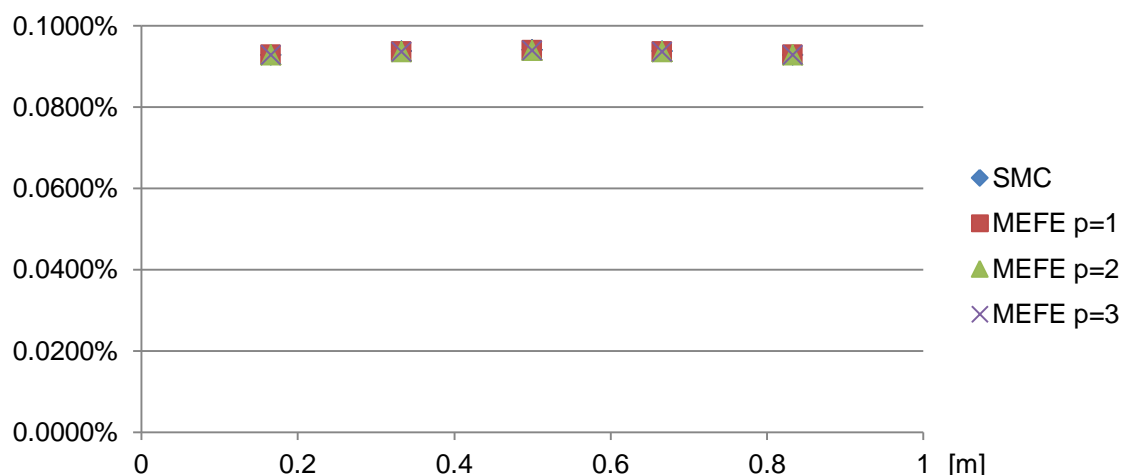
Observando as figuras 49 e 50, nota-se que a aplicação do MEFE utilizando uma decomposição do caos de grau  $p=1$ , fornece uma ótima aproximação em relação às curvas de valor esperado e de variância obtidas com a SMC. Verifica-se nas figuras 51 e 52, que os erros relativos no valor esperado e na variância, para o problema de incerteza no parâmetro de Winkler, são inferiores em relação ao caso em que a incerteza está no coeficiente de Pasternak.

Na tabela 8 são apresentados os valores numéricos dos erros relativos, nos momentos estatísticos da variável randômica  $u_4(\xi(\omega))$ . Nota-se que o desvio no valor esperado de  $u_4(\xi(\omega))$ , em relação ao problema determinístico calculado com a média de  $\kappa_w$ , é inferior ao desvio obtido no problema de incerteza no parâmetro de Pasternak. Neste exemplo, a propagação da incerteza é ainda menos acentuada que no exemplo anterior, visto que o parâmetro  $\kappa_w$  se relaciona de maneira proporcional ao deslocamento estocástico  $u(x, \xi(\omega))$  na formulação variacional. Observando os resultados apresentados na tabela 8, verifica-se que não existe um ganho significativo na utilização do MEFE com  $p>1$ , para o problema de incerteza no parâmetro de Winkler.

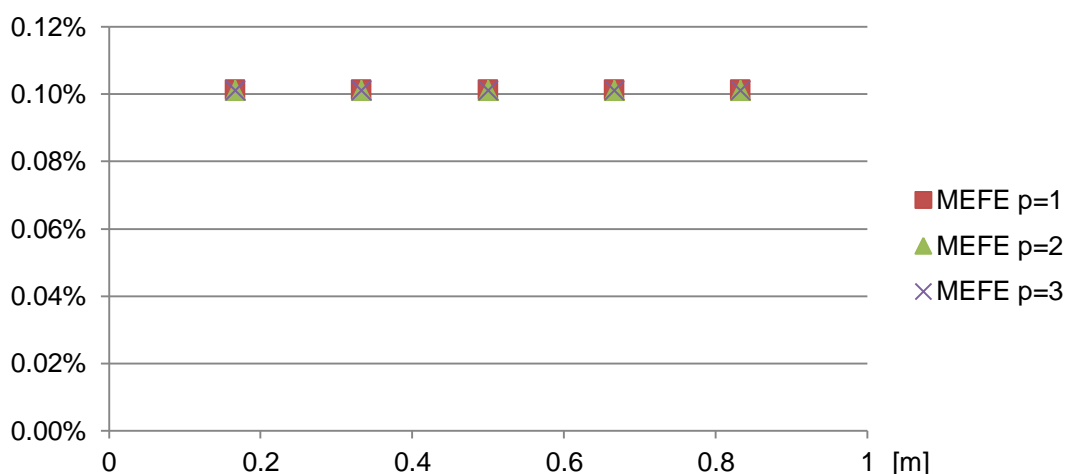
**Tabela 8 – Erros relativos no valor esperado e na variância, do processo estocástico de deslocamento no centro do vão  $u_4$ , exemplo 2b.**

