

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

KILLIAN FLAVIO ALEXANDRE

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CONVECÇÃO NATURAL EM
CAVIDADES POROSAS AQUECIDAS LATERALMENTE
UTILIZANDO O MÉTODO LATTICE BOLTZMANN**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2015

KILLIAN FLAVIO ALEXANDRE

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CONVECÇÃO NATURAL EM
CAVIDADES POROSAS AQUECIDAS LATERALMENTE
UTILIZANDO O MÉTODO LATTICE BOLTZMANN**

Proposta de Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Luiz de Mello Junqueira.

Co-Orientador: MSc. Fernando César De Lai

CURITIBA

2015

TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa "Simulação Numérica da Convecção Natural em Cavidades Porosas Aquecidas Lateralmente Utilizando o Método Lattice Boltzmann", realizado pelo aluno Killian Flavio Alexandre, como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. Dr. Silvio Luiz de Mello Junqueira
DAMEC, UTFPR
Orientador

Prof. Dr. Luciano Fernando dos Santos Rossi
DAMEC, UTFPR
Avaliador

Prof. Dr. Moisés Alves Marcelino Neto
DAMEC, UTFPR
Avaliador

Curitiba, 14 de Julho de 2015.

AGRADECIMENTOS

Apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – ANP – da Financiadora de Estudos e Projetos – FINEP – e do Ministério da Ciência e Tecnologia – MCT – por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás – PRH-ANP/MCT - PRH10-UTFPR.



RESUMO

ALEXANDRE, Killian Flavio. Simulação Numérica Da Convecção Natural em Cavidades Porosas Aquecidas Lateralmente Utilizando o Método Lattice Boltzmann, 2015. 108 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curso Superior de Engenharia Mecânica. Curitiba, 2015.

Neste trabalho é investigado o fenômeno de transporte através da transferência de calor por convecção natural em uma cavidade quadrada, aquecida lateralmente, preenchida com fluido saturado e com um meio poroso homogêneo, através do método Lattice Boltzmann. Os resultados são apresentados para a variação do número de Rayleigh ($Ra = 10^3 - 10^7$), do número de Darcy ($Da = 10^{-2} - 10^{-6}$) e da porosidade da cavidade ($\phi = 0,4 - 0,9$).

A transferência de calor através do meio é avaliada pelo número de Nusselt médio da cavidade, e, pelas isotermas e linhas de corrente. Com o aumento do número de Rayleigh, observa-se a intensificação da recirculação de fluido na cavidade e, conseqüentemente, o aumento da transferência de calor. Da mesma forma, com o aumento do número de Darcy, verifica-se um aumento da permeabilidade no meio, reforçando a recirculação geral na cavidade. A variação da porosidade da cavidade apresenta pouca influência em relação aos demais parâmetros. Foi proposta uma correlação para a previsão do número de Nusselt médio na cavidade em função destas valores. A comparação com resultados da literatura permite avaliar o caráter inovativo do Método Lattice Boltzmann.

Palavras-chave: Convecção Natural, Meio Poroso, Simulação Numérica, Modelo Homogêneo, Transferência de calor, Método Lattice Boltzmann.

ABSTRACT

ALEXANDRE, Killian Flavio. Simulação Numérica Da Convecção Natural em Cavidades Porosas Aquecidas Lateralmente Utilizando o Método Lattice Boltzmann, 2015. 108 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curso Superior de Engenharia Mecânica. Curitiba, 2015.

In this work, the transport phenomenon of heat transfer through natural convection in a square cavity heated from the side is filled with saturate fluid and a homogeneous porous medium investigated, using the Lattice Boltzmann Method. Results are presented for the variation of the Rayleigh number ($Ra = 10^3 - 10^7$), the Darcy number ($Da = 10^{-2} - 10^{-6}$) and the internal porosity of the cavity ($\phi = 0,4 - 0,9$).

The heat transfer through the medium is evaluated by the average Nusselt number on the cavity, and by the isothermals and streamlines. Inceasing the Rayleigh number an intensification on the recirculation of fluid inside the cavity can be observed, and, consequently, an increase on the heat transfer. Likewise, the increase of the Darcy number enhances the whole recirculation inside the cavity as it represents an increase on the cavity's permeability. The variation on the porosity of the cavity presents a lower influence when compared to the other parameters. A correlation was proposed to predict the average Nusselt number in the cavity as a function of these parameters. Trough the comparison to benchmark results, it is possible us to evaluate the inovative character of the Lattice Boltzmann Method.

Keywords: Natural Convection, Porous Medium, Numerical Simulation, Homogeneous Porous Medium, Heat Transfer, Lattice Boltzmann Method

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 - Exemplos de meios porosos naturais: (a) Areia; (b) Arenito; (c) Calcário; (d) Madeira e (e) Pulmão humano. (Referências na nota de rodapé)	20
Figura 1.2 - Representação de um reservatório de petróleo real de óleo multifásico (Adaptado de: CEPAC, 2009)	21
Figura 1.3 - Representação de um reservatório de petróleo real de óleo multifásico (Adaptado de: CEPAC, 2009)	23
Figura 2.1 - (a) Representação de um poço de petróleo; (b) Escala macroscópica da rocha fraturada; (c) Idealização geométrica para o modelo bi-disperso; (d) Escala macroscópica do poro; (e) Escala microscópica do poro; (f) Idealização geométrica para o modelo heterogêneo	28
Figura 3.1 - Volume de Controle <i>drdc</i>	36
Figura 3.2 - Arranjo de Rede para problemas 1D.....	39
Figura 3.3 - Arranjo de rede para problemas 2D, D2Q5.....	39
Figura 3.4 - Arranjo de rede para problemas 2D, D2Q9.....	39
Figura 3.5 - Arranjo de rede para problemas 3D, D3Q15.....	40
Figura 3.6 – Arranjo de rede para problemas 3D, D3Q19.....	40
Figura 3.7 - Funções de distribuição nas fronteiras do domínio (De Meira, 2014)	47
Figura 3.8 - Representação de diferentes condições de contorno para o MLB.....	48
Figura 4.1 – Representação do problema da convecção natural em um meio homogêneo e condições de contorno.	51
Figura 5.1 - Linhas de corrente (a) e isothermas (b) para a cavidade limpa aquecida lateralmente.....	54
Figura 5.2 - Erro Percentual Relativo a Velocidade Horizontal Máxima no Meio Plano Vertical Vs. Tamanho de Lattice para número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6	56
Figura 5.3 - Erro Percentual Relativo a Velocidade Horizontal Máxima no Meio Plano Vertical Vs. Tamanho de Lattice para número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6	56
Figura 5.4 - Erro Percentual Relativo ao Número de Nusselt Médio Vs. Frequência de Relaxação para número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6	57
Figura 5.5 - Linhas de corrente (a) e isothermas (b) para a variação de tamanho de Lattice em uma cavidade limpa aquecida lateralmente com $Ra=10^6$	57
Figura 5.6 - Erro Percentual Relativo a Velocidade Horizontal Máxima no Meio Plano	

Vertical Vs. Frequência de Relaxação para um tamanho de lattice 160x160 e número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6	58
Figura 5. 7 - Erro Percentual Relativo a Velocidade Vertical Máxima no Meio Plano Horizontal Vs. Frequência de Relaxação para um tamanho de lattice 160x160 e número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6	59
Figura 5. 8 - Erro Percentual Relativo ao Número de Nusselt Médio Vs. Frequência de Relaxação para um tamanho de lattice 160x160 e número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6	59
Figura 5.9 - Linhas de Corrente (a) e Isotermas (b) para a variação de frequência de relaxação para $Ra=10^6$ e tamanho de lattice 160x160	60
Figura 5.10 - Variação do número de Rayleigh para $Da=10^{-4}$ e $\phi = 0,4$	65
Figura 5.11 - Variação do número de Nusselt com o aumento do número de Rayleigh	66
Figura 5.12 - Variação do número de Darcy para $Ra = 10^6$ e $\phi = 0,6$	67
Figura 5.13 - Linhas de corrente para variação de Darcy e Rayleigh e $\phi = 0,4$	68
Figura 5.14 - Isotermas para variação de Darcy e Rayleigh e $\phi = 0,4$	69
Figura 5.15 - Número de Nusselt médio versus número de Darcy para $Ra=10^6$ e $Ra=10^7$	70
Figura 5.16 - Variação de porosidade e número de Rayleigh para casos com número de Darcy fixos.....	70
Figura 5.17 - Linhas de corrente para variação de número de Rayleigh e Porosidade	71
Figura 5.18 - Isotermas para variação de número de Rayleigh e Porosidade.....	72
Figura 5.19 - Variação do número de Rayleigh para a correlação de previsão do número de Nusselt em cavidades preenchidas com meio poroso homogêneo	74
Figura 5.20 - Variação do número de Darcy para a correlação de previsão do número de Nusselt em cavidades preenchidas com meio poroso homogêneo.....	74
Figura 5.21 - Variação da porosidade para a correlação de previsão do número de Nusselt em cavidades preenchidas com meio poroso homogêneo.....	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Propriedades de materiais porosos comuns	30
Tabela 3. 1 - Fatores de peso para diferentes arranjos de Lattice	41
Tabela 5.1 Nu_{av} para cavidade quadrada preenchida com fluido saturado aquecida lateralmente com um tamanho de lattice 160x160	54
Tabela 5.2 - Resultados de Verificação para Cavidade Limpa e $Ra=10^5$	61
Tabela 5.3 - Resultados de Verificação para Cavidade Limpa e $Ra=10^6$	61
Tabela 5.4 - Parâmetros variados para a cavidade homogênea	63
Tabela 5.5 - Nu_{av} para cavidade homogênea aquecida lateralmente	63
Tabela 5.6 - Nu_{av} para cavidade quadrada porosa homogênea aquecida lateralmente	64

NOMENCLATURA

Letras Romanas

A	Razão de aspecto da cavidade	-
A	Área	$[m^2]$
c_p	Calor específico à pressão constante	$[J / kg.K]$
c_F	Coefficiente de Forchheimer	-
d	Comprimento característico dos blocos	$[m]$
D	Comprimento característico adimensional	-
Da	Número de Darcy	-
D / Dt	Operador derivada material	-
EP	Erro percentual relativo	-
F	Vetor força de corpo por unidade de volume	$[N / m^3]$
g	Aceleração da gravidade	$[m / s^2]$
h	Coefficiente de transferência de calor	$[W / m^2.K]$
H	Altura da cavidade	$[m]$
k	Condutividade térmica	$[W / m.K]$
K	Permeabilidade	$[m^2]$
κ	Razão de condutividade	-
L	Largura da cavidade	$[m]$
N	Número de blocos	-
n	Vetor unitário na direção normal	-
Nu	Número de Nusselt	-
P	Pressão	$[Pa]$
P	Pressão adimensional	-

Pr	Número de Prandtl	-
q''	Fluxo de calor em uma superfície	$[W / m^2]$
q'''	Geração de energia interna	$[W / m^3]$
Ra	Número de Rayleigh	-
Re	Número de Reynolds	-
S	Termo fonte para o meio poroso	-
t	Tempo	$[s]$
T	Temperatura	$[^{\circ}C]$
u	Velocidade na direção x	$[m / s]$
U	Velocidade adimensional na direção X	-
V	Vetor velocidade em coordenada cartesiana	$[m / s]$
v	Velocidade na direção y	$[m / s]$
V	Velocidade adimensional na direção Y	-
V	Volume	$[m^3]$
x, y, z	Coordenadas cartesianas	$[m]$
X, Y	Coordenadas cartesianas adimensionais	-

Letras Gregas

α	Difusividade térmica	$[m^2 / s]$
β	Coefficiente de expansão térmica	$[K^{-1}]$
Δx	Comprimento horizontal dos volumes de controle	-
Δy	Comprimento vertical dos volumes de controle	-
ϕ	Porosidade	-
Θ_{cal}	Valor calculado	-

Θ_{ref}	Valor de referência	-
μ	Viscosidade dinâmica	$[kg / m.s]$
ν	Viscosidade cinemática	$[m^2 / s]$
θ	Temperatura adimensional	-
ρ	Massa específica	$[kg / m^3]$
ψ	Função linha de corrente	-

Subscritos

av	Médio
B	Blocos
C	Parede resfriada
E	Externo
f	Fluido
H	Parede aquecida
I	Interno
L	Local
m	Meio poroso
s	Sólido
T	Total

SUMÁRIO

RESUMO	
ABSTRACT	
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	
LISTA DE TABELAS	
NOMENCLATURA	
SUMÁRIO	
1. INTRODUÇÃO	19
1.1 Meios Porosos	19
1.2 Convecção Natural em Meios Porosos	20
1.3 Método Lattice Boltzmann	22
1.4 Caracterização do Problema	23
1.5 Objetivos	24
1.6 Justificativa	24
1.7 Conteúdo do Trabalho	25
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
2.1 Meios Porosos	27
2.2 Convecção Natural em Cavidades Porosas	31
2.3 O Método Lattice Boltzmann	33
3. FUNDAMENTOS DO MÉTODO LATTICE BOLTZMANN	35
3.1 Equação de transporte de Boltzmann	35
3.2 Arranjo de Lattices	38
3.2.1 Arranjos de Rede 1D	38
3.2.2 Arranjos de Rede 2D	39
3.2.3 Arranjos de Rede 3D	40
3.3 Formulação Matemática	41

	17	
3.3.1	Equações de Conservação	41
3.3.2	Aproximação BGK	42
3.3.3	Termo de força	42
3.3.4	Processos de colisão e deslocamento	43
3.3.5	Frequência de colisão	44
3.3.6	Função de equilíbrio	44
3.3.7	Termo de Força no LBM	45
3.3.8	Equações para o Campo de Temperatura	46
3.4	Condições de Contorno	47
3.4.1	<i>Bounce-Back</i>	48
3.4.1	Parede adiabática	49
3.4.1	Temperatura constante	49
4.	GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO	50
4.1	Hipóteses Simplificadoras	50
4.2	Geometria do Problema e Condições de Contorno	51
5.	RESULTADOS	52
5.1	Cavidade Limpa Aquecida Lateralmente	52
5.2	Influência do Tamanho de Lattice	55
5.2.1	Influência da Frequência de Relaxação	58
5.2.2	Resultados de Verificação para a Cavidade Limpa	60
5.3	Simulação Numérica Da Cavidade Homogênea	62
5.3.1	Efeito da Variação dos Parâmetros para a Cavidade Homogênea	62
5.3.2	Teste de Malha para Cavidade Homogênea	63
5.3.3	Resultados de Verificação	64
5.3.1	Efeito da Variação do Número de Rayleigh	64
5.3.1.1	Efeito da Variação do Número de Darcy	66
5.3.2	Efeito da Variação de Porosidade	71

	18
5.3.3 Previsão do Número de Nusselt Médio na Cavidade	73
6. CONCLUSÕES	77
REFERÊNCIAS	78
APÊNDICE A	83
APÊNDICE B	89
APÊNDICE C	97

1. INTRODUÇÃO

1.1 Meios Porosos

Um meio poroso é descrito como uma matriz sólida, com vazios, interconectados ou não, em seu interior. Supõe-se que esta matriz seja rígida ou com deformação desprezível (NIELD e BEJAN, 2006). A interconectividade dos poros permite o escoamento de fluidos através do meio poroso. Na natureza encontram-se alguns exemplos de meios porosos, tais como areia, arenito, calcário, madeira e até mesmo o pulmão humano (WHITAKER, 1984), algumas dessas formas são mostradas na Figura 1.1.

Uma classificação sugerida por SCHEIDEGGER (1974) *apud* MANEGOLD (1937) categoriza os meios porosos de acordo com suas classes, pelo tipo dos poros ou ainda pela disposição destes. Na classificação por classe, os meios podem ser caracterizados como vazios, capilarizados ou espaços forçados. Os meios vazios são caracterizados pela insignificância do efeito das paredes sobre o fenômeno hidrodinâmico em seu interior. Nos meios capilarizados, as paredes exercem alguma influência sobre o escoamento, mas a influência sobre a estrutura molecular do fluido é desprezível. Já nos espaços forçados, as paredes exercem influência tanto sobre os fenômenos hidrodinâmicos quanto sobre a estrutura molecular do fluido.

Na classificação relativa ao tipo dos poros, os meios porosos podem ter poros interconectados ou não. Nos poros interconectados, a parte sólida do meio representa a fase dispersa. Os meios porosos ainda podem ser classificados como uniformes, quando os poros estão distribuídos de maneira regular, no meio; ou randômicos, quando os poros estão distribuídos de maneira aleatória.

O estudo de fenômenos de transporte, em meios porosos, tem aplicações em mecânica dos solos, hidrologia, engenharia petrolífera, purificação de água, filtragem industrial, geração de energia, refrigeração, engenharia têxtil e diversas outras áreas de atuação (LISBOA,2001).

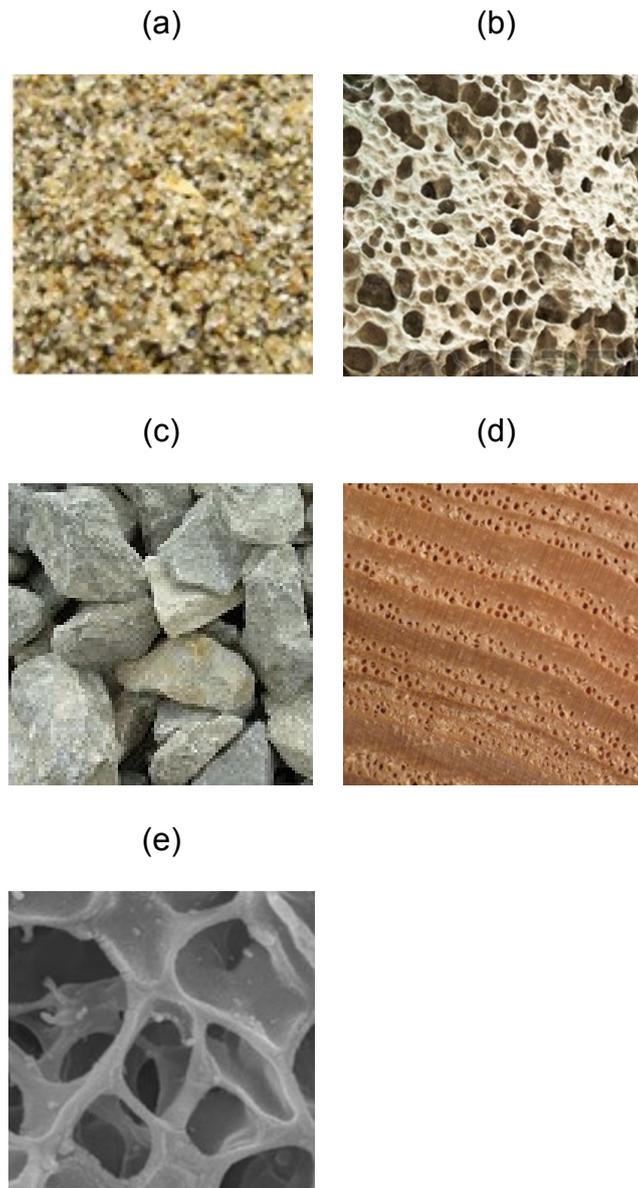


Figura 1.1 - Exemplos de meios porosos naturais: (a) Areia; (b) Arenito; (c) Calcário; (d) Madeira e (e) Pulmão humano. (Referências na nota de rodapé)¹

1.2 Convecção Natural em Meios Porosos

O fenômeno de transporte da convecção natural ocorre devido à presença de gradientes de massa específica e forças de corpo no interior de um fluido. A presença de um gradiente de temperatura é a forma mais usual de fazer com que gradientes de massa específica sejam criados no meio, e,

¹ Referências da Figura 1.1: (a) http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Third_beach_sand.jpg (b) http://www.123rf.com/photo_10872181_porous-sandstone-structure.html. (c) http://broadwaysand.com/?page_id=24. (d) <http://www.azonano.com/news.aspx?newsID=25805>. (e) http://www.degruyter.com/view/j/ejnm.2014.6.issue-3/ejnm-2014-0019/graphic/ejnm-2014-0019_fig4.jpg

consequentemente, gere forças de empuxo, que fazem com que o escoamento seja mantido (BEJAN, 1995).

A convecção natural em meios porosos pode ser observada em diversas aplicações industriais como extração de petróleo, recuperação de energia geotérmica, escoamento através de filtros e até mesmo na fabricação de isolantes térmicos (RAJU *et al.*, 2012).

Uma vez que reservatórios de petróleo e gás são, frequentemente, representados como domínios porosos contendo fraturas em seu interior, a indústria do petróleo tem mostrado um grande interesse no estudo de meios porosos nos últimos anos (BEAR, 1993).

Além de óleo cru, muitos poços contêm quantidades significativas de água, gás e, muitas vezes, areia. Estes poços são chamados de poços de óleo-multifásico (BOYUN, 2007), e uma representação destes poços é mostrada na Figura 1.2. Levando em consideração que o estudo de escoamentos multifásicos é de um nível de complexidade mais elevado, o presente trabalho irá considerar apenas escoamentos monofásicos.

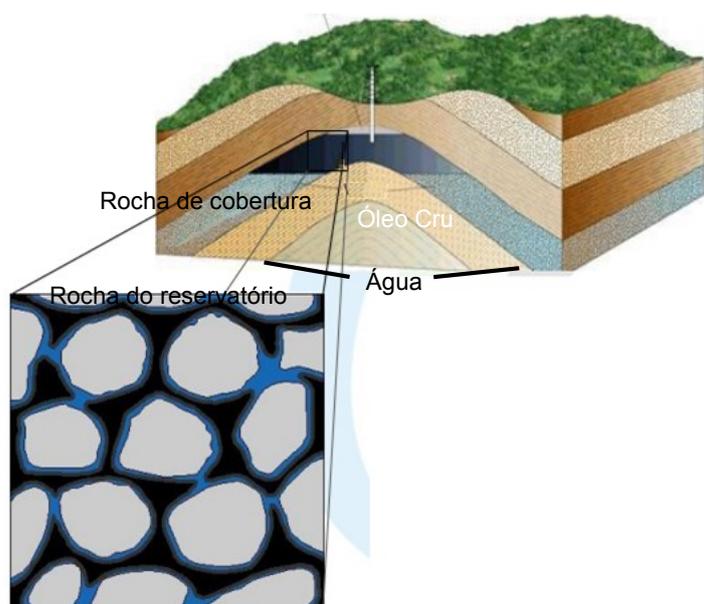


Figura 1.2 - Representação de um reservatório de petróleo real de óleo multifásico (Adaptado de: CEPAC, 2009)

Devido à sua complexa descrição matemática e frequente ocorrência em processos de engenharia e aplicações científicas, surge a necessidade de se desenvolver modelos capazes de representar os fenômenos de transferência de calor e massa que ocorrem nestes domínios.

1.3 Método Lattice Boltzmann

O método Lattice Boltzmann foi introduzido, no fim da década de 1980, por McNamara e Zanetti, como uma alternativa para a simulação numérica de equações de transferência de calor, quantidade de movimento e massa. As abordagens anteriores incluem a abordagem contínua, de escala macroscópica, caracterizada pela solução das equações de conservação de energia, massa e quantidade de movimento, em um volume infinitesimal, para a obtenção de equações diferenciais que são então resolvidas através de um método numérico contínuo como o método das diferenças finitas ou dos volumes finitos. Outra abordagem, microscópica, baseia-se no estudo da dinâmica molecular, onde cada partícula que forma o meio é tratada de maneira individual (MOHAMAD, 2011).

O MLB é apresentado como uma técnica de modelagem que se encontra em uma escala mesoscópica, isto é, uma escala intermediária entre as abordagens macroscópica e microscópica citadas anteriormente, tornando-o ideal para a modelagem de determinadas classes de fluidos complexos (CHIN, 2005).

O MLB apresenta algumas vantagens em sua implementação, como por exemplo, a simplicidade na alteração de condições de contorno, facilitando sua aplicação em fenômenos complexos. Pode-se citar como exemplos recentes de suas aplicações: reações químicas, escoamentos em sistemas biológicos, escoamentos multifásicos e escoamento e transferência de calor em meios porosos (CHEN, 2014; MOHAMAD, 2011).

1.4 Caracterização do Problema

A representação do problema da convecção natural em meios porosos pode ser difícil de descrever devido ao caráter aleatório de sua geometria. Levando em conta a dificuldade de se representar meios porosos reais, foram criadas diversas representações geométricas, sem descaracterizar o problema, visando à obtenção de propriedades que se assimilem às encontradas em um problema físico real.

O presente trabalho aborda o modelo homogêneo de representação de meios porosos. Esse modelo considera o meio como sendo uniforme e resolve as equações de conservação de massa, energia e quantidade de movimento para todo o meio. Mais detalhes sobre as diferentes representações de meios porosos serão abordados na seção 2.1.1.

O processo de convecção natural em uma cavidade preenchida somente com fluido, sem a presença de meio poroso, está representado na Figura 1.3, onde também são mostradas as condições de contorno utilizadas: parede isotermicamente aquecida, no lado esquerdo, e resfriada no lado direito, com paredes adiabáticas no topo e fundo da cavidade.

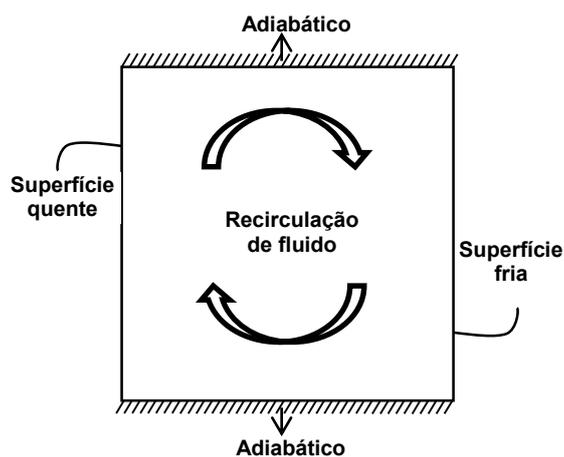


Figura 1.3 - Representação de um reservatório de petróleo real de óleo multifásico (Adaptado de: CEPAC, 2009)

Os processos de escoamento e transferência de calor em meios porosos sofrem alterações em função da variação de parâmetros hidráulicos e características geométricas. Através da variação dessas propriedades, é possível analisar sua influência sobre o escoamento e transferência de calor.

1.5 Objetivos

A proposta deste trabalho é realizar a investigação numérica da convecção natural através de uma cavidade preenchida com fluido saturado e com um meio poroso homogêneo, aquecido lateralmente, aplicando-se o Método Lattice Boltzmann através da criação de um programa computacional. A variação das propriedades termo-hidráulicas exerce influência sobre o comportamento do escoamento e da transferência de calor em meios porosos, assim como a variação de parâmetros numéricos próprios do método.

O foco deste trabalho será a investigação da variação de parâmetros geométricos (e.g. porosidade), numéricos (e.g. tamanho de lattice e fator de relaxação) e termo-hidráulicos (e.g. intensidade de recirculação do fluido) sobre a transferência de calor por convecção através do meio e da variação de parâmetros relacionados ao MLB.

O modelo matemático adotado para a descrição do fenômeno da convecção natural em cavidades é o proposto por Guo (2005). Para o problema da cavidade preenchida com fluido saturado, será utilizada uma porosidade de valor unitário, representando assim a ausência de fase sólida no meio, além de servir como uma etapa de verificação do código computacional.

1.6 Justificativa

Os processos de transferência de calor por convecção natural envolvendo meios porosos são assuntos de grande interesse e importância em diferentes campos de aplicação científica e de engenharia em diferentes áreas como mecânica dos solos, engenharia de petróleo, geração de energia, refrigeração,

dispersão de poluentes e engenharia biomédica. Em particular, é representativo o número de reservatórios de petróleo, gás e de água que são constituídos por meios fraturados, os quais podem ser representados por um meio poroso.

A presença de escalas de ordem de grandeza muito diferentes é uma das principais dificuldades na simulação numérica de convecção natural em meios porosos. Essa variação de escala impõe dificuldades ainda maiores para a simulação numérica de processos convectivos nesse tipo de domínio no que diz respeito a sua representação geométrica e, por isso, são considerados modelos que representem esses meios.

