

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

KLAAS BASTIAAN BRONKHORST

**BALANCEAMENTO GLOBAL DE EIXOS ATRAVÉS DO USO DE  
MODELOS NUMÉRICOS E TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2012

KLAAS BASTIAAN BRONKHORST

**BALANCEAMENTO GLOBAL DE EIXOS ATRAVÉS DO USO DE  
MODELOS NUMÉRICOS E TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. Marco A. Luersen, Dr. Eng.

Co-orientador: Prof. Carlos A. Bavastri, Dr. Eng.

CURITIBA

2012

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de deixar claro que todos os objetivos conquistados contaram com a participação e contribuição de inúmeras pessoas, pois na vida nada se conquista sozinho e este sucesso é proveniente do esforço de todos os amigos que um dia comigo conviveram, assim, não poderia deixar de mostrar minha gratidão.

Meu agradecimento especial aos orientadores e amigos, professores Dr. Marco Antônio Luersen e Dr. Carlos Alberto Bavastri, os quais sempre demonstraram acreditar no meu trabalho. Sinceramente agradeço por todo suporte ao longo de todo o curso de Engenharia Industrial Mecânica e principalmente pela orientação neste trabalho e bom convívio, os quais me proporcionou a oportunidade de enriquecer meus conhecimentos, com suas experiências nas áreas de atuação e sugestões no direcionamento das pesquisas.

Meu agradecimento ao colega de trabalho e amigo Eduardo Afonso Ribeiro, cuja parceria foi fundamental na escrita e verificação da rotina. Também meu agradecimento ao Francisco José Doubrawa Filho que nos deu valiosas dicas de como resolver os problemas que encontramos durante o desenvolvimento do código.

Aos colegas do Laboratório de Vibração e Som, Danielle Voltolini, Junior Bortolotto e Rodrigo Bubniak Silvério, cuja ajuda foi fundamental na aquisição dos dados experimentais apresentados neste trabalho.

E por final, mas com a mesma importância, agradeço o apoio, preocupação e paciência de meus pais Koosje e Marius, que sempre me apoiaram em minhas decisões acertadas e me aconselhando nos momentos em que tomava um caminho errado. À minha amada e aos meus amigos que me ajudaram a superar os dias em que nada mais dava certo.

Nada é mais digno do nosso patrocínio que o fomento da ciência e da literatura. O conhecimento é, em todo e qualquer país, a base mais segura da felicidade pública. (George Washington, discurso de 8 de janeiro de 1790)

Equilíbrio vem do entendimento, humildade e tolerância. O mais elevado estado de equilíbrio é voar livre de tudo e ainda assim manter-se firmemente enraizado na realidade do mundo. (Brahma Kumaris – entidade indiana)

## RESUMO

BRONKHORST, Klaas Bastiaan. Balanceamento global de eixos através do uso de modelos numéricos e técnicas de otimização. 2012. 74 f. Monografia (Engenharia Industrial Mecânica) – Departamento Acadêmico de Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2012.

Máquinas rotativas são utilizadas em inúmeras aplicações, tais como nas indústrias petrolífera, papelreira, de geração de energia, entre outras. A utilização dessas máquinas cada vez mais compactas em ambientes severos, em posições críticas e principalmente em rotações muito elevadas exigem o seu perfeito funcionamento. Na fabricação e na montagem é impossível se obter sistemas livres de defeitos, sendo o mais comum deles o desbalanceamento residual, o qual pode causar perda de rendimento e/ou danos prematuros à máquina. Existem vários métodos para realizar o balanceamento de rotores. Os mais conhecidos utilizam massa de teste, exigindo que a máquina seja parada e iniciada diversas vezes. Para evitar os diversos ciclos de partida e parada do rotor, necessários nas técnicas convencionais, implementa-se neste trabalho uma metodologia global de identificação de balanceamento a partir de respostas conhecidas, obtidas experimentalmente, e respostas de um modelo numérico do rotor em estudo. Esta metodologia baseia-se em um procedimento inverso de identificação, onde o modelo do sistema e a resposta são conhecidos. Para o modelo numérico, foi utilizado um código próprio de análise de dinâmica de rotores por elementos finitos. Com este, a partir dos parâmetros modais, é possível encontrar a resposta a diferentes excitações. Para encontrar o desbalanceamento do modelo físico são realizados cálculos repetitivos do erro entre as respostas numérica e experimental do sistema, variando para isso a magnitude e a posição da massa de desbalanceamento. Este processo é realizado por uma rotina de otimização que foi adicionada ao código que modela numericamente o rotor, permitindo a inserção dos dados obtidos experimentalmente, além de configurar o procedimento de identificação. O código de elementos finitos existente para a construção do modelo numérico foi programado na plataforma Fortran, ao qual foi adicionada a rotina de balanceamento. Para testar o código e a metodologia proposta, um exemplo numérico-experimental foi apresentado. Estudos de convergência e mínimos locais relacionados ao trabalho são abordados e discutidos.

**Palavras-chave:** Dinâmica de Rotores, Balanceamento, Elementos Finitos, Otimização.

## ABSTRACT

BRONKHORST, Klaas Bastiaan. Balanceamento global de eixos através do uso de modelos numéricos e técnicas de otimização. 2012. 74 f. Monografia (Engenharia Industrial Mecânica) – Departamento Acadêmico de Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2012.

Rotating machines are used in numerous applications such as in oil, paper, power generation industries, among others. The usage of these machines, that are more and more compact, in harsh environments, in critical positions and especially in very high rotations demand flawless performance. In the manufacture and assembly it is impossible to obtain defect-free systems and the most common of these defects is the residual unbalance, which can cause loss of efficiency and/or premature damage to the machine. There are several methods to perform the balancing of rotors. The most known ones use test masses and requires the machine to be stopped and started several times. To avoid the various cycles of starting and stopping the rotor, required in conventional techniques, in this work it is implemented a comprehensive methodology for identifying the balancing from known responses, obtained experimentally, and from responses of a numerical model of the rotor. This methodology is based on a reverse procedure of identification, where the numerical model of the system and the measured response are known. A finite elements code was used for the dynamic analysis of the numerical model. With this, using the modal parameters, one can find the response to different excitations. To find the unbalance of the physical model, repetitive calculations of the error between the numerical and experimental responses of the system are performed, varying the magnitude and position of the unbalance mass. This process is carried out by an optimization routine which was added to the numerical rotor model, allowing the insertion of the experimentally obtained data, and set the identification procedure. The existing finite element code to build the numerical model was programmed on the Fortran platform, to which was added the balancing routine. To test the code and the proposed methodology, an experimental-numerical example was presented. Studies of convergence and local minima related to the work are discussed.

**Keywords:** Rotordynamics, Balancing, Finite Element, Optimization.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Representação geométrica de um disco utilizado no modelo numérico. ...	25
Figura 2 - Sistemas de coordenadas utilizados para um disco. ....	26
Figura 3 - Representação de um elemento com os respectivos graus de liberdade localizados nos nós. ....	30
Figura 4 - Representação das componentes de rigidez e amortecimento de um mancal. ....	34
Figura 5 - Representação da posição e velocidade de um desbalanceamento D. ....	35
Figura 6 - Vetor de força de desbalanceamento e resposta fundamental do rotor. ....	38
Figura 7 - Modos de vibrar de um eixo se rotor; a: primeiro modo, b: segundo modo e c: terceiro modo. ....	44
Figura 8 - Exemplo de bancada com rotor. ....	45
Figura 9 - Exemplo de geometria de um rotor. ....	45
Figura 10 - Representação da massa de desbalanceamento em relação ao eixo. ....	47
Figura 11 - Fluxograma de identificação de desbalanceamento. ....	48
Figura 12 - Fluxograma da Função objetivo. ....	52
Figura 13 - Fluxograma da rotina de identificação de desbalanceamento. ....	53
Figura 14 - Geometria e discretização do eixo para realizar a simulação numérica da forma da função objetivo. ....	54
Figura 15 - Geometria e discretização do eixo para realizar a simulação numérica do caso 2. ....	56
Figura 16 - Geometria e discretização do eixo para realizar a simulação numérica do caso 3. ....	57
Figura 17 - Rotorkit RK-4, Bently Nevada e sensor de deslocamento em detalhe. ....	58
Figura 18 - Placa de aquisição de dados de vibração Brüel & Kjaer Sound & Vibration Measurements S/A. ....	59

Figura 19 - Rotor com a configuração utilizada para a medição. ....	60
Figura 20 - Montagem dos equipamentos de medição utilizados.....	61
Figura 21 - Detalhe a) dos sensores de deslocamento e b) do mancal do rotor. ....	62
Figura 22 - Modelo numérico do rotor utilizado nas medições. ....	62
Figura 23 - Mapa de rigidez para calibragem do mancal. ....	63
Figura 24 - Comportamento da função objetivo para a) 1 rotação, b) 2 rotações, c) 4 rotações e d) 6 rotações.....	65
Figura 25 - Comportamento da função objetivo para a) 1 posição, b) 2 posições, c) 4 posições e d) 6 posições.....	66
Figura 26 - Comparação das respostas ao desbalanceamento na posição de 206 mm para cada algoritmo utilizado. ....	72
Figura 27 - Aproximação dos picos das respostas ao desbalanceamento: a) - 1º modo; b) - 2º modo; c) - 3º modo. ....	73
Figura 28 - Resposta ao desbalanceamento: a) três posições e diferentes números de rotações e b) três rotações e diferentes números de posições. ....	74
Figura 29 - Resposta ao desbalanceamento: a) três posições e diferentes números de rotações e b) três rotações e diferentes números de posições. ....	76
Figura 30 - Comparação entre resposta numérica e resposta experimental do rotor desbalanceado.....	78
Figura 31 - Resposta ao desbalanceamento do modelo numérico. ....	79
Figura 32 - Resposta ao desbalanceamento do modelo experimental.....	80
Figura 33 - Comparação entre modelo numérico e experimental para o Caso 3. ....	80
Figura 34 - Comparação entre o Caso 3, o rotor sem massas de desbalanceamento e o rotor desbalanceado.....	81



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados da geometria do caso 1.	54
Tabela 2 - Dados da geometria do caso 2.	56
Tabela 3 - Dados da geometria do caso 3.	57
Tabela 4 - Geometria do rotor utilizado na medição.	61
Tabela 5 - Rotações utilizadas para a construção da superfície da função objetivo.	65
Tabela 6 - Posições de resposta utilizadas para a construção da superfície da função objetivo.	66
Tabela 7 - Comparação dos resultados para o caso 1, etapa 1.	68
Tabela 8 - Comparação dos resultados para o caso 1, etapa 2.	68
Tabela 9 - Comparação dos resultados para o caso 2, etapa 1.	69
Tabela 10 - Comparação dos resultados para o caso 2, etapa 2.	70
Tabela 11 - Comparação dos resultados para o caso 3, etapa 1.	71
Tabela 12 - Comparação dos resultados para o caso 3, etapa 2.	71
Tabela 13 - Rotações e posições de medição utilizadas.	74
Tabela 14 - Diferença entre amplitude sem balanceamento e com balanceamento.	75
Tabela 15 - Rotações e posições de medição utilizadas.	75
Tabela 16 - Diferença entre amplitude sem balanceamento e com balanceamento.	76
Tabela 17 - Casos de balanceamento em dois planos, 170 mm e 335 mm.	78

## LISTA DE SÍMBOLOS

$L$	Lagrangiano
$T$	Energia cinética
$U$	Energia potencial
$\delta W$	Trabalho virtual
$\phi$	Forças dissipativas
$\bar{F}_i$	Forças generalizadas
$f_i$	Forças internas ou de restrição
$q_i$	Deslocamentos/coordenadas generalizadas
$\dot{q}_i$	Velocidades generalizadas
$\ddot{q}_i$	Acelerações generalizadas
$m_{ij}$	Elemento de inércia da matriz de inércia
$c_{ij}$	Elemento de amortecimento da matriz de amortecimento
$g_{ij}$	Elemento da matriz giroscópica
$k_{ij}$	Elemento de rigidez da matriz de rigidez
$n$	Graus de liberdade
$\mathbf{q}$	Vetor de deslocamentos generalizados
$\dot{\mathbf{q}}$	Vetor de velocidades generalizadas
$\ddot{\mathbf{q}}$	Vetor de acelerações generalizadas
$\mathbf{M}$	Matriz de inércia
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento
$\mathbf{G}$	Matriz giroscópica
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\bar{\mathbf{F}}$	Vetor de forças generalizadas
$\Omega_{rpm}$	Velocidade de rotação do eixo
$\Omega$	Velocidade de rotação
$\boldsymbol{\omega}$	Vetor velocidade angular
$u_i$	Translação em X
$w_i$	Translação em Z
$\theta_i$	Rotação ao redor de X
$\psi_i$	Rotação ao redor de Z
$N$	Número de nós do sistema de E.F.
$\mathbf{y}(t)$	Definição do espaço de estado no tempo
$\mathbf{Y}(\Omega)$	Definição do espaço de estado na frequência
$\mathbf{F}(\Omega)$	Vetor de forças no domínio da frequência
$\mathbf{N}(\Omega)$	Vetor de forças do problema $2n$ dimensional
$\mathbf{A}$	Matriz auxiliar do problema $2n$ dimensional
$\mathbf{B}$	Matriz auxiliar do problema $2n$ dimensional
$\boldsymbol{\theta}$	Autovetores do problema direto
$\boldsymbol{\Psi}$	Autovetores do problema adjunto

$\lambda$	Autovalores
<b>I</b>	Matriz identidade
<b><math>\Lambda</math></b>	Matriz espectral
$\Omega_j$	Frequências naturais
$\lambda_j$	Frequências naturais complexas
<b><math>\Theta</math></b>	Autovetores do problema direto ortonormalizados
<b><math>\Psi</math></b>	Autovetores do problema adjunto ortonormalizados
<b><math>\mathbf{P}(\Omega)</math></b>	Vetor auxiliar para transformação de variáveis
<b><math>\mathbf{H}(\Omega)</math></b>	Matriz de receptância
$\mathbf{x}_{n \times 1}$	Vetor projeto
$y_i^{exp}$	Resposta experimental
$y_i^{num}$	Resposta numérica
$r_i$	Erro entre respostas
<b><math>\mathbf{r}</math></b>	Vetor erro
<i>fobj</i>	Função objetivo
$md_i$	Magnitude do desbalanceamento
$\delta_i$	Fase do desbalanceamento
<i>m</i>	Número de respostas medidas
<i>n</i>	Número de planos de balanceamento

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	Contexto do Tema	13
1.2	Caracterização do Problema	14
1.3	Objetivos	15
1.4	Justificativa	15
1.5	Conteúdo	16
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>18</b>
2.1	Modelagem Numérica do Rotor	18
2.1.1	Equações de Lagrange	19
2.1.2	Disco	24
2.1.3	Eixo	28
2.1.4	Mancais	33
2.1.5	Desbalanceamento	35
2.1.6	Parâmetros modais e resposta numérica	39
2.2	Identificação do desbalanceamento	43
2.2.1	Obtenção dos dados experimentais	43
2.2.2	Metodologia de identificação de desbalanceamento	44
2.3	Algoritmos de Otimização	48
2.3.1	Algoritmo Genético	49
2.3.2	Algoritmo Quase-Newton	49
<b>3</b>	<b>ROTINA DE OTIMIZAÇÃO</b>	<b>51</b>
<b>4</b>	<b>PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL</b>	<b>54</b>
4.1	Verificação da Forma da Função Objetivo	54
4.2	Estudo dos Mínimos Locais	55
4.2.1	Caso 1	55
4.2.2	Caso 2	56
4.2.3	Caso 3	57
4.3	Verificação da Rotina de Identificação	58
4.4	Estudo Experimental	58
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>64</b>
5.1	Forma da Função Objetivo	64
5.2	Mínimos Locais	67
5.2.1	Caso 1	67
5.2.2	Caso 2	69
5.2.1	Caso 3	70
5.3	Verificação da Rotina	73
5.4	Resultados Experimentais	76
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>82</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>84</b>
	<b>APÊNDICE A – ARQUIVOS DE ENTRADA E SAÍDA DA ROTINA</b>	<b>87</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O trabalho de conclusão de curso apresentado pretende apresentar e validar um método de balanceamento que se utiliza da resposta de vibração medida experimentalmente em uma máquina rotativa e da resposta de vibração de seu modelo numérico. Comparando as duas respostas obtém-se uma medida de erro que é minimizada variando-se o valor e posição da massa de desbalanceamento no modelo numérico com o auxílio de um algoritmo de otimização.

## 1.1 Contexto do Tema

Balanceamento é um tipo de controle de vibrações em máquinas rotativas que visa corrigir as imperfeições na distribuição de massas inerentes ao processo de fabricação das mesmas. Devido ao fato deste controle ser realizado em apenas alguns planos discretos e a distribuição imperfeita poder ocorrer ao longo de todo o rotor da máquina rotativa, sempre existirá um desbalanceamento residual que nas normas é permitido através de limites.

Em geral, o balanceamento é um procedimento de medição e redução da vibração de uma máquina rotativa, adicionando ou retirando-se massas em pontos discretos predefinidos. Várias são as vantagens em se balancear um rotor, tais como: a redução no nível de ruído, aumento na vida dos mancais, diminuição no consumo de energia (entre 3 e 5 % é típico), aumento na qualidade do produto e principalmente a redução dos custos de manutenção, pois o rotor trabalhará sob uma distribuição de tensão menor, reduzindo ou quase eliminando falhas por fadiga (WOWK, 1994). Atualmente as técnicas de balanceamento mais utilizadas exigem, em geral, muito tempo para a sua realização, pois a máquina, muitas vezes de grande porte, deve ser parada e acionada várias vezes. Em alguns casos, essas técnicas não são eficazes, pois consideram que o eixo não se deforma ou, o que é equivalente, que o eixo se comporta como rígido, trabalhando o suficientemente abaixo da primeira rotação crítica. Em muitos casos a diferença entre a rotação de trabalho e a rotação crítica não é suficientemente grande para considerar o eixo como rígido, principalmente com a tendência mundial atual, em que são exigidas rotações cada vez mais elevadas das máquinas.

## 1.2 Caracterização do Problema

Mesmo que a produção de máquinas rotativas esteja muito avançada e que, com as técnicas de fabricação, tolerâncias menores sejam possíveis de se obter, existe a impossibilidade de se fabricar e montar um rotor sem desbalanceamento residual. Além disso, as normas internacionais exigem que os fabricantes garantam um balanceamento mínimo nos seus produtos, como por exemplo, o caso de motores elétricos de grande porte (ANSI/API STANDARD 541, 2004). Por esses motivos são necessárias técnicas de balanceamento apuradas, de modo que a máquina esteja em um estado aceitável para funcionamento.

As técnicas convencionais de balanceamento dinâmico que se utilizam de massas de teste são eficazes, mas dependem de vários ciclos de partida e parada da máquina para obter um nível aceitável de vibração.

Segundo Bently *et al.* (2002), o balanceamento em sistemas rotativos é simples. Adiciona-se ou remove-se massa em locais predeterminados, denominados planos de balanceamento. Um plano de balanceamento é uma posição axial do eixo em que se possa adicionar ou retirar uma quantidade de massa, a qual tem a posição definida por um raio a partir do centro do eixo e por uma fase em relação a uma referência. Pode-se utilizar como plano de balanceamento um disco ou outro elemento de maior diâmetro montado no eixo. Para balanceamento em dois planos necessita-se de três ciclos: o primeiro sem massa de teste, o segundo com uma massa de teste em um plano e o terceiro com uma massa de teste no outro plano. Para um número maior de planos é necessário um número maior de ciclos de partida e parada, pois é necessário medir a resposta com uma massa de teste em cada plano, separadamente. Para um rotor esbelto com apenas um disco delgado nele montado pode-se utilizar apenas um plano de balanceamento. Esta configuração, porém não possui muitas aplicações práticas. Normalmente os discos ocupam praticamente todo o comprimento do rotor e devido a esse fato, quanto maior o número de planos de balanceamento, mais preciso é o processo de balanceamento, e conseqüentemente menor é o desbalanceamento residual presente neste rotor, já que o desbalanceamento, em geral, também é distribuído. Além disso, é recomendada a utilização de pelo menos dois planos de balanceamento para que o segundo modo rígido de vibração do eixo possa ser controlado.

Quando se utilizam as máquinas de balanceamento usuais, a rigidez dos apoios e a rotação de trabalho normalmente não condizem com a condição de operação da máquina. Estas máquinas também não consideram que o eixo se comporta como um eixo flexível, quando o rotor trabalha perto ou acima da primeira rotação crítica. Segundo a norma ANSI/API STANDARD 541, se considera eixo flexível aquelas máquinas rotativas que trabalham acima de 70% da rotação crítica ou acima dela. Nessas velocidades de rotação deve-se levar em conta o modo de vibrar do rotor, deixando o processo convencional de balanceamento mais complexo e dispendioso em relação ao tempo de serviço.

### **1.3 Objetivos**

Tem-se como objetivo neste trabalho a implementação e aplicação de uma técnica robusta de identificação de desbalanceamento (balanceamento) utilizada tanto para eixos flexíveis quanto para eixos considerados rígidos. A técnica é baseada na comparação e ajuste das respostas do rotor, em pontos predeterminados de balanceamento, através de medições experimentais e as respostas obtidas numericamente a partir de um modelo de elementos finitos. Este procedimento foi implementado para atender o balanceamento de um rotor em uma ou várias rotações de operação e será implementado em um ambiente de otimização.

Pretende-se aplicar uma metodologia que permite o balanceamento dos rotores em diferentes planos de balanceamento, exigindo apenas um ciclo de partida e parada para a(s) rotação(ões) de balanceamento especificada/as, além de possibilitar o balanceamento de rotores flexíveis com acurácia e rapidez.

