

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial

Tese de Doutorado

apresentada à Universidade Tecnológica Federal do Paraná
como requisito parcial para a obtenção do título de

DOUTOR EM CIÊNCIAS

por

EVANGIVALDO ALMEIDA LIMA

ANÁLISE E APLICAÇÕES EM REDES DE PETRI TEMPORAIS:
Uma Abordagem via Álgebra Intervalar

Orientador:

Prof. Dr. LUIS ALLAN KÜNZLE

INF, UFPR - BRASIL

Co-orientador:

Prof. Dr. RICARDO LÜDERS

CPGEI, UTFPR - BRASIL

Membros da Banca:

Prof. Dr. RAFAEL SANTOS MENDES

DCA, FEEC, UNICAMP - BRASIL

Prof. Dr. CARLOS EDUARDO TRABUCO DÓREA

DEE, UFBA - BRASIL

Prof. Dr. FABIANO SILVA

INF, UFPR - BRASIL

Prof. Dr. PAULO CÉZAR STADZISZ

CPGEI, UTFPR - BRASIL

Curitiba, Fevereiro de 2007

EVANGIVALDO ALMEIDA LIMA

**ANÁLISE E APLICAÇÕES EM
REDES DE PETRI TEMPORAIS:**
Uma Abordagem via Álgebra Intervalar

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Informática Industrial.

Orientação:

Prof. Dr. Luis Allan Künzle (Orientador)

Prof. Dr. Ricardo Lüders (Co-Orientador)

Curitiba - PR - Brasil

Fevereiro - 2007

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da UTFPR - Campus Curitiba

L732a Lima, Evangivaldo Almeida
Análise e aplicações em redes de Petri temporais : uma abordagem via álgebra
intervalar / Evangivaldo Almeida Lima. Curitiba. UTFPR, 2007
XII, 165 f. : il. ; 30 cm

Orientador: Prof. Dr. Luis Allan Künzle
Tese: (Doutorado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cur-
so de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. Curitiba,
2007

Inclui bibliografia

1. Redes de Petri. 2. Álgebra intervalar. 3. Análise temporal. I.
Künzle, Luis Allan, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. III.
Título.

CDD: 004.62

Aos filhos Endi e Tomás;

À amada Olga;

Aos pais.

Agradecimentos

Tive o privilégio de ter Luis Allan e Ricardo Lüders como meus orientadores. Ambos compartilharam desse meu trabalho de pesquisa com total entusiasmo nos momentos de progresso e com total suporte nas minhas dificuldades.

Sou extremamente grato aos membros da banca pela paciência que tiveram para ler minha tese e mais ainda, por suas sugestões para tornar o texto mais claro e conciso.

Meus sinceros agradecimentos ao amigo Jean Simão pela leitura e sugestões na primeira versão do texto e sobretudo pela sua amizade e pelo seu companheirismo.

Esse trabalho não seria possível sem um ambiente saudável de pesquisa. Aos amigos do LSIP: Malguinha, Schastai, Andrey, João Luguense, Freedo, Nico e Fábio meu obrigado por propiciarem tal ambiente.

Grande parte dos resultados teóricos foram possíveis de serem observados por simulação graças à implementação de uma ferramenta computacional denominada Petri Net Analyzer. Ao amigo Erik Künzle, responsável por tal ferramenta e também pela companhia aos sábados no "CEFETÃO", meus agradecimentos.

Às minhas sete irmãs ao irmão "Bico de Goma" e aos amigos encontrados em Curitiba: Wilson, Joseane, Letícia, Rosa, Bret, Eliane e Evandro minha eterna gratidão pelo apoio durante esse período, muito obrigado.

À Universidade do Estado da Bahia pelo apoio através programa de aperfeiçoamento dos professores.

Sumário

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	ix
Notação	x
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Apresentação e Objetivos	1
1.1 Introdução	1
1.2 Objetivos e Justificativas	4
1.3 Estrutura do Trabalho	5
2 Álgebra Intervalar	6
2.1 Intervalos	6
2.1.1 Relação de Ordem	7
2.1.2 Estrutura Algébrica	9
2.2 Vetores e Matrizes	9
2.3 Função Intervalar	10
2.3.1 Função sobre Intervalo	10
2.4 Equações Lineares Intervalares	12
2.5 Conjunto das Soluções Restritas	13

2.5.1	Caracterização do Conjunto das Soluções Restritas	14
3	Redes de Petri e suas Extensões Temporais	21
3.1	Redes de Petri	21
3.1.1	Estrutura	21
3.1.2	Comportamento	23
3.1.3	Propriedades	24
3.2	Redes de Petri com Tempo	25
3.3	Redes de Petri Temporais	26
3.4	Análise de Redes de Petri Temporais via Classe de Estados	30
3.4.1	Método Enumerativo usando Tempo Relativo	30
3.4.2	Método Enumerativo usando Relógio Global	33
4	Análise das Redes de Petri Temporais Usando Tempo Global	36
4.1	Análise da Alcançabilidade Usando Tempo Global	36
4.1.1	O Estado de uma <i>RPT</i> com Tempo Global	37
4.1.2	Disparabilidade de um Conjunto de Transições	38
4.1.3	Regra de Disparo e Mudança de Classe de Estados	38
4.2	Análise com Tempo Global e Domínio Relativo	42
4.3	Escalonamento de Seqüências de Transições	46
4.4	Múltipla Habilitação de Transições	50
4.5	Equivalência de Estados	51
4.5.1	Rede Reversível ou Cíclica	53
4.6	Aplicações	54
4.7	Conclusões	59
5	Métodos de Redução para Redes de Petri Temporais	61

5.1	Análise das <i>RPTs</i> via Alcançabilidade	61
5.2	Análise de <i>RPTs</i> via Métodos Baseados em Ordem Parcial	62
5.2.1	Conjuntos Persistentes	63
5.2.2	<i>Unfolding</i> ou Desdobramento	65
5.3	Métodos de Redução para Redes de Petri Temporais	69
5.3.1	Redução de <i>RPTs Pontuais</i>	70
5.3.2	Redução de <i>RPT</i> com <i>Atraso</i>	72
6	Métodos de Redução via Aproximação Intervalar	73
6.1	Método de Redução para <i>RPT</i> Baseado em Regras	73
6.1.1	Equivalência de Redes	74
6.1.2	Fusão de Transições Concorrentes	75
6.1.3	Fusão de Transições Conflitantes	82
6.1.4	Fusão de Transições em Série	83
6.1.5	Redução de Lugares Redundantes	86
6.2	Método de Redução para uma <i>RTP</i> via Relação de Ordem	87
6.2.1	Matriz de Transições	88
6.2.2	Conjunto de Transições	88
6.2.3	Cardinalidade e Enumeração dos Conjuntos de Transições	89
6.2.4	Matriz Parcial	90
6.2.5	Matriz de Transições	90
6.2.6	Redução da Matriz de Transições	91
6.2.7	Matriz Intervalar	92
6.2.8	Recursos Compartilhados	95
6.3	Aplicação	97
6.4	Conclusões	106

7	Aproximações Intervalares para Estimação de Tempos em <i>RPTs</i>	108
7.1	Estimação de Intervalos de Tempo em <i>RPT</i>	108
7.2	Fórmula Algébrica para Cálculo de Intervalos	109
7.3	Equação Linear Intervalar para uma <i>RPT</i>	115
7.4	Equação Intervalar Geral para uma <i>RPT</i>	121
7.5	Aplicações	127
7.6	Conclusões	133
8	Alcançabilidade de Intervalo de Tempo em uma <i>RPT</i>	135
8.1	Equação Intervalar e o Problema de Alcançabilidade de Intervalos	136
8.2	Aproximação Intervalar para o Conjunto de Soluções Restritas	138
8.2.1	Cálculo da Aproximação Intervalar Interna para o Conjunto das Soluções Restritas	138
8.3	Aplicações	146
8.4	Conclusões	152
9	Conclusões e Trabalhos Futuros	154
9.1	Conclusões	154
9.2	Trabalhos Futuros	156
	Apêndice A – Equações Lineares Intervalares	157
A.1	Sistema de Equações Lineares Intervalares	157
A.1.1	Métodos Iterativos	157
A.1.2	Pré-Condicionamento	158
A.1.3	Envelope Intervalar da Solução Geral	159
A.1.4	Fórmula Fechada	159
	Referências Bibliográficas	160

Lista de Figuras

1	Solução geral (<i>a</i>) e solução restrita (<i>b</i>)	14
2	Rede de Petri temporal, domínio relativo	30
3	Grafo de classes para a rede mostrada na Fig. 2	32
4	Rede de Petri temporal para análise usando relógio global	33
5	Grafo de classes para rede da Fig. 4	35
6	Rede de Petri Temporal	38
7	Exemplo de uma <i>RPT</i> para análise de tempo global	41
8	Grafo de classes para a rede da Fig. 7	41
9	Classe de estados com domínio relativo	43
10	Exemplo de uma <i>RPT</i> para análise de domínio relativo	44
11	Grafo de classes da <i>RPT</i> mostrada na Fig. 10 usando domínio relativo	46
12	<i>RPT</i> para análise de seqüência de transições	48
13	Múltipla habilitação de transições	50
14	Grafo de alcançabilidade para a rede da Figura 13	51
15	Grafo de Alcançabilidade (<i>a</i>) rede não temporizada (<i>b</i>) rede temporal	52
16	RPT para Aplicação	54
17	Grafo de classes para a rede da Fig. 16	55
18	Grafo de classes equivalente para rede da Fig. 16	58
19	Grafo de classes usando domínio relativo para a rede mostrada na Fig. 16	59
20	Exemplo de uma <i>RP</i> com transições independentes	63
21	Completo (<i>a</i>) e reduzido (<i>b</i>) espaço de estado da <i>RP</i> mostrada na Figura 20	64

22	<i>RP</i> cíclica (a) e a rede de ocorrência (b)	67
23	<i>Unfolding</i> da rede de ocorrência da Figura 22(b)	69
24	Fusão de transições em série para redes STP	71
25	Fusão de transições paralelas para redes STP	71
26	Um exemplo de uma <i>DTPN</i>	72
27	Espaço de estado completo (a) e reduzido (b), para a rede da Figura 20	74
28	Fusão de transições em paralelo	75
29	Exemplo de sincronização	77
30	Grafo de alcançabilidade das redes original e reduzida, mostradas na Figura 29	78
31	Exclusão Mútua (a) e sua equivalente reduzida (b)	78
32	Fusão de ramos paralelos independentes	79
33	Fusão de ramos paralelos	81
34	Alcançabilidade completa para a rede da Fig. 33	81
35	Alcançabilidade reduzida devido à fusão das transições $t_1 - t_2$ (a), $t_3 - t_4$ (b) .	82
36	Transições conflitantes (a) fusão de transições conflitantes (b) fusão de transições concorrentes (c)	83
37	Fusão de transições em série	84
38	Fusão inadequada de transições em série	85
39	Grafo de classes para a rede da Figura 37 com $M_0(p_0) = 2$	86
40	Fusão de lugares paralelos	87
41	Redução de um lugar implícito	87
42	Exclusão mútua persistente (a) e seqüencial (b)	95
43	Transformação de uma estrutura de compartilhamento em seqüencial	97
44	<i>RPT</i> para um Escalonamento de Tarefas	98
45	Redução de um módulo conflitante	104
46	<i>RPT</i> reduzida equivalente à matriz MT^3	105

47	<i>RPT</i> reduzida no início do algoritmo	105
48	<i>RPT</i> reduzida equivalente à matriz MT^4	106
49	Estimação do estado S_n a partir de S_0	109
50	<i>RPT</i> para o Exemplo 7.1	113
51	<i>RPT</i> que não apresenta transição persistente	116
52	Exemplo de uma <i>RPT closed-loop</i>	118
53	<i>RPT</i> cíclica equivalente para a matriz C	122
54	Grafo marcado temporal cíclico	124
55	<i>RPT</i> acíclica e segura	125
56	<i>RPT</i> semi-cíclica	127
57	<i>RPT</i> reduzida obtida na aplicação do Capítulo 6	128
58	Tempo global e escala de operação dos recursos R_1 e R_2	131
59	<i>RPT</i> reduzida representando as tarefas	132
60	Espaço de classes de estados reduzido	133
61	Alcançabilidade de intervalos de tempo	135
62	Solução geral de uma equação intervalar	137
63	Solução restrita de uma equação intervalar	137
64	Aproximações intervalares de poliedros	139
65	Aproximação intervalar interna	140
66	Aproximações interna e externa	141
67	Modelo reduzido de uma <i>RPT</i> , Exemplo 8.1	141
68	Conjunto solução ilimitada, Exemplo	145
69	Exemplo de uma planta de manufatura	146
70	Rede de Petri temporal da planta	147
71	Redução da rede de Petri temporal	149
72	Rede reduzida para rede segura	149

73	Rede cíclica 2-limitada	150
74	Rede acíclica e segura	151
75	Rede acíclica e segura em execução	151
76	Rede reduzida acíclica e segura equivalente à rede	151
77	Solução restrita para as redes acíclicas livre \mathcal{Q}_2 e limitada \mathcal{Q}_1	153

Lista de Tabelas

1	Significado dos lugares e transições da <i>RPT</i> mostrada na Figura 44	98
2	Significado dos lugares e transições da <i>RPT</i> mostrada na Figura 52	119
3	Tempos globais de cada transição	120
4	Tempos globais e relativos de cada transição	130
5	Vetor Solução Geral (\mathbf{q}_{ext})	143
6	Processos da planta	147
7	Descrição dos elementos da rede de Petri	148
8	Intervalização Gaussiana	158

Notação

\mathbf{A}	Matriz e vetor intervalar
\mathbf{A}	Matriz real
$\underline{\mathbf{A}}$	Matriz real limitante inferior
$\overline{\mathbf{A}}$	Matriz real limitante superior
\mathbf{x}	Vetor real
$\underline{\mathbf{x}}$	Vetor real limitante inferior
$\overline{\mathbf{x}}$	Vetor real limitante superior
$f(x)$	Função real
$f(\mathbf{x})$	Função real com domínio intervalar
\mathbf{F}	Função intervalar
\mathcal{S}_g	Conjunto solução geral (<i>united solution set</i>)
\mathcal{S}_r	Conjunto das soluções restritas (<i>tolerable solution set</i>)
\mathbf{P}	Poliedro convexo
\mathbf{C}	Cone poliédrico convexo
\mathcal{H}	Conjunto das transições habilitadas
\mathcal{V}	Conjunto dos vértices de um poliedro
\mathcal{P}	Conjunto das transições persistentes
\mathcal{N}	Conjunto das transições recém-habilitadas
\mathcal{D}	Conjunto das transições disparáveis
\mathbf{K}	Conjunto das soluções factíveis
\mathbf{L}	Conjunto de seqüências legais
\mathbf{N}	Conjunto de inteiros positivos
\mathbf{Z}	Conjunto de inteiros
\mathbf{Q}	Conjunto dos números racionais
\mathbf{R}	Conjunto dos números reais
\mathbf{IR}	Conjunto dos intervalos reais

Resumo

O objetivo dessa tese é formalizar a análise das redes de Petri temporais usando a álgebra intervalar como ferramental matemático. A álgebra intervalar é tradicionalmente usada na solução de problemas relacionados com imprecisão. Por sua vez, as redes de Petri temporais se caracterizam, por definição, por possuir um intervalo temporal que delimita os períodos mínimos e máximos de sensibilização das transições. Em consequência, a imprecisão quanto a data de disparo das transições é denotada por um intervalo. Assim, neste trabalho, a dinâmica dos intervalos de disparos ao longo da evolução da rede é modelada por uma equação linear intervalar, que possibilita o cálculo de intervalos de tempo de ocorrências de transições sem que seja necessário explorar, completa ou parcialmente, o espaço de estados. Essa mesma equação pode ser usada para tratar do problema inverso: identificar seqüências de disparos de transições que permitam alcançar uma determinada marcação respeitando uma janela temporal pré-definida. Este problema foi denominado de alcançabilidade temporal. Ao longo do desenvolvimento dessa abordagem, outros importantes resultados foram obtidos, tais como: método enumerativo usando tempo global para análise via alcançabilidade da rede, métodos de redução baseados em aproximações intervalares, redução do espaço de estados, e uma alternativa para construção do grafo de estados com domínios relativos e intervalos de disparos com tempo absoluto. A abordagem desenvolvida foi aplicada a diferentes problemas a fim de calcular grandezas como: tempos máximo e mínimo entre a ocorrência de duas transições, validação de seqüências de disparos, tempos de ciclos, entre outras.

Abstract

The objective of this thesis is to establish formal conditions for time Petri nets analysis by interval algebra. The interval algebra is traditionally used as a mathematical tool in the solution of problems related to uncertainty. In fact time Petri nets are characterized by presenting an uncertainty at the moment of its transitions firing. This imprecision is denoted by a firing interval. Thus, in this work the dynamics of the firing intervals throughout the evolution of the net is represented by a linear interval equation, which makes possible the calculation of transition firing intervals without generating the whole space of states to be explored, completely or partially. Also, this interval equation is used to solve a kind of inverse problem to the previous one. That is, given a time specification for a time Petri net to evaluate from a state to another one any to compute the possibilities of firings between these two states, in case that it exists. Throughout the development of the approach, other important results have been obtained, such as: reduction methods for time Petri nets baseds interval approximation, reduction of the state space, and an alternative for the construction of the state graph with relative and absolute times. The developed approach was applied to different problems to compute metrics such as: maximum and minimum time separation occurrence of two transition, the scheduling validation of firing sequence, times of cycles, among others.

1 Apresentação e Objetivos

1.1 Introdução

Nas últimas décadas, as redes de Petri têm sido extensivamente utilizadas como formalismo para modelar, analisar, simular, controlar e avaliar o comportamento de sistemas que têm fortes características de concorrência, sincronização e compartilhamento. Dessa forma, elas têm exercido um papel fundamental no desenvolvimento de tais sistemas, pois além de possuírem um forte apelo gráfico, as redes de Petri têm uma formulação algébrica que permite provar a existência ou não de propriedades. Devido ao seu refinado grau de controle sobre concorrência, sincronização e conflito, as redes de Petri descrevem, de modo natural, o comportamento lógico dos sistemas modelados. Entretanto, quando os sistemas expressam alguma característica além do aspecto lógico é necessário utilizar extensões das redes de Petri que possibilitem expressar tais características. Com isso, a rede adquire uma maior capacidade de representação. Contudo, esse ganho de expressividade vem acompanhado por alguma deficiência no seu formalismo. Por exemplo, as extensões temporais aumentam a capacidade de representação das redes de Petri, mas diminuem seu poder de estimação [Mur89, Pet81].

Nos sistemas reais, o tempo é um fator que tem fundamental importância no comportamento dos sistemas. Para modelos em redes de Petri, o tempo tem sido responsável por diversas extensões. Existem várias formas de se incorporar o tempo às redes de Petri, entretanto, dois princípios gerais regem a maioria delas: um que associa um tempo de atraso (*delay*) com o instante de ocorrência de uma transição e outro que associa um atraso, acrescido de uma imprecisão, no instante da ocorrência de uma transição. O primeiro grupo foi introduzido em [Ram74] e sob o ponto de vista do modelo, significa a duração de alguma atividade. Já o segundo grupo, foi introduzido em [Mer74, MF76] e significa a duração de uma atividade acrescida de uma imprecisão no fim dessa atividade.

Desde os trabalhos de Ranchandani [Ram74] e Merlin [Mer74, MF76], diferentes exten-

sões temporais de redes de Petri têm sido propostas na literatura. Cada uma delas diferindo da outra, não só na forma de incorporar o tempo, mas também devido a fatores, tais como: elemento ao qual o tempo é associado, tipo de restrição do tempo e propriedade da restrição [CMS99].