A elaboração deste trabalho necessita de conhecimentos teóricos diretamente relacionados às disciplinas de graduação, tais como Mecânica dos Fluidos, Transferência de Calor e Métodos Numéricos, bem como o conhecimento de disciplinas extracurriculares necessários à aplicação do método, como conhecimentos de programação em Fortran para o desenvolvimento do programa computacional para a aplicação do método.

1.7 Conteúdo do Trabalho

O presente documento é composto por seis capítulos, o primeiro contém uma explicação da importância do estudo de fenômenos de transporte em meios porosos, em especial da convecção natural, e posteriormente são apresentados o problema e os objetivos a serem estudados.

O segundo capítulo constitui da revisão bibliográfica, que aborda informações de grande importância para o entendimento e desenvolvimento do projeto. Além disso, o capítulo 2 apresenta alguns trabalhos que tratam de temas semelhantes ao proposto no presente trabalho, além de um histórico sobre o método Lattice Boltzmann.

O capítulo 3 contém a fundamentação do método Lattice Boltzmann. Nele é desenvolvida a dedução da equação do transporte de Boltzmann e são apresentadas as aproximações utilizadas na modelagem. Por fim, são apresentadas as condições de contorno usadas na definição do problema com o uso do MLB.

O capítulo 4 apresenta a formulação do problema. Inicialmente são expressas as hipóteses simplificadoras admitidas no desenvolvimento do trabalho, e, em seguida, a geometria do problema é definida, assim como suas condições de contorno e grandezas que caracterizam o problema.

O capítulo 5 apresenta e discute os resultados de simulações e é dividido em duas seções principais: a seção 5.1, que mostra os resultados das simulações da cavidade limpa; e a seção 5.2, que apresenta os principais resultados para a simulação da cavidade preenchida com um meio homogêneo utilizando o MLB. São discutidos a influência da variação de parâmetros termo-hidráulicos e de parâmetros do MLB sobre a troca de calor por convecção.

Finalmente, o capítulo 6 constitui uma conclusão do trabalho, resumindo os principais resultados obtidos e apresentando algumas possibilidades de continuidade dos estudos e aplicações do método Lattice Boltzmann.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo contém alguns conceitos e informações importantes para o desenvolvimento do projeto de pesquisa. Primeiramente são exibidos conceitos e diferentes modelos de representação de meios porosos e, em seguida, é exibida uma revisão da literatura a respeito do estudo da convecção natural e do método Lattice Boltzmann.

2.1 Meios Porosos

Meios porosos podem ser definidos como matrizes rígidas ou de deformação desprezível com espaços vazios em seu interior, isolados ou interconectados, permitindo o escoamento de fluidos (Nield e Bejan, 2006).

2.1.1 Modelos de Representação

Modelos que permitam o estudo do meio poroso são criados com o intuito de realizar aproximações quanto à forma e à disposição dos poros, utilizando a técnica da média volumétrica. Dentre os diversos modelos existentes, pode-se citar os modelos homogêneo, heterogêneo e bi-disperso, que caracterizam diferentes níveis de detalhamento de um meio poroso. Pode-se observar a geometria para cada um desses modelos nos detalhes (d), (f) e (c) da Figura 2.1, respectivamente.

O modelo homogêneo, também chamado de poro-contínuo, considera o sistema a partir de uma escala macroscópica que é diversas ordens de grandeza maior que as distâncias intermoleculares, ou seja, os detalhes da geometria dos poros não são considerados relevantes, e o comportamento do meio pode ser analisado através de uma média sobre um volume elementar representativo (VAFAI, 2000).

No modelo heterogêneo, também denominado modelo contínuo, as fases constituintes são consideradas separadamente, e descritas por diferentes equações governantes, ou seja, uma fase para descrever o domínio sólido e

outra para descrever o domínio fluido. Nesta abordagem, uma rede de poros conectados e uma matriz sólida desconectada representam o meio poroso, sendo que os detalhes da geometria da matriz sólida são descritos, pois influenciam diretamente o comportamento do fluido. Este modelo é da ordem de grandeza dos poros, sendo também chamado de modelo microscópico (MERRIKH e LAGE, 2005).

Um meio poroso bi-disperso (*BDPM*) é definido por Nield e Bejan (2006) como um grupo de grandes partículas que são formadas por um aglomerado de pequenas partículas, ou ainda como um meio poroso microscópico (heterogêneo) onde a fase sólida é substituída por um meio poroso macroscópico (homogêneo).

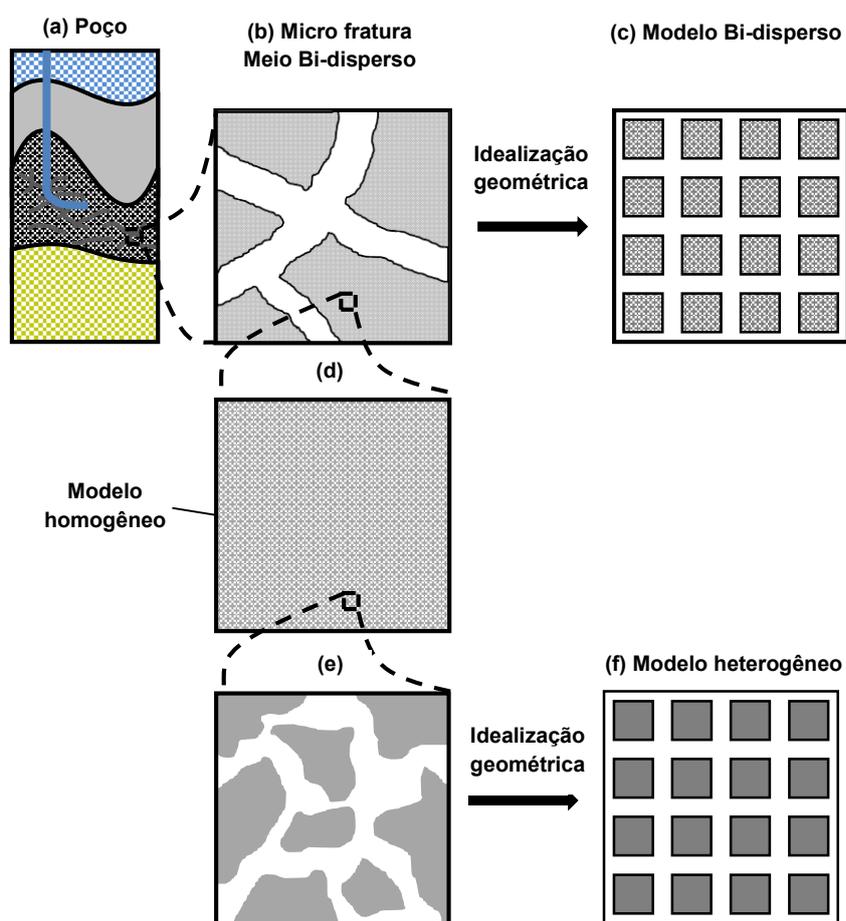


Figura 2.1 - (a) Representação de um poço de petróleo; (b) Escala macroscópica da rocha fraturada; (c) Idealização geométrica para o modelo bi-disperso; (d) Escala macroscópica do poro; (e) Escala microscópica do poro; (f) Idealização geométrica para o modelo heterogêneo. Adaptado de De Lai (2011)

2.1.2 Porosidade

A porosidade de meio pode ser definida como a fração do volume do meio que é ocupada por poros, ou ainda como a razão do volume ocupado por espaços vazios ou fluido, V_f , pelo volume total do meio, V_T , como pode ser visto na Equação (1).

$$\phi = \frac{V_f}{V_T} \quad (1)$$

Se tomarmos a seção transversal de um meio isotrópico, obtém-se a porosidade do meio dividindo a área de vazios, pela área total, A_T como mostrado na Equação (2).

$$\phi = \frac{A_f}{A_T} \quad (2)$$

2.1.3 Permeabilidade

A permeabilidade é um parâmetro hidráulico que depende, dentre outros, da geometria do meio e está relacionado ao número de Darcy (Da). Esse parâmetro pode ser visto como a facilidade de um fluido em atravessar um meio poroso.

Para um fluido com escoamento laminar, lento e incompressível, através de um meio poroso isotrópico, pode-se obter a expressão (3) para a permeabilidade (NIELD e BEJAN, 2006), conhecida como Lei de Darcy para a permeabilidade, onde K_p é a constante de permeabilidade darciana ou viscosa, ∇P é o gradiente de pressão, μ_f é a viscosidade dinâmica do fluido e v é o vetor velocidade. A constante K_p depende, exclusivamente, da geometria do meio do poroso, sendo assim independente das características do fluido. AO número de

Darcy é definido em função destes parâmetros na Equação (4). (NAKAYAMA, 1995 e NIELD e BEJAN, 2006).

$$K_p = -\frac{\mu_f \bar{v}}{\nabla p} \quad (3)$$

$$Da = \frac{K}{H^2} \quad (4)$$

A Tabela 2.1 mostra os valores de porosidade e permeabilidade para alguns materiais porosos comuns (NIELD e BEJAN, 2006).

Tabela 2.1 - Propriedades de materiais porosos comuns

Material	ϕ	$K_p (cm^2)$
Fibra de Vidro	0,88 – 0,93	$5 \times 10^{-12} - 3 \times 10^{-8}$
Areia	0,37 – 0,50	$2 \times 10^{-7} - 1.8 \times 10^{-6}$
Areia Betuminosa	0,08 – 0,38	-
Terra	0,43 – 0,54	$2.9 \times 10^{-9} - 1.4 \times 10^{-7}$
Couro Animal	0,56 – 0,59	$9.5 \times 10^{-10} - 1.2 \times 10^{-9}$

2.1.4 Intensidade de Recirculação

A caracterização do problema é realizada através de parâmetros adimensionais. O número de Prandtl Pr expressa a relação entre difusão e quantidade de movimento dentro do fluido e o número de Rayleigh Ra é associado aos fluxos conduzidos por empuxo e as forças viscosas, como mostrado na Equação (5), onde g representa a aceleração da gravidade, β o coeficiente de expansão térmica, ν_f a viscosidade cinemática do fluido e α_f o coeficiente de difusão térmica.

$$Ra = \frac{g\beta H^3(T_H - T_C)}{\nu_f \alpha_f} \quad (5)$$

2.2 Convecção Natural em Cavidades Porosas

Um dos primeiros trabalhos em convecção natural é devido a Bénard (1901), que realizou uma análise experimental da convecção induzida por um diferencial de temperaturas em um filme líquido. Outro importante trabalho para o estudo do fenômeno foi desenvolvido por Rayleigh (1916), que analisa a intensidade de recirculação de fluido que ocorre devido à convecção natural.

Henry Darcy realizou experimentos de escoamento através de um meio poroso que deram origem à Lei de Darcy, válida para escoamentos de baixa velocidade, incompressíveis e isotérmicos no interior de um domínio poroso, com fluido newtoniano (LAGE *apud* DARCY, 1997).

Com relação ao estudo numérico, diversos autores realizaram trabalhos sobre o fenômeno da convecção natural em cavidades quadradas, aquecidas lateralmente, e saturadas com fluido. Uma compilação desses trabalhos foi proposta por Vahl Davis (1983), podendo, então, ser usada com uma solução de referência para esses problemas, onde os autores citados resolveram este problema utilizando o método dos volumes finitos (MVF).

House *et. al.* (1990) investigaram o fenômeno da convecção natural em uma cavidade preenchida com um bloco sólido condutor de calor (meio heterogêneo) utilizando também o método dos volumes finitos. Neste trabalho foi analisada a influência da condutividade térmica do bloco, no interior da cavidade, sobre o escoamento e sobre a troca de calor. Concluiu-se que a transferência de calor através da cavidade pode ser reduzida pela presença de blocos sólidos, em seu interior, se comparados com a cavidade preenchida somente com fase fluida, para uma razão de condutividade térmica sólido-fluido maior ou igual a unidade.

O estudo de uma cavidade porosa composta por um domínio homogêneo foi realizado por Nithiarasu *et. al.* (1997), onde uma ampla faixa de resultados usando esta abordagem foi publicada. Como conclusão deste trabalho, foi

observado que a transferência de calor por convecção natural, através do meio, diminui quando a permeabilidade do meio decresce, e a troca de calor por condução aumenta quando a razão entre a condutividade térmica da parede sólida e do fluido é reduzida.

Massarotti *et al.* (2003) e Braga e de Lemos (2005) compararam dois modelos numéricos de representação para meios porosos, os modelos homogêneo e heterogêneo. Braga e de Lemos (2005) concluíram que os resultados para as duas abordagens, utilizando o mesmo número de Rayleigh, eram diferentes e que a diferença entre eles aumenta com a diminuição do número de Darcy, no modelo homogêneo, ou com a diminuição do número de blocos, no modelo heterogêneo.

Merrick e Lage (2005) publicaram um estudo onde foi variado o número de blocos no interior de uma cavidade, a razão de condutividade térmica sólido-fluido e o número de Rayleigh, através de simulações utilizando também o MVF. Como resultado, propuseram uma expressão para prever o fenômeno da interferência na região de camada limite da cavidade.

A convecção natural em uma cavidade preenchida por um meio bi-disperso e aquecida lateralmente foi analisada por Revnic *et al.* (2009). Nesse trabalho, o modelo adotado foi o de esferas porosas em contato umas com as outras, onde os seus interiores são compostos de meios porosos homogêneos.

Esse fenômeno também foi estudado por Narasimhan e Reddy (2010), porém com uma matriz porosa composta por blocos quadrados preenchidos por um meio poroso homogêneo. Através de variação de parâmetros, tais como número de Rayleigh, quantidade de blocos, porosidade macroscópica e número de Darcy, é proposta uma correlação para se prever os resultados em termos do número de Nusselt para diferentes configurações.

De Lai *et al.* (2011) estudaram a convecção natural em uma cavidade aquecida lateralmente e preenchida com meio poroso de dupla porosidade-permeabilidade. Foi investigada a interferência dos blocos sobre a região de camada limite sob o ponto de vista de direções preferenciais de escoamento e da troca térmica, no interior da cavidade. Conclui-se que a inserção de fraturas

em um meio homogêneo, a redução do número de blocos e o aumento da recirculação de fluido intensificam a troca de calor através do domínio.

2.3 O Método Lattice Boltzmann

O método Lattice Boltzmann foi introduzido em 1988 por McNamara e Zanetti como uma solução para problemas encontrados com o modelo lattice gás celular automata (LGCA) e tem, desde então, se mostrado como uma alternativa para problemas de dinâmica de fluidos e transferência de calor (MOHAMAD, 2011).

No modelo LGCA, um sistema é representado por uma malha regular e uniforme de unidades que assumem valores discretos e relacionados às propriedades físicas do meio num instante de tempo e em uma determinada posição. Os valores de cada unidade são atualizados levando em conta os valores das células adjacentes, conforme ocorrem avanços no tempo (WOLFRAM, 1983).

A partir dos estudos do método LGCA, surgiu o método Lattice Boltzmann, que considera uma escala mesoscópica, isto é, intermediária entre as análises macro e microscópicas. Nos métodos convencionais de dinâmica dos fluidos computacional (CFD), as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia são resolvidas para cada um dos nós. No MLB, os fenômenos físicos que ocorrem no meio são descritos pelos processos de colisão e deslocamento de conjuntos de partículas, representadas por funções de distribuição. A flexibilidade do método levou a modelos para diversas equações diferenciais parciais, incluindo a equação de Navier Stokes (WOLFGLADROW, 2000; CHEN; DOOLEN, 1998).

A complexidade do termo de colisão na equação de Boltzmann é uma das dificuldades inerentes ao método, uma aproximação utilizando o operador de colisão, com base no modelo desenvolvido por Bhatnagar, Gross e Krook (BGK) em 1954, é comumente usada como simplificação (DELLAR, 2003).

Sukop e Thorne (2006) realizaram um trabalho introdutório sobre a modelagem de problemas usando o MLB, de um ponto de vista mais objetivo, sem se aprofundar em aspectos matemáticos do método.

O MLB tem sido aplicado em diversos problemas de transferência de calor por convecção natural e também na simulação numérica de fenômenos envolvendo meios porosos (ZHAO *et al.*, 2010; CHEN; DOOLEN, 1998).

Uma avaliação dos três principais esquemas para adição do termo força que representa a convecção natural no MLB usando a aproximação BGK foi executada por Mohamad e Kuzmin (2010). A transferência de calor por convecção natural foi analisada em cavidades abertas e fechadas, preenchidas com fluido saturado e com diferentes condições de contorno. Os resultados foram comparados com uma solução, utilizando o método dos volumes finitos, e os resultados para os três esquemas foram semelhantes.

Um estudo da convecção natural em meios porosos com o uso do MLB, onde são explorados efeitos da variação de forma dos obstáculos sólidos, do tamanho da cavidade e da porosidade foi apresentado por Zhao *et al.* (2010). Seus resultados mostraram que os efeitos da transferência de calor aumentam com a queda da quantidade de obstáculos e que cavidades preenchidas com obstáculos quadrados possuem melhor desempenho em termos térmicos do que aquelas preenchidas com esferas.

Guo *et al.* (2005) exploraram a variação da viscosidade com a temperatura em uma cavidade preenchida com meio poroso homogêneo utilizando o MLB, e os resultados foram comparados com a abordagem utilizando viscosidade constante. O estudo mostrou que a variação da viscosidade com a temperatura aumenta a troca térmica.

Com o objetivo de prosseguir com os estudos em cavidades preenchidas com meio poroso homogêneo, o presente trabalho tem como finalidade uma análise do fenômeno da convecção natural induzida por um gradiente horizontal de temperaturas e a aplicação do método Lattice Boltzmann. Uma análise dos efeitos de variação da porosidade interna, da intensidade de recirculação e da permeabilidade do meio será realizada para avaliar seus efeitos sobre a transferência de calor na cavidade.

3. FUNDAMENTOS DO MÉTODO LATTICE BOLTZMANN

Neste capítulo são abordados os principais aspectos da formulação matemática do Método Lattice Boltzmann. Inicialmente será demonstrada a dedução da equação do transporte de Boltzmann, principal equação do método, seguido da apresentação dos possíveis arranjos de Lattice e o cálculo das variáveis macroscópicas. Finalmente, serão apresentadas as metodologias de modelagem da força devido à presença do meio poroso, as equações dos processos de colisão e deslocamento e das condições de contorno utilizadas no problema.

3.1 Equação de transporte de Boltzmann

Um sistema S composto por N partículas pode ser descrito sob a forma de uma função distribuição $f^N(r_1, \dots, r_N, c_1, \dots, c_N, t)$ tal que $f^N(r_1, \dots, r_N, c_1, \dots, c_N, t) dr_1 \dots dr_N, dc_1 \dots dc_N$ indica a probabilidade de uma partícula i estar na região entre r_i e $r_i + dr_i$ com velocidade entre c_i e $c_i + dc_i$, num instante de tempo t (Wolf-Gladrow, 2000).

Segundo Sukop (2006), o caminho médio entre as partículas pode ser considerado longo o suficiente para aproximar o sistema como um grupo de partículas representadas por funções de distribuição de primeira ordem, definidas na Equação (6), onde dN / N representa a porcentagem de partículas localizadas entre r e $r + dr$, e com velocidades entre c e $c + dc$.

$$f(r, c, t) dr dc = \frac{dN}{N} \quad (6)$$

A dedução da equação de transporte de Boltzmann pode ser realizada através da quantidade de partículas dentro de um volume de controle $drdc$ que

representa o espaço físico entre r e $r + dr$ e o espaço de velocidades entre c e $c + dc$ como representado na Figura 3.1.

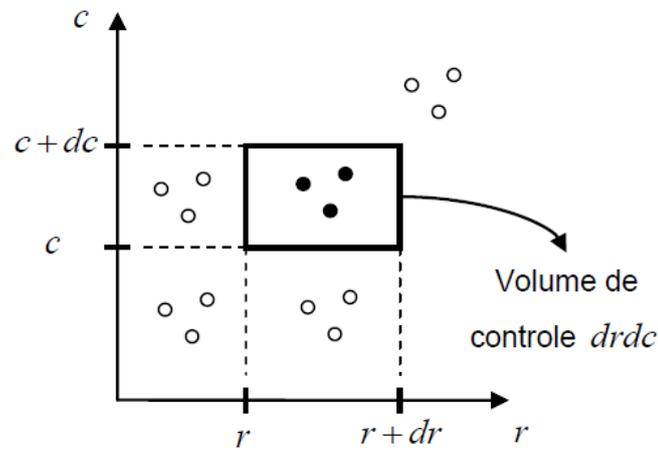


Figura 3.1 - Volume de Controle $drdc$.

O fluxo de partículas através da superfície de $drdc$ pode se dar por três processos: F_{dr} , F_{dc} e F_{Ω} . O termo F_{dr} representa as partículas com velocidade entre c e $c + dc$ que saem ou entram no elemento de volume dr , isto é, no espaço físico. F_{dc} representa a ação de uma força externa de módulo F que provoca uma alteração nas velocidades das partículas no espaço de velocidades, ou seja, no elemento dc . O processo F_{Ω} representa as alterações de velocidade das partículas dentro ou fora do elemento de volume dc provocadas em decorrência de processos de colisão entre as partículas. Para considerarmos a conservação do número de partículas no sistema ao longo do tempo, a taxa de variação do fluxo de partículas através da superfície $drdc$ deve ser igual à taxa de variação de partículas no interior do volume de controle $drdc$.

Assumindo como constante a velocidade das partículas no interior do espaço dr , pode-se definir o fluxo de partículas atravessando a superfície dr através da Equação (7), onde f_{dc} representa o número de partículas no interior do espaço com velocidade c , \bar{S}_{dr} representa a superfície de dr e n_{dr} é o vetor normal apontado para seu exterior. Aplicando o teorema da divergência de Gauss à Equação (7), obtém-se a Equação (8).

$$F_{dr} = - \int_{S_{dr}} (f dc) c n_{dr} d\bar{S}_{dr} \quad (7)$$

$$F_{dr} = - \int_{S_{dr}} \nabla_r \cdot (fc) d(dr) dc = - \nabla_r \cdot (fc) dr dc \quad (8)$$

Aplicando o mesmo procedimento para a análise do fluxo de partículas F_{dc} através de dc , chega-se a Equação (9) onde m é a massa e F/m a aceleração das partículas.

$$F_{dc} = - \nabla_c \cdot \left(f \frac{F}{m} \right) dr dc \quad (9)$$

Os processos de colisão entre as partículas podem ser representados através de um operador colisão $\Omega(f)$. O fluxo de partículas de $dr dc$ devido a este processo é representado pela Equação (10).

$$F_{\Omega} = \Omega(f) dr dc \quad (10)$$

Se considerarmos estes três processos através dos quais pode haver alterações no número de partículas através da superfície, obtém-se uma expressão para a conservação do número de partículas no sistema, expresso pela Equação (11). Simplificando esta equação, obtém-se a equação do transporte de Boltzmann, expressa pela Equação (12).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \nabla_r \cdot f + \frac{F}{m} \cdot f = \Omega(f) \frac{\partial (f dr dc)}{\partial t} = - \nabla_r \cdot (fc) dr dc - \nabla_c \cdot \left(f \frac{F}{m} \right) dr dc + \Omega(f) dr dc$$

(11)

(12)

Para o caso onde não existem forças externas atuando sobre o sistema, a Equação (12) pode ser simplificada e tem-se então a Equação (13), onde o lado direito da equação representa o processo de colisão entre as partículas e o lado esquerdo representa a propagação das partículas.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \nabla_r \cdot f = \Omega(f) \quad (13)$$

É possível recuperar as equações microscópicas de Navier Stokes a partir da equação de transporte de Boltzmann, através de um procedimento baseado em uma expansão Chapman-Enskog, como mostrado por Chen (1992) e Meira (2014).

3.2 Arranjo de Lattices

Uma forma comum em MLB de se referir aos diferentes arranjos de rede é usando a notação $DnQm$, onde n é o número de dimensões do problema e m é o modelo de velocidades (número de direções em que as partículas podem se movimentar).

3.2.1 Arranjos de Rede 1D

Duas representações unidimensionais podem ser utilizadas, a D1Q3 e D1Q5, sendo a D1Q3 a mais utilizada. A Figura 3.2 apresenta os dois arranjos de rede, sendo o nó mais escuro o nó central e os nós mais claros os nós vizinhos. Partículas fictícias se transportam do nó central para os vizinhos através de ligações com velocidades específicas, denominadas velocidade de rede.

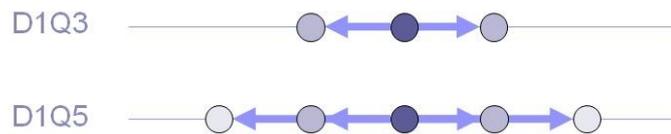


Figura 3.2 - Arranjo de Rede para problemas 1D

3.2.2 Arranjos de Rede 2D

Existem duas representações comuns para arranjos bidimensionais, D2Q5 e D2Q9, representados na Figura 3.3 e na Figura 3.4. O modelo D2Q5 possui 5 vetores velocidade partindo do nó central e o modelo D2Q9 apresenta oito direções de deslocamento mais um nó central de velocidade de lattice zero.

Assumindo que $\Delta x = \Delta y = \Delta t$, os vetores velocidade são dados por $c_0(0,0)$, $c_1(1,0)$, $c_2(-1,0)$, $c_3(0,1)$ e $c_4(0,-1)$. O modelo D2Q9 possui 9 vetores velocidade, dados por $c_0(0,0)$, $c_1(1,0)$, $c_2(-1,0)$, $c_3(0,1)$, $c_4(0,-1)$, $c_5(1,1)$, $c_6(-1,1)$, $c_7(-1,-1)$ e $c_8(1,-1)$ e os fatores de peso para ambos os modelos definidos na Tabela 3.1.

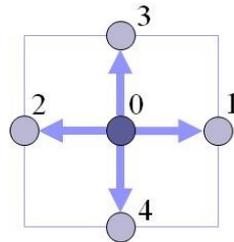


Figura 3.3 - Arranjo de rede para problemas 2D, D2Q5

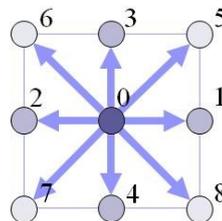


Figura 3.4 - Arranjo de rede para problemas 2D, D2Q9

3.2.3 Arranjos de Rede 3D

Em geral, dois arranjos diferentes são usados para simular problemas 3D, D3Q15 e D3Q19, mostrados na Figura 3.5 e na Figura 3.6, respectivamente. O modelo D3Q15 utiliza 15 vetores velocidade, e o modelo D3Q19, 19 vetores, ambos com o vetor central com velocidade nula.

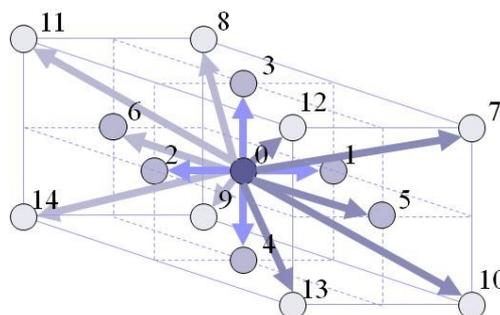


Figura 3.5 - Arranjo de rede para problemas 3D, D3Q15

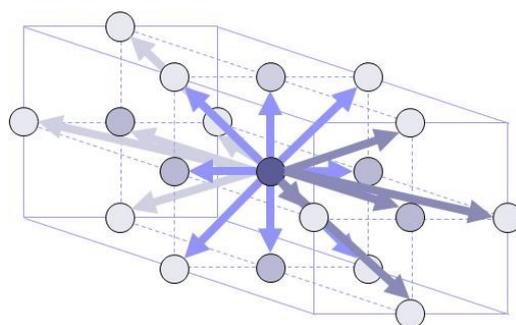


Figura 3.6 – Arranjo de rede para problemas 3D, D3Q19

Para este estudo foi utilizado o modelo *D2Q9* tanto para o campo de velocidade quanto para o campo de temperatura, como recomendado por Mohammad (2011) para solução de problemas de escoamentos e transferência de calor bidimensionais.