	Valor Esperado [m]	Erro Relativo no valor esperado [%]	Variância [m <sup>2</sup> ]	Erro Relativo na variância [%]
SMC	0.0086117177940	----	$0.6559964 \times 10^{-10}$	----
MEFE $p=1$	0.0086117401895	0.000260%	$0.6546724 \times 10^{-10}$	0.201835%
MEFE $p=2$	0.0086117401895	0.000260%	$0.6546750 \times 10^{-10}$	0.201432%
MEFE $p=3$	0.0086117401895	0.000260%	$0.6546750 \times 10^{-10}$	0.201432%

Os valores calculados para o coeficiente de variação das variáveis aleatórias  $u_i(\xi(\omega))$ , são ilustrados na figura 53. De maneira análoga aos demais exemplos, o coeficiente de variação é praticamente constante ao longo dos nós da viga para uma determinada solução. Na figura 54, nota-se que os erros relativos no coeficiente de variação são inferiores aos erros obtidos no problema de incerteza no parâmetro de Pasternak.



**Figura 53 – Coeficiente de variação do processo estocástico de deslocamento  $u_i$  nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 2b.**



**Figura 54 – Erro relativo no coeficiente de variação, do processo estocástico  $u_i$  nos nós internos da viga de Pasternak, exemplo 2b.**

O histograma e a estimativa da FDPA do processo estocástico de deslocamento no centro do vão  $u_4(\xi(\omega))$ , são gerados com os resultados da SMC e do MEFE para  $p=3$ . Os histogramas obtidos através dos dois métodos são ilustrados na figura 55. Assim como no caso de incerteza no parâmetro  $\kappa_p$ , neste exemplo observa-se que o histograma obtido com a aplicação do MEFE, praticamente sobrepõe o gráfico gerado com a SMC. Em relação à FDPA estimada com a aplicação do MEFE, apresentada na figura 56, verifica-se uma perfeita concordância em relação à curva obtida com a SMC.

