

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SAMUEL VICENTE FRANCISCON ELIAS

**PROJETO ÓTIMO DE UM MECANISMO CAME SEGUIDOR**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**TCC 2**

CURITIBA

2016

SAMUEL VICENTE FRANCISCON ELIAS

**PROJETO ÓTIMO DE UM MECANISMO CAME SEGUIDOR**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso - Tcc2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Profa. Dra. Ana Paula da Silva Ferreira

CURITIBA

2016

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa “PROJETO ÓTIMO DE UM MECANISMO CAME SEGUIDOR”, realizada pelo aluno SAMUEL VICENTE FRANCISCON ELIAS, como requisito parcial para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

---

Profa. Dra. Ana Paula da Silva Ferreira  
DAMEC, UTFPR  
Orientador

---

Prof. Dr. Carlos Henrique da Silva  
DAMEC, UTFPR  
Avaliador

---

Prof. Dr. Marco Antônio Luersen  
DAMEC, UTFPR  
Avaliador

Curitiba, 07 de Dezembro de 2016

## RESUMO

Mecanismo came seguidor é frequentemente usado em diversos tipos de máquinas e equipamentos e seu projeto se inicia com uma requisição de movimento inicial. A partir desse requisito são construídos os diagramas de posição, velocidade e aceleração. Posteriormente é feito o dimensionamento dos componentes. Durante o projeto de um mecanismo came seguidor, diversas variáveis de projeto e restrições devem ser analisadas. Isso se faz com o objetivo de garantir a condição de projeto inicial e o bom funcionamento do mecanismo. Para facilitar a resolução pode-se usar métodos de otimização. Esse trabalho utiliza a metodologia de otimização para projetar um mecanismo came seguidor ótimo, com isso reduzir tempo de projeto e evitar o superdimensionamento do mesmo. Considera-se que o came é associado a um seguidor de face plana. A função objetivo é baseada no tamanho do came e na tensão de contato entre a face do seguidor e o came. Os coeficientes de ponderação são números adimensionais cuja função é ponderar a importância de cada uma das partes da função objetivo. Como variáveis de projeto tem-se o raio de base do came e a largura da face do seguidor. Para resolver o problema são usados o algoritmo genético que é um método de busca estocástica e um método de otimização não linear com restrições. Os resultados mostraram que os coeficientes de ponderação são muito importantes e devem ser escolhidos adequadamente para cada aplicação. Estes influenciarão diretamente no valor das variáveis de projeto adequando-as para atender a requisição inicial de projeto de forma ótima.

**Palavras-chave:** mecanismo came seguidor, otimização, algoritmo genético.

## **ABSTRACT**

Follower cam mechanism is often used in various types of machines and equipment and its design starts with an initial motion requisition. From this requirement the position, velocity and acceleration diagrams are constructed. Subsequently the components are dimensioned. During the design of a follower cam mechanism, several design variables and constraints must be analyzed. This is done in order to guarantee the initial design condition and the proper functioning of the mechanism. To facilitate the resolution, optimization methods can be used. This work uses the optimal design applied a follower cam mechanism, thereby reducing Project time and avoiding oversized dimension. It should be recognized that the cam is associated with a flat face follower. The objective function is based on the cam size and the contact stress between the follower face and the cam. As design variables there are the cam base radius and the follower face width. To solve the problem we use the genetic algorithm which is a stochastic search method and a nonlinear constrained optimization method. The results showed that the weighting coefficients are very important and should be chosen appropriately for each application.

**Key-words:** cam Mechanism, optimization, genetic algorithm.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Projeto Convencional x Projeto Otimizado .....	10
Figura 2 – Tipos de Seguidores .....	12
Figura 3 - Cames do Tipo Axial e Radial.....	13
Figura 4 - Diagrama S V A P .....	14
Figura 5 - Requisição de Movimento Inicial .....	15
Figura 6 – Curvas S V A .....	18
Figura 7 - Raio de Base $R_b$ e Raio Circunferência Primária $R_p$ .....	19
Figura 8 – Geometria Came Seguidor .....	20
Figura 9 - Geometria Seguidor de Face Plana.....	21
Figura 10 – Raio do seguidor de rolete maior do que o módulo do menor raio de curvatura do came.....	23
Figura 11 – Came Seguidor Face Plana com $\rho$ negativo.....	24
Figura 12 - Largura da Face do seguidor.....	25
Figura 13 – Modelo dinâmico de massa concentrada.....	26
Figura 14 – Transmissão de Força Mecanismo Came Seguidor Face Plana.....	28
Figura 15 - Transmissão de Força Mecanismo Came Seguidor Face Plana conforme errata .	30
Figura 16 – Distribuição de pressão e zonas de contato de Hertz .....	33
Figura 17 – Funcionamento básico de Algoritmo Genético .....	39
Figura 18 - Tipos de Cruzamento .....	40
Figura 19 – Exemplo de Mutação .....	40
Figura 20 – Requisição Cinemática.....	42
Figura 21- Diagrama SVA.....	49
Figura 22 – Diagrama SVA .....	50

Figura 23 - Velocidade em mm/rad e aceleração em mm/rad <sup>2</sup> .....	50
Figura 24 – Carregamento no Came.....	51
Figura 25 - Tensão de Contato para Rb igual a 24,35 mm.....	52
Figura 26 - Torque Teórico .....	53
Figura 27 - Variáveis de Projeto.....	54
Figura 28 – Função objetivo otimizada pontualmente. ....	55
Figura 29 – Raio de Curvatura Came .....	56
Figura 30 - Tensão de Contato .....	56
Figura 31 - Perfil Came .....	57
Figura 32 - Variáveis de Projeto $\alpha$ maior do que $\gamma$ .....	58
Figura 33 - Raio de Curvatura do Came para $\alpha$ maior do que $\gamma$ .....	59
Figura 34 - Tensão de Contato para $\alpha$ maior do que $\gamma$ .....	60
Figura 35 - Variáveis de Projeto $\gamma$ maior do que $\alpha$ .....	61
Figura 36 - Raio de Curvatura $\gamma$ maior do que $\alpha$ .....	62
Figura 37 - Tensão de Contato $\gamma$ maior do que $\alpha$ .....	62
Figura 38 - Ponto Crítico $\theta$ 315° .....	63
Figura 39 - Ponto Crítico $\theta$ 330°.....	64

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	9
1.1	Justificativa .....	10
1.2	Objetivo.....	11
2	Fundamentação teórica.....	12
2.1	Mecanismo Came Seguidor .....	12
2.2	Diagrama S V A P.....	13
2.3	Descolamento Cicloidal para projetos de dupla espera.....	15
2.4	Dimensionamento do Came .....	18
2.4.1	Ângulo de Pressão.....	19
2.4.2	Raio de Curvatura .....	22
2.4.3	Espessura Mínima da Face do Seguidor de face plana.....	24
2.5	Dinâmica de Came .....	25
2.5.1	Análise da Força Dinâmica de um Came Seguidor Unido por Força.....	25
2.6	Transmissão Estática de Força .....	27
2.6.1	Mecanismo Came Seguidor de Face Plana .....	27
2.6.2	Restrição ao Encravamento.....	29
2.6.3	Errata.....	29
2.7	Fadiga Superficial .....	32
2.7.1	Teoria de Contato Elástico de Hertz .....	33
2.8	Otimização aplicada à Engenharia .....	34
2.8.1	Formulação do Problema .....	34
2.8.2	Métodos de Otimização.....	36
2.8.3	Otimização Não Linear Com Restrição .....	36
2.8.4	Algoritmo Genético.....	36
3	METODOLOGIA.....	41
3.1	Descrição da Metodologia.....	41
3.1.1	Descrição do Projeto .....	41
3.1.2	Coleta de Dados e Informações.....	42
3.1.3	Identificação e Definição das Variáveis de Projeto.....	42
3.1.4	Identificação de um Critério a Ser Minimizado .....	42
3.1.5	Identificação das Restrições .....	44
3.2	Resolução do Problema .....	45
4	RESULTADOS .....	48
4.1	Diagrama SVA .....	48
4.2	Carregamento .....	51
4.3	Tensão de Contato Máxima.....	51
4.4	Torque Teórico.....	52
4.5	Otimização .....	53
4.5.1	Função Objetivo com Coeficientes de Ponderação Iguais .....	53
4.5.2	Função objetivo com Coeficientes de Ponderação Diferentes .....	58
5	CONCLUSÃO.....	65
6	REREFRÊNCIAS .....	66

# 1 INTRODUÇÃO

O projeto de um mecanismo came seguidor é uma atividade que envolve uma série de restrições e variáveis de projeto. O processo se inicia com uma condição de movimento inicial, a partir da qual o projetista deve definir a geometria do came para que o seguidor execute o movimento previamente estabelecido. Para isso, primeiramente deve-se selecionar uma família de funções matemáticas, com base nelas é possível definir os diagramas de deslocamento, velocidade e aceleração. Após isso, deve-se dimensionar os elementos do came seguidor. O dimensionamento envolve diversas variáveis que são dependentes do tipo de came e do seguidor.

Para o caso do mecanismo came seguidor de face plana, as variáveis mais importantes são a definição do raio de base do came, largura da face do seguidor e excentricidade. No caso dos cames roletados, o raio do seguidor de rolete também deve ser dimensionado. O projetista deve sempre estar atento às restrições de projeto.

Um projeto convencional segue alguns estágios, são eles: coleta de dados para descrever o problema, analisar o sistema, checar o desempenho. Se o projeto for satisfatório o projetista dá a tarefa como encerrada, se não ele deve mudar o projeto de acordo com sua experiência. Para um projeto otimizado, existe um passo que antecede a todos os outros passos do projeto convencional. É necessário modelar o problema como um projeto de otimização, nesse estágio do projeto o projetista deve identificar as variáveis de projeto do sistema. Criar uma função objeto. Identificar as restrições relacionadas com o projeto. Esse estágio do projeto é demorado e trabalhoso. Porém se a eficácia do projeto não for confirmada, o projetista muda o projeto usando os métodos de otimização, estes métodos são sistemáticos e permitem uma visão mais detalhada do problema. Normalmente a metodologia de otimização é aplicada em projetos complexos. A Figura 1 ilustra uma comparação entre os estágios de um projeto convencional e de um projeto otimizado.

Um projeto de otimização normalmente tem como objetivo minimizar ou maximizar uma função, esta pode estar ligada a custos, consumo de combustíveis, lucro, redução de massa etc. O processo de otimização não busca apenas um projeto aceitável, mas o melhor projeto que atenda as condições iniciais e as restrições inicialmente estabelecidas. Esse projeto normalmente está dividido em cinco etapas, são elas: descrição do problema, coleta de dados e

informações, identificação e definição das variáveis de projeto, identificação de um critério a ser otimizado, identificação das restrições.

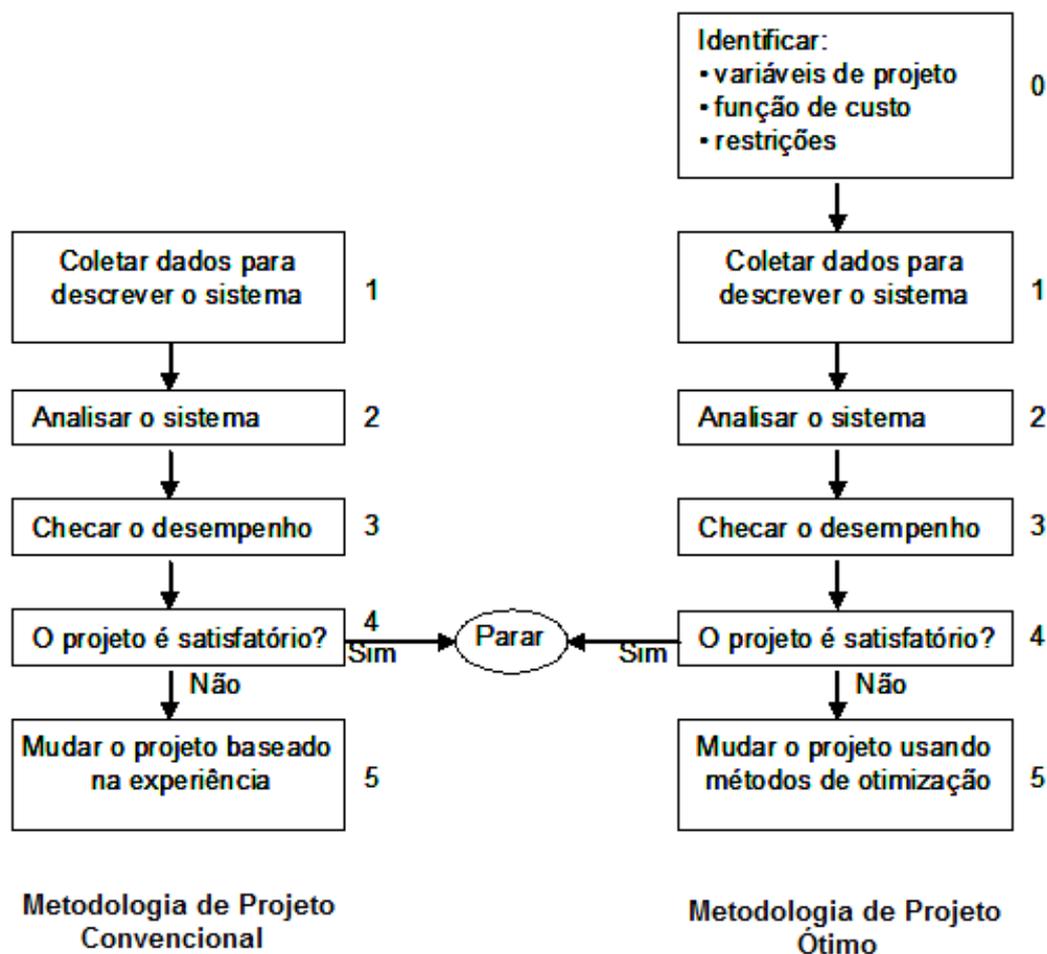


Figura 1 - Projeto Convencional x Projeto Otimizado

Fonte: Adaptado de Arora (2004)

## 1.1 Justificativa

O dimensionamento de um mecanismo como seguidor é uma tarefa complexa, pois existem muitas variáveis e restrições de projeto. Esse processo é normalmente resolvido na tentativa e erro e o resultado depende muito da experiência do projetista. Criar uma metodologia de projeto aplicando métodos de otimização com auxílio de uma ferramenta computacional simplifica o processo reduzindo o tempo de projeto, evita o superdimensionamento, consequentemente reduz o tamanho e o custo final do projeto.

## 1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo aplicar a metodologia de otimização no projeto de um mecanismo came seguidor definindo-se a função objetivo, variáveis de projeto e restrições. Um trabalho da literatura (Tsiafis *et al*, 2013) é usado como referência. Ele fornece os requisitos de projeto e também uma formulação de solução ótima para o dimensionamento de um mecanismo came-seguidor de face plana. A abordagem de solução de Tsiafis *et al* (2013) é então analisada neste trabalho, mantendo-se o que se julga adequado e propondo alterações visando melhorar os resultados. Com auxílio do toolbox de otimização do *software* Matlab, usar mais de um método de otimização na solução do mesmo problema. A analisar e propor modificações nas restrições de projeto baseadas em uma revisão bibliográfica.

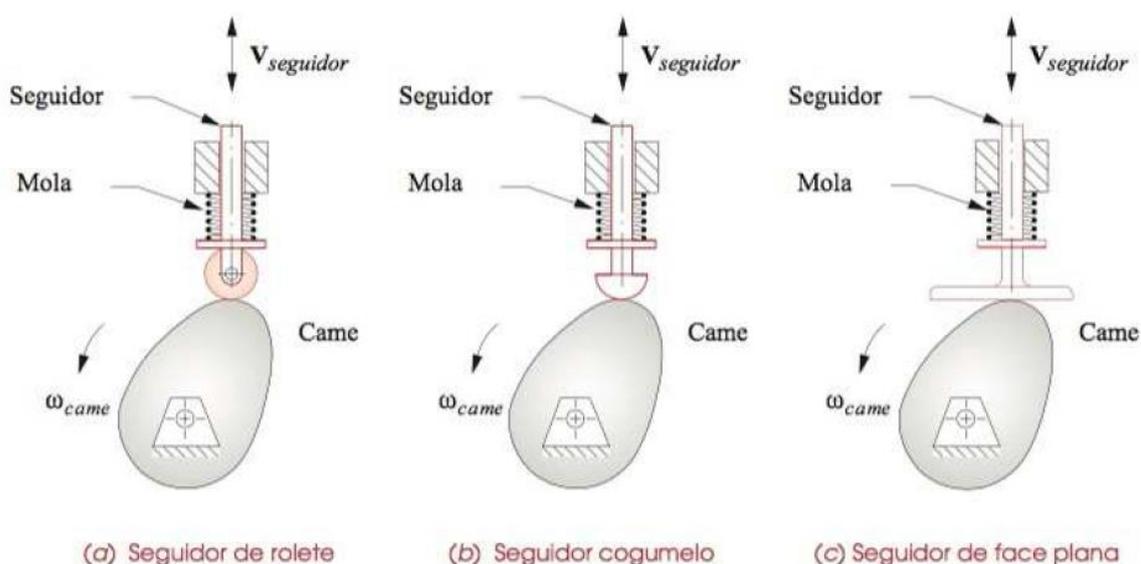
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Mecanismo Came Seguidor

De acordo com Norton (2010), os sistemas came seguidor podem ser classificados de diversas maneiras: pelo tipo de movimentação, pelo tipo do came, pelo tipo da junta, pelo tipo do seguidor, pelo tipo de movimento crítico, pelo tipo de programa de movimentação.

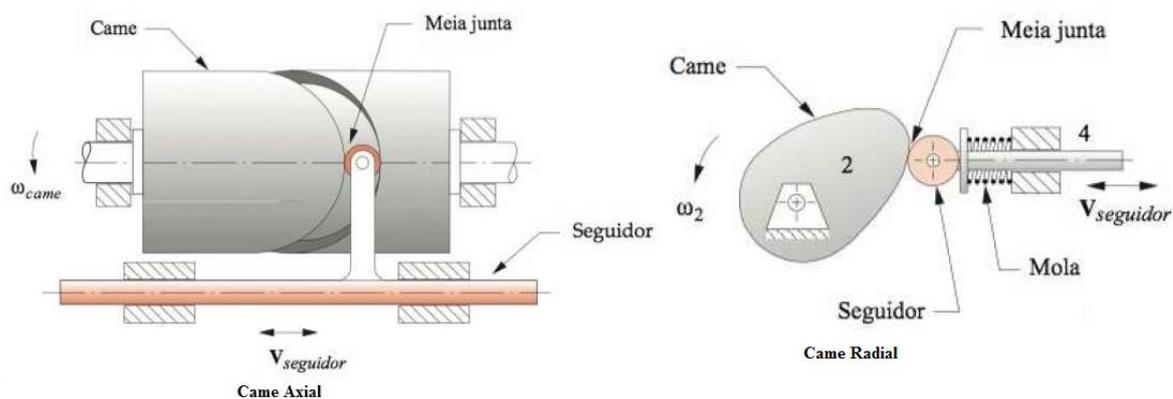
O seguidor é a parte do elo que mantém o contato direto com o came. Os arranjos mais comuns são: face plana, face esférica e rolete. Os seguidores de face plana possuem volumes menores comparados aos de roletes, por essa razão costumam ser mais baratos. O seguidor estudado neste trabalho é o seguidor de face plana. A Figura 2 apresenta os tipos de seguidores.

Seguidores roletados possuem menor atrito comparado com os outros dois, porém a necessidade de rolamento torna o mecanismo bem mais caro. Os seguidores esféricos são usados em projetos personalizados e confeccionados de acordo com a aplicação. A Figura 3 ilustra os tipos de came axial e radial.



**Figura 2 – Tipos de Seguidores**

**Fonte:** Norton (2010)



**Figura 3 - Cames do Tipo Axial e Radial**

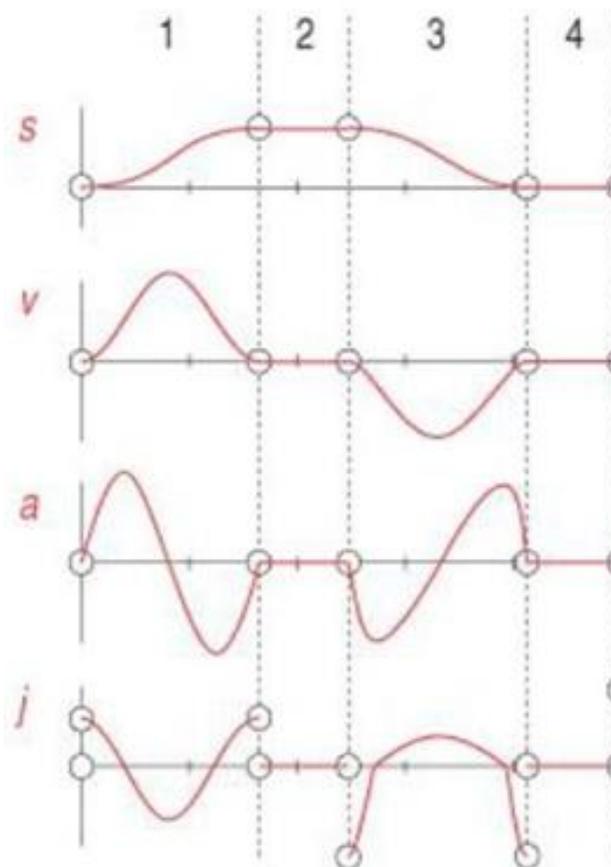
**Fonte:** Norton (2010)

Os tipos de movimentação mais importantes são: sobe-desce, sobe-desce-espera, sobe-espera-desce-espera. Algumas definições são muito importantes para melhor entendimento desses tipos de movimentação.