Entre as extensões temporais, o modelo proposto por Merlin e Faber [Mer74, MF76], conhecido como *Redes de Petri Temporais (RPTs)* tem mostrado ser um dos mais atrativos, no sentido de que seu poder de representação é maior ou igual do que muitas das demais extensões temporais das redes de Petri. Nessas redes, as restrições de tempo são associadas às transições sob a forma de um intervalo. Esse intervalo representa a duração de uma atividade acrescido de uma imprecisão quanto ao instante do término dessa atividade. Inicialmente usadas na descrição de protocolos de comunicação, as redes de Petri temporais tiveram seu campo de aplicação ampliado para diversas outras áreas, tais como: sistemas de manufatura, sistemas de tempo real, modelos de validação e verificação, controle supervisão, robótica [Nid94, BBAC02, SK98, MGV00].

A análise das redes de Petri temporais geralmente é feita por métodos enumerativos, os quais explicitam todos os estados alcançáveis pelo sistema e são denominados por métodos de exploração do espaço de estados. É através dessa exploração que diferentes tipos de propriedades podem ser verificadas.

A exploração do espaço de estados é feita de modo recursivo, começando por um estado inicial e encontrando todos os estados sucessores. Quando o espaço de estados é finito, ele pode ser explorado completamente. Infelizmente, muitos sistemas, apesar de terem um espaço de estado finito, são intratáveis devido ao número elevado de estados. Em alguns casos, o tamanho do espaço de estados pode crescer exponencialmente em relação ao tamanho do sistema [God96]. Esse problema é conhecido como explosão do número de estados.

Uma representação mais compacta do espaço de estados de uma *RPT* é apresentada em [BM82, BD91] e denominada de *Classe de Estados*. A classe de estados é uma compactação de estados sob a mesma marcação. Dessa forma, o uso das redes de Petri temporais, como formalismo para modelagem e análise de sistemas dependentes do tempo, tornou-se mais atrativo e adequado para diferentes aplicações [Vic01, XHD02, BV95].

Apesar das vantagens em termos de uma representação mais compacta, a análise de uma rede de Petri temporal, via classes de estados, apresenta algumas limitações, tais como: imprecisão nos resultados, elevado número de variáveis no sistema de equações, necessidade de construção do grafo de alcançabilidade completo das classes e permanência do problema

de explosão do número de estados. Mesmo para redes limitadas, a necessidade de explicitar todas as possibilidades de ocorrências, mantém o problema da explosão do número de estados. Diversos métodos que buscam superar as limitações das classes de estado têm surgido nos últimos anos, principalmente, para a verificação de modelos.

Buscando um modelo intermediário, em [PZ98] é apresentado o conceito de classe de estados inteiros. Nele, a ocorrência de uma transição acontece em tempos inteiros e são estabelecidas condições suficientes para provar as propriedades do sistema modelado. Já em [YR98, BV03], o tempo é tratado de forma contínua e a mudança de estado ocorre, tanto pela contínua evolução do tempo, quanto pelo disparo de uma transição. Dessa forma, com o alto grau de ramificação obtido, as redes temporais são utilizadas em verificação de modelos (*model checking*). Seu comportamento dinâmico é expresso por fórmulas lógicas que podem ser usadas para verificar propriedades de interesse. Diversos outros trabalhos têm apresentado diferentes classes de estados para verificação de modelos, cada uma delas preservando propriedades relativas à lógica temporal tipo linear (*LTL*) e tipo ramificada (*CLT*) no tempo [Ger99, Lil99, GRR05, Vic01]. Outros trabalhos, usando as redes de Petri temporais como modelo para verificação formal, utilizam outros recursos matemáticos para análise das redes de Petri temporais, tais como: matriz de intervalos (*BDM- Bound Difference Matrix*), álgebra de processos (*time process*) ou métodos baseados em ordem parcial [BV95, BPV05, Aur96, WG93].

Muitos trabalhos, mesmo usando as classes de estados propostas em [BM82, BD91], procuram superar suas limitações: seja modificando a forma de tratar o tempo [TYC95, Vic01, WD00], seja transformando o grafo de classes em um autômato temporizado e assim, podendo utilizar as técnicas de redução já estabelecidas [GRR05, BCH⁺05, PP04], ou ainda, explorando apenas uma região do espaço de estados [SLK04, BBAC04, PZS99, PZH97].

Nos últimos anos outras ferramentas matemáticas têm sido utilizadas para explorar algebricamente as extensões temporais das redes de Petri. Considerando uma extensão temporal especial das redes de Petri, em [Coh01] é mostrado que o comportamento de um sistema a eventos discretos pode ser tratado como um sistema linear, não do ponto de vista da álgebra convencional, mas do ponto de vista da álgebra *max-plus*. Já em [JBH99] é usada a *Álgebra Intervalar* na estimação de datas de ocorrência em um grafo de estado temporizado. Usando o conceito de aproximação intervalar é mostrado ser possível estimar as datas de ocorrência para que uma determinada tarefa seja executada dentro de um tempo especificado. Esse trabalho já aponta para o uso da análise intervalar como uma possibilidade formal para tratar sistemas temporizados e modelados por uma rede de Petri temporizada. Além disso,

dois importantes fatores são ressaltados com este trabalho. O primeiro, é a possibilidade da estimação de datas ou uma faixa de datas, na qual ocorrerá determinado evento. Um segundo fator, pode ser considerado como sendo o problema inverso, ou seja, dado uma rede temporal e uma restrição de tempo para sua execução, quais as possibilidades dessa execução.

Essa tese propõe utilizar a álgebra intervalar para análise de *RPT*, cujos resultados parciais podem ser encontrados em [LLK06b, LLK06a]. Nestes trabalhos é apresentado o uso da álgebra intervalar como ferramenta matemática para análise de uma rede de Petri temporal. A dinâmica dos intervalos, ao longo da evolução da rede, é expressada por uma equação linear intervalar. Essa equação possibilita, não só o cálculo de intervalos de tempo para a ocorrência de uma seqüência de transições, mas também, possibilita delimitar uma região de ocorrências contendo as seqüências que respeitam a especificação de tempo.

1.2 Objetivos e Justificativas

O objetivo geral dessa tese é tratar o problema de análise das redes de Petri temporais sob o ponto de vista da álgebra intervalar. Esse objetivo é desenvolvido em duas partes:

- Formalização, no âmbito da álgebra intervalar, de uma equação linear intervalar para estimação de intervalos de tempo de um estado alcançável a partir de outro;
- Formalização de uma solução, mesmo que aproximada, para alcançabilidade de intervalos de um estado, a partir de outro estado para uma dada especificação temporal.

O primeiro item significa estabelecer condições formais para a estimação de intervalos de tempo para ocorrências de transições em uma rede de Petri temporal. Essa estimação deve ser obtida sem explorar, completa ou parcialmente, o espaço de estados da rede. Esse objetivo tem como justificativa o fato das técnicas, para análise das redes de Petri temporais, serem técnicas enumerativas, ou seja, a partir de um estado inicial, calculam-se os intervalos para os estados sucessores e de maneira recursiva chega-se ao estado especificado. Dessa forma, o horizonte de estimação é, no máximo, de uma ocorrência. Essas técnicas geralmente aumentam a imprecisão nas datas de ocorrência das transições, além de dependerem da resolução de um exaustivo sistema de inequações.

O segundo item é um tipo de problema inverso ao primeiro. Ou seja, dados os estados, inicial e final, de um sistema modelado com redes de Petri temporais e uma especificação de tempo, quais são as possibilidades de ocorrências de transições para alcançar um estado a partir do outro?

Para alcançar tais objetivos, será desenvolvido método exaustivo para análise de uma *RPT* baseado no tempo global de execução da rede. Usando elementos da matemática intervalar, o método possibilitará não só reduzir a complexidade da enumeração das classes como também formalizar os dois objetivos principais descritos acima.

Para ampliar a classe de *RPTs* à qual se aplica a abordagem, serão desenvolvidos dois métodos de redução para uma *RPT*. Tais métodos permitirão incorporar informações sobre o tempo de disparo das chamadas transições persistentes, as quais são transições que permanecem habilitadas quando da mudança de estado em uma *RPT*.

1.3 Estrutura do Trabalho

No Capítulo 2 é definido o conjunto dos intervalos e as operações básicas sobre seus elementos. Alguns conceitos algébricos e topológicos da álgebra intervalar, assim como, a análise de sistema de equações intervalares, são apresentados.

No Capítulo 3 são apresentados os conceitos básicos das redes de Petri e uma introdução aos seus modelos temporais. Uma atenção especial é dada às redes temporais e a alguns métodos de análise, por serem a base dessa tese.

O Capítulo 4 apresenta uma contribuição para o problema de análise das *RPTs* via alcançabilidade da rede. Um método enumerativo que apresenta algumas vantagens em relação aos similares encontrados na literatura é, então, proposto.

No Capítulo 5 é apresentada uma revisão de alguns dos mais importantes métodos para redução do espaço de estados em uma *RPT*. No Capítulo 6, sob o conceito de ordem parcial, é proposto um algoritmo que, a partir de uma rede original, gera uma rede reduzida equivalente e capaz de recuperar os estados da rede original.

No Capítulo 7, usando recursos da álgebra intervalar, é apresentada uma contribuição ao problema de estimação de tempos em uma *RPT*. Utilizando o método de redução proposto no Capítulo 6, a equação intervalar é aplicada a uma classe mais ampla das *RPTs*.

No Capítulo 8, a denominada *Alcançabilidade de Intervalos de Tempo* de uma rede de Petri temporal é explorada utilizando a equação intervalar gerada pelo modelo reduzido da rede.

Por fim, no Capítulo 9 são apresentadas as considerações finais e as perspectivas futuras para o trabalho.

2 Álgebra Intervalar

A álgebra intervalar é um ferramenta matemática inicialmente utilizada para solucionar problemas relacionados com erros em computação científica, porém, a partir dos trabalhos de R. M. Moore, no início dos anos 60 [Moo95], ganhou seu próprio espaço. Nos últimos anos, entretanto, tem sido aplicada em áreas, tais como: Robótica, Controle Robusto e Otimização. Paralelo a Moore, outros pesquisadores estudaram a manipulação intervalar na álgebra linear [HW04, AM00, Neu90].

Neste capítulo são definidos os conjuntos dos intervalos e as operações básicas sobre seus elementos. Alguns conceitos algébricos e topológicos da álgebra intervalar são também tratados. Em seguida, é apresentado um conjunto de soluções particulares para um sistema de equações intervalares. Esse conjunto é denominado conjunto de soluções restritas, também conhecidas como soluções toleráveis. O conjunto de soluções restritas será utilizado nos Capítulos 7 e 8.

2.1 Intervalos

Um *intervalo* é definido como sendo o conjunto

$$\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

sendo, \underline{x} e \bar{x} denominados limites inferior e superior do intervalo \mathbf{x} , respectivamente.

O espaço dos intervalos, \mathbb{IR} , é então,

$$\mathbb{IR} = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x} \leq \bar{x}, \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}\}.$$

Cada elemento de \mathbb{IR} é chamado intervalo.

Sejam $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$, $\mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$ e $\mathbf{z} = [\underline{z}, \bar{z}]$ intervalos.

A interseção de dois intervalos \mathbf{x} e \mathbf{y} é definida como segue,

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = \{k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbf{x} \text{ e } k \in \mathbf{y}\}$$

Se $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} \neq \emptyset \implies \mathbf{x} \cap \mathbf{y} = [\max\{\underline{x}, \underline{y}\}, \min\{\bar{x}, \bar{y}\}]$.

A união de dois intervalos \mathbf{x} e \mathbf{y} nem sempre é um intervalo e é definida por

$$\mathbf{x} \cup \mathbf{y} = \{k \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbf{x} \text{ ou } k \in \mathbf{y}\}$$

Para tornar o conjunto de intervalos fechado em relação à operação união, é definida a operação união intervalar, como segue,

A união intervalar de dois intervalos \mathbf{x} e \mathbf{y} , denotada por \sqcup , é o menor intervalo que contém \mathbf{x} e \mathbf{y} , como segue,

$$\mathbf{x} \sqcup \mathbf{y} = [\mathbf{x} \cup \mathbf{y}] = [\min\{\underline{x}, \underline{y}\}, \max\{\bar{x}, \bar{y}\}]$$

2.1.1 Relação de Ordem

Há na literatura vários tipos de relações de ordem definidas sobre \mathbb{IR} [Moo95, JKDW95, HW04]. Entre outras, pode-se citar:

Definição 2.1 (*Menor*)

$$\mathbf{x} < \mathbf{y} \iff \bar{x} < \underline{y}$$

Esta definição equivale a,

$$(\forall x \in \mathbf{x}, \forall y \in \mathbf{y}) (x < y).$$

Também poderia ser definida como segue,

$$(\forall x \in \mathbf{x}) (\exists y \in \mathbf{y}) (x < y), \text{ ou } (\exists x \in \mathbf{x}) (\forall y \in \mathbf{y}) (x < y)$$

A relação $<$ é apenas transitiva.

Definição 2.2 (*Igualdade*)

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = (\forall x \in \mathbf{x}) (\exists y \in \mathbf{y}) (x = y), (\exists x \in \mathbf{x}) (\forall y \in \mathbf{y}) (x = y)$$

O cálculo em função dos extremos dos intervalos é:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff \underline{x} = \underline{y}, \bar{x} = \bar{y}$$

A relação de igualdade é reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição 2.3 (*Menor ou igual*)

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \doteq (\forall x \in \mathbf{x}) (\exists y \in \mathbf{y}) (x \leq y), (\exists x \in \mathbf{x}) (\forall y \in \mathbf{y}) (x \leq y)$$

O cálculo em função dos extremos dos intervalos é:

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff \underline{x} \leq \underline{y}, \bar{x} \leq \bar{y}$$

Propriedades:

- Reflexiva: $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}$
- Antissimétrica fraca: $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \mathbf{y} \leq \mathbf{x} \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- Transitiva: $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \mathbf{y} \leq \mathbf{z} \implies \mathbf{x} \leq \mathbf{z}$

Definição 2.4 (*Inclusão*)

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \doteq \forall x \in \mathbf{x}, x \in \mathbf{y}$$

O cálculo em função dos extremos dos intervalos é:

$$\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \iff \underline{x} \geq \underline{y}, \bar{x} \leq \bar{y}$$

Propriedades:

- Reflexiva: $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{x}$
- Antissimétrica fraca: $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}, \mathbf{y} \subseteq \mathbf{x} \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$
- Transitiva: $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}, \mathbf{y} \subseteq \mathbf{z} \implies \mathbf{x} \subseteq \mathbf{z}$

2.1.2 Estrutura Algébrica

1. Operações básicas:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$
- $\mathbf{x} - \mathbf{y} = [\underline{x} - \underline{y}, \bar{x} - \bar{y}]$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}]$
- $\mathbf{x} / \mathbf{y} = [\min\{\underline{x}/\underline{y}, \underline{x}/\bar{y}, \bar{x}/\underline{y}, \bar{x}/\bar{y}\}, \max\{\underline{x}/\underline{y}, \underline{x}/\bar{y}, \bar{x}/\underline{y}, \bar{x}/\bar{y}\}], \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

2. Propriedades:

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
- $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
- $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
- $\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \subseteq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

2.2 Vetores e Matrizes

- Um vetor intervalar $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ é um vetor cujos n componentes (coordenadas), são intervalos $\mathbf{x}_i \in \mathbb{IR}$.

O vetor intervalar pode ser denotado como:

- produto cartesiano: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \times \dots \times \mathbf{x}_n$
- vetor de componentes reais: $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]^T$

Um vetor real $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito contido em \mathbf{x} se, somente se, $\forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{x}_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Operações com vetores:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{x} &= \alpha \cdot \mathbf{x}_1 \times \alpha \cdot \mathbf{x}_2 \times \dots \times \alpha \cdot \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_1 \times \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_2 \times \dots \times \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \times \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 \times \dots \times \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n \end{aligned}$$

- Uma matriz intervalar $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ é uma matriz cujos elementos são intervalos.

Uma matriz real $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com elementos a_{ij} , é dita contida na matriz intervalar \mathbf{A} ($\mathbf{A} \in \mathbf{A}$), se, somente se $a_{ij} \in \mathbf{A}_{i,j}$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

2.3 Função Intervalar

Intuitivamente, uma função intervalar pode ser entendida como uma aplicação de intervalos e suas operações para estimar limites de variação de uma função.

2.3.1 Função sobre Intervalo

Seja f uma função contínua no domínio $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$. A imagem de \mathbf{x} é, como segue,

$$f(\mathbf{x}) = \{f(x) \mid x \in \mathbf{x}\}$$

$f(\mathbf{x})$ é, portanto, toda a faixa de valores de f sobre o intervalo \mathbf{x} .

Dada uma função em \mathbb{R} , para estendê-la de forma natural ao \mathbb{IR} basta substituir na expressão inicial as variáveis reais por intervalos e as operações reais por operações intervalares, obtendo assim a função denominada extensão intervalar natural, $F(\mathbf{x})$ [Moo95].

A função extensão intervalar natural pode apresentar alguns problemas, tais como:

1. Amplificação do resultado

Exemplo 2.1 *Seja a função real $f(x) = \frac{x}{1+x}$ com $x \in [1, 2]$. Calculam-se, então, os seguintes valores:*

$$f([1, 2]) = [1/2, 2/3] \subseteq [0.5, 0.67]$$

e sua extensão intervalar,

$$F([1, 2]) = [1/3, 1] \subseteq [0.3, 1]$$

Esta amplificação se deve ao fato de uma variável aparecer mais de uma vez na extensão intervalar natural, então, ela atua como um conjunto de variáveis intervalares de mesmo valor, porém, independentes entre si.

2. A extensão intervalar natural não está trivialmente relacionada com as correspondentes funções reais.

Exemplo 2.2 *Seja*

$$f(x) = \frac{1}{1+x \cdot x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e sua extensão intervalar,

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

sendo que $F(\mathbf{x})$ não está definida para $\mathbf{x} = [-1, 2]$, por exemplo.

3. Expressões equivalentes em \mathbb{R} , podem não produzir extensões equivalentes em \mathbb{IR} , ou seja, não existe uma única expressão intervalar natural.

Exemplo 2.3 *Sejam as seguintes funções reais equivalentes:*

$$f_1(x) = x^2 - x \quad \text{e} \quad f_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

suas extensões intervalares naturais são:

$$F_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x} \quad \text{e} \quad F_2(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

cujos resultados para $\mathbf{x} = [0, 2]$ são

$$F_1([0, 2]) = [0, 2]^2 - [0, 2] = [-2, 4] \quad \text{e} \quad F_2([0, 2]) = \left([0, 2] - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = [-1/4, 2]$$

Formalmente, uma extensão intervalar, se existe, é definida como segue,

Definição 2.5 (*Extensão Intervalar*) *Uma função F é extensão intervalar de f se*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ F(\mathbf{x}) &\subseteq F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.4 *Exemplos de extensões intervalares:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x); & F(\mathbf{x}) &= [-1, 1] \\ f(x) &= x(1-x) & F(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot (1 - \mathbf{x}) \\ f(x_1, x_2) &= (x_1 + x_2, x_1^2) & F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1) \end{aligned}$$

A extensão intervalar permite, por morfismo, embutir \mathbb{R} em \mathbb{IR} . Os elementos de \mathbb{IR} , os quais não são de \mathbb{R} , são chamados intervalos próprios e os que são de \mathbb{R} , são chamados pontuais.

2.4 Equações Lineares Intervalares

São equações algébricas lineares da forma,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2.2)$$

com $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

A Equação (2.2) pode ser tratada como a família de todos os sistemas de equações lineares do tipo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.3)$$

sendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A}$, e $\mathbf{b} \in \mathbf{b}$.

O conjunto solução para (2.2), denominado solução geral (*united solution set*), é o conjunto

$$\mathcal{S}_g = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \exists \mathbf{b} \in \mathbf{b}, \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \}. \quad (2.4)$$

\mathcal{S}_g é o conjunto de todas as soluções possíveis para (2.2).

Geralmente, esse conjunto é de difícil descrição, principalmente quando envolve mais que um *ortante* [HW04, Sha04, Sha97]. Em razão disso, são adotados como conjunto solução e denotada \mathbf{S}_g , aproximações na forma de intervalos que sejam o mais próximo possível de \mathcal{S}_g .