### **1.4 Justificativa**

No desenvolvimento de máquinas rotativas, geralmente de grande porte, (motores elétricos, turbinas hidráulicas, bombas, entre outros) é necessária a utilização de técnicas de balanceamento, que devem ser cada vez mais precisas e rápidas. Isso se mostra na indústria de geração de energia elétrica, refino de petróleo, nuclear e aeroespacial, onde, no projeto, procura-se a diminuição do peso e o aumento da velocidade de rotação, aumentando-se assim a flexibilidade das máquinas (SANTOS, 2003). Desta forma, cada vez mais as máquinas rotativas

trabalham acima da segunda ou terceira rotações críticas, ou seja, para que as velocidades de rotação de trabalho sejam atingidas, é necessário passar pelas regiões de ressonância, o que pode levar a altos níveis de vibração. Além disso, a máquina pode trabalhar em velocidades de rotação variável e o aumento do nível de vibração pode causar danos graves. Surge então a necessidade de realizar o balanceamento desses rotores, diminuindo-se a níveis aceitáveis a vibração destes próximo à região de ressonância ou da velocidade de rotação de trabalho. Para empresas que fabricam rotores para motores elétricos acima de 500 HP, por exemplo, o balanceamento resulta em um obstáculo no processo de fabricação, pois o tempo necessário para balanceamento pode chegar a algumas horas, dependendo da velocidade de rotação e o tipo do rotor. Para essas empresas é exigido por norma que os motores sejam entregues ao cliente com um desbalanceamento residual máximo (ANSI/API STANDARD 541, 2004). Com a técnica aqui proposta, estima-se que este tempo pode cair drasticamente para alguns minutos.

O tema do trabalho faz parte da área de mecânica estrutural e o trabalho engloba conhecimentos de vibrações e métodos numéricos além da modelagem de sistemas dinâmicos. Portanto, é uma oportunidade de aplicação dos conhecimentos adquiridos no decorrer do curso.

O autor da presente proposta atua na área de vibrações mecânicas desde 2008, em trabalhos de iniciação científica realizados no Laboratório de Vibrações da UTFPR. No estágio realizado na empresa VOITH AG, na Alemanha, trabalhou com a aquisição de sinais de vibração de turbinas hidráulicas e geradores de usinas hidrelétricas, desde a instalação dos sensores até a interpretação dos sinais medidos. Desta forma, este projeto de pesquisa continua na linha de atuação que se desenvolveu durante este período.

## **1.5 Conteúdo**

Este trabalho é formado inicialmente por uma fundamentação teórica, apresentada no Capítulo 2, onde está descrita a teoria utilizada para construir o modelo numérico de um rotor. Apresenta-se rapidamente a Equação de Lagrange e os componentes que formam um rotor, juntamente com a formulação numérica respectiva a cada componente. A partir deste ponto discorre-se sobre a obtenção



dos parâmetros modais utilizados como dados de entrada para a rotina de identificação de desbalanceamento. O equacionamento da identificação de desbalanceamento é apresentado a seguir, discorrendo sobre a obtenção dos dados experimentais e a metodologia de balanceamento. Os algoritmos de otimização utilizados também são apresentados neste capítulo

O Capítulo 3 discute a rotina de otimização que implementa a identificação dos desbalanceamentos e no Capítulo 4 são apresentados os materiais e métodos.

O resultados e análises prévias da rotina de identificação de desbalanceamento estão apresentados no Capítulo 5. Neste capítulo encontra-se o estudo da forma da função objetivo e da presença de mínimos locais em casos com mais de um plano de balanceamento. Foi realizada também a validação numérica do funcionamento da rotina de identificação de desbalanceamento e uma validação com resultados experimentais.

As conclusões estão incluídas no Capítulo 6 e um exemplo dos arquivos de entrada e de saída está demonstrado no Apêndice A.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A necessidade de técnicas mais rápidas e precisas para o balanceamento de máquinas rotativas faz com que cada vez mais pesquisadores se interessem pelo assunto. O balanceamento de rotores flexíveis em baixas velocidades de rotação é apresentado em Tan e Wang (1993), utilizando-se das técnicas de balanceamento modal e de coeficientes de influência. Em Xu *et al* (2000) é apresentado um método que utiliza as técnicas de coeficientes de influência e do ponto de fase inicial do *Holospectrum* (método de FFT que combina os espectros ordinários de vibração nas direções vertical e horizontal). Calculando a resposta ao desbalanceamento teórico e medindo o desbalanceamento original, encontra-se através de métodos de otimização a massa de desbalanceamento. Uma metodologia de balanceamento ativo é proposta em Moon *et al.* (2006) que se utiliza do método de coeficiente de influência em conjunto com um dispositivo magnético, aplicado em rotores de altas velocidade de rotação. Em Han (2007) está apresentada uma metodologia baseada na derivada da resposta modal de desbalanceamento proveniente da análise modal completa para rotores não-isotrópicos. A utilização do método de Programação Sequencial Quadrática (SQP) é aplicado por Wang (2007) para, através de um problema de otimização min-max, encontrar o desbalanceamento baseando-se nas técnicas de coeficientes de influência e *Holospectrum*.

A fundamentação teórica para o estudo apresentado neste projeto baseia-se nos trabalhos de Bavastri *et al.* (2010), Doubrawa Filho (2008) e Farias e Ribas (2005).

### 2.1 Modelagem Numérica do Rotor

A aplicação da metodologia de balanceamento contida neste trabalho necessita que o rotor seja representado numericamente. Para isso serão utilizadas as Equações de Lagrange, que são capazes de caracterizar sistemas dinâmicos utilizando quantidades escalares como energia potencial, energia cinética e trabalho virtual das forças não conservativas.

Para encontrar a equação de movimento de um rotor, aplicam-se os conceitos de dinâmica para determinar as expressões de energia cinética e de energia

potencial e trabalho virtual de cada elemento do rotor. Assim, os elementos básicos que serão considerados, seguindo a linha proposta por Lalanne e Ferraris (1990) são: o eixo, o disco e o mancal. Diferentes combinações destes três elementos podem representar a maioria dos rotores. Utilizando-se o conceito de elementos finitos é possível determinar as expressões de energia e trabalho para cada elemento.

### 2.1.1 Equações de Lagrange

A apreciação escalar baseada em energia e trabalho traz uma grande vantagem quanto à complexidade do problema, tornando-o muito mais simples para geometrias mais complexas. Além disso, a formulação das equações de movimento a partir das Equações de Lagrange dispensa completamente a consideração das forças restritivas de articulações e guias sem atrito, ou seja, as forças internas (MEIROVITCH, 1990).

As equações de movimento de um sistema podem ser formuladas por meio de diversos sistemas de coordenadas, mas para isso são necessárias  $n$  coordenadas independentes para descrever o movimento de um sistema de  $n$  graus de liberdade. Tais coordenadas independentes são chamadas coordenadas generalizadas  $q_j$ . O movimento da estrutura pode ser representado por mais do que  $n$  coordenadas. Nesse caso têm-se as coordenadas supérfluas, ou seja, coordenadas que podem ser representadas por expressões de restrição, que relacionam essa coordenada supérflua a uma coordenada generalizada.

Lagrange utiliza o princípio do trabalho virtual para formular as equações de movimento. Um deslocamento virtual é uma mudança infinitesimal da coordenada e respeitando as restrições do sistema analisado, o deslocamento pode ser realizado de qualquer maneira sem considerar o tempo  $t$ .

Considerando-se um sistema qualquer em equilíbrio, formado por  $N$  partículas e impondo deslocamentos virtuais infinitesimais  $\delta r_j$ , fisicamente possíveis, de maneira que o trabalho virtual  $\delta W$  realizado pelas forças  $F_j$  responsáveis pelos deslocamentos seja nulo, tem-se que

$$\delta W = \sum_j^N F_j \delta r_j = 0. \quad (1)$$

Para um sistema de  $n$  graus de liberdade em que o deslocamento  $r_j$  é expresso por  $n$  coordenadas generalizadas e o tempo  $t$ ,

$$r_j = r_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

o trabalho virtual do sistema, expresso em termos das coordenadas generalizadas é

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (3)$$

em que  $Q_i$  é definido como a soma

$$Q_i = \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i}. \quad (4)$$

O conceito de Lagrange e o princípio do trabalho virtual foram estendidos por D'Alembert para sistemas dinâmicos aplicando a segunda lei de Newton a  $i$ -ésima partícula de massa  $m_i$ , sendo as forças internas ou de restrição representadas por  $f_i$  tem-se

$$F_i - f_i = m_i \ddot{r}_i. \quad (5)$$

Aplicando o princípio do trabalho virtual em um sistema de  $n$  coordenadas generalizadas e utilizando a equação de energia cinética  $T$  de um sistema de partículas, obtém-se

$$\delta W_T = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k. \quad (6)$$

sendo  $\delta W_T$  o trabalho virtual dependente da energia cinética.

Em um sistema conservativo não há dissipação de energia no caminho realizado por uma partícula, em termos de coordenadas generalizadas e considerando-se o estado inicial com uma energia potencial nula, o trabalho em termos de energia potencial  $U$  é dado pela expressão

$$\delta W_U = - \sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (7)$$

sendo  $\delta W_U$  o trabalho virtual dependente da energia potencial.

A existência de forças não conservativas no sistema (ex.: forças externas e de atrito), em coordenadas generalizadas geram uma força generalizada  $\bar{Q}_k$ . O trabalho por ela realizado é expresso por

$$\delta W_{\bar{Q}} = \sum_k \bar{Q}_k \delta q_k. \quad (8)$$

Para um sistema não conservativo, a equação de Lagrange fica

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \bar{Q}_k \quad (9)$$

em que o Lagrangeano definido como  $L = T - U$  e  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$ .

Como demonstrado em Espíndola (1992), as equações de movimento de uma estrutura podem ser consideradas lineares quando o deslocamento das coordenadas generalizadas fica restrito à vizinhança do seu ponto de equilíbrio. O ponto de equilíbrio é denominado "0" (zero) e as derivadas são calculadas neste

ponto. Levando em conta que a mínima energia potencial ocorre na posição de equilíbrio, a sua derivada primeira pode ser considerada nula. A energia potencial no ponto de referência também pode ser considerada nula. A expressão de energia potencial para um sistema de  $n$  graus de liberdade em função de suas coordenadas generalizadas e expandida em séries de Taylor, pode ser simplificada para a Equação (10) quando os termos superiores da série de Taylor são desprezados.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_l} \right)_0 q_j q_l \quad (10)$$

Comparando-se a Equação (10) com a da energia potencial de um componente elástico de um grau de liberdade,  $U = \frac{1}{2} kx^2$ , define-se a rigidez generalizada  $k_{jl}$  como sendo

$$k_{jl} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_l} \right)_0. \quad (11)$$

De forma genérica é possível escrever a energia potencial elástica do sistema através da equação

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (12)$$

A energia cinética de um sistema com  $n$  graus de liberdade em que  $\mathbf{r}$  é a posição em função das coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ , a velocidade da  $i$ -ésima partícula é

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}. \quad (13)$$

A energia cinética é expressa de modo geral como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2. \quad (14)$$

Substituindo na Equação (13) a Equação (14) obtém-se para um sistema de  $N$  partículas em termos de coordenadas generalizadas a relação

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_l + 2 \frac{\partial r_i}{\partial t} \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \frac{\partial r_i}{\partial t} \right], \quad (15)$$

ou separando em três termos  $T = T_2 + T_1 + T_0$ . O primeiro termo  $T_2$  representa um sistema cujas restrições são independentes do tempo, ou seja, as derivadas em relação ao tempo são nulas e, considerando essa independência em relação ao tempo tem-se

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \dot{q}_j \dot{q}_l \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_l} \right). \quad (16)$$

Analogamente à rigidez generalizada pode-se agora definir a massa generalizada

$$m_{jl} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_l} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_l}, \quad (17)$$

e que de forma matricial pode ser representada como

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}. \quad (18)$$

A equação de Lagrange em sua forma mais geral é dada por (MEIROVITCH, 1990)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \wp}{\partial \dot{q}_j} = \bar{F}_j \quad (19)$$

sendo  $\bar{F}_j$  a força generalizada que atua na  $j$ -ésima coordenada generalizada,  $\wp$  representa as forças dissipativas e  $L$  vem da definição do lagrangeano  $L = T - U$ , em que  $T$  é a energia cinética e  $U$  é a energia potencial do sistema. As forças dissipativas surgem do amortecimento que os mancais inserem no modelo do sistema.

As equações gerais de movimento para um rotor serão encontradas utilizando as equações de Lagrange, através da energia cinética, energia potencial e trabalho virtual de forças externas.

### 2.1.2 Disco

A deformação do disco é pequena em relação à deformação do eixo, desta forma assume-se que o disco é um elemento rígido. O disco é caracterizado apenas pela energia cinética. A Figura 1 apresenta a geometria utilizada para representar um disco, sendo  $h$  a espessura,  $R$  o raio externo,  $r$  o raio interno e  $\rho_d$  a densidade.

A energia cinética de um disco é representada como sendo

$$T_d = \frac{1}{2} (M_d \dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{I}_d \boldsymbol{\omega}^2), \quad (20)$$

onde  $M_d$  é a massa do disco,  $\dot{\mathbf{r}}$  é a velocidade de translação do sistema de referência móvel em relação ao sistema inercial,  $\boldsymbol{\omega}$  o vetor de velocidades angulares e  $\mathbf{I}_d$  o vetor de inércias em cada uma das direções, referentes ao centro de massa  $C$ .



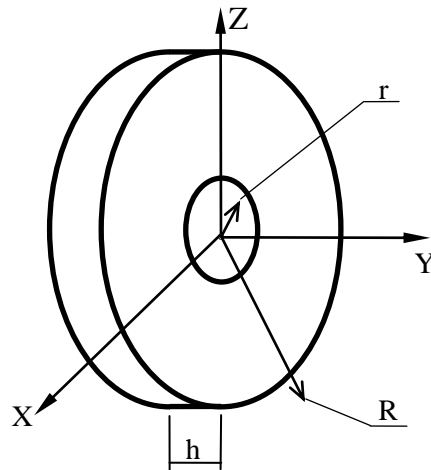


Figura 1 - Representação geométrica de um disco utilizado no modelo numérico.

Fonte: Autoria Própria<sup>1</sup>

A massa do disco é calculada como

$$M_d = \pi(R^2 - r^2)h\rho_d \quad (21)$$

e sua inércia é representada pela matriz

$$\mathbf{I}_d = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

em que, segundo Norton (2004)

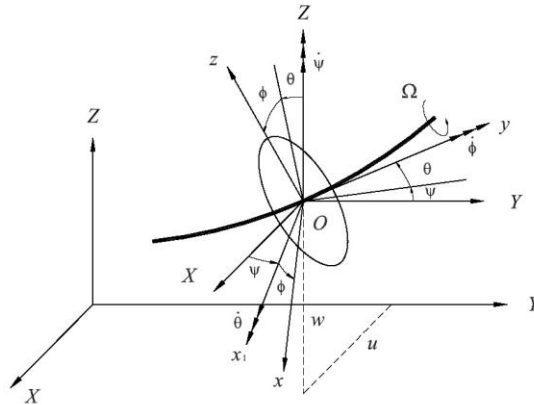
$$\begin{cases} I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12}(3r^2 + 3R^2 + h^2) \\ I_{dy} = \frac{M_d}{2}(r^2 + R^2) \end{cases} \quad (23)$$

A obtenção da energia cinética do disco ocorre fixando-se um ponto de referência arbitrário no corpo do disco, isso é possível por se tratar de um corpo

---

<sup>1</sup> Todas as figuras, tabelas e quadros presentes neste documento que não possuem indicação de fonte são de autoria do autor.

rígido. Define-se então um sistema de coordenadas inercial  $\mathbf{R}_0(X, Y, Z)$  com origem coincidente com o sistema fixo no disco  $\mathbf{R}^i = (x^i, y^i, z^i)$ , que tem origem no centro do disco.



**Figura 2 - Sistemas de coordenadas utilizados para um disco.**  
**Fonte :Lalanne e Ferraris (1990)**

As coordenadas  $X, Y, Z$  e  $x^i, y^i, z^i$  são relacionadas por três ângulos  $\psi, \theta$  e  $\phi$  e o vetor de posição global de um ponto qualquer sobre o corpo rígido pode ser escrito por

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^i, \quad (24)$$

em que  $\mathbf{R}^i$  é o vetor de posição global da origem do sistema de coordenadas fixada no corpo  $(x^i, y^i, z^i)$ ,  $\mathbf{A}^i$  é a matriz de transformação que define a orientação do corpo no sistema de coordenadas global  $(XYZ)$  e  $\bar{\mathbf{u}}^i$  é o vetor de posição de um ponto arbitrário em relação à origem do sistema de coordenadas fixo no corpo.

A matriz de transformação  $\mathbf{A}^i$  é uma matriz 3x3 e formada por

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (25)$$

A primeira matriz representa a rotação do sistema  $x^i y^i z^i$  em torno do eixo  $Z$  por um ângulo  $\psi$ , a segunda matriz rotaciona de um ângulo  $\theta$  o sistema de coordenadas  $x^i y^i z^i$  em torno do novo eixo  $x$ . Para completar a rotação, a terceira matriz realiza a rotação do sistema de coordenadas  $x^i y^i z^i$  em torno do novo eixo  $y$  por um ângulo  $\phi$ . A transformação de coordenadas pode ser finalmente obtida por  $\mathbf{R}^i(x^i, y^i, z^i) = \mathbf{A}^i \mathbf{R}_0(X, Y, Z)$ .

Através da matriz de transformação, segundo Lalanne e Ferraris (1990), é possível obter o vetor velocidade angular  $\omega$ , em torno do eixo  $Y$ .

$$\omega = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (26)$$

Desta maneira, considerando que o disco é simétrico em relação ao eixo de rotação ( $I_{dx} = I_{dz}$ ) e que a velocidade angular é constante, obtém-se (DOUBRAWA FILHO, 2008)

$$T_d = \frac{1}{2} (M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + I_{dx} (\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_{dy} (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi} \sin^2 \theta + 2\dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta)). \quad (27)$$

Considerando que os ângulos  $\theta$  e  $\psi$  são pequenos e que a velocidade angular  $\dot{\phi} = \Omega$  é constante e desprezando o termo de segunda ordem  $\dot{\psi} \sin^2 \theta$  obtém-se

$$T_d = \frac{1}{2} (M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + I_{dx} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega \dot{\psi} \theta)), \quad (28)$$

em que termo  $I_{dy}(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta)$  representa a soma da energia cinética e o efeito giroscópico (efeito de Coriolis) do disco girando a um velocidade angular  $\Omega$ , respectivamente. Como o disco é considerado rígido, não há energia potencial a ele associada.

Para formular o rotor utilizando a técnica de elementos finitos, considera-se que cada nó possui quatro graus de liberdade. Cada nó  $i$  possui então um vetor de deslocamento nodal na forma

$$\mathbf{q}_i = [u_i, w_i, \theta_i, \psi_i]^T, \quad (29)$$

em que  $u_i$  e  $w_i$  são deslocamentos na direção  $X$  e  $Z$ , respectivamente e  $\theta_i$  e  $\psi_i$  são rotações ao redor dos eixos  $X$  e  $Z$ , respectivamente.

Considera-se que o disco influencia apenas o nó em que este está posicionado. Aplicando a equação de Lagrange na equação de energia cinética do disco, obtém-se, segundo Lalanne e Ferraris (1990), as matrizes de contribuição de massa e giroscópica são respectivamente

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dx} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{G}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

### 2.1.3 Eixo

O eixo é modelado com uma seção transversal circular  $S$  e momento de segunda ordem de área  $I$  constantes em um segmento finito de comprimento  $L$ , material isotrópico com massa específica  $\rho$ , módulo de elasticidade  $E$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ . A energia cinética  $T_e$  pode ser obtida por extensão da equação de energia cinética do disco através da integração ao longo do comprimento  $L$  como

$$T_e = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy. \quad (31)$$

Considerando que o momento de segunda ordem de área  $I$  da seção  $S$  pode ser obtido pela expressão

$$I_x = \int_S x^2 dS \quad \text{e} \quad I_z = \int_S z^2 dS, \quad (32)$$

e que o eixo possui simetria axial, segundo Lalanne e Ferraris (1990) demonstra-se que a energia potencial  $U_e$  integrada sobre a seção  $S$  ao longo do comprimento  $L$  do eixo é dada por

$$U_e = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy. \quad (33)$$

No modelo apresentado, as cargas axiais que podem estar presentes no eixo são desconsideradas.

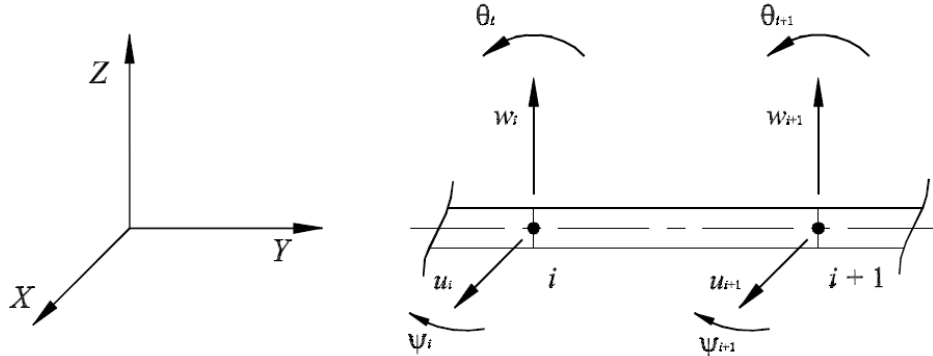
Na formulação mediante o uso da técnica de elementos finitos, divide-se o eixo em  $n$  segmentos de comprimento  $\Delta y$  de seção constante. Cada nó possui quatro graus de liberdade.

Sendo os deslocamentos  $u$  e  $w$  pequenos, podem ser estabelecidas relações entre deslocamentos lineares e angulares conforme

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (34)$$

No método dos elementos finitos, cada elemento é, em sua essência, um modelo de um pequeno sólido deformável, no qual alguns graus de liberdade

substituem os infinitos graus de liberdade do sistema contínuo. A Figura 3 apresenta um elemento de um eixo e seus graus de liberdade.



**Figura 3 - Representação de um elemento com os respectivos graus de liberdade localizados nos nós.**

Fonte: Farias e Ribas, 2005.