Espera ou tempo de espera: intervalo de tempo quando não há movimentação no seguidor, permite criar esperas exatas no mecanismo. O mecanismo objeto de estudo desse trabalho é um mecanismo came seguidor espera-sobe-espera-desce. Também pode ser chamado de mecanismo came seguidor de dupla espera. Após a identificação da necessidade de projeto, pode – se identificar as curvas que serão usadas para projetar o sistema.

## 2.2 Diagrama S V A P

O primeiro passo de um projetista ao projetar um mecanismo came seguidor é selecionar a função matemática que será usada para definir o movimento do seguidor. Normalmente se lineariza o came, isto é, “desenrola” a superfície do came inserindo o deslocamento angular no eixo  $x$  e o deslocamento do seguidor no eixo  $y$ . Após isso, deriva – se a função deslocamento com objetivo de encontrar a velocidade, a aceleração e o pulso. No trabalho em questão o pulso não será mencionado. Alguns autores indicam o pulso pela variável  $j$ . A Figura 4 mostra um diagrama S V A P de um mecanismo came seguidor de dupla espera.



**Figura 4 - Diagrama S V A P**

**Fonte:** Adaptado de Norton (2010)

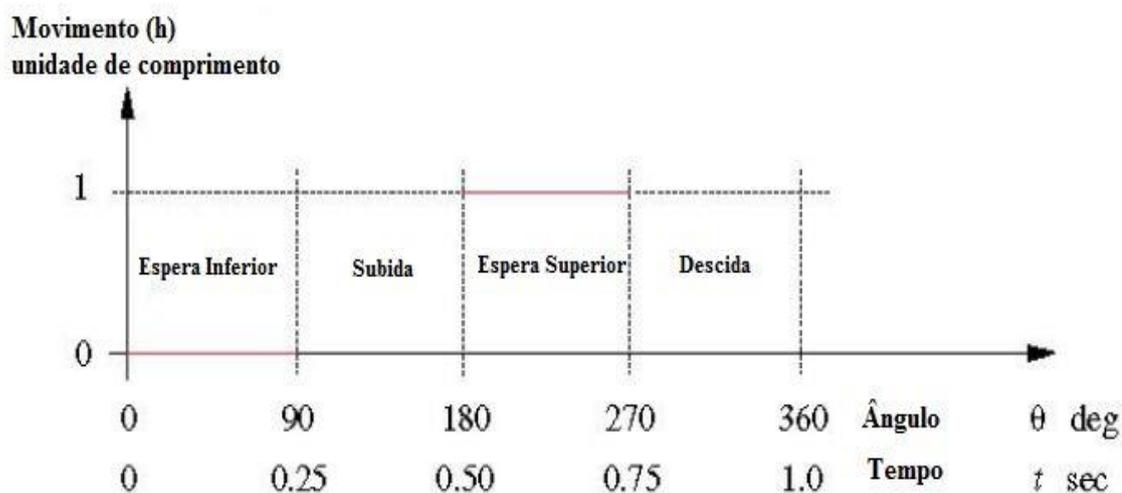
Para o projeto do mecanismo came seguidor deste trabalho é utilizada a metodologia seguida pela posição extrema crítica. Esse conceito não se preocupa com o trajeto pelo qual o mecanismo vai levar para chegar aos pontos críticos, apenas leva em consideração o tempo e as posições em que o mecanismo deve estar nas posições extremas.

O projetista é livre para escolher qual família de curvas que executarão o trabalho. Deve se atentar ao tipo de programa de movimentação, a condição de movimento inicial, e a aplicação do mecanismo. Além disso, de acordo com Norton (2010), alguns cuidados devem ser tomados. Não se deve ignorar os efeitos das derivadas superiores a função deslocamento. A lei fundamental de projeto do came diz que a função do came precisa ser contínua por toda primeira e segunda derivada do deslocamento durante todo o intervalo de rotação do mecanismo.

### 2.3 Descolamento Cicloidal para projetos de dupla espera

De acordo com Norton (2010), uma boa estratégia para definição das equações do diagrama SVAP é iniciar pela função de maior derivada, nesse caso a aceleração, garantindo que a mesma atenda a lei fundamental do projeto do came. Nessa abordagem as funções de velocidade e deslocamento são obtidas por operação de integração.

A Figura 5 apresenta um exemplo de projeto de dupla espera. Após a espera inferior acontece a subida do seguidor e após a subida há nova espera. Isso significa que as condições de continuidade das funções velocidade e aceleração serão valores nulos no início e fim da subida.



**Figura 5 - Requisição de Movimento Inicial**

**Fonte:** Adaptado de Norton (2010)

As funções harmônicas são muito interessantes para aplicação em mecanismos came seguidor. Aplica-se uma função senoidal de período completo para a aceleração, garantindo a satisfação das condições de contorno de magnitude nula no início e no fim do movimento. A equação (2.1) representa a curva senoidal.

$$a = C \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \quad (2.1)$$

A variável independente  $\theta$  representa o ângulo em radianos aonde está sendo avaliado a aceleração, velocidade e deslocamento das funções. Normalmente se normaliza  $\theta$  dividindo por  $\beta$ . Este por sua vez representa o intervalo angular a qual está se projetando. Qualquer valor resultante dessa divisão é um número adimensional que varia de 0 a 1 em qualquer posição do

came. Como normalmente se deseja um ciclo completo da curva senoidal, deve – se multiplicar o argumento da função por  $2\pi$ . A constante  $C$  é usada para definir a amplitude da curva seno.

Para encontrar outras funções como velocidade e deslocamento, deve – se integrar a equação (2.1) em relação a variável  $\theta$ . Aqui será apresentado uma forma resumida dessas deduções, uma análise mais detalhada pode ser encontrada em Norton (2010)

$$a = \frac{\partial v}{\partial \theta} = C \text{sen} \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \quad (2.2)$$

$$v = C \frac{\beta}{\theta} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right] + k_1 \quad (2.3)$$

No meio do processo de integração é comum surgirem constantes de integração. O valor dessas constantes normalmente está relacionado as condições de contorno do problema. Para calcular o valor de  $k_1$  deve – se aplicar a condição de contorno que diz a velocidade do seguidor deve ser zero em  $\theta = 0$ , então:

$$k_1 = C \frac{\theta}{\beta} \quad (2.4)$$

Assim a equação da velocidade fica como mostrado na equação (2.5).

$$v = C \frac{\beta}{\theta} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right] \quad (2.5)$$

Para se encontrar o deslocamento deve – se repetir o mesmo processo mostrado anteriormente. Integrar a equação (2.5) em relação a variável independente  $\theta$  como mostrado abaixo.

$$v = \frac{\partial s}{\partial \theta} = C \frac{\beta}{\theta} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$s = C \frac{\beta}{2\pi} \theta - C \frac{\beta^2}{4\pi^2} \text{sen} \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) + k_2 \quad (2.7)$$

A constante  $k_2$  está relacionada com a condição de contorno que relaciona a posição do seguidor no início do movimento. Para encontrar esse valor deve – se substituir  $s = 0$  em  $\theta = 0$ . Essa condição de contorno garante que o seguidor estará na posição zero no início do

movimento. O valor encontrado de  $k_2$  é igual a zero. Assim obtém-se a equação que calcula o deslocamento do seguidor em relação ao ângulo  $\theta$ .

$$s = C \frac{\beta}{2\pi} \theta - C \frac{\beta^2}{4\pi^2} \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \quad (2.8)$$

Como citado anteriormente, a constante  $C$  está relacionada com a amplitude do movimento do seguidor. É interessante relacionar essa constante com o levantamento  $h$  do seguidor. O levantamento é uma condição de projeto inicial que impõe a posição máxima do seguidor no início ou no fim do movimento. Essa relação pode ser expressa matematicamente por  $s = h$  em  $\theta = \beta$ . Substituindo esses valores na equação (2.8) o valor de  $C$  encontrado está mostrado abaixo.

$$C = 2\pi \frac{h}{\beta^2} \quad (2.9)$$

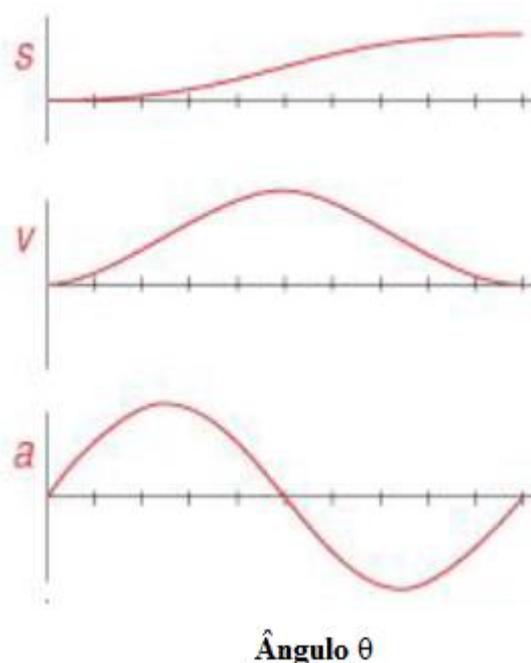
Substituindo o valor de  $C$  nas equações (2.1), (2.5) e (2.8), as equações de aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente são:

$$a = 2\pi \frac{h}{\beta^2} \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \quad (2.10)$$

$$v = \frac{h}{\beta} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right] \quad (2.11)$$

$$s = h \left[ \frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{\theta}{\beta} \right) \right] \quad (2.12)$$

A Figura 6 mostra o diagrama SVA para o segmento de subida com função cicloidal. Pode-se observar que a curva referente a aceleração é uma curva senoidal de período completo, atendendo a condição de continuidade com aceleração igual a zero no início e fim do segmento. O mesmo se observa para a curva de velocidade.

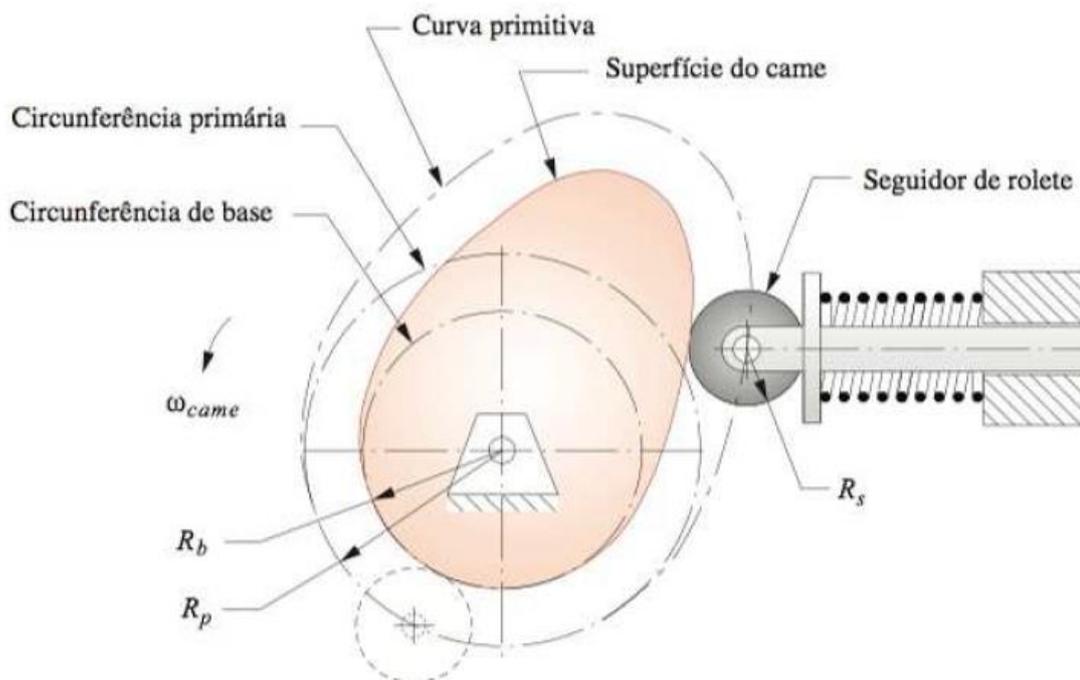


**Figura 6 – Curvas S V A**

**Fonte:** Adaptado de Norton (2010)

## 2.4 Dimensionamento do Came

Após a escolha das curvas SVA, o próximo passo do projeto é dimensionar o came. Existem alguns fatores que influenciam diretamente no tamanho e geometria do came. Aqui serão citados o ângulo de pressão e o raio de curvatura, ambos estão relacionados com o raio da circunferência de base no came ( $R_b$ ), quando utilizados em seguidores de face plana, ou o raio da circunferência primária ( $R_p$ ) quando utilizados em seguidores de rolete ou curvados. Alguns conteúdos que serão abordados nesse tópico se aplicam para seguidor de face plana e outros para seguidor de rolete. A Figura 7 ilustra o raio de base e o raio da circunferência primitiva.



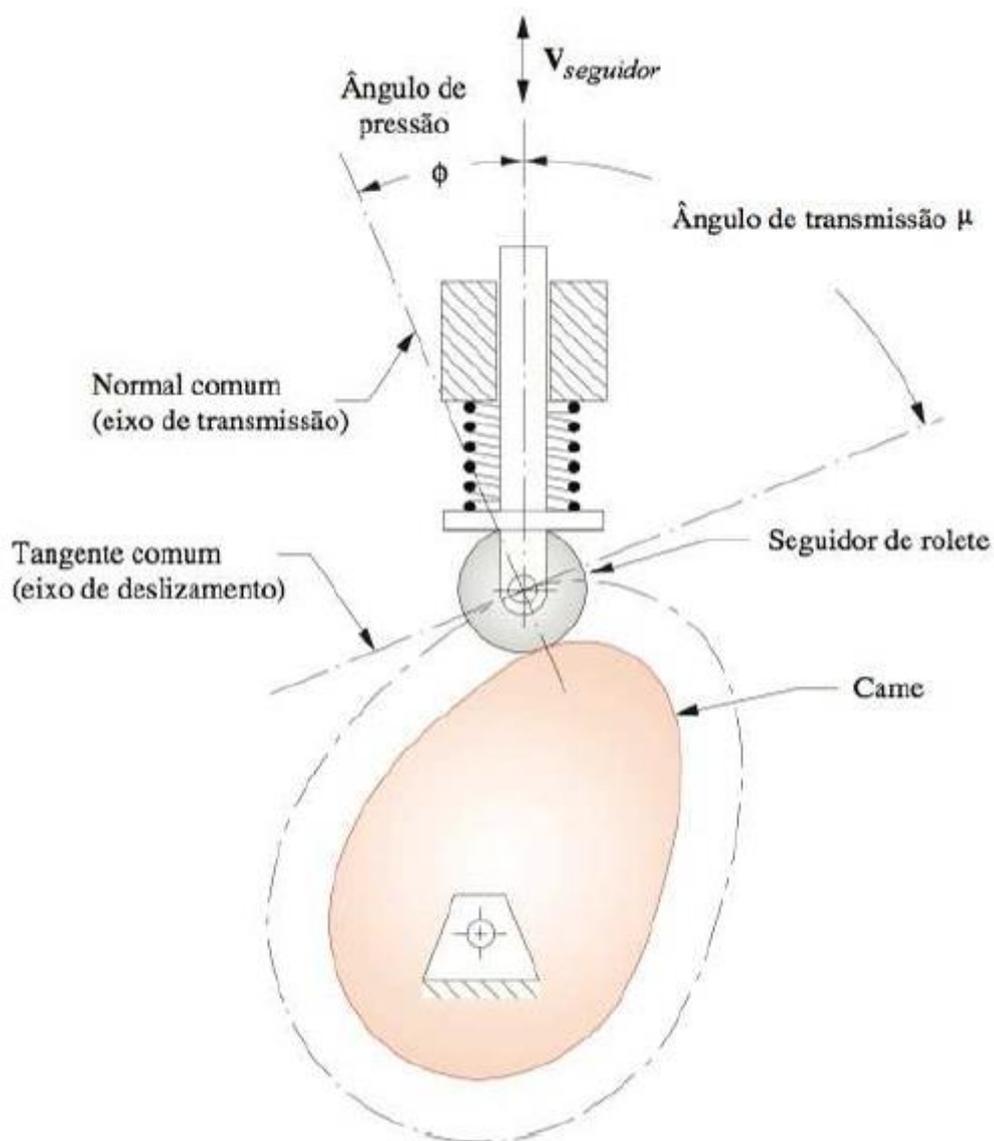
**Figura 7 - Raio de Base  $R_b$  e Raio Circunferência Primária  $R_p$**

**Fonte:** Adaptado de Norton (2010)

### 2.4.1 Ângulo de Pressão

Por definição, o ângulo de pressão  $\varphi$  é o ângulo entre a direção de movimento do seguidor e a direção do eixo de transmissão. O eixo de transmissão do movimento pode ser representado pela normal comum entre o seguidor e o cames. Na Figura 8 possível visualizar ângulo de pressão.

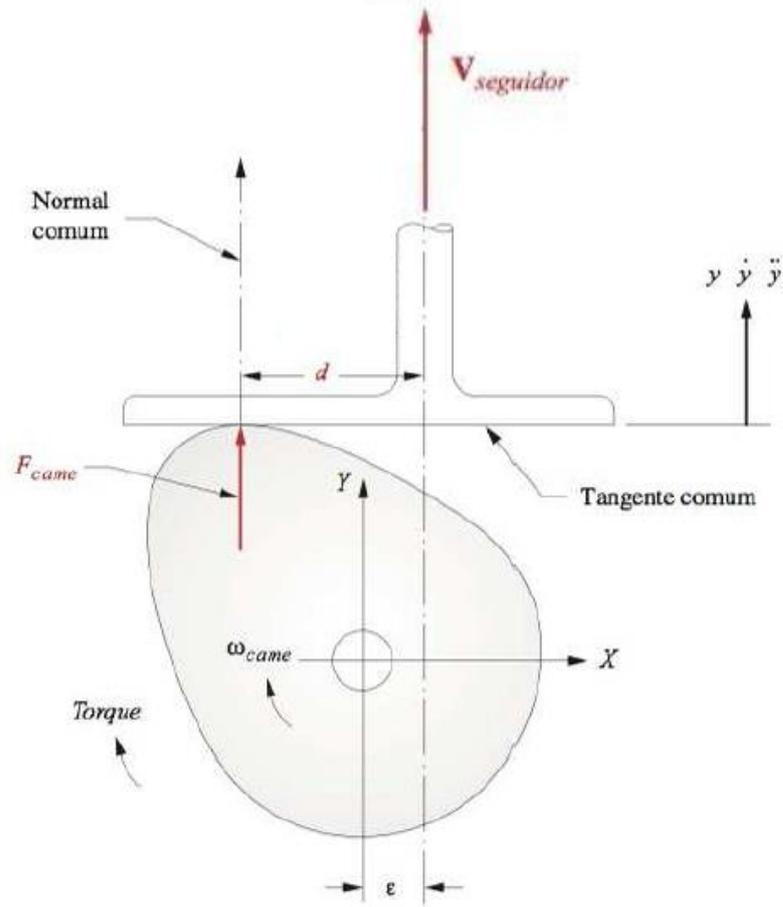
O ângulo de pressão é uma característica geométrica do cames que está relacionado com a direção da força transmitida no movimento do seguidor. Para um ângulo  $\varphi = 0^\circ$ , toda a força transmitida vai na direção do movimento do seguidor, para um ângulo  $\varphi = 90^\circ$ , não existirá movimento do seguidor. O ângulo de pressão pode variar de acordo com a posição do cames e do seguidor durante o movimento. De acordo com Norton (2010), é uma boa prática de engenharia manter um ângulo de pressão entre zero e  $30^\circ$ , isso evita um carregamento lateral excessivo no seguidor, valores muito acima disso aumentam o atrito no seguidor.



**Figura 8 – Geometria Came Seguidor**  
**Fonte:** Adaptado de NORTON (2010)

De acordo com Norton (2010) e Chen (1982), o ângulo de pressão para mecanismo came seguidor de face plana é nulo em todas as posições do came e do seguidor, visto que a direção de movimento do seguidor e o eixo de transmissão serão paralelas.

Em Tsiafis *et al.* (2013), os autores relacionam o ângulo de pressão como restrição de projeto para um mecanismo seguidor de face plana. No entanto, conforme descrito acima, esse ângulo é nulo nesse tipo de construção. A Figura 9 apresenta a reta normal comum entre o came e o seguidor e o eixo de movimento do seguidor, o ângulo entre essa reta e o eixo do seguidor é nulo.



**Figura 9 - Geometria Seguidor de Face Plana**

**Fonte:** Adaptado de NORTON (2010)

#### 2.4.1.1 Cálculo do Ângulo de Pressão

A equação.(2.13) é usada para calcular esse ângulo, a dedução completa está disponível em Norton (2010).

$$\phi = \arctan \frac{v - \varepsilon}{s + \sqrt{Rp^2 - \varepsilon^2}} \quad (2.13)$$

Onde  $v$  é a velocidade,  $s$  é o deslocamento  $Rp$  é o raio primitivo e  $\varepsilon$  é a excentricidade.

Nesse ponto do projeto a velocidade  $v$  e o deslocamento  $s$  já foram definidos na escolha das curvas SVAP. Cabe ao projetista manipular a excentricidade  $\varepsilon$  e o raio primitivo  $Rp$  até encontrar um valor satisfatório.

A excentricidade  $\varepsilon$  é definida como a distância perpendicular entre o eixo de movimentação do seguidor e o centro do came. Uma variação na excentricidade influencia

diretamente no ângulo de pressão do came. Muitas vezes a excentricidade é igual a zero, porém isso não é uma regra geral, é apenas um caso especial. A Figura 9 apresenta a excentricidade em um seguidor de face plana, essa também pode ser extrapolada para mecanismo seguidor de rolete.