Os fatores peso, ω_i , que representam a probabilidade da partícula se mover em cada direção de deslocamento, são mostrados na Tabela 3.1 para os diferentes arranjos de lattice descritos anteriormente.

Tabela 3.1 - Fatores de peso para diferentes arranjos de Lattice

D1Q2	D1Q3	D1Q5
$\omega_i = \begin{cases} 4/9 & i = 0 \\ 1/9 & i = 1, 2, 3, 4 \\ 1/36 & i = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$ $\omega_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 1/2 & i = 1, 2 \end{cases}$	$\omega_i = \begin{cases} 4/6 & i = 0 \\ 1/6 & i = 1, 2 \end{cases}$	$\omega_i = \begin{cases} 6/12 & i = 0 \\ 2/12 & i = 1, 2 \\ 1/12 & i = 3, 4 \end{cases}$
D2Q5	D2Q9	D3Q15
$\omega_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ 1/4 & i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$	$\omega_i = \begin{cases} 4/9 & i = 0 \\ 1/9 & i = 1, 2, 3, 4 \\ 1/36 & i = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$	$\omega_i = \begin{cases} 16/72 & i = 0 \\ 8/72 & i = 1a6 \\ 1/72 & i = 7a14 \end{cases}$
D3Q19		
$\omega_i = \begin{cases} 12/36 & i = 0 \\ 2/36 & i = 1a6 \\ 1/36 & i = 7a18 \end{cases}$		

3.3 Formulação Matemática

3.3.1 Equações de Conservação

As equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia para o problema da convecção natural são descritas pelas Equações (14), (15) e (16) , respectivamente.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{u}}{\phi} \right) = -\frac{1}{\rho f} \nabla(\phi p) + \nu_e \nabla^2 \mathbf{u} + F \quad (15)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla(\alpha_m \nabla T) \quad (16)$$

Onde \mathbf{u} é o vetor velocidade, p a pressão, T a temperatura do fluido, e ν_e a viscosidade. O parâmetro k representa a razão de condutividade térmica entre as fases sólida e fluida e ϕ é a porosidade do meio.

3.3.2 Aproximação BGK

A Equação de transporte de Boltzmann é de difícil solução devido à complexidade do termo do operador colisão. Porém, o resultado da colisão de dois corpos não influencia, significativamente, o valor de muitas quantidades medidas. Assim é possível aproximar o operador de colisão por um operador simples, sem introduzir erros significantes à solução. Bhatnagar, Gross e Krook introduziram um modelo simplificado para o operador colisão (MOHAMMAD, 2011). Este modelo pode ser visto na Equação (17) e ficou conhecido como aproximação BGK.

$$\Omega = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (17)$$

Onde ω é chamado de frequência de colisão e τ de tempo de relaxação. A função distribuição de equilíbrio local, descrita por f^{eq} , é a função distribuição de Maxwell-Boltzmann. Introduzindo a aproximação BGK, a equação de Boltzmann na forma discretizada, mostrada na Equação (18), fica:

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t) = \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] + \Delta t c_i \cdot F_i \quad (18)$$

3.3.3 Termo de força

Para o fenômeno da convecção natural, a aproximação de Boussinesq, Equação (19), pode ser utilizada para a adição do termo da força de empuxo ao escoamento.

$$G = \rho \bar{g} \beta \Delta T \quad (19)$$

Onde g é o vetor gravidade, β é o coeficiente de expansão térmica do fluido e ΔT é a diferença de temperatura entre a parede quente e a parede fria.

Para o meio poroso homogêneo, o termo de força pode ser adicionado como um termo extra no lado direito da equação da colisão para levar em consideração os efeitos da porosidade do meio. Este termo de força é representado pela Equação (20) (Guo, 2005).

$$F_i = -\frac{\phi\nu}{K}\mathbf{u} - \frac{\phi F_\phi}{\sqrt{K}}|\mathbf{u}|\mathbf{u} + \phi\mathbf{G} \quad (20)$$

Onde ν é a viscosidade do fluido, F_ϕ é um fator geométrico relacionado ao tamanho do poro, definido pela Equação (21) e K é a permeabilidade do meio, definida pela Equação (22), onde d_p é o diâmetro da partícula sólida (Guo, 2005). O primeiro termo da Equação (20), conhecido como termo de Brinkmann, representa a perda de carga por difusão, quando o fluido escoar a baixas velocidades e o segundo termo, de Forchheimer, leva em conta as perdas por inércia, relevantes quando o fluido escoar a grandes velocidades (Guo, 2005).

$$F_\phi = \frac{1.75}{\sqrt{150\phi^3}} \quad (21)$$

$$K = \frac{\phi^3 d_p^2}{150(1-\phi)^2} \quad (22)$$

3.3.4 Processos de colisão e deslocamento

As Equações (23) e (24) representam os processos de colisão e deslocamento das partículas, respectivamente, podendo ser deduzidas a partir da discretização da Equação de Boltzmann em relação ao tempo e espaço e da substituição do termo de colisão pela aproximação BGK.

$$f_i(x, y, t + \Delta t) = f_i(x, y, t)[1 - \omega] + \omega f_i^{eq}(x, y, t) \quad (23)$$

$$f_i(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = f_i(x, y, t + \Delta t) \quad (24)$$

3.3.5 Frequência de colisão

A frequência de colisão ω , é o inverso do tempo de relaxação, τ , e é uma função da viscosidade cinemática ν do fluido que foi apresentada por Wolf-Gladrow (2000), como pode ser visto na Equação (25).

$$\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{3\nu + 1/2} \quad (25)$$

Foi proposta uma correlação para a escolha adequada da frequência de colisão em função do número de Rayleigh e do tamanho de lattice para cavidades preenchidas com fluido saturado. Mais detalhes sobre esta correlação são mostrados no Apêndice A do presente trabalho.

3.3.6 Função de equilíbrio

A função de equilíbrio f^{eq} se apresenta de diferentes formas, dependendo da natureza do problema trabalhado e do arranjo usado. Para problemas difusivo-advectivos, como a convecção natural, e com um arranjo de lattice D2Q9, a função de equilíbrio pode ser representada pela Equação (26) escrita a seguir.

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[1 + 3 \frac{c_i \mathbf{u}^{eq}}{c_s^2} + \frac{9}{2} \left(\frac{c_i \mathbf{u}^{eq}}{c_s^2} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^{eq2}}{c_s^2} \right] \quad (26)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, \mathbf{u}^{eq} é o vetor velocidade usado no cálculo da função distribuição de equilíbrio e c_s é a velocidade do som do meio, que para o modelo *D2Q9* pode ser relacionada com a velocidade de lattice pela Equação (27), deduzida por Wolf-Glarow (2000).

$$c_s = \frac{c_l}{\sqrt{3}} \quad (27)$$

A função distribuição é um importante parâmetro que caracteriza o efeito das moléculas, ou seja, determina o percentual de moléculas com velocidades dentro de um determinado intervalo em um determinado instante de tempo, em uma dada região do volume em análise.

3.3.7 Termo de Força no LBM

O termo de força F_i que leva em conta a força total devido à presença de um meio poroso e as forças de empuxo é dado pela Equação (28).

$$F_i = w_i \rho \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left[\frac{c_i \cdot F}{c_s^2} + \frac{u F : (c_i c_i - c_s^2 I)}{2\phi c_s^4} \right] \quad (28)$$

A massa específica ρ e a velocidade u a nível macroscópico podem ser calculadas pelas Equações (29) e (30), respectivamente.

$$\rho(x, y, t) = \sum_{i=0}^8 f_i(x, y, t) \quad (29)$$

$$u = \frac{v}{c_0 + \sqrt{c_0^2 + c_1 |v|}} \quad (30)$$

Onde v é uma velocidade auxiliar definida pela Equação (31) e os parâmetros c_0 e c_1 são definidos pelas Equações (32) e (33), respectivamente.

$$\rho v = \sum_i c_i f_i + \frac{\Delta t}{2} \phi \rho G \quad (31)$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \phi \frac{v}{2K} \right) \quad (32)$$

$$c_1 = \phi \frac{F_\phi}{2\sqrt{K}} \quad (33)$$

3.3.8 Equações para o Campo de Temperatura

As equações mostradas anteriormente dizem respeito ao campo de velocidades, e a evolução do campo de temperaturas no MLB é descrita pela Equação (34).

$$T_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - T_i(r, t) = \frac{\Delta t}{\tau'} [T_i(r, t) - T_i^{eq}(r, t)] \quad (34)$$

Onde T_i é a função distribuição de temperatura, τ' é o tempo de relaxação para o campo de temperatura, que pode ou não ser igual ao tempo de relaxação utilizado no campo de velocidades, e T_i^{eq} é a função distribuição de equilíbrio, dada pela Equação (35), onde os fatores de peso ω_i possuem os mesmos valores usados no campo de velocidades e a temperatura T do fluido é dada pela Equação (36).

$$T_i^{eq} = \omega_i T \left[1 + \frac{c_i \cdot u}{c_s^2} \right] \quad (35)$$

$$T = \sum_i T_i \quad (36)$$

3.4 Condições de Contorno

Para modelar o problema definido para este trabalho são usadas as seguintes condições de contorno: Condição de *Bounce-back* (colisão contra paredes e obstáculos sólidos), condição de temperatura constante e condição de parede adiabática. Estas condições são responsáveis pela determinação dos valores das funções distribuição desconhecidas nas fronteiras do domínio e nos contornos dos blocos, garantindo valores prescritos.

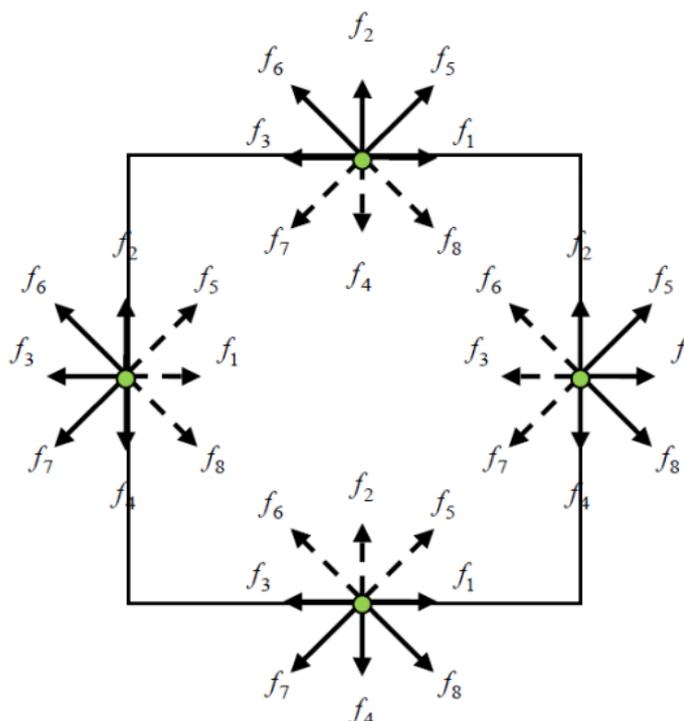


Figura 3.7 - Funções de distribuição nas fronteiras do domínio (De Meira, 2014)

Na Figura 3.7 são mostradas as funções de distribuição nas fronteiras do domínio, com as setas cheias representando as funções conhecidas após a etapa de deslocamento e as setas tracejadas representando as funções a serem determinadas pelas condições de contorno.

3.4.1 Bounce-Back

Bounce-back é uma condição que pode ser utilizada para modelar obstáculos sólidos, estacionários ou não, uma condição de não deslizamento ou o escoamento sobre obstáculos. A condição implica que a partícula que se movimenta de encontro à fase sólida seja rebatida novamente para fase fluida (Mohamad, 2011).

Algumas versões de esquemas de *Bounce-back* são sugeridas na literatura. No presente trabalho, o modelo conhecido como *Bounce-back* simples é utilizado. No *Bounce-back* simples a parede sólida é localizada diretamente sobre os lattices, como mostrado na Figura 3.8.

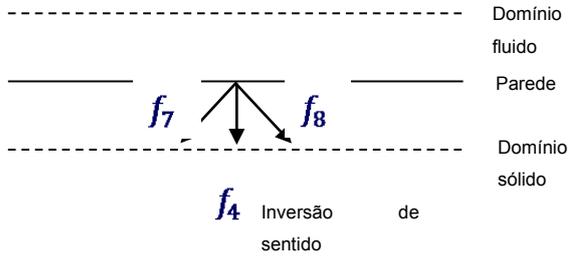
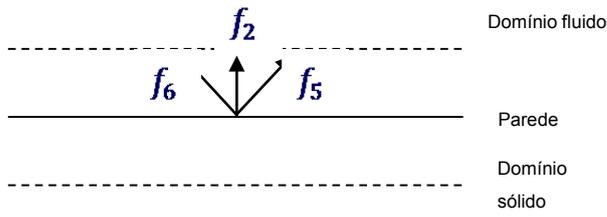
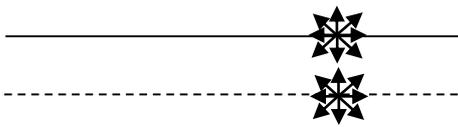
Condição de Contorno	Representação em função de f	Formulação matemática
<i>Bounce-back</i>		Domínio fluido Parede Domínio sólido $f_5 = f_7$ $f_2 = f_4$ $f_6 = f_8$
		Domínio fluido Parede Domínio sólido
<i>Parede Adiabática</i>		$f_i(m)$ $f_i(m-1)$ $f_i(m) = f_i(m-1)$ $i = 1, 2, 3, \dots, 8$

Figura 3.8 - Representação de diferentes condições de contorno para o MLB

Para o uso do modelo de *Bounce-back* simples basta fazer $f_5 = f_7$, $f_2 = f_4$ e $f_6 = f_8$ (para uma superfície abaixo do escoamento), sendo que f_7 , f_4 e f_8 são conhecidos do processo de deslocamento das partículas, além de definir como zero a velocidade nas superfícies sólidas da cavidade, como nas paredes.

3.4.1 Parede adiabática

A condição de contorno de parede adiabática garante que o fluxo de calor na parede seja nulo. Esta condição está descrita como na Figura 3.8.

3.4.1 Temperatura constante

A condição de temperatura constante é descrita pelas Equações (37) e (38) para paredes verticais posicionada nas extremidades da esquerda e direita de uma cavidade de comprimento H , respectivamente.

$$f_i^{eq}(0, y, t) = \omega_i T_o, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (37)$$

$$f_i^{eq}(H, y, t) = \omega_i T_L, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (38)$$

Neste capítulo foram apresentados os fundamentos do Método Lattice Boltzmann, foram deduzidas as principais equações do MLB e foi apresentado o modelo matemática adotado, juntamente com as condições de contorno que modelagem o problema estudado.

4. GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO

No presente trabalho o fenômeno da convecção natural em um meio poroso é analisado com a aplicação do método Lattice Boltzmann. O uso do modelo homogêneo para aproximação das características geométricas do meio poroso elimina a necessidade de se modelar as interfaces com condições de contorno específicas, pois, o meio é considerado de uma maneira global.

4.1 Hipóteses Simplificadoras

As hipóteses utilizadas na simplificação das equações governantes no presente trabalho são

1. Escoamento monofásico;
2. Escoamento Laminar;
3. Escoamento bidimensional;
4. Fluido Newtoniano;
5. Escoamento incompressível, exceto para o termo da força de empuxo, na equação da quantidade de movimento, na direção y ;
6. Os domínios fluido e sólido possuem propriedades constantes;
7. A gravidade atua somente na direção y ;
8. Dissipação viscosa desprezível;
9. Não há geração de energia.

O regime considerado é estacionário e o passo de tempo é avançado a cada iteração, de forma que, ao estabelecer o regime estacionário, a convergência é alcançada e isso ocorre quando não existem alterações significativas entre duas iterações.

4.2 Geometria do Problema e Condições de Contorno

Neste trabalho, desenvolveu-se uma ferramenta computacional para a solução do problema da convecção natural em uma cavidade preenchida com um meio poroso homogêneo. A geometria adotada é uma cavidade quadrada, aquecida lateralmente, com paredes horizontais adiabáticas, preenchida com um meio poroso homogêneo, como representado na Figura 4.1.

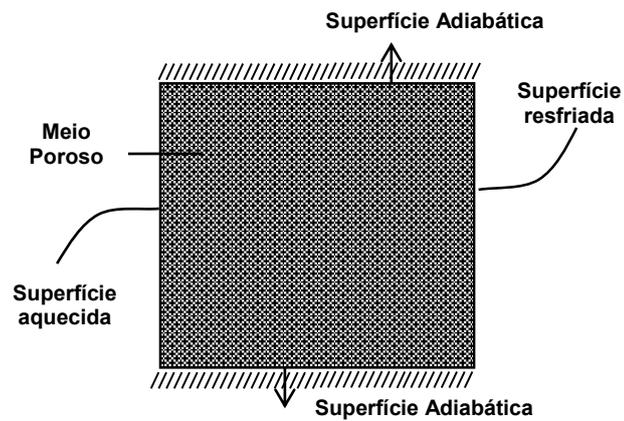


Figura 4.1 – Representação do problema da convecção natural em um meio homogêneo e condições de contorno.

5. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados resultados para o problema da convecção natural em uma cavidade aquecida lateralmente e preenchida com meio poroso homogêneo. A caracterização dos resultados é feita através do monitoramento das isotermas, das linhas de corrente, do número de Nusselt médio e dos resíduos locais das equações de transporte entre duas iterações sucessivas.

A solução foi considerada convergida, quando os resíduos para as equações de balanço atingem variações da ordem de 10^{-6} , e não houver variação no número de Nusselt.

O erro percentual relativo, utilizado em testes de malha e verificações em que se comparam resultados obtidos com resultados da literatura, é dado pela seguinte expressão:

$$EP = \left| \frac{\Theta_{ref} - \Theta_{cal}}{\Theta_{ref}} \right| 100\% \quad (39)$$

Em resultados de verificação com a literatura, Θ_{cal} representa o valor calculado neste trabalho e Θ_{ref} representa o valor de referência da literatura. Em testes de variação da malha computacional, Θ_{cal} é o valor obtido com uma malha mais refinada que o valor obtido de Θ_{ref} . No presente trabalho, erros inferiores a 1% representam um valor aceitável para a variável calculada.

5.1 Cavidade Limpa Aquecida Lateralmente

O estudo da convecção natural em cavidades quadradas, preenchidas com fluido saturado e aquecidas lateralmente, pode ser visto em diversos trabalhos da literatura, tornando-o um importante problema de verificação para o código computacional apresentado neste trabalho. Uma representação da cavidade é mostrada na Figura 5.1, juntamente com as condições de contorno para o problema.

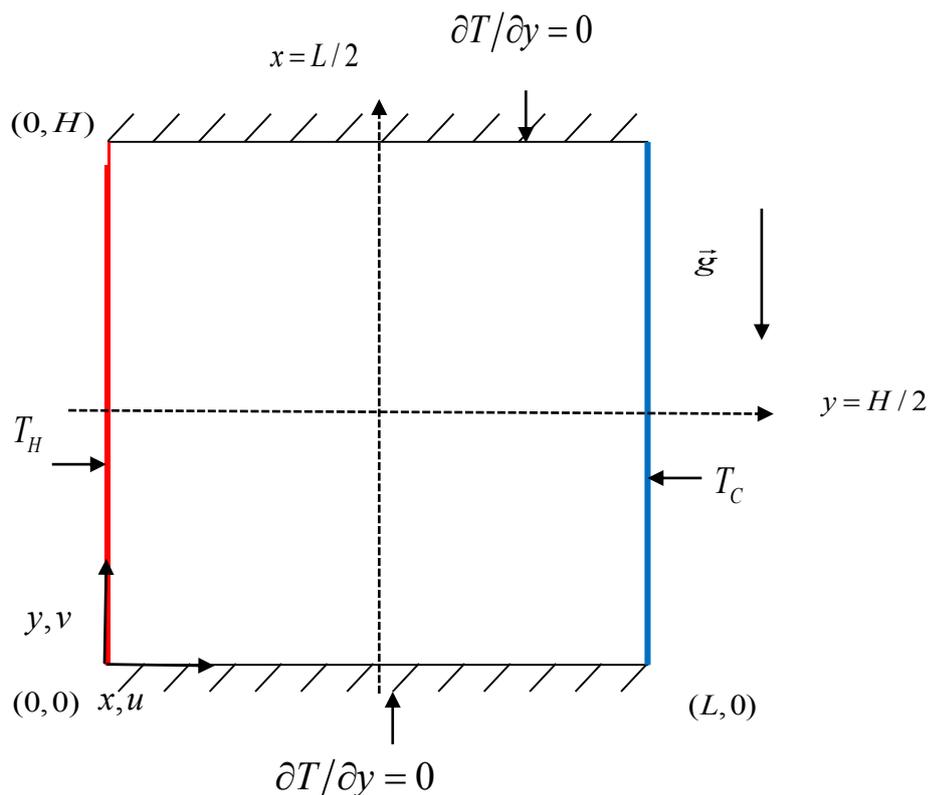


Figura 5.1 – Condições de contorno para cavidade quadrada, limpa e aquecida lateralmente.

Para a simulação da cavidade limpa o número de Rayleigh foi definido para uma faixa de 10^5 a 10^7 e o número de Prandtl foi fixado em $Pr=0,71$, de acordo com a literatura consultada para efeitos de verificação com resultados de benchmark.

Na Tabela 5.1 é feita uma comparação com resultados obtidos da literatura em relação ao número de Nusselt, e que usam diferentes métodos de modelagem numérica, tais como diferenças finitas e volumes finitos, para a mesma configuração, mostrando a capacidade do MLB de trabalhar com o processo de convecção natural em cavidades. Esta proximidade verifica o tratamento do modelo proposto como uma aproximação para a cavidade limpa e a semelhança entre os resultados fornece credibilidade ao código computacional.

Tabela 5.1 Nu_{av} para cavidade quadrada preenchida com fluido saturado aquecida lateralmente com um tamanho de lattice 160x160

Ra	Kalita et al. (2001)	Merrickh e Lage (2005)	Braga e de Lemos (2005)	De Lai (2009)	[Presente]
10^5	4,522	4,536	4,575	4,602	4,522
10^6	8,829	8,860	8,918	8,991	8,825
10^7	16,520	16,625	16,725	16,928	16,924

Figura 5.1 Na Figura 5.1 mostram-se linhas de corrente e isothermas para os casos em questão, onde é possível perceber um aumento dos gradientes de velocidade nas regiões próximas às paredes com o aumento do número de Rayleigh, característica da intensificação do processo de transferência de calor por convecção.

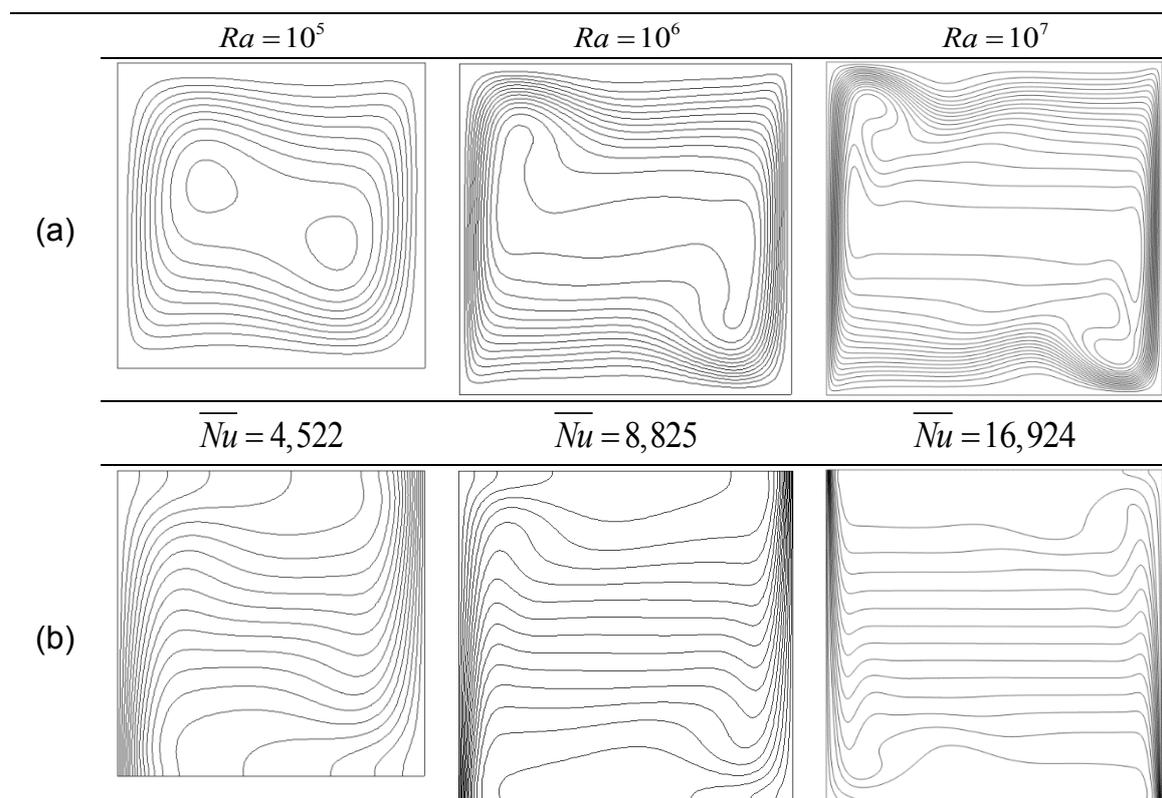


Figura 5.1 - Linhas de corrente (a) e isothermas (b) para a cavidade limpa aquecida lateralmente.

O aumento da densidade de linhas de corrente e isotermas, nas regiões próximas às paredes verticais, também indica gradientes de temperatura e velocidade mais elevados nessas regiões.

5.2 Influência do Tamanho de Lattice

O tamanho de lattice, dentro do MLB, deve ser definido de forma a garantir que o número de Mach do escoamento seja inferior a 1.5 para evitar instabilidades na solução (Sukop, 2006), juntamente com a frequência de relaxação, descrita na Seção 5.2.1. A Equação (40) define o número de Mach, e considerando c_s e Pr como parâmetros constantes nas simulações, ele se torna uma função somente do número de Rayleigh, da viscosidade relacionada à frequência de relaxação e do tamanho do lattice. Deste modo, para um determinado número de Rayleigh, deve ser utilizada uma combinação de tamanho de lattice e frequência de relaxação adequada para manter o número de Mach baixo o suficiente para se manter o regime de incompressibilidade necessário.

$$Ma = \sqrt{\frac{Ra v^2}{M^2 Pr c_s^2}} \quad (40)$$

Nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 mostram-se resultados para a variação do tamanho de lattice em função do erro percentual em relação a resultados de benchmark de Hortmann *et al* (1990) para as seguintes variáveis:

- Valor máximo da componente horizontal de velocidade U_{\max} no plano vertical $x = L/2$
- Valor máximo da componente vertical de velocidade V_{\max} no plano horizontal $y = H/2$
- Valor do número de Nusselt médio na parede da cavidade \overline{Nu}

O aumento do tamanho de lattice pode ser visto como uma técnica de refino da solução e como uma maneira de diminuir o número de Mach, mantendo o escoamento dentro do limite de incompressibilidade. Os resultados mostram que o refino do tamanho de lattice diminui o erro relativo de todas as propriedades verificadas e que estes erros são da ordem de 0,5% para o caso mais refinado, mostrando que um refino ainda mais detalhado não alteraria de maneira significativa os resultados.