Em cada elemento o deslocamento das coordenadas  $\mathbf{u} = [u_i \ u_{i+1}]^T$  e  $\mathbf{w} = [w_i \ w_{i+1}]^T$  é aproximado por uma combinação linear de funções de forma  $\mathbf{N}(y)$  e deslocamentos nodais  $\gamma_u$  e  $\gamma_w$ , respectivamente nas direções X e Z,

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_1 \gamma_u \text{ e } \mathbf{w} = \mathbf{N}_2 \gamma_w. \quad (35)$$

As funções de forma  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  são matrizes de uma linha cujos elementos variam de acordo com o modelo de viga utilizado. Como estas funções não dependem da variável temporal, as velocidades podem ser expressas por

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}}. \quad (36)$$

Escreve-se a energia cinética  $T$  com sendo

$$T = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^T \mathbf{M} \dot{\gamma}, \quad (37)$$

em que a matriz de massa é obtida através da expressão

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV. \quad (38)$$

Quando as funções de forma são substituídas adequadamente na equação de energia cinética do eixo, obtém-se a expressão

$$T_e = T_{em} + T_{es} + T_{eg} + \rho l L \Omega^2, \quad (39)$$

em que:

$$\begin{aligned} T_{em} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_u^T \mathbf{M}_1 \dot{\gamma}_u + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_w^T \mathbf{M}_2 \dot{\gamma}_w, \\ T_{es} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}_u^T \mathbf{M}_3 \dot{\gamma}_u + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_w^T \mathbf{M}_4 \dot{\gamma}_w, \\ T_{eg} &= \Omega \dot{\gamma}_u^T \mathbf{M}_5 \dot{\gamma}_w. \end{aligned} \quad (40)$$

As expressões foram desenvolvidas por Lalanne e Ferraris (1990) e as matrizes  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$  são matrizes clássicas de massa,  $\mathbf{M}_3$  e  $\mathbf{M}_4$  representam a inércia rotatória e o efeito giroscópico é representado por  $\mathbf{M}_5$ . Ao se aplicar as Equações de Lagrange na Equação (39) obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_e}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial T_e}{\partial \gamma} = (\mathbf{M} + \mathbf{M}_s) \ddot{\gamma} + \mathbf{G} \dot{\gamma}. \quad (41)$$

As matrizes obtidas dessa maneira são dadas por

$$\mathbf{M} = \frac{\rho SL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$\mathbf{M}_s = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

e

$$\mathbf{G} = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

A energia potencial proveniente da deformação do eixo pode ser obtida de modo análogo a partir da equação de energia de deformação do eixo.

$$U_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_u^T \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\gamma}_u + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_w^T \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\gamma}_w, \quad (45)$$



em que, segundo Lalanne e Ferraris (1990),  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são as matrizes clássicas de rigidez. É comumente introduzido um fator de correção que leva em conta o cisalhamento transversal da viga durante a flexão. O fator de correção é definido como

$$a = \frac{12EI}{G_s SL^2}, \quad (46)$$

em que  $G_s$  é o módulo de cisalhamento de um material.

Quando a equação de Lagrange é aplicada na energia potencial, representada pela Equação (45), para um segmento do eixo obtém-se

$$\frac{\partial U_e}{\partial \gamma} = \mathbf{K}_c \gamma. \quad (47)$$

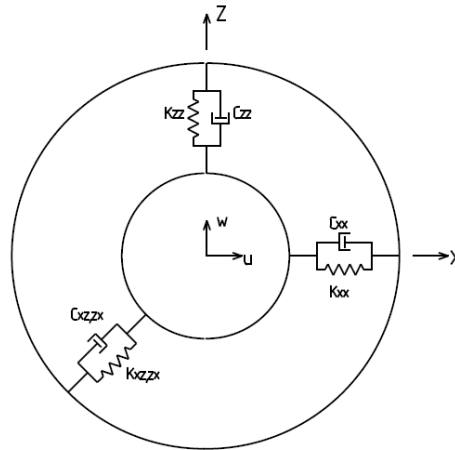
A matriz de rigidez que se obtém é

$$\mathbf{K}_c = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

#### 2.1.4 Mancais

Para modelar a contribuição dos mancais são consideradas somente as forças devido a deslocamentos dos nós. Os coeficientes de rigidez e amortecimento são conhecidos e podem ser determinados através de aplicativos e dados fornecidos pelos fabricantes dos mancais. Mancais hidrodinâmicos possuem parâmetros dependentes das cargas radiais, do lubrificante, da folga e da rotação, entretanto, no

presente trabalho serão considerados mancais com parâmetros constantes como hipótese. Além das forças que surgem na mesma direção do deslocamento, o modelo utilizado apresenta termos cruzados para amortecimento viscoso e rigidez, isto é, quando um deslocamento ocorre numa direção, surge uma força na direção perpendicular. A Figura 4 esquematiza o tipo de mancal utilizado.



**Figura 4 - Representação das componentes de rigidez e amortecimento de um mancal.**

**Fonte: Doubrawa Filho, 2008.**

A contribuição dos mancais ao modelo é encontrada através do trabalho virtual das forças que atuam sobre o eixo e é dada pela relação

$$\delta W = -kr\delta r - c\dot{r}\delta r, \quad (49)$$

sendo

$$\begin{aligned} kr\delta r &= k_{xx}u\delta u + k_{xz}w\delta u + k_{zx}u\delta w + k_{zz}w\delta w, \\ c\dot{r}\delta r &= c_{xx}\dot{u}\delta u + c_{xz}\dot{w}\delta u + c_{zx}\dot{u}\delta w + c_{zz}\dot{w}\delta w, \end{aligned} \quad (50)$$

que podem ser matricialmente apresentadas como

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}. \quad (51)$$

A formulação por elementos finitos aqui apresentada para os mancais despreza possíveis reações à momentos fletores e rotações, desta maneira é suposta nula a rigidez do mancal para qualquer rotação  $\theta$  ou  $\psi$ . Em decorrência disso, as forças  $F_\theta$  e  $F_\psi$  também são nulas, obtendo-se a equação

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}. \quad (52)$$

### 2.1.5 Desbalanceamento

Quando se trata de sistemas rotativos, o desbalanceamento residual é uma excitação que estará sempre presente, em maior ou menor grau. A força de desbalanceamento depende da velocidade de rotação  $\Omega$  e é dada pela relação (LALANNE e FERRARIS, 1990)

$$F(\Omega) = m r_e \Omega^2, \quad (53)$$

em que  $m r_e$  representa diretamente o desbalanceamento residual, cuja unidade normalmente empregada é o grama-milímetro ( $1(g.mm) = 10^{-6}(kg.m)$ ).

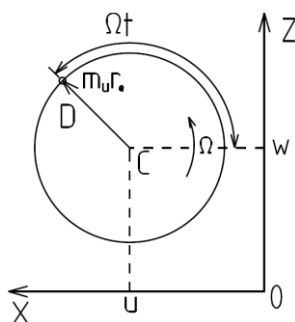


Figura 5 - Representação da posição e velocidade de um desbalanceamento D.

Fonte: Doubrawa Filho, 2008.

A posição do desbalanceamento  $\mathbf{D}$  em coordenadas generalizadas, para uma posição  $y$  qualquer e constante, é representada como

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} u + r_e \sin(\Omega t) \\ \text{constante} \\ w + r_e \cos(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (54)$$

e a velocidade através de

$$\dot{\mathbf{D}} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + r_e \Omega \cos(\Omega t) \\ 0 \\ \dot{w} - r_e \Omega \sin(\Omega t) \end{Bmatrix}. \quad (55)$$

A energia cinética de uma massa residual  $m_u$ , segundo Lalanne e Ferraris (1990) pode ser aproximada por

$$T_u \cong m_u r_2 \Omega (\dot{q}_1 \cos(\Omega t) - \dot{q}_2 \sin(\Omega t)). \quad (56)$$

Aplicando a equação de Lagrange na expressão de energia cinética de uma massa residual posicionada no eixo  $z$  em  $t = 0$ , de acordo com Lalanne e Ferraris (1990), obtém-se

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_u}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial T_u}{\partial \gamma} = -(m_u r) \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \quad (57)$$

A transformada de Fourier, aplicada sobre o vetor força  $\mathbf{F}(\Omega)$  em que está inserida uma excitação do tipo desbalanceamento nas coordenadas  $u$  e  $w$  correspondentes a  $i$ -ésima coordenada generalizada excitada tem a forma

$$\mathbf{F}(\Omega) \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dots \\ u \\ w \\ \theta \\ \psi \\ \dots \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dots \\ i(m_u r)\Omega^2 \\ -(m_u r)\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{Bmatrix}. \quad (58)$$

A posição angular (fase) dos vetores de força e de resposta são parâmetros vitais para o procedimento de balanceamento. Em aplicações práticas, a fase da resposta é medida em relação a um transdutor de referência, comumente chamado de *keyphasor*. O sinal de impulso, um por giro, é recebido simultaneamente com o sinal do transdutor de medição de deslocamento lateral do rotor. Este impulso é utilizado como referência e marca a fase zero do rotor (MUSZYNSKA, 2005).

A fase da força de desbalanceamento  $\delta$  é medida em graus ou radianos a partir de uma referência de ângulo nulo marcada na circunferência do rotor. A fase da resposta  $\beta$ , também medida em graus ou radianos, representa o ângulo entre o vetor da força de desbalanceamento e o vetor da resposta somada à fase original do vetor da força  $\delta$ . A resposta está sempre atrasada em relação à força de desbalanceamento, pois a fase move-se em direção contrária à rotação.

Considera-se que a amplitude e a fase tem mesma importância em balanceamento e é possível representar essas duas quantidades em um único valor através do formalismo de números complexos. A força de desbalanceamento e a resposta podem ser então escritas respectivamente de maneira simples como:

$$Fe^{j(\Omega t + \delta)} = mr\Omega^2 e^{j(\Omega t + \delta)} \quad (59)$$

e

$$Be^{j(\Omega t + \beta)} \quad (60)$$

Se for eliminada a função periódica dependente do tempo  $e^{j\Omega t}$ , os vetores representados na Figura 6 são encontrados

$$\vec{F} = Fe^{j\delta} = mr\Omega^2 e^{j\delta} \quad (61)$$

e

$$\vec{B} = Be^{j\beta} \quad (62)$$

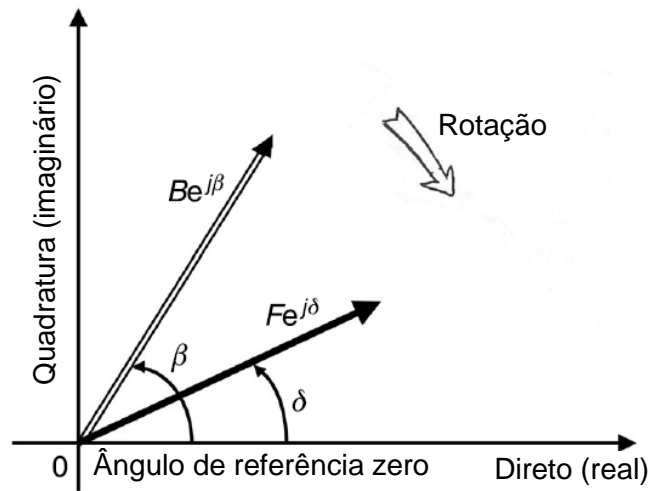


Figura 6 - Vetor de força de desbalanceamento e resposta fundamental do rotor.

Fonte: Adaptado de Muszynska, 2005.

Substituindo todos os termos desenvolvidos de energia cinética e potencial e de trabalho das forças conservativas e não conservativas na Equação (19), obtém-se o conjunto de equações que descrevem o movimento de um sistema linear com  $n$  graus de liberdade (MEIROVITCH, 1990 e DOUBRAWA FILHO, 2008)

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij}\ddot{q}_j + (c_{ij} + g_{ij})\dot{q}_j + k_{ij}q_j] = \bar{F}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (63)$$

ou em sua forma matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega_{rpm})]\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \bar{\mathbf{F}} \quad (64)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de inércia,  $\mathbf{C}$  representa a matriz de amortecimento viscoso,  $\mathbf{G}(\Omega_{rpm})$  é a matriz giroscópica e a matriz de rigidez é representada por  $\mathbf{K}$ . A matriz

giroscópica é uma matriz antissimétrica e é função da velocidade de rotação do eixo. As forças generalizadas são representadas por  $\bar{\mathbf{F}}$ , que é o vetor de excitação,  $\mathbf{q}$  é o vetor de deslocamentos generalizados,  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$  o vetor de velocidades generalizadas e  $\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt}$  o vetor de acelerações generalizadas.

### 2.1.6 Parâmetros modais e resposta numérica

O vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = \{u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, \dots, u_N, w_N, \theta_N, \psi_N\}^T$  é formado pelas translações  $u$  e  $w$  e pelas rotações  $\theta$  e  $\psi$  em cada nó do modelo, formando um sistema de  $n = 4 \times N$  graus de liberdade ou coordenadas generalizadas, em que  $N$  é o número de nós no sistema. Cada grau de liberdade  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$  ou  $\psi$  corresponde a uma coordenada generalizada  $q_j$ .

Verifica-se que quando a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  é obtida de um modelo não proporcional, ou seja, um modelo em que ela não é proporcional à soma das matrizes de inércia e rigidez, da forma  $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ , o equacionamento do problema de autovalores leva a um sistema de  $2n$  equações que precisa ser resolvido em um espaço  $2n$  dimensional, denominado de espaço de estado e definido por Ewins (2000) como

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix}. \quad (65)$$

Inserindo a Equação (65) na Equação (64) e reescrevendo-a no domínio da frequência obtém-se

$$(i\Omega[(\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega_{rpm})) \quad \mathbf{M}] \quad [\mathbf{K} \quad \mathbf{0}])\mathbf{Y}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega). \quad (66)$$

Para criar o espaço  $2n$  dimensional define-se a equação auxiliar

$$(i\Omega[\mathbf{M} \quad \mathbf{0}] + [\mathbf{0} \quad -\mathbf{M}])\mathbf{Y}(\Omega) = \mathbf{0}. \quad (67)$$

Combinando as Equações (66) e (67) obtém-se o problema  $2n$  dimensional

$$\left( i\Omega \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega_{rpm}) & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \right) \mathbf{Y}(\Omega) = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\Omega) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (68)$$

que pode ser escrito em sua forma simplificada

$$(i\Omega \mathbf{A}(\Omega_{rpm}) + \mathbf{B}) \mathbf{Y}(\Omega) = \mathbf{N}(\Omega). \quad (69)$$

A Equação (69) pode ser solucionada para cada valor de  $\Omega_{rpm}$  como um problema de autovalores generalizado do tipo

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\theta} = \lambda \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}, \quad (70)$$

e como a matriz giroscópica  $\mathbf{G}(\Omega_{rpm})$  é antissimétrica, o problema adjunto também deve ser definido

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} = \lambda \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}. \quad (71)$$

As matrizes de autovalores  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\boldsymbol{\psi}$  formam um base ortogonal e podem ser utilizadas para diagonalizar as matrizes no espaço de estado, de forma que

$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & a_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}. \quad (72)$$

Se dividirmos cada  $j$ -ésima coluna de  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\boldsymbol{\psi}$  por  $\sqrt{a_j}$ , obtém-se as matrizes de autovalores ortonormalizados  $\boldsymbol{\Theta}$  e  $\boldsymbol{\Psi}$ . De forma que



$$\Psi^T \mathbf{A} \Theta = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & 1 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} = \mathbf{I}, \quad (73)$$

e

$$\Psi^T \mathbf{B} \Theta = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \lambda_j & \\ & & \backslash \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}. \quad (74)$$

Ou seja, a matriz  $\mathbf{A}$  diagonalizada pelos autovalores normalizados resulta na matriz identidade  $\mathbf{I}$  e a matriz  $\mathbf{B}$  resulta na matriz espectral  $\mathbf{\Lambda}$ , cuja diagonal possui as frequências naturais complexas do sistema.

A solução apresentada permite obter as frequências naturais do sistema  $\Omega_j$  para cada rotação  $\Omega_{rpm}$  em que o sistema rotativo opera. As frequências  $\lambda_j$  são complexas, dadas em pares conjugados de tal forma que

$$\Omega_j^2 = \lambda_j \lambda_j^*, \quad (75)$$

em que o símbolo  $*$  representa o complexo conjugado.

O desbalanceamento é um tipo de excitação síncrona, de modo que  $\Omega_{rpm} = \Omega$  e a expressão para a resposta do sistema pode ser obtida fazendo a transformação de variáveis

$$\mathbf{Y}(\Omega) = \Theta \mathbf{P}(\Omega), \quad (76)$$

que aplicada na Equação (69) e pré-multiplicando por  $\Psi^T$ , obtém-se no espaço de estado o seguinte resultado

$$i\Omega[\Psi^T \mathbf{A}\Theta + \Psi^T \mathbf{B}\Theta]\mathbf{P}(\Omega) = \Psi^T \mathbf{N}(\Omega). \quad (77)$$

Substituindo as Equações (73) e (74) na Equação (77) resulta em

$$\mathbf{P}(\Omega) = [i\Omega(\mathbf{I} + \Lambda)]^{-1} \Psi^T \mathbf{N}(\Omega). \quad (78)$$

Aplicando a transformação de variáveis da Equação (76), a Equação (78) se torna

$$\mathbf{Y}(\Omega) = \Theta [i\Omega(\mathbf{I} + \Lambda)]^{-1} \Psi^T \mathbf{N}(\Omega). \quad (79)$$

A matriz de receptância no espaço de estado, que define a relação entre excitação e resposta, é definida como

$$\mathbf{H}(\Omega) = \Theta [i\Omega(\mathbf{I} + \Lambda)]^{-1} \Psi^T. \quad (80)$$

A inversão da matriz de receptância é simples, já que a matriz identidade  $\mathbf{I}$  e a matriz espectral  $\Lambda$  são diagonais. A resposta ao desbalanceamento será obtida aplicando no vetor de força  $\mathbf{N}(\Omega)$ , uma excitação proporcional ao quadrado da rotação (BAVASTRI *et al.*, 2010)

$$\mathbf{N}(\Omega) = \begin{Bmatrix} \dots \\ u \\ w \\ \theta \\ \psi \\ \dots \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dots \\ i(md)\Omega^2 \cdot e^{i\delta} \\ -(md)\Omega^2 \cdot e^{i\delta} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{Bmatrix}. \quad (81)$$

A diferença entre a Equação (58) e a Equação (81) é a inserção da fase  $\delta$  que existe entre a posição da resposta e a marca de referência na circunferência do eixo, mostrado em detalhes na Equação (62).

## 2.2 Identificação do desbalanceamento

Para realizar a identificação do desbalanceamento em um rotor físico é necessário obter, além da resposta numérica, a resposta medida experimentalmente nesse rotor. A identificação do desbalanceamento é executada através da comparação numérica das respostas experimental e numérica e através de uma rotina de otimização acionada para modificar a resposta numérica, de tal forma que as duas respostas se aproximem da melhor forma possível.

### 2.2.1 Obtenção dos dados experimentais

A medição da resposta pode ser realizada com diferentes tipos de sensores. Normalmente são utilizados sensores de proximidade, mas também são empregados acelerômetros e com menor frequência, velocímetros.

Os sensores de proximidade determinam a distância entre o sensor e a superfície para o qual está apontado através de um campo magnético gerado pelo sensor. A variação da distância entre a superfície e o sensor causa uma variação na diferença de potencial necessária para manter o campo magnético.

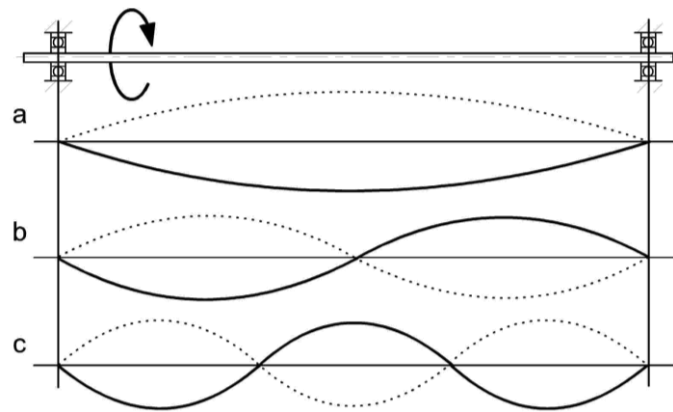
Os acelerômetros são basicamente constituídos de uma massa interna ligada à carcaça por um elemento de mola e amortecedor. Quando o sensor é conectado a uma superfície para medir vibrações, a aceleração da superfície é obtida através do deslocamento relativo entre a massa e a carcaça.

Os sinais obtidos em diferença de potencial elétrico são transformados em valores com significado mecânico através de uma constante também chamada sensibilidade do sensor.

A resposta medida pelos sensores, para identificação de desbalanceamento, deve ser obtida em relação a uma fase. Para isso deve-se utilizar um *keyphasor*. Esse é um tipo de sensor que, a partir de um ou mais marcações na superfície do eixo, marca a posição angular do eixo. Um *keyphasor* pode ser ótico, de proximidade, entre outros. O sensor do tipo ótico utiliza uma fita reflexiva colada num pequeno trecho da faixa de medição, refletindo o sinal eletromagnético quando esta se alinha com o sensor. O sensor de proximidade necessita que o eixo tenha uma modificação geométrica na faixa de medição, normalmente um rebaixo.

A fase de vibração do rotor é de suma importância para que se possam comparar os modelos numérico e físico, de maneira adequada e, depois do desbalanceamento identificado, se possa posicionar adequadamente a massa de correção.

Deve-se posicionar o sensor de medição de vibração corretamente, evitando os locais em que o modo de vibrar do rotor forma um nó. Nesse ponto não existe deslocamento, velocidade ou aceleração. A Figura 7 mostra um modo de vibrar de um rotor simples, claramente se verifica os locais em que não é possível obter valores para a amplitude de vibração do eixo.



**Figura 7 - Modos de vibrar de um eixo se rotor; a: primeiro modo, b: segundo modo e c: terceiro modo.**

Fonte: GUNT Equipment for Engineering Education.

Normalmente posicionam-se os sensores próximos aos mancais, de modo que seja garantida a obtenção da amplitude de vibração do rotor.

A medição ainda pode ser realizada em diferentes rotações, de modo que diferentes valores são obtidos. As rotações de medição podem ultrapassar ou não as primeiras rotações críticas do rotor, dependendo da faixa de rotações em que o rotor deverá atuar.