O problema de calcular a solução intervalar para a Equação (2.2) é um problema bem resolvido na literatura. Existem vários métodos iterativos para calcular aproximações intervalares, ou seja, aproximações por vetores intervalares, como solução para (2.2) [JKDW95, Neu90]

Entre os principais métodos, têm-se:

1. o método de eliminação Gaussiana na sua versão intervalar, [JKDW95]. A solução obtida por esse método contém a solução \mathcal{S}_g , porém, devido às operações intervalares, nem sempre é possível obter uma solução que seja a mais próxima de \mathcal{S}_g . Além disso, a aplicação desse método é impossibilitada quando um intervalo contém o elemento zero;
2. Uma alternativa ao método de eliminação Gaussiana, quanto à distância entre a solução calculada e a solução \mathcal{S}_g , é o uso de *pré-condicionamento* de sistemas, [HW04, Neu90]. Usando operações intervalares, o sistema (2.2) é transformado em um sistema equivalente, cuja matriz dos coeficientes se aproxima de uma matriz diagonal e com isso, o vetor solução melhor se aproxima do conjunto \mathcal{S}_g .

3. Em Hansen [HW04, Han00] é apresentado um procedimento para cálculo da solução intervalar, explorando o pré-condicionamento do sistema (2.2). Em Neumaier [Neu90], uma fórmula fechada, para o cálculo do vetor solução, é apresentada e pode ser aplicada para alguns casos de (2.2).

Tanto o método de eliminação Gaussiana, quanto o método de Hansen e também as fórmulas fechadas, são limitados a casos onde a matriz \mathbf{A} é regular¹ e suas soluções intervalares encontradas são aproximações externas.

Na maioria dos problemas práticos, porém, deseja-se obter soluções mais restritas que a solução geral, ou seja, ao invés de calcular o conjunto solução que leve algum \mathbf{A} para algum \mathbf{y} , deseja-se o conjunto solução que aplicado a qualquer \mathbf{A} sempre leve para \mathbf{y} . Na Figura 1 é mostrada a representação gráfica de uma equação intervalar do tipo $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}$:

$$[5, 10]x = [10, 20]$$

sendo $\mathbf{A} = [5, 10]$ e $\mathbf{y} = [10, 20]$.

Utilizando a operação de divisão, por exemplo, obtém-se:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{A}} = \frac{[10, 20]}{[5, 10]} = [1, 3]$$

ou seja, uma faixa de valores para \mathbf{x} que para algum \mathbf{A} satisfaz a equação acima. Porém, existem valores de \mathbf{A} , para os quais \mathbf{Ax} leva para fora do intervalo \mathbf{y} , como mostrada na Figura 1a. Para manter os valores de \mathbf{Ax} dentro do intervalo \mathbf{y} , será necessário restringir essa faixa de valores de \mathbf{x} , como mostrado na Figura 1b.

A resolução do conjunto solução geral para que o sistema (2.2) se comporte dentro da faixa delimitada por \mathbf{b} , é denominado *problema de tolerância* (*tolerance problem*) e o conjunto solução para esse problema é chamado conjunto das *soluções toleráveis*. Ao longo do texto, o conjunto das soluções toleráveis será denominado conjunto das *soluções restritas*.

2.5 Conjunto das Soluções Restritas

O problema com soluções restritas é um típico problema de controle com saída estabilizada dentro de um intervalo [Sha04, Sha05, Sha01, BP01]. O conjunto das soluções restritas

¹A matriz \mathbf{A} é dita regular se $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \forall \mathbf{b} \in \mathbf{b}$ a equação $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ tem solução única $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

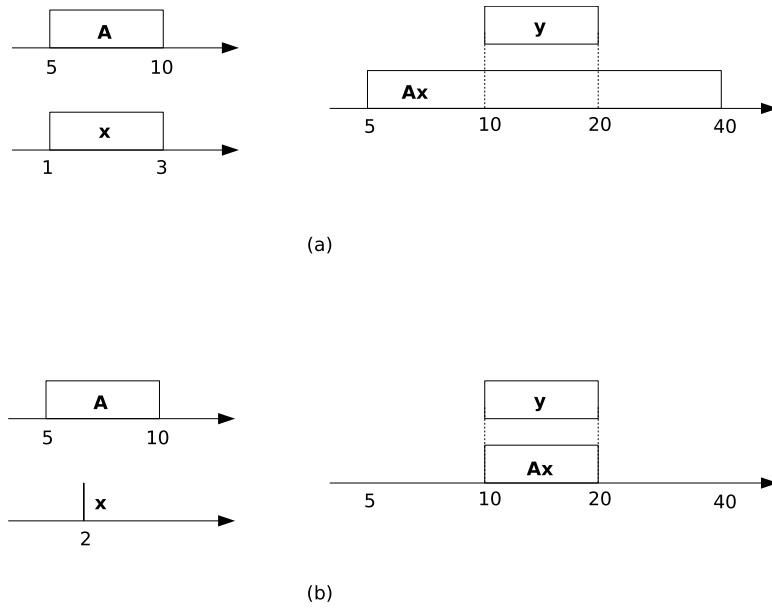


Figura 1: Solução geral (a) e solução restrita (b)

é definido como segue:

$$\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A}, \exists b \in \mathbf{b}, Ax=b\}, \quad (2.5)$$

ou seja, \mathcal{S}_r é o conjunto formado por todos os $x \in \mathbb{R}^n$ tal que o produto Ax ocorre em \mathbf{b} , qualquer que seja $A \in \mathbf{A}$.

O sistema (2.2) também pode ser caracterizado por seus subconjuntos

$$Ax \subseteq \mathbf{b}, \quad \forall A \in \mathbf{A}, \quad (2.6)$$

e o conjunto solução pode ser definido por,

$$\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b}\}. \quad (2.7)$$

2.5.1 Caracterização do Conjunto das Soluções Restritas

Sejam as matrizes \underline{A} , \bar{A} e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$, elemento a elemento. Pode-se, então, definir a matriz intervalar \mathbf{A} como $\mathbf{A} = [\underline{A}, \bar{A}]$ e de modo semelhante, $\mathbf{b} = [\underline{b}, \bar{b}]$, $\mathbf{b} \in \mathbf{b} \mathbb{R}^n$.

Usando as matrizes limites de \mathbf{A} , o conjunto solução restrita pode ser caracterizado como um poliedro convexo [Sha01, Sha04, BP01].

Definição 2.6 (*Poliedro*)[Sch00] Um conjunto P é um poliedro convexo se puder ser escrito

como

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.8)$$

Teorema 2.5 *Seja \mathcal{S}_r o conjunto solução restrita do sistema (2.2). Se $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, então, \mathcal{S}_r é um poliedro convexo.*

Prova 2.6 *Sejam $\mathbf{A} = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]$ e $\mathbf{b} = [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$*

Das definições (2.5) e (2.7), tem-se que

$$\mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{b}, \forall \mathbf{A} \in \mathbf{A}.$$

Assim, para $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

$$\mathbf{Ax} \subseteq \mathbf{Ax} = [\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}].$$

Escolhendo $\mathbf{Ax} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}$, tem-se $\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} \subseteq \mathbf{b}$. Logo,

$$\underline{\mathbf{b}} \leq \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{b}}. \quad (2.9)$$

De maneira semelhante, para $\mathbf{Ax} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}$, tem-se

$$\underline{\mathbf{b}} \leq \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{b}}. \quad (2.10)$$

Como $\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}$, de (2.9) e (2.10), obtém-se

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} \geq \underline{\mathbf{b}} \\ \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.11)$$

Portanto, o conjunto solução restrita é caracterizado por reunir as soluções $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e que satisfazem (2.11).

Em relação aos conjuntos poliédricos [Sha01]:

- P coincide com a interseção de um número finito de hiperplanos e semi-espacos. Sendo um hiperplano um conjunto da forma $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ \mathbb{R}^n e um semi-espaco um conjunto da forma $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$, para algum vetor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$.
- Os conjuntos poliédricos convexos quando limitados são denominados *politopos*. Um politopo pode ser caracterizado pelo seu conjunto vértices.

- Um conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ é também um poliedro, pois pode ser escrito como

$$\{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}.$$

- Se $\mathbf{b} = 0$, P torna-se um *cone* poliédrico convexo.

Voltando ao sistema (2.11), ele pode ser reescrito na forma (2.8), como a seguir,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} &\leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

sendo, $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -\underline{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{A}} \end{pmatrix}^T$ e $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -\underline{\mathbf{b}} & \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix}^T$

Pela definição (2.6), portanto, o conjunto solução restrita \mathcal{S}_r , para $\mathbf{x} \geq 0$, é um poliedro convexo e tem as características descritas acima.

Sabendo que a solução restrita pode ser caracterizada por um poliedro convexo, como então descrever esse poliedro? Uma alternativa é a enumeração dos pontos extremos, também chamados de vértices, desse poliedro [Mur85]. Assim, usando elementos da teoria de programação linear, o conjunto solução \mathcal{S}_r é delimitado pelos vértices do poliedro que o caracteriza.

Através da introdução das correspondentes variáveis de folga, o sistema (2.12) pode ser transformado em um sistema de equações, como segue,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{I}s &= \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

sendo, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ e $s \in \mathbb{R}^{2m}$.

Assim,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_1 \ \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} &= \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} .$$

Considerando $\mathbf{A}_g = (\mathbf{A}_1 \ \mathbf{I})$, $\mathbf{x}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{s} \end{pmatrix}^T$ e $\mathbf{b}_g = \mathbf{b}_1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g &= \mathbf{b}_g, \\ \mathbf{x}_g &\geq 0 \end{aligned} , \tag{2.13}$$

sendo, $\mathbf{A}_g \in \mathbb{R}^{2m \times (n+2m)}$, $\mathbf{x}_g \in \mathbb{R}^{(n+2m)}$ e $\mathbf{b}_g \in \mathbb{R}^{2m}$.

Qualquer vetor $\tilde{\mathbf{x}}$, tal que $\mathbf{A}_g \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_g$, podendo ou não satisfazer à condição $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, é conhecido como solução de (2.13). Porém, se $\tilde{\mathbf{x}}$ também satisfaz a $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é denominada *solução factível*. Assim, o conjunto \mathcal{S}_r , para $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, é o conjunto das soluções factíveis do sistema (2.13) e pode ser descrito pelo conjunto $\{\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \mid \mathbf{A}_g \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_g\}$.

Solução Restrita Limitada

Seja K o conjunto de soluções factíveis do sistema de equações

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.14)$$

sendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Caso os vetores coluna de \mathbf{A} sejam linearmente independentes, então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é uma *solução básica factível* de (2.14). O vetor \mathbf{b} pode, então, ser expresso como uma combinação linear positiva dos vetores coluna \mathbf{A} na qual os coeficientes da combinação são os elementos de $\tilde{\mathbf{x}}$ [Mur85].

Assim, qualquer submatriz quadrada de \mathbf{A} que seja não singular e de ordem $m \times m$, forma uma base, \mathbf{B} , para o sistema (2.14) e as variáveis associadas a esses vetores são denominadas variáveis básicas, \mathbf{x}_B . Os demais vetores coluna de \mathbf{A} são denominados vetores coluna não básicos e formam a matriz \mathbf{N} . As variáveis associadas a tais vetores são chamadas variáveis não básicas, \mathbf{x}_N . O sistema (2.14) pode ser particionado e reescrito como,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$$

Uma solução básica factível pode ser obtido tornando todas as variáveis não básicas iguais a zero e resolvendo o sistema de equações para os valores das variáveis básicas. Logo, o sistema anterior torna-se,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

cuja solução factível é determinada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se o conjunto de soluções factíveis \mathbf{K} é limitado, então, ele pode ser representado por um politopo, cujos vértices são relacionados às soluções básicas factíveis, segundo o teorema a seguir.

Teorema 2.7 ([Mur85]) *Seja $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^n$, o conjunto de soluções factíveis do sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, para $\mathbf{x} \geq 0$. Então, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{K}$ é uma solução básica factível se, e somente, é um ponto extremo de \mathbf{K} .*

O número de soluções básicas factíveis do sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é limitado a $\binom{n}{m}$. Isto porque cada solução básica factível é associada a uma ou mais bases para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Baseado no teorema (2.7) e também no fato de o número de soluções básicas factíveis ser limitado, podem-se determinar os pontos extremos do politopo que caracteriza o conjunto de soluções factíveis do sistema (2.14), como a seguir.

1. Seja $m \times n$ a ordem da matriz \mathbf{A} do sistema (2.14).
2. Calcula-se o número máximo de pontos extremos, como segue,

$$nv = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

3. Calculam-se as nv possíveis combinações das n colunas, na forma $m \times m$.
4. Sendo t uma matriz de ordem $nv \times m$, das combinações das colunas de \mathbf{A} , então, para $i = 1, \dots, nv$:

- $B_i = \mathbf{A}(\cdot, t(i, j))$, sendo $j = 1, \dots, m$.
- $\tilde{\mathbf{x}}_i = B_i^{-1}\mathbf{b}$.
- Se $\tilde{\mathbf{x}}_i \geq 0$, então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é um ponto extremo de (2.14).

Solução Restrita Homogênea

Considerando o sistema de equações dado por (2.14), uma solução homogênea é um vetor $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$, satisfazendo à condição,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{y}} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Como, então, caracterizar o conjunto solução homogênea?

Na teoria dos poliedros convexos, o conjunto de pontos C no espaço Euclidiano, é definido como um cone poliédrico se

$$C = \{y \mid Ay \leq 0\} \quad (2.17)$$

O conjunto solução homogênea, portanto, é considerado um cone poliédrico convexo, e pode ser gerado por um número finito de vetores b_1, \dots, b_m , tal que,

$$C = \sum_{i=1}^m b_i y_i, \quad y_i \geq 0. \quad (2.18)$$

O espaço do conjunto solução de $Ay = 0$ é denominado espaço nulo de A , ou $Null(A)$ positivo e os vetores geradores desse espaço, são os vetores geradores do cone poliédrico (2.18). Assim, tem-se que,

$$C = \langle b_1, \dots, b_m \rangle \subseteq Null(A)$$

Outro importante resultado da teoria dos poliedros estabelece que o cone poliédrico pode ser obtida pela combinação linear positiva dos vetores básicos ou vetores geradores do espaço C . Assim, para o cone (2.18) e $\hat{y} \in C$, tem-se, $\hat{y} \in cone(b_{i_1}, \dots, b_{i_d})$, para b_{i_1}, \dots, b_{i_d} linearmente independentes e escolhidos de (b_1, \dots, b_m) . Portanto, $\forall \hat{y} \in C$ e solução de (2.16), pode ser expressa como uma combinação convexa positiva dos vetores geradores do cone C . Além disso, se existe $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\begin{aligned} A\hat{y} &= 0 \\ \sum_{i=1}^d \hat{y}_i &= 1, \\ \hat{y}_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

\hat{y} é chamada solução extrema do cone e a restrição $\sum_{i=1}^d \hat{y}_i = 1$ elimina o ponto 0 e normaliza a solução.

Solução Restrita Completa

Teorema 2.8 *Seja K o conjunto de soluções factíveis de (2.14).*

1. *Se 0 é solução única do sistema homogêneo correspondente, então, toda solução factível pode ser expressa como uma combinação convexa das soluções básicas factíveis.*

2. Se 0 não é a única solução do sistema homogêneo correspondente, então, toda solução factível é a soma da combinação convexa das soluções básicas factíveis e a combinação não negativa das soluções homogêneas extremas correspondentes.

O teorema 2.8 é extremamente útil na resolução de problemas que envolvem poliedros convexos ilimitados. Se \tilde{x} é uma solução factível para (2.14) e \hat{y} é uma solução homogênea para (2.16), então $\tilde{x} + \Theta\hat{y}$ é também uma solução básica para (2.14), sendo Θ um escalar qualquer.

3 Redes de Petri e suas Extensões Temporais

Na primeira seção deste capítulo são apresentados alguns conceitos relativos às redes de Petri. São conceitos básicos, necessários apenas para uniformizar a linguagem usada no texto, porém, dispensável para iniciados em redes de Petri. Na segunda seção são apresentados, de modo introdutório, alguns diferentes modelos de redes de Petri com extensão para o tempo. Uma atenção maior é dada às redes de Petri temporais, por serem a base desse trabalho. Na última seção do capítulo são apresentados alguns métodos para análise das redes temporais, em especial, os métodos de alcançabilidade que usam o conceito de classe de estados.

3.1 Redes de Petri

As redes de Petri constituem uma poderosa ferramenta para modelagem, análise, verificação e validação de propriedades de sistemas concorrentes, sincronizantes e que compartilham recursos [Mur89, ZD93, Pet81, Sil93].

3.1.1 Estrutura

Definição 3.1 (*Rede de Petri*) Uma rede de Petri (RP) lugar/transição é uma quádrupla $N = \langle P, T, Pre, Pos \rangle$, sendo:

1. P , o conjunto finito e não vazio de lugares
2. T , o conjunto finito e não vazio de transições
3. $P \cap T = \emptyset$
4. $Pre : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, a função incidência de entrada, sendo \mathbb{N} o conjunto dos números naturais (peso dos arcos de entrada nas transições, $p \rightarrow t$). Pré-condições ligando

lugares às transições.

5. $Pos: T \times P \rightarrow \mathbb{N}$, a função incidência de saída, sendo \mathbb{N} o conjunto dos números naturais (peso dos arcos de saída das transições, $t \rightarrow p$). Pré-condições ligando transições a lugares.

Definição 3.2 (Rede de Petri Ordinária) Uma RP é dita ordinária se suas funções de incidência podem assumir apenas os valores 0 e 1. Ou seja, $\forall t \in T, \forall p \in P$:

$$\begin{cases} Pre(p,t) \in \{0, 1\} \\ Pos(t,p) \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Definição 3.3 (Conjuntos Característicos) Seja N uma RP tal que, $t \in T$ e $p \in P$. Os seguintes conjuntos são então, definidos:

$$\text{Conjunto dos lugares de entrada de } t: \quad \bullet t = \{p \in P \mid Pre(p,t) > 0\}$$

$$\text{Conjunto dos lugares de saída de } t: \quad t^\bullet = \{p \in P \mid Pos(t,p) > 0\}$$

$$\text{Conjunto das transições de entrada de } p: \quad \bullet p = \{t \in T \mid Pos(t,p) > 0\}$$

$$\text{Conjunto das transições de saída de } p: \quad p^\bullet = \{t \in T \mid Pre(p,t) > 0\}$$

Definição 3.4 (Representação Matricial) Uma RP pode ser definida por meio de suas matrizes características. Seja m o número de lugares de P e n o número de transições de T . As matrizes características de uma RP

1. matriz incidência de entrada, $Pre = [Pre(p_i, t_j)]_{m \times n}$.

2. matriz incidência de saída, $Pos = [Pos(p_i, t_j)]_{m \times n}$.

3. matriz incidência, $D = Pos - Pre$

$$i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Os vetores coluna (linha) das matrizes Pre e Pos serão denotados como:

$$Pre(t) = Pre(.,t) \quad (Pre(p) = Pre(p,.))$$

$$Pos(t) = Pos(.,t) \quad (Pos(p) = Pos(p,.))$$

3.1.2 Comportamento

A dinâmica de uma RP , em termos de transição de estado, pode ser representada pela marcação e sua evolução ao longo da rede.

Definição 3.5 (*Marcação*) *A marcação de uma RP é uma aplicação associando um inteiro não negativo a cada lugar da rede. A marcação pode ser representado por um vetor m – dimensional¹, sendo m o número de lugares da rede.*

Definição 3.6 (*Rede de Petri Marcada*) *Uma RP marcada é o par $\langle N, M_0 \rangle$, sendo M_0 a marcação inicial da rede*

Definição 3.7 (*Habilitação de Transição*) *Uma transição $t \in T$ estará habilitada, ou sensibilizada, por uma marcação M se, e somente se, $\forall p \in \bullet t$, for verificada a seguinte condição:*

$$M \geq Pre(t). \quad (3.1)$$

O conjunto de transições habilitadas por uma marcação M , é representado por \mathcal{H} , sendo \mathcal{H}_0 o conjunto de transições habilitadas pela marcação inicial.