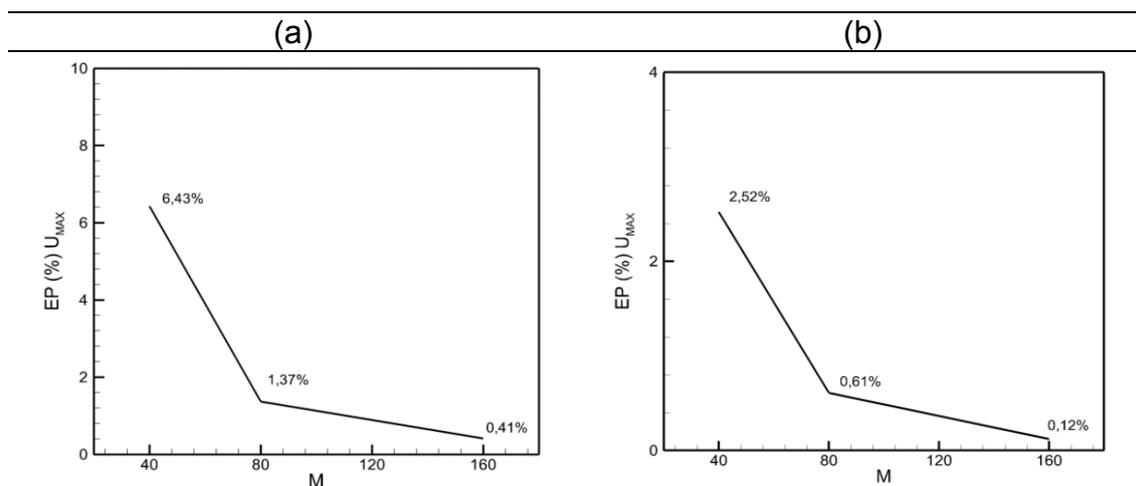


Figura 5.2 - Erro Percentual Relativo a Velocidade Horizontal Máxima no Meio Plano Vertical Vs. Tamanho de Lattice para número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6

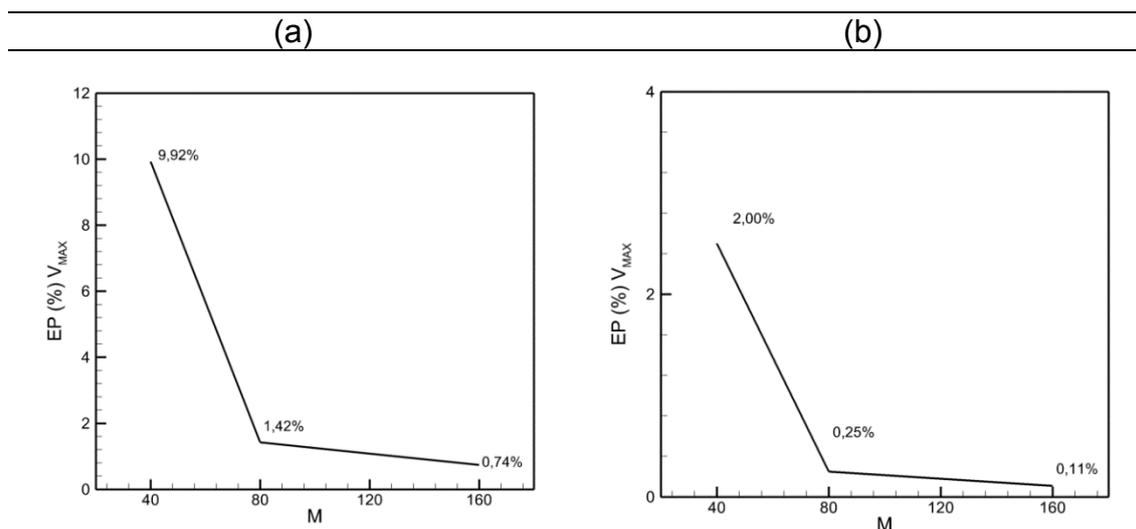


Figura 5.3 - Erro Percentual Relativo a Velocidade Vertical Máxima no Meio Plano Horizontal Vs. Tamanho de Lattice para número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6

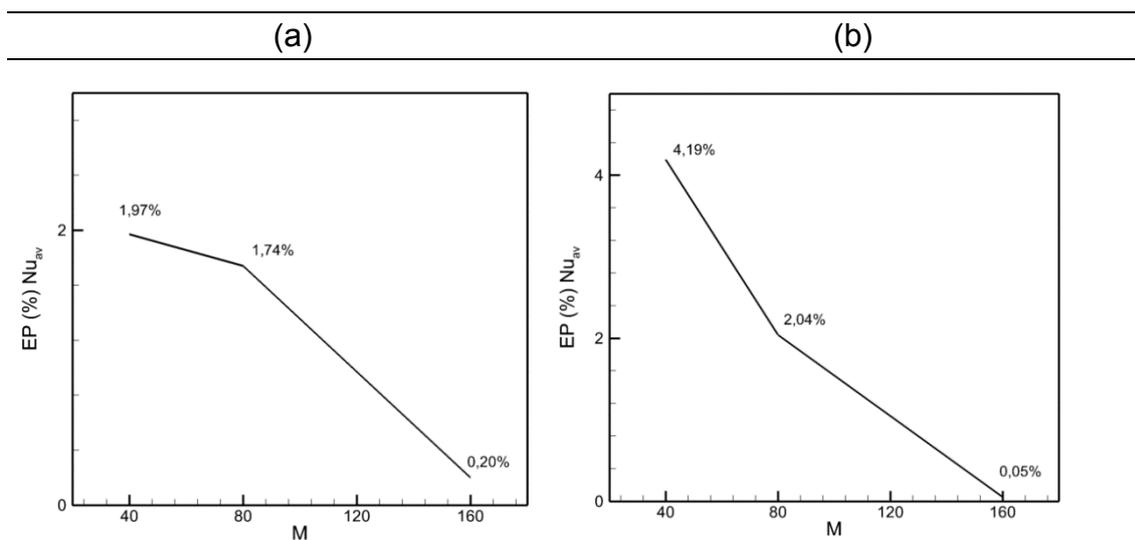


Figura 5.4 - Erro Percentual Relativo ao Número de Nusselt Médio Vs. Frequência de Relaxação para número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6

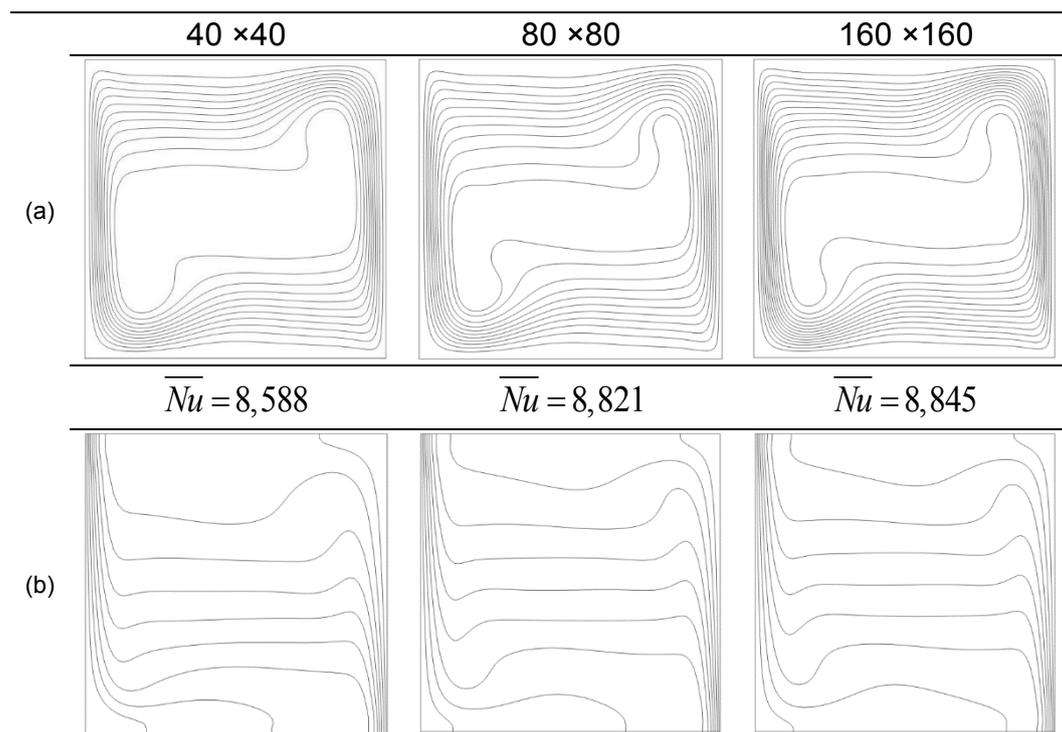


Figura 5.5 - Linhas de corrente (a) e isothermas (b) para a variação de tamanho de Lattice em uma cavidade limpa aquecida lateralmente com $Ra=10^6$

A Figura 5.5 mostra resultados em termos de linhas de corrente e isothermas para diferentes configurações de tamanho de lattice e $Ra=10^6$, onde também

percebe-se um aumento na intensidade de linhas de corrente nas regiões próximas às paredes.

5.2.1 Influência da Frequência de Relaxação

A frequência de relaxação, ligada a viscosidade do fluido em unidades do MLB, possui influência sobre os resultados em termos de velocidade e transferência de calor no interior da cavidade. O valor desta frequência de relaxação deve ser inferior a 2, porém valores próximos a 2 podem levar a instabilidade numérica (Sukop & Thorne, 2006).

A Figura 5. 6, Figura 5. 7 e Figura 5. 8 mostram resultados para a variação da frequência de relaxação, arbitradas em função da literatura consultada (Mohamad, 2011) em função do erro percentual em relação a resultados de benchmark de Hortmann *et al* (1990) para as velocidades U_{max} no plano vertical $x = L / 2$, V_{max} no plano horizontal $y = L / 2$ e para o número de Nusselt médio na cavidade \overline{Nu} .

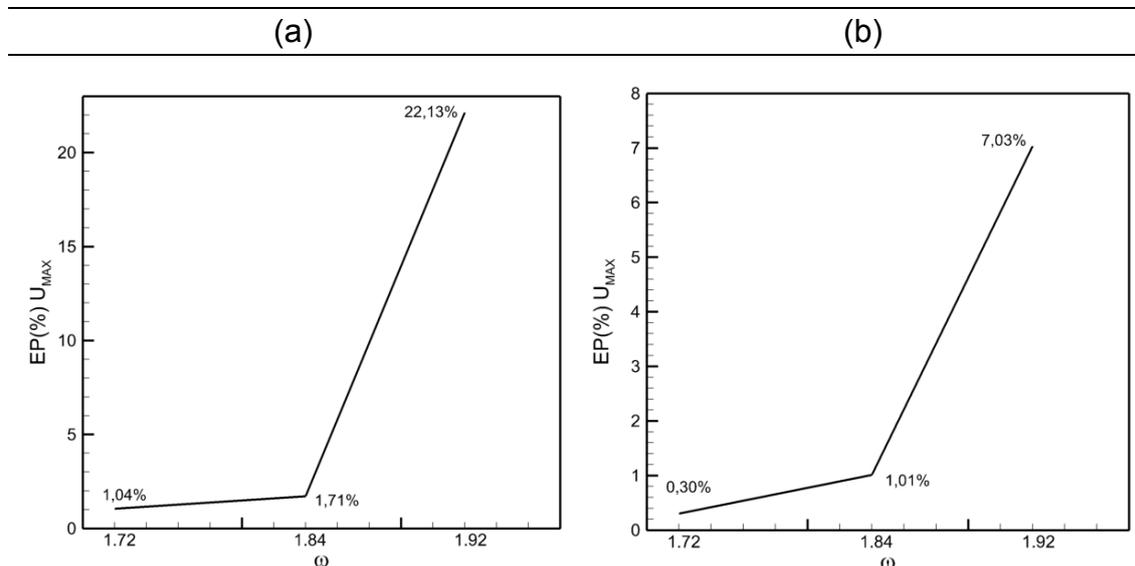


Figura 5. 6 - Erro Percentual Relativo a Velocidade Horizontal Máxima no Meio Plano Vertical Vs. Frequência de Relaxação para um tamanho de lattice 160x160 e número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6

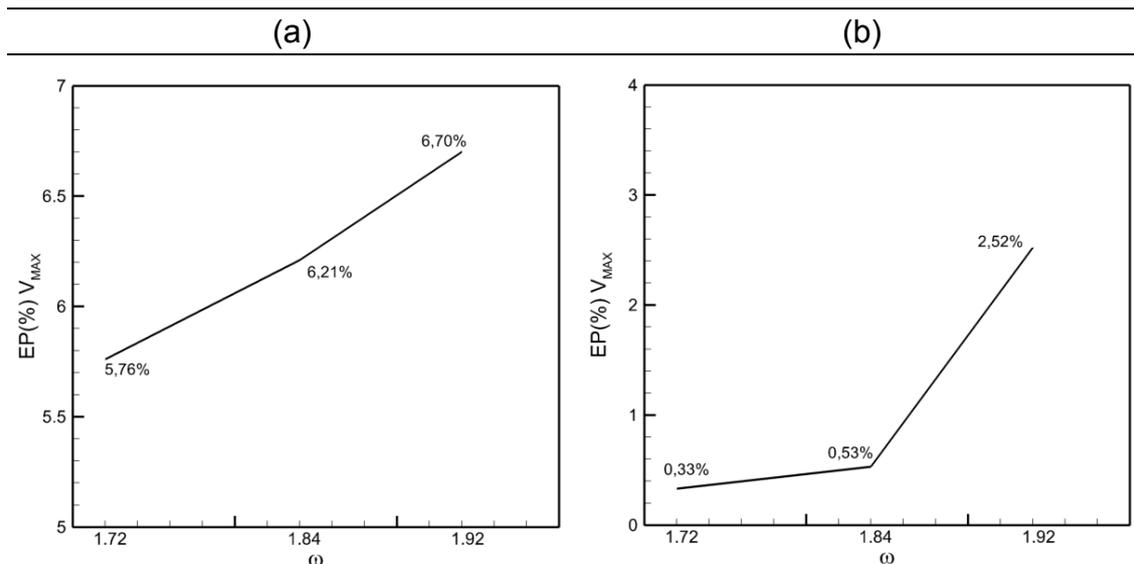


Figura 5. 7 - Erro Percentual Relativo a Velocidade Vertical Máxima no Meio Plano Horizontal Vs. Frequência de Relaxação para um tamanho de lattice 160x160 e número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6

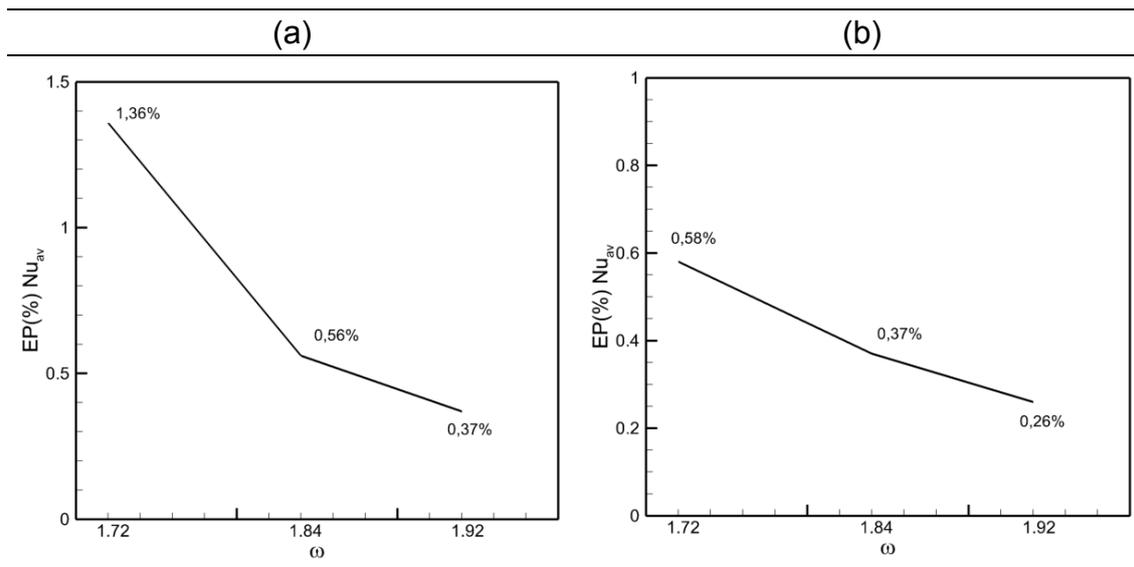


Figura 5. 8 - Erro Percentual Relativo ao Número de Nusselt Médio Vs. Frequência de Relaxação para um tamanho de lattice 160x160 e número de Rayleigh (a) 10^5 e (b) 10^6

A diminuição da frequência de relaxação aumenta o erro da solução relativo ao número de Nusselt médio na cavidade, porém diminui o erro relativo às velocidades nos planos médios da cavidade. A Figura 5.9 mostra resultados em termos de linhas de corrente e isothermas para duas frequências de relaxação para número de Rayleigh 10^6 e um tamanho de lattice fixo em 160x160. É possível perceber um leve estreitamento da região de camada limite com o aumento do número de Nusselt com a diminuição da frequência de relaxação.

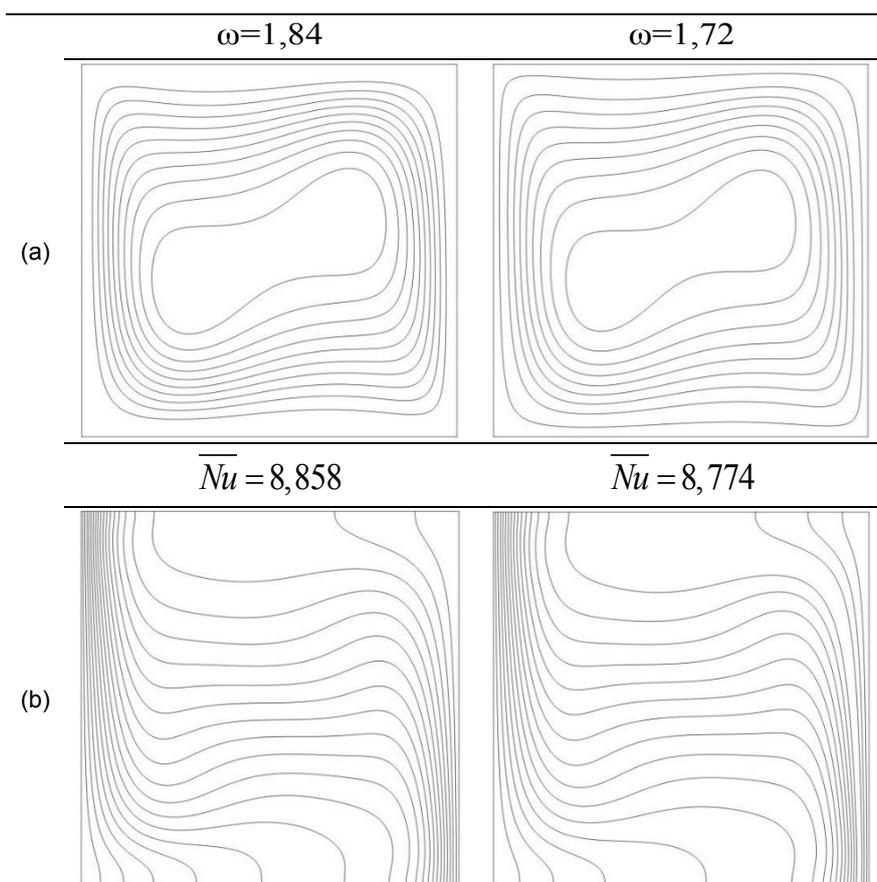


Figura 5.9 - Linhas de Corrente (a) e Isotermas (b) para a variação de frequência de relaxação para $Ra=10^6$ e tamanho de lattice 160×160

Embora a influência do tamanho de lattice e da frequência de relaxação sobre o número de Mach sejam da mesma proporção $Ma \sim \nu / M$, os resultados desta análise mostraram que o número de iterações necessárias para convergência cresce de maneira mais sensível com o aumento do tamanho de lattice do que com a diminuição da frequência de relaxação. Deste modo, é mais vantajoso, do ponto de vista de tempo computacional, trabalhar com um tamanho de lattice menor e uma frequência de relaxação mais elevada.

5.2.2 Resultados de Verificação para a Cavity Limpa

Além do número de Nusselt, foram monitorados os valores das velocidades máximas U_{max} e V_{max} e suas posições y_{max} e x_{max} nos planos médios horizontal $x = L/2$ e vertical $y = H/2$ da cavidade, para fins de verificação com resultados de benchmark. Estes resultados são mostrados, na Tabela 5.2, para um número

de Rayleigh 10^5 ; e, na Tabela 5.3, para Rayleigh 10^6 . Em ambas as situações é utilizada uma frequência de colisão ω igual a 1.84 (Mohamad, 2011). Também são mostrados os erros percentuais relativos à solução de benchmark para todos os valores monitorados, para o caso de tamanho de lattice mais refinado.

Tabela 5.2 - Resultados de Verificação para Cavidade Limpa e $Ra=10^5$

Hortmann et al. (1990)				[Presente]			
Malha	40x40	80x80	160x160	40x40	80x80	160x160	EP 160x160
U_{\max}	34,7396	34,7499	34,7398	35,6150	34,5379	35,2718	1,51%
y_{\max}	0,8625	0,85625	0,85312	0,8549	0,8429	0,85615	0,35%
V_{\max}	68,8438	68,56	68,6465	67,4692	68,3918	68,3679	0,41%
x_{\max}	0,06250	0,06875	0,06562	0,0660	0,068	0,0657	0,12%
\overline{Nu}	4,61653	4,54516	4,52751	4,810	4,638	4,522	0,12%

Tabela 5.3 - Resultados de Verificação para Cavidade Limpa e $Ra=10^6$

Hortmann et al. (1990)				[Presente]			
Malha	40x40	80x80	160x160	40x40	80x80	160x160	EP 160x160
U_{\max}	65,3710	64,9944	64,8659	69,5712	64,1050	64,6019	0,41%
y_{\max}	0,8625	0,85625	0,85312	0,89072	0,84375	0,85210	0,12%
V_{\max}	223,412	218,312	219,861	201,259	217,2115	217,4600	1,10%
x_{\max}	0,03750	0,03125	0,04062	0,0365	0,0314	0,0312	1,80%
\overline{Nu}	8,42167	8,97719	8,86302	8,5878	8,821	8,845	0,20%

Esses resultados reforçam a validade da metodologia utilizada no desenvolvimento do código computacional utilizado, pois pode-se considerar

como validados os resultados não somente em termos do número de Nusselt, mas também em termos de outras características no interior da cavidade, de acordo com resultados de benchmark.

5.3 Simulação Numérica Da Cavidade Homogênea

Neste item são apresentados resultados para a variação de parâmetros na simulação da convecção natural em uma cavidade preenchida com meio poroso homogêneo. Os resultados encontrados são analisados através de linhas de corrente, isothermas e do número de Nusselt, observando os efeitos da variação de parâmetros e sua influência sobre a transferência de calor no interior da cavidade.

5.3.1 Efeito da Variação dos Parâmetros para a Cavidade Homogênea

Parâmetros que modelam o problema foram variados para se abranger uma ampla faixa de resultados. Os parâmetros variados para a cavidade homogênea, como mostrado na Tabela 5.4 são o número de Rayleigh (Ra), o número de Darcy (Da) e a porosidade interna (ϕ) da cavidade.

O número de Rayleigh foi variado entre 10^3 e 10^7 , visando abranger resultados para casos em que, praticamente, não existe convecção, até casos onde a convecção tende a atingir um regime turbulento. A permeabilidade das cavidades também teve seu efeito avaliado considerando diferentes porosidades internas da cavidade e diferentes números de Darcy, com variações de $0,4 - 0,9$ e $10^{-2} - 10^{-6}$, respectivamente. Para se evitar problemas de instabilidade da solução, o número de Darcy-Rayleigh ($Ra^*=RaDa$) será mantido igual ou superior a 10 para todos os casos.

Os parâmetros constantes do problema são número de Prandtl ($Pr=1$), a razão de aspecto da cavidade ($A=1$) e a razão de condutividade térmica sólido-fluido ($\kappa_m = 1$).

Tabela 5.4 - Parâmetros variados para a cavidade homogênea

	Variável	Valores
Número de Rayleigh	Ra	10^3 ; 10^4 ; 10^5 ; 10^6 ; 10^7
Número de Darcy	Da	10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-6}
Porosidade	ϕ	0,4 ; 0,6 ; 0,9

5.3.2 Teste de Malha para Cavidade Homogênea

Para o problema de cavidade preenchida com meio poroso homogêneo, inicialmente, é feito um teste de malha para condições restritivas do problema e os resultados são avaliados através do número de Nusselt médio na cavidade. Foi investigado um caso em que uma intensidade de recirculação, representada pelo de número de Rayleigh de 10^7 é utilizada, além de uma porosidade interna de 0,4 e um número de Darcy 10^{-4} , caracterizando um caso bastante restritivo. Os valores encontrados para o número de Nusselt médio na cavidade estão apresentados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 - Nu_{av} para cavidade homogênea aquecida lateralmente

Ra	ϕ	Da	Tamanho de Lattice	Nu_{av}	Erro Percentual
10^7	0,4	10^{-4}	100×100	8,228	5,352%
			150×150	7,983	2,215%
			200×200	7,817	0,089%
			300×300	7,812	0,025%
			400×400	7,810	-

Os erros percentuais encontrados entre um tamanho de lattice e outro tendem a diminuir com o refino, o que indica que para casos mais refinados, os resultados se tornam independentes do tamanho de lattice. Como o erro relativo entre os tamanhos de lattice de 200×200 e 300×300 é muito baixo, a solução

encontrada utilizando um tamanho de lattice de 200×200 se mostra adequada para as simulações propostas.

5.3.3 Resultados de Verificação

Alguns casos de verificação para o meio homogêneo foram comparados com resultados da literatura. Foram verificados casos com altos valores de número de Rayleigh e foi avaliado o efeito da permeabilidade do meio através da variação de porosidade e do número de Darcy. Essa comparação é mostrada na Tabela 5.6.

Os resultados obtidos são coerentes com os encontrados na literatura, mostrando que o modelo proposto é capaz de representar cavidades aquecidas lateralmente e preenchidas com meio poroso homogêneo.

Tabela 5.6 - Nu_{av} para cavidade quadrada porosa homogênea aquecida lateralmente

		$\phi = 0,6$				$\phi = 0,9$			
Da	Ra	Nithiarasu et al (1997)	Dias et al (2010)	Chen et al (2009)	Presente	Nithiarasu et al (1997)	Dias et al (2010)	Chen et al (2009)	Presente
10^{-4}	10^6	2,725	2,713	2,714	2,729	2,74	2,801	2,801	2,819
	10^7	8,183	8,648	8,648	8,609	9,202	9,441	9,49	9,317
10^{-6}	10^7	1,079	1,079	1,078	1,077	1,08	1,079	1,08	1,079

5.3.1 Efeito da Variação do Número de Rayleigh

O número de Rayleigh é um parâmetro que representa a relação entre as forças de empuxo e as forças viscosas. No caso da convecção em cavidades

fechadas, o número de Rayleigh pode representar a intensidade de recirculação do fluido no interior da cavidade.

Foi observado que o efeito do aumento do número de Rayleigh é o de deixar o processo convectivo mais expressivo no interior da cavidade. O efeito da variação do número de Rayleigh analisado através de linhas de corrente e isothermas para o caso em que $\phi = 0,4$ pode ser visto na Figura 5.10.

Observando esta figura, é possível notar o estreitamento da região de camada limite com o aumento do número de Rayleigh e o aumento da densidade de linhas de corrente nesta região de camada limite, adjacente às paredes da cavidade. Em números de Ra menos elevados, onde o processo condutivo é mais pronunciado, observa-se a estratificação vertical das isothermas.