### **2.2.2 Metodologia de identificação de desbalanceamento**

A identificação da excitação de desbalanceamento realizada neste trabalho exige o conhecimento do modelo dinâmico do rotor e das respostas do mesmo. As respostas do modelo numérico são encontradas com a teoria de dinâmica de rotores

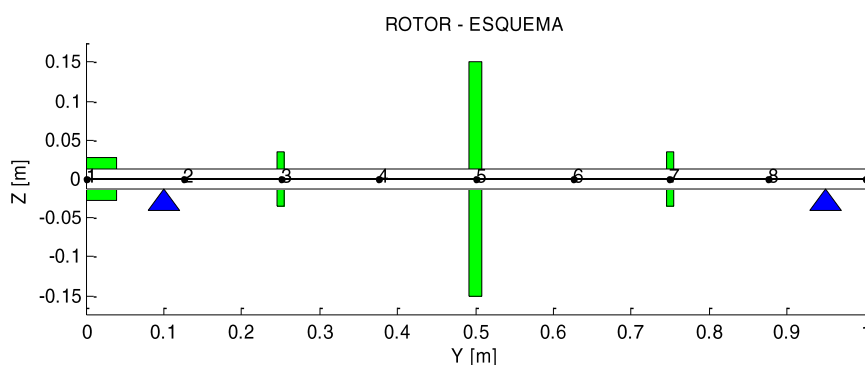
apresentada por Lalanne e Ferraris (1990) através dos parâmetros modais (matrizes  $\Theta$ ,  $\Psi$  e  $\Lambda$ ) que representam o rotor (BAVASTRI *et al.*, 2010). A obtenção dos parâmetros modais está apresentada na Seção 2.1.6. A Figura 8 apresenta um exemplo de uma bancada de ensaios.



**Figura 8 - Exemplo de bancada com rotor.**

Fonte: Fotografia tirada no extinto Laboratório de Vibrações da UTFPR – Câmpus Curitiba.

A Figura 9 apresenta um rotor da Figura 8 modelado numericamente no programa computacional elaborado anteriormente, em que Z é o eixo de coordenadas vertical na direção radial do eixo e Y é o eixo de coordenadas horizontal na direção axial do eixo. O eixo de coordenadas X, perpendicular ao plano Y-Z, não está representado.



**Figura 9 - Exemplo de geometria de um rotor.**

Fonte: Imagem fornecida pela interface em Matlab do Rotordin.

As respostas obtidas do rotor físico devem ser inseridas no arquivo de entrada da rotina que identifica a excitação de desbalanceamento através da comparação

das respostas numérica e experimental do rotor. Propõe-se a utilização de técnicas de otimização não-linear, sendo então necessário definir inicialmente uma função objetivo, associada a uma medida de erro a ser minimizada, que mapeia um espaço do  $\mathfrak{R}^n$  no espaço  $\mathfrak{R}$ ,

$$f(\mathbf{x}_{n \times 1}): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}, \quad (82)$$

sendo  $n$ , neste caso, o número de variáveis de projeto e  $\mathbf{x}_{n \times 1}$  o vetor das variáveis de projeto ou vetor projeto.

Uma função objetivo para medir o erro pode ser definida como a norma Euclidiana do vetor  $\mathbf{r}$  dado pelas diferenças entre as “ $l \cdot m$ ” respostas medidas experimentalmente,  $y_i^{\text{exp}}$ , e suas equivalentes “ $l \cdot m$ ” respostas obtidas numericamente,  $y_i^{\text{num}}$ . A resposta numérica é obtida para uma excitação de desbalanceamento, nos planos de balanceamento previamente escolhidos, utilizando a Equação (79). O número de respostas utilizadas provém da multiplicação das “ $l$ ” posições de resposta e as “ $m$ ” rotações requeridas para balanceamento.

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \bar{y}_1^{\text{num}} - y_1^{\text{exp}} \\ \vdots \\ \bar{y}_l^{\text{num}} - y_l^{\text{exp}} \end{array} \right\} \Omega_{rpm}^1 \\ \left. \begin{array}{l} \bar{y}_1^{\text{num}} - y_1^{\text{exp}} \\ \vdots \\ \bar{y}_l^{\text{num}} - y_l^{\text{exp}} \end{array} \right\} \Omega_{rpm}^2 \\ \vdots \\ \left. \begin{array}{l} \bar{y}_1^{\text{num}} - y_1^{\text{exp}} \\ \vdots \\ \bar{y}_l^{\text{num}} - y_l^{\text{exp}} \end{array} \right\} \Omega_{rpm}^m \end{array} \right. \quad (83)$$

A amplitude das respostas pode ser obtida em deslocamento do centro do eixo em relação ao equilíbrio, em velocidade e em aceleração. Como essa resposta é complexa, e aplicando a escala dB sobre a norma Euclidiana de  $\mathbf{r}$  para melhorar o

desempenho da rotina de otimização (DOUBRAWA FILHO, 2008), a função objetivo é dada por

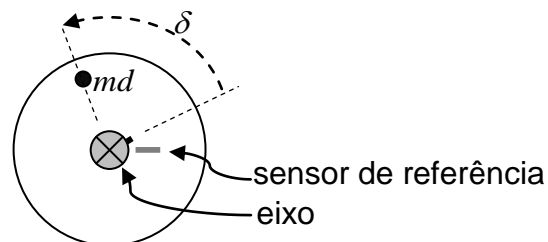
$$fobj = 20 \log_{10} \sqrt{\mathbf{r}^T (\mathbf{r}^*)}. \quad (84)$$

O vetor projeto  $\mathbf{x}$  é composto pelas massas de balanceamento multiplicadas pelo seu raio a partir do centro do eixo  $md_i$  e as posições angulares  $\delta_i$  dos  $n$  planos de balanceamento com relação à referência adotada

$$\mathbf{x} = [md_1, \delta_1, \dots, md_n, \delta_n]^T. \quad (85)$$

Inúmeras combinações de desbalanceamento são possíveis para uma mesma resposta. Adicionalmente pode-se definir a restrição do tipo  $md_i \geq 0$  para que o desbalanceamento se mantenha positivo e tenha sentido físico. Da mesma forma a posição angular pode ser restringida na faixa de 0 a  $2\pi$ .

Figura 10 apresenta o posicionamento da massa de desbalanceamento  $md$  defasado de um ângulo  $\delta$  em relação à referência no eixo e o sensor de referência para a medição.



**Figura 10 - Representação da massa de desbalanceamento em relação ao eixo.**

A Figura 11 apresenta um fluxograma com os passos a serem seguidos para a realização do balanceamento de rotores, utilizando a metodologia apresentada neste projeto de pesquisa.

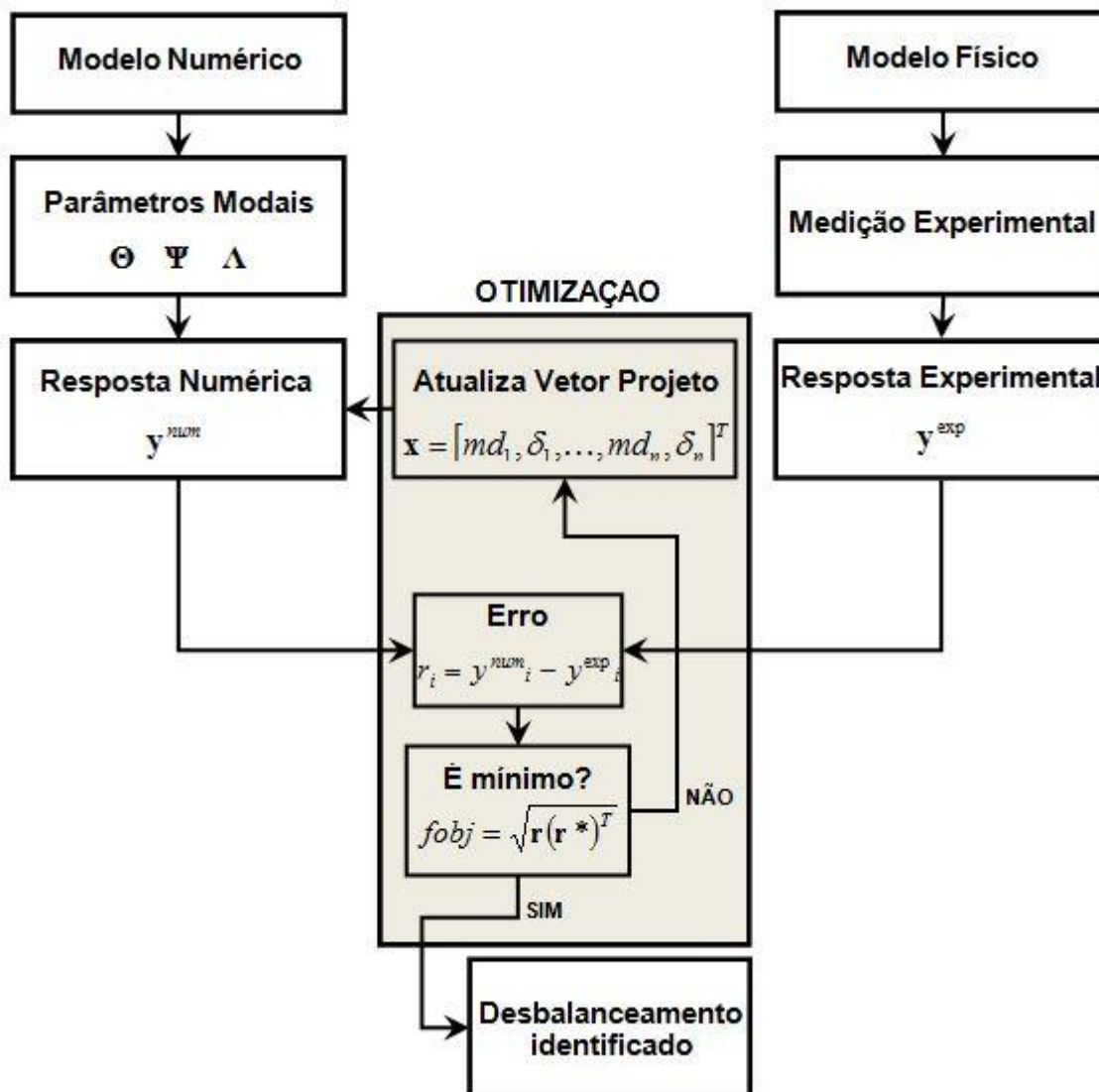


Figura 11 - Fluxograma de identificação de desbalanceamento.

### 2.3 Algoritmos de Otimização

Para identificar o desbalanceamento ou encontrar o desbalanceamento utiliza-se a combinação de um algoritmo evolucionário de otimização (algoritmos genéticos) com um método determinístico, o algoritmo Quase-Newton. A otimização ajusta sistematicamente a quantidade e a posição do desbalanceamento em cada plano através da função objetivo que é estabelecida pela norma Euclidiana do erro entre a resposta de vibração medida e simulada, expressa em dB, conforme a Equação (85).



### 2.3.1 Algoritmo Genético

Como o próprio nome já diz, algoritmos genéticos tomam emprestada a idéia da genética natural. Nesse tipo de algoritmo existem os indivíduos, ou genótipo de uma população. Os indivíduos são compostos de unidades que equivalem aos genes. Cada gene corresponde a uma variável do vetor projeto.

Algoritmos genéticos são iterativos e em cada iteração, ou também chamada geração, a população é modificada utilizando-se as melhores características da geração anterior (SARAMAGO, 2003). A técnica consiste em quatro estágios ou operações. A *evolução*, que mede a aptidão (valor da função objetivo) de cada indivíduo solução. A *seleção*, que, baseada na aptidão, escolhe os indivíduos da população que servirão de base para a próxima geração. A *reprodução* (“crossover”), que toma indivíduos e os combina para gerar novos indivíduos da próxima população e a *mutação*, que randomicamente modifica os indivíduos através de alterações nos genes. O número de indivíduos da população deve representar a complexidade do problema. O processo se repete até que atinja um número pré-determinado de gerações. A solução é representada pelo elemento mais apto (melhor valor da função objetivo) da última geração (DOUBRAWA FILHO, 2008).

O algoritmo genético aqui utilizado foi inicialmente escrito por Carrol (2004) e adaptado para a função objetivo apresentada na Equação (84). Para o algoritmo genético foram utilizadas 26 gerações com 100 indivíduos em cada uma delas. A probabilidade de cruzamento foi ajustada em 50% e a de mutação em 1%.

### 2.3.2 Algoritmo Quase-Newton

Para explicar o algoritmo Quase-Newton é necessário introduzir o método de Newton. Este se utiliza da expansão de segunda ordem em série de Taylor da função objetivo no ponto. Isto resulta em uma expressão quadrática para aproximar a função, que depende do gradiente (primeiras derivadas) e do Hessiano (segundas derivadas) da função no ponto. A idéia básica do método de Newton é achar, em um único passo, o mínimo da função quadrática ajustada no ponto. Entretanto, o mínimo da expressão quadrática ajustada não é precisamente o mínimo da função original, e o ponto necessita ser atualizado. Uma vez atualizado, ajusta-se sobre o novo ponto

uma nova quadrática e assim sucessivamente. Uma vez que um dado critério de convergência seja satisfeito, o mínimo da quadrática passa a ser o mínimo da função objetivo (BAZARAA e SHETTY, 1979).

O algoritmo Quase-Newton é baseado no método de Newton, entretanto utiliza uma aproximação do Hessiano (segundas derivadas) a partir apenas das primeiras derivadas da função. Sua direção de busca se localiza entre a direção do gradiente e a direção de Newton. O algoritmo Quase-Newton começa a procura geralmente na direção do gradiente e, no decorrer do processo de otimização, encontra-se entre a direção do gradiente e a direção de Newton.

Quando o método Quase-Newton é utilizado com restrições, é necessário penalizar a função objetivo de modo que as restrições não sejam violadas. Além disso, é importante determinar um critério de parada para a busca, um valor pequeno que expressa a diferença entre o valor que se busca com o algoritmo e o valor da função no último ponto encontrado.-

O algoritmo utilizado neste projeto de pesquisa pode ser encontrado em Press (1992). O parâmetro de penalização sobre a restrição violada foi 20 e a restrição violada elevada ao quadrado. O critério de parada adotado foi igual a  $1 \cdot 10^{-12}$ .

### 3 ROTINA DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo é apresentada a descrição da rotina utilizada para identificar o desbalanceamento presente em um rotor a partir da obtenção dos parâmetros modais (matrizes  $\Theta$ ,  $\Psi$  e  $\Lambda$ ). Estas matrizes são calculadas por um código computacional programado em linguagem Fortran de nome Rotordin e desenvolvido no Projeto PROMOVE 4931/06 FINEP/UTFPR/WEG. O código recebe todas as informações de geometria e material do rotor e, com a teoria apresentada no Capítulo 2, calcula os parâmetros modais necessários para a identificação do desbalanceamento.

O código de otimização foi escrito também em linguagem Fortran e inserido no programa Rotordin como uma rotina adicional para identificação de desbalanceamento pelo autor deste projeto de pesquisa. Foi necessário compreender como os parâmetros modais são calculados e armazenados e como estes parâmetros deveriam ser utilizados. A rotina de identificação de desbalanceamento faz uso de uma função objetivo que recebe os dados das respostas experimentais, o vetor projeto atualizado da iteração atual do algoritmo de otimização e a matriz de receptância.

Inicialmente ela monta o vetor de excitações utilizando a Equação (81). As respostas numéricas são calculadas multiplicando-se a matriz de receptância apresentada na Equação (80) pelo vetor de excitações, de acordo com a Equação (79). As respostas numérica e experimental são comparadas formando um vetor erro (Equação (83)) e o valor da função objetivo é calculada como sendo a norma do vetor erro, como é apresentado na Equação (84). O resultado da função objetivo é apresentado em decibéis. A Figura 12 apresenta o fluxograma para o cálculo da função objetivo.

Para a identificação, os dados experimentais devem ser inseridos e devidamente organizados em um arquivo de texto. Devem ser apresentadas as seguintes informações: número de planos de balanceamento, número de plano de medição e número de rotações de medição. Além disso, deve-se apresentar a posições e o valor das rotações de medição e o valor de amplitude de cada uma das medições.

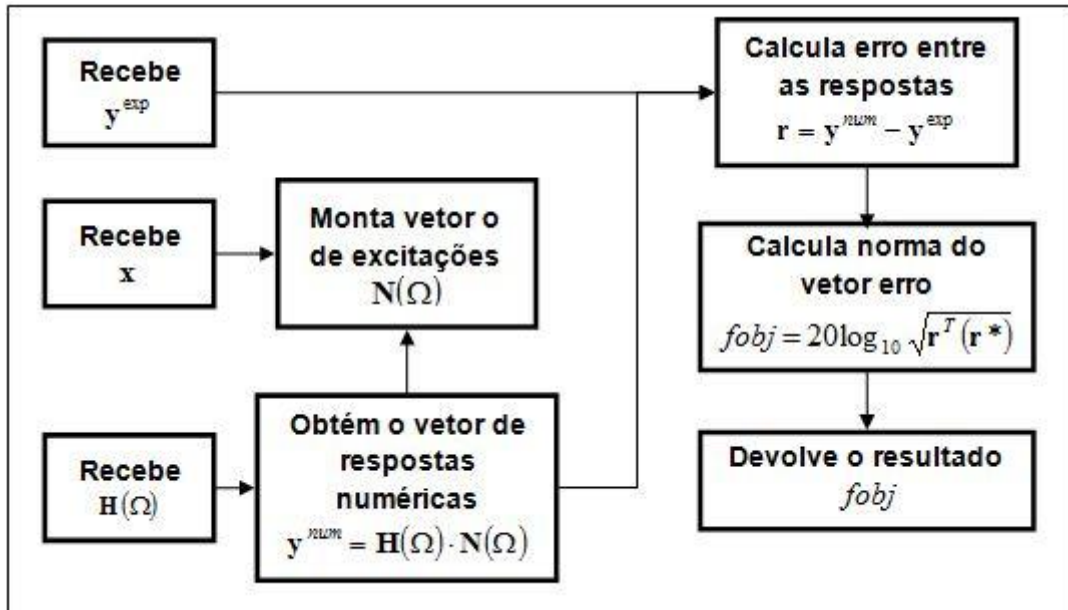


Figura 12 - Fluxograma da Função objetivo.

A rotina apresentada na Figura 13 recebe os parâmetros modais e calcula a matriz de receptância  $\mathbf{H}(\Omega)$ , como apresentado na Equação (80). Ela recebe também os dados experimentais para montar o vetor de respostas medidas. Estes dois conjuntos de informações devem ser fornecidos para o cálculo da função objetivo. O algoritmo Quase-Newton exige um vetor projeto inicial que é fornecido pelo algoritmo genético, que determina um vetor projeto inicial próximo do mínimo global. Os algoritmos atualizam o vetor projeto (Equação (85)) a cada iteração e com ele calculam um novo valor da função objetivo até que o resultado seja encontrado. O algoritmo genético tem como limite de iterações o número de gerações a ser calculado, escolhendo-se a cada geração o melhor indivíduo, que é caracterizado pelas variáveis do vetor projeto. O algoritmo Quase-Newton tem como limite um número máximo de iterações ou a tolerância admitida para o projeto, que é a diferença entre a última iteração e a iteração anterior.

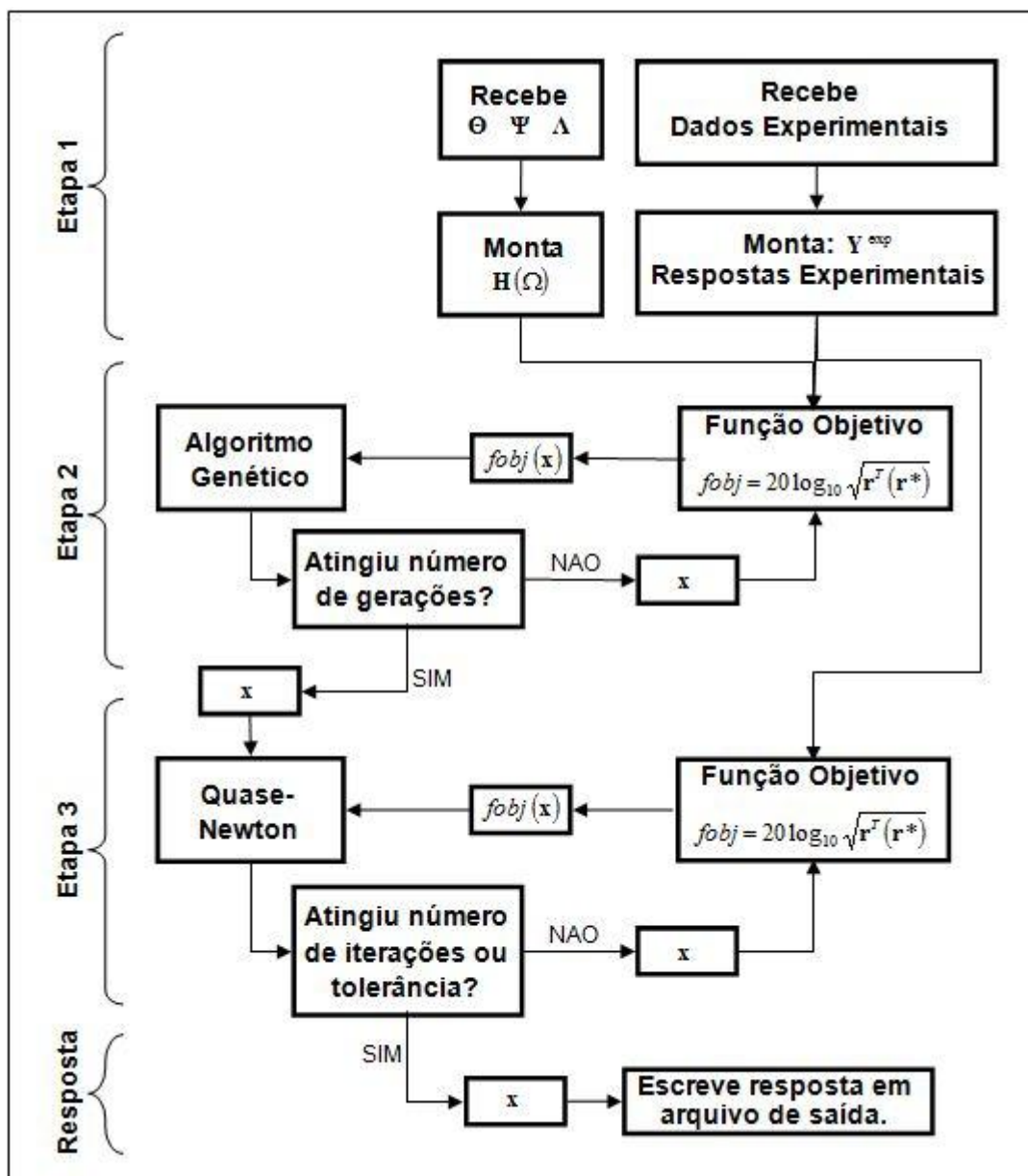


Figura 13 - Fluxograma da rotina de identificação de desbalanceamento.