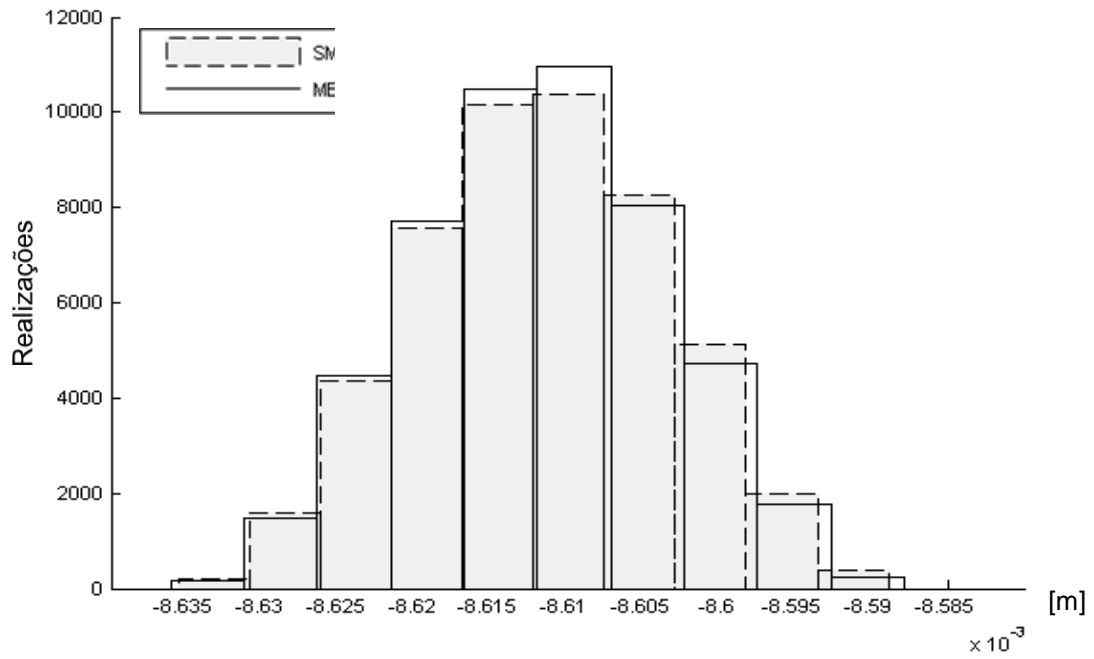


Figura 55 – Histogramas da variável randômica  $U_4$ , exemplo 2b.

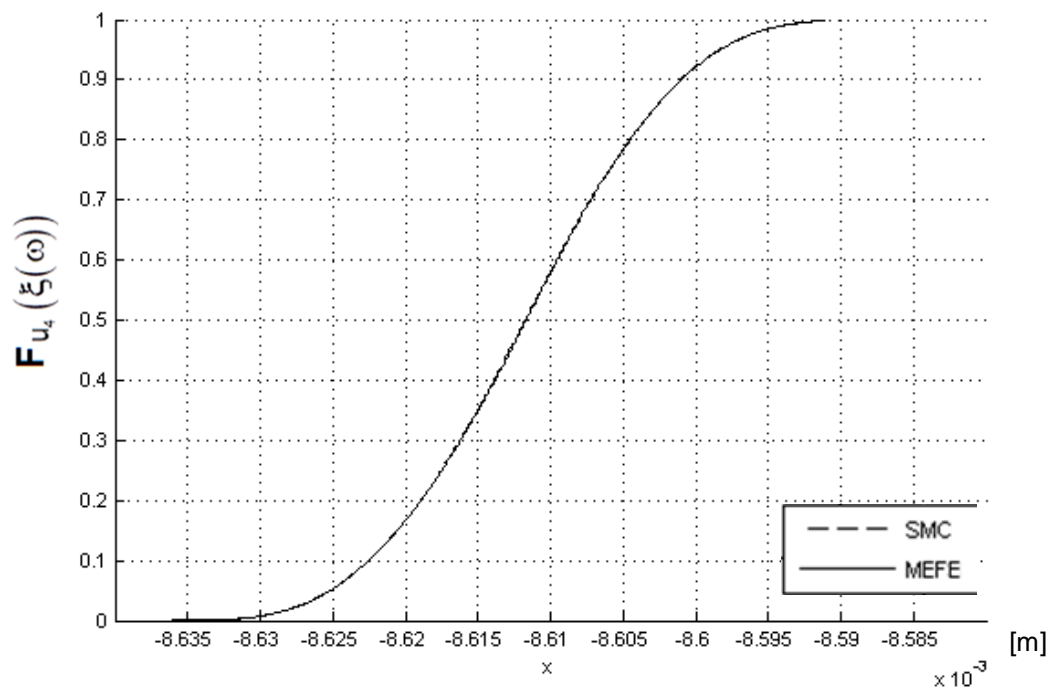


Figura 56 – Estimativa da FDP da variável randômica  $U_4$ , exemplo 2b.