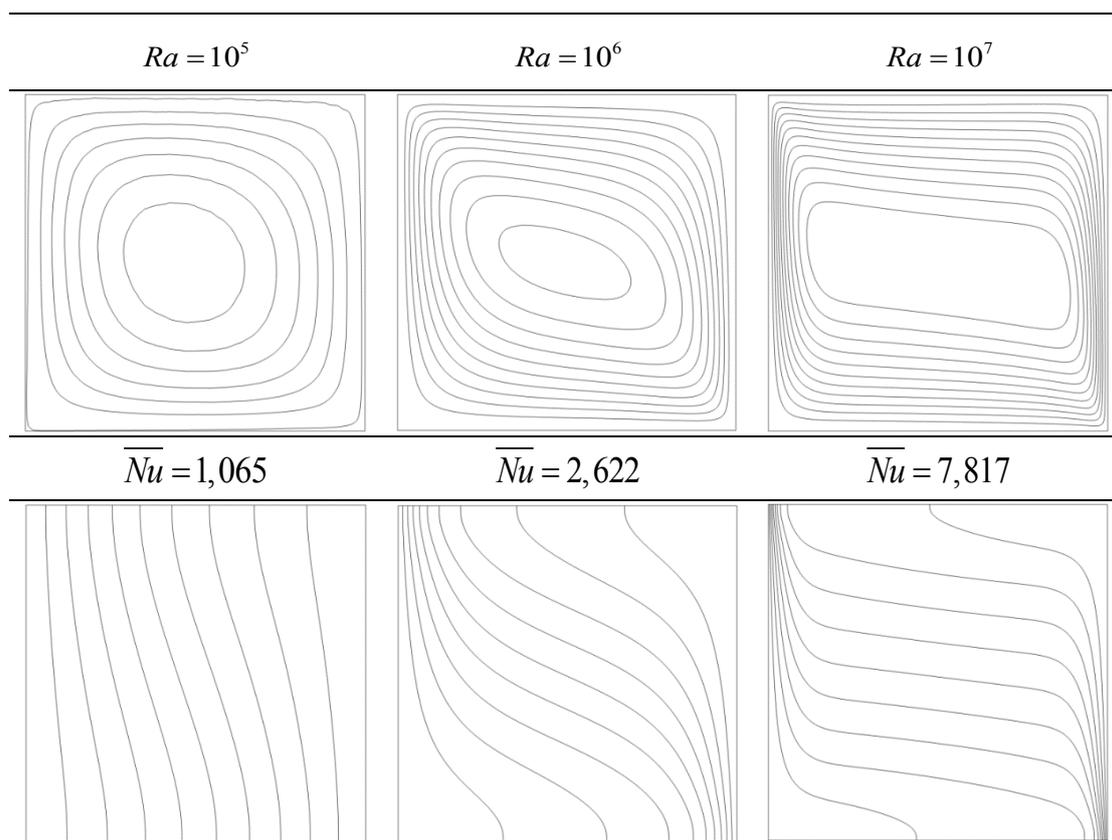


Figura 5.10 - Variação do número de Rayleigh para $Da = 10^{-4}$ e $\phi = 0,4$

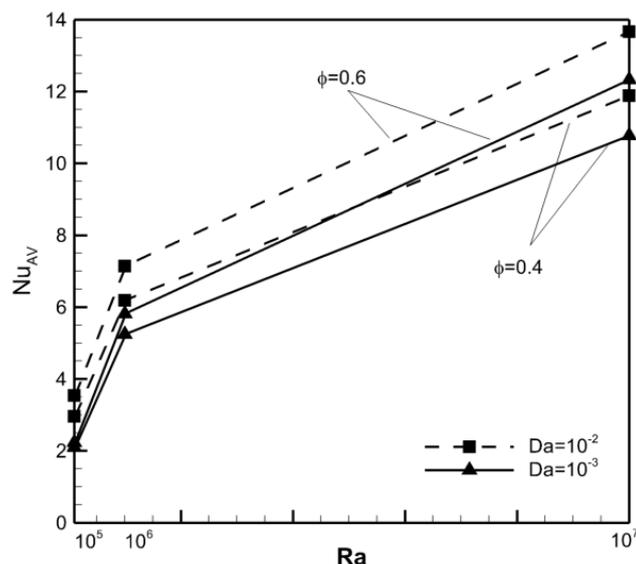


Figura 5.11 - Variação do número de Nusselt com o aumento do número de Rayleigh

A Figura 5.11 mostra a variação do \overline{Nu} , com o aumento do número de Rayleigh e da porosidade para três configurações de número de Rayleigh usadas neste estudo, e duas configurações de número de Darcy, onde é possível observar o aumento do número de Nusselt para um aumento no número de Rayleigh. Para todos os casos analisados no presente trabalho, o aumento do número de Rayleigh favorece a troca térmica no interior da cavidade, mostrado pelo estreitamento da região de empuxo nas linhas de corrente,

5.3.1.1 Efeito da Variação do Número de Darcy

A Figura 5.12 mostra como a redução do número de Darcy, na cavidade, exerce influência sobre a transferência de calor para o caso onde $Ra = 10^6$. Quando a permeabilidade é reduzida, as linhas de corrente indicam a redução da troca térmica, fenômeno observado também pela tendência de estratificação vertical das isotermas, característica do aumento do processo condutivo.

Em casos com um número de Darcy menor, representando meios menos permeáveis, a transferência de calor através da cavidade é reduzida. A Figura 5.13 e a Figura 5.14 mostram os efeitos de variação nas linhas de corrente e isotermas para a variação do número de Darcy para diferentes configurações do número de Rayleigh e uma porosidade fixa em $\phi = 0,4$. Percebe-se que com a diminuição do número de Darcy para um número de Rayleigh fixo, a densidade

de linhas de corrente nas regiões adjacentes às paredes diminuir, mostrando um aumento do processo condutivo em relação ao processo convectivo, chegando a um caso de praticamente condução pura, com $Ra=10^5$ e $Da=10^{-4}$, onde é possível perceber a verticalização quase absoluta das isotermas, caracterizando um processo condutivo.

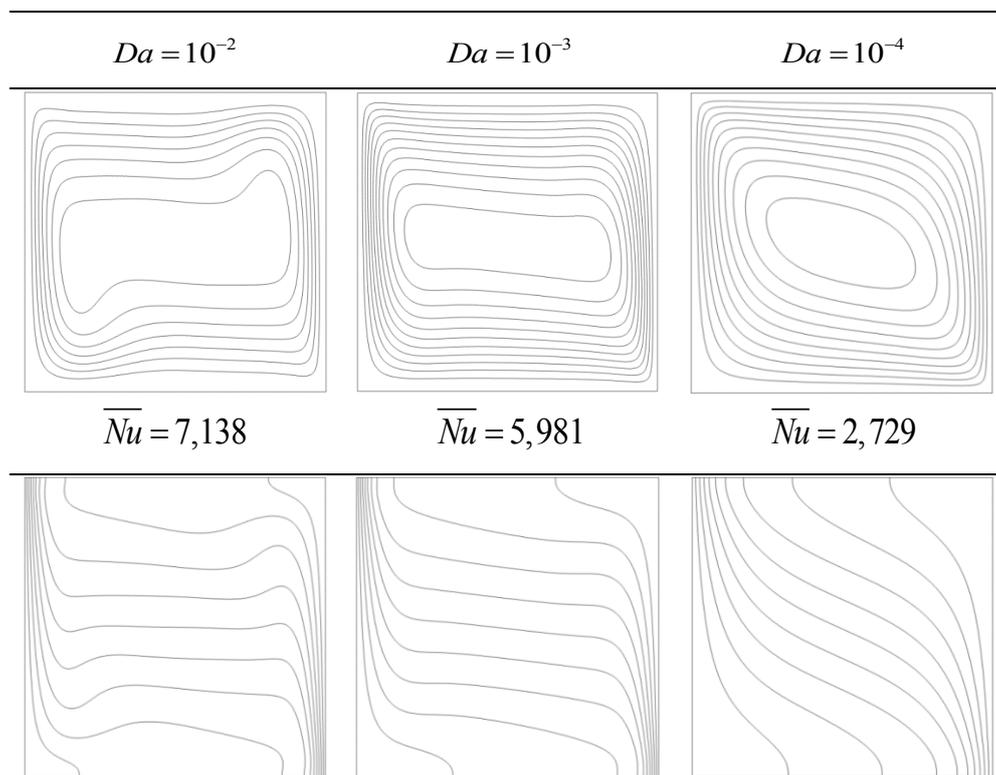


Figura 5.12 - Variação do número de Darcy para $Ra = 10^6$ e $\phi = 0,6$.

Na Figura 5.15, percebe-se a tendência no aumento do número de Nusselt com o aumento do número de Darcy para um valor fixo de número de Rayleigh e diferentes porosidades. Este efeito é pouco perceptível com valores de número de Rayleigh inferiores a 10^5 , devido ao caráter condutivo do escoamento no interior da cavidade.

Quando o escoamento é bastante convectivo, estão presentes maiores velocidades no escoamento do fluido e mais energia térmica é transportada por convecção. Por isso, os efeitos de variação de permeabilidade são mais pronunciados em casos com elevado grau de recirculação.

É possível perceber, ainda na Figura 5.15, que ocorre uma variação maior do número de Nusselt para o caso com $Ra\ 10^7$, quando comparado com 10^6 para a mesma variação de porosidade e número de Darcy, mostrando que em casos com um processo convectivo mais intenso, a variação de porosidade também exerce maior influência sobre a troca térmica na cavidade.

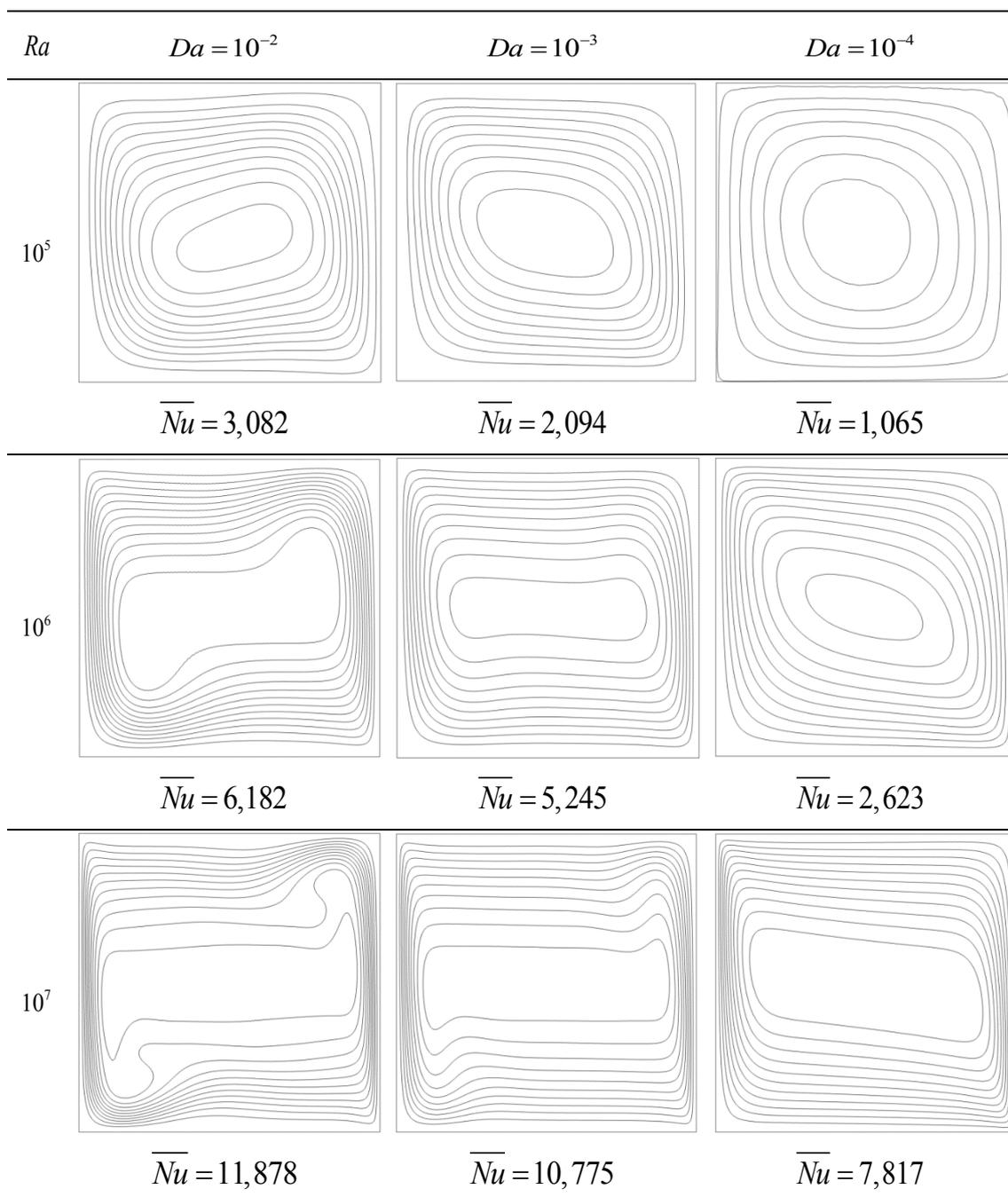


Figura 5.13 - Linhas de corrente para variação de Darcy e Rayleigh e $\phi = 0,4$

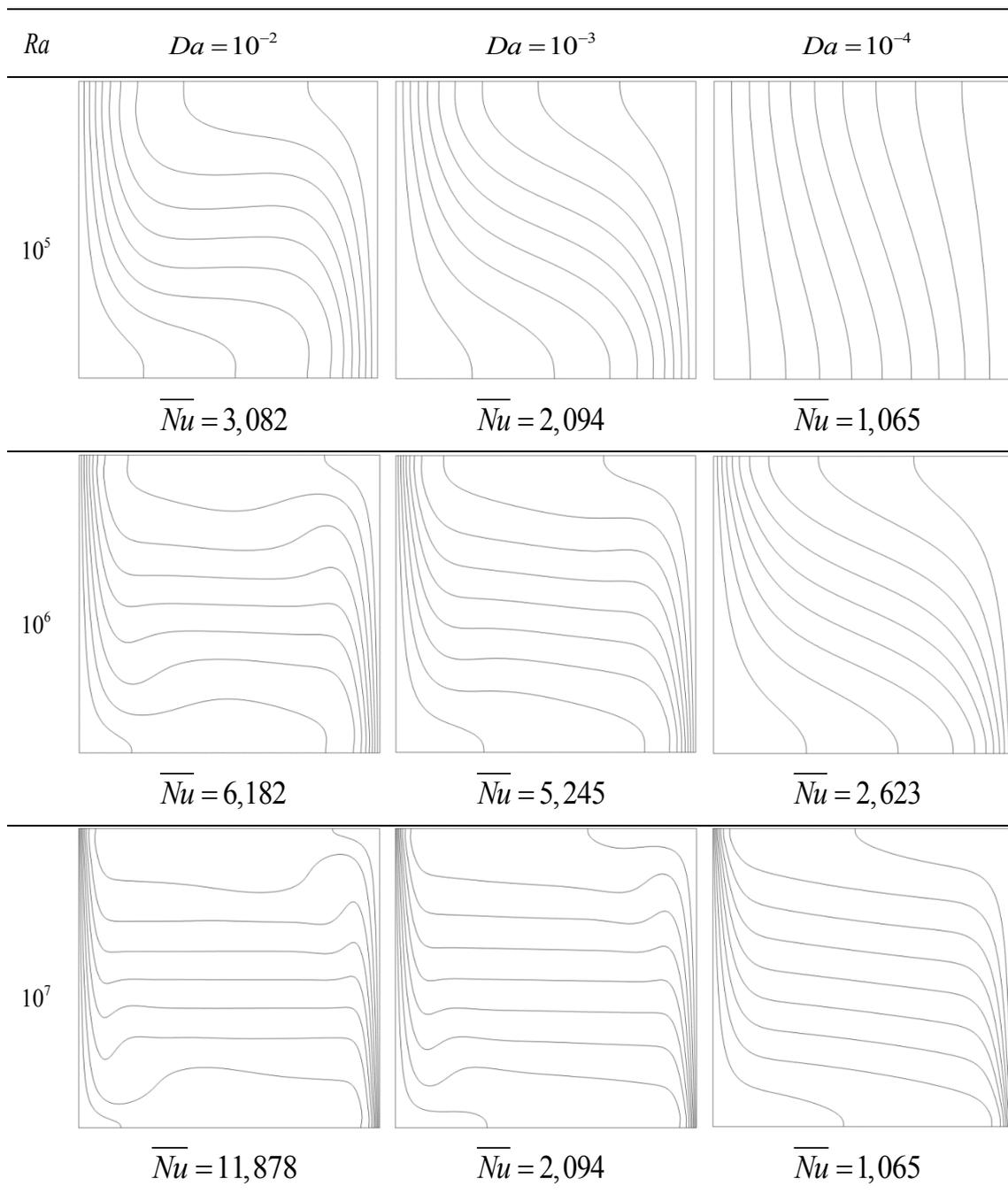


Figura 5.14 - Isotermas para variação de Darcy e Rayleigh e $\phi = 0,4$

O aumento do número de Darcy representa um aumento na permeabilidade da cavidade e seu efeito é análogo ao efeito do aumento do número de Rayleigh, isto é, provoca o estreitamento da região de camada limite, intensificando o processo de recirculação de fluido e assim, o processo de convecção.

Resultados para a diferentes porosidades e configurações de número de Rayleigh são apresentados no Apêndice B.

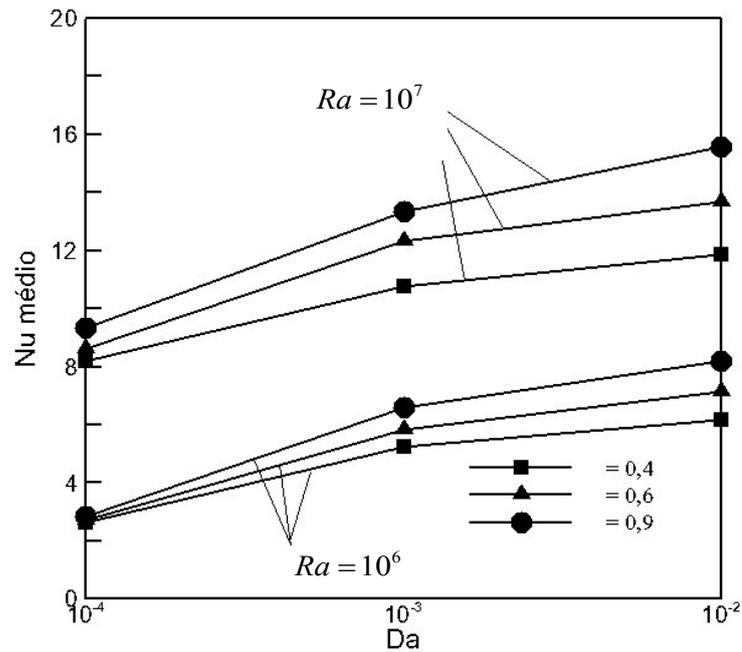


Figura 5.15 - Número de Nusselt médio versus número de Darcy para $Ra=10^6$ e $Ra=10^7$

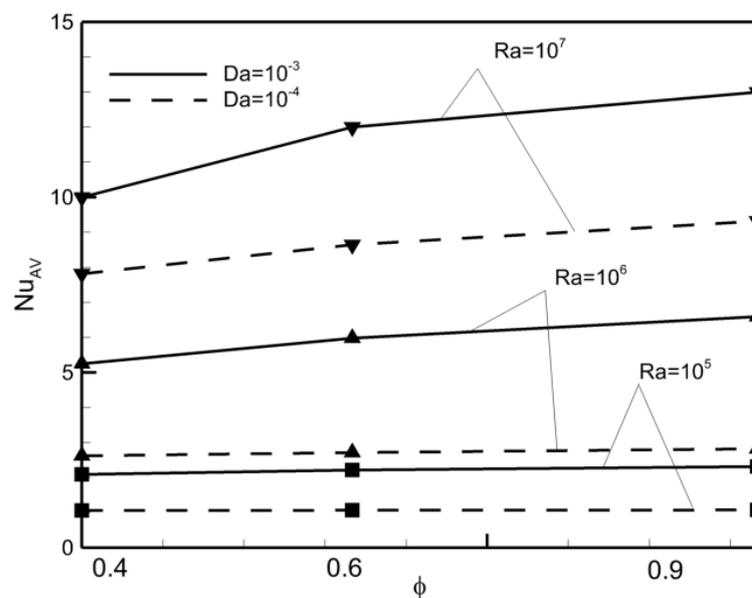


Figura 5.16 - Variação de porosidade e número de Rayleigh para casos com número de Darcy fixos

5.3.2 Efeito da Variação de Porosidade

A Figura 5.16 mostra o efeito do aumento do número de Nusselt com o aumento da porosidade da cavidade para diferentes configurações do número de Rayleigh e números de Darcy 10^{-3} e 10^{-4} . Para esta configuração de permeabilidade, os efeitos da variação de porosidade só podem ser verificados com um elevado grau de recirculação, mostrando, assim, que em situações de baixa intensidade de recirculação, a porosidade interna da cavidade exerce pouca influência sobre a transferência de calor.

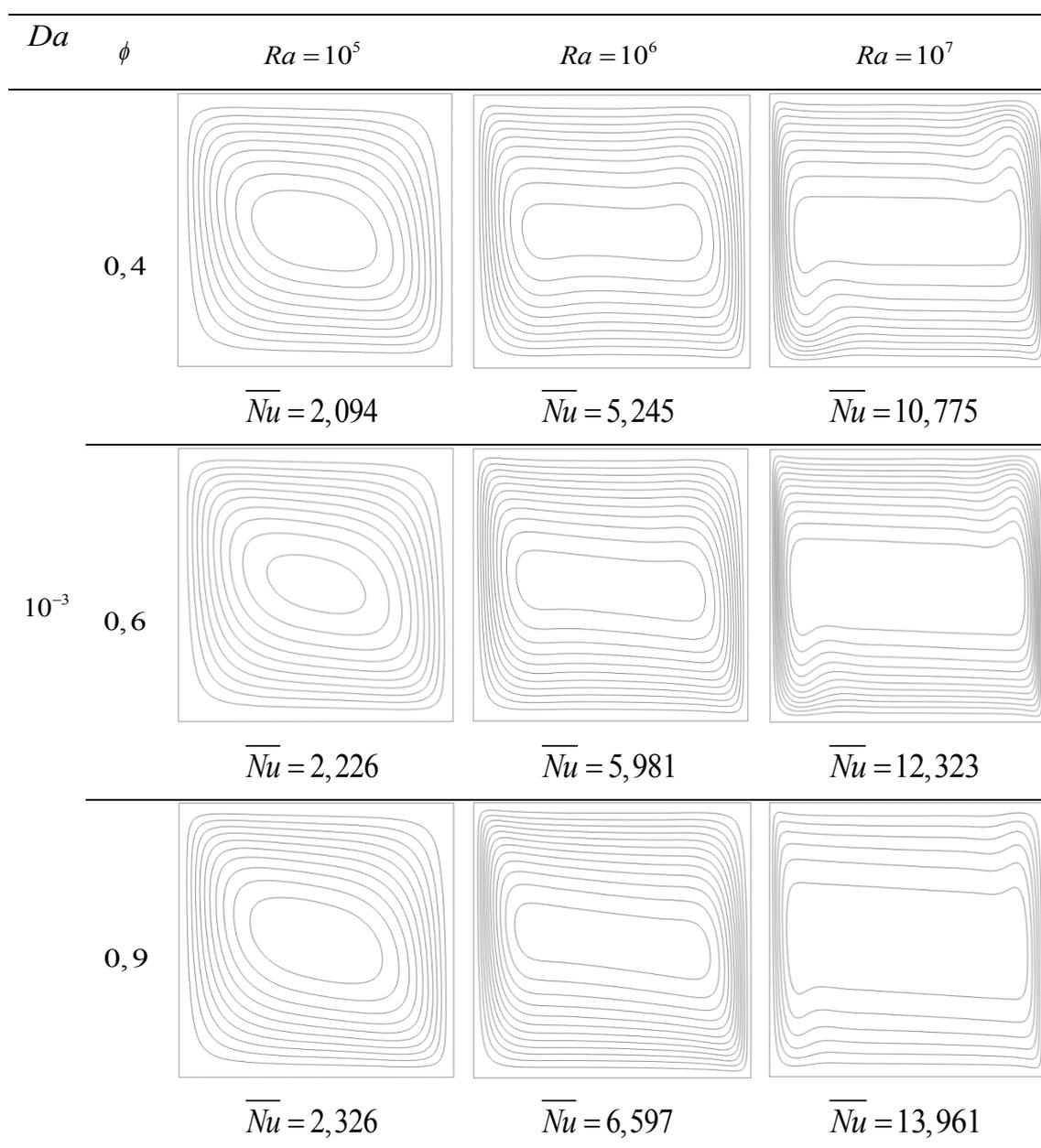


Figura 5.17 - Linhas de corrente para variação de número de Rayleigh e Porosidade

A Figura 5.17 e a Figura 5.18 mostram os efeitos da variação de porosidade e número de Rayleigh com permeabilidade $Da=10^{-3}$ através de linhas de corrente e isotermas, respectivamente. Percebe-se que com o aumento da porosidade, ocorre um leve aumento na densidade de linhas de corrente nas regiões adjacentes à parede, aumentando assim a recirculação de fluido na cavidade e intensificando o processo convectivo, embora pouco pronunciado. Estes efeitos são mais pronunciados a medida que o número de Rayleigh aumenta.

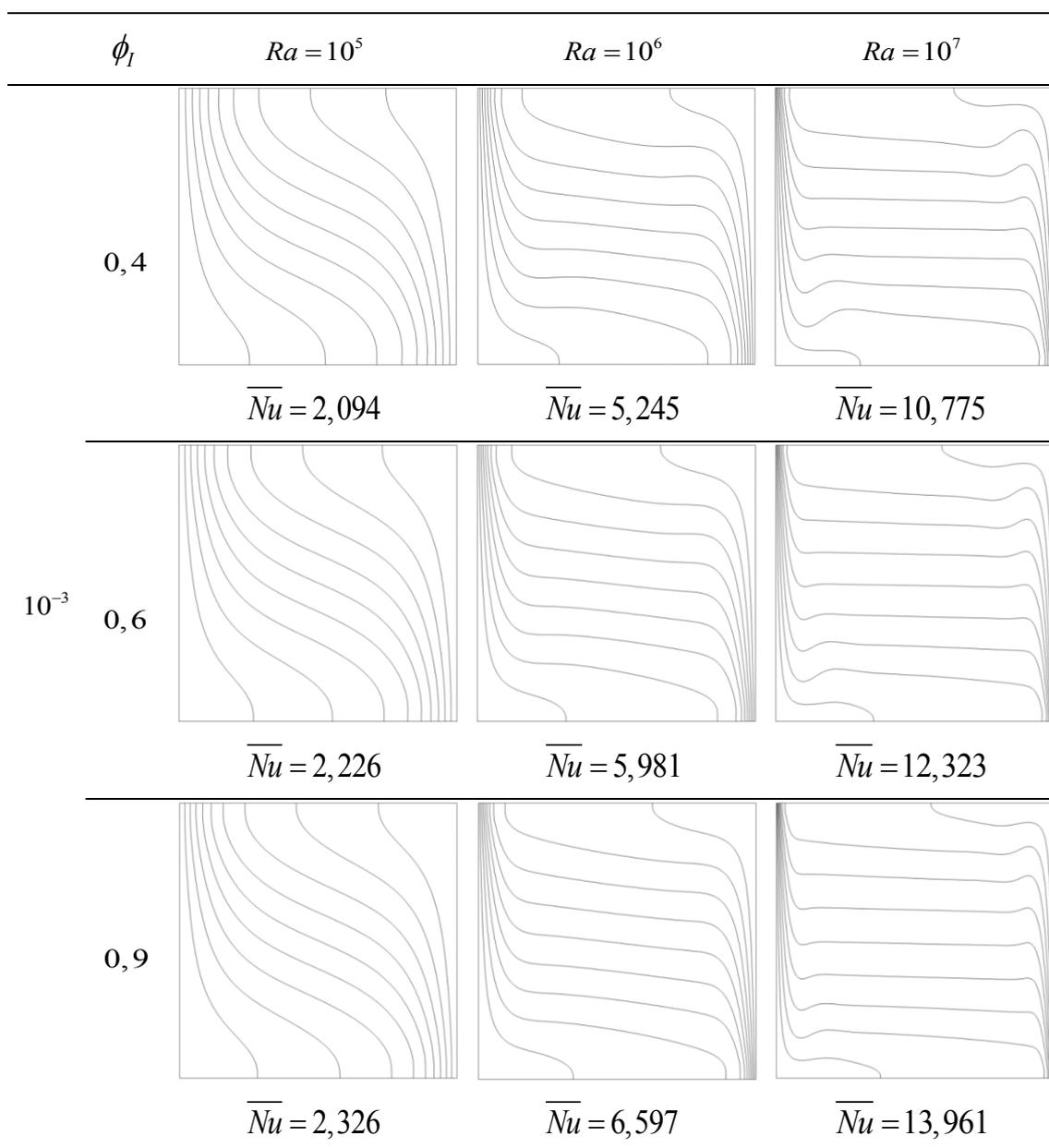


Figura 5.18 - Isotermas para variação de número de Rayleigh e Porosidade

Todos os casos analisados possuem uma razão de condutividade térmica sólido-fluido unitária, e, portanto, o aumento da porosidade implica no aumento da troca térmica no interior da cavidade pois isso representa uma diminuição na proporção de sólidos, diminuindo assim a troca térmica por condução.