## 4 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Com o intuito de verificar e validar o código de identificação de balanceamento adicionado ao programa Rotordin já existente foi necessária a realização de testes numéricos e experimentais.

### 4.1 Verificação da Forma da Função Objetivo

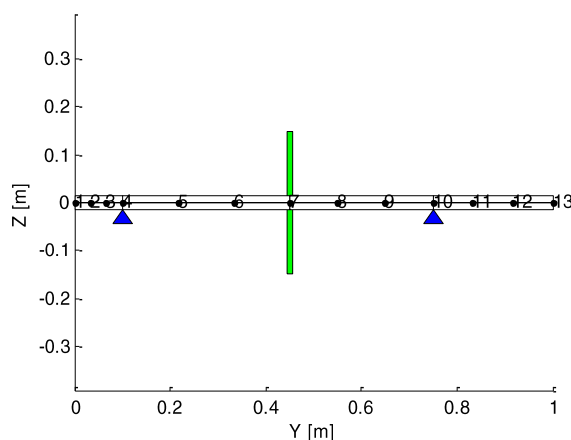
Inicialmente foram realizados testes numéricos para verificar o formato da função objetivo e o comportamento dela quando se utilizam diferentes números de dados de entrada. Foi criado um modelo numérico com desbalanceamento conhecido de modo que a resposta ótima do algoritmo de otimização fosse conhecida.

A geometria utilizada para esse estudo está apresentada na Tabela 1.

**Tabela 1 - Dados da geometria do caso 1.**

	Número	Posição [mm]	Comprimento [mm]	Diâmetro [mm]	Material
Eixo	1	0	1000	30	Aço
Disco	1	450	10	300	Alumínio
	Número	Posição [mm]	Rigidez [N/m]	Amortecimento [Ns/m]	Massa [kg]
Mancal	2	100	1,00E+08	10	2
		750	1,00E+08	10	2

A Figura 14 representa o rotor utilizado no estudo da forma da função objetivo.



**Figura 14 - Geometria e discretização do eixo para realizar a simulação numérica da forma da função objetivo.**

A função objetivo foi estudada variando-se o número de rotações para uma determinada posição de medição de resposta. Posteriormente, para uma determinada rotação de medição, diferentes pontos de medição de resposta foram analisados.

O formato da função objetivo só pode ser graficado quando é realizada a identificação em um plano de balanceamento, pois neste caso o vetor projeto possui duas variáveis. Para dois planos de balanceamento ou mais, o número de variáveis do vetor projeto não permite que a função objetivo seja graficada.

## **4.2 Estudo dos Mínimos Locais**

Para verificar o comportamento da rotina de identificação de desbalanceamento quando se tem mais de um plano de balanceamento, optou-se por estudar as respostas fornecidas pelo algoritmo de otimização implementado. Os algoritmos de otimização foram estudados em separado, de modo a justificar a utilização de dois algoritmos em conjunto. Os resultados do algoritmo genético e do algoritmo quase-Newton para diferentes vetores iniciais de projeto e dos algoritmos em conjunto foram estudados comparando-se as massas de correção fornecidas com as massas de correção esperadas.

O estudo foi realizado em três casos diferentes, cada um utilizando uma geometria diferente. Cada caso ainda foi estudado em duas etapas, a primeira etapa com três posições de medição de resposta e a segunda etapa utilizando apenas uma posição de medição.

### **4.2.1 Caso 1**

No caso 1, a identificação de desbalanceamento foi realizada apenas nos planos em que se localizam os discos. Os dados da geometria do primeiro caso estudado são os mesmos utilizados no estudo da forma da função objetivo e estão apresentados na Tabela 1 e o rotor utilizado está mostrado na Figura 14.

O estudo foi realizado em duas etapas, inicialmente utilizando-se dados de medição de três planos de medição na rotação de 3600 rpm. Os planos medidos escolhidos foram posicionados em 275 mm, 450 mm e 650 mm a partir da extremidade esquerda do rotor. Na segunda etapa utilizou-se um quantidade menor

de dados de entrada para o algoritmo de otimização. Para a rotação de 3600 rpm utilizou-se apenas os dados de um plano de medição, localizado em 450 mm.

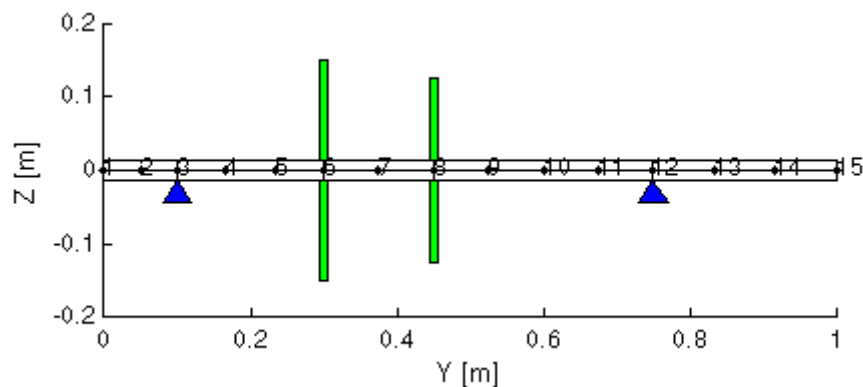
#### 4.2.2 Caso 2

No segundo caso estudado acrescentou-se à geometria um disco posicionado em 300 mm. Os dados da geometria do caso 2 estão apresentados na Tabela 2, em que os dados de rigidez são valores escolhidos e que caracterizam a rigidez de um mancal de rolamento e o amortecimento pequeno foi introduzido para estabilizar o cálculo.

**Tabela 2 - Dados da geometria do caso 2.**

	Número	Posição [mm]	Comprimento [mm]	Diâmetro [mm]	Material
Eixo	1	0	1000	30	Aço
Disco	2	300	10	300	Alumínio
		450	10	250	Alumínio
	Número	Posição [mm]	Rigidez [N/m]	Amortecimento [Ns/m]	Massa [kg]
Mancal	2	100	1,00E+08	10	2
		750	1,00E+08	10	2

A Figura 15 apresenta o rotor utilizado no segundo caso estudado.



**Figura 15 - Geometria e discretização do eixo para realizar a simulação numérica do caso 2.**

O caso 2 foi estudado em duas etapas; inicialmente foram utilizados como dados de entrada 3 posições de medição, 200 mm, 450 mm e 650 mm. Foram utilizadas 5 rotações de medição: duas abaixo da primeira rotação crítica e todas



abaixo da segunda rotação crítica. As rotações utilizadas foram 3600 rpm, 5200 rpm, 8800 rpm, 11200 rpm e 12400 rpm. A etapa dois foi estudada utilizando-se apenas um plano de medição posicionado em 450 mm e as mesmas rotações de medição.

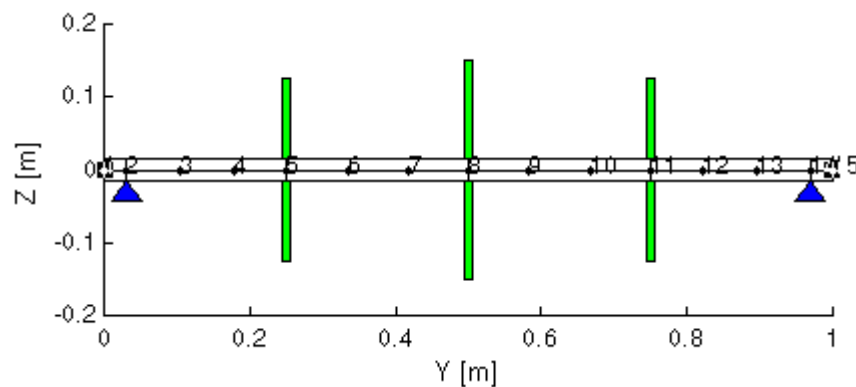
### 4.2.3 Caso 3

A terceira geometria estudada está apresentada na Tabela 3. Ela possui um eixo de seção única, três discos e dois mancais.

**Tabela 3 - Dados da geometria do caso 3.**

	Número	Posição [mm]	Comprimento [mm]	Diâmetro [mm]	Material
Eixo	1	0	1000	30	Aço
Disco	3	250	10	250	Aço
		500	10	300	Aço
		750	10	250	Aço
	Número	Posição [mm]	Rigidez [N/m]	Amortecimento [Ns/m]	Massa [kg]
Mancal	2	30	1,00E+08	10	1
		970	1,00E+08	10	1

A geometria está apresentada na Figura 16.



**Figura 16 - Geometria e discretização do eixo para realizar a simulação numérica do caso 3.**

As posições de medição para o caso 3 são 206 mm, 625 mm e 794 mm na etapa 1. As rotações de medição utilizadas foram 3600 rpm, 5240 rpm, 8520 rpm, 11800 rpm e 18360 rpm. O caso ainda foi estudado com um plano de medição localizado em 625 mm e as mesmas rotações de medição.

### 4.3 Verificação da Rotina de Identificação

Foram realizadas análises em um rotor com um disco e um desbalanceamento para avaliar a identificação do desbalanceamento e avaliar o efeito da massa de balanceamento para um plano, resultado da otimização, na resposta ao desbalanceamento do rotor. A avaliação foi feita para diferentes números de pontos medição e números de rotações de trabalho. Utilizou-se inicialmente com a mesma geometria apresentada na Tabela 1 e representada na Figura 14. A mesma análise foi realizada para um rotor com dois discos e dois desbalanceamentos, realizando o balanceamento para duas rotações críticas e devido a isso, utilizando dois planos de balanceamento. A geometria utilizada é a mesma apresentada na Tabela 2 e representada na Figura 15.

### 4.4 Estudo Experimental

O modelo físico utilizado para este trabalho foi o Rotorkit fabricado pela empresa Bently Nevada. O modelo utilizado foi o RK 4 que é composto por uma base mecânica, motor, acoplamento, eixo, dois discos, dois mancais de deslizamento, seis *proximeters* e três bases para os *proximeters*. Além disso, possui um conjunto de fornecimento energia para os *proximeters* e um dispositivo de controle do motor através de corrente. O *rotorkit* pode trabalhar em até 10000 rpm com diversas combinações de discos e mancais. Os sensores de proximidade utilizados são do modelo 3300 NSv.

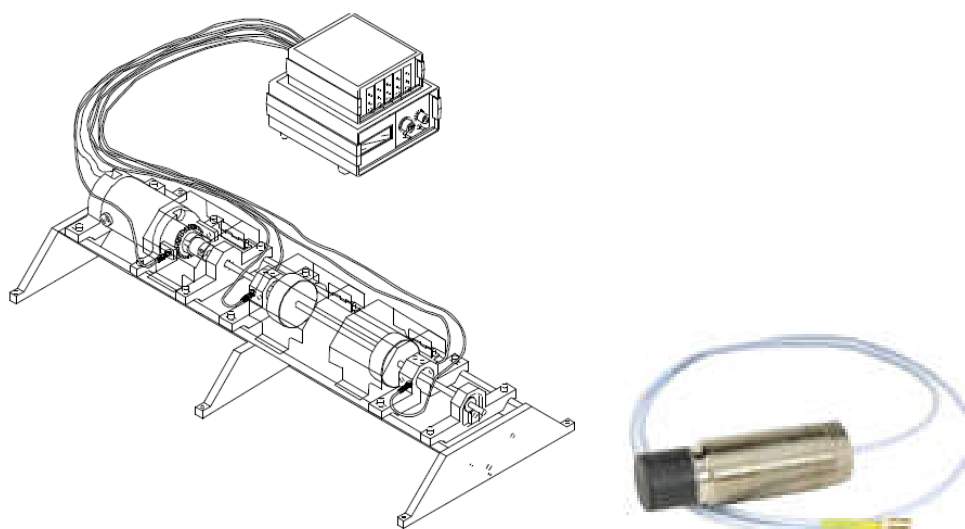


Figura 17 - Rotorkit RK-4, Bently Nevada e sensor de deslocamento em detalhe.  
Fonte: Bently Nevada™ e Instrumart.

O equipamento de medição foi o LAN-Xi Type 3160, fabricado pela Brüel & Kjaer Sound & Vibration Measurements S/A. O software utilizado foi o Pulse LabShop, também distribuído pela Brüel & Kjaer Sound & Vibration Measurements S/A. Utilizou-se o módulo de balanceamento para medir a amplitude e fase do deslocamento do eixo.



**Figura 18 - Placa de aquisição de dados de vibração Brüel & Kjaer Sound & Vibration Measurements S/A.**  
Fonte: Brüel & Kjær.

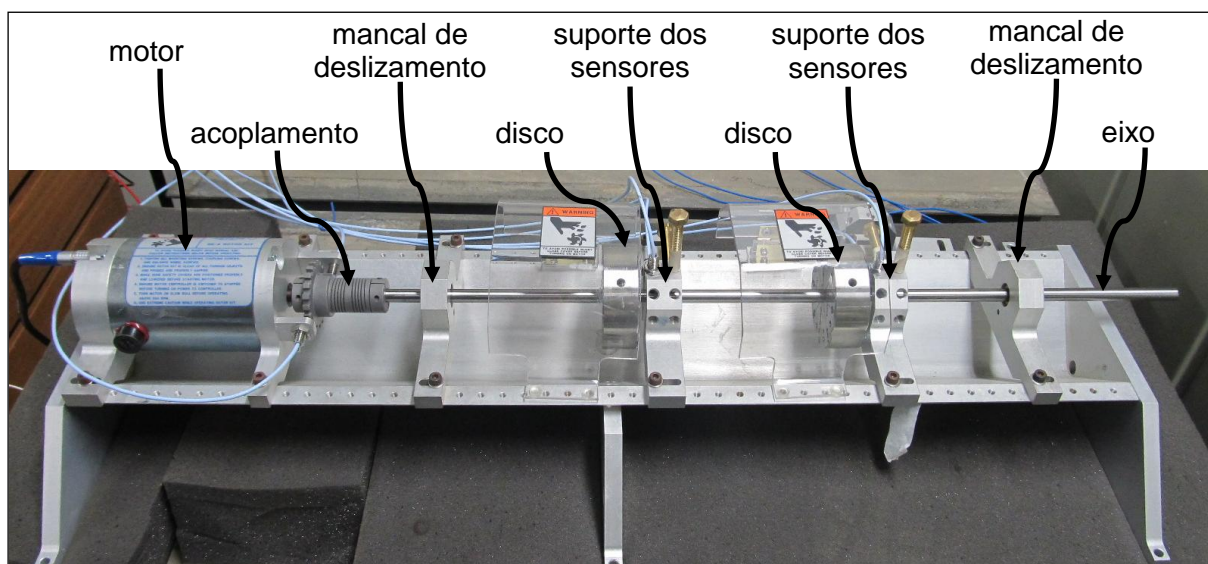
O computador utilizado para as medições experimentais foi um *notebook* do fabricante Lenovo, modelo Thinkpad com processador Core I5 de 2,4 GHz e 4 GB de memória RAM. O sistema operacional utilizado na máquina foi o Windows 7 Professional de 32 bits da empresa Microsoft. Todos os equipamentos pertencem ao Laboratório de Vibrações e Som (LAVIBS) da Universidade Federal do Paraná.

A identificação de desbalanceamento em rotores utilizando a teoria proposta neste projeto de pesquisa exige que alguns passos sejam seguidos para que o processo seja realizado de modo consistente.

Inicialmente deve-se conhecer a geometria do rotor, as dimensões e posições do eixo e dos discos. O mancal deve ser caracterizado em relação à rigidez e amortecimento que este introduz no sistema. As posições dos mancais também devem ser conhecidas. Os mancais de rigidez constante podem ser caracterizados

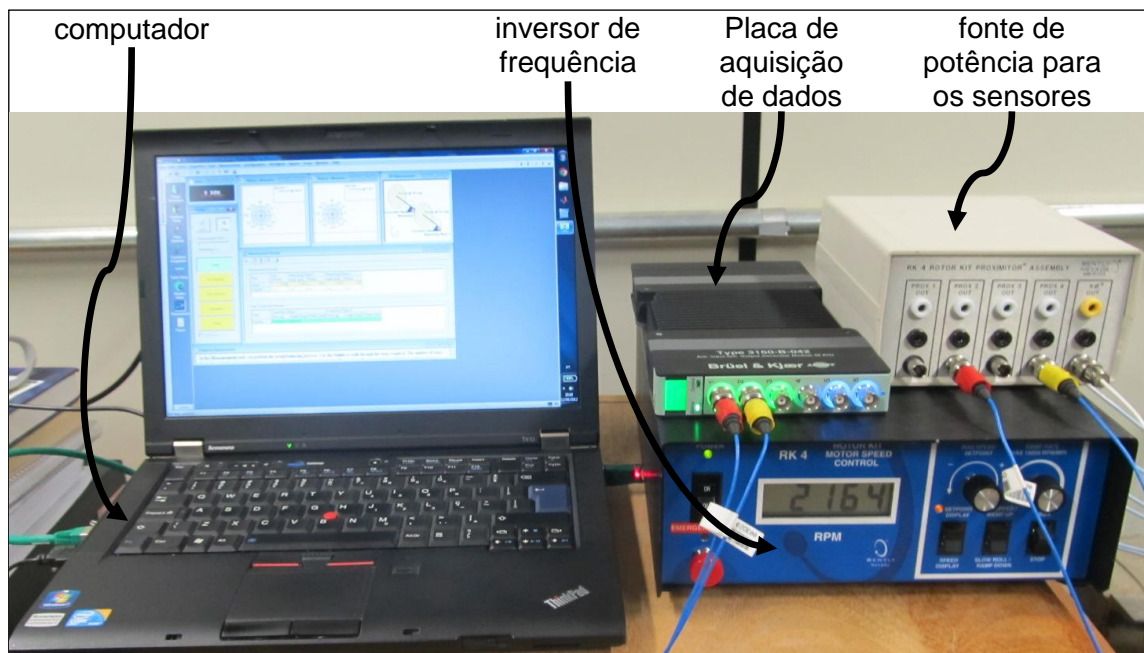
utilizando-se as rotações críticas do rotor de tal modo que as rotações críticas medidas sejam as mesmas que as calculadas no modelo numérico. O material do eixo e discos deve ser conhecido, de modo que se tenham os valores de densidade e módulo de elasticidade dos mesmos. Com estes dados conhecidos é possível construir o modelo numérico do rotor e calibrá-lo, modificando principalmente a rigidez e amortecimento dos mancais para que este tenha um comportamento semelhante ao rotor real. A calibração aproxima as características dinâmicas do modelo numérico às características dinâmicas do modelo experimental.

A Figura 19 apresenta o rotor com a montagem utilizada na medição experimental e os equipamentos utilizados para realizar a medição estão apresentados na Figura 20.



**Figura 19 - Rotor com a configuração utilizada para a medição.**

É importante que se verifique através do modelo numérico as rotações críticas e principalmente os modos de vibrar do rotor, a fim de evitar o posicionamento dos sensores de medição em posições que formam nós em algum modo de vibrar que se queira controlar.



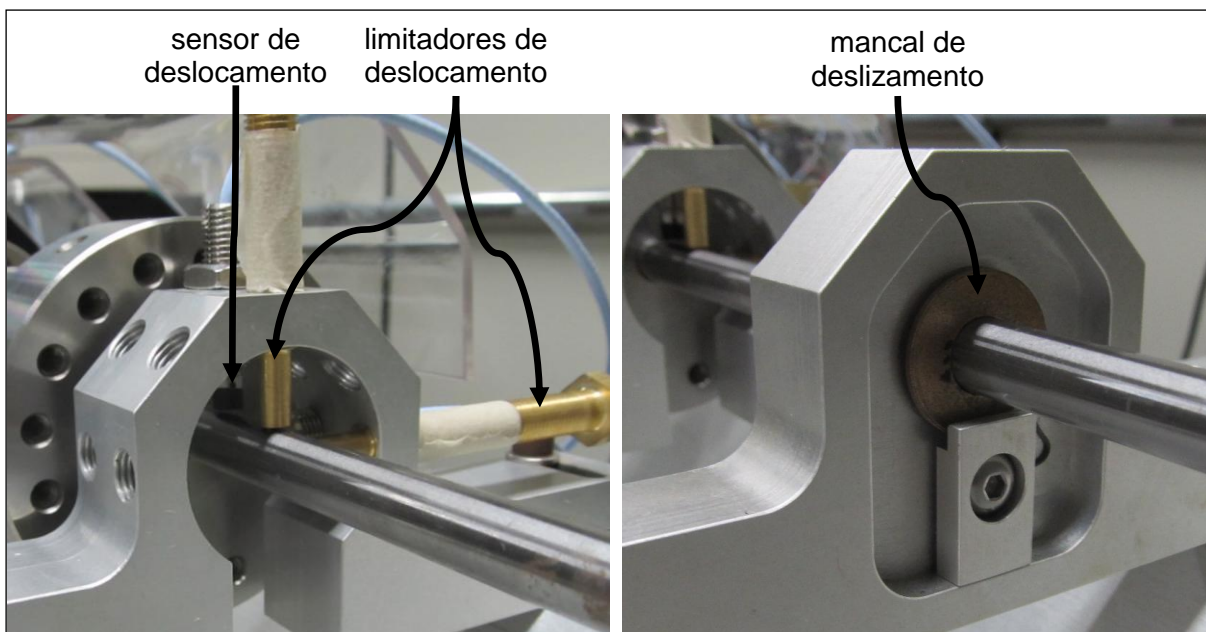
**Figura 20 - Montagem dos equipamentos de medição utilizados.**

Depois de verificar o modelo numérico é necessária a montagem dos sensores de deslocamento no rotor. Estes devem ter a sensibilidade bem calibrada para que o valor de amplitude medido seja o valor real. A Figura 21 apresenta em detalhe a montagem dos sensores e do mancal presentes no Rotorkit. Os parafusos de latão são limitadores de deslocamento para que os sensores, localizados ao lado deles, não sejam prejudicados por deslocamentos excessivos.