## 6.6 Comparação entre os Exemplos

Ao avaliar os resultados apresentados nos exemplos anteriores, verifica-se que a propagação da incerteza é maior nos casos em que a incerteza está presente no coeficiente de rigidez à flexão da viga. Na tabela 9 são apresentados os valores de desvio relativo, no valor esperado do processo estocástico de deslocamento transversal no centro da viga, para os diferentes exemplos, em relação ao problema determinístico calculado com a média dos parâmetros 'E', 'h', ' $\kappa_p$ ' e ' $\kappa_w$ '. Conforme exposto anteriormente, nota-se que a propagação da incerteza é mais acentuada nos exemplos em que o parâmetro randômico interage com derivadas de ordem mais alta no problema variacional, equação (37). Desta forma, problemas com incerteza nos parâmetros que multiplicam derivadas de ordem mais alta, requerem uma maior discretização no espaço  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . O desvio no valor esperado dos processos estocásticos de deslocamento, em relação ao problema determinístico, não ocorre no caso em que a incerteza esta presente no termo fonte. Por exemplo, o MEFE poderia ser aplicado em um problema no qual o carregamento é modelado com um processo estocástico parametrizado, mas neste caso o valor esperado de  $u_i(\xi(\omega))$  seria exatamente igual ao deslocamento nodal correspondente do problema determinístico. Neste caso, o MEFE poderia ser aplicado na estimativa de outros momentos estatísticos de interesse.

**Tabela 9 – Desvio relativo no valor esperado do processo estocástico de deslocamento no centro da viga, em relação ao problema determinístico.**

	Valor esperado do deslocamento no centro da viga [m]	Desvio relativo em relação ao problema determinístico [%]
Solução analítica determinística	0.0086116680456	----
Exemplo 1a - MEFE p=3	0.0087666318845	0.0323
Exemplo 1b - MEFE p=3	0.0096654329809	1.3856
Exemplo 2a - MEFE p=3	0.0086124709227	0.0017
Exemplo 2b - MEFE p=3	0.0086117401895	0.0002

A propagação da incerteza fica evidente também nos gráficos da FDPA estimada. Nota-se na figura 36, que para o problema de incerteza na altura da viga, o processo estocástico de deslocamento no centro da viga pode assumir valores em um intervalo amplo [-0,035m; -0,0025m]. Por outro lado, no problema de incerteza



na fundação de Winkler, o processo estocástico  $u_4(\xi(\omega))$  apresenta uma pequena variabilidade, assumindo valores no intervalo  $[-0,00864m; -0,00858m]$ .

A FDPA estimada com a aplicação do MEFE pode ser utilizada no contexto da confiabilidade estrutural. Por exemplo, considera-se que o exemplo 1b, de incerteza na altura da seção da viga, seja um problema de engenharia cujo critério de falha é uma deflexão limite no centro da viga de 0,01m. Neste caso o índice de confiabilidade seria de apenas 60% aproximadamente. O critério de falha pode ser definido de diferentes formas, por exemplo, em termos de tensões mecânicas, que podem ser expressas em função dos processos estocásticos de deslocamento nos nós.

Na tabela 10 são apresentados os tempos computacionais, da solução dos exemplos numéricos, utilizando a SMC e o MEFE para diferentes graus de decomposição em polinômios de Legendre. Nota-se que o MEFE demonstra-se mais eficiente que a SMC. No entanto, dependendo da complexidade do modelo mecânico utilizado, pode ser necessária a implementação de um algoritmo que considere a esparsidade da matriz de rigidez estocástica do elemento.

**Tabela 10 – Tempo computacional para a obtenção da solução numérica dos exemplos.**

Exemplo	Tempo computacional [s]			
	SMC N=50.000	MEFE p=1	MEFE p=2	MEFE p=3
1a	1678	60	348	1258
1b	1712	69	365	1287
2a	1688	69	352	1264
2b	1736	123	386	1305

Um algoritmo simples e eficiente, que não requer uma análise das funções de aproximação utilizadas, é a consideração do “padrão geométrico” que se repete na matriz de rigidez elementar. Por exemplo, a matriz de rigidez apresentada na figura 11, poderia ser calculada integralmente apenas até o termo  $i=j=35$  (a dimensão do caos). Os demais coeficientes da matriz poderiam ser calculados filtrando-se os termos nulos, com base no padrão geométrico obtido inicialmente até o termo  $i=j=35$ .