Definição 3.8 (*Mudança de Marcação*) *Se t é uma transição habilitada por uma marcação M_0 , então t pode disparar. O disparo da transição t retira marcas dos lugares $\bullet t$ e coloca marcas lugares $t \bullet$, levando a rede a uma nova marcação, M_1 . A evolução da marcação na rede, é descrita pela equação :*

$$M_1 = M_0 + Pos(t) - Pre(t) = M_0 + D(t) \quad (3.2)$$

Quanto aos disparos das transições:

- são atômicos (instantâneos e indivisíveis)
- são assíncronos (um de cada vez)
- são indeterminísticos (não há regra de escolha)
- não há medida temporal (apenas ordem causal)

¹quando não gerar confusão, o vetor M , também expressará um conjunto dos lugares marcados, por exemplo: $M = p_a, p_c$

Para uma marcação M_k , alcançável a partir de M_0 , pelo disparo do vetor quantidade de disparos de transições, $q \in (\mathbb{Z}^+)^n$, a Equação (3.2) passa a ser a equação de estado, como segue,

$$M_k = M_0 + Dq \quad (3.3)$$

Definição 3.9 (*Transições Persistentes*). *Duas transições habilitadas são persistentes se o disparo de uma não interfere no disparo da outra. Uma RP é persistente se todas as suas transições são persistentes.*

Definição 3.10 (*Alcançabilidade*). *O conjunto de todas as marcações alcançáveis, a partir da marcação inicial M_0 , pelo disparo de seqüências de transições, é denominado conjunto de alcançabilidade de M_0 e denotado $\mathcal{R}(M_0)$.*

3.1.3 Propriedades

Definição 3.11 (*Rede Reversível*) *Uma RP é dita reversível se, e somente se, a partir de qualquer marcação alcançável da rede é possível alcançar a marcação inicial.*

Ao longo deste texto, as redes reversíveis também serão tratadas como redes cíclicas, embora uma rede cíclica, não necessariamente, seja reversível.

Definição 3.12 (*Rede Consistente*) *Uma RP é dita consistente se, e somente se, existe uma seqüência de disparo, envolvendo todas as transições da rede, tal que a rede seja reversível.*

Definição 3.13 (*Rede K-Limitada*) *Uma RP é dita k-limitada se, e somente se, qualquer que seja sua marcação, qualquer lugar da rede tem capacidade limitada a k marcas. Quando $k = 1$ a rede é dita segura.*

Definição 3.14 (*Grafo Marcado*) *É uma RP ordinária tal que*

$$|\bullet p_i| = 1 \text{ e } |p_i \bullet| = 1, \forall p_i \in P$$

isto é, cada lugar da rede tem apenas um arco de entrada e um arco de saída.

Grafo marcado permite a modelagem de concorrência e sincronismo mas, não conflito.

Definição 3.15 (*Livre Escolha*) *É uma RP ordinária tal que*

$$|p_i^\bullet| > 1 \Rightarrow |\bullet t_k| = 1, \forall t_k \in p_i^\bullet$$

isto é, se duas transições t_i e t_j compartilham mesmo lugar de entrada p , então, p é o único lugar de entrada de t_i e t_j .

3.2 Redes de Petri com Tempo

As *RP*, apresentadas até aqui, não consideraram, diretamente, a interferência do tempo no seu comportamento. Porém, ao considerar, por exemplo, a não existência de uma especificação a respeito de quando uma transição habilitada irá disparar, é semelhante a admitir um indeterminismo sobre quando será esse disparo. Assim, quando se passa a considerar a interferência do tempo, isto nada mais é que uma forma de reduzir esse indeterminismo. A maneira como se considera o tempo leva a diferentes modelos de *RP* com tempo, ou às chamadas extensões temporais das *RPs*.

Um aspecto importante, seja qual for a forma de especificar o tempo, é como se interpreta o tempo. Este aspecto é denominado de *semântica do tempo* e, para as *RPs*, há basicamente, duas semânticas distintas:

- **Tempo de Sensibilização**, determina o tempo que deve transcorrer desde o momento da habilitação de uma transição até o momento do seu disparo. O disparo ocorre de forma atômica, ou seja, disparo instantâneo, indivisível.
- **Tempo de Disparo**, o disparo de uma transição ocorre em três fases: retirada da marca, disparo atômico e colocação da marca.

Outro aspecto importante, em relação ao tempo, é quanto à efetivação do disparo de uma transição habilitada. Para alguns sistemas, o disparo de uma transição habilitada deve ocorrer em determinado tempo. Nestes casos, a semântica do tempo é denominada *semântica forte*, em oposição à *semântica fraca*, na qual o disparo de uma transição habilitada não é obrigatório, porém, se ocorrer, deve ser em um determinado tempo.

As primeiras redes de Petri com interferência do tempo foram apresentadas por Ramchandani [Ram74] e Merlin [Mer74], em suas teses de doutorado. Desde então, um grande número de diferentes modelos de redes de Petri com tempo tem sido proposto na literatura. Geralmente, os modelos se diferenciam em aspectos, tais como: tipo de temporização, lo-

calização da restrição temporal e propriedade da restrição [CMS99]. Independente desses aspectos, podem-se agrupar as extensões temporais das redes de Petri em quatro grandes categorias:

- **Redes de Petri Temporais** (*Time Petri Nets*). A restrição temporal é um intervalo de tempo associado a cada transição. Foram inicialmente usadas na descrição de protocolos de comunicação, entretanto, seu campo de aplicação tem se ampliado para áreas como: manufatura, sistemas em tempo real, validação e verificação de sistemas [Nid94, BM82, BV95, MGV00].
- **Redes de Petri Temporizadas** (*Timed Petri Nets*). Permitem que transições ou lugares retenham marcas durante um intervalo de tempo. São comumente usadas na análise de sistemas de manufatura [Fre82, Sif77].
- **Marcas Temporizadas**. A restrição temporal é associada à marca ao se propagar na rede. São largamente usadas em problemas de produção [Cel82, TYC95].
- **Modelos Probabilísticos**. São as chamadas redes de Petri Estocásticas e são usadas para estimação de desempenho de grandes sistemas. Uma probabilidade é associada com uma das opções, transição, lugar ou marca [Mur89].

Ao longo deste trabalho de tese, serão analisadas as redes de Petri, inicialmente propostas por Merlin e Faber [Mer74, MF76] e ampliadas em [BD91], são as denominadas Redes de Petri Temporais (*RPTs*). Este modelo mostra-se adequado para expressar a maioria dos requisitos temporais, além de ser mais geral que as demais extensões temporais [BV95, MGV00].

3.3 Redes de Petri Temporais

As *RPTs* são extensões das *RP*s em que a interferência do tempo ocorre por meio de dois fatores: atraso e imprecisão na data (instante) do disparo das transições. Em termos do comportamento dinâmico da rede, o atraso significa que uma transição ao ser habilitada pela marcação, não necessariamente estará pronta para ser disparada, mas sim, depois de um tempo (atraso), denominado limite mínimo de sensibilização. Decorrido o tempo mínimo de sensibilização, a transição estará pronta para ser disparada, porém, a data desse disparo não é exata, mas sim, imprecisa. Além desses dois fatores, a semântica quanto ao disparo das transições é uma semântica forte. Isto significa que, mesmo havendo uma imprecisão na data de disparo das transições, se decorrido o tempo dessa imprecisão e a transição permanece

sensibilizada, então, ela deve ser disparada. O limite máximo de tempo, para o qual uma transição deve ser disparada, é denominado limite máximo de sensibilização.

Definição 3.16 (*Rede de Petri Temporal*) *Uma rede de Petri Temporal é uma tripla $RPT = (N, M_0, \mathbf{I})$, sendo:*

- N , uma RP ordinária
- $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$, a marcação inicial
- $\mathbf{I} : T \rightarrow (\mathbb{Q}^+ \times (\mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}))$, função intervalos estáticos, sendo \mathbb{Q}^+ conjunto dos números racionais positivos, juntamente com o zero²

A função \mathbf{I}^s associa, a cada transição $t \in T$, um intervalo $\mathbf{I}^s(t) = [\delta^s(t), \Delta^s(t)]$, sendo $\delta^s(t)$ o limite inferior de sensibilização (*lis*) e $\Delta^s(t)$ o limite superior de sensibilização (*lss*) da transição t , e verificando as seguintes condições.

- $0 \leq \delta^s(t) \leq \Delta^s(t)$
- $0 \leq \delta^s < \infty$
- $0 \leq \Delta^s \leq \infty$

Estando uma transição habilitada pela marcação, não necessariamente ela pode disparar. O disparo dessa transição só ocorrerá se o tempo de habilitação for, no mínimo, igual ao limite inferior de sensibilização da transição, $\delta^s(t)$. Supondo que uma transição t torna-se habilitada pela marcação, no instante θ , o disparo de t não ocorrerá antes do instante $\theta + \delta^s$, e não depois do instante $\theta + \Delta^s$. Se ocorrer, será no intervalo $[\theta + \delta^s, \theta + \Delta^s]$. Enquanto a transição t estiver habilitada, as marcas permanecem em seus lugares de entrada, podendo, inclusive, serem removidas pelo disparo de outras transições.

Devido à interferência do tempo no processo de disparo das transições, em uma *RPT*, apenas a marcação não é suficiente para caracterizar um estado do sistema modelado. Também é preciso incluir uma informação a respeito do tempo de sensibilização das transições habilitadas da rede.

²A escolha de \mathbb{Q}^+ diferencia-se da proposta inicial de Merlin e Faber [Mer74, MF76] e em [BD91], nas quais a função \mathbf{I}^s está definida em \mathbb{R} e \mathbb{N} , respectivamente.

Definição 3.17 (Estado) O estado de uma RPT é definido pelo par $\langle M, \text{relógio} \rangle$, sendo M a marcação da rede e relógio a informação a respeito do tempo de sensibilização das transições habilitadas no estado. Para o estado inicial $\langle M_0, \text{relógio}_0 \rangle$ a função relógio é dada como segue,

$$\text{relógio}_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \mathcal{H}_0 \\ * & \text{caso contrário} \end{cases}$$

sendo, * desativação do relógio de t .

Conforme a Definição 3.17, o estado em uma RPT depende da marcação e do tempo de sensibilização das transições habilitadas pela marcação. Assim, a mudança de estado pode ocorrer devido a esses dois fatores:

1. mudança contínua do tempo, sem disparo de transição.
2. disparo de transição, sem ajuste do relógio, também chamada de mudança discreta do estado.

A transição de estado devido à mudança contínua do tempo, resulta em um novo estado $\langle M_1, \text{relógio}_1 \rangle$ tal que,

1. $M_0 = M_1$
2. $\forall t \in \mathcal{H}_0, \text{relógio}(t) + \tau \leq \Delta^s(t)$
3. $\forall t \in T,$

$$\text{relógio}_1(t) = \begin{cases} \text{relógio}(t) + \tau & \text{se } t \in \mathcal{H} \\ * & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função $\text{relógio}(t)$ não deve exceder o limite Δ^s .

Seja o estado $\langle M_1, \text{relógio}_1 \rangle$, resultante do disparo de uma transição $t_j \in T$, a partir do estado $\langle M, \text{relógio} \rangle$, então,

1. $t_j \in \mathcal{H}$
2. $M_1 = M + \text{Pos}(t_j) - \text{Pre}(t_j)$
3. $\text{relógio}(t_j) \geq \delta^s(t_j)$

4. Para $t \in T$

$$religio_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \text{ é recém-habilitada} \\ religio(t), & \text{se } t \text{ já estava habilitada} \\ *, & \text{se } t \text{ não está habilitada} \end{cases}$$

No primeiro caso, a mudança de estado ocorre devido à mudança de tempo, não há disparo de transição. Havendo possibilidade de disparo de uma transição, esse disparo será instantâneo, não consumindo tempo. O disparo de uma transição só ocorrerá se sua função *religio* (*clock*) for maior ou igual ao seu δ^s . Ocorrido o disparo de uma transição, as novas transições habilitadas disparam seus *relógios* a partir de zero, transições que persistirem habilitadas terão seus *relógios* mantidos e as transições desabilitadas terão os *relógios* desativados.

As duas possibilidades, mudança contínua e mudança discreta do estado de uma *RPT*, são adotadas quando a rede é usada como verificador de modelos (*model checking*). O comportamento da rede é, então, interpretado como fórmulas lógicas temporais, as quais descrevem propriedades de interesse. As lógicas temporais mais populares são do tipo linear e ramificada. A lógica temporal linear (*LT*) é usada para expressar propriedades como segurança, bloqueio, entre outras. Já a lógica temporal tipo ramificada (*CLT*), tem um maior poder de expressão e preserva propriedades só observáveis com a ramificação do tempo [Ger99, RR98]. Geralmente, as abordagens que usam tal conceito [YS97, Xua01, GRR05], valem-se de recursos de simulação para propósito de análise [BRV03, Yov97, GGR05].

Os métodos de análise das *RPTs*, considerando a mudança de estado apenas pelo disparo de uma transição, geralmente utilizam o conceito de *Classe de Estados*. Uma classe de estados representa uma compactação de estados contínuos no tempo, que estão sujeitos à mesma marcação. As classes de estados foram introduzidas em [BM82, BD91] e seu uso, como formalismo para modelagem e análise de sistemas dependentes do tempo, tornou-as mais atrativas e adequadas a outras aplicações, que não verificação de modelos [Vic01, XHD02, BV95, MGV00, TYC95, WD00, LLK05].

Definição 3.18 (*Classe de Estados*) Uma classe de estado de uma *RPT*, é definida pelo par $CS = \langle M, D \rangle$, sendo,

- M , a marcação da rede
- D , é um conjunto de inequações expressando os intervalos de disparos das transições habilitadas por M , chamado domínio dinâmico da rede.

Mesmo utilizando o conceito de classe de estados, existem diferentes extensões para as *RPTs*, cada uma adequada a uma aplicação específica [BV95, TYC95, BBAC04, PZ91, LLK05]. Na próxima seção serão apresentadas duas diferentes abordagens para análise de *RPTs*, baseadas no conceito de classe de estados.

3.4 Análise de Redes de Petri Temporais via Classe de Estados

Os principais métodos para análise das *RPTs* são baseados na enumeração do completo espaço de estados da rede, daí serem chamados de métodos exaustivos ou enumerativos. Um desses métodos é denominado método enumerativo baseado em classe de estados [BM82, BD91]. Nele, um relógio local é associado a cada transição, de modo a totalizar o tempo de habilitação.

Outras abordagens, também usando o conceito de classe de estados, tratam o tempo de forma absoluta, ou seja, fixam uma referência e todos os tempos são contados relativos a essa referência [WD00, XHD02, LLK05]. As duas próximas subseções apresentam, por meio de um exemplo, o cálculo das classes de estados nas duas abordagens.

3.4.1 Método Enumerativo usando Tempo Relativo

Introduzido por [BM82] e depois revisado em [BD91], esse método utiliza a definição 3.18, para uma classe de estados. Na Figura 2 é mostrada uma *RPT*, que será analisada considerando o método enumerativo baseado em classe de estado e os tempos dos domínios dinâmicos são relativos à entrada na classe.

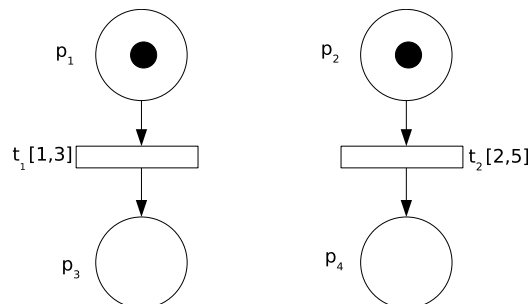


Figura 2: Rede de Petri temporal, domínio relativo

- Na classe inicial $CS_0 = \langle M_0, D_0 \rangle$, a marcação M_0 habilita as transições t_1 e t_2 . Ambas

estão habilitadas e têm como domínios os intervalos estáticos da rede, como segue,

$$CS_0 = \begin{cases} M_0 = p_1, p_2 \\ D_0 = 1 \leq \theta_1 \leq 3 \\ \quad \quad \quad 2 \leq \theta_2 \leq 5 \end{cases}$$

Uma transição $t_j \in \mathbf{D}_0$, é disparável em um instante τ_0 se, e somente se,

$$\delta(t_j) \leq \tau_0 \leq \min\{\Delta(t)\}, \quad \forall t \in \mathcal{H}$$

As transições t_1 e t_2 podem disparar, pois seus limites inferiores são menores que qualquer dos limites superiores das transições habilitadas.

Os intervalos de disparos para t_1 e t_2 são $[1, 3]$ e $[2, 3]$, respectivamente.

- Disparando t_1 , com intervalo de disparo $ID = [1, 3]$, a marcação e o domínio da nova classe são calculados, como segue:

$$M_1 = p_2, p_3$$

$$D_1 = \begin{cases} i^s(t) & \text{se } t \text{ é recém habilitada} \\ [\max\{0, \delta_1(t) - \Delta_1(ID)\}, \max\{0, \Delta_1(t) - \delta_1(ID)\}] & \text{se } t \text{ é persistente} \end{cases}$$

Na nova classe, apenas t_2 está habilitada. Como t_2 já estava habilitada, seu intervalo dinâmico de disparo é atualizado, como segue,

$$D_1(t_2) = [\max\{0, 2 - 3\}, \max\{0, 5 - 1\}] = [0, 4]$$

A nova classe CS_1 é caracterizada como segue,

$$CS_1 = \begin{cases} M_1 = p_3, p_2 \\ D_1 = 0 \leq \theta_2 \leq 4 \end{cases}$$

O tempo de execução da seqüência t_1, t_2 será igual à soma dos tempos relativos, ou seja, $[1, 3] + [0, 4] = [1, 7]$.

- Voltando à classe CS_0 e disparando t_2 no intervalo $ID = [2, 3]$, pois

$$ID(t_2) = [2, \min\{3, 5\}] = [2, 3]$$

O intervalo relativo de t_1 é $[\max\{0, 1 - 3\}, 3 - 2] = [0, 1]$.

A nova classe CS_2 é caracterizada como segue,

$$CS_2 = \begin{cases} M_2 = p_1, p_4 \\ D_2 = 0 \leq \theta_1 \leq 1 \end{cases}$$

Assim, o intervalo de tempo para execução da seqüência t_2, t_1 será: $[2, 3] + [0, 1] = [2, 4]$.

Na Figura 3 é mostrado o grafo de classes correspondente.

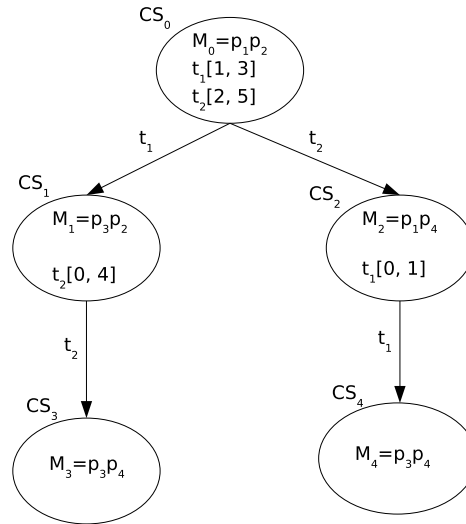


Figura 3: Grafo de classes para a rede mostrada na Fig. 2

Para a execução da seqüência $t_1 t_2$, considerando que foram habilitadas no mesmo instante e como o disparo de uma independe do disparo da outra, o tempo de execução da seqüência dependerá do disparo de t_2 , logo, o intervalo de tempo para a seqüência ocorrer será $[2, 5]$. Já para a execução da seqüência $t_2 t_1$, o intervalo de tempo de t_1 , após o disparo de t_2 , é igual $[2, 3]$. Comparados aos resultados calculados observa-se que em ambos os casos há uma superestimação dos resultados.

Para redes com alto grau de concorrência, essa imprecisão aumenta consideravelmente. Esse aumento da imprecisão se deve ao fato de o tempo relativo perder informação do momento de habilitação das transições persistentes³.