A geometria do rotor utilizada na parte experimental para verificar as características dinâmicas está apresentada na Tabela 4.

**Tabela 4 - Geometria do rotor utilizado na medição.**

	Número	Posição [mm]	Comprimento [mm]	Diâmetro [mm]	Material
Eixo	1	0	590	10	Aço
Disco	2	170	24	74	Aço
		335	24	74	Aço
	Número	Posição [mm]	Rigidez [N/m]	Amortecimento [Ns/m]	Massa [kg]
Mancal	2	45	5,00e+05	5000	0
		480	5,00e+05	5000	0



a) b)  
 Figura 21 - Detalhe a) dos sensores de deslocamento e b) do mancal do rotor.

A geometria simplificada do rotor está representada na Figura 22.

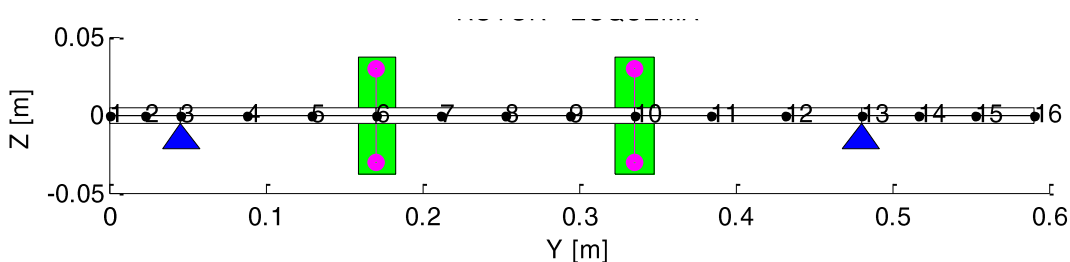
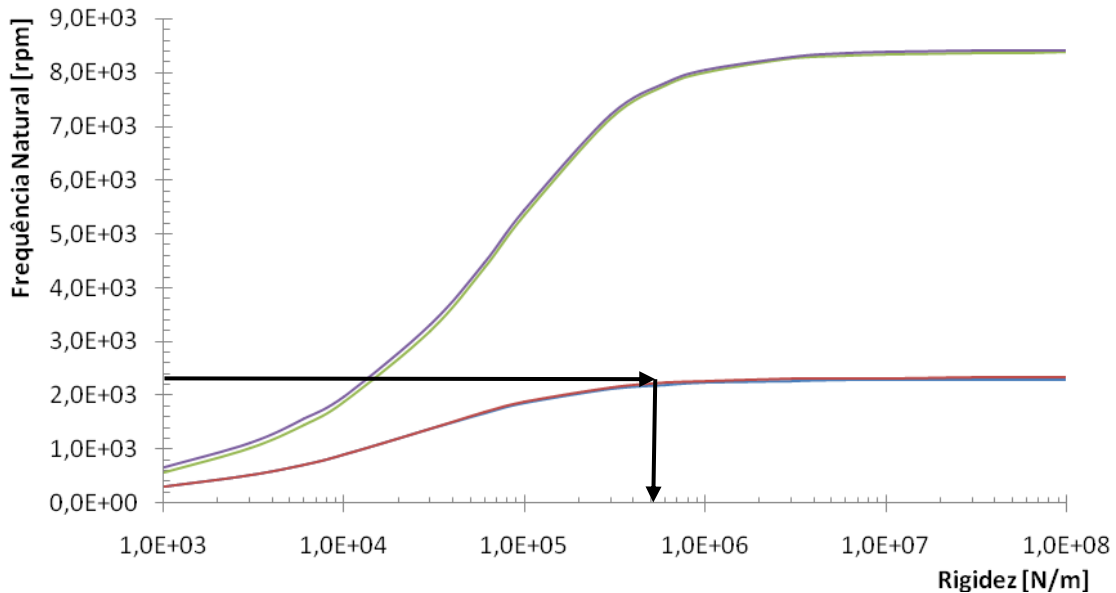


Figura 22 - Modelo numérico do rotor utilizado nas medições.  
 Fonte: Imagem fornecida pela interface em Matlab do Rotordin.

O modelo numérico pode ser calibrado para a primeira frequência natural utilizando-se o mapa de rigidez para o respectivo rotor. O mapa de rigidez é obtido calculando-se as frequências naturais do rotor para uma determinada rotação, variando-se a rigidez dos mancais. O mapa de rigidez para o rotor utilizado está apresentado na Figura 23 e para a rotação de 2300 rpm a rotação crítica deve ser de 38,3 Hz, obtendo-se então uma rigidez para os mancais de  $5 \cdot 10^5$  N/m.

O mapa de rigidez na Figura 23 apresenta quatro curvas. As duas curvas inferiores correspondem à frequência de vibração do rotor dos primeiros dois modos de vibração, em sentido *backwards* e sentido *forwards*. As duas superiores

correspondem à terceira e quarta frequências de vibração, também nos dois sentidos.



**Figura 23 - Mapa de rigidez para calibragem do mancal.**

Para comparar a curva de resposta em frequência do rotor e a do seu modelo numérico foram inseridos desbalanceamentos conhecidos para cada disco. No disco posicionado em 170 mm foi inserido um desbalanceamento de  $1 \cdot 10^{-3}$  kg.m em  $180^\circ$  e no disco posicionado em 335 mm um desbalanceamento de  $1,6 \cdot 10^{-3}$  kg.m em  $225^\circ$ .

Escolhendo-se as rotações de medição realiza-se a medição uma única vez em todas as rotações escolhidas e organiza-se os resultados no arquivo de entrada da rotina de identificação de balanceamento. Utilizando a rotina de identificação de desbalanceamento obtém-se as massas de correção, e adicionando-as ao rotor realiza-se uma nova medição para verificar o resultado. As massas de correção podem ser inseridas no modelo numérico, podendo-se também observar o resultado no modelo numérico.

A medição foi realizada a partir da rotação inicial de 400 rpm até a rotação de 3000 rpm em intervalos de 200 rpm. Devido às grandes amplitudes de vibração ao redor da rotação crítica, não foi possível obter a amplitude de vibração para 2200 rpm.

## 5 RESULTADOS

Foi realizada a simulação de diversos casos, apresentados na Seção 4, para avaliar o comportamento da rotina de identificação de desbalanceamento. A forma da função objetivo foi estudada utilizando diferentes conjuntos de dados de entrada, variando-se o número de posições e rotações de medição. Apenas um plano de balanceamento foi considerado para que fosse possível a elaboração do gráfico da função objetivo.

Para justificar a utilização de dois algoritmos de otimização em conjunto, foram realizadas simulações utilizando diferentes configurações de rotores e diferentes conjuntos de dados de entrada. O parâmetro estudado foi a resposta fornecida pelo algoritmo de otimização, ou seja, a massa de correção, representada pelo valor da massa multiplicada pela excentricidade e o valor da fase. Nas configurações estudadas foram inseridos desbalanceamentos conhecidos, de modo que a resposta ótima fosse também conhecida.

Antes de realizar a validação experimental do método de identificação de desbalanceamento, verificou-se o funcionamento da rotina com resultados numéricos. Estes resultados foram retirados do cálculo de resposta ao desbalanceamento de um modelo numérico em que se conhecia a geometria e o desbalanceamento. Utilizando estas respostas como dados de entrada para a rotina de otimização verificou-se a convergência da rotina de identificação de desbalanceamento para diferentes geometrias e dados de medição. Em seguida realizou-se a identificação de desbalanceamento utilizando respostas de vibração obtidas experimentalmente em um rotor. Também neste caso os desbalanceamentos eram conhecidos.

### 5.1 Forma da Função Objetivo

A função objetivo possui formatos variados, dependendo do número de rotações e de posições de resposta escolhido. Neste trabalho mostrou-se o comportamento da função objetivo e os resultados da otimização para diferentes números de rotações e posições de resposta. As respostas utilizadas para a otimização foram geradas numericamente. Estas foram introduzidas no processo de



otimização como parâmetros de entrada, como se as mesmas tivessem sido medidas experimentalmente. Foi realizada uma varredura combinando os valores de fase e de massa de desbalanceamento e para cada combinação foi calculada a resposta da função objetivo, obtendo-se desta forma a forma da função objetivo.

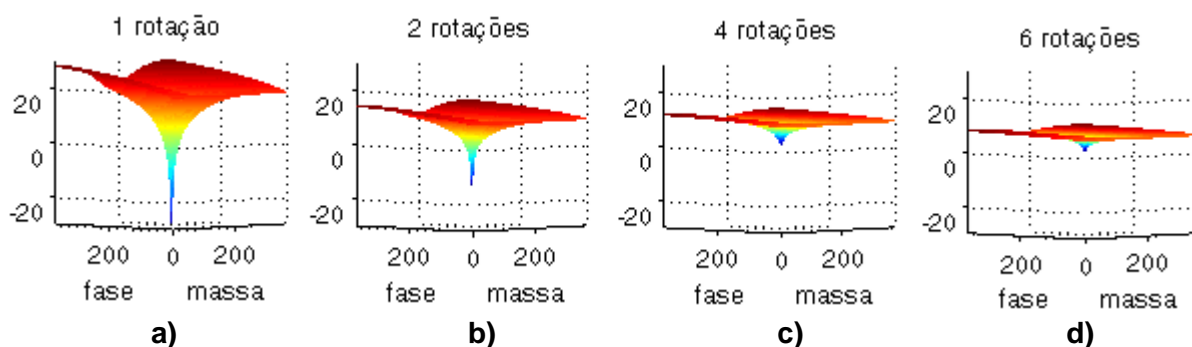
As simulações numéricas foram realizadas em ambiente de programação Fortran e os gráficos criados em Matlab<sup>®</sup>. Os parâmetros modais foram calculados pelo aplicativo programado em Fortran (Rotordin) e truncados para os dez primeiros modos.

O comportamento da função objetivo foi primeiramente estudado variando o número de rotações para uma determinada posição de medição. Posteriormente, para uma determinada rotação de medição, diferentes pontos de resposta foram analisados. A Tabela 1 apresenta as rotações utilizadas para a construção do gráfico. A posição de medição de resposta e do plano de balanceamento é 550 mm.

**Tabela 5 - Rotações utilizadas para a construção da superfície da função objetivo.**

1 rotação [rpm]	2 rotações [rpm]	4 rotações [rpm]	6 rotações [rpm]
4000	2600 4000	2600 3000 4000 5000	2000
			2600
			3000
			4000
			4600
			5000

A Figura 24 apresenta o comportamento da função objetivo para as rotações utilizadas na Tabela 5. Verifica-se que para um maior número de rotações utilizadas a função objetivo tem um formato mais suave perto do ponto ótimo. Essa característica permite que o algoritmo de otimização encontre com mais facilidade o ponto ótimo da curva, dessa maneira os resultados são também mais precisos.



**Figura 24 - Comportamento da função objetivo para a) 1 rotação, b) 2 rotações, c) 4 rotações e d) 6 rotações.**

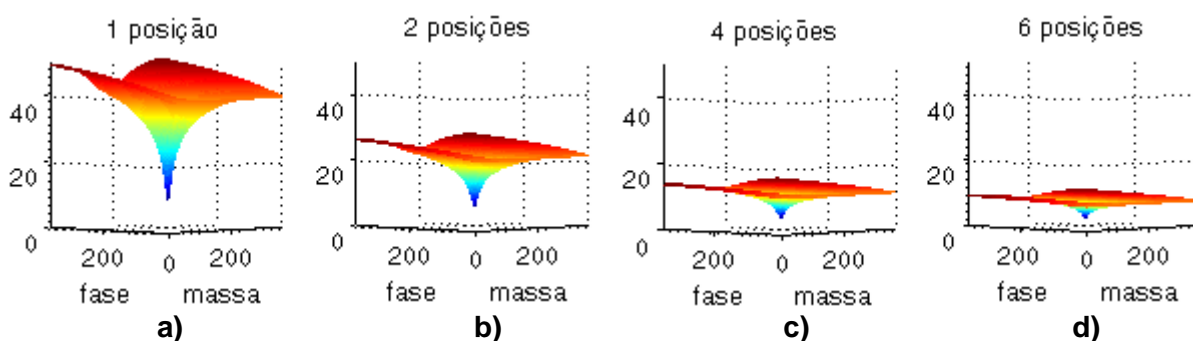
Na Figura 24 foi utilizada uma inclinação pequena para os eixos horizontais, de modo que o eixo com os valores de massa é apresentado na figura do zero para a direita e o eixo com os valores de fase está apresentado do zero para a esquerda. Com uma maior inclinação do gráfico prejudica-se a apresentação do ponto mínimo da superfície da função objetivo, com na Figura 24 d).

A rotação de 5100 rpm foi escolhida para verificar o comportamento de diferentes posições de medição. A Tabela 6 apresenta as posições de medição de resposta escolhidas para a construção da função objetivo.

**Tabela 6 - Posições de resposta utilizadas para a construção da superfície da função objetivo.**

1 posição [mm]	2 posições [mm]	4 posições [mm]	6 posições [mm]
450,0	362,5 450,0	275,0 362,5 450,0 550,0	187,5 275,0 362,5 450,0 550,0 650,0

O comportamento da função objetivo com diferentes posições de medição é semelhante ao comportamento com diferentes rotações de medição. A superfície atenua-se na região do ponto ótimo para um maior número de posições de medição. A Figura 25 apresenta o comportamento da função objetivo.



**Figura 25 - Comportamento da função objetivo para a) 1 posição, b) 2 posições, c) 4 posições e d) 6 posições.**

O estudo da função objetivo foi realizado apenas em um plano de balanceamento, pois neste caso o vetor projeto possui apenas 2 variáveis, que é o

maior número de variáveis possível de representar em um gráfico, juntamente com a sua função objetivo.

## **5.2 Mínimos Locais**

A fim de justificar a utilização de dois métodos de otimização em conjunto para identificar o desbalanceamento presente em um rotor, realizou-se um estudo que mostra a convergência dos dois métodos em separado e em conjunto para diferentes configurações de rotores.

O principal motivo de utilizar os algoritmos de otimização Quase-Newton e Algoritmo Genético (GA) em conjunto é a necessidade de se obter com o GA um valor de ponto inicial adequado para o algoritmo Quase-Newton. A presença de mínimos locais e o formato agudo (um declive acentuado na região do mínimo e afastado do mínimo um declive muito pequeno) da função objetivo que ocorrem para diferentes configurações de rotor não permitem a utilização apenas do algoritmo Quase-Newton. Funções objetivo agudas tem um declive pouco acentuado em regiões afastadas do ponto ótimo, o que pode fazer com que de uma iteração para a outra a diferença entre as respostas esteja dentro da tolerância, além disso a aproximação a um mínimo local pode ocorrer. Estes dois fatores não permitem que resultados adequados sejam obtidos.

Criou-se um modelo numérico desbalanceado cujas respostas em diferentes rotações e posições de medição foram utilizadas como dados de entrada de um rotor, simulando-se os dados de medição. Conhecendo-se o desbalanceamento inserido pôde-se determinar a qualidade de convergência de cada algoritmo.

### **5.2.1 Caso 1**

O caso 1 foi estudado em duas etapas, inicialmente utilizando-se dados de medição de três planos de medição na rotação de 3600 rpm. Os planos medidos escolhidos foram posicionados em 275 mm, 450 mm e 650 mm a partir da extremidade esquerda do rotor.

A Tabela 7 apresenta a comparação dos resultados obtidos. A massa multiplicada pela excentricidade  $m.e$  está expressa em grama milímetro e a fase em graus.

Numa segunda etapa utilizou-se um quantidade menor de dados de entrada para o algoritmo de otimização. Para a rotação de 3600 rpm utilizou-se apenas os dados de um plano de medição, localizado em 450 mm. A Tabela 8 apresenta a comparação dos resultados fornecidos pela rotina de otimização.

**Tabela 7 - Comparação dos resultados para o caso 1, etapa 1.**

Resultado		m.e [g.mm]	Fase [°]
Esperado		180	0
GA		180,03	359,97
GA +QN		180,47	360
QN 1	Inicial	10	45
	Resultado	180,47	360
QN 2	Inicial	10	270
	Resultado	180,47	360
QN 3	Inicial	1000	270
	Resultado	180,47	360
QN 4	Inicial	5	270
	Resultado	180,47	360
QN 5	Inicial	1000	80
	Resultado	180,47	360

Para um plano de balanceamento existe apenas um mínimo, como pode ser observado na Seção 5.1, em que a forma da função objetivo foi estudada para diferentes conjuntos de dados de medição. A Tabela 8 apresenta os resultados.

**Tabela 8 - Comparação dos resultados para o caso 1, etapa 2.**

Resultado		m.e [g.mm]	Fase [°]
Esperado		180	0
GA		179,66	360
GA +QN		179,79	360
QN 1	Inicial	10	45
	Resultado	179,79	360
QN 2	Inicial	10	270
	Resultado	179,79	360
QN 3	Inicial	1000	270
	Resultado	179,79	360
QN 4	Inicial	5	270
	Resultado	179,79	360
QN 5	Inicial	1000	80
	Resultado	179,79	360

Os resultados fornecidos pelas rotinas de otimização apresentados na Tabela 8 confirmam este fato. Para qualquer método e valor inicial no método Quase-Newton, o resultado está em todas as situações muito próximo do resultado esperado.

### 5.2.2 Caso 2

O caso 2 foi estudado em duas etapas; inicialmente foram utilizados como dados de entrada 3 posições de medição, 200 mm, 450 mm e 650 mm. Foram utilizadas 5 rotações de medição: duas abaixo da primeira rotação crítica e todas abaixo da segunda rotação crítica. As rotações utilizadas foram 3600 rpm, 5200 rpm, 8800 rpm, 11200 rpm e 12400 rpm. Os resultados obtidos estão comparados na Tabela 9. A amplitude está expressa em grama-milímetro e a fase em graus.

**Tabela 9 - Comparação dos resultados para o caso 2, etapa 1.**

Resultado		Plano de Balanceamento 1		Plano de Balanceamento 2	
		m.e [g.mm]	Fase [°]	m.e [g.mm]	Fase [°]
Esperado		200	90	180	0
GA		177,65	76,45	144,04	11,51
GA +QN		203	91,13	186,9	359,24
QN 1	Inicial	10	45	500	45
	Resultado	202,47	91,89	187,94	359,41
QN 2	Inicial	10	270	900	180
	Resultado	202,65	90,39	181,44	359,31
QN 3	Inicial	1000	270	1900	180
	Resultado	201,76	90,87	181,25	359,56
QN 4	Inicial	5	270	5	180
	Resultado	202,65	90,27	183,63	359,31
QN 5	Inicial	1000	80	5	342
	Resultado	203,54	90,78	183,79	359,09

A etapa dois foi estudada utilizando-se apenas um plano de medição posicionado em 450 mm e as mesmas rotações de medição. A Tabela 10 apresenta a comparação dos resultados para a etapa 2. Pode-se perceber que as diferentes opções de algoritmos de otimização fornecem resultados mais dispersos que os casos anteriores.

**Tabela 10 - Comparação dos resultados para o caso 2, etapa 2.**

Resultado	Plano de Balanceamento 1		Plano de Balanceamento 2		
	m.e [g.mm]	Fase [°]	m.e [g.mm]	Fase [°]	
Esperado	200	90	180	0	
GA	200,45	86,3	161,78	2,75	
GA +QN	196,93	85	165,35	1,01	
QN 1	Inicial	10	45	500	45
	Resultado	119,3	43,58	145,52	42,47
QN 2	Inicial	10	270	900	180
	Resultado	184,25	98,35	202,6	4,11
QN 3	Inicial	1000	270	1900	180
	Resultado	185,55	98,77	203,84	3,84
QN 4	Inicial	5	270	5	180
	Resultado	183,34	8,23	202,23	4,32
QN 5	Inicial	1000	80	5	342
	Resultado	269,31	98,33	219,59	345,25

### 5.2.1 Caso 3

As posições de medição para o caso 3 são 206 mm, 625 mm e 794 mm na etapa 1. As rotações de medição utilizadas foram 3600 rpm, 5240 rpm, 8520 rpm, 11800 rpm e 18360 rpm. As três primeiras rotações de medição estão abaixo da primeira rotação crítica; uma entre a primeira e segunda e a última entre a segunda e terceira rotações críticas. A Tabela 11 apresenta os resultados para a etapa 1 do caso 3. A amplitude está expressa em grama-milímetro e a fase em graus.

O caso 3 ainda foi estudado com um plano de medição localizado em 625 mm e as mesmas rotações de medição. A comparação dos resultados para a etapa 2 está apresentada na Tabela 12 e pode-se verificar que o resultado dispersa de maneira significativa.