O aumento da porosidade tem efeito análogo ao aumento do número de Rayleigh e do número de Darcy sobre a troca térmica no interior da cavidade, mas, seu efeito é bem menos pronunciado quando comparado as outras propriedades analisadas.

5.3.3 Previsão do Número de Nusselt Médio na Cavidade

Levando em consideração a variação de parâmetros realizada no presente estudo, propõem-se uma correlação para previsão do número de Nusselt médio na cavidade em função do número de Rayleigh, da porosidade e do número de Darcy. A interpolação da função de variáveis múltiplas foi realizada com o auxílio do programa Datafit (DataFit, 2015). A Equação (41) apresenta a correlação proposta com um coeficiente de determinação de $R^2=0,939$.

$$\overline{Nu} = 2,055 \ln Ra + 0,00466 \ln^3 Da - 1,434 \ln^2 \phi - 19,575 \quad (41)$$

Para se analisar os efeitos da variação de parâmetros na troca térmica dentro da cavidade, podemos tomar como constante três pares de variáveis na correlação proposta e analisar individualmente a variação de cada parâmetro.

Primeiramente, na Equação (42) é mostrada a correlação proposta com uma configuração de número de Darcy e porosidade fixos em 10^{-4} e 0.9, respectivamente. Na Figura 5.19 são mostradas curvas para outras configurações. É possível notar o aumento do número de Nusselt com o aumento do número de Rayleigh para todas as configurações de número de Darcy e porosidades propostas e também que o processo convectivo na cavidade é favorecido quando a permeabilidade do meio é maior.

$$\overline{Nu} = -23,234 + 2,055 \ln Ra \quad (42)$$

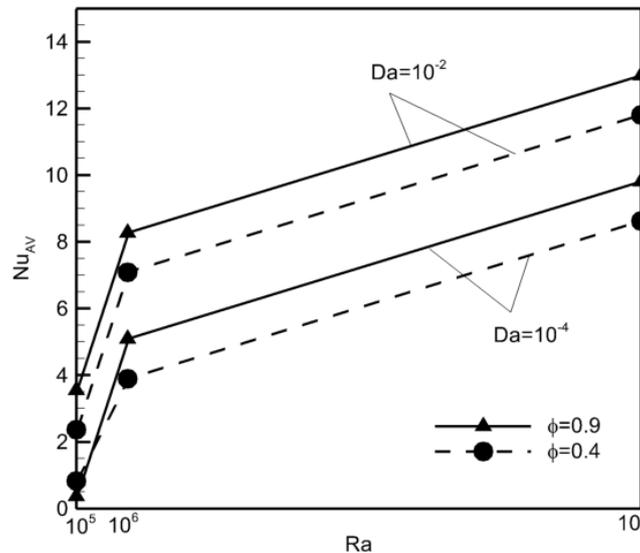


Figura 5.19 - Variação do número de Rayleigh para a correlação de previsão do número de Nusselt em cavidades preenchidas com meio poroso homogêneo

Na Equação (43) toma-se um número de Rayleigh constante de valor 10^7 e uma porosidade de 0.9, fazendo com que a correlação seja uma função somente do número de Darcy para cada caso. porosidade com para uma intensidade de recirculação constante.

$$\overline{Nu} = 13,5 + 0,004633 \ln^3 Da \quad (43)$$

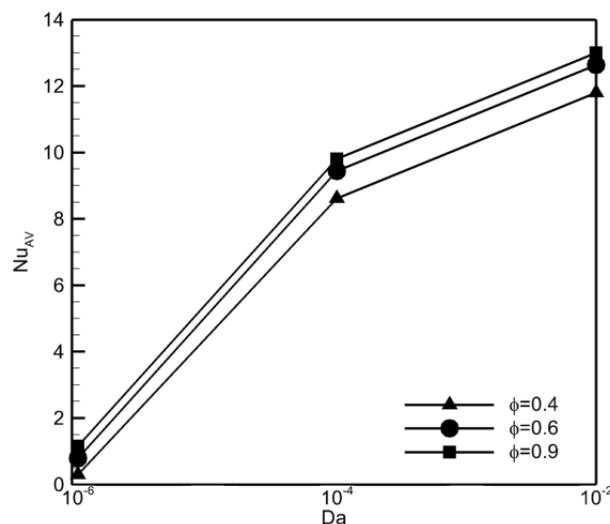


Figura 5.20 - Variação do número de Darcy para a correlação de previsão do número de Nusselt em cavidades preenchidas com meio poroso homogêneo

O efeito da variação do número de Darcy é mostrado na Figura 5.20 para diferentes combinações de número de Rayleigh e porosidade, onde também se percebe um aumento do número de Nusselt com o aumento da permeabilidade do meio, além do efeito do aumento da troca térmica com o aumento da

Por fim, na Equação (44) é mostrada, de maneira similar, a correlação com diferentes configurações de número de Rayleigh e Darcy fixos em 10^7 e 10^{-4} , respectivamente, para se analisar o efeito do aumento da porosidade.

$$\overline{Nu} = 9,823 - 1,434 \ln^2 \phi \quad (44)$$

Diferentes combinações são mostradas graficamente na Figura 5.21, onde também é possível observar o aumento do número de Nusselt com o aumento da porosidade para todos os casos analisados. As retas de número de Rayleigh e Darcy constantes, que mostram a variação somente da porosidade, possuem uma variação de inclinação menor que as outras combinações, reforçando a conclusão de que, dentre os parâmetros variados, a porosidade é o que possui menor influência na troca térmica no interior da cavidade.

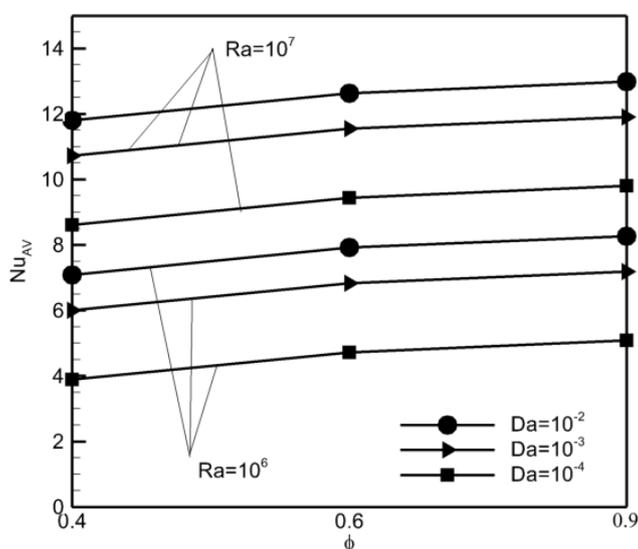


Figura 5.21 - Variação da porosidade para a correlação de previsão do número de Nusselt em cavidades preenchidas com meio poroso homogêneo

Através dessa análise, conclui-se novamente que o aumento do número de Rayleigh, da porosidade e da permeabilidade intensificam a troca térmica na

cavidade e também que o número de Rayleigh é o parâmetro que mais exerce influência nesse processo.

Na Figura 5.22 é mostrado um gráfico de dispersão para a correlação proposta onde são mostrados os valores do número de Nusselt médio na cavidade de acordo com as simulações realizadas e de acordo com a correlação proposta, onde os valores mais distantes da reta indicam os maiores erros, devidos ao ajuste da curva, que são da ordem de 18%.

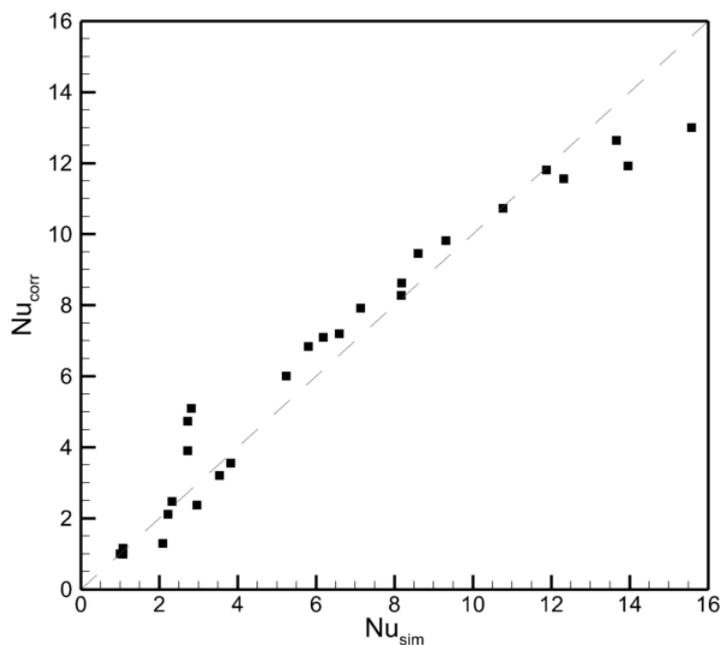


Figura 5.22 – Gráfico de Dispersão para os valores de Nusselt médio da cavidade de acordo com as simulações em relação aos valores da correlação

Neste capítulo foram apresentados inicialmente resultados de verificação para a cavidade limpa para garantir a confiabilidade do método e do código utilizado, além de explorar a variação de parâmetros próprios do método Lattice Boltzmann. Em seguida, foram apresentados e analisados resultados para a cavidade preenchida com meio poroso homogêneo, como o número de Rayleigh, número de Darcy e porosidade.

6. CONCLUSÕES

Meios porosos reais apresentam elevada complexidade geométrica, razão pela qual se faz necessário o desenvolvimento de modelos capazes de representar estes meios. No presente trabalho foi proposto o uso do método Lattice Boltzmann para simulação da convecção natural em uma cavidade aquecida lateralmente e preenchida com meio poroso homogêneo.

Foi desenvolvido um código computacional utilizando a linguagem de programação Fortran para a implementação do modelo matemático que representa o fenômeno.

Foi realizada a variação de propriedades termo-hidráulicas da cavidade como número de Rayleigh, número de Darcy e porosidade. Para o estudo do efeito da variação de parâmetros, foram analisados o número de Nusselt médio, as linhas de corrente e isothermas do escoamento, além de outras propriedades para casos de verificação. Foi proposta uma correlação para previsão do número de Nusselt médio na cavidade em função dos parâmetros explorados.

Para os casos analisados, o aumento do número de Rayleigh levou a uma intensificação do processo de transferência de calor pois aumenta a intensidade de recirculação do fluido e, conseqüentemente, a troca de calor por convecção. O aumento do número de Darcy também influencia positivamente a intensificação da troca térmica por convecção pois seu aumento representa um aumento da permeabilidade do meio, facilitando a troca térmica. O efeito do aumento da porosidade interna da cavidade, embora seja pouco expressivo em relação ao efeito dos demais parâmetros, também influencia positivamente na troca térmica no interior da cavidade.

Como sugestões de trabalhos futuros pode-se citar o estudo de modelos de refino de malha e o uso de esquemas multi-relaxação, para tornar as simulações mais rápidas e estáveis sem perder qualidade nos resultados. Também pode-se citar a aplicação do MLB no estudo de fenômenos envolvendo meios porosos como por exemplo, um meio poroso bi-disperso.

REFERÊNCIAS

BEAR, J.; TSANG, G.M. **Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock**, Academic Press, 1st ed., London, 1993.

BEJAN, A.. **Convection heat transfer**. Second ed., John Wiley & Sons Inc., New York, U.S.A., 1995.

BÉNARD, H. **Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. – methods optiques d"observation et d"enregistrement**. Journal de Physique Théorique et Appliquée. France, Vol. 10, n. 1, p. 254-266, 1901.

BOYUN G.; WILLIAM C.L.; P.E.,ALI G. **Petroleum Production Engineering, A Computer-Assisted Approach**. Elsevier, 2007.

BRAGA, C.; de LEMOS, M. J. S..**Heat transfer in enclosures having a fixed amount of solid material simulated with heterogeneous and homogeneous models**. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 48, pp. 4748-4765, 2005.

CEPAC, Centro de Excelência em Pesquisa e Inovação em Petróleo, Recursos Minerais e Armazenamento de Carbono. **Conceitos de Engenharia de Reservatório**. Disponível em: < http://www.pucrs.br/cepac/download/Eng_Reservatorio_CCS.pdf> Acesso em Agosto 08, 2014.

CHEN, H., CHEN, S., MATTHAEUS, W. H. **Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method**. Phys. Rev. A 45: pp. R5339-5342, 1992.

CHEN, S.; DOOLEN, G. D. **Lattice Boltzmann method for fluid flows**. Annual Rev Fluid Mech 30:329-364, 1998.

CHEN, L., Q. KANG, Y. MU, Y.-L. HE, AND W.-Q. TAO. **A critical review of the pseudopotential multiphase lattice Boltzmann model: Methods and applications.** Int. J. Heat Mass Transfer, 76, 210–236, 2014.

CHIN, J. **Mesoscale fluid simulation with the Lattice Boltzmann method.** Phd Thesis, Huntsman Corporation Queen Mary University Schlumberger Cambridge Research, 2005.

DataFit. **Curve Fitting and Data Plotting**, disponível em www.oakdaleenqr.com acesso em 05/05/2015.

DE LAI, F. C.; JUNQUEIRA, S. L. M.; FRANCO, A. T.; LAGE, J. L.; MARTINS, A. L.; WALDMANN, A. T. A.; **Transferência de calor em cavidade com meio poroso bi-disperso: Abordagem Microscópica para fraturas discretas.** ENAHPE 2011, IV Encontro Nacional de Hidráulica de Poços de Petróleo e Gás, 2011.

DIAS, R.; DE LAI, F. C.; JUNQUEIRA, S. L. M.; FRANCO, A. T.; MARTINS, A. L.; LOMBA, R. F. T.; LAGE, J. L.; **Convecção natural em cavidade preenchida com meio poroso bi-disperso.** Rio Oil & Gas Expo and Conference, 2010.

DELLAR, P.J. **Incompressible limits of lattice Boltzmann equations using multiple relaxation times.** Journal of Computational Physics, vol. 190, Issue 2, pp. 351-370, 2003.

GUO, Z. L.; ZHAO, T. S. **Lattice Boltzmann simulation of natural convection with temperature-dependent viscosity in a porous cavity.** Progress in Computational Fluid Dynamics, Vol.5, 110-117, 2005.

HORTMANN, M.; PERIC, M.; SCHEUERER, G. **Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions.** International Journal of Numerical Methods Fluids, vol. 11, pp. 189-207, 1990

HOUSE, J. M.; BECKERMANN, C.; SMITH, T. F.. **Effect of a centered conducting body on natural convection heat transfer in an enclosure.** Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 18, pp. 213-225, 1990.

LAGE, J. L.; **The fundamental theory of flow through permeable media from Darcy to turbulence.** Southern Methodist University, 1997.

LISBOA, E. F. A.; **Uma abordagem multi-escala para o cálculo da permeabilidade longitudinal de meios porosos fibrosos randômicos,** Diss. Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

MASSAROTTI, N.; NITHIARASU, P.; CAROTENUTO, A.. **Microscopic and Macroscopic approach for natural convection in enclosures filled with fluid saturated porous medium,** International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, vol 13, p. 862-886, 2003.

MEIRA, R. E. C. P. **Aplicação do método lattice boltzmann ao estudo do escoamento em canais parcialmente porosos.** Projeto de dissertação de Mestrado, 2014.

MERRIKH, A. A., LAGE, J.L.. **Natural convection in an enclosure with disconnected and conducting solid blocks.** International Journal of Heat and Mass Transfer Vol.48, pp. 1361-1372, 2005.

MOHAMAD, A. A. **Lattice Boltzmann Method Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes.** Springer-Verlag, London Limited, 2011.

MOHAMAD, A. A.; KUZMIN, A. **A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem.** International Journal of Heat and Mass Transfer 53, 990 – 996, 2010.

NAKAYAMA, A. **PC-aided Numerical Heat Transfer and Convective Flow.** CRC Press, Tokyo, 1995.

NARASIMHAN, A.; REDDY, B. V. K.; **Natural convection Inside a Bidisperse Porous Medium Enclosure.** Journal of heat transfer, vol. 132, 2010.

NIELD, D. A.; BEJAN, A. **Convection in porous media.** 3^a ed., Springer-Verlag. New York, U.S.A., 2006.

NITHIARASU, P.; SEEHARAMU, K.N.; SUNDARARAJAN, T.. **Natural Convective Heat Transfer in a Fluid Saturated Variable Porosity Medium.** International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 40, 1997.

RAJU M.C, VARMA S.V.K, ANANDA REDDY, N. **Radiation and mass transfer effects on a free convection flow through a porous medium bounded by a vertical surface.** Journal of Future Engineering and Technology, Vol. 7, No: 2, pp. 7-12, 2012.

RAYLEIGH, L.. **On convective currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side.** Philosophical Magazine and Journal of Science, vol. 32, pp. 529-546, 1916.

REVNIC, C.; GROSAN, T.; POP, I.; INGHAM, D. B.; **Free convection in a square cavity filled with a bidisperse porous medium.** International journal of thermal sciences, vol. 48, pp. 1876-1883, 2009.

SCHEIDEGGER, A. E.. **The physics of flow through porous media.** Third ed., University of Toronto Press. Toronto, Canadá, 1974.

SUKOP M., THORNE D. **Lattice Boltzmann Modeling for geoscientists and engineers.** Ed. Springer, 2006.

VAFAI, K; **Handbook of porous media.** Marcel Dekker Inc, 2000

VAHL DAVIS, G.; JONES, I. P.. Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 3, pp. 227-248, 1983.

WOLFRAM, S. **Statistical mechanics of cellular automata**. Rev. Mod. Phys., 55:601–644, 1983.

WHITAKER, S., CARBONELL, R.G. **Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media**. Jacob Bear, 1984.

WOLF-GLADROW, D. A. **Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction**. Ed. Springer, 2000.

ZHAO, C. Y.; DAI, L. N.; TANG, G. H.; QU, Z. G.; LI, Z. Y. **A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem**. International Journal of Heat and Mass Transfer 53, 990 – 996, 2010.

APÊNDICE A

Esse apêndice apresenta o desenvolvimento de uma correlação para se prever o fator de relaxação que melhor se adequa a uma determinada combinação de número de Rayleigh e tamanho de lattice para problemas de convecção natural em cavidades aquecidas lateralmente e preenchidas com fluido saturado utilizando o Método Lattice Boltzmann.

Foram realizadas simulações para um número de Prandtl de 0.71 e números de Rayleigh variando entre 10^3 e 10^6 . Todas as simulações foram realizadas com o mesmo número de iterações (250,000) e os resultados são apresentados em termos do número de Mach e do erro percentual relativo ao número de Nusselt, formulados nas equações (1) e (2) (Mohamad, 2009), respectivamente, onde θ é a temperatura adimensional $\theta=(T - T_{ref})/\Delta T$, ΔT é a variação de temperatura $\Delta T=(T_{hot} - T_{ref})$ e M é o número total de lattices na direção y .

A frequência de relaxação e tamanho de lattice devem ser escolhidos de tal maneira que o número de Mach esteja abaixo do limite de incompressibilidade para o escoamento (Trouette, 2013). Como c_s e Pr são parâmetros fixos na equação (2), o número de Mach se torna uma função somente do número de Rayleigh, da viscosidade dinâmica e do tamanho do lattice.

$$Nu_{av} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (1)$$

$$Ma = \frac{u}{c_s} = \sqrt{\frac{Ra \nu^2}{M^2 Pr c_s^2}} \quad (2)$$

Na primeira parte do estudo, foi testada uma faixa de frequências de relaxação variando entre 1.53 e 1.94, baseada em valores comumente usados

na literatura consultada, com quatro combinações de lattice uniformes (64×64 , 100×100 , 150×150 e 200×200) e diferentes números de Rayleigh (10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6). Os resultados são apresentados em termos de percentagem de erro em relação ao número de Nusselt médio determinado por resultados de benchmark (HORTMANN, 1990) e a temperatura não-dimensional no centro da cavidade que deve ser $T_{mid} = 0.5$, devido à simetria da solução. Um trabalho anterior publicado por Mohamad e Kuzmin (2009) revela a importância de controlar, não só o erro relativo ao número de Nusselt médio, mas também a temperatura no centro da cavidade para simulações de convecção natural em cavidades aquecidas lateralmente.

Resultados para Rayleigh 10^5 e 10^6 com um lattice de 100×100 são mostrados na Figura A.1a e A.1b, respectivamente, onde é possível perceber que o erro associado a temperatura adimensional é superior ao erro relativo ao número de Nusselt com o aumento do número de Mach. Com números de Rayleigh e Prandtl fixos, o maior número de Mach ($Ma=1$) representa o menor valor para o parâmetro de relaxação ($\omega=1.53$). Essa tendência se repete para diferentes tamanhos de lattice e números de Rayleigh, reforçando a hipótese de que a temperatura no centro da cavidade deve ser monitorada para este tipo de problema.

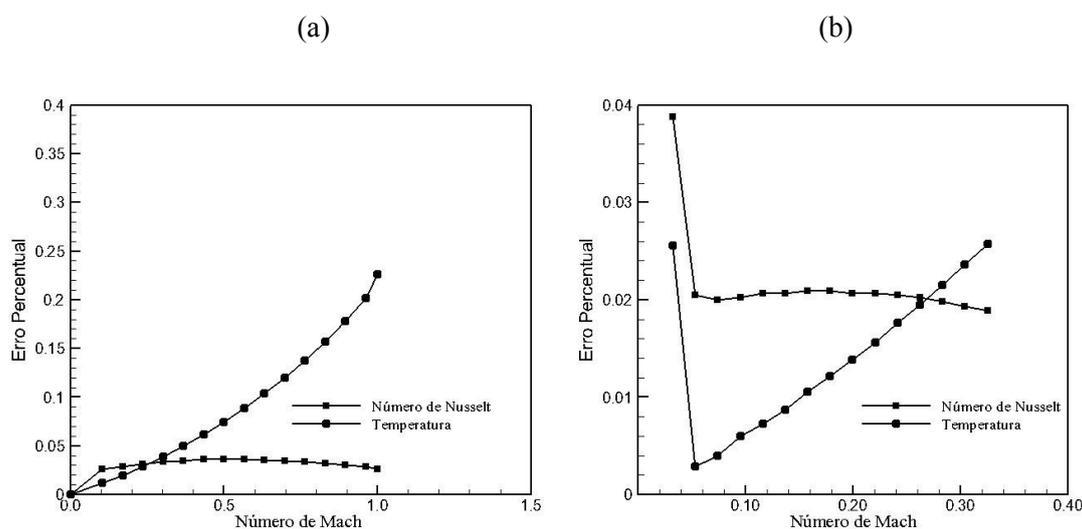


Figura A.1 - Número de Mach vs. Erro Percentual relativo ao número de Nusselt e a temperatura no centro da cavidade para um lattice 100×100 com (a) $Ra=10^6$ (b) $Ra=10^5$

Em seguida, foi realizado um teste com frequências de relaxação fixas e uma maior variação do tamanho de lattice. Tamanhos de lattice uniformes entre 10×10 e 200×200 foram testados para cada frequência de colisão e número de Rayleigh.

Uma correlação para o parâmetro de relaxação em termos do número de Rayleigh e o tamanho de lattice com um número de Prandtl fixo de 0,71 foi estabelecida com base nos resultados das simulações realizadas. Um erro de 3% foi definido como o limite aceitável tanto para a temperatura no centro da cavidade quanto para o número de Nusselt de acordo com resultados de benchmark (HORTMANN, 1990). Com este limite, foi possível definir valores máximos e mínimos para a frequência de colisão para múltiplos casos e uma correlação foi estabelecida nas Equações (3) e (4) com um R^2 de 0,9866 e 0,9302, respectivamente.

$$\omega_{\max} = (0.0028Ra^{-0,198}M+0.5)^{-1} \quad (3)$$

$$\omega_{\min} = (0.0007e^{3E-7Ra}M+0.5)^{-1} \quad (4)$$

As áreas entre estas duas curvas contemplam combinações de frequências de relaxação e o número de lattice para diferentes números de Rayleigh que resultam em erros menores do que 3% para o número de Nusselt e para a temperatura no centro da cavidade. As Figuras A.2a e A.2b mostram as curvas para números de Rayleigh 10^5 e 10^6 , respectivamente. Como esperado, a área entre as curvas diminui à medida que aumenta o número de Rayleigh para um tamanho fixo de lattice.

Embora as figuras A.2a e A.2b mostrem um tamanho de lattice a partir de zero, existe um tamanho mínimo da lattice que deve ser utilizado para cada número de Rayleigh para se obter convergência. Avaliações numéricas mostraram que qualquer tamanho de malha superior a 70×70 é adequado para o intervalo de números de Rayleigh explorado (10^3 a 10^6). Estas curvas também reforçam como a precisão dos resultados depende tanto do tamanho de lattice como de a frequência de colisão já que a faixa de frequências de relaxação

válidas aumenta à medida que o tamanho de lattice aumenta para o mesmo número de Rayleigh.

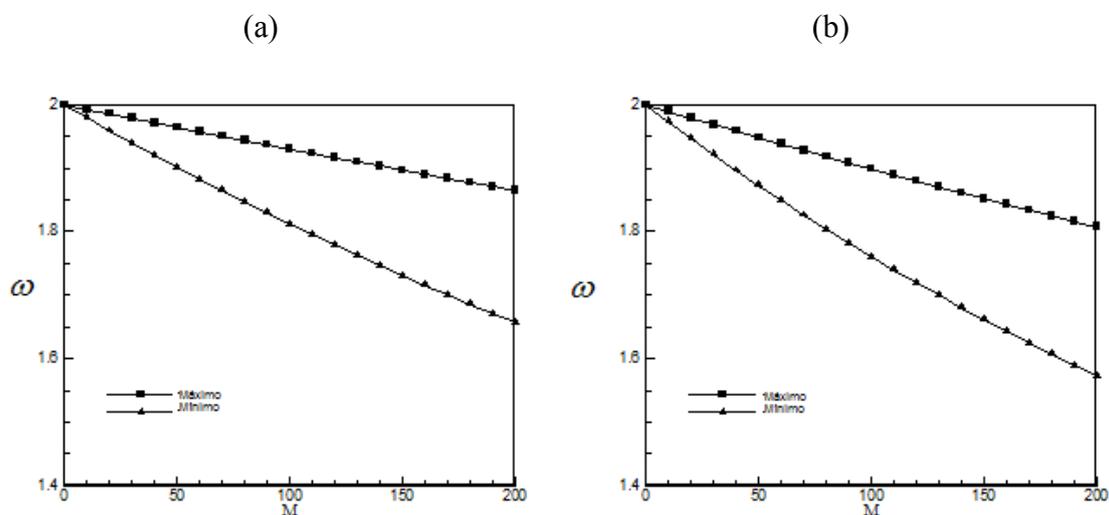


Figura A.2 - Valores mínimos e máximos da correlação para tamanho de lattice Vs. frequência de colisão para (a) $Ra\ 10^5$ e (b) $Ra\ 10^6$.