Outro fator responsável pelo aumento da imprecisão é a operação subtração de intervalos. Na matemática intervalar a operação diferença entre intervalos aumenta a imprecisão do resultado, pois o intervalo resultante da operação é alargado. Esse problema é conhecido como *dependência*. Uma maneira de cancelar esse efeito é utilizar a técnica da compensação. Seja, por exemplo, a operação $[2, 5] - [1, 3] = [2 - 3, 5 - 1] = [0, 4]$, pois o tempo é sempre positivo. Se for utilizada a técnica da compensação, esta operação seria $[2 - 1, 5 - 3] = [1, 2]$ que somado a $[1, 3]$ resultaria no intervalo $[2, 5]$, que é exatamente o intervalo de execução

³Transições persistentes são transições que, uma vez habilitadas, só seu próprio disparo pode desabilitá-la. Porém, há diferentes graus de persistência. Quando a transição pode ser desabilitada pelo disparo de outra ela é chamada de herdada.

da seqüência t_1, t_2 . Para o segundo caso, ter-se-ia: $[2, 3] - [2, 3] = [0, 0]$. Logo, o intervalo para a seqüência t_2, t_1 , seria $[2, 3]$.

3.4.2 Método Enumerativo usando Relógio Global

O uso do tempo global na análise das *RPTs* aparece em diversos trabalhos encontrados na literatura, principalmente naqueles que consideram a mudança de estado devido ao tempo [YS97, Lil99, GRR05]. Usando o conceito de classes de estado, em [WD00, XHD02] é definida uma classe de estado como sendo uma tripla $CS = \langle M, D, ST \rangle$, sendo M e D a marcação e o domínio de intervalos de disparos, iguais ao método apresentado na subseção anterior, porém, usando o tempo global, enquanto o terceiro elemento ST , é uma espécie de relógio global (*time stamp*), que é disparado no início da execução da rede e é atualizado durante sua evolução.

Assim, como no caso anterior, será usada a rede mostrada na Figura 4, para apresentar, de modo informal, as classes de estado com relógio global.

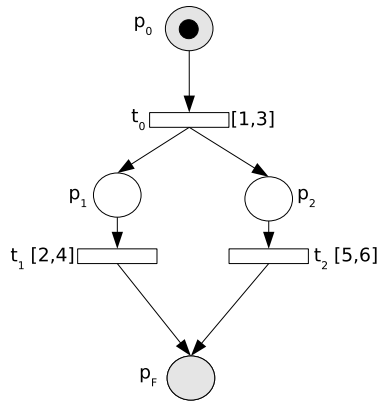


Figura 4: Rede de Petri temporal para análise usando relógio global

1. Classe inicial:

$$CS_0 = \begin{cases} M_0 = p_0 \\ D_0 = 1 \leq t_0 \leq 3 \\ ST_0 = [0,0], \text{ tempo absoluto} \end{cases}$$

Para a classe inicial, o relógio de tempo absoluto é disparado no instante zero e o domínio das transições habilitadas são os próprios intervalos estáticos dessas transições. Nessa classe, apenas t_0 está habilitada.

2. O disparo de t_0 ocorrerá no intervalo de tempo $ID(t_0) = [1, 3]$.

O disparo de t_0 habilita as transições t_1 e t_2 e atualiza o relógio global ST_1 . Os domínios são, então, obtidos a partir da soma do relógio ST_1 , com os intervalos estáticos das transições t_1 e t_2 . Logo, a nova classe calculada é caracterizada, como segue,

$$ST_1 = ST_0 + ID_0 = [0, 0] + [1, 3] = [1, 3]$$

$$D_1(t_1) = ST_1 + [2, 4] = [3, 7]$$

$$D_1(t_2) = ST_1 + [5, 6] = [6, 9]$$

$$CS_1 = \begin{cases} M_1 = p_1, p_2 \\ S_1 = [1, 3], \text{ tempo absoluto para entrada na classe} \\ D_1 = \begin{cases} 3 \leq t_1 \leq 7 \\ 6 \leq t_2 \leq 9 \end{cases} \end{cases}$$

As transições t_1 e t_2 estão disparáveis.

3. Disparando t_2 , seu intervalo de disparo será $ID(t_2) = [6, 7]$

$$CS_2 = \begin{cases} M_2 = p_1, p_f \\ ST_2 = [6, 7], \text{ tempo absoluto} \\ D_2 = 6 \leq t_1 \leq 7 \end{cases}$$

O relógio de tempo absoluto ST , é atualizado pelo intervalo de disparo $ID(t_2)$. Após o disparo de t_2 , a transição t_1 permanece habilitada, logo seu domínio é atualizado pelo relógio global da classe, ou seja, $[\max(3, 6), 7] = [6, 7]$. A transição t_1 teve o limite inferior invadido pelo tempo do disparo de t_2 .

4. A transição t_1 , portanto, deve disparar no intervalo absoluto $[6, 7]$. Assim, a seqüência t_0, t_2, t_1 seria disparável no mínimo em 6 e no máximo em 7 unidades de tempo. Já a seqüência t_0, t_1, t_2 teria um intervalo de tempo de disparo igual a $[6, 9]$, conforme Figura 5.

Analisando a rede da Figura 4, observa-se que o disparo da transição t_1 , deve ocorrer no intervalo $[2, 4]$, tempo contado a partir de sua habilitação, enquanto a transição t_2 deve disparar no intervalo $[5, 6]$, a partir de sua habilitação. Além disso, as transições t_1 e t_2 são habilitadas no mesmo instante pelo disparo de t_0 . Como o tempo de sensibilização máxima de t_1 é inferior ao de sensibilização mínima de t_2 , então, t_1 irá disparar antes que t_2 esteja sensibilizada pelo seu tempo mínimo. Assim, a seqüência t_0, t_2, t_1 não é executável, pois a

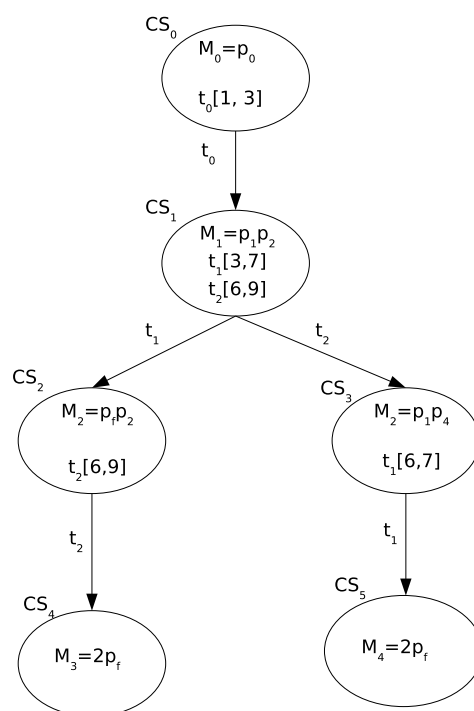


Figura 5: Grafo de classes para rede da Fig. 4

transição t_1 deve ter sido disparada quando t_2 estiver habilitada para o ser. Dessa forma, a análise, usando tempo absoluto para calcular os domínios das transições recém habilitadas, pode levar a seqüências que não são executáveis pela rede.

Enquanto o método das classes de estado usando tempo relativo tem problemas com transições persistentes, as classes de estado usando tempo absoluto têm limitações com transições recém-habilitadas.

4 Análise das Redes de Petri Temporais Usando Tempo Global

Este capítulo apresenta uma contribuição para o problema de análise das *RPTs* via alcançabilidade da rede. Baseado no conceito de classes de estados e tratando o tempo de disparo das transições como tempo *absoluto*, também chamado de tempo *global*, é apresentado um método enumerativo que possibilita explorar todo o espaço de estados de uma *RPT*. Inicialmente é apresentado o procedimento para aplicação do método e em seguida são analisadas algumas vantagens e limitações, as quais foram superadas, em relação a outros métodos. Ao fim do capítulo, uma aplicação explorando o método proposto para análise de uma *RPT* é apresentada.

4.1 Análise da Alcançabilidade Usando Tempo Global

O tempo global considera um relógio global que é disparado com o início da execução da rede e é atualizado pelo disparo das transições. O uso do relógio global aparece em trabalhos que tratam o tempo de forma contínua, como em [YS97, Lil99], e naqueles em que o estado é tratado de forma compacta, como em [XHD02, WD00, LLK05]. Em todos estes trabalhos existe uma função que, como um relógio global, acumula o tempo a partir do instante inicial de execução da rede.

A abordagem proposta se difere das demais que utilizam o tempo global, nos seguintes pontos:

- incorpora o tempo absoluto (global) ao intervalo de disparo dinâmico de cada transição habilitada;
- a verificação da disparabilidade de cada transição habilitada é aplicada diferentemente para as transições persistentes e para as transições recém-habilitadas;

- o domínio dos intervalos de disparo dinâmicos pode utilizar o tempo absoluto ou relativo;
- trata da múltipla habilitação de transições;
- cria para o tempo global um grafo de classes limitado;

Os conceitos gerais, definidos para a análise baseada em classe de estados de uma *RPT*, são adotados na análise proposta. São elas: semântica forte para o tempo de disparo de uma transição, atomicidade do disparo, mudança de estado (classe de estados) com o disparo de transição e redes seguras.

4.1.1 O Estado de uma *RPT* com Tempo Global

O estado de uma *RPT* é definido por sua marcação \mathbf{M} e um vetor de intervalos de disparos composto por transições habilitadas pela marcação \mathbf{M} , ou seja, é uma classe de estados.

Formalmente, uma classe de estados S de uma *RPT* usando o tempo global é definida pelo par $S = \langle \mathbf{M}, \mathbf{I} \rangle$, sendo

- \mathbf{M} , a marcação atual da rede
- \mathbf{I} , vetor dos intervalos de disparos das transições habilitadas pela marcação \mathbf{M} , ou domínio dinâmico.

O vetor dos intervalos de tempo \mathbf{I} é diferente do domínio de disparos definido para a classe de estado, pois os tempos são absolutos, ou seja, são tempos contados a partir do início da execução da rede. Durante a evolução da rede, o vetor de intervalos varia, tanto por causa do número de transições habilitadas pela marcação, quanto pelo instante de disparo de algumas das transições habilitadas. Na classe inicial S_0 , o vetor dos intervalos \mathbf{I}_0 é definido pelos intervalos estáticos das transições habilitadas nesta classe. Por exemplo, para a rede mostrada na Figura 6, a classe inicial é caracterizada, como segue:

$$S_0 = \langle \mathbf{M}_0, \mathbf{I}_0 \rangle$$

$$\mathbf{M}_0 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^s(t_1) \\ \mathbf{I}^s(t_2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [2, 3] \end{pmatrix}$$

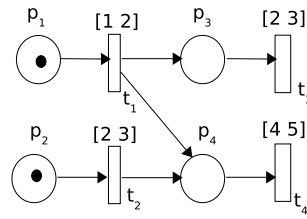


Figura 6: Rede de Petri Temporal

4.1.2 Disparabilidade de um Conjunto de Transições

Para uma classe $S = \langle \mathbf{M}, \mathbf{I} \rangle$ de uma *RPT*, o conjunto de transições habilitadas pela marcação \mathbf{M} é denotado por \mathcal{H} . Algumas das transições pertencentes a \mathcal{H} podem não disparar na classe S . O fato de uma transição estar habilitada em uma determinada classe, não determina necessariamente que ela irá disparar nessa classe, pois uma outra transição poderá ser disparada antes do tempo mínimo de sensibilização da referida transição. Dessa forma, pode-se estabelecer uma condição de disparabilidade. Essa condição é expressada através da definição de transição disparável, como segue.

Definição 4.1 (Transição Disparável) *Seja \mathcal{H} , o conjunto de transições habilitadas em uma classe S de uma *RPT*. Uma transição $t_j \in \mathcal{H}$ é dita disparável em S se, e somente se,*

$$\delta(t_j) \leq \min\{\Delta(t)\} \quad (4.1)$$

sendo, $t \in \mathcal{H}$ e

- $\delta(t_j)$ o limite inferior do intervalo de tempo para que a transição t_j possa ser disparada
- $\Delta(t)$ o limite superior do intervalo de disparo de cada transição $t \in \mathcal{H}$.

sendo, $\delta(t_j)$ e $\Delta(t)$, relativos ao início de execução da rede.

O conjunto das transições disparáveis em cada classe é denotado por \mathcal{D} .

4.1.3 Regra de Disparo e Mudança de Classe de Estados

A mudança de uma classe de estados para outra ocorre devido ao disparo de alguma transição. O instante de disparo de uma transição varia com o limite superior mínimo das transições disparáveis na referida classe, logo, o intervalo de disparo de uma transição pode diferir do intervalo dinâmico da transição.

Definição 4.2 (Intervalo de Disparo) *Seja $t_j \in \mathcal{D}_0$ em uma classe S_0 . O disparo de t_j , na classe S_0 , ocorrerá no intervalo de disparo \mathbf{i}^d , definido como segue.*

$$\mathbf{i}^d(t_j) = [\delta_0(t_j), \min\{\Delta_0(t)\}] = [\delta^s(t_j), \min\{\Delta^s(t)\}] \quad (4.2)$$

sendo, $t \in \mathcal{H}_0$.

O intervalo de disparo, portanto, é limitado pelo instante em que a transição é mínimamente sensibilizada para disparar e a condição de disparabilidade (4.1).

A mudança de classe ocorre devido ao disparo de uma transição e a nova classe será caracterizada conforme o enunciado e as regras a seguir.

Seja $S_1 = \langle M_1, \mathbf{I}_1 \rangle$ uma classe alcançada, a partir de S_0 , pelo disparo de t_j no intervalo de $\mathbf{i}_0^d = [\delta^d, \Delta^d]$. Quando t_j dispara, a marcação da rede e o valor dos intervalos das transições habilitadas são alterados, como segue.

1. Remoção e adição de marcas nos lugares de entrada e saída da transição t_j , conforme Equação (3.2).
2. Os intervalos de disparo das transições habilitadas, em S_1 , são atualizados. Isto ocorre de diferentes maneiras, como segue:
 - (a) para transições persistentes, ou transições habilitadas antes e depois do disparo de t_j , ou seja, $\forall t \neq t_j$ e t persistente, então,

$$\mathbf{I}_1(t) = \left[\max\{\delta^d, \delta^s(t)\}, \Delta^s(t) \right] \quad (4.3)$$

- (b) para transições habilitadas após o disparo de t_j , as chamadas recém-habilitadas, têm-se:

$$\mathbf{I}_1(t) = \mathbf{i}^d + \mathbf{I}^s(t) \quad (4.4)$$

Da Equação (4.3), nota-se que uma transição que persiste habilitada, quando há uma mudança de classe, pode ter seu intervalo de disparo, na nova classe, alterado pelo intervalo da transição que disparou. Já pela Equação (4.4), as transições que são recém-habilitadas têm como intervalo de disparo a soma do seu intervalo estático e o intervalo de disparo da transição que leva a rede à nova classe.

As equações (4.3) e (4.4) possibilitam que o conjunto de transições habilitadas em S_1 seja separado em dois conjuntos disjuntos, dados por:

- conjunto das transições persistentes, ou transições que permanecem habilitadas quando da mudança de classe, de \mathcal{S}_0 para \mathcal{S}_1 , a partir do disparo de t_j , ou seja,

$$\mathcal{P}_1 = \{t \in \mathcal{H}_1 \mid t \in \mathcal{H}_0 \setminus \{t_j\}\} \quad (4.5)$$

- conjunto das transições novas ou transições recém-habilitadas:

$$\mathcal{N}_1 = \{t \in \mathcal{H}_1 \mid t \notin \mathcal{P}_1\} \quad (4.6)$$

Das equações (4.5) e (4.6) nota-se que, caso uma transição disparada em \mathcal{S}_0 continue habilitada em \mathcal{S}_1 , ela será tratada como uma transição nova.

Considerando a rede mostrada na Figura 6, e disparando a transição t_1 em qualquer instante pertencente ao intervalo $[1, 2]$, a rede alcança a classe \mathcal{S}_1 , com as seguintes características:

$$\mathcal{S}_1 = \langle \mathbf{M}_1, \mathbf{I}_1 \rangle;$$

$$\mathbf{M}_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 1]^T;$$

$$\mathcal{H}_1 = \{t_2, t_3, t_4\}, \text{ transições habilitadas};$$

$$\mathbf{I}_1(t_2) = \mathbf{I}_0(t_2) = [2, 3], \text{ transição persistente};$$

$$\mathbf{I}_1(t_3) = \mathbf{i}^d(t_1) + \mathbf{I}^s(t_3) = [1, 2] + [2, 3] = [3, 5], \text{ transição recém-habilitada};$$

$$\mathbf{I}_1(t_4) = \mathbf{i}^d(t_1) + \mathbf{I}^s(t_4) = [1, 2] + [4, 5] = [5, 7], \text{ transição recém-habilitada};$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [3, 5] \\ [5, 7] \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{D}_1 = \{t_2\}, \text{ transição disparável}.$$

A verificação da condição de disparabilidade de uma transição, via intervalos dinâmicos com tempo global, nem sempre expressa a verdade. As operações com intervalos guardam ou expressam situações que não ocorrem no plano real. No caso das *RPTs*, isso pode refletir em falsos cenários de execução de seqüências de transições. Para ilustrar, será considerada a *RPT* mostrada na Figura 7.

Na classe inicial apenas a transição t_1 está habilitada e seu disparo habilitará, no mesmo instante, as transições t_2 e t_3 e seus intervalos de disparo serão $[6, 13]$ e $[8, 16]$, respectivamente. Ambas estarão disparáveis, com intervalos de disparos iguais a $[6, 13]$ para t_3 e $[8, 13]$ para t_2 , como t_2 e t_3 compartilham o mesmo lugar de entrada, elas estariam em conflito, como mostrado na Figura 8.

Assumindo que o tempo de disparo de t_1 pertence ao intervalo $[4, 10]$, por exemplo, em $\theta(t_1) = 10$, o intervalo de disparo da transição t_3 seria $[12, 13]$, e o intervalo de disparo de t_2 seria $[14, 16]$. Portanto, apenas a transição t_3 será disparável e não haverá conflito entre as transições t_2 e t_3 . Esta é uma situação em que a soma de dois intervalos expôs a existência de um conflito que na realidade não existe.

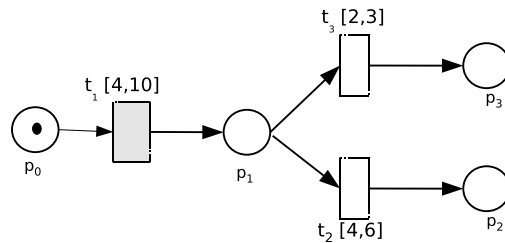


Figura 7: Exemplo de uma *RPT* para análise de tempo global

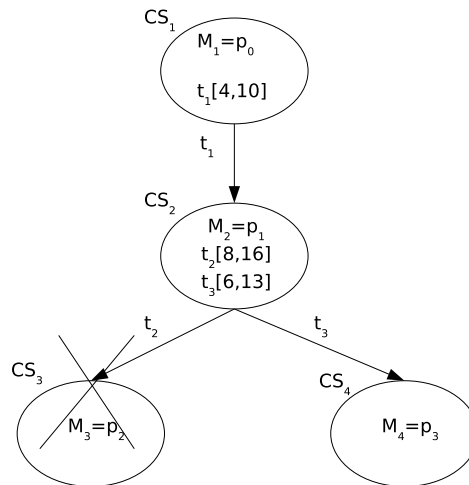


Figura 8: Grafo de classes para a rede da Fig. 7

Neste caso, a soma do intervalo $[4, 10]$ com o intervalo $[4, 6]$ gera um intervalo que considera o disparo de t_1 entre os instantes 4 e 10. Formalmente, a soma de dois intervalos \mathbf{x} e \mathbf{y} é definida como sendo

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x + y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$$

Assim, aparecem situações como, t_3 considera que o disparo de t_1 ocorreu no instante 10, por exemplo, logo o intervalo de t_3 seria [12, 13]. Enquanto, para t_2 , o disparo de t_1 ocorreu no instante 6, por exemplo, logo, o intervalo de disparo de t_2 seria [10, 12]. Como $[12, 13] \cap [10, 12] \neq \emptyset$, ambas seriam disparáveis¹.