**Tabela 11 - Comparação dos resultados para o caso 3, etapa 1.**

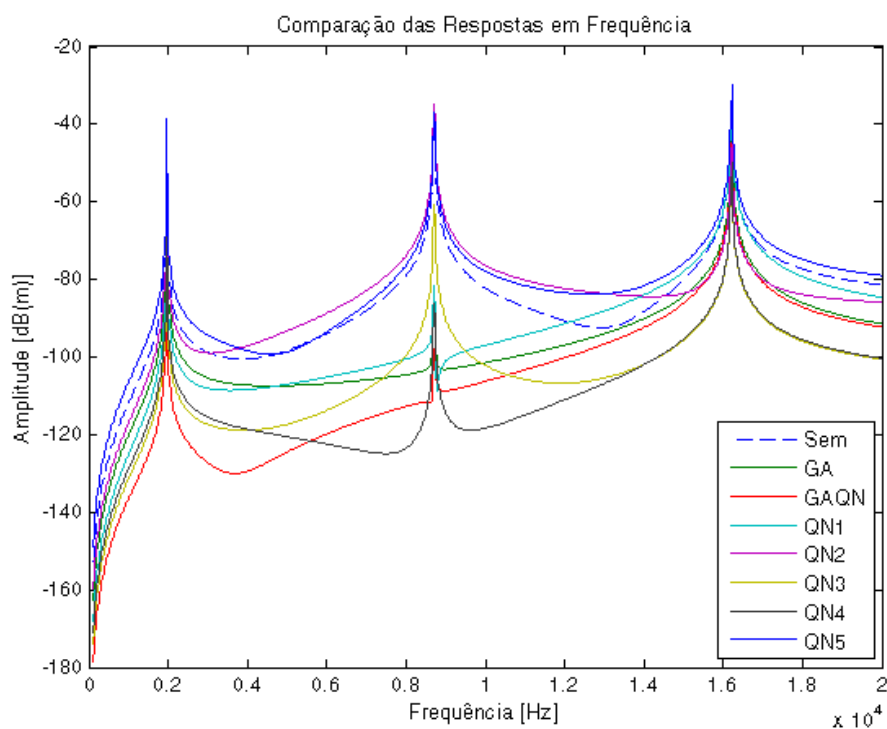
Resultado	Plano de Balanceamento 1		Plano de Balanceamento 2		Plano de Balanceamento 3		
	m.e [g.mm]	Fase [°]	m.e [g.mm]	Fase [°]	m.e [g.mm]	Fase [°]	
Esperado	200	210	150	330	0	0	
GA	204,4	209,42	147,8	0,3516	6,6	212,9	
GA +QN	200,6	209,8	149,7	330	0,728	166	
QN 1	Inicial	10	45	500	45	100	315
	Resultado	200	210	150,4	330	0,16	120
QN 2	Inicial	10	270	900	180	100	45
	Resultado	200,24	209,96	150,4	330	0,273	201,2
QN 3	Inicial	1000	270	1900	180	5	90
	Resultado	200,1	209,98	150,74	329,86	0,08	228,9
QN 4	Inicial	5	270	5	180	1000	90
	Resultado	200,1	209,98	150,74	329,86	0,076	125,1
QN 5	Inicial	1000	90	5	342	1000	95
	Resultado	200,26	209,88	149,76	329,9	0,417	154,3

Para confirmar o resultado da segunda etapa do caso três foram criadas as curvas de resposta em frequência para os resultados fornecidos de cada algoritmo de otimização.

**Tabela 12 - Comparação dos resultados para o caso 3, etapa 2.**

Resultado	Plano de Balanceamento 1		Plano de Balanceamento 2		Plano de Balanceamento 3		
	m.e [g.mm]	Fase [°]	m.e [g.mm]	Fase [°]	m.e [g.mm]	Fase [°]	
Esperado	200	210	150	330	0	0	
GA	199,96	219,4	137,64	4,82	32,26	303,46	
GA +QN	202,4	220,77	115,26	342,5	38,44	301,98	
QN 1	Inicial	10	45	500	45	100	315
	Resultado	196,28	233,4	37,64	43,93	79,05	314,11
QN 2	Inicial	10	270	900	180	100	45
	Resultado	43,08	262,32	67,85	359,6	188,86	202,61
QN 3	Inicial	1000	270	1900	180	5	90
	Resultado	180,66	209,62	146,26	327,11	20,38	335,92
QN 4	Inicial	5	270	5	180	1000	90
	Resultado	181,19	209,93	147,45	328,3	19,93	30,6
QN 5	Inicial	1000	90	5	342	1000	95
	Resultado	144,14	96,23	85,63	339,3	205,72	347,54

A Figura 26 mostra uma comparação entre as respostas do sistema com os desbalanceamentos fornecidos por cada algoritmo de otimização e vetores projeto iniciais testados e apresentados na Tabela 12.



**Figura 26 - Comparação das respostas ao desbalanceamento na posição de 206 mm para cada algoritmo utilizado.**

Para melhor observar os resultados, foi realizada uma aproximação das curvas em cada pico, conforme mostra a Figura 27. Observando esta figura, verifica-se que nos três picos de ressonância o algoritmo Quase-Newton com o vetor projeto inicial 5 aumenta a amplitude de vibração com seu resultado. O algoritmo Quase-Newton com o vetor projeto inicial 2 não diminui significativamente a amplitude e aumenta a amplitude no segundo pico. O algoritmo genético sozinho também não diminui significativamente a amplitude de vibração, principalmente em torno do primeiro pico. A combinação do Algoritmo Genético com o método Quase-Newton gerou um resultado bastante satisfatório para a primeira e segunda frequências de ressonância, e no terceiro pico a diminuição foi significativa. O resultado para o algoritmo Quase-Newton com o vetor projeto inicial 4 também gerou um resultado satisfatório, mas como não se pode garantir que o vetor projeto inicial está em um



ponto adequado para um bom resultado, a utilização dos algoritmos em conjunto é a melhor solução para o problema.

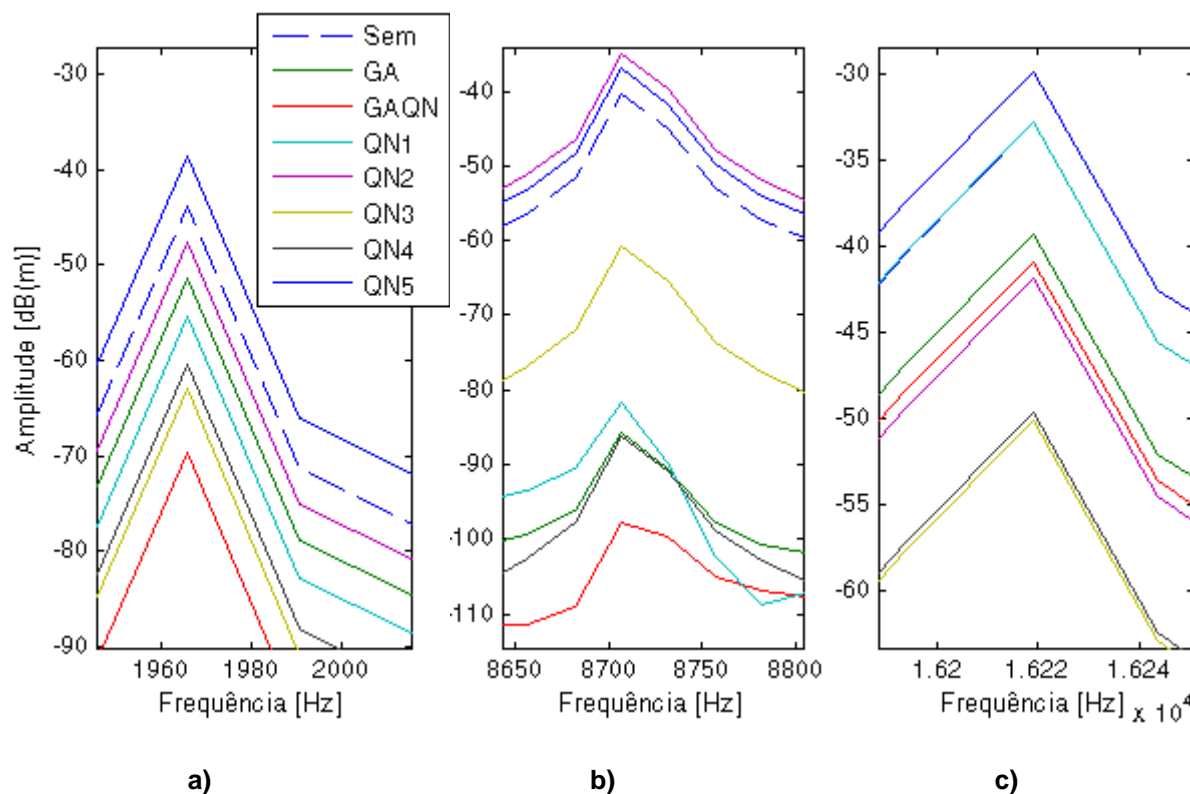


Figura 27 - Aproximação dos picos das respostas ao desbalanceamento: a) - 1<sup>o</sup> modo; b) - 2<sup>o</sup> modo; c) - 3<sup>o</sup> modo.

### 5.3 Verificação da Rotina

Para verificar o funcionamento numérico do método, foram estudadas algumas situações possíveis em rotores físicos. De acordo com Gunter e Jackson (1999) pode-se, em rotores flexíveis com pequenos deslocamentos nos mancais, utilizar apenas N planos de balanceamento para a N-ésima rotação crítica que se deseja controlar. A maior parte das informações necessárias, tais como o número de planos de balanceamento e suas posições mais efetivas, podem ser obtidas examinando-se o diagrama de rotações críticas (Diagrama de Campbell) e os correspondentes modos de vibrar.

Foram realizadas análises em um rotor com um disco e um desbalanceamento para avaliar a identificação do desbalanceamento e avaliar o efeito da massa de balanceamento para um plano, resultado da otimização, na resposta ao

desbalanceamento do rotor. A avaliação foi feita para diferentes números de pontos de medição e números de rotações de trabalho. Utilizou-se o rotor apresentado na Figura 14.

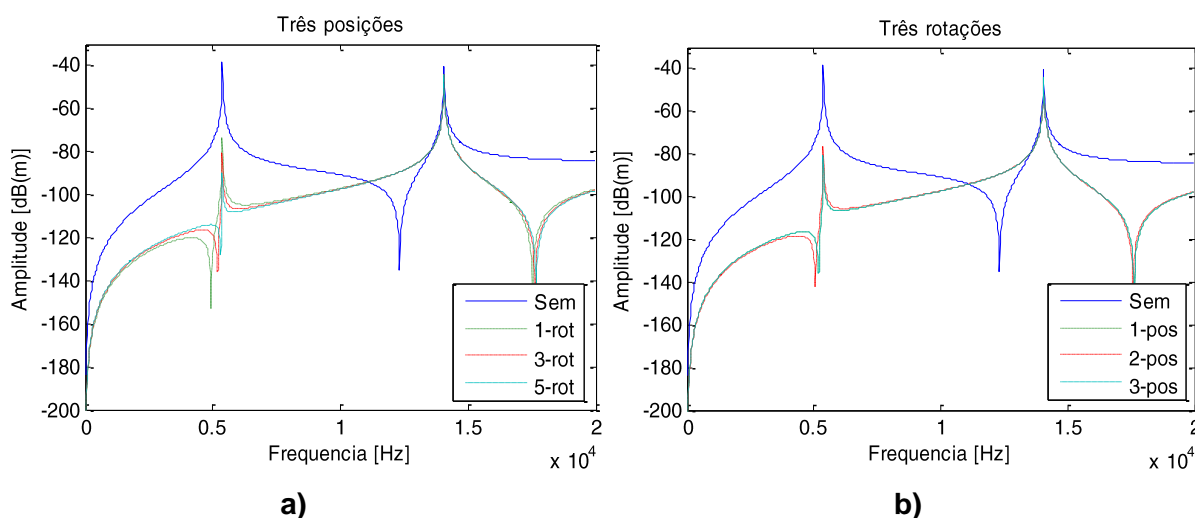
A Tabela 13 mostra as rotações e posições de medição utilizadas para cada caso.

**Tabela 13 - Rotações e posições de medição utilizadas.**

Rotações [rpm]			Posições [mm]		
1 rotação	3 rotações	5 rotações	1 posição	2 posições	3 posições
3600	2400 3600 4800	2000	450	275 450	275 450 650
		2400			
		3600			
		4800			
		5200			

Para cada conjunto de rotações foram utilizados todos os conjuntos de posições, ou seja, para uma rotação de medição foram feitas simulações com 1, 2 e 3 posições, da mesma maneira para os outros dois casos.

Aplicando o método de identificação das massas de balanceamento para um plano de balanceamento localizado em 450 mm verificou-se que o aumento do número de rotações utilizadas melhorou o resultado da otimização, porém o número de posições não alterou significativamente o resultado. A Figura 28 apresenta alguns resultados obtidos.



**Figura 28 - Resposta ao desbalanceamento: a) três posições e diferentes números de rotações e b) três rotações e diferentes números de posições.**

A Tabela 14 apresenta a diferença de amplitude em dB da curva de resposta em frequência na primeira rotação crítica para todos os casos estudados com um plano de balanceamento.

**Tabela 14 - Diferença entre amplitude sem balanceamento e com balanceamento.**

Número de rotações	Diferença entre respostas [dB]		
	1 posição	2 posições	3 posições
1	-38,5	-31,69	-35,6
3	-42,88	-38,5	-42,88
5	-52,17	-52,17	-52,17

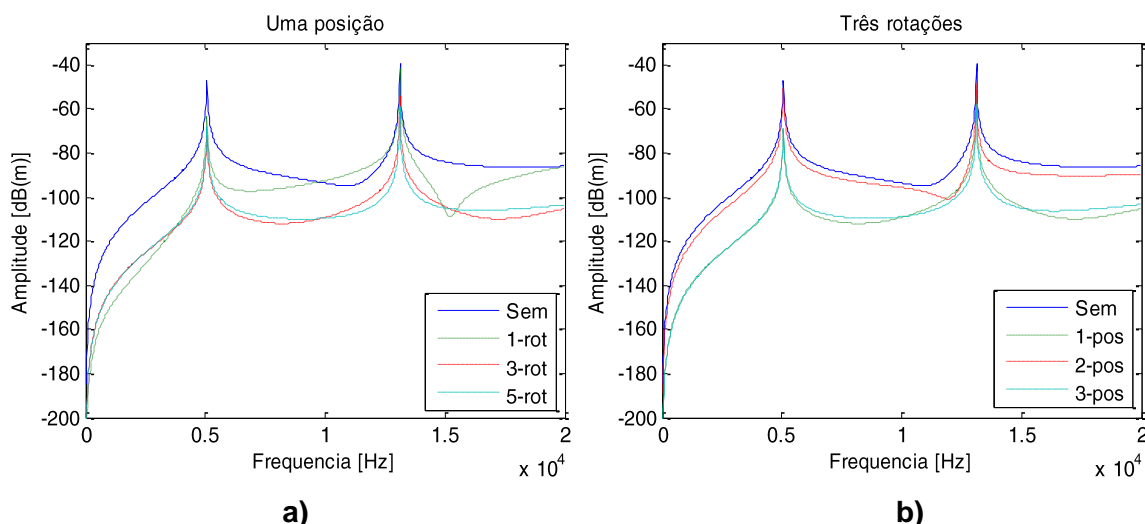
A mesma análise foi realizada para um rotor com dois discos e dois desbalanceamentos, realizando o balanceamento para duas rotações críticas e devido a isso, utilizando dois planos de balanceamento. O modelo utilizado está apresentado na Figura 15. As rotações e posições de medição utilizadas para esse caso estão apresentadas na Tabela 15. Outros valores foram utilizados para considerar a segunda rotação crítica e seu modo de vibrar.

**Tabela 15 - Rotações e posições de medição utilizadas.**

Rotações [rpm]			Posições [mm]		
1 rotação	3 rotações	5 rotações	1 posição	2 posições	3 posições
8800		3600	450	275 450	275 450 650
		5200			
		8800			
		11200			
		12400			

Os planos de balanceamento escolhidos estão localizados em 280 mm e 430 mm. A Figura 29 apresenta as curvas de resposta ao desbalanceamento, comparando a utilização de diferentes números de posições de medição e diferentes números de rotações.

O resultado referente a todos os casos é apresentado na Tabela 16. Verifica-se que a escolha das posições e rotações de medição influencia de forma significativa no resultado, como pode-se perceber na Figura 29 b), em que as massas de balanceamento fornecidas pela rotina de identificação de desbalanceamento não tiveram um resultado eficaz como nos outros casos apresentados.



**Figura 29 - Resposta ao desbalanceamento: a) três posições e diferentes números de rotações e b) três rotações e diferentes números de posições.**

Verificou-se a diminuição da amplitude de vibrações em todos os casos para os dois modos. A escolha do plano de medição e do plano de balanceamento influencia significativamente no resultado da identificação de desbalanceamento.

**Tabela 16 - Diferença entre amplitude sem balanceamento e com balanceamento.**

Número de rotações	Diferença entre respostas [dB]					
	1 posição		2 posições		3 posições	
	1º modo	2º modo	1º modo	2º modo	1º modo	2º modo
1	-16,56	-2,39	-21,29	-15,6	-21,44	-17,98
3	-22,95	-14,6	-3,47	-8,43	-21,82	-18,05
5	-21,57	-19,34	-21,96	-17,06	-21,74	-17,87

Confirma-se que um estudo dinâmico do rotor é necessário para balanceamentos acima da primeira rotação crítica, de modo a verificar a influência dos modos de vibrar nos planos escolhidos para medição e para balanceamento.

#### 5.4 Resultados Experimentais

Para verificar o funcionamento da rotina de identificação de desbalanceamento foi realizado um experimento em laboratório. Os dados de entrada são as medidas de resposta de vibração em um rotor de geometria e desbalanceamentos conhecidos. Inicialmente criou-se o modelo numérico que representa o sistema em estudo. A geometria do rotor utilizada na parte experimental para verificar as características dinâmicas está apresentada na Tabela 4.

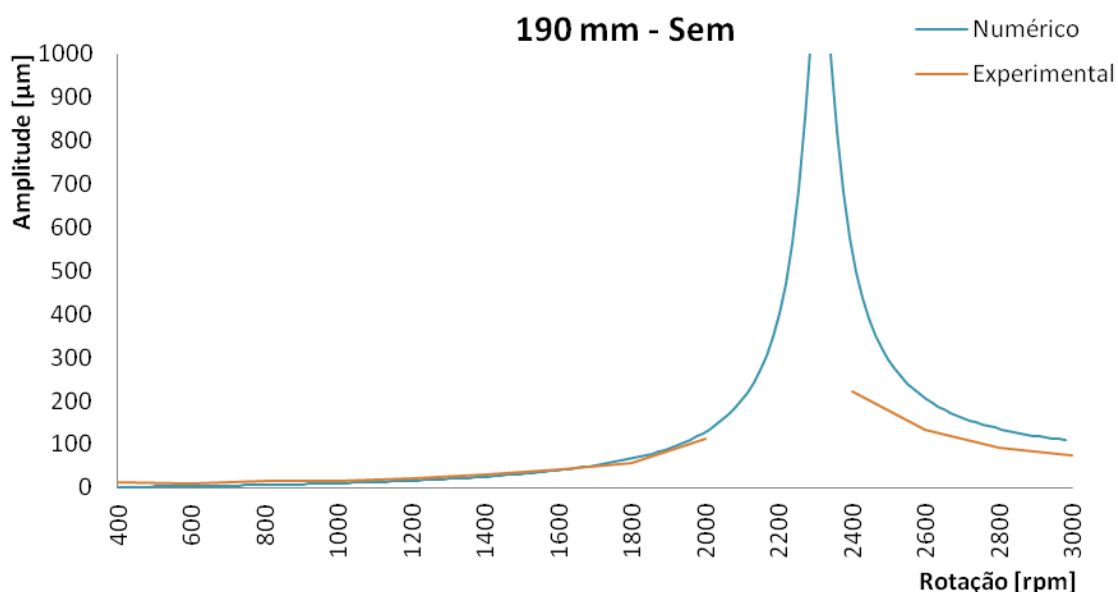
As medições de vibração escolhidas para realizar o experimento encontram-se ao redor e abaixo da primeira rotação crítica, obtida experimentalmente em 2300 rpm. O fato desta escolha baseia-se no desconhecimento das propriedades dinâmicas dos mancais que não puderam ser caracterizados apropriadamente para intervalos de rotação acima da primeira rotação crítica. O Rotorkit utilizado possui mancais compostos com um material viscoelástico cujas características são desconhecidas. Tentou-se construir um mancal com características conhecidas, rígido de rolamento, que não ficou pronto em tempo hábil. De qualquer modo pode-se verificar a robustez do método, pois mesmo que o modelo numérico não estivesse adequadamente calibrado, resultados aceitáveis foram alcançados.

O modelo numérico pode ser calibrado para a primeira frequência natural utilizando-se o mapa de rigidez para o respectivo rotor.

Para comparar a curva de resposta em frequência do rotor e a do seu modelo numérico foram inseridos desbalanceamentos conhecidos para cada disco, como apresentado na Seção 4.4.

A medição foi realizada a partir da rotação inicial de 400 rpm até a rotação de 3000 rpm em intervalos de 200 rpm. Devido às grandes amplitudes de vibração ao redor da rotação crítica, não foi possível obter a amplitude de vibração para 2200 rpm. A Figura 30 apresenta a comparação das curvas de resposta ao desbalanceamento medidas e obtidas do modelo numérico para as duas posições de medição, 190 mm e 355 mm.

Como o modelo não está completamente calibrado, devido à dificuldade em caracterizar os mancais, o formato das curvas difere um pouco, principalmente depois do pico, correspondente à primeira rotação crítica mostrada na Figura 30. A medição não pôde ser realizada entre os valores de 2000 rpm e 2400 rpm, pois a amplitude de vibração era tal que o eixo tocava nos limitadores de deslocamento mostrados na Figura 21 a).



**Figura 30 - Comparação entre resposta numérica e resposta experimental do rotor desbalanceado.**

Mesmo com o modelo numérico parcialmente calibrado, foi realizada a identificação do desbalanceamento. A Tabela 17 apresenta o resultado fornecido pela rotina desenvolvida em Fortran com apoio de trabalhos desenvolvido pelo grupo do GVIBS: o valor da fase apresentada na tabela refere-se à posição de aplicação da massa de correção.

**Tabela 17 - Casos de balanceamento em dois planos, 170 mm e 335 mm.**

	Rotações [rpm]	-	m.e [g.mm]	Fase [°]	m.e [g.mm]	Fase [°]
Caso 1	2000	Calculado	76,20	41,10	12,10	182,50
		Utilizado	75,00	45,00	12,00	180,00
Caso 2	2000 - 2400	Calculado	37,60	36,30	17,50	158,10
		Utilizado	36,00	45,00	18,00	157,50
Caso 3	1800 - 2000	Calculado	63,50	49,80	0,98	206,20
		Utilizado	63,00	45,00	3,00	202,50
Caso 4	1800 - 2400	Calculado	25,60	5,70	26,90	116,60
		Utilizado	24,00	0,00	27,00	112,50
Caso 5	1800 - 2000 - 2400	Calculado	36,60	15,10	27,40	139,30
		Utilizado	36,00	22,50	27,00	135,00

Como os dados de entrada para a rotina de identificação de desbalanceamento foram fornecidos as amplitudes e fases das posições de medição localizadas em 190 mm e 355 mm e as rotações utilizadas estão apresentadas nos casos da Tabela 17. Os resultados da rotina estão indicados na linha como “Calculado” e as massas e

fases possíveis de serem utilizadas estão indicadas como “Utilizado”. As massas de correção de desbalanceamento, fornecidas no conjunto do rotorkit, foram inseridas tanto no modelo numérico como no experimental e os resultados, juntamente com a curva sem balanceamento, estão apresentados nas Figura 31 e Figura 32, respectivamente.