A excentricidade  $\varepsilon$  não altera as funções SVAP, porém um aumento exagerado na excentricidade tornará o mecanismo maior, ocupando mais espaço. Normalmente existem restrições de espaço relacionadas ao projeto. O raio da circunferência primária também pode ser manipulado para se obter um ângulo de pressão aceitável, o aumento de  $R_p$  reduz o ângulo de pressão. No entanto, vale lembrar que  $R_p$  também está relacionado com o tamanho do came, de forma que valores exagerados  $R_p$  resultarão em um mecanismo maior, mais pesado e por sua vez mais caro. Em Tsiafis *et al.* (2013), os autores relacionaram raio da circunferência primária do mecanismo came seguidor de rolete com raio de base do mecanismo came seguidor de face planta. Não foi encontrado justificativa teórica para tal associação nas literaturas pesquisadas para a montagem da revisão bibliográfica.

## 2.4.2 Raio de Curvatura

O conceito de raio de curvatura  $\rho$  é uma propriedade matemática da função, não importa o grau de complexidade da função e o formato da curva, haverá um raio instantâneo de curvatura em todos os pontos da curva. Geralmente quanto maior o grau da função, maior a variação de raios de curvatura. O raio de curvatura é completamente independente do tipo de seguidor, porém exige cuidados diferentes de acordo com cada tipo do seguidor.

### 2.4.2.1 Raio de Curvatura para projeto de came com seguidor de Rolete

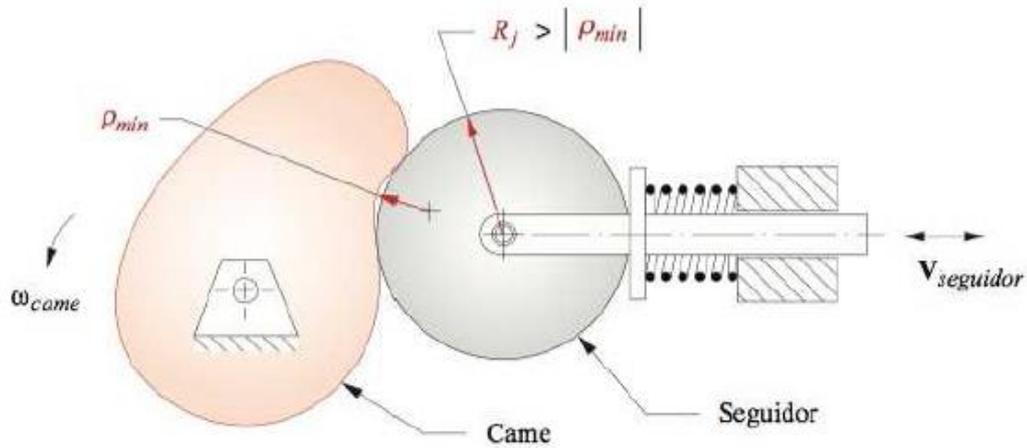
A equação para o raio de curvatura da curva primitiva do came associado a seguidor de rolete está representada na equação (2.14).

$$\rho = \frac{[(Rp + s)^2 + v^2]^{3/2}}{(Rp + s)^2 + 2v^2 - a(Rp + s)} \quad (2.14)$$

Na equação acima  $s$ ,  $v$  e  $a$  são deslocamento, velocidade e aceleração respectivamente. As unidades são comprimento, comprimento/rad e comprimento/rad<sup>2</sup> respectivamente.  $R_p$  é o raio da circunferência primária.

Um problema sutil que pode acontecer é quando o raio de curvatura do came é negativo, isto é, o came se torna côncavo. Quando isso acontece, o ideal é manter o módulo do menor

raio de curvatura do came maior do que o raio do rolete, caso isso não aconteça o posicionamento do seguidor no ponto côncavo pode ser comprometido. A Figura 10 mostra esse problema.



**Figura 10 – Raio do seguidor de rolete maior do que o módulo do menor raio de curvatura do came**

**Fonte:** Adaptado de Norton (2010)

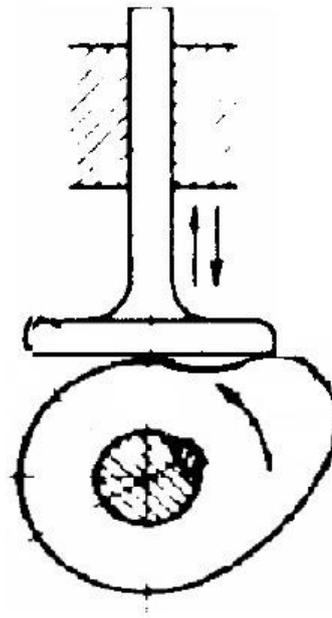
Em termos de dimensionamento a regra geral pode ser dada por

$$R_j < |\rho_{\min}|$$

Onde  $R_j$  é o raio do rolete e  $\rho_{\min}$  é o raio de curvatura do came.

#### 2.4.2.2 Raio de Curvatura para projeto de came com Seguidor de Face Plana

Para esse tipo de seguidor, um valor do raio de curvatura negativo acarretaria um erro de posicionamento do seguidor, a Figura 14 esse problema. Um seguidor plano não consegue seguir um came côncavo. Em Tsiafis *et al.* (2013), apesar do projeto proposto ser de came associado a seguidor de face plana, não foi encontrado nenhum tipo de restrição relacionada ao valor do raio de curvatura. No presente trabalho usa-se a restrição de que o raio de curvatura deve ser positivo.



**Figura 11 – Came Seguidor Face Plana com  $\rho$  negativo**

De acordo com Norton (2010) a equação (2.15) calcula o raio de curvatura para um mecanismo came - seguidor de face plana. Os valores de  $s$  e  $a$  vem dos diagramas de posição e aceleração, respectivamente.  $R_b$  é o raio de base do came..

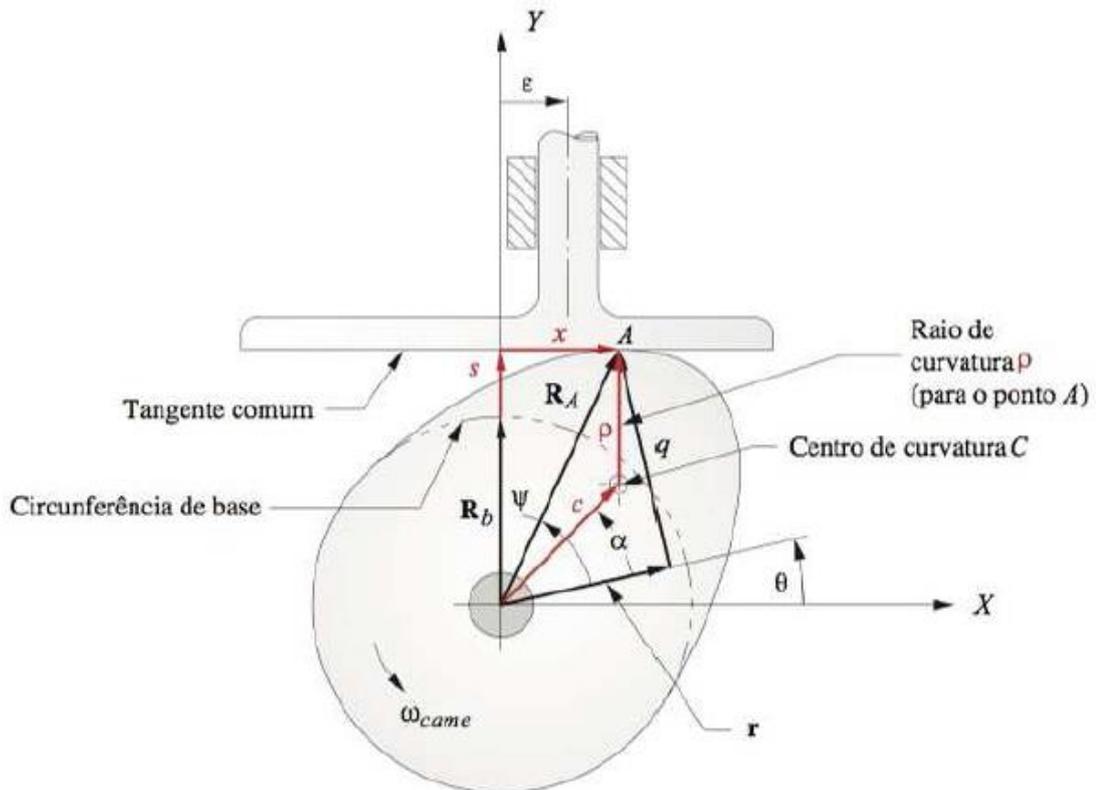
$$\rho = R_b + s + a \quad (2.15)$$

O valor de  $R_b$  é a única variável que pode ser manipulada pelo projetista até se encontrar valores positivo de  $\rho$  para todo o contorno do came. Vale salientar que  $R_b$  está diretamente ligado ao tamanho do came, um aumento exagerado nessa variável acarreta em maiores custos e esforços.

### 2.4.3 Espessura Mínima da Face do Seguidor de face plana

Através de algumas deduções matemáticas disponíveis em Norton (2010), é possível de se calcular uma espessura mínima para a face do seguidor, ela está representada pela equação (2.16). Percebe – se que após a aquisição dos diagramas de velocidade já é possível de se dimensionar uma espessura mínima para a face do seguidor. Essa espessura está relacionada com a distância  $x$  apresentada na Figura 12. Os valores de velocidades devem ser inseridos em comprimento/rad.

$$Espessura > v_{m\acute{a}x} - v_{m\acute{i}n} \quad (2.16)$$



**Figura 12 - Largura da Face do seguidor**

**Fonte:** Adaptado de Norton (2010)

## 2.5 Dinâmica de Came

Nas seções anteriores foram apresentados conceitos cinemáticos do mecanismo came seguidor, nessa fase o projetista se preocupa em atender a necessidade de projeto, ou seja, deslocamento velocidade e aceleração. Após isso, o came é dimensionado a fim de garantir que os requisitos de projeto sejam atendidos. A seguir, serão apresentados conceitos cinéticos com objetivo de considerar forças e torques dinâmicos envolvidos nesse projeto.

### 2.5.1 Análise da Força Dinâmica de um Came Seguidor Unido por Força

Há duas maneiras de abordar o sistema, a maneira direta e a maneira indireta também chamada de cinetostática. Na maneira direta, o projetista conhece todas as forças aplicadas no sistema e com base nelas é possível resolver os deslocamentos, velocidades e acelerações atuantes no sistema. Com a abordagem indireta, os deslocamentos, velocidades e acelerações já são conhecidos pelo projetista, assim é possível calcular as forças dinâmicas resultantes atuantes no sistema. Para o mecanismo came seguidor em estudo, é mais conveniente abordar a análise indireta, pois os deslocamentos, velocidades e acelerações já são conhecidos. Essa

abordagem permite determinar o valor da força elástica necessária para manter o seguidor em contato com o came na velocidade escolhida.

Toda a massa que se move com o trem seguidor é concentrada como  $m$ , toda elasticidade do sistema é concentrada pela constante de mola  $k$  e todo o amortecimento ou resistência ao movimento é concentrado pelo coeficiente de amortecimento  $c$ .  $F_s$  representa a força exercida pela mola pré-carregada com uma deformação conhecida  $x_0$ .  $F_d$  representa a força exercida pelo amortecedor e  $F_c$  é a força do came. Como o mecanismo está pré-carregado, deve – se levar em consideração a força peso  $F_b$  do seguidor. A Figura 13 apresenta um modelo de massa concentrada que pode ser usado para definir as forças envolvidas em um mecanismo came seguidor.

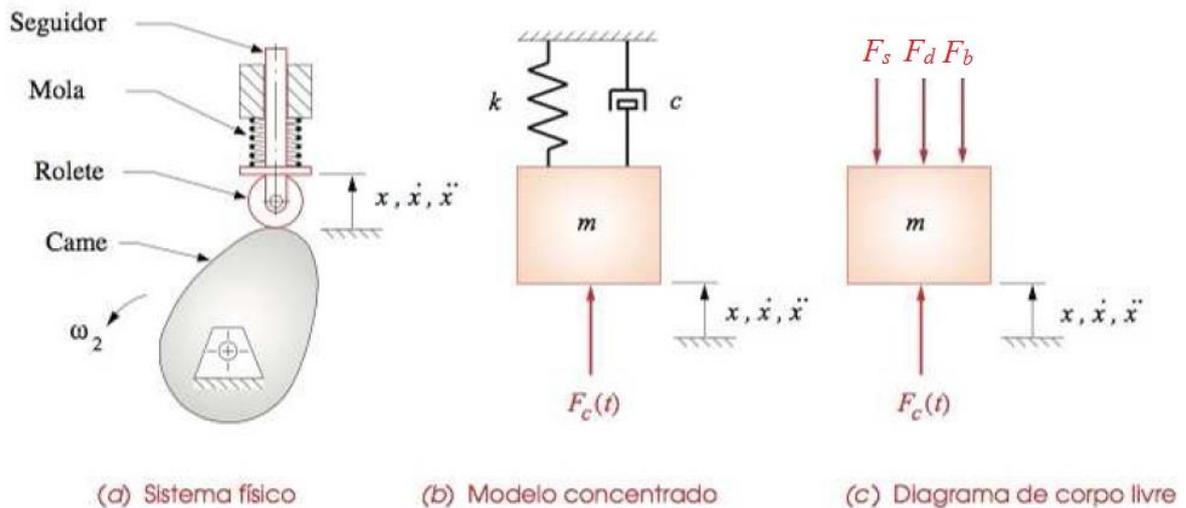


Figura 13 – Modelo dinâmico de massa concentrada

Fonte: Adaptado de Norton (2010)

Aplicando somatório das forças na vertical pode – se concluir que

$$\sum F = ma$$

$$F_c(t) - F_s - F_d - F_b = m\ddot{x}$$

$$F_c(t) - kx - c\dot{x} - F_b = m\ddot{x}$$

$$F_c(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + x_0) + F_b \quad (2.17)$$

A equação (2.17) representa a força realizada pelo came, como os valores de deslocamento, velocidade e aceleração são conhecidos para todas as posições do came, é possível se calcular essa força de forma indireta.

Tendo-se calculado a força do came é possível calcular o torque cinetostática. A análise cinetostática propõe que o mecanismo irá girar com velocidade constante  $\omega$ , porém o torque pode variar de acordo com a posição do mecanismo. Uma análise possível de se fazer é aplicar o princípio da conservação da energia no mecanismo afirmando que a potência de entrada é igual a potência de saída. Do lado esquerdo da equação (2.18) têm – se a potência de rotação do came e do lado direito a potência de translação do seguidor. Isolando o valor do torque é possível chegar na equação (2.19).

Potência de Entrada = Potência de Saída

$$T_c \omega = F_c v \quad (2.18)$$

$$T_c = \frac{F_c v}{\omega} \quad (2.19)$$

## 2.6 Transmissão Estática de Força

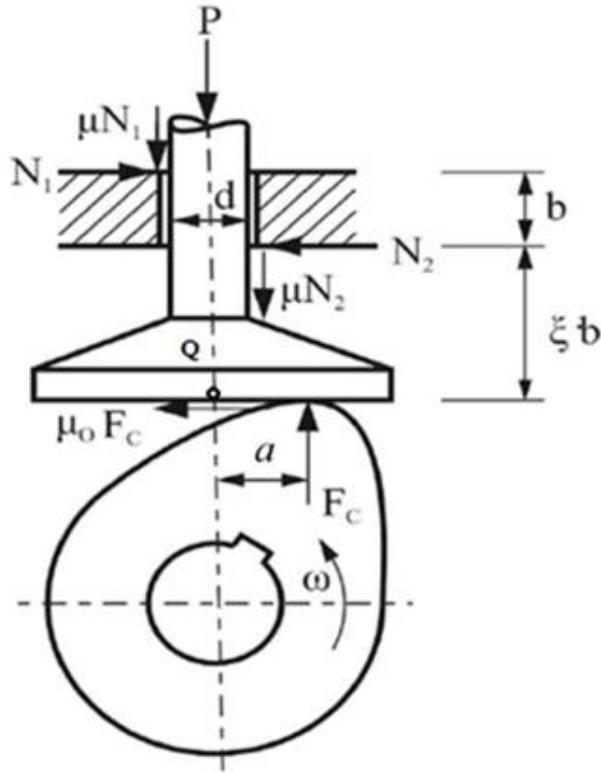
Está presente em Chen (1982) uma abordagem relacionada a transmissão estática de força em diversos tipos mecanismos de came seguidor. Tal referência é bem-conceituada no meio acadêmico quando se trata de mecanismo came seguidor sendo citada diversas vezes por diferentes pesquisadores.

No prefácio da literatura citada tem-se uma extensa errata corrigindo os diversos erros encontrados em todo o livro. Fan Yu Chen foi um grande pesquisador na Universidade de Ohio, durante a revisão do livro o autor ficou doente e infelizmente faleceu. Em homenagem ao pesquisador, as filhas dele e a esposa com a ajuda de alguns professores da universidade, realizaram essa revisão desse livro. Esse foi o primeiro e último trabalho de Chen. Não foi encontrado outras edições posteriores a essa para verificar a correção dos erros, porém isso não tirou a credibilidade da literatura, esta deve ser usada com alguns cuidados.

### 2.6.1 Mecanismo Came Seguidor de Face Plana

De acordo com Chen (1982), o efeito do ângulo de pressão nos mecanismos came seguidor de face plana é desprezível comparado aos mecanismos roletados, isso se deve ao fato de que o ângulo de pressão é zero. A Figura 14 apresenta o diagrama de corpo livre válido para

elevação do seguidor, esse diagrama é o mesmo referenciado por Tsiafis *et al.* (2013). Adiante será apresentada a errata e a solução detalhada das equações.



**Figura 14 – Transmissão de Força Mecanismo Came Seguidor Face Plana**

**Fonte:** Adaptado de Chen (1982)

Realizando somatório de forças em x e em y, aplicando somatório de momentos em relação ao ponto Q, Chen (1982) apresenta as equações abaixo como solução do diagrama de corpo livre da Figura 14.

$$F_c = \frac{bP}{\Gamma} \quad (2.20)$$

$$N_1 = \frac{(a - \mu_0 \xi b)P}{\Gamma} \quad (2.21)$$

$$N_2 = \frac{[a - \mu_0 b(1 + \xi)]P}{\Gamma} \quad (2.22)$$

$$\Gamma = b - 2a\mu_0 + \mu\mu_0(1 + 2\xi) \quad (2.23)$$

$F_c$  : Força realizada pelo came

$b$  : Espessura da guia do seguidor

$P$  : Carregamento total no seguidor

$a$  : Distância entre o ponto de contato do came com o seguidor e a linha de centro do seguidor

$\mu_0$  : coeficiente de atrito entre o came e a face do seguidor

$\mu$  : coeficiente de atrito entre a haste do seguidor e a guia de rolamento

$\xi$  : Relação de comprimento entre a espessura da guia do seguidor com o comprimento da haste do seguidor sujeito a flexão.

### 2.6.2 Restrição ao Encravamento

De acordo com Chen (1982), dependendo da geometria e dos esforços presentes no mecanismo came seguidor pode ocorrer o encravamento da haste do seguidor na guia de rolamento. Tal fenômeno resulta no desgaste prematuro dos componentes e esforços excessivos no came. Para evitar isso, cabe ao projetista procurar menores valores possíveis para  $\mu$ ,  $\mu_0$  e  $\xi$ . Para o mecanismo em estudo a condição de encravamento ocorre quando o carregamento total  $P$  é igual a zero e toda a força  $F_c$  é usada para vencer o atrito. Para encontrar tal situação, o numerador da equação (2.22) deve ser igualado a zero. Para evitar essa condição, uma boa prática é manter esse numerador com um valor maior do que zero. Assim a restrição pode ser calculada pela equação (2.24).

$$a < \frac{b}{2\mu} + \frac{\mu_0(1+2\xi)}{2} \quad (2.24)$$

### 2.6.3 Errata

A errata presente em Chen (1982) foi escrita por diversos autores após o falecimento de Chen. Os autores sugerem um novo diagrama de corpo livre reposicionando as reações horizontais para ficarem de acordo com o movimento do came. A Figura 15 ilustra essa alteração. Devido a isso a solução do sistema se altera. A errata orienta a inversão de  $N_1$  e  $N_2$  nas equações (2.21) e (2.22), orienta – se também e a inversão do sinal do lado direito dessas mesmas equações. Assim, a nova solução para o sistema seria a apresentada nas equações (2.25) e (2.26). A equação (2.20) não se altera.

$$N_1 = \frac{-[a - \mu_0 b(1 + \xi)]P}{\Gamma} \quad (2.25)$$

$$N_2 = \frac{-(a - \mu_0 \xi b)P}{\Gamma} \quad (2.26)$$

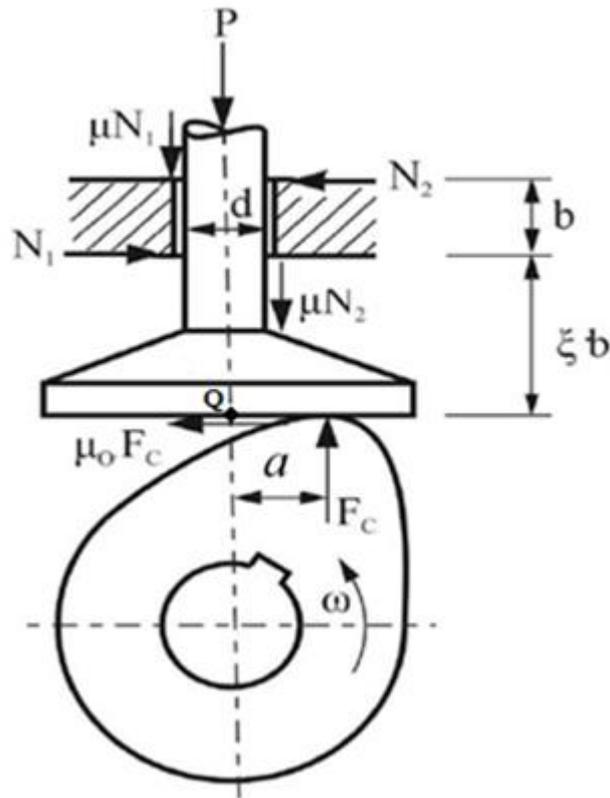


Figura 15 - Transmissão de Força Mecanismo Came Seguidor Face Plana conforme errata

### 2.6.3.1 Verificação da Errata

Após essas correções propostas na errata, achou – se conveniente realizar uma solução criteriosa do sistema de equações resultante das equações de equilíbrio. Essa solução detalhada será apresentada a seguir.