Para evitar que uma transição não disparável seja incluída entre as disparáveis e com isso levar à validação de falsas execuções, como no exemplo acima, o conceito de transição disparável (4.1) é redefinido, separando as transições persistentes das recém habilitadas. Assim, uma transição $t_j \in \mathcal{H}$, em uma classe S de uma *RPT*, é considerada disparável se, e somente se,

$$\begin{aligned} \delta^s(t_j) &\leq \Delta^s(t), & \text{para } t \in \mathcal{N} \\ \delta(t_j) &\leq \Delta(t), & \text{para } t \in \mathcal{P} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para t_j ser disparável ela tem que atender duas condições de disparabilidade, uma no seu domínio estático, outra no domínio dinâmico. No exemplo, portanto, usando a condição (4.7), verifica-se que a transição t_2 é disparável pelo seu intervalo dinâmico mas não o é pelo seu intervalo estático. Dessa forma, essa limitação do método é superada.

Apesar da análise usando tempo global evitar o aumento da imprecisão nos resultados, a informação temporal ao fim da análise de uma seqüência de disparos de transições, omite informações a respeito dos tempos relativos das transições em cada classe. Para superar essa limitação será apresentado um método que reúne a análise global e relativa do tempo.

4.2 Análise com Tempo Global e Domínio Relativo

Nesta seção é apresentada uma análise baseada em classe de estados, porém, o domínio dinâmico de cada transição adota o tempo relativo à sua entrada. Porém, o cálculo para a atualização dos intervalos das transições persistentes é diferente dos utilizados em [BD91].

Usando conceitos da álgebra intervalar completa [Sha96], tem-se a seguinte definição para a subtração entre dois intervalos, também conhecida como subtração dependente:

Sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} dois intervalos fechados, tais que, $\mathbf{x} = [a, b]$ e $\mathbf{y} = [c, d]$. A subtração dependente entre \mathbf{x} e \mathbf{y} , denotada por $\mathbf{x} \ominus \mathbf{y}$ é calculada, como segue

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = [a - c, b - d]$$

O resultado dessa operação pode fugir da definição dada para intervalo. Quando isso ocorrer

¹O fato de haver um intersecção entre os intervalos, significa que a condição de disparabilidade é satisfeita.

tem-se o chamado intervalo impróprio, que é uma extensão do intervalo clássico.

Para os intervalos representando tempo, o cálculo da subtração dependente assume a forma, como segue:

$$\mathbf{x} \ominus \mathbf{y} = [\max\{0, a - c\}, \max\{0, b - d\}]$$

Utilizando as definições da análise com tempo global, algumas regras para tratar o domínio das transições, usando o tempo relativo, são apresentadas, como segue,

1. Na classe inicial os intervalos dinâmicos são os próprios intervalos estáticos das transições habilitadas.
2. Seja a classe $S_{j+1} = \langle M_{j+1}, I_{j+1} \rangle$, alcançada a partir da classe $S_j = \langle M_j, I_j \rangle$, devido ao disparo de uma transição t_k . Sendo $\mathbf{i}_j^d(t_k) = [\delta_j(t_k), \Delta_j(t_k)]$ o intervalo de disparo com tempo absoluto de t_k na classe j e $\mathbf{i}_j^{dr}(t_k) = [\delta_j^{dr}(t_k), \Delta_j^{dr}(t_k)]$ seu intervalo de disparo com tempo relativo, como mostrado na Figura 9. Os intervalos na classe S_{j+1} podem ser calculados com segue.

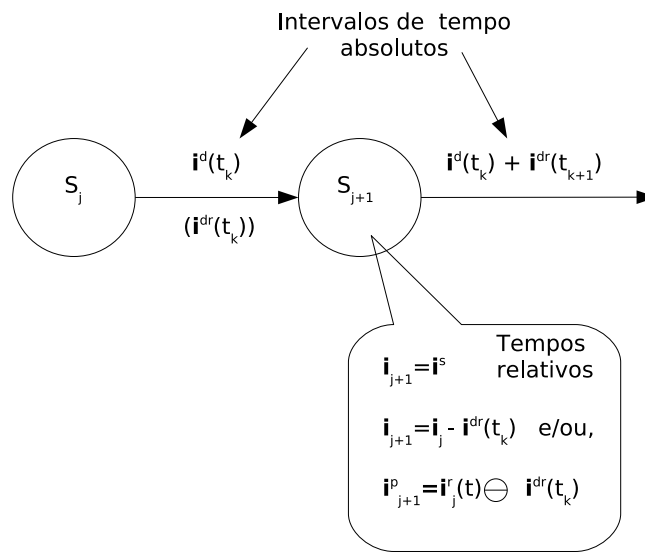


Figura 9: Classe de estados com domínio relativo

- Vetor marcação M_j , é obtido pela Equação 3.2.
- Intervalos dos domínios dinâmicos com tempo relativo:
 - (a) intervalo de tempo na classe S_{j+1}

$$\mathbf{I}_{j+1}(t) = \begin{cases} \mathbf{I}^s(t), & \text{se, } t \in \mathcal{N}_{j+1} \\ \mathbf{I}_j(t) - \mathbf{i}_j^{dr}(t_k) & \text{se, } t \in \mathcal{P}_{j+1}, \text{ relativo clássico} \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_{j+1}^r = \mathbf{I}_j^r(t) \ominus \mathbf{i}_j^{dr}(t_k) \quad \text{se, } t \in \mathcal{P}_j, t \in \mathcal{P}_{j+1}, \text{ relativo completo}$$

Os intervalos $\mathbf{I}_{j+1}(t)$ são intervalos de tempo das transições habilitadas na classe \mathcal{S}_{j+1} , considerando o tempo relativo àquela classe, por isso deve ser representado por um intervalo próprio. Esse tempo é importante para determinar as transições disparáveis em \mathcal{S}_{j+1} . Se uma transição persistente na classe $j+1$, já o era na classe j , então, ela carrega seus dois intervalos dinâmicos relativos. O primeiro \mathbf{i}_{j+1} relativo ao tempo na classe e o segundo, \mathbf{i}_{j+1}^r , que carrega a informação relativa aos disparos das transições concorrentes.

(b) intervalo de disparo com tempo relativo

$$\mathbf{i}_{j+1}^{dr}(t) = \begin{cases} [\delta_{j+1}(t), \min\{\Delta_{j+1}(t)\}], & \text{se } t \in \mathcal{H}_{j+1} \\ \mathbf{i}_{j+1}^r \ominus \mathbf{i}_j^{dr}(t_k), & \text{se } t \in \mathcal{P}_{j+1} \end{cases}$$

3. Intervalo de disparo com tempo absoluto.

Seja $t_{k+1} \in \mathcal{D}_{j+1}$. O intervalo de disparo de t_{k+1} , com tempo absoluto, é calculado, como segue,

$$\mathbf{i}_{j+1}^d(t_{k+1}) = \mathbf{i}_j^d(t_k) + \mathbf{i}_{j+1}^{dr}(t_{k+1})$$

O intervalo de disparo da transição que causa a mudança de classe ocorre no tempo absoluto determinado pelo último disparo absoluto acrescido do disparo relativo dessa transição.

Para ilustrar a abordagem, a alcançabilidade da rede mostrada na Figura 10 será analisada. As classes alcançadas são calculadas, como segue:

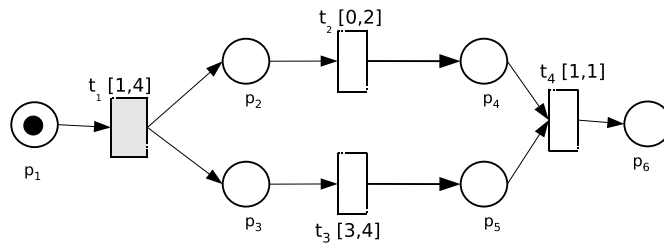


Figura 10: Exemplo de uma RPT para análise de domínio relativo

- $S_0 = \langle M_0, I_0 \rangle$

$$M_0 = p_1$$

$$\mathcal{H}_0 = t_1$$

$$I_0 = I^s(t_1) = [1, 4] = i^d(t_1)$$

- $S_1 = \langle M_1, I_1 \rangle$

$$M_1 = p_2, p_3$$

$\mathcal{H}_1 = t_2, t_3$, ambas são transições recém-habilitadas.

$$I_1 = \begin{pmatrix} I_1(t_2) \\ I_1(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [3, 4] \end{pmatrix}, \text{ (domínio relativo)}$$

O domínio relativo possibilita uma verificação direta da condição de disparabilidade. Assim, comparando os domínios relativos das transições habilitadas, nota-se que apenas t_2 é disparável e o intervalo de disparo relativo é igual a $[0, 2]$. O disparo com intervalo de tempo absoluto é calculado, como segue,

$$i^d(t_2) = i^d(t_1) + i_1^{dr}(t_2) = [1, 4] + [0, 2] = [1, 6]$$

- $S_2 = \langle M_2, I_2 \rangle$

$$M_2 = p_3, p_4$$

$\mathcal{H}_2 = t_3$, transição persistente

Como $t_3 \in \mathcal{H}_1$ e $t_3 \in \mathcal{H}_2$, e $t_2 \neq t_3$ então,

$$I_2(t_3) = I_1(t_3) - i_1^{dr}(t_2) = [\max\{0, 1\}, \max\{0, 4\}] = [1, 4] \text{ intervalo dinâmico relativo clássico.}$$

$$I_2^r(t_3) = I_1(t_3) \ominus i_1^{dr}(t_2) = [\max\{0, 3\}, \max\{0, 2\}] = [3, 2] \text{ intervalo dinâmico completo.}$$

$$i^d(t_3) = i^d(t_2) + I_2^s(t_3) = [1, 6] + [3, 2] = [4, 8], \text{ intervalo de disparo absoluto}$$

- $S_3 = \langle M_3, I_3 \rangle$

$$M_3 = p_4, p_5$$

$\mathcal{H}_3 = t_4$, transição recém habilitada

$$I_3(t_4) = I_3^r(t_4) = [1, 1]$$

$$i^d(t_4) = i^d(t_3) + i_3^{dr}(t_4) = [4, 8] + [1, 1] = [5, 9], \text{ intervalo de disparo absoluto}$$

A Figura 11 mostra o grafo de classes para a rede considerada e observa-se que, o intervalo de tempo para a rede alcançar a classe S_4 , a partir da classe inicial, é igual ao obtido usando domínio de disparos com tempo absoluto.

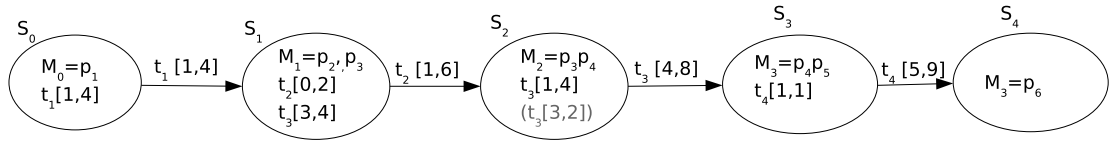


Figura 11: Grafo de classes da *RPT* mostrada na Fig. 10 usando domínio relativo

Tratar o domínio de disparos usando o tempo relativo possibilita obter-se, ao fim da análise de uma execução, tanto o tempo global de execução das transições quanto o tempo de cada uma relativo à habilitação. Entre outras vantagens têm-se: facilidade para planejar escalonamento, não há necessidade de resolver inequações e evita-se o problema de explosão do número de classes geradas quando os domínios são tratados com tempo global.

4.3 Escalonamento de Seqüências de Transições

O disparo de uma transição em um instante θ leva uma *RPT* de uma classe inicial S_0 para a classe S_1 . Tal mudança de classe é dita escalonável ou executável se, e somente se, a transição t é disparável em θ . Caso o seja, a mudança é denotada como segue,

$$S_0 \xrightarrow{(\theta, t)} S_1$$

O uso do tempo global para a análise de alcançabilidade permite verificar se uma seqüência de transições $\sigma = t_1, \dots, t_n$, é executável, ou escalonável, ou seja, se existem classes S_0, S_1, \dots, S_n , tais que,

$$S_0 \xrightarrow{(\theta_1, t_1)} S_1 \dots S_{n-1} \xrightarrow{(\theta_n, t_n)} S_n.$$

sendo $\theta_1, \dots, \theta_n$ os instantes de disparos das transições $t_i \in \sigma$. A essa seqüência de classes denomina-se de trajetória.

Caso uma das transições não seja disparável, a seqüência é dita não escalonável. O teorema a seguir mostra que as regras de disparo, estabelecidas pela abordagem proposta, permitem calcular classes e suas relações, conforme o enunciado a seguir.

Dado um escalonamento $E = (\theta_1, t_1), (\theta_2, t_2), \dots, (\theta_n, t_n)$ a ser alcançado nas classes $S_j = \langle M_j, \mathbf{I}_j \rangle$, sendo $j = 0, 1, \dots, n$, pode-se construir uma trajetória $\pi = S_0 \xrightarrow{t_1} S_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_n} S_n$, usando a análise baseada no tempo global.

- Para $E = (\theta_1, t_1)$, se t_1 é disparável, então, $\exists M_0 \mid M_0 \geq \text{Pre}(t_1)$. Considerando, $S_0 =$

$\langle \mathbf{M}_0, \mathbf{I}_0 \rangle$ como a classe inicial e $\mathcal{H}_0 = \{t \in T \mid \mathbf{M}_0 \geq \text{Pre}(t)\}$ o conjunto das transições habilitadas, o domínio I_0 dos intervalos é dado pelo vetor dos intervalos estáticos das transições $t \in \mathcal{H}_0$, ou seja, $\mathbf{I}_0(t) = \mathbf{I}^s(t)$. Se t_1 dispara em θ_1 , a condição de disparabilidade 4.7 deve ser satisfeita, logo,

$$\delta^s(t_1) \leq \theta_1 \leq \min\{\Delta^s(t)\}$$

Disparando t_1 no instante θ_1 , a classe S_1 é alcançada e pode ser caracterizada.

- Uma nova marcação é calculada pela Equação 3.2 e o conjunto de transições habilitadas por \mathbf{M}_1 , são obtidos como segue,

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_0 + \text{Pos}(t_1) - \text{Pre}(t_1)$$

$$\mathcal{H}_1 = \{t \in T \mid \mathbf{M}_1 \geq \text{Pre}(t)\}.$$

Os intervalos de disparo das transições habilitadas são calculados pela equação,

$$\mathbf{I}_1(t) = \begin{cases} \theta_1 + \mathbf{I}^s(t), & \text{se } t \in \mathcal{N}_1 \\ [\max\{\theta_1, \delta^s(t)\}, \Delta^s(t)], & \text{se } t \in \mathcal{P}_1 \end{cases}$$

Assim, $S_1 = \langle \mathbf{M}_1, \mathbf{I}_1 \rangle$.

Sendo $\mathbf{I}_1(t_2) = [\delta_1(t_2), \Delta_1(t_2)]$, o intervalo de disparo de $t_2 \in \mathcal{H}_1$. Se t_2 é disparável em S_1 , então,

$$\theta_1 + \delta^s(t_2) < \min\{\Delta_1(t)\} \quad \text{se } t_2 \in \mathcal{N}_1$$

ou,

$$\max\{\theta_1, \delta^s(t_2)\} < \min\{\Delta_1(t)\}, \quad \text{se } t_2 \in \mathcal{P}_1$$

Logo, t_2 disparando em $\theta_2 \in [\delta_1(t_2), \Delta_1(t_2)]$, a classe S_1 alcança S_2 .

- Para o disparo da transição t_n , as equações para cálculo dos intervalos de disparo, estabelecem as condições para existência de uma classe S_n .

Assim, para o escalonamento $E = (\theta_1, t_1), (\theta_2, t_2), \dots, (\theta_n, t_n)$ pode-se construir uma trajetória $\pi = S_0 \xrightarrow{t_1} S_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_n} S_n$, na qual tal escalonamento poderá ser executado.

Exemplo 4.1 Para a RPT, mostrada na Figura 12, será verificado se a seqüência $\sigma = t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5$ é escalonável.

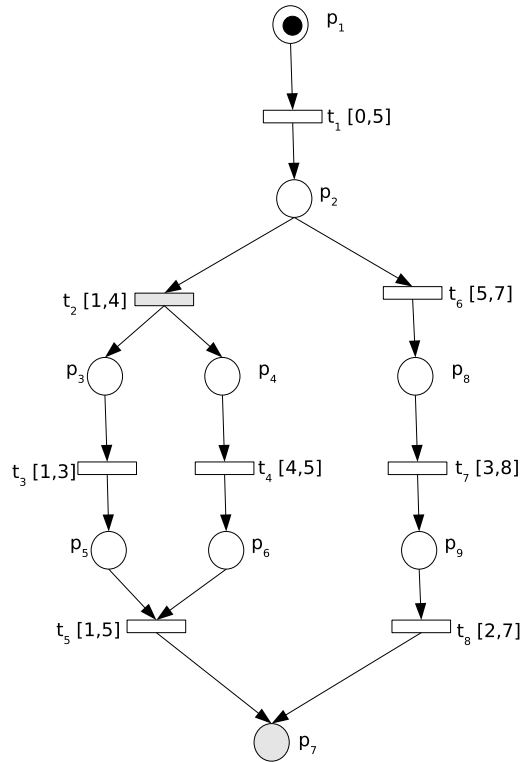


Figura 12: RPT para análise de seqüência de transições

1. Classe inicial S_0 :
$$\begin{cases} M_0 = \{p_1\} \\ \mathbf{I}_0 = [0, 5] \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_0 = \{t_1\}$$

2. Disparando t_1 no intervalo $\mathbf{i}^d = [0, 5]$

$$\text{Classe } S_1 : \begin{cases} M_1 = \{p_2\} \\ \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} t_2[1, 9] \\ t_6[5, 12] \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_1 = \{t_2, t_6\}$$

$$\mathcal{N}_1 = \{t_2, t_6\}$$

$$\mathcal{D}_1 = \{t_2\}$$

Como as transições t_2 e t_6 estão recém-habilitadas, a verificação da condição de disparabilidade é feita utilizando os intervalos estáticos dessas transições. Essa verificação é mostrada, como segue,

$$\delta^s(t_2) = 1 \leq \min\{4, 7\}$$

$$\delta^s(t_6) = 5 \geq \min\{4, 7\},$$

t_6 não é disparável antes de t_1 . Apesar de o intervalo \mathbf{I}_1 indicar um conflito entre estas transições, a verificação usando os intervalos estáticos mostra que isto não é verdade, pela condição de disparabilidade (4.7), t_6 não é escalonável nessa classe, apenas t_2 o é.

3. Disparando t_2 no intervalo $\mathbf{i}^d = [1, 9]$

$$\text{Classe } S_2 : \begin{cases} M_2 = \{p_3, p_4\} \\ \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2, 12] \\ [5, 14] \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_2 = \{t_3, t_4\}$$

$$\mathcal{N}_2 = \{t_3, t_4\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{t_3\}$$

Como as transições t_3 e t_4 são recém-habilitadas, o teste para verificar se são disparáveis é aplicado aos seus intervalos estáticos.

4. Disparando t_3 no intervalo $\mathbf{i}^d = [2, 12]$

$$\text{Classe } S_3 : \begin{cases} M_3 = \{p_5, p_4\} \\ \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} t_4 : [5, 14] \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_3 = \{t_4\}$$

$$\mathcal{P} = \{t_4\}$$

$$\mathcal{D}_3 = \{t_4\}$$

Como a transição t_4 estava habilitada na classe S_2 e continua habilitada em S_3 , ela é uma transição persistente.

5. Disparando t_4 no intervalo $\mathbf{i}^d = [5, 14]$

$$\text{Classe } S_4 : \begin{cases} M_4 = \{p_5, p_6\} \\ \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} t_5 : [6, 19] \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_4 = \{t_5\}$$

$$\mathcal{D}_4 = \{t_5\}$$

6. O disparo de t_5 , portanto, ocorrerá no intervalo $[6, 19]$. Logo, a seqüência $\sigma = t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5$ é escalonável.