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentado o problema de flexão estocástica, de uma viga de Euler-Bernoulli, apoiada em fundação de Pasternak, com incerteza nos parâmetros de rigidez da viga e da fundação. A formulação forte do problema de flexão estocástica foi descrita, com a qual se obteve um problema variacional associado. O espaço de soluções teóricas do problema variacional foi formalmente definido, e dentro de condições impostas através de hipóteses teóricas, foi demonstrada a existência e unicidade de solução do problema, com a aplicação da versão estocástica do lema de Lax-Milgram. O estudo teórico de unicidade e existência de solução demonstrou-se importante na escolha de funções adequadas, para a geração do espaço de soluções aproximadas.

O esquema de Askey-Wiener, que permite a representação de variáveis aleatórias com variância finita através de famílias de polinômios ortogonais, foi apresentado. Este esquema foi utilizado, juntamente com funções de aproximação do espaço de soluções determinístico, na proposição de uma solução aproximada para o processo estocástico de deslocamento transversal da viga. A solução aproximada proposta foi utilizada na aplicação do método de Galerkin, com o qual se obteve um problema variacional aproximado, a partir da formulação forte do problema.

Utilizando a aproximação de Galerkin, foi demonstrado o procedimento de aplicação do Método dos Elementos Finitos Estocásticos. Este método consiste na escolha de funções teste adequadas para a aproximação do espaço de soluções determinístico, e o esquema de Askey-Wiener para a aproximação no espaço das variáveis aleatórias com variância finita. A construção do espaço de soluções global do problema, obtido com a sobreposição de elementos finitos estocásticos, foi demonstrada. O processo de aplicação de condições de contorno foi ilustrado, permitindo a abordagem de diferentes modelos mecânicos estruturais.

O MEFE foi utilizado na obtenção de soluções aproximadas, em exemplos selecionados, e os resultados obtidos, em termos de momentos estatísticos, foram comparados a valores de referência, estimados através de Simulações de Monte Carlo. Os resultados do valor esperado, variância, do coeficiente de variação, assim como histogramas e estimativas da função distribuição de probabilidade acumulada, dos processos estocásticos de deslocamento nodal, obtidos com o MEFE,

apresentaram excelente concordância com os valores de referência da SMC, em todos os exemplos. Foi observado no modelo estocástico, que a propagação da incerteza, presente nos parâmetros de rigidez da viga e da fundação, ocasiona um desvio do processo estocástico de deslocamento da viga, em relação ao deslocamento obtido com os valores médios dos parâmetros randômicos, no problema determinístico. A propagação da incerteza demonstrou-se mais acentuada nos exemplos em que os parâmetros randômicos, se relacionam com derivadas de maior ordem na formulação variacional. O exemplo de incerteza na altura da seção apresentou o maior desvio do valor esperado, do processo estocástico de deslocamento, e também o maior coeficiente de variação, indicando grande sensibilidade na resposta mecânica do modelo estocástico, em relação ao parâmetro incerto. O exemplo de incerteza no parâmetro de Winkler apresentou o menor desvio no processo estocástico de deslocamento, e também o menor coeficiente de variação.

A solução obtida com o MEFE apresentou menor custo computacional do que a execução de simulações de Monte Carlo. A metodologia de aplicação do MEFE, demonstrada no problema de flexão estocástica da viga repousando em fundação de Pasternak, e avaliada com a utilização dos exemplos numéricos, possibilita a abordagem de problemas mais complexos, descritos por outros modelos mecânicos. Estudos posteriores podem considerar a aplicação do MEFE em outros problemas de elasticidade linear (elementos finitos planos e sólidos). A influência do número de variáveis aleatórias, utilizadas na descrição dos processos estocásticos parametrizados, nas estimativas de erro dos momentos estatísticos, é uma questão interessante a se investigar, assim como a aplicação de outros tipos de variáveis randômicas na descrição dos parâmetros.