Realizando somatório de forças na horizontal temos:

$$\sum F_x = 0$$

$$-\mu_0 F_c + N_1 - N_2 = 0$$

$$F_c = \frac{N_1 - N_2}{\mu_0} \quad (2.27)$$

Isolando  $N_1$  na equação (2.27)

$$N_1 = \mu_0 Fc + N_2 \quad (2.28)$$

Realizando somatório de forças na vertical temos:

$$\sum F_y = 0$$

$$Fc = P + \mu(N_1 + N_2) \quad (2.29)$$

Realizando somatório de momentos no ponto Q temos:

$$\sum M_Q = 0$$

$$aFc + b(1 + \xi)N_2 - \xi bN_1 + \frac{\mu N_1 d}{2} - \frac{\mu N_2 d}{2} = 0$$

$$Fc = \frac{\xi bN_1 - b(1 + \xi)N_2}{a} \quad (2.30)$$

Em Chen (1982) o autor usa a hipótese a qual não há diferenças consideráveis entre os valores de  $N_1$  e  $N_2$ , razão pelo qual essa parte é desconsiderada do cálculo que resultou na equação (2.30).

Substituindo a equação (2.28) na equação (2.29)

$$Fc = P + \mu(\mu_0 Fc + N_2 + N_2)$$

$$Fc = P + \mu(\mu_0 Fc + 2N_2) \quad (2.31)$$

Ao se substituir a equação (2.28) na equação (2.30) o sistema se reduz a duas equações e duas incógnitas. Isolando a variável  $N_2$  temos

$$N_2 = \frac{-aFc + \xi b\mu_0 Fc}{b} \quad (2.32)$$

Inserindo a equação (2.32) na equação (2.31) e isolando a variável  $Fc$  temos

$$Fc = \frac{bP}{b + 2\mu a - \mu\mu_0 b(1 + 2\xi)} \quad (2.33)$$

$$\Gamma = b + 2\mu a - \mu\mu_0 b(1 + 2\xi) \quad (2.34)$$

$$F_c = \frac{bP}{\Gamma} \quad (2.35)$$

Substituindo a equação (2.30) e a equação (2.27) na equação (2.28) e isolando  $N_1$

$$N_1 = \frac{-[a - \mu_0 b(1 + \xi)]P}{\Gamma} \quad (2.36)$$

Substituindo a equação (2.30) na equação (2.32) e isolando  $N_2$ .

$$N_2 = \frac{-(a - \mu_0 \xi b)P}{\Gamma} \quad (2.37)$$

Analisando as equações obtidas verifica-se que a correção presente na errata de Chen (1982) está muito parecida, apenas a equação (2.34) se difere da equação (2.23). Como o livro contém diversas correções realizadas por vários autores, é provável que essa correção tenha sido esquecida.

A equação referente a restrição ao encravamento também está diferente da apresentada na literatura e também não há nenhuma correção na errata. Esta também é uma outra correção que pode ter sido esquecida pelos diversos revisores.

$$a < \frac{b}{2\mu} - \frac{\mu_0(1 + 2\xi)}{2} \quad (2.38)$$

## 2.7 Fadiga Superficial

De acordo com Norton (2013), quando se tem duas superfícies em contato por rolamento puro, ou com uma combinação entre rolamento e uma pequena quantidade de deslizamento, o mecanismo de falha presente entre esses dois corpos é denominado de fadiga superficial. Nas diversas aplicações da engenharia essa condição de movimento é comumente empregada. Pode – se citar mecanismo came com seguidor de rolete, cilindros de laminação, contato entre dentes de engrenagem, esferas e rolos em contato com a pista de um rolamento.

Quando esses corpos entram em contato, uma pequena área de contato é formada acompanhada por tensões de compressão, ou tensão de contato. Diversas variáveis como força, geometria dos corpos, material, e propriedade mecânica dos materiais, acabamento superficial, influenciam diretamente na tensão de contato. Após diversos ciclos e repetições essas tensões causarão falhas na superfície do material, como exemplo pode-se citar crateração e o

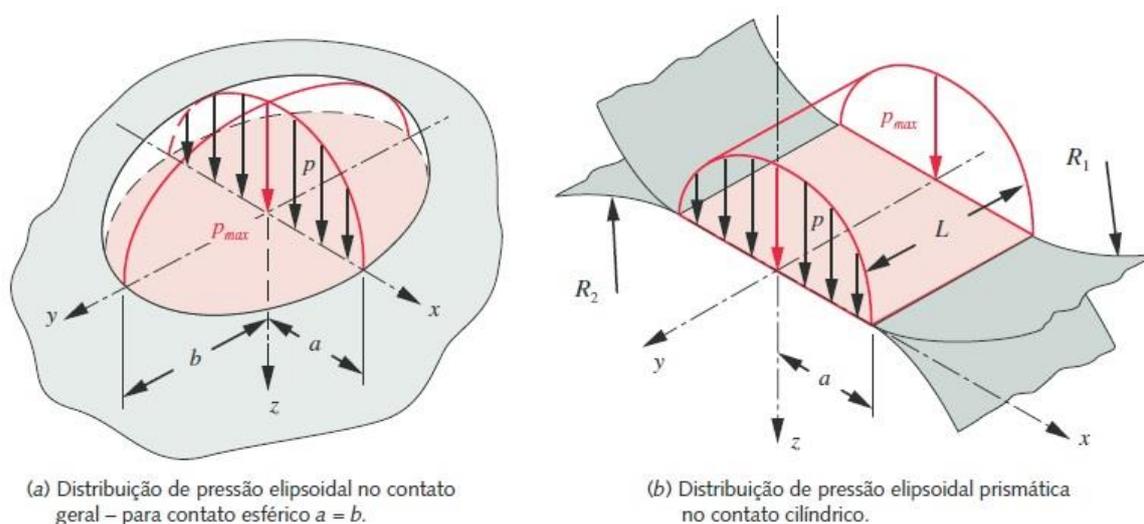
lascamento da superfície. Vale salientar que essas falhas ocorrem mesmo quando o material está submetido a esforços abaixo da tensão de escoamento

Esforços altos o suficiente para elevar as tensões de contato acima da tensão de escoamento na compressão causarão deformações permanentes na região de contato.

### 2.7.1 Teoria de Contato Elástico de Hertz

O estado de tensões presente no contato de dois corpos elásticos foi proposto por Hertz em 1881. A dedução para as equações da área de contato, deformação, distribuições de pressões e tensões de contato estão entre os exemplos mais complexos da teoria da elasticidade. Uma dedução resumida da tensão de contato está presente em Chen (1982).

Ao entrar em contato, forma-se um plano tangente a cada um dos corpos. Se os corpos forem pressionados entre si, formará uma pequena área de deformação perpendicular a direção dos esforços. Em casos gerais a região de contato é elíptica e a distribuição de pressão é elipsoidal, dependendo da aplicação essa área pode variar um pouco. Para o contato de esferas essa região de contato é circular, em cilindros essa região passa a ser retangular. A Figura 16 ilustra a situação explicada nos contatos gerais e cilíndricos.



**Figura 16 – Distribuição de pressão e zonas de contato de Hertz**

**Fonte:** Norton (2013)

A distribuição de pressão elipsoidal pode ser calculada pela equação (2.39) onde  $a$  e  $b$  representam os semieixos da superfície elíptica exibida na Figura 16,  $p_o$  representa a pressão máxima a qual é alcançada no centro do ponto de contato.

$$p = p_0 \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

A dedução das equações para a tensão máxima de contato pode ser encontrada em Timoshenko e Goodier (1970). Devido à complexidade, as equações mais usadas nas diversas aplicações da engenharia são tabeladas, facilitando o seu uso.

Pode – se modelar o contato do mecanismo came seguidor de face plana como um cilindro de raio variável e um plano. A equação (2.40) apresenta a tensão de contato máxima para o mecanismo. Em Tsiafis *et al.* (2013) os autores não aplicaram o coeficiente 0,564.

$$\sigma = 0,564 \left[ \frac{P'}{\rho \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

Na equação (2.40)  $P'$  representa o carregamento distribuído normal ao came por unidade de comprimento, para calcular esse carregamento é necessário conhecer a espessura do came e da face do seguidor,  $\nu_1$  e  $\nu_2$  representam o coeficiente de Poisson do came e do seguidor,  $E_1$  e  $E_2$  representam o módulo de elasticidade e por fim  $\rho$  representa o raio de curvatura o came que é calculado pela equação (2.15).

## 2.8 Otimização aplicada à Engenharia

Atualmente as diversas áreas do setor industrial vêm buscando melhorar o desempenho em processos de fabricação, produção e projetos. Não basta projetar e produzir, tudo isso tem que ser feito com menor custo e maior qualidade para se conseguir um resultado competitivo. Conciliar todos esses requisitos em um produto é um dos maiores desafios para um engenheiro. As técnicas de otimização funcionam como uma ferramenta no auxílio de tomada de decisão.

### 2.8.1 Formulação do Problema

Segundo Arora (2004), a formulação de um problema é tão importante quanto a sua solução. Normalmente um problema é modelado seguindo cinco passos: descrição do problema ou projeto, coleta de dados e informações, identificação e definição das variáveis de projeto, identificação de um critério a ser otimizado e por último identificar as restrições.

Na descrição do problema, cabe ao projetista ir a campo coletar informações com operadores e clientes, com objetivo de entender qual a real necessidade do projeto. Após isso,

coletar dados como preço de matéria prima, limite de recursos, propriedade dos materiais, definição de procedimentos, normas e quaisquer outras informações relevantes ao projeto.

A identificação das variáveis de projeto é um ponto muito importante na formulação do problema, algumas delas poderão ser incógnitas do problema de otimização e outras assumirão valores fixos. Nesse ponto o projetista deve buscar as equações físicas, matemáticas que regem o problema. O quarto passo se refere a identificação de um critério a ser otimizado. Para comparar diferentes projetos é necessário ter um critério. Esse critério deve ser em função das variáveis de projeto, neste ponto já conhecidas pelo projetista. Normalmente se cria uma função objetivo, a qual tem a função de calcular um resultado numérico para ser usado como critério de otimização. Uma função objetivo pode ser minimizada ou maximizada dependendo da aplicação. Na indústria de produção e transformação é comum reduzir custos, maximizar lucros e minimizar o tempo de produção. Em projetos normalmente busca – se minimizar o peso dos componentes e isso pode ser traduzido em minimização dos custos. Vale salientar que o resultado de uma função objetivo não precisa necessariamente ser um valor físico, possuir uma unidade fixa. É possível realizar uma combinação de funções que representam grandezas diferentes relacionadas ao mesmo projeto, normalmente usa-se coeficientes de balanceamento para dosar a importância de cada uma.

O quinto passo se refere a identificação das restrições impostas ao problema, deve – se conhecer essas restrições e modelar equações matemáticas que possam quantificar tais exigências. Cada aplicação terá suas restrições diferentes. Na produção é muito importante conhecer o limite máximo de componentes que possam ser armazenados e transportados, a capacidade de produção de uma máquina em um processo produtivo com ou sem recurso gargalo. Em projetos podemos citar as estruturas, membros estruturais não podem falhar sob carregamento de operação, cabe ao projetista trabalhar sempre abaixo a tensão de escoamento para evitar tal falha.

As restrições podem ser lineares e não lineares. Muitas funções de restrição têm somente termos de primeira ordem nas variáveis de projeto, problemas de programação lineares tem somente restrições e funções objetivo lineares. Os problemas resolvidos no âmbito da pesquisa operacional normalmente trabalham com problemas de natureza linear, pode – se citar como exemplos a distribuição e controle de insumos em um processo de fabricação, logística entre outras aplicações. Problemas mais gerais tem função de restrição não lineares, esses são

problemas são chamados de problemas de programação não linear. Existem métodos específicos para tratar os problemas lineares e não lineares, com ou sem restrição.

### **2.8.2 Métodos de Otimização**

Na literatura existem diversos métodos de otimização, eles podem ser determinísticos ou estocásticos. Os métodos determinísticos são numéricos, eles aplicam diversos critérios matemáticos na busca de um valor ótimo. Os métodos estocásticos estão sujeitos a teoria de probabilidades. Eventos de origem aleatória acontecem a cada passo na busca do valor ótimo. Um exemplo de método estocástico é o algoritmo genético. Na sequência são descritos os métodos de otimização usados nesse trabalho.

### **2.8.3 Otimização Não Linear Com Restrição**

De acordo com Arora (2004), quando a função objetivo de um problema ou uma de suas restrições são não lineares, esse problema é denominado como um problema de programação não linear. Esses problemas ainda podem ser divididos em problemas com e sem restrição.

A solução desses problemas pode se dar de maneira determinística ou estocástica. Os métodos de solução determinísticos são normalmente baseados no vetor gradiente da função objetivo do problema. Assim, todas as funções devem ser diferenciáveis até segunda ordem em todo o espaço delimitado pelo projeto. Os métodos de busca são iterativos, ou seja, os cálculos são repetidos a cada iteração. Normalmente estimasse um projeto inicial e melhora até que as condições de otimalidade sejam satisfeitas. Existem diversos métodos capazes de resolver esse tipo de problema. Um exemplo descrito por Arora (2004) é o método do gradiente restrito. Esse método calcula a direção de mudança da função de projeto de acordo com o comportamento local da função objetivo e das restrições. O método do gradiente restrito se baseia na linearização do problema. A cada linearização o problema passa a se comportar como um método de programação linear. Diversos *softwares* matemáticos possuem algoritmos robustos que combinam os métodos adequados para cada aplicação.

### **2.8.4 Algoritmo Genético**

O algoritmo genético é um método de busca estocástico baseado na teoria da evolução que pode ser aplicado na solução de problemas com ou sem restrição. Esse método é baseado no conceito de seleção natural proposto por Darwin em 1858.

O desenvolvimento de simulações computacionais se iniciou na década de 50 e 60 do século passado, John Holland foi um dos precursores dessas pesquisas. No ano de 1975 Holland publicou o primeiro estudo relacionado ao algoritmo genético. Em 1980, David E. Golberg, aluno de Holland publicou a primeira aplicação industrial usando algoritmo genético. Esses algoritmos simulam processos de sobrevivência e reprodução dos seres vivos e podem solucionar problemas de otimização e aprendizado de máquinas e equipamentos.

De acordo com Darwin, os indivíduos de uma mesma espécie estão em disputa contínua por recursos limitados presentes no meio onde vivem. Esses indivíduos possuem características específicas que aumentam ou diminuem a probabilidade de sobreviver. Muitas das características dos pais são passadas aos filhos pelo processo de reprodução, assim esses indivíduos mais aptos se reproduzirão e irão passar suas características genéticas a geração futura. Durante o processo de reprodução ocorrem erros na transcrição dos genes dos novos indivíduos, tal fenômeno é denominado de mutação. Normalmente esse fenômeno é indesejado, pois tais erros podem incorporar características desconhecidas, porém em alguns casos essas novas características são benéficas e contribuem para a perpetuação da espécie. Através desses processos de reprodução a natureza adquire a capacidade de explorar um número maior de possibilidades.

De acordo com Golberg (1989), o algoritmo genético é dividido em algumas etapas, são elas: inicialização, avaliação, seleção, cruzamento, mutação, atualização e finalização. A ideia básica do funcionamento é tratar as soluções possíveis do problema como indivíduos de uma população, essa população irá evoluir a cada iteração ou geração. A seguir serão explicadas cada uma das etapas desse processo.

**Inicialização:** escolhe – se uma população inicial. Normalmente essa escolha é feita de forma aleatória. O usuário pode delimitar um intervalo de atuação para cada uma das variáveis de projeto, escolher um número máximo de indivíduos para uma população.

Os indivíduos codificam todas as possíveis soluções para um problema. Eles constituem uma das principais unidades do algoritmo genético. O conjunto de todos os indivíduos formam a população. Cada indivíduo é composto por genes, normalmente esses genes estão ligados à uma variável de projeto. Um problema com duas variáveis de projeto provavelmente terá apenas dois genes. Outras formas de codificar as informações podem ser adaptadas de acordo com as informações do problema a ser resolvido.

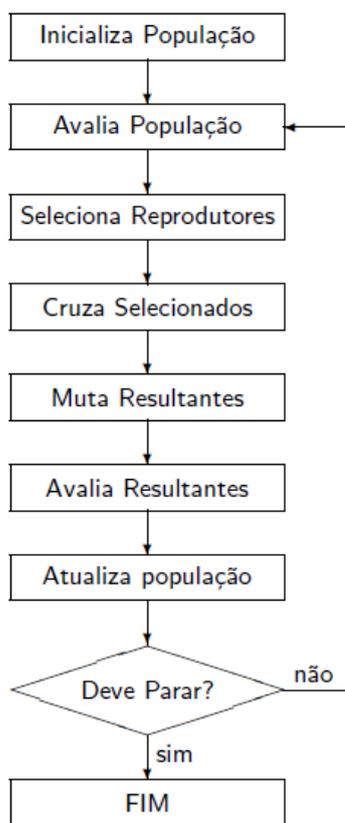
**Avaliação:** Toda a população criada é avaliada segundo algum critério, esse critério normalmente é determinado através de uma função de aptidão, essa função normalmente é encontrada na literatura como função *fitness*.

**Seleção:** Neste processo os melhores indivíduos, ou seja, aqueles indivíduos mais aptos são escolhidos para darem origem a uma geração futura. Essa escolha normalmente está criada de acordo com o valor assumido na função *fitness*.

**Cruzamento:** Nesta etapa os indivíduos selecionados trocam suas características (genes) através dos operadores de cruzamento e mutação. Estes passos acontecem até se chegar em um critério de parada estabelecido. Tais critérios podem ser por exemplo um número máximo de gerações.

**Atualização:** Neste processo os indivíduos são novamente avaliados e os menos aptos são eliminados da população, essa eliminação também está relacionada de acordo com o valor encontrado na função de avaliação. Em algumas situações, com objetivo de diminuir o custo computacional, o número de indivíduos deve – se manter constante.

**Finalização:** existem diversos critérios de parada que podem determinar a finalização do processo de evolução. Um exemplo é o número máximo de gerações. O usuário pode definir um número de gerações, após isso o algoritmo para e o melhor indivíduo, ou seja, aquele que possuir o maior ou menor valor dependendo do problema, seja ele de maximização ou minimização será escolhido como solução ótima do problema. A Figura 17 apresenta uma estrutura didática do funcionamento do algoritmo genético



**Figura 17 – Funcionamento básico de Algoritmo Genético**

**Fonte:** Lucas e Álvares (2002)

#### 2.8.4.1 Definições

Algumas definições são muito importantes para o bom entendimento do algoritmo genético. Tais definições fazem relação dos conceitos de otimização com os conceitos da biologia.

**Genótipo:** o genótipo consiste na característica genética carregada por um gene de um indivíduo. Em otimização isso ser relacionado com as variáveis de projeto envolvidas na resolução do problema.

**Fenótipo:** é o resultado do processo de decodificação do genoma de um indivíduo. Em otimização isso pode ser relacionado com o resultado da função objetivo.

**Elite:** é o conjunto dos indivíduos com maior aptidão de uma população. Mesmo após a reprodução esses indivíduos se mantém ativos para a próxima geração.

**Operadores genéticos:** têm como função transformar uma população através de sucessivas gerações. Os operadores genéticos são muito importantes, pois através deles é que ocorre a

diversificação das características armazenadas em cada indivíduo. Os principais são cruzamento e mutação.

Cruzamento ou crossover: Este operador pode ser considerado o mais predominante. Os indivíduos selecionados para reprodução são pareados lado a lado e trocam informações. A reprodução de dois indivíduos pode gerar um ou dois descendentes dependendo da forma como o algoritmo foi programado. O ponto de troca de informações é aleatório. O cruzamento pode ser do tipo ponto a ponto ou em mais pontos. Isso depende da quantidade de genes que cada indivíduo pode ter. A Figura 18 ilustra a reprodução por *crossover*.

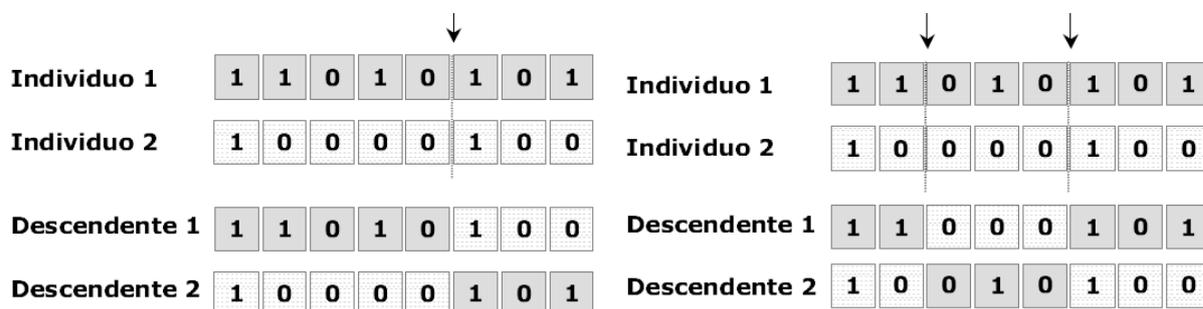


Figura 18 - Tipos de Cruzamento

Mutação: Esta operação modifica de forma aleatória o valor de algum gene. Esta troca também garante a diversidade de informações e indivíduos, pois através dele novos indivíduos são criados com características diferentes dos pais. A mutação é definida por uma taxa que pode ser alterada de acordo com a necessidade de diversificação do problema. A Figura 19 ilustra um exemplo de mutação.