Entretanto, a seqüência $\beta = t_1 - t_2 - t_4 - t_3 - t_5$ não é escalonável, visto que a transição t_4 não pode disparar antes que t_3 , pois,

$$\delta(t_4) = 4 > \min\{\Delta(t_3), \Delta(t_4)\} = 3$$

Dessa forma, é possível fazer uma análise parcial da alcançabilidade. Caso contrário, apenas a análise via completo grafo de alcançabilidade seria possível de ser realizada, mesmo para verificar uma seqüência.

4.4 Múltipla Habilitação de Transições

As técnicas para análise de *RPT* evitam ou limitam o uso do conceito de múltipla habilitação. Entretanto, esse conceito é uma parte importante do poder de expressão das *RPTs* e adequado para modelar o comportamento de importantes sistemas em tempo real [BD01]. A noção de múltipla habilitação de transições aparece na modelagem de sistemas temporizados sujeitos a paralelismo. Essa noção é bem definida em teoria das filas quando se têm N servidores com iguais tempos de serviço e em paralelo. Esta configuração pode ser modelada por um lugar ligado a uma transição temporizada. Dessa forma, a transição pode ser habilitada N vezes, simultaneamente.

Usando um exemplo simples, conforme a Figura 13, o conceito de múltipla habilitação pode ser melhor entendido. A transição t_1 está habilitada por uma dupla marcação no seu lugar de entrada. A diferença na representação das marcas no lugar p_0 serve apenas para facilitar o entendimento, não existe qualquer distinção entre elas. A transição t_1 é, então, habilitada pelas duas marcas em p_0 , e seu intervalo de disparo é composto de dois relógio globais, como mostrado na Figura 13a. Disparando t_1 , devido a um dos relógios, a transição t_2 torna-se habilitada, como mostrado na Figura 13b. Disparando t_1 outra vez, a transição t_2 passa à condição de dupla habilitação, conforme Figura 13c.

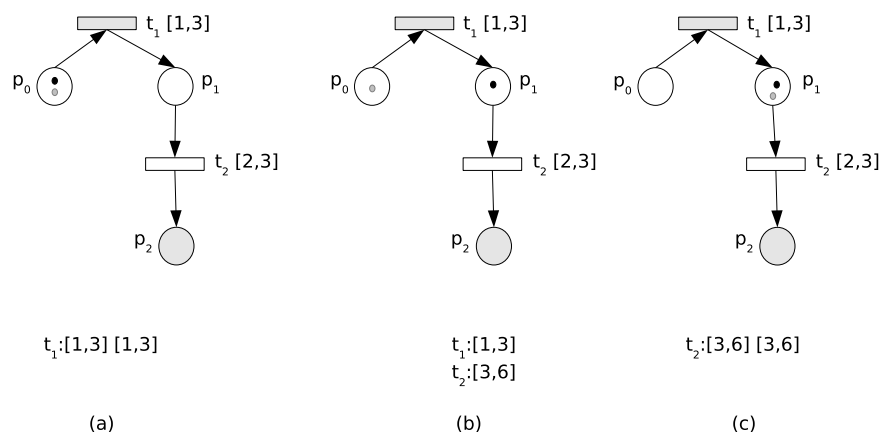


Figura 13: Múltipla habilitação de transições

Na Figura 14, é mostrado o grafo de alcançabilidade, dos intervalos, para a *RPT* mos-

trada na Figura 13, não considerando (a) e considerando (b) a múltipla habilitação.

Ambos os grafos têm mesmo número de classes, pois a condição de habilitação dada pela marcação é a mesma para ambos os casos. Porém, a habilitação pela restrição temporal torna as abordagens com diferentes intervalos de disparos para a mesma marcação. Na realidade, cada múltipla habilitação de uma transição demanda um tempo que é no máximo o tempo de uma habilitação, enquanto no caso de não considerar múltipla habilitação a cada múltipla marcação, a transição demandará um múltiplo tempo de uma habilitação simples, como mostra o exemplo na Figura 13.

Para o disparo da seqüência $t_1 - t_1$, não considerando múltipla habilitação, o intervalo de tempo foi $[2, 6]$, enquanto considerando a múltipla habilitação o intervalo de tempo foi $[1, 3]$.

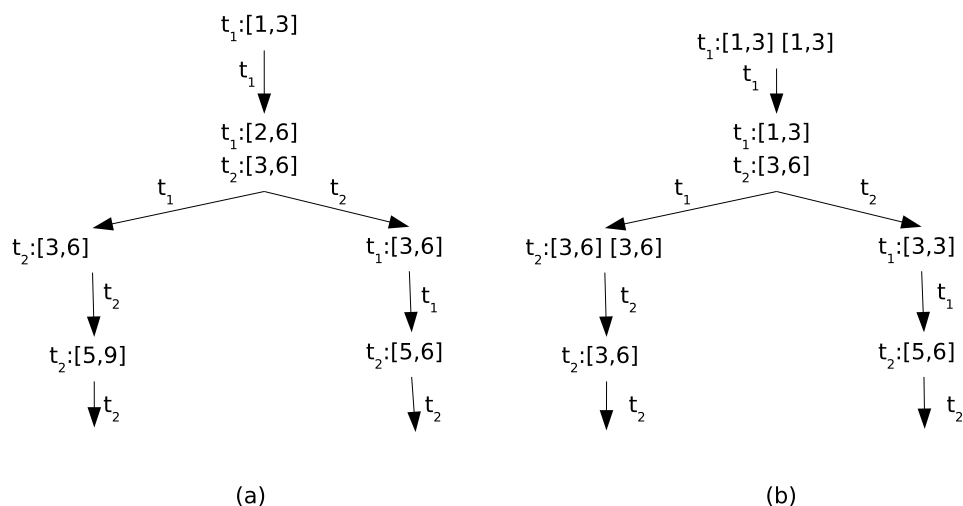


Figura 14: Grafo de alcançabilidade para a rede da Figura 13

4.5 Equivalência de Estados

Um dos problemas dos métodos enumerativos, usando tempo global, é a geração indefinida de classes com a mudança contínua do tempo.

Na Figura 15 são mostrados uma *RPT* e seus grafos de alcançabilidade: quando a rede não é temporizada, Figura 15a e, considerando as informações temporais, Figura 15b. Para a rede com informação temporal e com marcação $2p_3$ pode ser alcançado por diferentes intervalos de tempo. Disparando a seqüência $\sigma_1 = t_1, t_2, t_3$, a partir da classe S_0 , a rede alcança

$S_1 = \langle 2p_3, [3,6] \rangle$, enquanto o disparo da seqüência $\sigma_2 = t_1, t_3, t_2$ leva a $S_2 = \langle 2p_3, [3,7] \rangle$, logo $S_1 \neq S_2$.

Sob o ponto de vista lógico, as classes S_1 e S_2 são iguais, visto que têm mesma marcação, porém S_2 pode ser alcançada em 7 unidades de tempo, enquanto S_1 , é alcançada, no máximo, em 6 unidades de tempo. Caso o interesse seja a classe em que apenas o lugar p_3 tenha marca, pode-se considerar que as classes S_1 e S_2 são equivalentes pois $M_1 = M_2$ e $I_1 \subseteq I_2$. Logo, S_1 e S_2 , 15b passariam a ser uma só classe.

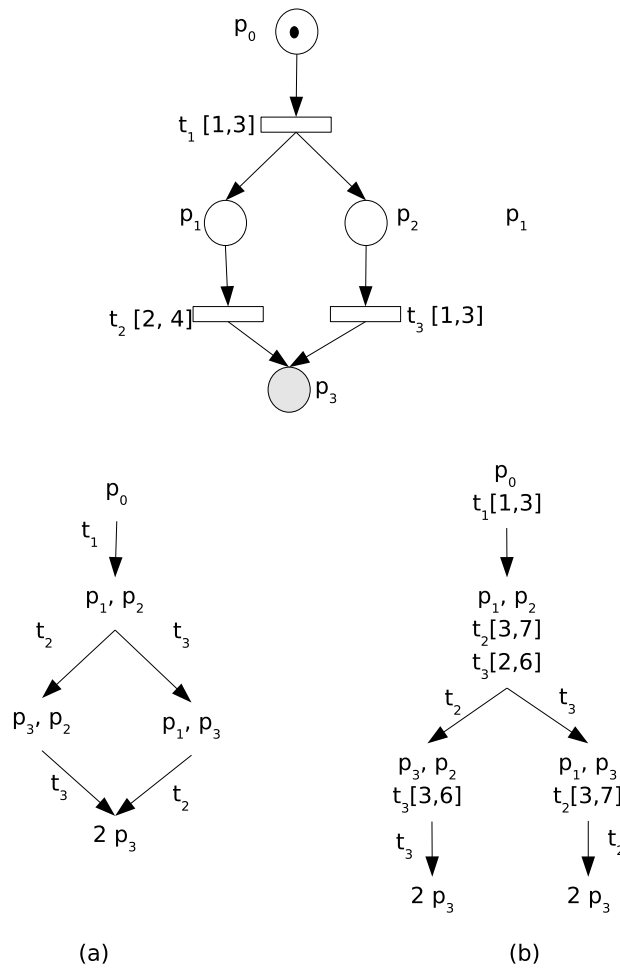


Figura 15: Grafo de Alcançabilidade (a) rede não temporizada (b) rede temporal

Definição 4.3 (Classes Equivalentes) Sejam $S_j = \langle M_j, I_j \rangle$ e $S_k = \langle M_k, I_k \rangle$, duas classes alcançáveis de uma RPT. S_j e S_k são equivalentes se, e somente se,

$$\begin{cases} M_j = M_k \\ I_j \subseteq I_k \\ \mathcal{H}_j = \mathcal{H}_k \end{cases} \quad (4.8)$$

4.5.1 Rede Reversível ou Cíclica

Um caso especial de equivalência ocorre quando a rede é repetitiva. Neste caso, a cada ciclo da rede tem-se classes com mesma marcação e com intervalos de disparo proporcionais, como definido a seguir.

Seja uma *RPT* cíclica com período de repetição $\mathbf{d} \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^+$. Dadas duas classes $S_0 = \langle M_0, \mathbf{I}_0 \rangle$ e $S_n = \langle M_n, \mathbf{I}_n \rangle$ separadas por k ciclos e sendo $M_0 = M_n$, os intervalos de disparos \mathbf{I}_0 e \mathbf{I}_n são relacionados da seguinte forma

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{I}_0 + \mathbf{d}k \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

Demonstração:

Seja q_1 o vetor de disparo tal que

$$S_0 \xrightarrow{q_1} S_1.$$

sendo $S_1 = \langle M_0, \mathbf{I}_1 \rangle$ Assim,

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{d}$$

$$\text{e } \mathbf{d} = \mathbf{I}_1 \ominus \mathbf{I}_0$$

Para $S_2 = \langle M_2, \mathbf{I}_2 \rangle$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{d} = \mathbf{I}_0 + 2\mathbf{d}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{I}_0 + \mathbf{d}.k$$

Assim, as classes com mesma marcação e com vetor de intervalos proporcionais são consideradas equivalentes e o termo $\mathbf{d}k$ pode ser assumido como um vetor intervalar de disparo associado à transição t_j , ou seja,

$$S_0 \xrightarrow{t_j} S_k.$$

e,

$$i^d(t_j) = \mathbf{d}k$$

A definição de classes equivalentes para uma rede cíclica evita que, mesmo para uma rede segura, a análise via tempo global leve a um espaço de estados finito.

4.6 Aplicações

Para a rede mostrada na Figura 16, uma parte do correspondente grafo de classes é mostrado na Figura 17.

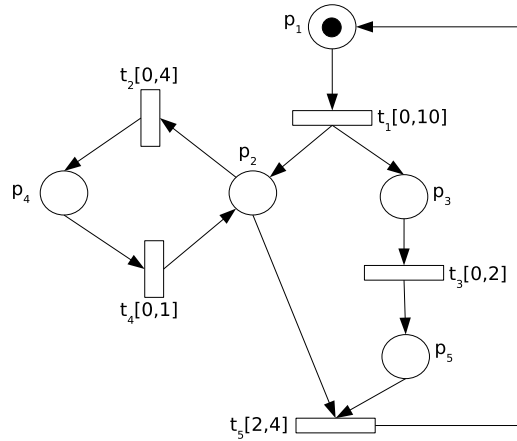


Figura 16: RPT para Aplicação

Não assumindo a equivalência entre classes, a rede mostrada na Figura 16, gera um espaço de classes infinito, mostrado, parcialmente, na Figura 17. Porém, considerando a equivalência entre classes que têm mesma marcação e possuem intervalos que guardam uma relação de inclusão, obtém-se um grafo equivalente finito, capaz de gerar todas as classes da rede. Para a rede mostrada na Figura 17, foram identificadas as seguintes classes equivalentes:

- $S_1 \cong S_4$

$$\begin{cases} M_1 = M_4 \\ \mathbf{I}_1 \subseteq \mathbf{I}_4 \\ \mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

Na classe S_4 , disparando a transição t_2 a rede assume a mesma marcação que S_1 e o intervalo de disparo \mathbf{I}_4 pode ser escrito em função de \mathbf{I}_1 . Na realidade, a subrede formada por $p_2 t_2 p_4 t_4$ forma uma rede cíclica, logo, a Equação (4.9), relaciona \mathbf{I}_4 e \mathbf{I}_1 , como segue,

$$\mathbf{I}_4 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{d}k_1 = \begin{pmatrix} [0, 14] \\ [0, 12] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 0] \end{pmatrix}}_{\mathbf{i}^d(t_4)} k_1$$

sendo $k_1 = 0, 1, 2, \dots$

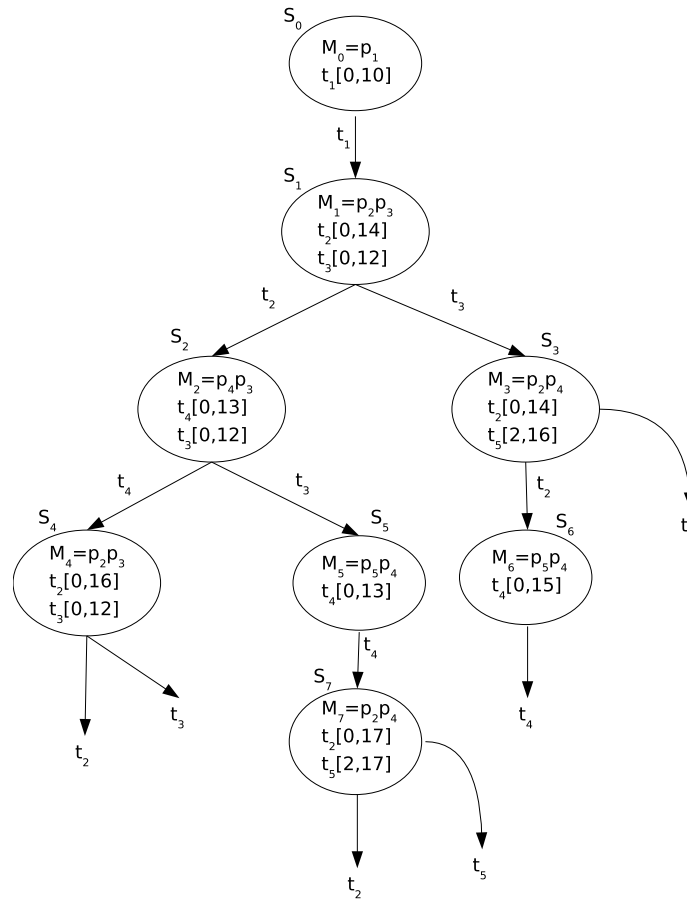


Figura 17: Grafo de classes para a rede da Fig. 16

A classe S_4 pode ser agrupada a S_1 e a transição t_4 , que alcança S_4 , a partir da classe S_2 , terá como intervalo de disparo o vetor intervalar $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 0] \end{pmatrix}$

- $S_3 \cong S_7$.

$$\begin{cases} M_3 = M_7 \\ \mathbf{I}_3 \subseteq \mathbf{I}_7 \end{cases}$$

A classe S_7 pode ser gerada a partir de S_3 pela seguinte relação:

$$\mathbf{I}_7 = \mathbf{I}_3 + \mathbf{d}k_2 = \begin{pmatrix} [0, 14] \\ [2, 16] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [0, 3] \\ [0, 1] \end{pmatrix} k_2$$

sendo $k_2 = 0, 1, 2, \dots$

Assim, o disparo de t_4 , para levar a rede de S_5 para a classe S_7 (agora S_3), é igual ao valor \mathbf{d} , ou seja,

$$\mathbf{i}_5^d(t_4) = \begin{pmatrix} [0, 3] \\ [0, 1] \end{pmatrix}$$

- $S_5 \cong S_6$

De maneira semelhante, as classes S_5 e S_6 têm seus intervalos relacionados, como segue:

$$\mathbf{I}_6 = \mathbf{I}_5 + \mathbf{d}k_1 = [0, 13] + [0, 2]k_1$$

O intervalo de disparo de t_2 , para levar S_3 à classe S_6 (agora S_3), assume o valor de \mathbf{d} , ou seja,

$$\mathbf{i}_5^d(t_4) = \begin{pmatrix} [0, 3] \\ [0, 1] \end{pmatrix}$$

- As classes S_7 e S_3 têm duas alternativas para alcançar a classe S_0 . Essas duas alternativas são fundidas, porém, preservando as restrições de tempo de cada uma, conforme mostrado na Figura 18.

Assim, o grafo de classes que teria dimensão ilimitada, devido à presença de ciclos internos, passa a uma estrutura limitada e capaz de gerar o completo espaço de estados da rede, como mostrado na Figura 18². Por exemplo, analisando a seqüência $\sigma_1 = t_1t_2t_4t_3t_5$ têm-se as seguintes classes :

$$1. S_0 = \begin{cases} M_0 = p_1 \\ \mathbf{I}_0(t_1) = [0, 10] \end{cases}$$

Só há uma transição habilitada e seu disparo ocorrerá no intervalo $\mathbf{i}^d = [0, 10]$

$$2. S_1 = \begin{cases} M_1 = p_2, p_3 \\ \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}(t_2) \\ \mathbf{I}_1(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 14] \\ [0, 12] \end{pmatrix} \end{cases}$$

Nessa classe há duas transições habilitadas e ambas podem disparar. O intervalo de disparo de cada uma é $\mathbf{i}^d = [0, 12]$. Disparando t_2 , tem-se,

²As mudanças de classe onde não aparecem os intervalos de disparos das transições obedecem à regra geral de transição de classe 4.2

$$3. S_2 = \begin{cases} M_2 = p_3, p_4 \\ \mathbf{I}_2(t_3) = [0, 12] \\ \mathbf{I}(t_4) = [0, 13] \end{cases}$$

Disparando t_4 , seu intervalo de disparo será $\mathbf{i}^d = [0, 12]$ e carrega a informação $\begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 0] \end{pmatrix} k_1$ a ser acrescida à classe S_1 , de modo a formar o estado S_1^1 , como segue,

$$4. S_1^1 = \begin{cases} M_1 = p_2, p_3 \\ \mathbf{I}_1^1 = \mathbf{I}_1 + \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 16] \\ [0, 12] \end{pmatrix} \end{cases}$$

O disparo de t_3 ocorrerá no intervalo $\mathbf{i}^d = [0, 12]$ e carrega a informação $\begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 0] \end{pmatrix} k_1$ a ser acrescida ao estado S_3 . Assim,

$$5. S_3^1 = \begin{cases} M_3 = p_2, p_4 \\ \mathbf{I}_3^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}(t_2) \\ \mathbf{I}(t_5) \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3 + \begin{pmatrix} [0, 2] \\ [0, 0] \end{pmatrix} k_1 = \begin{pmatrix} [0, 16] \\ [2, 16] \end{pmatrix} \end{cases}$$

A transição t_5 , portanto, irá disparar no intervalo de tempo $[2, 16]$, para $k_1 = 1$ contado a partir do início da execução da rede.