## REFERÊNCIAS

- ADAMS R. A.. **Sobolev spaces**. Academic Press. New York. 1975.
- ALEXANDERIAN A. **Gaussian Hilbert spaces and homogeneous chaos: from theory to application**. The University of Texas at Austin, 2013.
- AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE. **Welded steel pipe**. American Iron and Steel Institute, 2007.
- ARAÚJO J. M.; AWRUCH A. M.. **On stochastic finite elements for structural analysis**. Computers and Structures, v. 52, n. 3, p. 461-469, 1994.
- ASKEY R.; WILSON J.. **Some basic hypergeometric polynomials that generalize jacobi polynomials**. Mem. Amer. Math. Soc., 319, AMS, Providence, RI. 1985.
- BABUSKA I.; CHATZIPANTELIDIS P.. **On solving elliptic stochastic partial differential equations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 191, n. 37-38, p. 4093-4122, 2002.
- BABUSKA I.; WHITEMAN J. R.; STROUBOULIS T.. **Finite elements: an introduction to the method and error estimation**. Oxford University Press, NY, 2011.
- BABUSKA I.; TEMPONE R.; ZOURARIS G. E.. **Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations**. Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 42, n. 2, p. 800-825, 2004.
- BABUSKA I.; TEMPONE R.; ZOURARIS G. E.. **Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method: the stochastic formulation**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 194, n. 12-16, p. 1251-1294, 2005.
- BESOLD P. **Solutions to stochastic partial differential equations as elements of tensor product spaces**. PhD Thesis, Universität Göttingen, 2000.
- BOYAVAL S.; LE BRIS C.; MADAY Y.; NGUYEN N. C. and PATERA A. T.. **A reduced basis approach for variational problems with stochastic parameters: Application to heat conduction with variable Robin coefficient**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; v. 198, n. 41-44, p. 3187-3206, 2009.
- CAMERON R. H.; MARTIN W. T.. **The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functional**. Annals Mathematics, n. 48, p. 385-392, 1947.

- CHAKRABORTY S.; SARKAR S. K.. **Analysis of a curved beam on uncertain elastic foundation**. Finite Elements in Analysis and Design, v. 36, n. 1, p. 73-82, 2000.
- CHEN N. Z.; GUEDES SOARES C. G.. **Spectral stochastic finite element analysis for laminated composite plates**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 197, n. 51-52, p. 4830-4839, 2008.
- COOK R. D.; MALKUS D. S.; PLESHA M. E.. **Concepts and applications of finite element analysis**. Jon Wiley & Sons, p. 630, 1989.
- DINEV. D.. **Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions**. Engineering Mechanics, v. 19, n. 6, p. 381-392, 2012.
- ELISHAKOFF I.; REN Y. J.; SHINOZUKA M.. **Some exact solutions for the bending of beams with spatially stochastic stiffness**. International Journal of Solids and Structures, v. 32, n. 16, p. 2315-2327, 1995.
- FERNANDEZ P.J.. **Measure and Integration**. IMPA, p. 198, 2002.
- FILONENKO-BORODICH M. M.. **Some approximate theories of elastic foundation**. Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika, v. 46, p. 3-18, 1940.
- GHANEM R.; SPANOS P. D.. **Stochastic finite elements: a spectral approach**. Dover, NY, 1991.
- GRIGORIU M.. **Applied non-gaussian processes: examples, theory, simulation, linear random vibration, and matlab solutions**. Prentice Hall, 1995.
- HENTENYI M.. **Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering**. University of Michigan Press, 1946.
- HESS P. E, BRUCHMAN D., ASSAKKAF I. A., AYYUB B. M.. **Uncertainties in Material Strength, Geometric, and Load Variables**. Naval Engineers Journal, v. 114, 2002.
- JASON S.. **Gaussian Hilbert spaces**. Cambridge University Press, 1997.
- KREIZSIG E. **Introductory functional analysis with applications**. John Wiley & Sons, 1989.
- JARDINE R. J.. **Some observations on the kinematic nature of soils stiffness**. Soils and Foundations, v. 32, n. 2, p.111-124, 1992.
- JONES G.. **Analisy of beams on elastic foundations**. Thomas Telford Publishing, 1997.