A Figura A.3b mostra a evolução da temperatura no centro da cavidade para uma frequência de relaxação de 1.77 e um tamanho lattice 150×150 , que é, de acordo com a correlação proposta, um valor adequado. Essa abordagem é comparada com resultados de Mohamad e Kuzmin (2009) que propõem, para o mesmo tamanho de lattice e número de Rayleigh, o uso de uma frequência de colisão de 1.88 que, embora também forneça resultados adequados em termos do número de Nusselt e da temperatura, implica em um número mais elevado de iterações para convergência. Resultados similares para um tamanho de lattice 100×100 e diferentes configurações de frequência de relaxação são mostrados na Figura A.3a.

O número de Nusselt médio na última iteração de cada caso é mostrado e comparado com resultados de verificação de Hortmann et al. (1990) na Tabela A.1. A Tabela A.2 mostra resultados em termos do número de Nusselt comparado com outros resultados da literatura.

Estas correlações foram testadas para números de Rayleigh que vão de 10^3 - 10^6 com diferentes tamanhos de lattice e validadas utilizando resultados de benchmark. Além disso, os resultados de Mohamad e Kuzmin (2009) foram

testados pois algumas das frequências de relaxação citadas em seus trabalhos não se adequam a correlação proposta. Para estes casos, os erros tanto para o número de Nusselt e para a temperatura adimensional no centro da cavidade são maiores do que 3%, indicando que a escolha adequada da frequência de colisão altera significativamente o resultado da simulação e, por conseguinte, uma formalização adequada sobre como a escolher esse parâmetro é necessária.

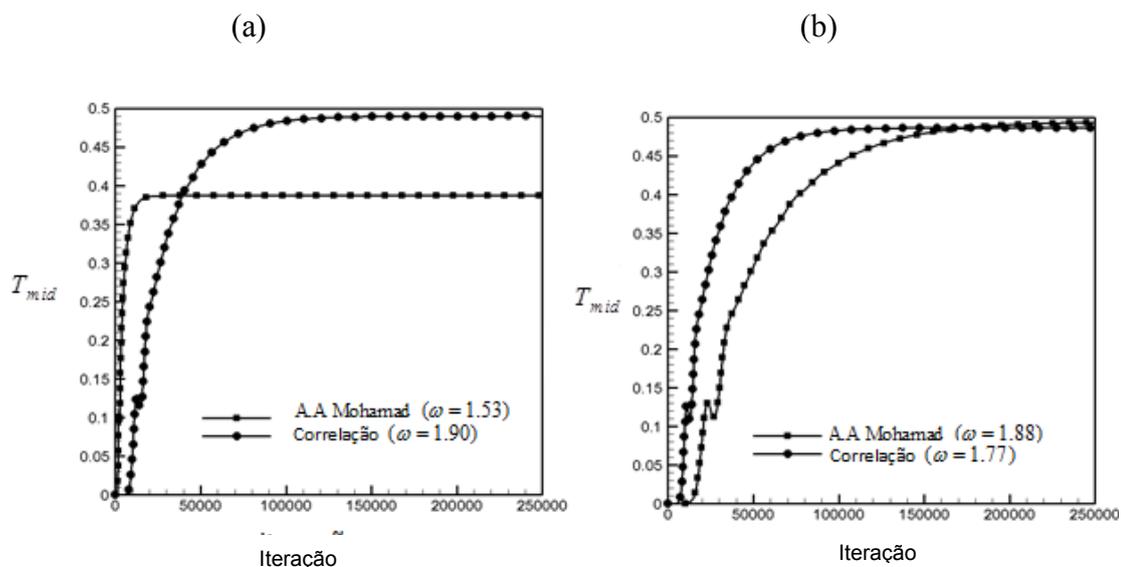


Figura A.3 - Iteração versus Erro Percentual relativo à temperatura no centro da cavidade para $Ra 10^6$: (a) Tamanho de lattice 100×100 (b) Tamanho de lattice 150×150

Tabela A.1 - Número de Nusselt médio para $Ra 10^6$ e diferentes frequências de colisão comparadas com resultados de benchmark.

Tamanho de Lattice (M)	Frequência de Relaxação (ω)	T_{mid}	Nu_{av}		
			[Hortmann, 1990]	[Presente]	EP(%)
150x150	1.88	0.49934	8.8251	8.8505	0.29%
	1.77	0.4864		8.7956	0.33%
100x100	1.53	0.3871	8.8251	8.1048	8.16%
	1.90	0.4900		9.0773	2.86%

Tabela A.2 - Número de Nusselt médio comparado com resultados da Literatura

Ra	Vahl Davis (1983)	Hortmann <i>et al</i> (1990)	Braga e de Lemos (2005)	De Lai (2009)	[Presente]
10^5	4,519	4,521	4,575	4,523	4,542
10^6	8,800	8,825	8,918	8,835	8,850
10^7	-	-	16,725	16,582	16,515

Embora essa correlação tenha sido desenvolvida para uma cavidade preenchida com fluido saturado, verificações mostraram que seus valores também são adequados para a simulação de cavidades preenchidas com meio poroso homogêneo.

APÊNDICE B

Este apêndice apresenta efeitos variação nas linhas de corrente e isothermas para a variação do número de Darcy e número de Rayleigh para diferentes configurações de porosidade. A Figura B.1 - e Figura B.2 mostram a variação nas linhas de corrente e isothermas para a variação do número de Darcy e Rayleigh com porosidade da cavidade $\phi = 0,6$ e a Figura B.3 e B.4 mostram a variação nas linhas de corrente e isothermas para a variação do número de Darcy e Rayleigh com porosidade da cavidade $\phi = 0,9$.

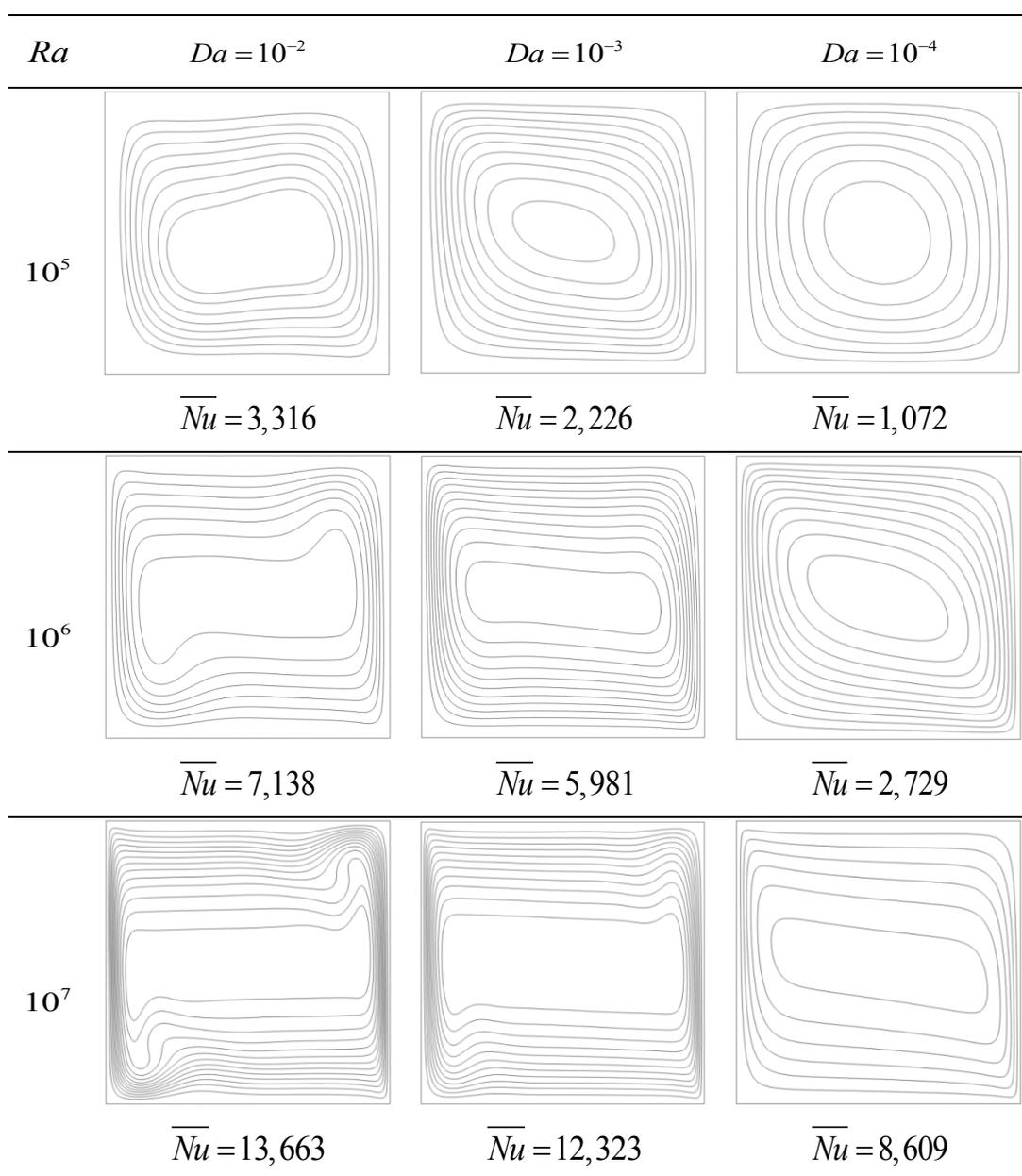


Figura B.1 - Linhas de corrente para variação de Darcy e Rayleigh e $\phi = 0,6$

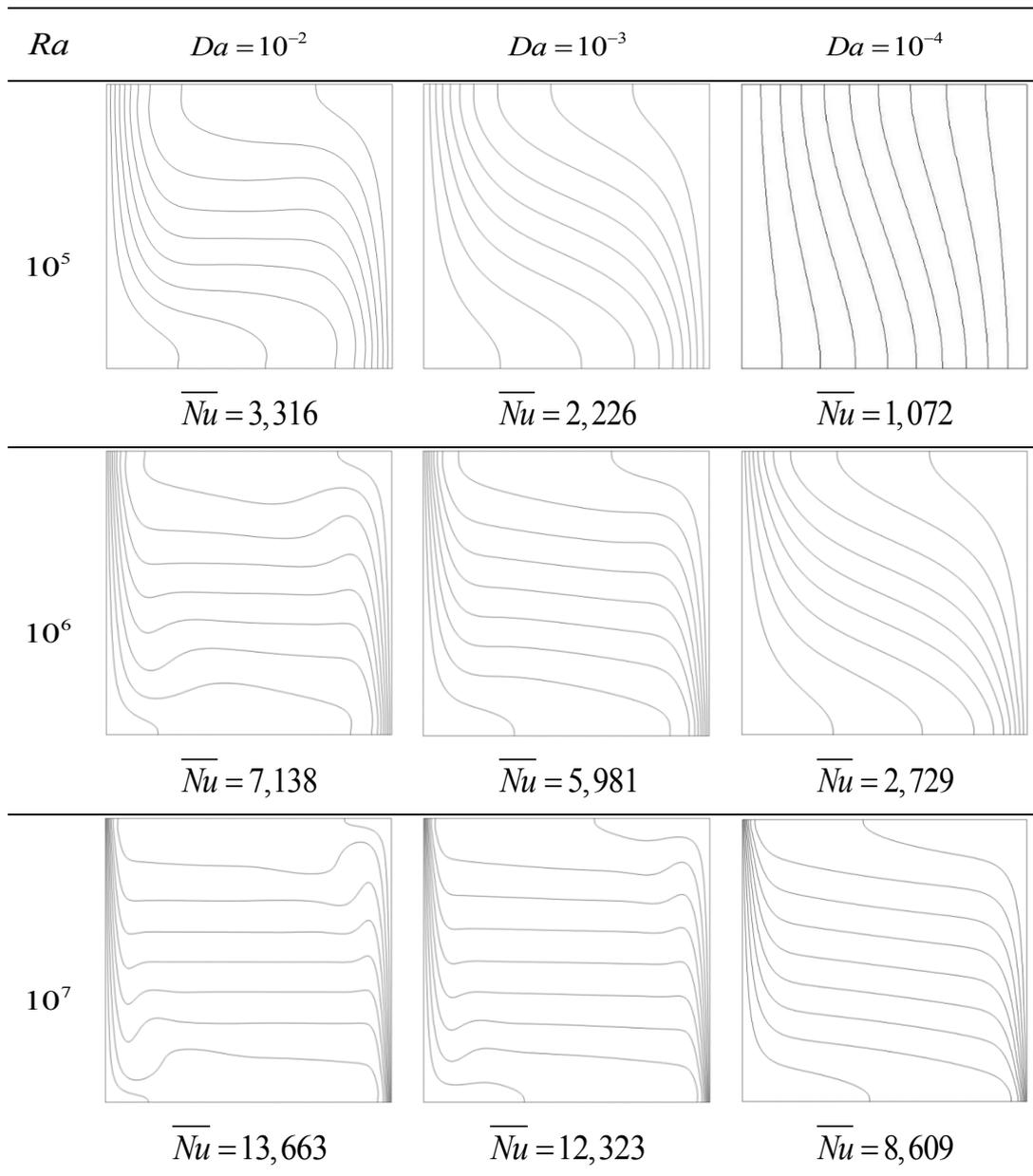


Figura B.2 - Isotermas para variação de Darcy e Rayleigh e $\phi = 0,6$

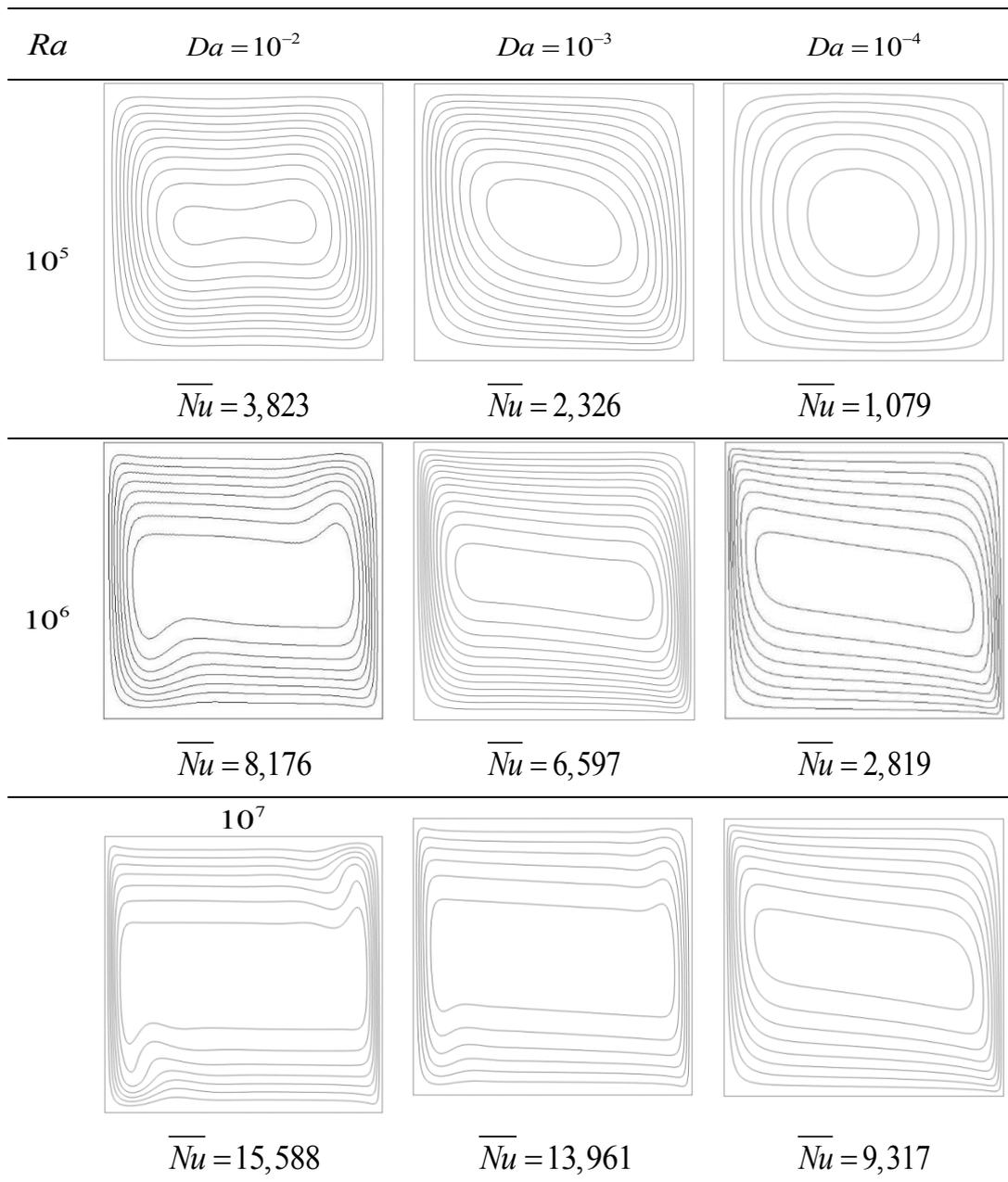


Figura B.3 - Linhas de corrente para variação de Darcy e Rayleigh e $\phi = 0,9$

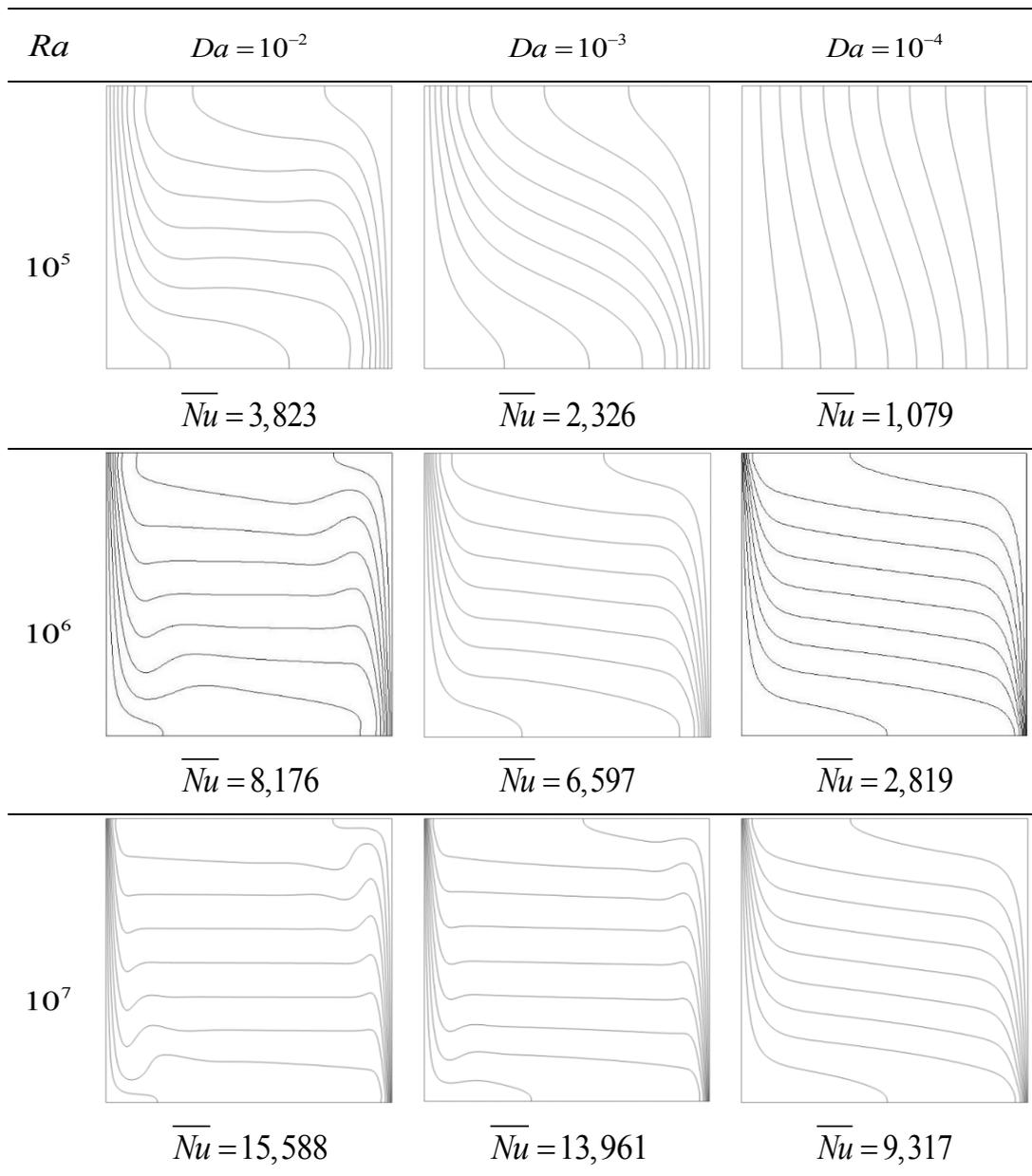


Figura B.4 - Isotermas para variação de Darcy e Rayleigh e $\phi = 0,9$

A Figura B.5 e a Figura B.6 mostram linhas de corrente e isotermas para a variação de porosidade e número de Rayleigh para uma permeabilidade de valor $Da=10^{-2}$ e a Figura B.7 e a Figura B.8 mostram linhas de corrente e isotermas para a variação de porosidade e número de Rayleigh para uma permeabilidade $Da=10^{-6}$.