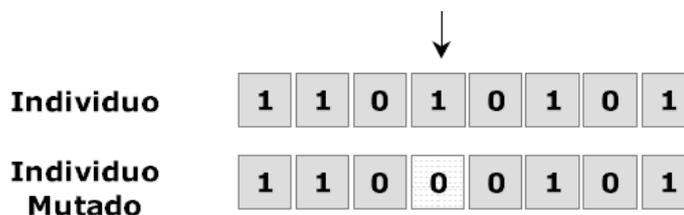


Figura 19 – Exemplo de Mutação

### 3 METODOLOGIA

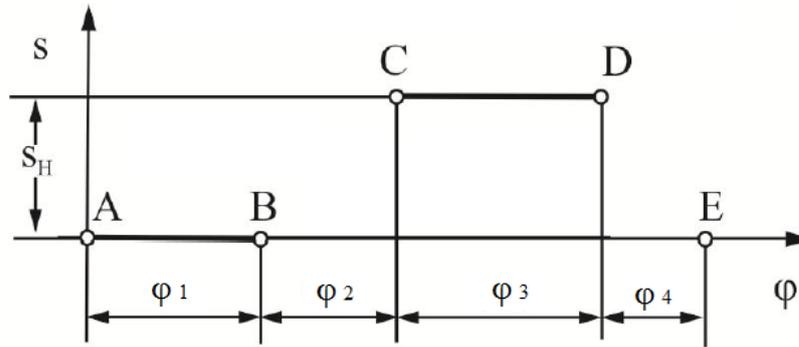
O objetivo principal desse trabalho é resolver a situação problema presente em Tsiafis *et al.* (2013) formulando um projeto de mecanismo came seguidor como um projeto de otimização. Para realizar tal tarefa, o problema de otimização é modelado de acordo com os cinco passos descritos por Arora (2004). Para a parte numérica, é usado o *software* MATLAB. A biblioteca desse *software* possui diversos algoritmos de otimização já programados. Esses são usados na solução do problema. A seguir é explicado cada passo da metodologia usada por Tsiafis *et al.* (2013) e quais as alterações propostas para o presente trabalho. Em Tsiafis *et al.* (2013) os autores não fornecem muita informação de qual foi a metodologia usada na resolução do problema.

#### 3.1 Descrição da Metodologia

Como já citado anteriormente, os cinco passos propostos por Arora (2004) na modelagem de problemas de otimização são: descrição do projeto, coleta de dados e informações, identificação das variáveis de projeto, identificação de um critério a ser otimizado e por último a identificação das restrições. A seguir serão explicados como cada um desses passos será executado.

##### 3.1.1 Descrição do Projeto

Deseja – se projetar um mecanismo came seguidor de dupla espera cujo arranjo será por seguidor de face plana. A requisição cinemática de projeto é ilustrada pela Figura 20, que apresenta os intervalos de espera, subida, segunda espera e descida do seguidor. Os ângulos  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  e  $\varphi_4$  medem  $100^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $60^\circ$  respectivamente. A elevação máxima representada por  $S_H$  mede 5 mm. O came possui uma velocidade angular constante de 240 RPM. De acordo com Tsiafis *et al.* (2013), a curva escolhida para o diagrama de posição, velocidade e aceleração do mecanismo durante a subida e a descida é a cicloidal.



**Figura 20 – Requisição Cinemática**  
**Fonte:** Adaptado de Tsifis *et al.* 2013

### 3.1.2 Coleta de Dados e Informações

Nesse ponto todas as informações teóricas relacionado com o problema são discutidas e estudadas. Tal fato ocorreu durante a revisão bibliográfica desse trabalho.

### 3.1.3 Identificação e Definição das Variáveis de Projeto

As variáveis de projetos já foram definidas por Tsifis *et al.* (2013). Inicialmente os autores afirmaram que seriam três. Raio de base  $R_b$ , largura da face do seguidor  $L$  e excentricidade  $\epsilon$ . Porém, no início da formulação matemática os autores definiram que a excentricidade seria nula. Sendo assim no trabalho aqui presente a excentricidade também é nula.

### 3.1.4 Identificação de um Critério a Ser Minimizado

Nesse ponto é preciso usar todas as informações coletadas nos passos anteriores e definir uma função objetivo que deve ser otimizada. Isso também foi definido por Tsifis *et al.* (2013). Tal função é dividida em três partes. Uma primeira relacionada com o tamanho de mecanismo, outra com o torque necessário para mover o mecanismo e por último a tensão de contato entre o came e o seguidor. O objetivo é projetar um came obtendo o menor valor possível dessa função. Ou seja, esse é um problema de minimização.

Cada equação presente na função objetivo (3.1) tem uma unidade diferente, mm, N.m e N/mm<sup>2</sup>. Porém a função objetivo não tem nenhum significado físico, ela é uma composição de valores, tamanho, torque e tensão de contato que foram usados para definir um valor ótimo para as variáveis de projeto. Essa metodologia foi usada por Tsifis *et al.* (2013). Os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  foram usados para ponderar a importância de cada parte da função objetivo. Em Tsifis *et al.* (2013) os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  receberam valores 0,1; 0,1, e 0,8 respectivamente.

$$F = \alpha.F_1 + \beta.F_2 + \gamma.F_3 \quad (3.1)$$

$$F_1 = Rb + L \quad (3.2)$$

$$F_2 = T = \frac{(P.v)}{\omega} \quad (3.3)$$

$$F_3 = \sqrt[2]{\frac{P'}{\rho \cdot \left( \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}} \quad (3.4)$$

As equações de (3.1) a (3.4) foram usadas por Tsifis *et al* (2013) para calcular o valor ótimo das variáveis de projeto. As equações (3.3) e (3.4) foram abordadas e explicadas nas seções 2.5.1 e 2.7.1 respectivamente. Vale a pena lembrar que de acordo com Chen (1982), e como mostrado na equação (2.40), há um fator multiplicador 0,564 na equação (3.4) referente à geometria do problema. Tal fator não foi citado por Tsifis *et al.* (2013).

No presente trabalho são realizadas algumas alterações na função objetivo. A segunda parte da função objetivo, calculada pela equação (3.3), relaciona o torque necessário para realizar o movimento de translação do seguidor, tal equação foi abordada na seção 2.5.1. Esse torque é calculado em função do carregamento  $P$ , da velocidade  $v$  e da velocidade angular do came  $\omega$ . O carregamento é calculado pela equação (2.17), a velocidade já vem definida pelo diagrama de SVA, e a rotação do came é constante, assim, a equação (3.3) não é função de nenhuma das variáveis de projeto, portanto esta será retirada da função objetivo. A equação (3.4) é multiplicada por 0,564 para ficar de acordo com Chen (1982).

Como já citado anteriormente, o tamanho do came e a tensão de contato têm unidades e ordens de grandeza muito diferentes. Para contornar tal situação, a função objetivo será normalizada. A função tamanho será dividida pela máxima soma possível das variáveis de projeto. A tensão de contato também será normalizada, esta será dividida pela maior tensão de contato admitida pelo conjunto. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  serão usados para ponderar o valor de cada parte da função objetivo.

A função objetivo usada nesse trabalho é calculada pela equação (3.5). Esta é dividida em duas partes, uma que é referente ao tamanho do conjunto, e uma segunda referente a tensão de contato entre o came e o seguidor. A equação (3.7) foi abordada com na seção 2.7.1. O raio de curvatura  $\rho$  foi definido na seção 2.4.2.2 e este é dependente do raio de curvatura  $Rb$ .

$$F = \alpha.F_1 + \gamma.F_2 \quad (3.5)$$

$$F_1 = \frac{Rb + L}{Rb_{\max} + L_{\max}} \quad (3.6)$$

$$F_2 = 0,564 \frac{\sqrt[2]{\frac{P'}{\rho \cdot \left( \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}}}{\sigma_{\max}} \quad (3.7)$$

### 3.1.5 Identificação das Restrições

Neste ponto todas as restrições referentes ao projeto devem ser citadas e analisadas. Tais restrições normalmente aparecem no segundo passo, no momento da revisão bibliográfica. Outras restrições são relacionadas com a aplicação do projeto. As restrições usadas por Tsifis *et al.*(2013) são:

1. Tensão de contato máxima menor do que 1750 N/mm<sup>2</sup>
2. O ângulo de pressão foi controlado e deve ser menor do que um valor máximo especificado de 30°.
3. A excentricidade  $\varepsilon$  deve estar dentro do intervalo  $0 < \varepsilon < L/2$ .
4. Ponto de contato  $a < L/2$
5. Com objetivo de evitar o desgaste excessivo entre a haste do seguidor e a guia dele, a restrição a seguir deve ser respeitada

$$a < \frac{b}{2\mu} + \frac{\mu_0(1+2\xi)}{2}$$

6.  $20 < Rb < 40$  mm
7.  $30 < L < 60$  mm

Na resolução desse trabalho algumas restrições são modificadas. O valor da restrição número um é reduzido. Para realizar a normalização proposta na seção anterior, o valor máximo da tensão de contato entre o came e o seguidor é calculado, sendo também o valor usado na restrição de tensão máxima.

A restrição número dois, que se refere ao ângulo de pressão é removida. De acordo com Chen (1982) e Norton (2010), em mecanismo came seguidor de face plana o ângulo de pressão é zero. Tal fato foi mostrado na seção 2.4.1 do presente trabalho. Assim não faz sentido algum

inserir tal restrição de projeto. No lugar dessa restrição é usada uma restrição que controla o raio de curvatura do came impedindo que o mesmo se torne negativo. Em mecanismo came seguidor de face plana o raio de curvatura não pode ser negativo. Tal situação prejudica o correto posicionamento do seguidor, conforme explicado na seção 2.4.2.2. A equação (2.15) é usada para calcular o raio de curvatura. A restrição número 3 não é usada, pois como já citado anteriormente, a excentricidade adotada foi nula.

A restrição número quatro está relacionada com a largura da face do seguidor, essa largura tem que ser suficientemente grande para manter o contato entre o came e a face do seguidor. Esse conteúdo foi abordado na seção 2.4.3. Essa largura é função da velocidade do seguidor. Essa restrição é mantida no presente trabalho, porém com algumas alterações para manter a face do seguidor simétrica.

Analisando a restrição número cinco usada por Tsifis *et al.* (2013), percebe-se que é uma restrição puramente geométrica, nenhum dos seus valores estão relacionados com as variáveis de projeto. A distância  $a$  presente na restrição quatro pode ser observada na Figura 15, esta distância é definida desde o diagrama de posição, velocidade e aceleração. Esse item foi abordado na seção 2.4.3. Os outros itens também foram explicados na mesma seção. Essa restrição deve ser aplicada após o dimensionamento do came para escolher o melhor lugar para inserir esse mecanismo. Assim essa restrição não é usada no presente trabalho.

As restrições seis e sete, referentes ao tamanho do mecanismo serão avaliadas de acordo com o desenvolvimento do problema. Durante a revisão bibliográfica notou – se que a única restrição referente a largura do seguidor que envolve as variáveis de projeto é a distância do ponto de contato entre a face do seguidor e o came, restrição quatro. Assim será verificado um intervalo de tamanho compatível com a velocidade, evitando o superdimensionamento da largura da face.

### **3.2 Resolução do Problema**

O presente trabalho é resolvido e otimizado para cada ponto do came. O resultado final é o maior resultado das variáveis de projeto, estes devem atender a todos os pontos do came. Após definição e modelagem do problema, deve – se conhecer o diagrama deslocamento, velocidade e aceleração. Para calcular tal diagrama, o came é dividido em 360 partes iguais, cada uma referente a um grau. Para cada ponto, calcula-se a velocidade, o deslocamento e a aceleração.

Após se obter os valores de velocidade, é possível definir a largura mínima da face do seguidor para o correto funcionamento do mecanismo. Esse mecanismo came seguidor é assimétrico, ou seja, os intervalos de subida e descida são diferentes. Isso gera uma face assimétrica em relação a haste do seguidor. Como esse problema é resolvido ponto a ponto do came esse problema de simetria pode ser contornado, para cada ponto que for otimizado a largura da face do seguidor deverá ser o dobro do módulo velocidade em mm/rad, isso garante a largura mínima correta para cada ponto do came e uma face simétrica. O maior valor da largura da face é usado como valor crítico de projeto.

Com todos os valores de deslocamento, velocidade e aceleração conhecidos é aplicado o método de resolução indireta cinetostática, descrito na seção 2.5. Tal método é o mais adequado para a resolução do problema, pois o deslocamento, a velocidade e a aceleração já serão conhecidos. O carregamento  $P$  é calculado pela equação (2.17). Esse carregamento é variável durante o ciclo do came. O carregamento é função do deslocamento, da velocidade da aceleração do seguidor. Todos esses dados serão variáveis e mudarão de acordo com a posição do seguidor. Porém existem algumas constantes presentes na equação (2.17). A constante da mola  $k$  é igual a 3004 N/m, a pré-carga  $x_0$  é igual a 13 mm, a constante de amortecimento é de 0,345 N.s/m e a massa do seguidor é igual a 1kg.

O torque atuante em cada ponto do came não está mais presente na função objetivo, porém ele será calculado e mostrado. Para se calcular tal valor é usada a equação (2.19), onde  $P$  é o carregamento no came em cada uma das posições. A variável  $\omega$  representa a rotação do came, essa rotação será mantida constante em 240 RPM em todo o problema.

Conhecendo o deslocamento, a velocidade e a aceleração é possível calcular o raio de base mínimo para manter o raio de curvatura positivo. Conhecendo-se esse raio de base mínimo e o carregamento distribuído  $P'$ , é possível calcular a tensão de contato máxima admitida pelo sistema. Quanto menor o raio de base menor o raio de curvatura do came, por consequência uma maior tensão de contato. Essa tensão de contato é usada para normalizar a segunda parte da função objetivo. Para se calcular o carregamento distribuído  $P'$  é necessário conhecer a espessura do came. Essa espessura não foi mencionada em Tsifis *et al.* (2013). Assim assume-se um valor de 10 mm para tal valor. Durante a revisão bibliográfica, diversas literaturas de projeto foram consultadas com objetivo de se encontrar alguma forma de calcular ou estimar essa espessura, porém nada foi encontrado.

Para realizar a normalização da parte da função objetivo relacionada ao tamanho é preciso escolher um raio de base máximo e uma largura máxima da face do seguidor. O raio de base máximo escolhido foi de 40 mm, o mesmo usado na literatura base desse trabalho. A largura da face do seguidor máxima foi fixada em 25 mm, esse valor foi adotado com base nos pré-testes realizados.

Após a avaliação dinâmica, é possível aplicar a otimização no *software* MATLAB. O presente trabalho usa o algoritmo genético para encontrar os valores ótimos. O *software* irá retornar o valor ótimo para o raio de base e para a largura da face do seguidor do came em cada um dos 360 pontos. Assim, é adotado o valor crítico, ou seja, um valor que atenda todos esses pontos. Nesse trabalho esse valor crítico tende a ser o maior valor de cada uma das variáveis de projeto em todos os pontos do came. O algoritmo genético é um método muito robusto, porém de alto custo computacional, o *software* precisa otimizar o valor das variáveis de projeto para cada um dos 360 pontos. Assim, para realizar os pré-testes é usado o método determinístico de otimização não linear com restrição presente o toolbox do *software* MATLAB.

Os valores de  $\alpha$  e  $\gamma$  serão avaliados da seguinte forma. Primeiramente o problema será resolvido com esses valores setados em 1, após isso cada um desses valores é alterado com objetivo de ponderar os resultados para uma ou outra variável de projeto. Os valores dos coeficientes de Poisson  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são 0,3 e 0,26 respectivamente. Os módulos de elasticidade  $E_1$  e  $E_2$  são  $2,1 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup> e  $1,15 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup> respectivamente.

O método de solução determinístico não exige muitos parâmetros de entrada. O algoritmo genético precisa de alguns parâmetros, Tsifis *et al.*(2013) usaram a população de indivíduos em 20 indivíduos, a probabilidade de crossover de 80%. O número de indivíduos considerados elite é de 2 indivíduos.

## 4 RESULTADOS

A seguir são apresentados os resultados obtidos durante a resolução do problema. Esses são analisados, discutidos e quando possível comparados com os resultados obtidos por Tsifis *et al.* (2013). A literatura base os autores apenas apresentaram os resultados de 32,67 mm para o raio de base e 53,21mm para a largura da face do seguidor.

### 4.1 Diagrama SVA

O primeiro passo na resolução do projeto de um mecanismo came seguidor é o desenvolvimento das equações de movimento. Para esse mecanismo, como citado anteriormente a função escolhida foi a do tipo cicloidal. A Figura 21 apresenta os valores de deslocamento, velocidade e aceleração. A velocidade máxima do seguidor na subida é de 0,18 m/s e o ângulo  $\theta$  é de  $140^\circ$ . A aceleração na subida atinge os valores de  $10,176 \text{ m/s}^2$  em  $\theta$  igual a  $119^\circ$  e  $-10,176$  em  $\theta$  igual a  $160^\circ$ . Na descida, a velocidade atinge o valor máximo de  $-0,239 \text{ m/s}$  em  $\theta$  igual a  $330^\circ$ . A aceleração na descida atinge os valores máximos de  $-18,098 \text{ m/s}^2$  em  $\theta$  igual a  $315^\circ$  e  $18,098 \text{ m/s}^2$  para  $\theta$  igual a  $345^\circ$ . Esses valores extremos são importantes pois interferem diretamente no carregamento suportado pelo came. A velocidade máxima na descida também indica a maior distância entre o ponto de contato do came e o seguidor. Essa distância é de aproximadamente  $-9,5 \text{ mm}$  em  $\theta$  igual a  $330^\circ$  como mostra a Figura 23, lembrando que essa distância é numericamente igual a velocidade em mm/rot. O sinal negativo significa que esse ponto de contato se encontra a esquerda do centro da haste. Multiplicando por dois para se obter uma face simétrica, o valor mínimo da largura da face nesse ponto do came seria de aproximadamente 19 mm. Em Tsifis *et al.* (2013) o intervalo de largura usado foi entre 30 e 60 mm. Esse valor é muito grande. O intervalo inserido no *software* usado para a obtenção dos resultados presentes nesse trabalho está entre 5 e 25 mm. Com isso é possível verificar o correto desempenho do algoritmo, pois cada ponto do came possui velocidades diferentes, conseqüentemente o algoritmo irá buscar o menor valor possível da largura da face para cada ponto.

Ao se comparar a Figura 21 e a Figura 22, percebe – se que houve uma diferença nas acelerações obtidas no trabalho aqui presente com os valores encontrados em Tsifis *et al.* (2013). Realizando alguns testes foi constatado que os valores de aceleração presentes na Figura 22 não estão em  $\text{m/s}^2$ , mas sim em  $\text{mm/rad}^2$ . É possível que houve um esquecimento por parte dos autores na hora de plotar o gráfico. A Figura 23 mostra a aceleração em  $\text{mm/rad}^2$ .

Normalmente se obtém todos os resultados de velocidade e aceleração nas unidades de comprimento/rad e comprimento/rad<sup>2</sup> respectivamente. Para converter para o sistema internacional deve – se multiplicar a velocidade pela velocidade angular, e a aceleração pelo quadrado da velocidade angular. Essa diferença entre as acelerações altera toda a dinâmica do mecanismo, pois o carregamento é função da aceleração, a tensão de contato é função do carregamento e esta está presente na função objetivo do problema.