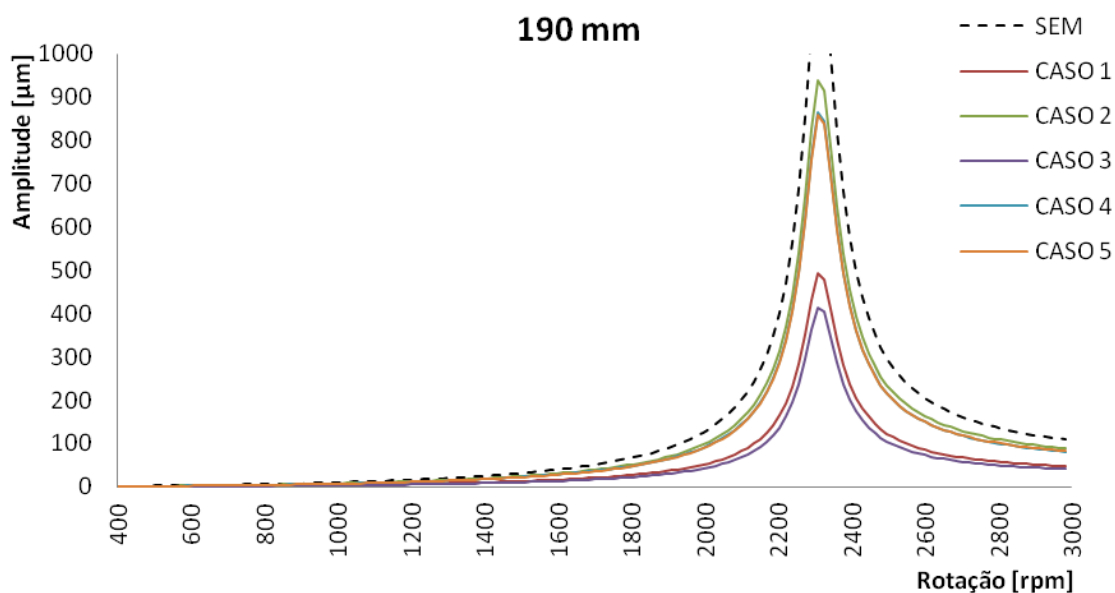
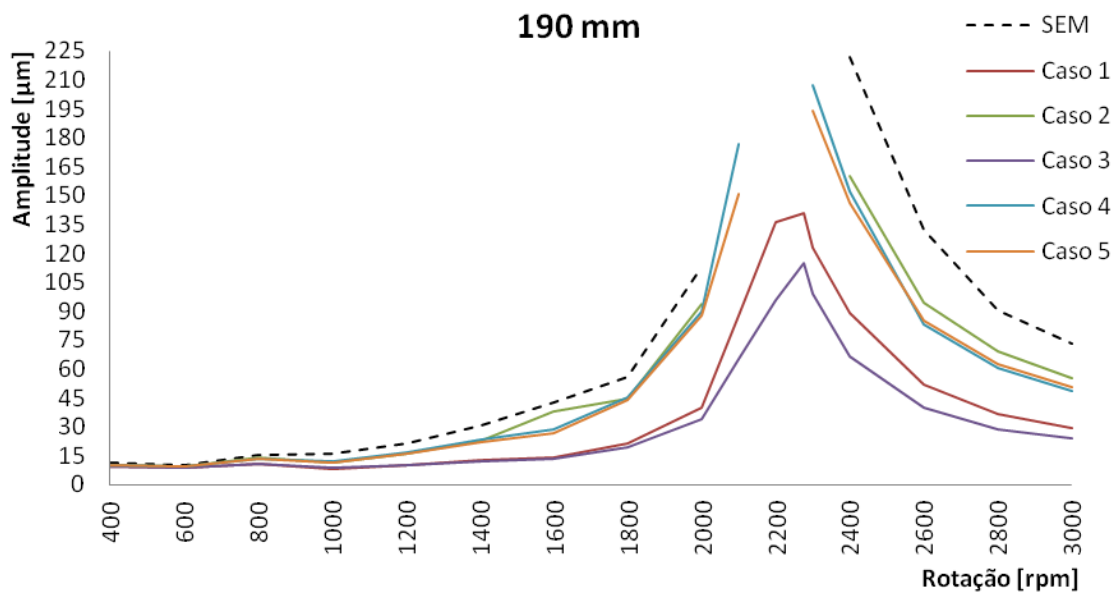


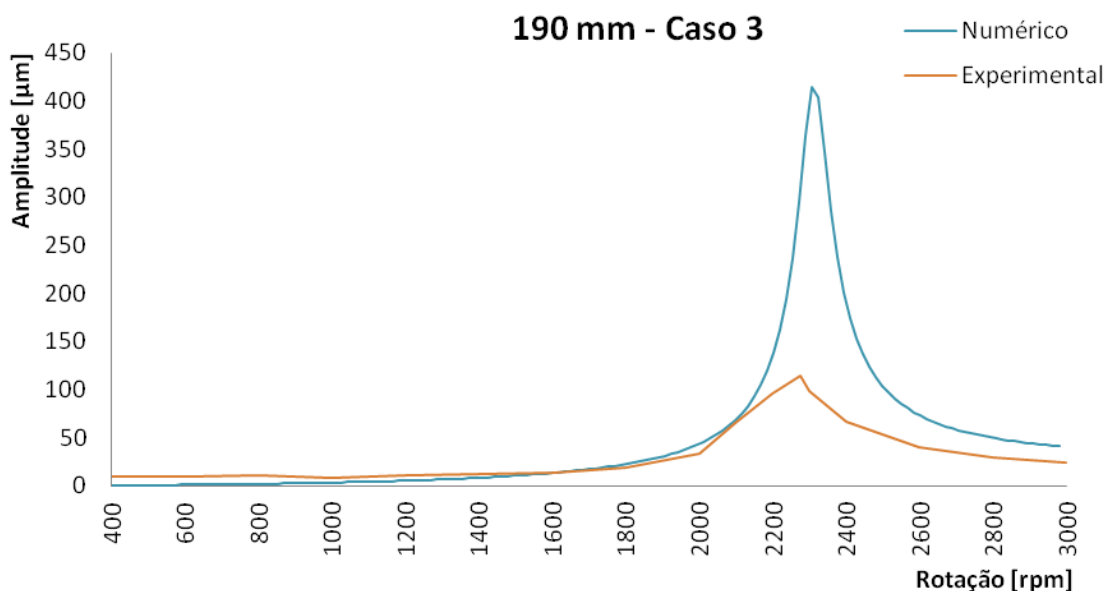
Figura 31 - Resposta ao desbalanceamento do modelo numérico.

Observando os resultados pode-se verificar que os casos que utilizaram a rotação de 2400 rpm não obtiveram uma redução significativa com a apresentada pelos resultados que não utilizaram esta rotação. Pode-se verificar na Figura 30 que a diferença entre as curvas de resposta ao desbalanceamento é maior depois do pico. Utilizar a rotação de 2400 rpm implica em respostas com massas de correção menores.



**Figura 32 - Resposta ao desbalanceamento do modelo experimental.**

Para o Caso 3 a redução na amplitude de vibração foi de 79  $\mu\text{m}$  na rotação de 2000 rpm, ou seja, foi de 69.9%. A Figura 33 mostra a comparação entre as respostas do modelo numérico e do modelo experimental, após o balanceamento para a posição de medição de 190 mm.

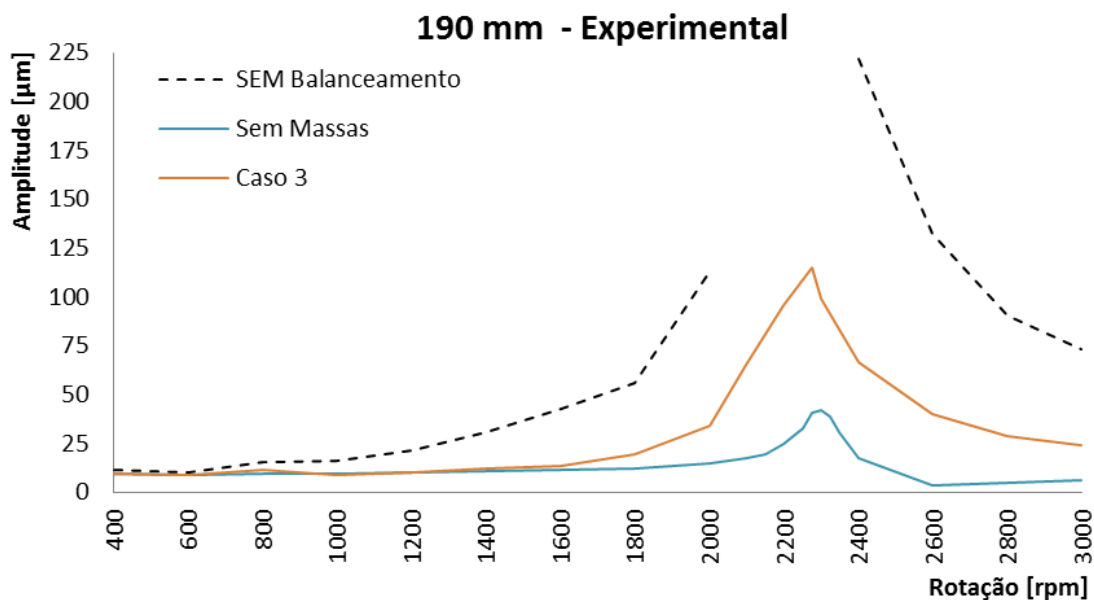


**Figura 33 - Comparação entre modelo numérico e experimental para o Caso 3.**

Verifica-se que mesmo com as diferenças entre modelo numérico e experimental, os resultados obtidos diminuiram a amplitude de vibração em todos os



casos, mesmo que de forma pouco eficaz. A Figura 34 apresenta a comparação do Caso 3 e da resposta experimental obtida do rotor sem a adição de massas de desbalanceamento e a resposta experimental com massas de desbalanceamento.



**Figura 34 - Comparação entre o Caso 3, o rotor sem massas de desbalanceamento e o rotor desbalanceado.**

Verifica-se que mesmo com os mancais parcialmente caracterizados foi possível obter uma redução aceitável na amplitude de vibração nos casos 1 e 3. A utilização da rotação de 2400 rpm nos casos 2, 4 e 5 resultou em resultados piores pois, como pode-se observar na Figura 30, após o pico a diferença entre o modelo numérico e o modelo experimental é muito maior em comparação com a amplitude de vibração antes do pico. Essa diferença é causada pela calibração dos mancais.

O Caso 3, mostrado na Figura 34 apresentou o melhor resultado. Na rotação de 2400 rpm a redução foi de 155,6 µm, ou seja, a redução na amplitude de vibração foi de aproximadamente 70%.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho de conclusão de curso foi implementada uma metodologia robusta para identificação de desbalanceamentos em rotores rígidos ou flexíveis. Uma rotina numérica de otimização foi desenvolvida para realizar a identificação a partir de medições de vibração de um rotor em conjunto com seu modelo numérico, implementado em Fortran no âmbito do Projeto PROMOVE 4931/06 FINEP/UTFPR/WEG e desenvolvimentos do Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos (GVIBS).

A rotina numérica foi avaliada e testada, onde foi estudada a forma da função objetivo, o comportamento dos algoritmos de otimização e realizadas simulações numéricas. Uma aplicação experimental com um rotor de testes também foi realizada.

Da análise dos resultados das simulações numéricas verifica-se que o número de rotações e posições influencia diretamente na forma da função objetivo e conseqüentemente no funcionamento da identificação. Observou-se que um maior número de dados de entrada resulta em uma função objetivo mais suave perto do ponto ótimo. Essa característica permite que o algoritmo de otimização encontre com mais facilidade o ponto ótimo da curva, pois não existem declives muito acentuados nem regiões muito planas, e dessa maneira os resultados são também mais precisos.

O estudo sobre mínimos locais permitiu definir a utilização de dois algoritmos de otimização em conjunto (Algoritmo Genético e método Quase-Newton). A presença de mínimos no intervalo de otimização que não correspondem ao mínimo global faz com que muitas vezes o algoritmo Quase-Newton não encontre o mínimo global, mas sim um mínimo local. Para encontrar os mínimos globais utilizou-se um algoritmo genético. Este algoritmo é empregado para se fazer uma busca global no domínio e localizar a região em que se encontra o mínimo global entregando ao algoritmo Quase-Newton um vetor projeto localizado próximo ao mínimo global. Este último refina o resultado para encontrar o valor mais próximo do mínimo global. O estudo mostrou que as massas de correção fornecidas que se mantiveram na região próxima ao mínimo global em qualquer caso foram obtidas com a combinação dos algoritmos de otimização, de modo que a combinação dos dois métodos é justificada. Os melhores resultados obtidos com os métodos isolados não podem ser

generalizados, já que a convergência dos métodos isolados não é estável quando se modifica a configuração do problema, ou seja, se utilizam diferentes dados de medição e diferentes planos de balanceamento.

Os estudos de caso numéricos mostraram que a posição dos planos de medição escolhidos influenciam fortemente no resultado da identificação de desbalanceamento. Para escolher uma posição adequada deve-se fazer um estudo dinâmico do rotor, observando o formato dos modos de vibrar desse rotor e as rotações críticas, de modo que se possam escolher adequadamente as rotações de medição. É importante também escolher corretamente os planos de balanceamento. Deve-se utilizar  $N$  planos de balanceamento para  $N$ -ésima rotação crítica que se queira controlar. As rotações críticas abaixo da  $N$ -ésima também podem ser controladas. A posição dos planos também deve ser baseada nos modos de vibrar do rotor.

Após a determinação da configuração geométrica e das propriedades dos materiais que constituem o rotor que se deseja controlar, é necessário e importante que se conheçam as propriedades dos mancais, pois estes influenciam muito nas condições dinâmicas da máquina. O modelo numérico deve ser muito bem calibrado para que tenha as mesmas características dinâmicas do rotor físico e conseqüentemente para que a rotina de identificação possa encontrar os valores corretos dos desbalanceamentos. Além disso, deve-se calibrar corretamente os equipamentos de medição, principalmente os sensores de deslocamento que têm a sensibilidade modificada para diferentes superfícies de medição.

Os resultados experimentais apresentados foram obtidos em uma pequena faixa de medição em torno da primeira rotação crítica do rotor. Os resultados não são ótimos, pois atingir uma correta caracterização dos mancais não foi possível. Entretanto, os resultados apresentados mostram que mesmo com o modelo parcialmente calibrado foi possível realizar o balanceamento do rotor. No Caso 3 obtiveram-se reduções na amplitude de vibração na ordem de 70%.

Em trabalhos futuros pode-se melhorar a aquisição dos dados experimentais e, com o modelo numérico bem calibrado, realizar mais estudos visando observar a aplicação da metodologia nas mais diversas condições de geometria e dinâmicas de um rotor.

## REFERÊNCIAS

ANSI/API STANDARD 541. **Form-wound Squirrel-Cage Induction Motors-500 Horsepower and Larger**. American Petroleum Institute, 4ª Ed. 01/06/2004, 84p.

BAVASTRI, C. A.; BRONKHORST, K. B.; DOUBRAWA FILHO, F. J.; KOKOT, A.; SILVERIO, R. B.. **Otimização Aplicada à Identificação do Desbalanceamento em Sistema Rotativos**. VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica: Campina Grande – PB, 2010. 9 p.

BAZARAA, M. S.; SHETTY, C.M.; **Nonlinear programming: Theory and algorithms**. Wiley, NewYork. USA. 560 p. 1979.

BENTLY, D. E.; HATCH, C. T.; GRISSOM, B.. **Fundamentals of Rotating Machinery Diagnostics**. Bently Pressurized Bearing Press. Minden, Nevada, USA. 2002.

BENTLY NEVADA™ Asset Condition Monitoring. **RK 4 Rotor Kit Specifications and Ordering Information**. 2007.

BRÜEL & KJÆR. Disponível em:  
<<http://www.bksv.com/Products/PULSEAnalyzerPlatform/PULSEHardware.aspx>>.  
Acesso em: 13 mai. 2012.

CARROLL, D.L., **Program GAFORTRAN**, CU Aerospace, South Wright Street Extended, Urbana, IL USA, 2004.  
Disponível no link: <http://cuaerospace.com/carroll/ga.html>. Último acesso em: 01/06/12

DOUBRAWA FILHO, F. J.; **Controle de Vibração Flexional em Sistemas Girantes Utilizando Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2008. 128 p.

ESPÍNDOLA, J. J.; **Fundamentos de Vibrações**, Apostila programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC, Brasil, 1992.

EWINS, D. J.; **Modal Testing 2; theory, practice and application**. [S.1.]: Research Studies Press Ltd., 2000.

FARIAS, F. M. N.; RIBAS, R. A.. **Caracterização Dinâmica de Rotores Trabalhando a Elevadas Rotações: Comportamento de Mancais Hidrodinâmicos**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Industrial Mecânica), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba 2005. 146 p.

GUNT Equipment for Engineering Education. Disponível em:  
<[http://www.usdidactic.com/html/i3610\\_Zeichnung\\_Einzelheit\\_2.htm](http://www.usdidactic.com/html/i3610_Zeichnung_Einzelheit_2.htm)>. Acesso em: 27 jun. 2012.

GUNTER, E.J.. JACKSON, C. **Balancing of rigid and flexible rotors**. em Fredric F. Ehrich (Ed.): Handbook of Rotodynamics, Chapter 3, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1999. pp.3.1 – 3.117.

HAN, D.-J.. **Generalized Modal Balancing for Non-isotropic Rotor Systems**. Mechanical Systems and Signal Processing 21, 2007. p. 2137 – 2160.

INSTRUMART. Disponível em:  
<<http://www.instrumart.com/products/34694/ge-bently-nevada-3300-nsv-proximity-probes>>. Acesso em: 27 jun. 2012.

LALANNE, M.; FERRARIS, G.. **Rotordynamics Prediction in Engineering**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 1990

MEIROVITCH, L.; **Dynamics and Control of Structures**. Wiley Interscience, 1990.

MOON, J.-D.; KIM, B.-S., LEE, S.-H.. **Development of the Active Balancing Device for High-Speed Spindle System Using Influence Coefficients**. International Journal of Machine Tools & Manufacture 46, 2006. p. 978 - 987.

MUSZYNSKA, A.; **Rotordynamics**. Boca Raton, FL, USA. Taylor & Francis Group. 2005.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P.. **Numerical Recipes in Fortran: the Art of Scientific Computing**. Cambridge University Press, New York, NY, Second Edition, 1992.

SANTOS, H. L. V.; **Dinâmica de Rotores: Modelo Numérico Considerando Mancais Viscoelásticos**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2003.

SARAMAGO, S. F. P.; **Métodos de Otimização Randômica: algoritmos genéticos e “*simulated annealing*”**. Notas em Matemática Aplicada: 6. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC). São Carlos, SP. 2003.

TAN, S. G.; WANG, X.-X.. **A Theoretical Introduction to Low Speed Balancing of Flexible Rotors**: Unification and Development of the Modal Balancing and Influence Coefficient Techniques. *Journal of Sound and Vibration* 168(3), 1993. p. 385 - 394.

WANG, X.. **SQP Algorithms in Balancing Rotating Machinery**. *Mechanical Systems and Signal Processing* 20, 2007. p. 1469 - 1478.

WOWK, V.. **Machinery Vibration: Balancing**. USA: McGraw-Hill, Inc., 1994.

XU, B.; QU, L.; SUN, R.. **The Optimization Technique-Based Balancing of Flexible Rotors Without Test Runs**. *Journal of Sound and Vibration* 238(5), 2000. p. 877 - 892.

## APÊNDICE A – ARQUIVOS DE ENTRADA E SAÍDA DA ROTINA

Abaixo está apresentado o arquivo de entrada da rotina de identificação de desbalanceamento programada em Fortran.

Início do arquivo.

NPDB	NPMD	NRMD	NDMD
3	1	5	2

POSDB  
 2.5000E-1  
 5.0000E-1  
 7.5000E-1

POSMD  
 6.2500E-1

ROTMD  
 3.6000E+3  
 5.2400E+3  
 8.5200E+3  
 1.1800E+4  
 1.8360E+4

AMPMD	RX	IX	RY	IY
0.179E-4	-0.134E-5	0.134E-5	0.179E-4	0.179E-4
0.177E-4	-0.664E-5	0.664E-5	0.177E-4	0.177E-4
0.175E-3	-0.282E-3	0.282E-3	0.175E-3	0.175E-3
-0.418E-5	0.259E-4	-0.259E-4	-0.418E-5	-0.418E-5
0.176E-5	0.299E-4	-0.299E-4	0.176E-5	0.176E-5

Fim do arquivo.

Em que:

- NPDB: Número de posições de balanceamento.
- NPMD: Número de posições de medição.
- NRMD: Número de rotações de medição.
- NDMD: Número de direções de medição, x, z ou x e z.
- POSBD: Posições de balanceamento
- POSMD: Posições de medição.
- ROTMD: Rotações de medição.
- AMPMD: Amplitude de medição.

As amplitudes de medição são inseridas em valores complexos, ou seja, considerando a fase medida. Cada linha possui os valores de uma posição e uma rotação nas duas direções de medição. As amplitudes são inseridas uma abaixo da outra para todas as posições de medição de cada rotação, do mesmo modo em que está montado o vetor erro na Equação (83).

O arquivo de saída está apresentado abaixo.

Início do arquivo.

```
19/05/2012@17:03:28.9 - key [133345]
Unbalance Identification
```

```
Number of Unbalance Planes =      3
```

```
Correction Masses
```

posição(m)	me(kg.m)	fase(°)
0.25000E+00	0.2044740232E-03	0.2094167913E+03
0.50000E+00	0.1477706299E-03	0.3515732292E+00
0.75000E+00	0.6591998360E-05	0.2129435102E+03

Fim do arquivo.

O arquivo apresenta no cabeçalho a data e hora de cálculo, o título da operação feita, o número de planos utilizados no balanceamento e as massas de correção calculadas pelo método para as posições fornecidas no arquivo entrada.