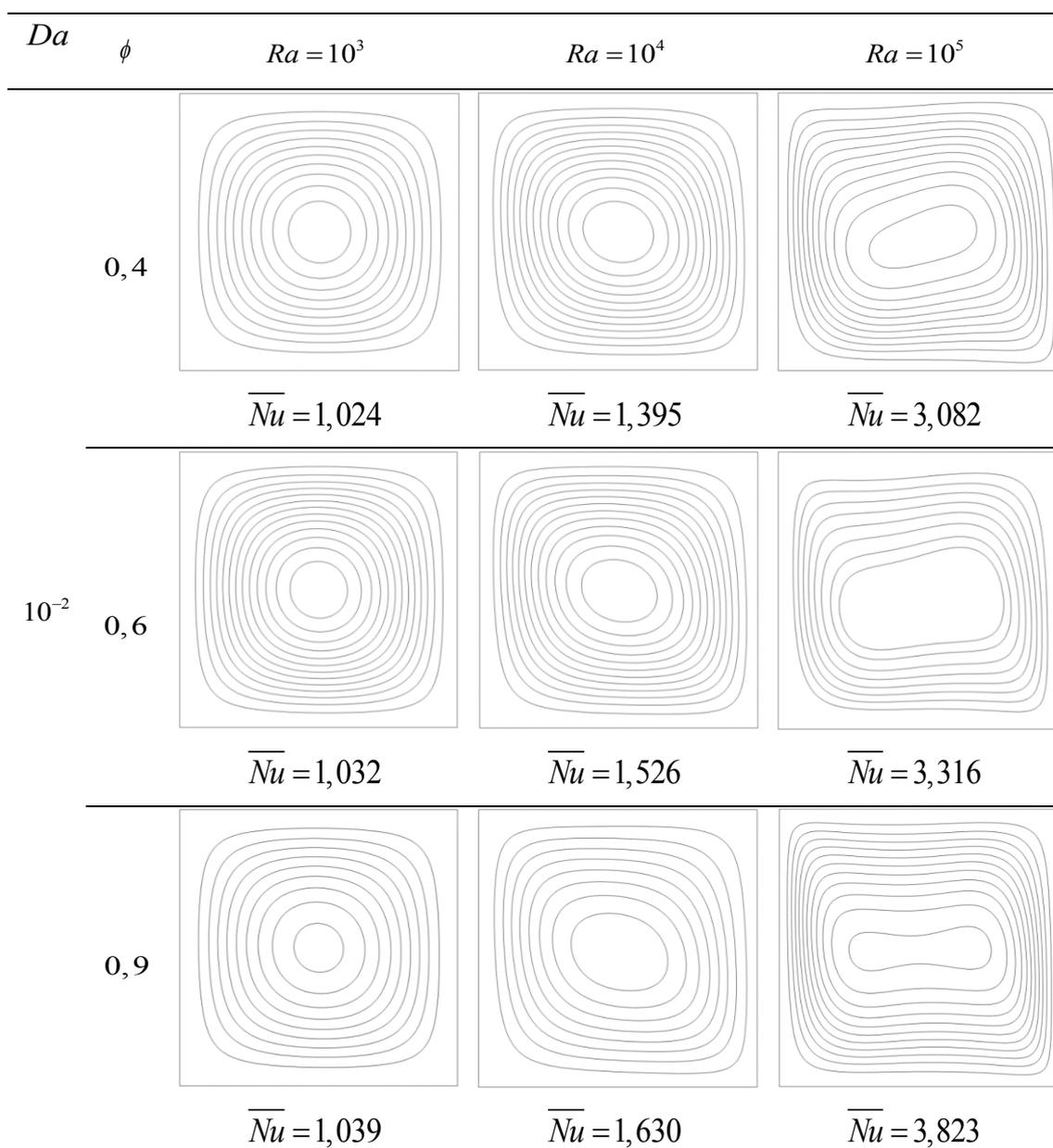


Figura B.5 - Linhas de corrente para variação de porosidade e número de Rayleigh

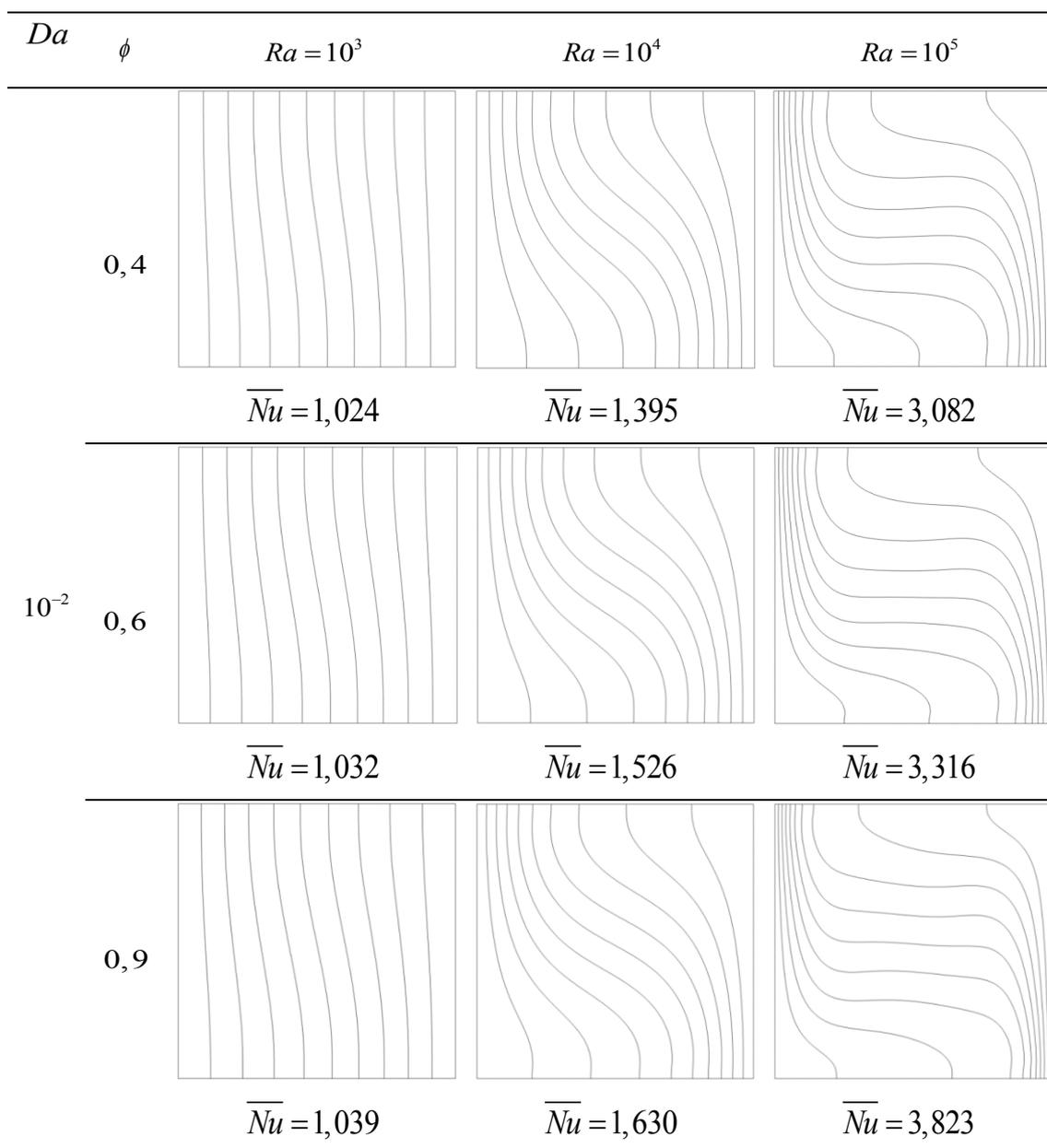


Figura B.6 - Isotermas para variaçao de porosidade e número de Rayleigh

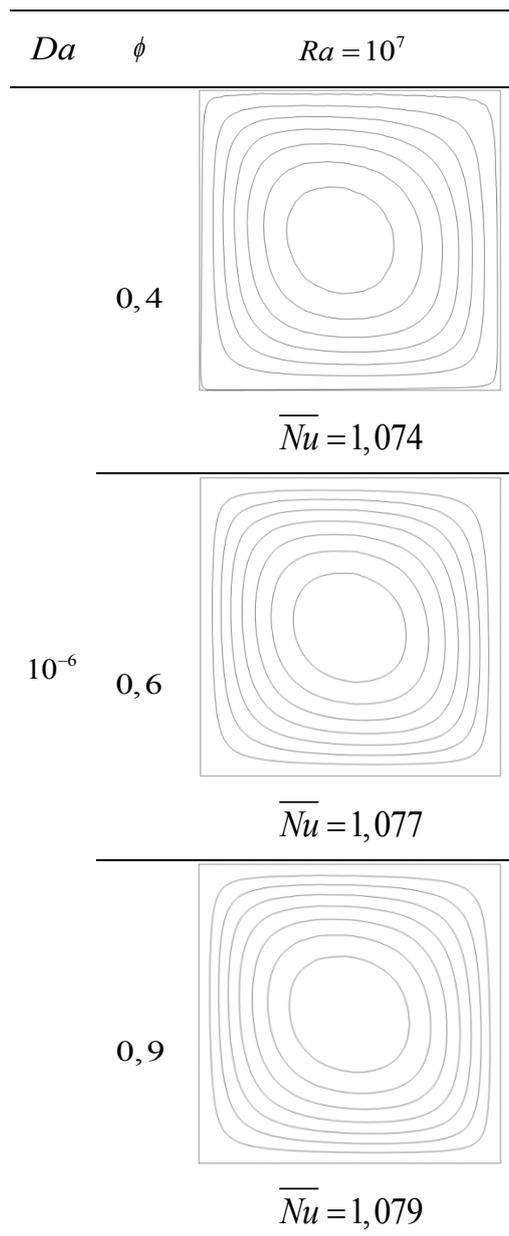


Figura B.7 - Linhas de corrente para $Da = 10^{-6}$

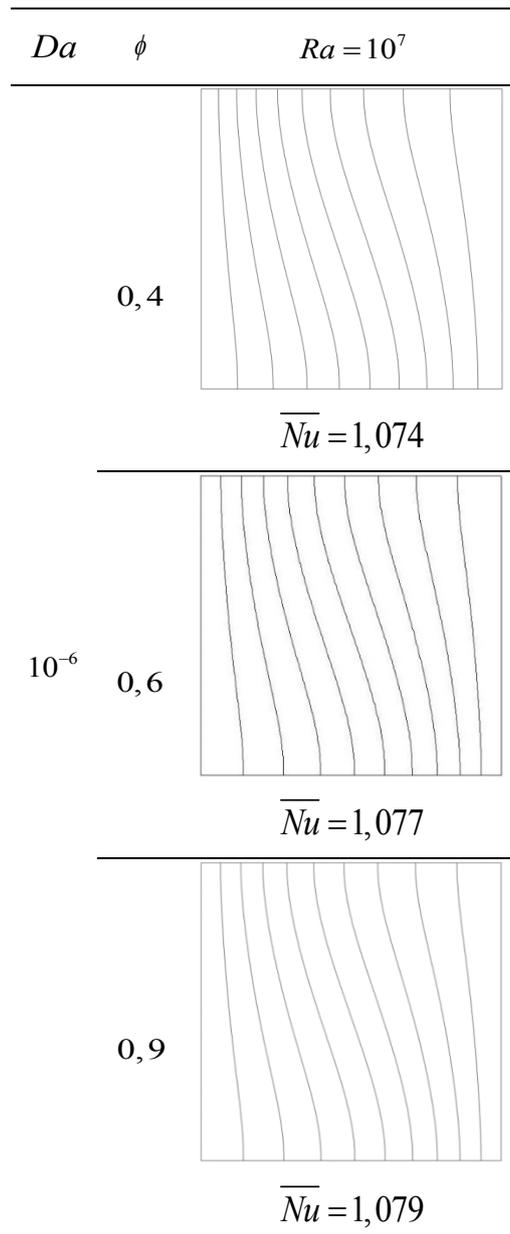


Figura B.8 - Isotermas para $Da = 10^{-6}$

APÊNDICE C

Este apêndice apresenta o código computacional usado para a simulação da cavidade homogênea usando o método Lattice Boltzmann. O código foi escrito com a linguagem de programação Fortran 90.

```

|*****
Computer code for Natural convection in a differentially heated cavity
|*****
! pag. 153; Lattice Boltzmann Method
!   Fundamentals and Engineering Applications
!   with Computer Codes - Prof. A. A. Mohamad
|*****
!   inserindo criterio de parada baseado no Nusselt medio
|*****
!   inserindo arquivos de entrada
|*****
!   adaptado para resultados de nusselt medio
|*****
!   adaptado para meio poroso homogeneo
|*****
character*2 aa
!m parameter (n=31,m=31)
real f(0:8,0:300,0:300)
real feq(0:8,0:300,0:300),rho(0:300,0:300)
real w(0:8), cx(0:8),cy(0:8)
real u(0:300,0:300), v(0:300,0:300)
real g(0:8,0:300,0:300), geq(0:8,0:300,0:300),th(0:300,0:300)
real uold(0:300,0:300),vold(0:300,0:300),thold(0:300,0:300)
real dx, dy, dt, lb, pi
real nuerr, Ra, Pr, visco
integer i, icase, icase_first, icase_last, mstep
common /por/ tref,visco,tau,taut,gbeta,poro,perm,beta
common /por1/ i_A,i_B
dx=1.
dy=1.
dt=1.
mstep=900000
tref=0.0

open(unit=11,file='cases.out',status='unknown')

```

```

write(11,25)
25 format('#icase',3x,'Ra',9x,'Pr',
&7x,'malha',3x,'visco',6x,'v_ref',6x,'alpha',5x,'tau',
&8x,'taut',7x,'stop',7x,'kk',5x,'Nu_av',7x,'Nu_w',7x,'err')

open(unit=4,file='cavs.data',status='old',
& access='sequential',form='formatted')
read(4,19)icase_first,icase_last
19 format(1x,I3,1x,I3)
icase=icase_first
10 read(4,15) icase,n,stoprule,Pr,Ra,Da,poro,visco,i_A,i_B,iprint
write(6,15) icase,n,stoprule,Pr,Ra,Da,poro,visco,i_A,i_B,iprint
15 format(I3,2x,I3,1x,1PE10.3,1x,
& 1PE10.3,1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,1x,
& I2,1x,I2,1x,I2)

m=n
pi=3.14159
do k=0,8
cx(0)=0.
cy(0)=0.
if(k .le. 4) then
lb=1.
teta=float(k-1)*(pi/2.)
go to 77
endif
lb=sqrt(2.)
teta=float(k-5)*(pi/2.)+ (pi/4.)
77 cx(k)=lb*cos(teta)
cy(k)=lb*sin(teta)
c write(6,*) k, lb, teta, cx(k), cy(k)
enddo
c cx(:)=(/0.0,1.0,0.0,-1.0,0.0,1.0,-1.0,-1.0,1.0/)
c cy(:)=(/0.0,0.0,1.0,0.0,-1.0,1.0,1.0,-1.0,-1.0/)
w(:)=(/4./9.,1./9.,1./9.,1./9.,1./9.,1./36.,1./36.,1./36.,1./36./)
uo=0.0
sumvelo=0.0
rhoo=6.00
tw=1.0
th=0.0

```

```

perm=Da*float(m*m)
v_ref=sqrt((visco**2.*Ra)/(Pr*float(m*m)))
gbeta=v_ref**2./float(m)
alpha=visco/Pr
Re=uo*m/alpha

perm=Da*float(m*m)

beta=1.75/sqrt(150.)
vis_perm=visco/perm
c vis_perm=0.

!m print *, "Re=", Re
!m write(*,*) 'Re=', Re
omega =1.0/(3.*visco+0.5)
omegat=1.0/(3.*alpha+0.5)

tau=1./omega
taut=1./omegat

do j=0,m
  do i=0,n
    rho(i,j)=rhoo
    u(i,j)=0.0
    v(i,j)=0.0
  end do
end do
do i=0,n
u(i,m)=uo
v(i,m)=0.0
end do
write(6,23)  icase,m,n,dx,dy,dt,Ra,Da,Pr,gbeta,visco,v_ref,
&          omega,omegat,poro,perm,vis_perm,alpha,
&          stoprule
! main loop
DO kk=1,mstep
17 call collesion(u,v,f,feq,rho,omega,w,cx,cy,n,m,th)
call streaming(f,n,m)
call bounceb(f,n,m)
call rhouv(f,rho,u,v,th,cx,cy,n,m)

```

```

! _____
! collestion for scalar
call collt(u,v,g,geq,th,omegat,w,cx,cy,n,m)
! streaming for scalar
call streaming(g,n,m)
call gbound(g,tw,w,n,m)
    call tcalcu(g,th,n,m)
    call resmax(n,m,u,v,th,uold,vold,thold,
&          ures,vres,thres,res_u,res_v,res_th)
    write(aa,18) icase
    open(9,file='nuav'//aa//'.dat',status='unknown')
18  format(i2.2)
    call nuaver(mstep,n,m,alpha,u,th,avnl,avnr)
    call avnucav(mstep,n,m,alpha,u,th,tref,avnu)
    nuerr= abs(avnl-avnr)
    write(9,*) kk,avnu,avnl,avnr,nuerr
c   if(kk .gt. mstep_max) go to 14
    if(
& (nuerr .le. stoprule) .or.
& (kk .gt. mstep)
& ) go to 14
call oldval(n,m,u,v,th,uold,vold,thold,
&          ures,vres,thres)
    END DO !kk
    ! end of the main loop
14  if(iprint .eq. 1) then
    call result(icasel,u,v,rho,th,tref,uo,n,m,ra,alpha)
    endif
c 14 write(6,24) kk,res_u,res_v,res_th,
    write(6,24) kk,res_u,res_v,res_th,
&          avnu,avnl,nuerr
    open(unit=7,file='cav_'//aa//'.out',status='unknown')
    write(7,23) icase,m,n,dx,dy,dt,Ra,Da,Pr,gbeta,visco,v_ref,
&          omega,omegat,poro,perm,vis_perm,alpha,
&          stoprule
    write(7,24) kk,res_u,res_v,res_th,
&          avnu,avnl,nuerr

    write(11,26) icase,Ra,Pr,m,visco,v_ref,alpha,tau,taut,
&          stoprule,kk,avnu,avnl,nuerr

```

```
23 format(/2X,'LBM ( Lattice Boltzmann Method, d2q9 scheme )'
```

```
  &/20X,'case simulated,  icase----=',I4
  &/20X,'grid, m .vs. n-----=',I4,' x',I4
  &/20X,'delta x , dx ----- =',1PE10.3
  &/20X,'delta y , dy ----- =',1PE10.3
  &/20X,'delta t , dt ----- =',1PE10.3
  &/20X,'Rayleigh ,   Ra----- =',1PE10.3
  &/20X,'Darcy ,     Da----- =',1PE10.3
  &/20X,'Prandtl ,   Pr----- =',1PE10.3
  &/20X,'gbeta ,    gbeta----- =',1PE10.3
  &/20X,'viscosity , visco----- =',1PE10.3
  &/20X,'ref. vel ,  v_ref----- =',1PE10.3
  &/20X,'omega ,    omega----- =',1PE10.3
  &/20X,'omega_t ,  omegat----- =',1PE10.3
  &/20X,'porosity ,  poro----- =',1PE10.3
  &/20X,'permea//ty , perm----- =',1PE10.3
  &/20X,'visco/perm, vis_perm--- =',1PE10.3
  &/20X,'difusivity , alpha----- =',1PE10.3
  &/20X,'stoprule ,stoprule----- =',1PE10.3
  &)
```

```
24 format(
```

```
  &/20X,'iteration ,   kk----- =',I9
  &/20X,'max res. u , res_u----- =',1PE10.3
  &/20X,'max res. v , res_v----- =',1PE10.3
  &/20X,'max res.th ,res_th----- =',1PE10.3
  &/20X,'Nusselt cav, avnu----- =',1x,1PE10.4
  &/20X,'Nusselt wall, avnl----- =',1x,1PE10.4
  &/20X,'nuerr ,     nuerr----- =',1PE10.3
  &)
```

```
26 format(I4,1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,1x,I4,
  &1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,
  &1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,1x,I6,1x,1PE10.3,1x,1PE10.3,
  &1x,1PE10.3)
```

```
  if(icase .ge. icase_last) go to 27
```

```
  do i=0,n ! cleaning distribution functions
```

```
do j=0,m
```

```
  do k=0,8
```

```
    f(k,i,j)=0.0
```

```

    g(k,i,j)=0.0
    feq(k,i,j)=0.0
    geq(k,i,j)=0.0
  enddo
enddo
  enddo
  icense=icense + 1 ! next case
  go to 10
27 stop
  end
! end of the main program
subroutine collesion(u,v,f,feq,rho,omega,w,cx,cy,n,m,th)
  real f(0:8,0:300,0:300)
  real feq(0:8,0:300,0:300),rho(0:300,0:300)
  real w(0:8), cx(0:8), cy(0:8)
  real u(0:300,0:300), v(0:300,0:300)
  real th(0:300,0:300)
  common /por/ tref,visco,tau,taut,gbeta,poro,perm,beta
  common /por1/ i_A,i_B
  if(i_A .eq. 1) then
    A1=(-visco/perm)*poro ! Darcy
  else
    A1=0.
  endif
  if(i_B .eq. 1) then
    A2=-beta/sqrt(perm*poro) ! Forch
  else
    A2=0.
  endif
  DO i=0,n
DO j=0,m
    A3=-gbeta*(th(i,j)-tref)
    t1=u(i,j)*u(i,j)+v(i,j)*v(i,j)
    if(i.eq.0.or.i.eq.n) then
      A3 =0.0
    endif
    if(j.eq.0.or.j.eq.m) then
      A3 =0.0
    endif
  DO k=0,8

```

```

t2=u(i,j)*cx(k)+v(i,j)*cy(k)
  t3= cx(k)*abs(u(i,j))*u(i,j)
&   +cy(k)*abs(v(i,j))*v(i,j)
  t4=u(i,j)*abs(u(i,j))*u(i,j)
&   +v(i,j)*abs(v(i,j))*v(i,j)
  force=w(k)*rho(i,j)*(1.-0.5/tau)*(
&   3.*(A1*t2+A2*t3+A3*poro*cy(k))
&   +(9./poro)*(t2*(A1*t2+A2*t3+A3*poro*cy(k)))
&   -(3./poro)*(A1*t1+A2*t4+A3*poro*v(i,j))
&   )
  feq(k,i,j)=rho(i,j)*w(k)*(1.0+3.0*t2+(4.50/poro)*t2*t2
&   -(1.50/poro)*t1)
  f(k,i,j)=feq(k,i,j)/tau+(1.-(1./tau))*f(k,i,j)
&   +force
END DO
END DO
  END DO
  return
  end
  subroutine collt(u,v,g,geq,th,omegat,w,cx,cy,n,m)
  real g(0:8,0:300,0:300),geq(0:8,0:300,0:300),th(0:300,0:300)
  real w(0:8),cx(0:8),cy(0:8)
  real u(0:300,0:300),v(0:300,0:300)
  common /por/ tref,visco,tau,taut,gbeta,poro,perm,beta
  do i=0,n
do j=0,m
  do k=0,8
    geq(k,i,j)=th(i,j)*w(k)*
&   (1.0+3.0*(u(i,j)*cx(k)+v(i,j)*cy(k)))
    g(k,i,j)=geq(k,i,j)/taut+(1.0-(1./taut))*g(k,i,j)
  end do
end do
  end do
  return
  end
  subroutine streaming(f,n,m)
  real f(0:8,0:300,0:300)
  ! streaming
  DO j=0,m
DO i=n,1,-1 !RIGHT TO LEFT

```

```

    f(1,i,j)=f(1,i-1,j)
  END DO
  DO i=0,n-1 !LEFT TO RIGHT
    f(3,i,j)=f(3,i+1,j)
  END DO
  END DO
  DO j=m,1,-1 !TOP TO BOTTOM
  DO i=0,n
    f(2,i,j)=f(2,i,j-1)
  END DO
  DO i=n,1,-1
    f(5,i,j)=f(5,i-1,j-1)
  END DO
  DO i=0,n-1
    f(6,i,j)=f(6,i+1,j-1)
  END DO
  END DO
  DO j=0,m-1 !BOTTOM TO TOP
  DO i=0,n
    f(4,i,j)=f(4,i,j+1)
  END DO
  DO i=0,n-1
    f(7,i,j)=f(7,i+1,j+1)
  END DO
  DO i=n,1,-1
    f(8,i,j)=f(8,i-1,j+1)
  END DO
  END DO
  return
end
subroutine bounceb(f,n,m)
  real f(0:8,0:300,0:300)
  do j=0,m
!west boundary
    f(1,0,j)=f(3,0,j)
    f(5,0,j)=f(7,0,j)
    f(8,0,j)=f(6,0,j)
!east boundary
    f(3,n,j)=f(1,n,j)
    f(7,n,j)=f(5,n,j)

```

```

f(6,n,j)=f(8,n,j)
  end do
  do i=0,n
!south boundary
f(2,i,0)=f(4,i,0)
f(5,i,0)=f(7,i,0)
f(6,i,0)=f(8,i,0)
!north boundary
f(4,i,m)=f(2,i,m)
f(8,i,m)=f(6,i,m)
f(7,i,m)=f(5,i,m)
  end do
  return
end
subroutine gbound(g,tw,w,n,m)
  real g(0:8,0:300,0:300)
  real w(0:8),tw
  ! Boundary conditions
  ! West boundary condition, T=1.
  do j=0,m
g(1,0,j)=tw*(w(1)+w(3))-g(3,0,j)
g(5,0,j)=tw*(w(5)+w(7))-g(7,0,j)
g(8,0,j)=tw*(w(8)+w(6))-g(6,0,j)
  end do
  ! East boundary condition, T=0.
  do j=0,m
g(6,n,j)=-g(8,n,j)
g(3,n,j)=-g(1,n,j)
g(7,n,j)=-g(5,n,j)
  end do
  ! Top boundary conditions, Adiabatic
  do i=0,n
g(8,i,m)=g(8,i,m-1)
g(7,i,m)=g(7,i,m-1)
g(6,i,m)=g(6,i,m-1)
g(5,i,m)=g(5,i,m-1)
g(4,i,m)=g(4,i,m-1)
g(3,i,m)=g(3,i,m-1)
g(2,i,m)=g(2,i,m-1)
g(1,i,m)=g(1,i,m-1)

```

```

g(0,i,m)=g(0,i,m-1)
  end do
  !Bottom boundary conditions, Adiabatic
  do i=0,n
g(1,i,0)=g(1,i,1)
g(2,i,0)=g(2,i,1)
g(3,i,0)=g(3,i,1)
g(4,i,0)=g(4,i,1)
g(5,i,0)=g(5,i,1)
g(6,i,0)=g(6,i,1)
g(7,i,0)=g(7,i,1)
g(8,i,0)=g(8,i,1)
g(0,i,0)=g(0,i,1)
  end do
  return
end
subroutine tcalcu(g,th,n,m)
real g(0:8,0:300,0:300),th(0:300,0:300)
  do j=0,m
do i=0,n
  ssumt=0.0
  do k=0,8
    ssumt=ssumt+g(k,i,j)
  end do
  th(i,j)=ssumt
end do
  end do
  return
end
subroutine rhouv(f,rho,u,v,th,cx,cy,n,m)
real f(0:8,0:300,0:300),rho(0:300,0:300),u(0:300,0:300),
& v(0:300,0:300),cx(0:8),cy(0:8)
real th(0:300,0:300)
common /por/ tref,visco,tau,taut,gbeta,poro,perm,beta
common /por1/ i_A,i_B
  do j=0,m
do i=0,n
  ssum=0.0
  do k=0,8
    ssum=ssum+f(k,i,j)

```

```

end do
rho(i,j)=ssum
end do
end do
DO i=0,n
DO j=0,m
usum=0.0
vsum=0.0
DO k=0,8
usum=usum+f(k,i,j)*cx(k)
vsum=vsum+f(k,i,j)*cy(k)
END DO
A3=-gbeta*(th(i,j)-tref)
u(i,j)=(usum/rho(i,j))
v(i,j)=(vsum/rho(i,j))+(1./2.)*poro*A3
END DO
END DO
! redefining u and v
if(i_A .eq. 1) then
c0=0.5*(1.+poro*(1./2.)*(visco/perm))
else
c0=0.5
endif
if(i_B .eq. 1) c1=poro*(1./2.)*beta/(poro**1.5*sqrt(perm))
if(i_B .eq. 0) c1=0.
DO i=0,n
DO j=0,m
u(i,j)=u(i,j)/(c0+sqrt(c0**2.+c1*abs(u(i,j))))
v(i,j)=v(i,j)/(c0+sqrt(c0**2.+c1*abs(v(i,j))))
END DO
END DO
return
end
subroutine result(icase,u,v,rho,th,tref,uo,n,m,ra,alpha)
character*3 bb
real u(0:300,0:300),v(0:300,0:300),th(0:300,0:300)
real strf(0:300,0:300),rho(0:300,0:300)
real anu(0:300,0:300), htl(0:300,0:300)
common /nu/ anu
write(bb,17) icase

```

```

17 format(i2.2)
   open(2,file='uvf//bb//'.dat,status='unknown')
   open(5,file='stf//bb//'.dat,status='unknown')
   open(8,file='tmf//bb//'.dat,status='unknown')
   open(10,file='htl//bb//'.dat,status='unknown')
   ! streamfunction calculations
   strf(0,0)=0.
   do i=0,n
rhoav=0.5*(rho(i-1,0)+rho(i,0))
if(i.ne.0) strf(i,0)=strf(i-1,0)-rhoav*0.5*(v(i-1,0)+v(i,0))
   do j=1,m
   rhom=0.5*(rho(i,j)+rho(i,j-1))
   strf(i,j)=strf(i,j-1)+rhom*0.5*(u(i,j-1)+u(i,j))
   end do
   end do
   ! using local nusselt
   ! first line
   do i=0,n
   htl(i,0)=anu(i,0)
   enddo
   ! heatlines
   do i=0,n
   do j=1,m
   htl(i,j)=htl(i,j-1)+anu(i,j)
   enddo
   enddo
   ! uv field
   write(2,*)'VARIABLES =X, Y, U, V'
   write(2,*)'ZONE ','I=',n+1,'J=',m+1,',';'F=BLOCK'
   do j=0,m
write(2,*)(i/float(m),i=0,n)
   end do
   do j=0,m
write(2,*)(j/float(m),i=0,n)
   end do
   do j=0,m
write(2,*)(u(i,j),i=0,n)
   end do
   do j=0,m
write(2,*)(v(i,j),i=0,n)

```

```

end do
!m do j=0,m
!m write(3,*)j/float(m),u(5,j)/uo,u(n/2,j)/uo,u(n-10,j)/uo
!m end do
!m do i=0,n
!m write(4,*) i/float(n),th(i,m/2)
!m end do
! streamfunction and temperature
write(5,*)'VARIABLES =X, Y, S'
write(5,*)'ZONE ',!=",n+1,'J=',m+1,';',',',F=BLOCK'
do j=0,m
write(5,*)(i/float(m),i=0,n)
end do
do j=0,m
write(5,*)(j/float(m),i=0,n)
end do
do j=0,m
write(5,*)(strf(i,j),i=0,n)
end do
! temperature
write(8,*)'VARIABLES =X, Y, T'
write(8,*)'ZONE ',!=",n+1,'J=',m+1,';',',',F=BLOCK'
do j=0,m
write(8,*)(i/float(m),i=0,n)
end do
do j=0,m
write(8,*)(j/float(m),i=0,n)
end do
do j=0,m
write(8,*)(th(i,j),i=0,n)
end do
! heatlines
write(10,*)'VARIABLES =X, Y, H'
write(10,*)'ZONE ',!=",n+1,'J=',m+1,';',',',F=BLOCK'
do j=0,m
write(10,*)(i/float(m),i=0,n)
end do
do j=0,m
write(10,*)(j/float(m),i=0,n)
end do

```

```

do j=0,m
write(10,*)(htl(i,j),i=0,n)
end do
return
end
! Nusselt number Calculation hot and cold walls
subroutine nuaver(mstep,n,m,alpha,u,th,avnl,avnr)
real u(0:300,0:300),th(0:300,0:300)
snul=0.0
snur=0.0
do j=0,m
rnul=(th(0,j)-th(1,j))*float(n)
rnur=(th(n-1,j)-th(n,j))*float(n)
snul=snul+rnul
snur=snur+rnur
end do
avnl=snul/float(m)
avnur=snur/float(m)
return
end
! average Nusselt number
subroutine avnucav(mstep,n,m,alpha,u,th,tref,avnu)
real u(0:300,0:300),th(0:300,0:300),anu(0:300,0:300)
common /nu/ anu
avnu=0.
do i=0,n
do j=0,m
anu(i,j)=(1./alpha)*u(i,j)*(th(i,j)-tref
& -(th(i+1,j)-th(i-1,j))/2.
if(i .eq. 0) anu(i,j)= -(th(i+1,j)-th(i,j))
if(i .eq. n) anu(i,j)= -(th(n,j)-th(n-1,j))
avnu=avnu+anu(i,j)*float(n)
enddo
enddo
avnu=avnu/float(m*m)
return
end
! storing old values
subroutine oldval(n,m,u,v,th,uold,vold,thold,
& ures,vres,thres)

```

```

real u(0:300,0:300),v(0:300,0:300),th(0:300,0:300)
real uold(0:300,0:300),vold(0:300,0:300),thold(0:300,0:300)
do i=0,n
do j=0,m
uold(i,j)=u(i,j)
vold(i,j)=v(i,j)
thold(i,j)=th(i,j)
enddo
enddo
umax=maxval(uold)
umin=minval(uold)
ures=umax-umin

vmax=maxval(vold)
vmin=minval(vold)
vres=vmax-vmin
thmax=maxval(thold)
thmin=minval(thold)
thres=thmax-thmin
return
end
! evaluating residuals
subroutine resmax(n,m,u,v,th,uold,vold,thold,
& ures,vres,thres,res_u,res_v,res_th)
real u(0:300,0:300),v(0:300,0:300),th(0:300,0:300)
real uold(0:300,0:300),vold(0:300,0:300),thold(0:300,0:300)
real x(0:300,0:300),y(0:300,0:300),z(0:300,0:300)

do i=0,n
do j=0,m
x(i,j)=abs((u(i,j)-uold(i,j))/ures)
y(i,j)=abs((v(i,j)-vold(i,j))/vres)
z(i,j)=abs((th(i,j)-thold(i,j))/thres)
enddo
enddo
res_u=maxval(x)
res_v=maxval(y)
res_th=maxval(z)
return
end

```