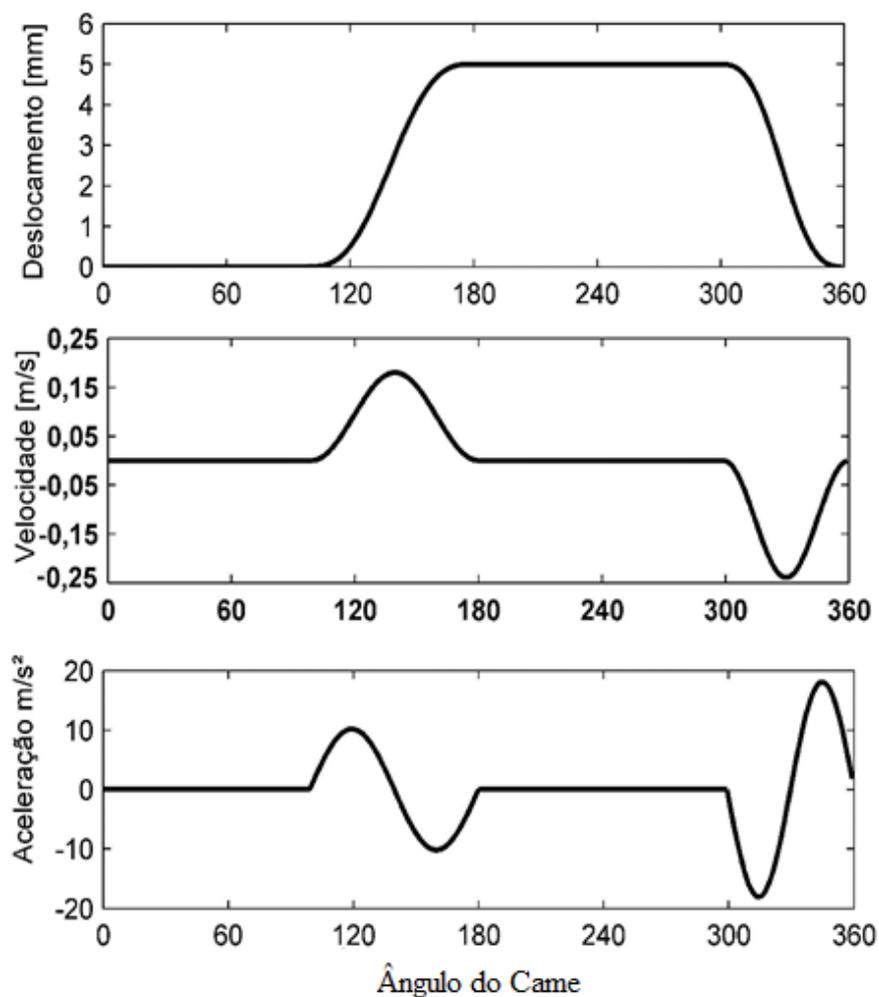


Figura 21- Diagrama SVA

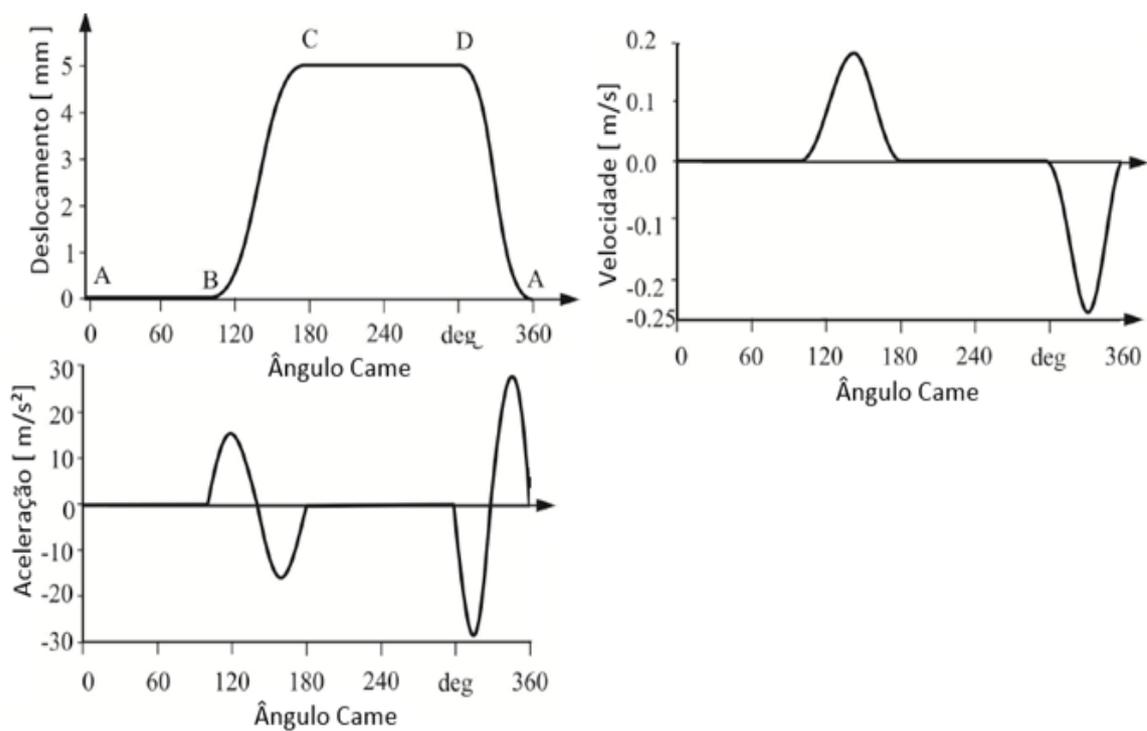


Figura 22 – Diagrama SVA  
 Fonte: Adaptado de Tsiafis *et al.* 2013

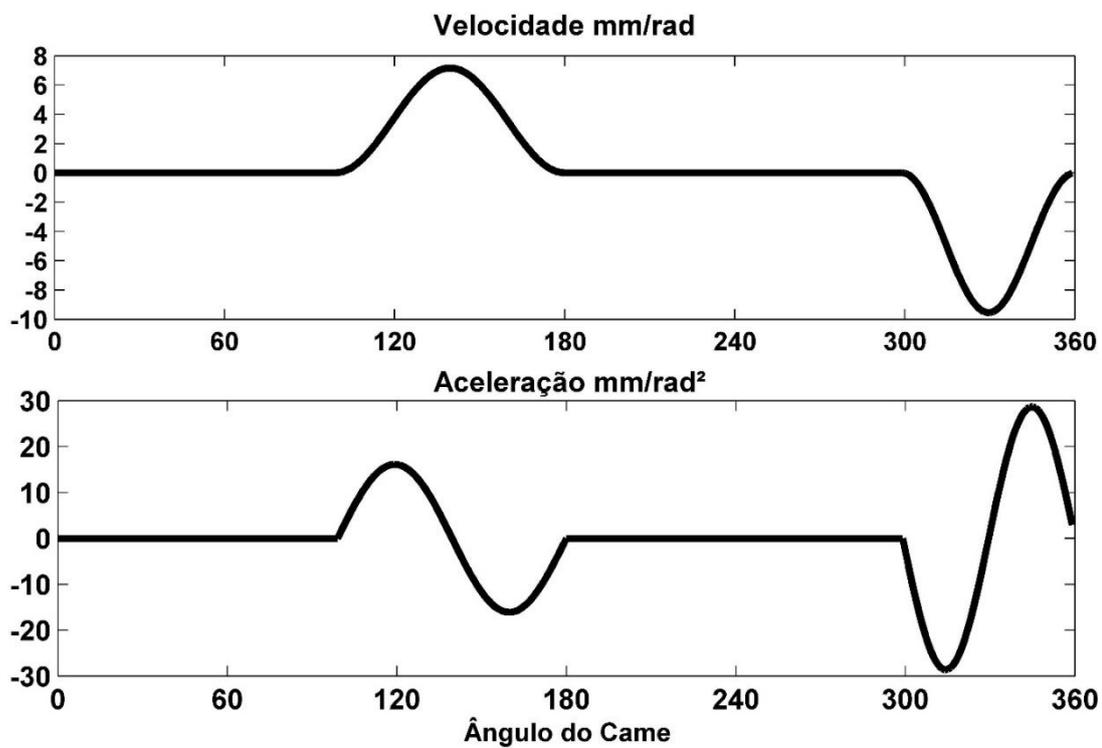


Figura 23 - Velocidade em mm/rad e aceleração em mm/rad<sup>2</sup>

## 4.2 Carregamento

A Figura 24 apresenta o carregamento sobre o came ( $F_c$ ), cujo cálculo foi deduzido na seção 2.5.1. Na primeira parte do movimento esse carregamento é causado pela pré - carga da mola, esta normalmente é inserida na montagem do mecanismo. Após isso ocorre o movimento de subida do seguidor. No início da subida a aceleração e a velocidade aumentam contribuindo para o aumento do carregamento, esse aumento se deve as cargas dinâmicas envolvidas no processo. Próximo a espera superior a velocidade e a aceleração diminuem até o repouso do seguidor, essa redução na velocidade e na aceleração causam uma inflexão na curva do carregamento, vale lembrar que em toda a subida do seguidor existe uma reação da mola a compressão, esta também influencia no aumento do carregamento. Durante a espera superior o carregamento é função somente da pré – carga de montagem e da elevação do seguidor, este é um carregamento totalmente estático. Na descida do seguidor ocorre a mesma variação no carregamento causada na subida, porém de forma mais agressiva, pois o intervalo angular na descida é menor do que na subida, assim as solicitações dinâmicas são mais severas. O carregamento máximo encontrado foi de 68,45 N em  $\theta$  igual a 344°.

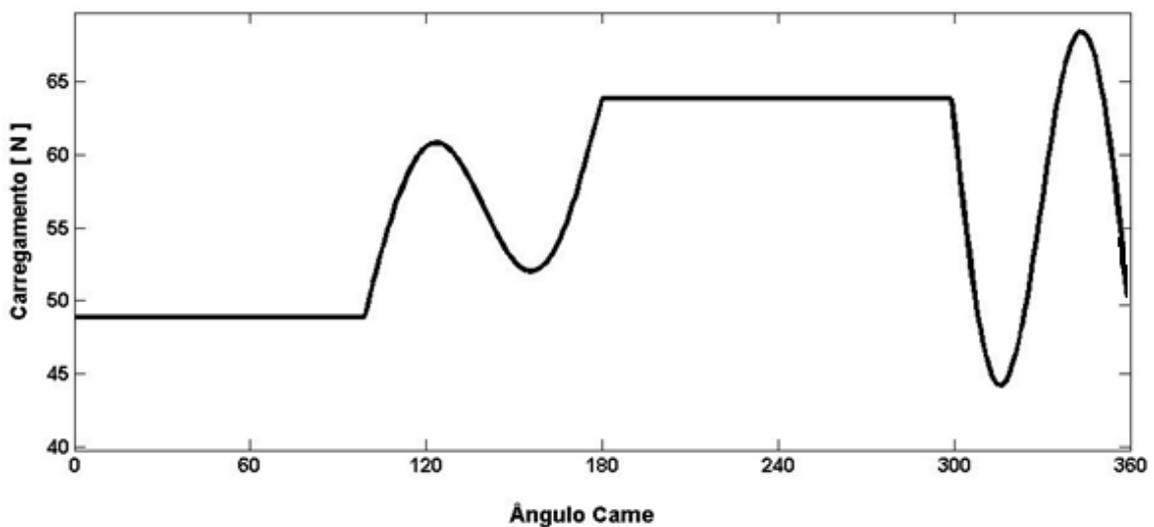


Figura 24 – Carregamento no Came

## 4.3 Tensão de Contato Máxima

Para realizar a normalização da segunda parte da função objetivo, aquela que se refere a tensão de contato, é necessário conhecer a maior tensão de contato presente no came. Como já mencionado anteriormente, a tensão de contato é função do carregamento, do raio de curvatura, da espessura do came e das propriedades dos materiais em contato. Quanto maior o raio de curvatura menor é a tensão de contato.

Para um came com seguidor de face plana é importante assegurar que o raio de curvatura seja positivo por toda a superfície do came. Conforme explicado na seção 2.4.2.2, raio de curvatura é função do raio de base, do deslocamento e da aceleração em comprimento/rad<sup>2</sup>. Os valores de deslocamento e de aceleração já são conhecidos a partir do diagrama SVA, assim a única alternativa é escolher o menor raio de base que garanta que o raio de curvatura seja positivo para todos os pontos. Após alguns cálculos verifica-se que o menor raio de base possível para o raio de curvatura não seja negativo mede aproximadamente 24 mm em  $\theta$  igual a 315°, nesse ponto o raio de curvatura mede aproximadamente zero. O cálculo da tensão de contato foi realizado para um raio de base de 24,35 mm, essa diferença se deve pela existência de uma assíntota vertical na curva de tensão. A maior tensão de contato encontrada foi de 1230 N/mm<sup>2</sup> para  $\theta$  igual a 315°. Esse valor é usado como restrição de projeto para a tensão de contato e também será usado para normalizar a segunda parte a função objetivo. A Figura 25 apresenta os valores da tensão de contato para um raio de base de 24,35 mm.

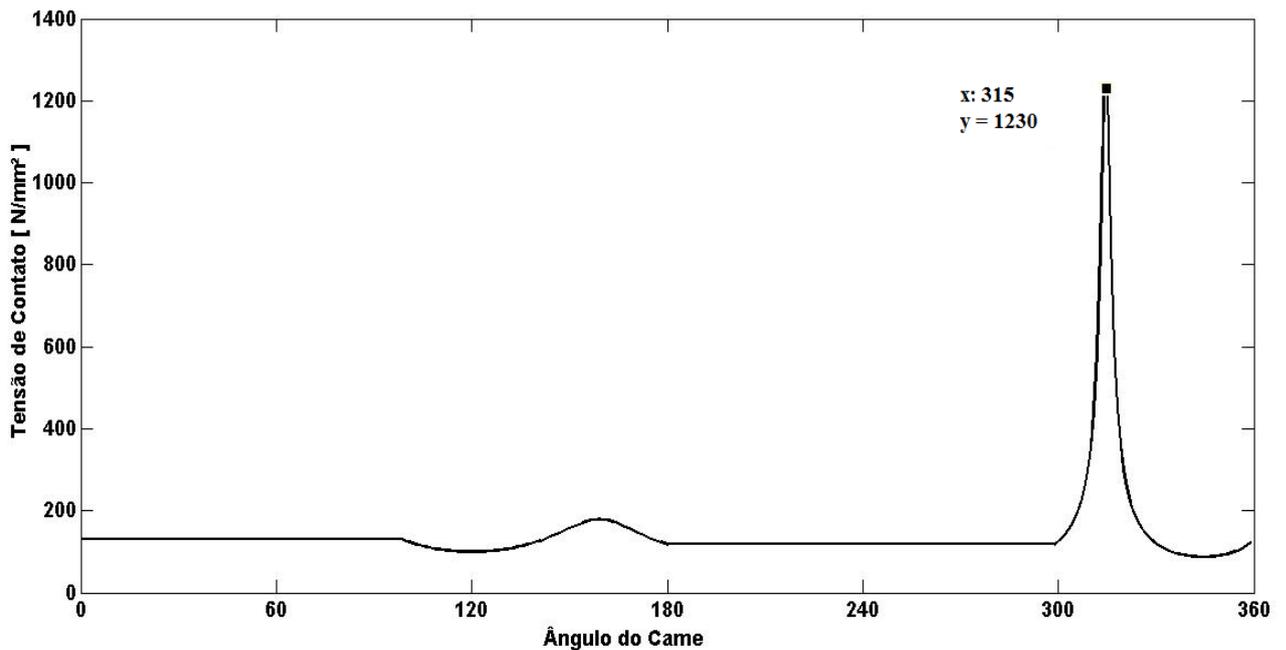


Figura 25 - Tensão de Contato para Rb igual a 24,35 mm

#### 4.4 Torque Teórico

O torque teórico não depende das variáveis de projeto, assim seu valor não irá se alterar com a variação dos coeficientes de ponderação. A Figura 26 apresenta o torque teórico em todo o movimento do came.

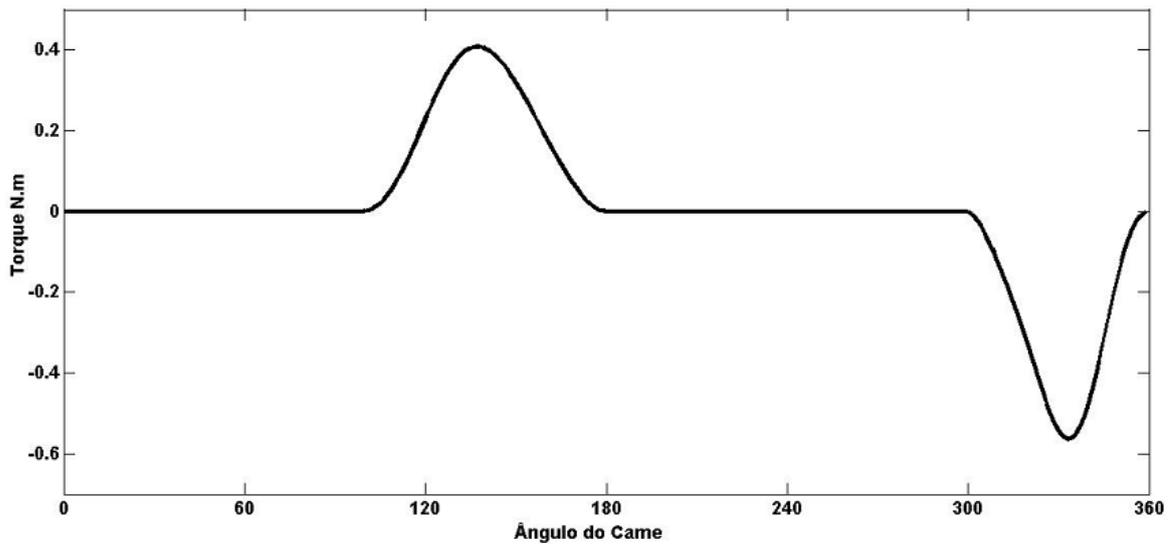


Figura 26 - Torque Teórico

#### 4.5 Otimização

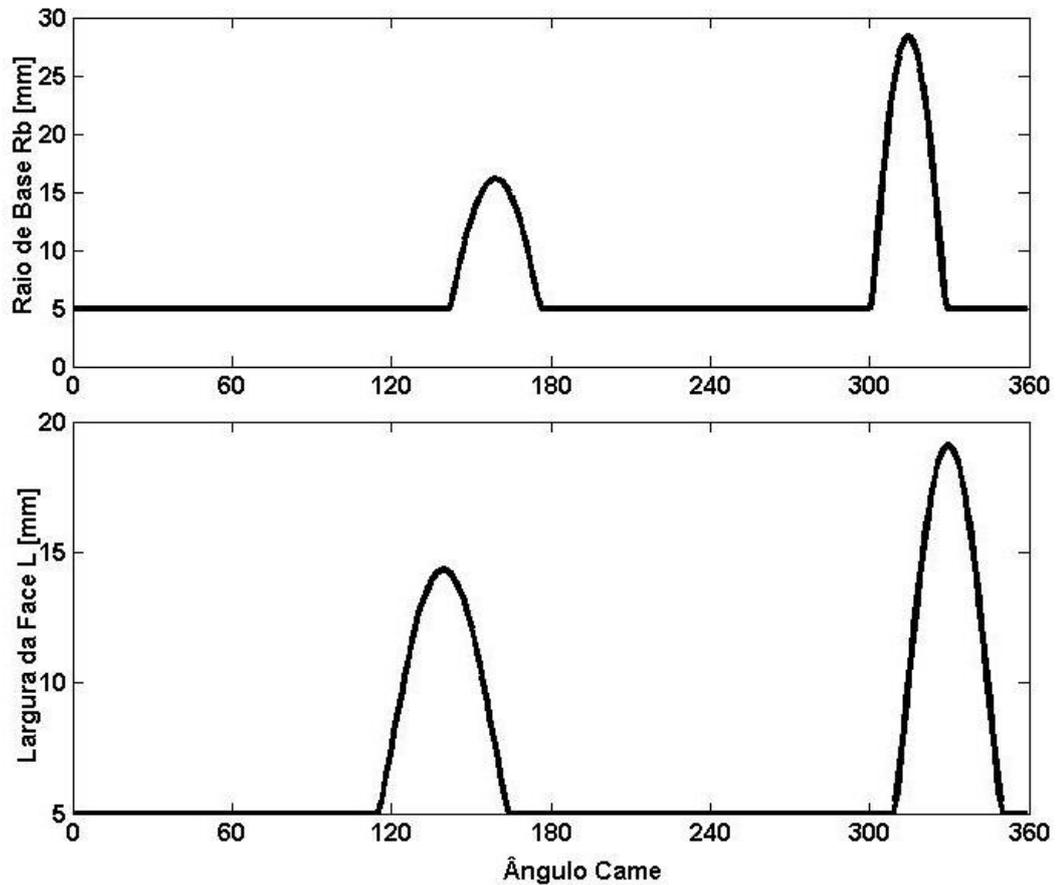
O intervalo da restrição referente a variável de projeto relacionadas ao tamanho do raio de base usada em Tsifis *et al.* (2013) é de 20 e 40 mm. No presente trabalho essa restrição foi relaxada com objetivo de verificar a otimização do raio de base em cada um dos pontos do came. Já é esperado que o menor valor do raio de base que atenderia a todos os pontos está em torno de 24,35 mm, pois esse é o menor valor do raio de base que atende aos requisitos de funcionamento do came. Os resultados apresentados aqui o intervalo do raio de base usado foi de 5 a 40 mm. Esse intervalo contém o valor crítico de 24 mm para o funcionamento do came, assim o relaxamento dessa restrição permite verificar a otimização ponto a ponto do came.

Em relação à largura do seguidor, Tsifis *et al.* (2013) define o valor de 30 a 60 mm. Para o presente trabalho o intervalo inserido no *software* de otimização foi de 5 a 25 mm, pois o valor mínimo citado na literatura de 30 mm é muito superior ao valor mínimo de 19 mm no ponto crítico do projeto em  $\theta$  igual a  $330^\circ$  como mostra a Figura 23. Como o valor das variáveis de projeto mudam de acordo com a posição do came, será adotado como solução para o problema um valor que atenda a todos os pontos do came. As variações nos coeficientes de ponderação resultam em funções objetivo diferentes, cujos resultados são apresentados nas seções seguintes.

##### 4.5.1 Função Objetivo com Coeficientes de Ponderação Iguais

A Figura 27 apresenta o valor das variáveis de projeto após a otimização para cada posição angular do came. Considera-se aqui que  $\alpha$  e  $\gamma$  são iguais a 1. É possível perceber que

os valores ótimos das variáveis de projeto mudam de acordo com o ângulo do came. Quando o seguidor está nas esperas superior e inferior, os valores das variáveis de projeto tendem a valores menores, isso acontece devido a menores solicitações nessa região do came.



**Figura 27 - Variáveis de Projeto**

O raio de base tende a ser maior nos pontos onde a tensão de contato é maior, pois o aumento do raio de base reduz a tensão de contato. O raio de base também aumenta nos pontos que possuem grandes valores negativos de aceleração combinados com um pequeno valor de deslocamento, nesses pontos o raio de curvatura tende a zero. Assim, o aumento do raio de base impede que o raio de curvatura do came seja negativo. Durante o movimento de subida e descida as variáveis de projeto aumentam devido as solicitações dinâmicas do sistema. O maior raio de base encontrado foi de 28,33 mm em  $\theta$  igual a 315°. O maior valor da largura mínima da face do seguidor foi 19,1 mm em  $\theta$  330°.

Em  $\theta$  igual a 330° acontece uma combinação muito importante de valores, o carregamento encontrado é de 55,60 N aproximadamente 81% do carregamento máximo. Porém nesse ponto está localizado o maior valor negativo da aceleração, para evitar um raio de curvatura o

algoritmo tende a aumentar o valor do raio de base. Essa combinação de valores foi decisiva para que o raio de base máximo estivesse nessa posição do came. A largura da face do seguidor está ligada somente com o módulo da velocidade, assim o seu valor máximo está localizado no ponto com maior módulo de velocidade.

A Figura 28 apresenta os resultados otimizados da função tamanho, da tensão de contato e da combinação de ambas para todos os pontos do came. Sendo assim, cada ponto dos gráficos (0 a 360 graus) já é o resultado ótimo para as correspondentes variáveis de projeto e restrições normalizadas. A função objetivo é a soma da função tamanho e da função tensão de contato. Vale ressaltar que essas funções tamanho e tensão de contato estão normalizadas, ou seja, o seu valor máximo admissível é um. É possível perceber que a maior solicitação do projeto se encontra em postos os quais a velocidade e a aceleração possuem valores maiores. Nas esperas superior e inferior o valor otimizado da função objetivo é menor.