- MATTHIES H. G.; KEESE A.. **Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 194, n. 12-16, p. 1295-1331, 2005.
- OGURA H.. (1972) **Orthogonal functionals of the Poisson process**. IEEE Trans. Inform. Theory, v. 18, n. 4, p. 473–481, 1972.
- PASTERNAK P. L.. **On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants**. Gosudartsvvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arhitekture, Moskva, 1954.
- REISSNER E.. **Deflection of plates on viscoelastic foundation**. Journal of Applied Mechanics, v.25, p. 144-145, 1958.
- RAO M. M.; SWIFT J. R.. **Probability theory with applications**. Springer, 2nd ed, 2010.
- REDDY J. N.. **An introduction to the finite element method**. MacGraw Hill. 3rd ed. 2006.
- RYAN R. A.. **Introduction to tensor products of Banach spaces**. Springer, 2002.
- SARSRI D.; AZRAR L.; JEBBOURI A.; EL HAMI A.. **Component mode synthesis and polynomial chaos expansions for stochastic frequency functions of large linear FE models**. Computers & Structures, v. 89, n. 3-4, p. 346-356, 2011.
- SETT K; JEREMIC B; KAVVAS M. L.. **Stochastic elastic–plastic finite elements**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 200, n. 9-12, p. 997-1007, 2011.
- SILVA JR. C. R. A.. **Application of the Galerkin method to stochastic bending of Kirchhoff plates**. Doctoral Thesis, Department of Mechanical Engineering, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil, 2004.
- SILVA JR. C. R. A.; BECK A. T.; SUAREZ O. A. G.. **Galerkin solution of stochastic reaction-diffusion problems**. Journal of Heat Transfer. 2013.
- SPANOS P. D.; GHANEM R. **Stochastic finite element expansion for media random**. Journal Engineering Mechanics, v. 125, n. 1, p. 26-40, 1989.
- TEODORU I.B.; MUSAT V.; VRABIE M.. **A finite element study of the bending of beams resting on two-parameter elastic foundation**. Buletinul Institutului Politehnic din Iasi, Tomul LII (LVI), Fasc. 3-4, 2006.
- TEODORU I.B.; MUSAT V.. **Beam elements on linear variable two-parameter elastic foundation**. Buletinul Institutului Politehnic din Iasi, Tomul LIV (LVIII), Fasc. 2, 2008.

- TEODORU I.B.; MUSAT V.. **The modified Vlasov foundation model: an attractive approach for beams resting on elastic supports**. The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, v.15C, 2010.
- THE STEEL CONSTRUCTION INSTITUTE, **Joints in steel construction: Moment connections**. The Steel Construction Institute, 1997.
- THE STEEL CONSTRUCTION INSTITUTE, **Joints in steel construction: simple connections**. The Steel Construction Institute, 2002.
- TIMOSHENKO S.. **Strength of materials: advanced theory and problems**. 2ed. D. Van Nostrand Company, 1940.
- TREVES F.. **Topological vector spaces, distributions and kernels**. Academic Press. 1967.
- VANMARCKE E. H.; GRIGORIU M.. **Stochastic finite element analysis of simple beams**. Journal of Engineering Mechanics, v. 109, n. 5, p.1203–1214, 1983.
- VLAZOV V.Z.; LEONTIEV U. N.. **Beams, plates and shells on elastic foundation**. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966.
- WIENER N.. **The homogeneous chaos American**. Journal Mathematics, n. 60, p. 897-936, 1938.
- WINKLER E.. **Die lehre von der elastizitat und festigkeit**. Dominicus, Prague, 1867.
- WRIGGERS, P. **Computational contact mechanics**. 2ed. Springer, 2006.
- XIU D.; KARNIADAKIS G. E.. **The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations**. SIAM Journal on Science Computing, v. 24, n. 2, p. 619-644, 2002.
- YOSHIDA K.. **Functional analysis**. Springer, Berlin, 1978.