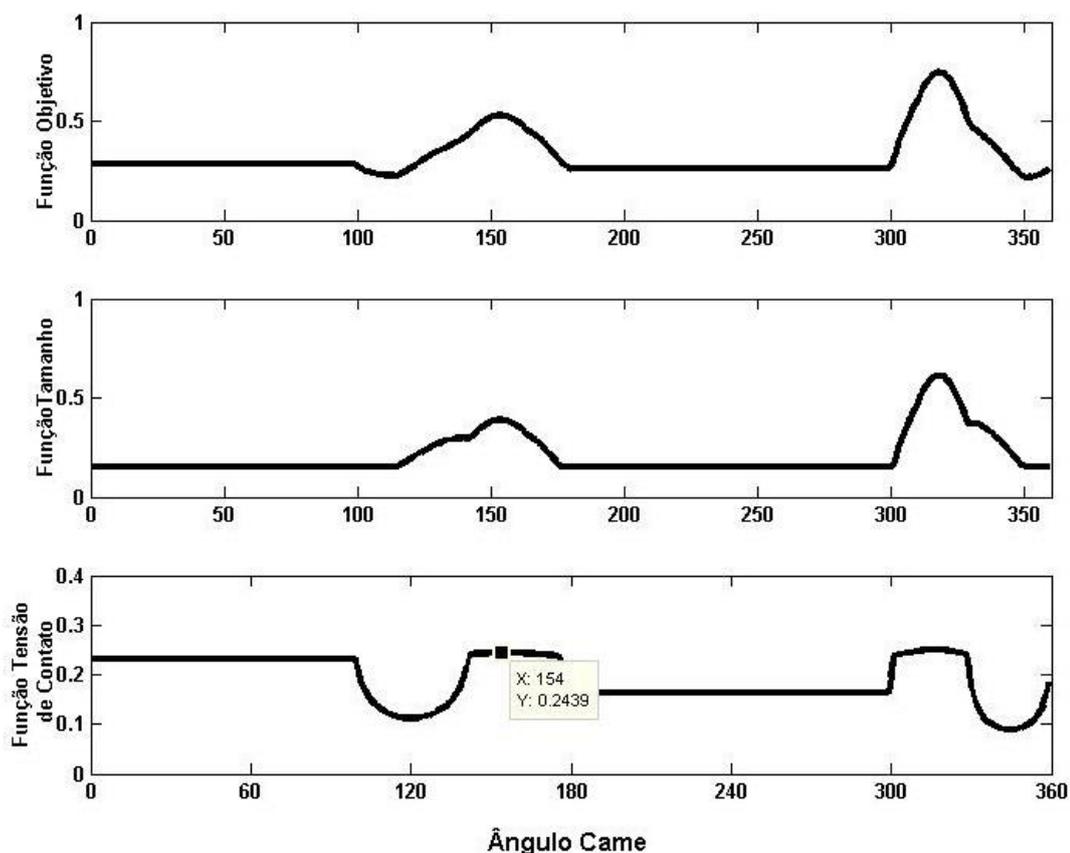


Figura 28 – Função objetivo otimizada pontualmente.

A Figura 29 apresenta o raio de curvatura do came em todas as posições. Todos os valores são maiores do que zero. Isso mostra que o *software* está otimizando o valor das variáveis de projeto respeitando as restrições.

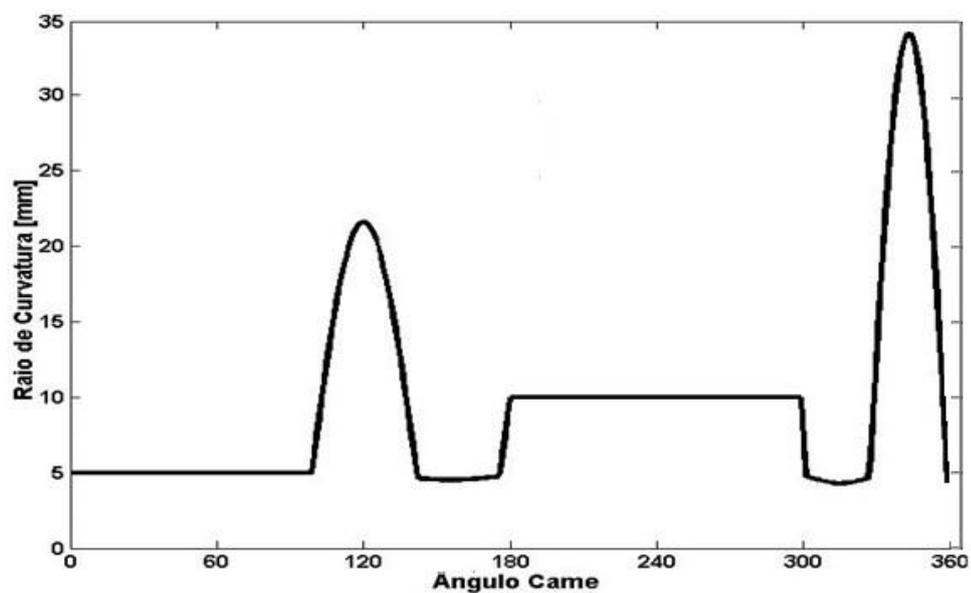


Figura 29 – Raio de Curvatura Came

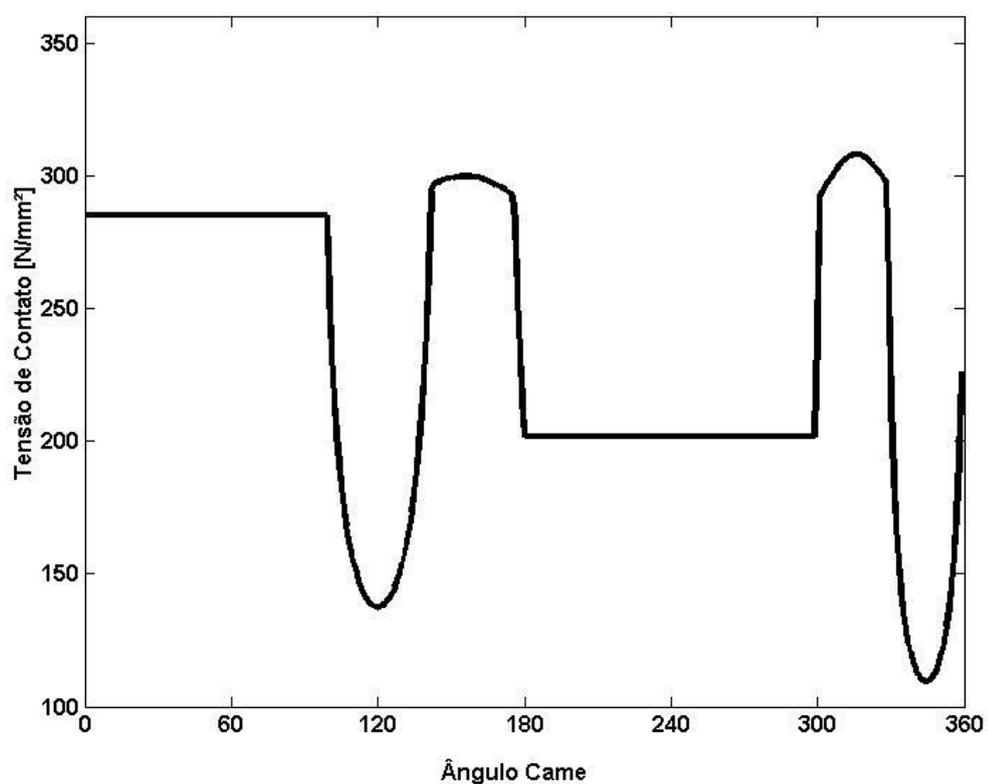


Figura 30 - Tensão de Contato

A tensão de contato também varia ao longo do came, a Figura 30 mostra essa variação. Nos pontos aonde existe um maior carregamento, o algoritmo aumenta o valor do raio de base para minimizar a tensão de contato. A maior tensão de contato em toda a superfície do came é de  $300 \text{ N/mm}^2$  em  $\theta$  igual a  $315^\circ$ .

A Figura 31 ilustra o perfil do came, o círculo interno representa o raio de base, este mede  $28,37 \text{ mm}$ . A curva externa ao círculo representa a superfície externa do came. As regiões com raio constante são regiões de espera. As regiões com variações no raio são regiões de movimentação do seguidor.

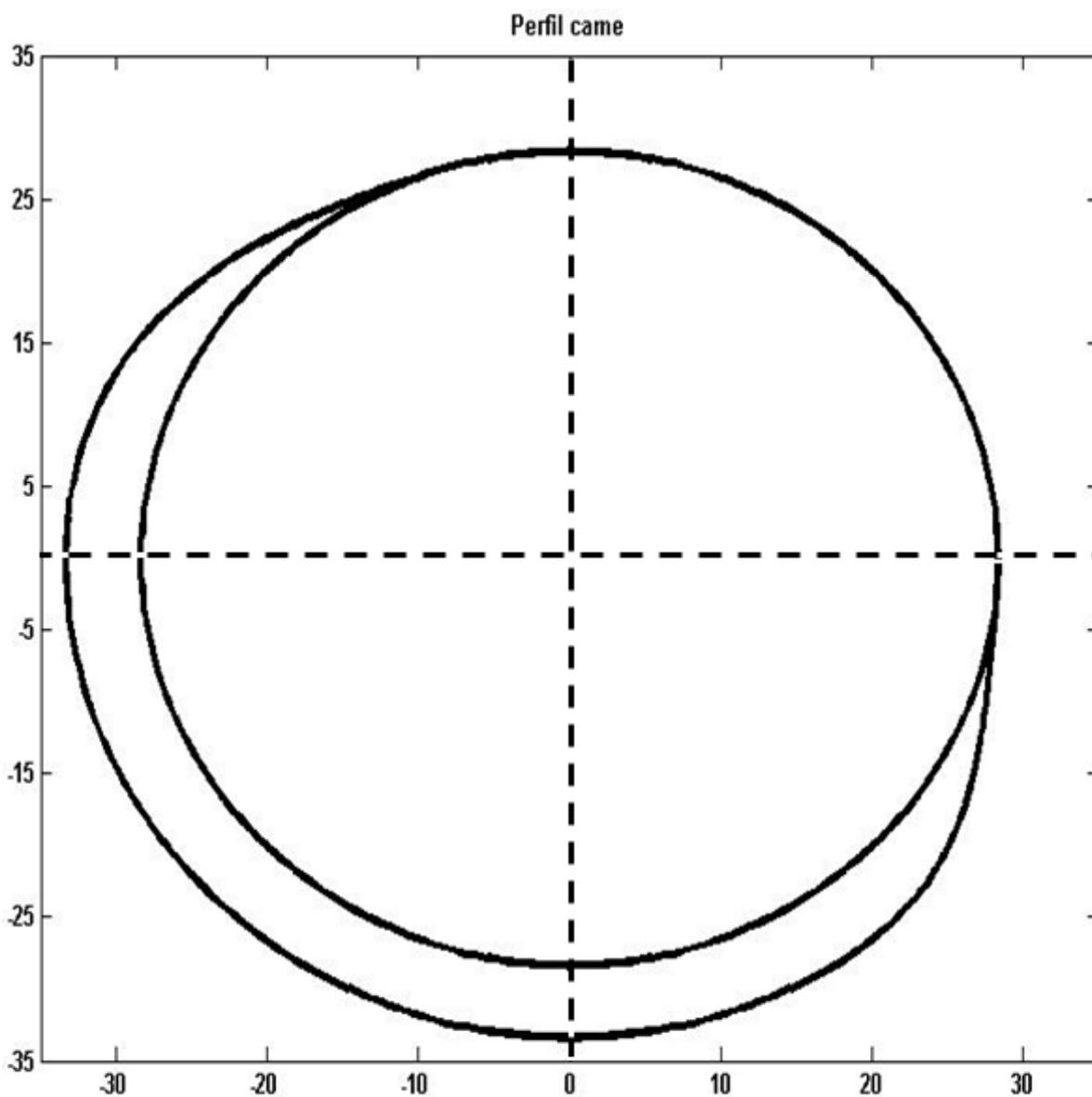


Figura 31 - Perfil Came

#### 4.5.2 Função objetivo com Coeficientes de Ponderação Diferentes

Como citado anteriormente, os coeficientes de ponderação alteram o valor da função objetivo, conseqüentemente o algoritmo tende a alterar o valor da variável de projeto. Eles devem ser usados de acordo com a necessidade do projeto. No caso do projeto aqui presente, valores maiores de  $\alpha$  aumentam a contribuição da parcela do tamanho da função objetivo. Em contrapartida o algoritmo reduz o raio de base havendo um conseqüente aumento da tensão de contato. Valores maiores de  $\gamma$  aumentam a contribuição da parcela de tensão de contato da função objetivo. Em contrapartida o algoritmo aumenta o raio de base, havendo conseqüente redução da tensão de contato.

##### 4.5.2.1 Coeficiente $\alpha$ (parcela de tamanho) maior do que $\gamma$ (parcela de tensão de contato)

A Figura 32 apresenta os resultados das variáveis de projeto para  $\alpha$  dez vezes maior do que  $\gamma$ . Houve uma redução nos valores do raio de base comparados com o resultado anterior. Não houve variação nos valores relacionados com a largura da face do seguidor. O maior raio de base encontrado foi de 25 mm em  $\theta$  igual a 330°. Um valor 11,2% menor comparado com os 28,37 mm encontrado usando coeficientes de ponderação iguais.

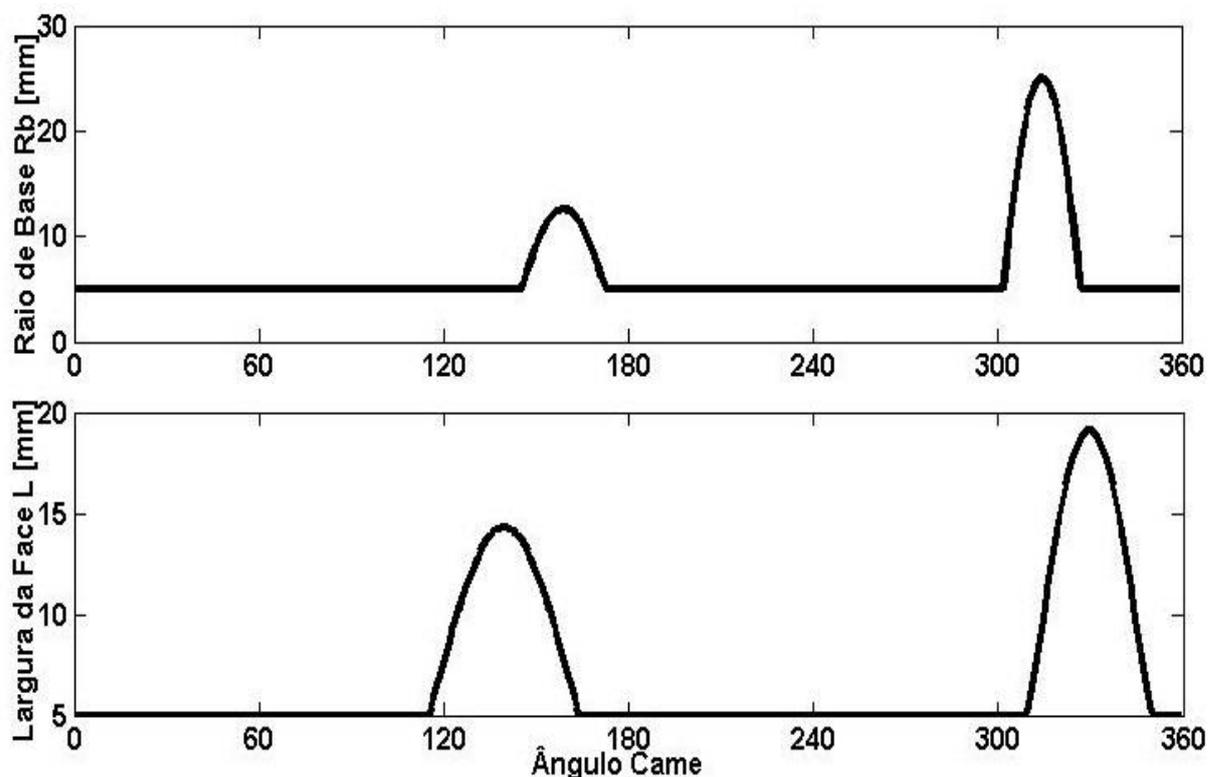


Figura 32 - Variáveis de Projeto  $\alpha$  maior do que  $\gamma$

A Figura 33 apresenta os valores do raio de curvatura para  $\alpha$  maior do que  $\gamma$ . O raio de curvatura ficou menor comparado com o resultado anterior. O algoritmo trabalhou bem perto das restrições de projeto, em alguns pontos o raio de curvatura chegou próximo de zero. A tensão de contato aumentou consideravelmente como mostra a Figura 34. O valor máximo encontrado foi de 664,2 N/mm<sup>2</sup> em  $\theta$  igual a 315°, esse valor é 2,14 vezes maior comparado com o resultado anterior. Uma redução de aproximadamente 3,37 mm no raio do came resultou em um grande aumento de tensão de contato. Pode – se dizer que quando  $\alpha$  é maior do que  $\gamma$ , o came fica menor, porém o aumento na tensão de contato é muito maior. Essa situação é ideal para projetos com limitação de massa e espaço físico, porém o aumento nos esforços exigirá o uso materiais mais resistentes que normalmente exigem um processo de fabricação mais caro, tratamentos térmicos mais complexos, melhor lubrificação.

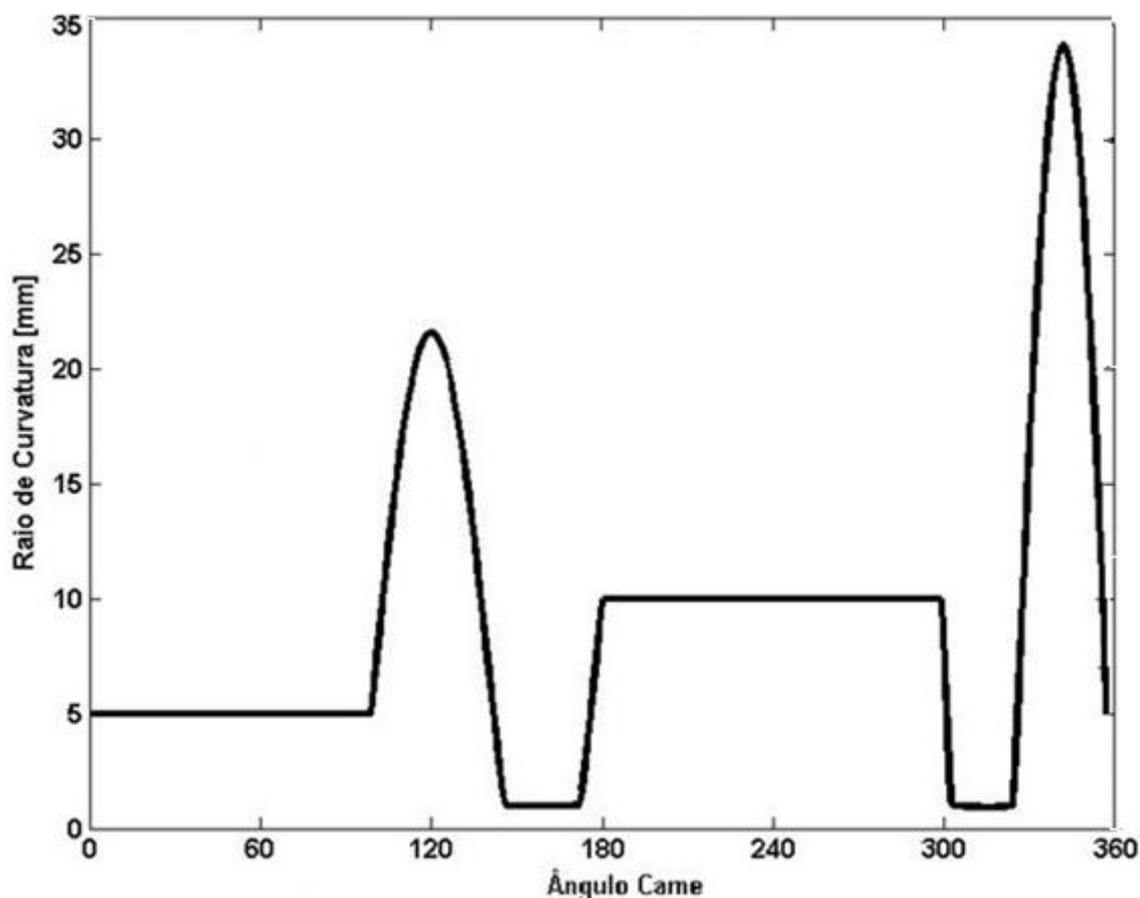


Figura 33 - Raio de Curvatura do Came para  $\alpha$  maior do que  $\gamma$

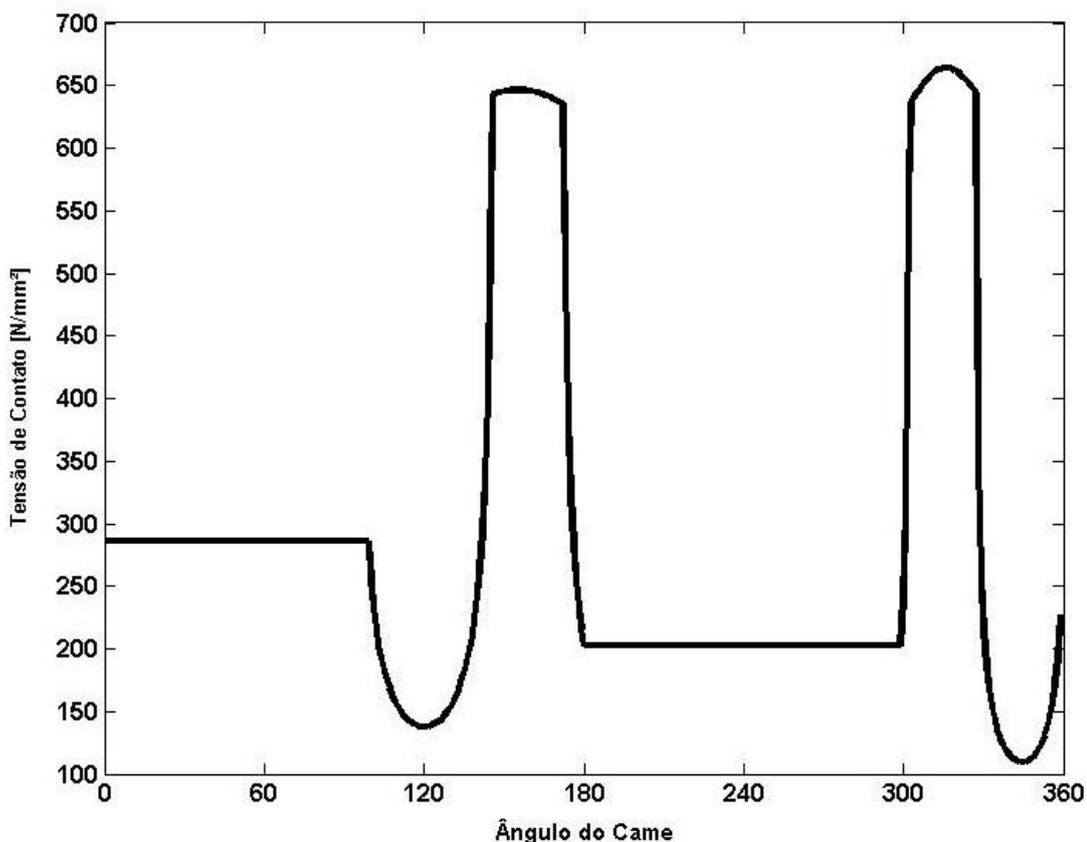


Figura 34 - Tensão de Contato para  $\alpha$  maior do que  $\gamma$

#### 4.5.2.2 Coeficiente $\gamma$ (parcela tensão de contato) maior do que $\alpha$ (parcela tamanho)

A situação abordada aqui é totalmente contrária ao item abordado anteriormente. Nesse caso o coeficiente  $\gamma$  é dez vezes maior do que do que  $\alpha$ . A Figura 35 apresenta as variáveis de projeto para cada posição do came. Percebe – se que o valor do raio de base aumentou até o maior valor estabelecido de 40 mm, lembrando que esse valor máximo não está relacionado a funcionalidade do came, esse valor foi setado por Tsifis *et al.* (2013) e mantido nesse problema. Nessa situação o algoritmo tende a aumentar o raio de base com objetivo de diminuir a tensão de contato. Como já citado anteriormente, a única restrição referente a largura do seguidor é dependente da velocidade, assim o seu valor não se altera com a variação dos coeficientes de ponderação.

As Figura 36 e Figura 37 apresentam o raio de curvatura e a tensão de contato, as curvas são opostas entre si em relação ao eixo x, isso mostra que nas regiões de maior solicitação do came o algoritmo aumenta o raio de curvatura com objetivo de reduzir a tensão de contato. A combinação de coeficientes usada nesse tópico é adequada para situações com cargas elevadas, ou situações sem restrição de espaço. Por reduzir a tensão de contato entre o came e o seguidor

estes podem ser fabricados com materiais de menor resistência mecânica, esses materiais normalmente são mais baratos e mais fáceis de serem trabalhados nos processos de fabricação. Essa combinação de coeficientes de ponderação é mais favorável para carregamentos maiores do que comparada com a situação a qual os coeficientes são iguais, cada unidade aumentada na tensão de contato é multiplicada por 10.

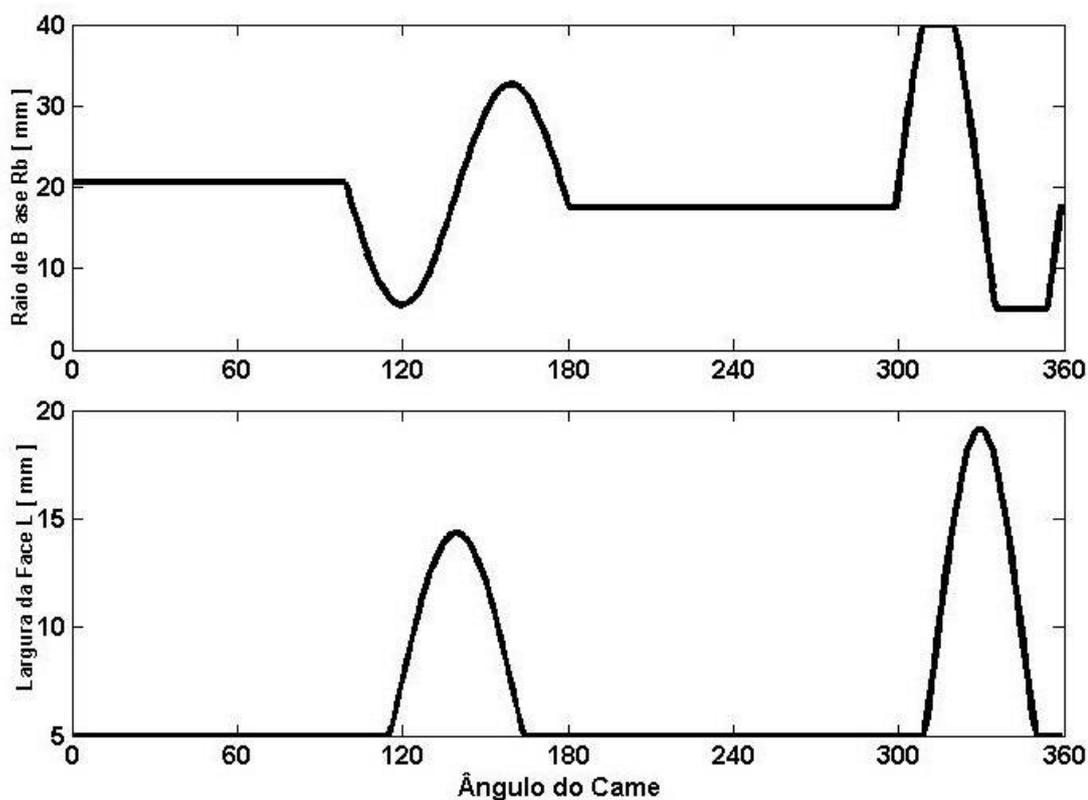


Figura 35 - Variáveis de Projeto  $\gamma$  maior do que  $\alpha$

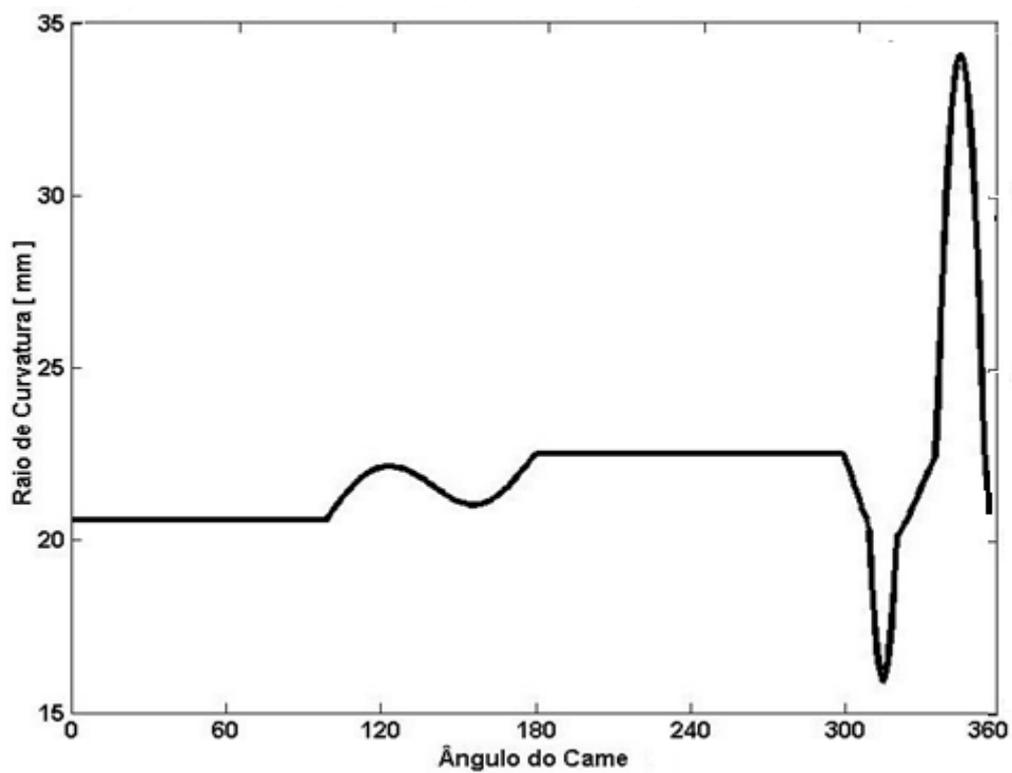


Figura 36 - Raio de Curvatura  $\gamma$  maior do que  $\alpha$

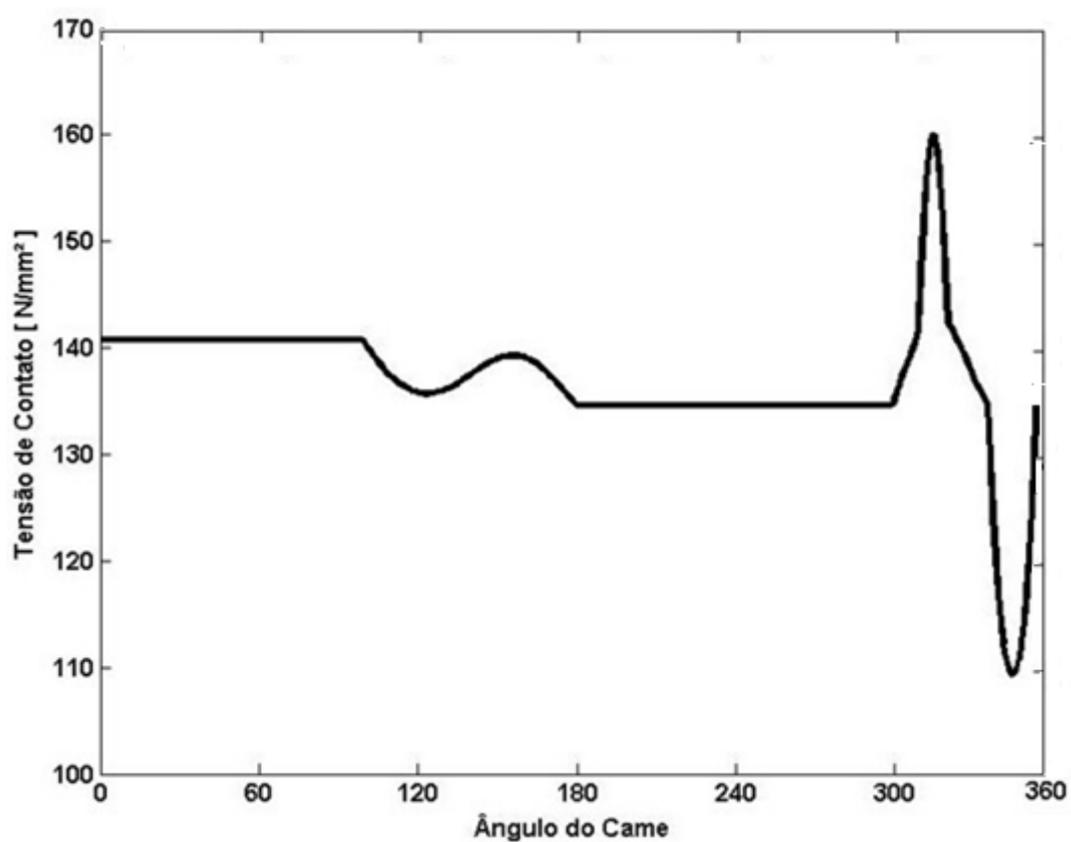


Figura 37 - Tensão de Contato  $\gamma$  maior do que  $\alpha$

### 4.5.2.3 Otimização nos Pontos Críticos

Os algoritmos de otimização normalmente são iterativos, eles resolvem o problema diversas vezes com objetivo de atender aos critérios de otimalidade. No trabalho aqui presente essa otimização foi realizada ponto a ponto do came. O algoritmo parte de um valor inicial das variáveis de projeto, avalia o valor da função objetivo nesse ponto e usa os diversos métodos matemáticos para reduzir o valor. A seguir é apresentado apenas a otimização dos dois pontos críticos presentes nesse trabalho para coeficientes de ponderação iguais. A Figura 38 apresenta a otimização do ponto crítico presente em  $\theta$  igual a  $315^\circ$ , nesse ponto o raio de base é de 28,33 mm. A Figura 39 apresenta a otimização do ponto crítico para a largura da face do seguidor, esse ponto está localizado em  $\theta$  igual  $330^\circ$ . A largura da face para esse ponto é de 19,1 mm.

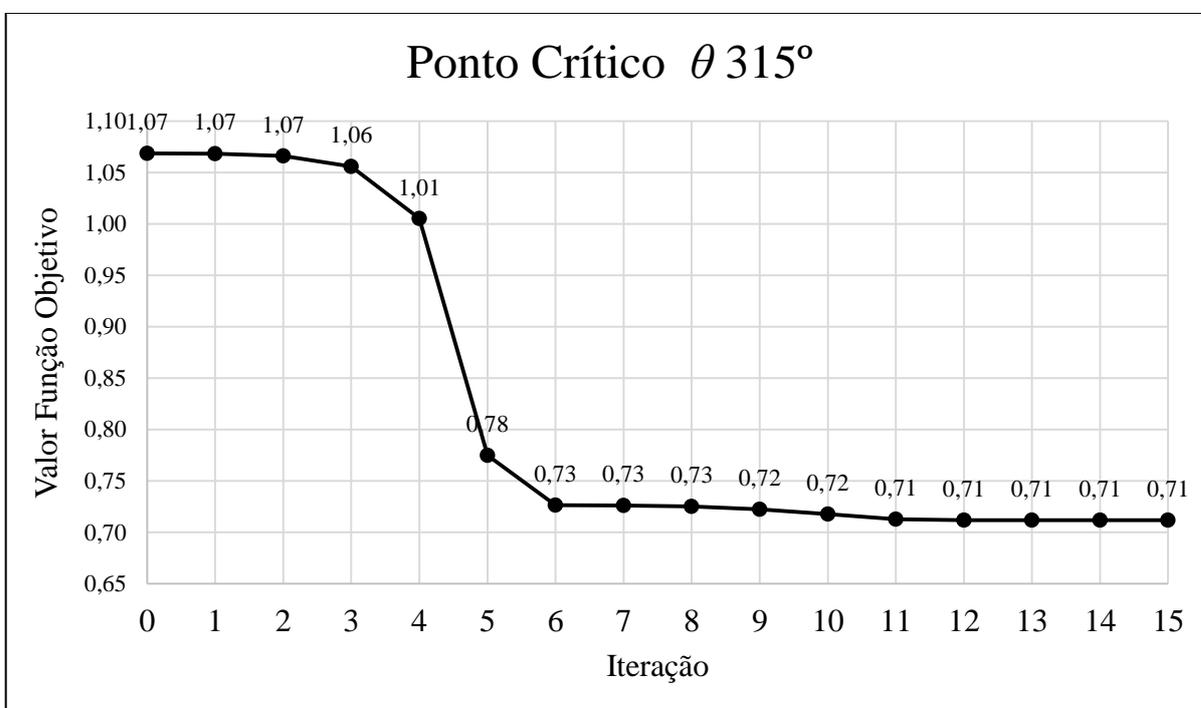


Figura 38 - Ponto Crítico  $\theta 315^\circ$

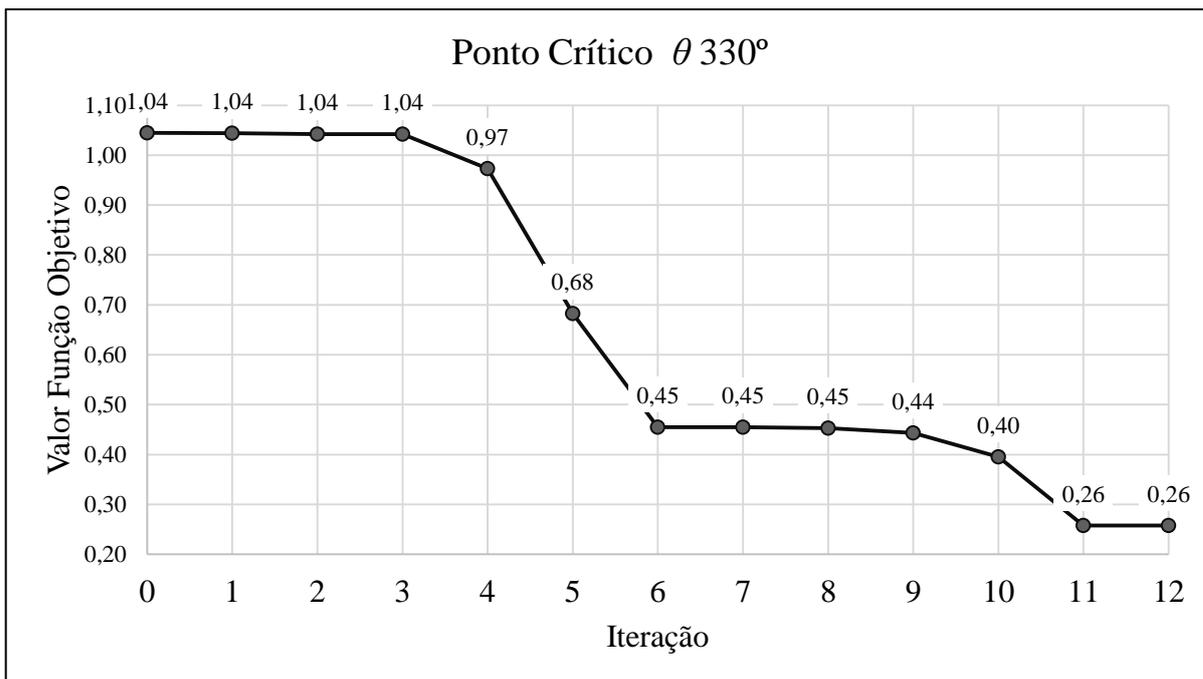


Figura 39 - Ponto Crítico  $\theta 330^\circ$

## 5 CONCLUSÃO

A proposta inicial desse trabalho era a resolução da situação problema resolvido por Tsiafis *et al*, (2013) criando uma metodologia de otimização e comparar os resultados obtidos nesse trabalho com a literatura. Porém durante a resolução alguns problemas como divergência no diagrama de aceleração, ausência de espessura do came e falta de informações na metodologia inviabilizaram essa comparação. O problema inicial foi mantido e a resolução foi realizada com a metodologia de um projeto ótimo. Todas as modificações de realizadas foram justificadas e explicadas baseadas em uma criteriosa revisão bibliográfica. O uso da metodologia de otimização foi fundamental para a solução do problema, pois todas as restrições foram atendidas de forma ótima. Em um projeto convencional o projetista precisaria usar a intuição e resolver o problema por tentativa e erro.

Os resultados mostraram que os coeficientes de ponderação são muito importantes e devem ser usados de acordo com a aplicação desejada. Para projetos onde existe uma grande restrição de espaço é aconselhado usar o coeficiente  $\alpha$  referente ao tamanho maior do que o coeficiente  $\gamma$  referente a tensão de contato. Porém uma pequena redução no raio de base resulta em um grande aumento da tensão de contato. Para projetos onde a restrição referente ao tamanho não é muito importante e o projeto possui um carregamento elevado, é aconselhável manter o parâmetro  $\alpha$  menor do que  $\gamma$ . Em situações intermediárias esses coeficientes podem ser iguais, essa situação é ideal para situações onde a tensão de contato e o tamanho do came possuem as mesmas importâncias.

O algoritmo genético é um método de solução robusto com um custo computacional muito alto. Este deve ser usado para situações complexas, no trabalho aqui presente os pré-testes foram realizados com o auxílio do pacote *fmincon* presente no toolbox do *software* matlab. Este também resolveu a situação presente em um tempo muito menor com os mesmos resultados do algoritmo genético. Mesmo o algoritmo genético sendo um método de solução baseado em probabilidades, o resultado final dos testes de otimização foi muito parecido todas as vezes em que o *software* foi executado. Isso aconteceu devido a simplicidade do problema e o baixo número de variáveis de projeto.

## 6 REREFRÊNCIAS

ARORA, J. S. **Introduction to the Optimum Design**. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2004.

CHEN, F. Y. **Mechanics and Design of Cam**. [S.l.]: Pergamon Press, 1982.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. Massachusetts : Addison-Wesley, 1989.

LUCAS, D. C.; ÁLVARES, L. O. **Algoritmos Genéticos Uma introdução**. Notas de aula elaborada para a disciplina de Ferramentas de Inteligência Artificial, UFRGS, 2002.

NORTON, R. L. **Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos**. 1ª. ed. Porto Alegre: McGraw – Hill, 2010.

NORTON, R. L. **Projetos de Máquinas**. 4ª. ed. [S.l.]: Bookman, 2013.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. 3ª. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1970.

Tsiafis, I; Mitsi, S; Bouzakis, K.D.; Papadimitriou, A. Optimal Design of a Cam Mechanism with Translating Flat-Face Follower using Genetic Algorithm. **Tribology in Industry**, Vol. 35, N: 4, p 2013. 255 - 260.