Domínio Relativo

Na Figura 19 é mostrado o grafo de classes da rede mostrada na Fig. 16. Neste grafo, os domínios de disparo são tempos relativos cujos valores possibilitam o cálculo direto do tempo global da rede.

Analisando a seqüência $\sigma_1 = t_1 t_2 t_4 t_3 t_5$ no grafo da Figura 19 obtêm-se os seguintes tempos relativos em cada classe,

$$1. S_0 = \begin{cases} \mathbf{I}_0(t_1) = [0, 10] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_1) = [0, 10] \end{cases}$$

O tempo global para o disparo de t_1 é $\mathbf{i}^d(t_1) = [0, 10]$.

$$2. S_1 = \begin{cases} \mathbf{I}_1(t_2) = [0, 4] \\ \mathbf{I}_1(t_3) = [0, 2] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_2) = \mathbf{i}^{dr}(t_3) = [0, 2] \end{cases}$$

Disparando t_2 , tem-se $\mathbf{i}^d(t_2) = \mathbf{i}^d(t_1) + \mathbf{i}^{dr}(t_2) = [0, 10] + [0, 2] = [0, 12]$.

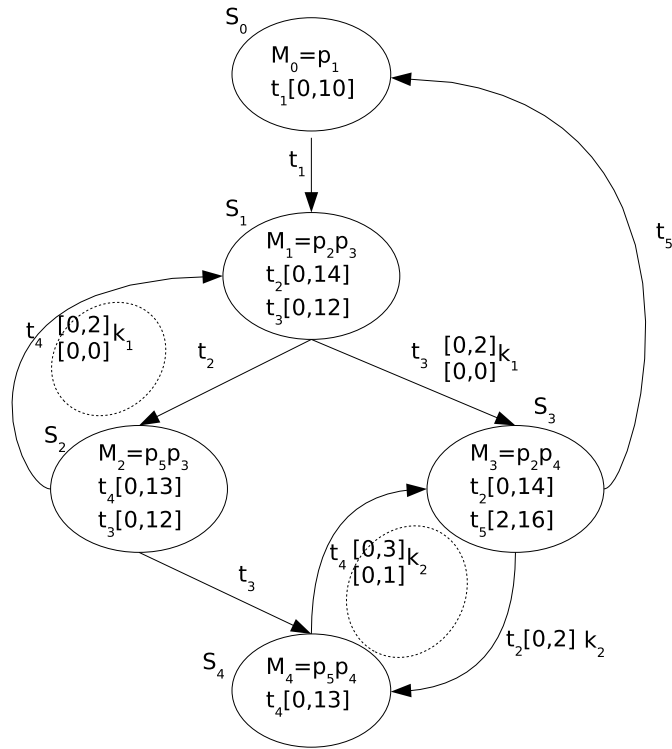


Figura 18: Grafo de classes equivalente para rede da Fig. 16

$$3. S_3 = \begin{cases} \mathbf{I}_3(t_3) = [0, 0] \\ \mathbf{I}_3(t_4) = [0, 1] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_3) = [0, 0] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_4) = [0, 0] \end{cases}$$

Disparando t_4 , seu intervalo de tempo global será igual a $[0, 12]$.

$$4. S_5 = \begin{cases} \mathbf{I}_5(t_2) = [0, 4] \\ \mathbf{I}_5(t_3) = [0, 0] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_2) = [0, 0] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_3) = [0, 0] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_5) = [0, 0] \end{cases}$$

Disparando t_3 , seu intervalo global será $[0, 12]$.

$$5. S_6 = \begin{cases} \mathbf{I}_6(t_2) = [0, 4] \\ \mathbf{I}_5(t_5) = [2, 4] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_2) = [0, 0] \\ \mathbf{i}^{dr}(t_5) = [2, 4] \end{cases}$$

O disparo de t_5 , então, será no intervalo de tempo global igual a $[0, 12] + [2, 4] = [2, 16]$

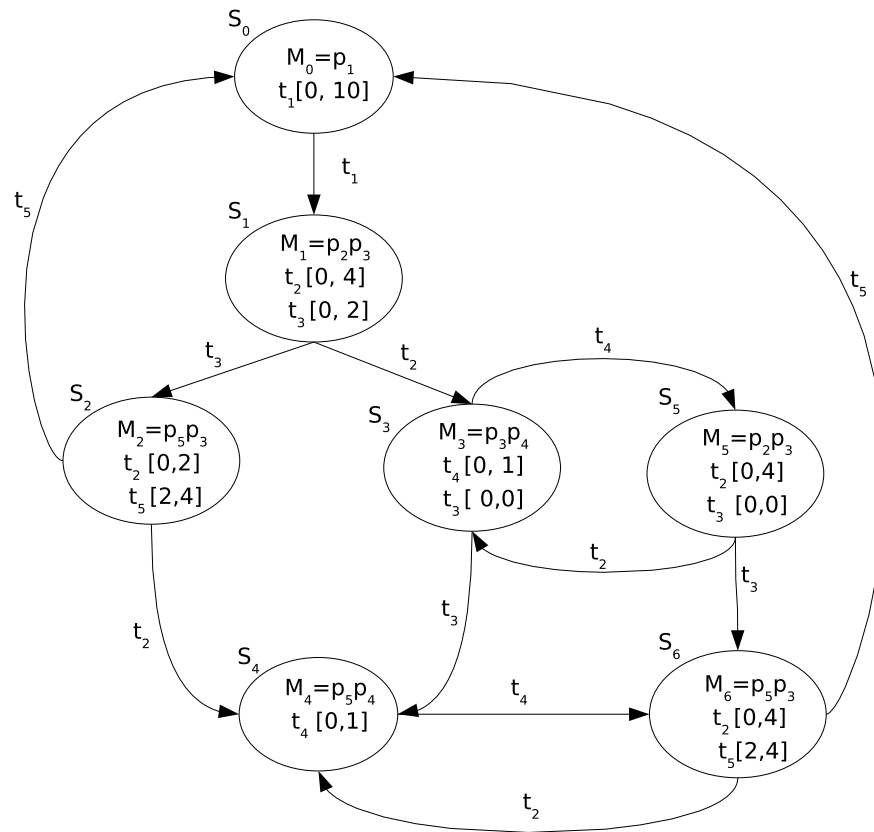


Figura 19: Grafo de classes usando domínio relativo para a rede mostrada na Fig. 16

Além de obter o tempo global para o disparo da seqüência, também são obtidos os tempos relativos de cada transição da seqüência. Neste exemplo, para manter essa seqüência dentro do intervalo $[2, 16]$, só podem variar os tempos de disparo de t_1, t_2 e t_5 cujos intervalos relativos de disparos são $[0, 10]$, $[0, 2]$ e $[2, 4]$, respectivamente.

4.7 Conclusões

Neste capítulo foi apresentado um método enumerativo para análise via alcançabilidade de uma *RPT* e denominado tempo global. Usando o tempo de execução da rede como referência, foi mostrado, entretanto, que para estabelecer a condição de disparabilidade, definida originalmente pela literatura, o tempo global pode levar a resultados falsos. Assim, foi proposto que tal condição fosse verificada usando tanto o tempo global, quanto o relativo. Usando elementos da álgebra intervalar, o método do tempo global possibilita reduzir a complexidade da enumeração das classes, em relação a outros métodos enumerativos. Além disso, o método mostrou-se capaz de tratar domínios dinâmicos usando o tempo relativo à

habilitação de cada transição. Esta informação pode ser utilizada tanto no escalonamento de tarefas, como na validação de seqüências de transições. Por fim, mostrou-se que o método proposto é capaz de superar uma limitação à qual estava sujeito e que diz respeito à enumeração das classes. Através do conceito de equivalência de classes, pode-se enumerar um grafo de classes finito usando o tempo global.

5 Métodos de Redução para Redes de Petri Temporais

Neste capítulo são revisados alguns dos principais métodos de redução do espaço de estados para análise via alcançabilidade das *RPTs*. Essa redução pode ser no espaço de busca ou na redução do modelo. Os métodos que reduzem o espaço de busca são denominados métodos baseados em ordem parcial e, por algum critério de seleção, agem sobre parte do espaço de estados. Os métodos de redução do modelo, por sua vez, reduzem o modelo do sistema eliminando estruturas que apresentam certas regularidades. Dependendo do objetivo, um ou outro método pode ser mais eficiente.

5.1 Análise das *RPTs* via Alcançabilidade

A análise via alcançabilidade é baseada na geração do grafo de alcançabilidade para um modelo formal do sistema. Os vértices do grafo de alcançabilidade apresentam todos os estados alcançáveis, a partir do estado inicial, e as arestas são as transições que levam de um estado a outro. Se o sistema tem um espaço de estado finito, então, ele pode ser gerado automaticamente por meio de um computador [Val94, God96].

Entretanto, muitos sistemas, apesar de terem um espaço de estados finito são intratáveis do ponto de vista do número de estados. Em alguns casos, o tamanho do espaço de estados pode crescer exponencialmente em relação ao tamanho do sistema. Esse problema é conhecido como explosão do número de estados [God96].

Uma maneira de contornar o problema da explosão do número de estados é através da análise parcial do espaço de estados. Para analisar parcialmente o espaço de estados existem uma variedade de métodos que exploram estruturas padrão do sistema. Essas estruturas são causadas por regularidades ou por diferentes maneiras de execução de equivalentes operações do sistema modelado. A exploração de tais estruturas tem levado ao desenvolvimento de

métodos que geram um grafo de alcançabilidade reduzido.

Existem várias maneiras para se agruparem esses métodos, uma delas é classificá-los em dois grandes grupos: os métodos de redução do espaço de estados baseados na semântica de ordem parcial e os métodos de redução do modelo, inspirados nas regras de redução para as redes de Petri não temporizadas. No primeiro grupo estão os algoritmos de análise que verificam determinadas propriedades da rede, sem explorar todo o espaço de estados. Nesse grupo estão os métodos que exploram particularidades dos sistemas, tais como, independência entre transições, conjuntos de transições persistentes e planificação da rede [God96, Val92, WG93, SB97, DBDS94]. No segundo grupo estão os métodos de redução que usam regras que permitem agrupar transições e lugares da rede, mantendo propriedades como, limitação, segurança e vivacidade [SB96, Ber87, JM92, BB02]. Em ambos os grupos, se consegue uma redução considerável no tamanho do espaço de estados, tornando tratável a análise via alcançabilidade.

5.2 Análise de RPTs via Métodos Baseados em Ordem Parcial

A idéia principal desses métodos está na garantia que, do ponto de vista da análise, a expansão de todas as possibilidades de interação entre as ocorrências de um sistema concorrente é desnecessária. Ou ainda, para se verificar determinadas propriedades de uma RP contendo transições concorrentes, a exploração do espaço de estados completo é redundante [God96].

Baseados nessa idéia, os métodos de ordem parcial exploram a possibilidade de limitar o número de interações entre as ocorrências. Dessa forma, evita-se ocorrências não necessárias para verificação, por exemplo, de uma determinada propriedade. Basicamente, o que diferencia um método de ordem parcial de outro é o algoritmo de busca do conjunto de transições necessárias para a descrição reduzida do espaço de estados.

Toda a idéia dos métodos de ordem parcial para análise de alcançabilidade está baseada na definição de transições independentes que, intuitivamente, significa o seguinte: duas ou mais transições são independentes se a ordem de execução das mesmas não é importante, pois o resultado será o mesmo. Essa definição, para o caso não temporizado, é formalizada em [God96] e adaptada como segue.

Definição 5.1 (*Independência de Transições*) *Duas transições t_1 e t_2 , são independen-*

tes se, e somente se, para todos os estados S do espaço de estado:

1. se t_1 está habilitada no estado S e $S \xrightarrow{t_1} S'$, então, t_2 estará habilitada em S se, e somente se, t_2 permanecer habilitada em S' ; e
2. se t_1 e t_2 estão habilitadas em S , então, existe um único estado S' tal que $S \xrightarrow{t_1 t_2} S'$ e $S \xrightarrow{t_2 t_1} S'$

No caso das RPTs, ou qualquer outra semântica com restrição temporal, deve haver uma notação do tempo incorporada à Definição 5.1.

Na seqüência, serão apresentados duas das técnicas para redução do espaço de estados baseadas em ordem parcial.

5.2.1 Conjuntos Persistentes

Intuitivamente, um conjunto de transições persistentes pode ser entendido pela seguinte situação: dado um estado S de uma RP ordinária, um subconjunto T_S das transições habilitadas em S é chamado *persistente*¹ se todas as outras transições habilitadas e que não pertencem a T_S são disparáveis em S . Assim, qualquer disparo de transições não pertencentes ao subconjunto T_S , independe das transições de T_S . Ou melhor, estados alcançáveis a partir de S , devido ao disparo de transições fora de T_S , não interagem com, e nem afetam o conjunto T_S .

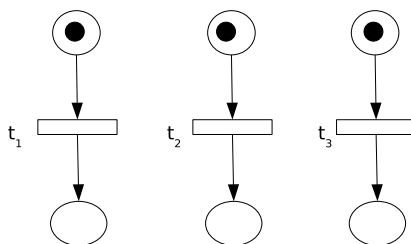


Figura 20: Exemplo de uma RP com transições independentes

Consideremos, por exemplo, a RP mostrada na Figura 20. Essa rede tem seis possibilidades de seqüências de disparos $(t_1 t_2 t_3, \dots, t_3 t_2 t_1)$. Todas essas seqüências levam ao mesmo estado. Segundo os métodos de análise baseados em ordem parcial, para propósitos de análise de bloqueio, por exemplo, é suficiente explorar uma, e somente uma, das seqüências possíveis.

¹o conceito de conjuntos persistentes, também chamado *stubborn sets*, é muito mais abrangente e serve para qualquer semântica que trata de sistemas concorrentes

Introduzido por Antti Valmari [Val92], o objetivo do método baseado em conjuntos persistentes é a geração automática de um espaço de estados reduzido, explorando a independência entre transições. Essa redução é obtida a partir da partição, a cada estado alcançável, do conjunto de transições habilitadas em dois subconjuntos independentes, o conjunto de transições persistentes e o conjunto das transições não persistentes. Por fim, apenas as transições habilitadas pertencentes ao conjunto persistente são consideradas e apenas uma parte do grafo de estados é incluída explicitamente no grafo de alcançabilidade resultante.

Formalmente, as condições para que, em um determinado estado S , um subconjunto de transições sejam persistentes são dadas em [God96, Val92, Var93]. Informalmente, um conjunto de transições persistentes T_S é tal que,

- contém pelo menos uma transição habilitada;
- transições habilitadas, contidas em T_S , não podem ser desabilitadas pelo disparo de transições fora de T_S ;
- transições desabilitadas, contidas em T_S não devem se tornar habilitadas devido ao disparo de transições fora de T_S .

Em geral, um estado de uma dada rede pode ser associado a múltiplos conjuntos persistentes. Por exemplo, para a rede mostrada na Figura 20, cada um dos conjuntos $\{t_1\}$, $\{t_2\}$ e $\{t_3\}$, satisfaz às condições acima. Portanto, um deles pode ser selecionado de forma não determinística para ser o conjunto T_S . Na Figura 21, por exemplo, é apresentado o espaço de estado completo (a) e o reduzido (b) tendo sido escolhido um desses subconjuntos.

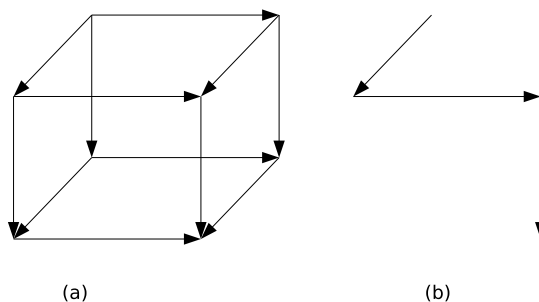


Figura 21: Completo (a) e reduzido (b) espaço de estado da *RP* mostrada na Figura 20

Em [Val92] é mostrado que o método de busca baseado nos conjuntos persistentes é sensível à escolha não determinística em cada estado e recomenda uma heurística para seleção

do conjunto T_s com menor número de transições habilitadas. Porém, [God96] mostra que a busca escolhendo um caminho menor não necessariamente leva ao menor número de estados.

Uma das vantagens de se usarem os métodos de redução, baseados nos conjuntos persistentes, é quando o sistema contém um elevado grau de paralelismo. Em *RP*, por exemplo, o método pode resultar numa redução drástica no número de estados.

Um ponto fraco desses métodos é que os conjuntos persistentes são sensíveis à presença de lugares redundantes na rede. A presença de lugares redundantes tornam transições independentes em dependentes. Esse fato, apesar de não afetar o espaço de estados completo, afeta drasticamente o tamanho do espaço de estados obtido pelos conjuntos persistentes [Val92].

Vários algoritmos para verificação de sistemas concorrentes em tempo real, especialmente para *RPT*, surgiram paralelamente. Um dos trabalhos pioneiros foi o de Tomohiro Yoneda [YS97]. Neste trabalho é apresentado um algoritmo de verificação para uma *RPT* segura e usando lógica temporal para extrair propriedades inerentes ao sistema modelado.

Em [Lil99], a condição de habilitação foi trocada pela condição de disparabilidade e usando uma representação do espaço de estado similar à introduzida por McMillan [McM92], conhecida como *unfolding*. O autor consegue extrair o conjunto de transições persistentes dentre as transições disparáveis da rede.

Em [SB97], o método de redução do tamanho do espaço de estados durante a análise de alcançabilidade também é estendido para análise de modelos temporizados. Neste trabalho, os autores geram um algoritmo para análise automática de *software* a tempo real usando uma *RPT* particular.

5.2.2 *Unfolding* ou Desdobramento

A técnica do *unfolding*, cujo termo que mais se aproxima em português é Desdobramento, foi originalmente apresentado por K. L. McMillan [McM92] e se constitui em uma das mais bem sucedidas técnicas para detecção de bloqueio. Nessa técnica, uma *RP* segura é transformada em uma rede acíclica por um processo chamado *unfolding*. O *unfolding* gera uma rede acíclica finita, tendo exatamente as mesmas marcações alcançáveis que a rede original. A análise estrutural na rede desdobrada é bem mais fácil do que da rede original e como a semântica usada é baseada na relação de ordem parcial, o problema de explosão do número de estados pode ser evitado por meio de uma busca seletiva. Uma vez gerado o *unfolding*, aplicam-se diferentes métodos de análise, tais como, algoritmo *branch-and-bound*

em [McM92, Lil99], transformação do *unfolding* em subconjuntos de *unfoldings* livres de bloqueio [TKK98, LK06], entre outros.

Alguns elementos básicos para o entendimento da técnica *unfolding* [McM92, ES01], são sumarizados a seguir.

Definição 5.2 (Relação de Ordem) [TKK98] - Seja $N = \langle P, T, F \rangle$, uma RP acíclica e $x_1, x_2 \in P \cup T$

- x_1 precede x_2 ($x_1 \preceq x_2$) se (x_1, x_2) pertence ao fecho reflexivo-transitivo de F , ou seja, existe um caminho entre x_1 e x_2 . A relação de precedência é reflexiva, assim, $\forall x : x \preceq x$.
- x_1 e x_2 são conflitantes ($x_1 \vee x_2$) se existe $t_1, t_2 \in T$, distintos, tal que $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 \neq \emptyset$, $t_1 \preceq x_1$ e $t_2 \preceq x_2$.
- x_1 e x_2 são concorrentes ($x_1 \parallel x_2$) se não são precedentes nem conflitantes.

As RP acíclicas são fáceis de serem analisadas, pois suas propriedades são completamente especificadas por relações de ordem [RK04]. Dessa forma, para análise e/ou manipulação de uma RP geral, um primeiro passo é transformá-la numa descrição acíclica equivalente. Essa equivalência entre as redes é baseada na seguinte definição.

Definição 5.3 (Traço Equivalente) [KKTT98] - As redes N_1 e N_2 com conjuntos de transições T_1 e T_2 , respectivamente, são traço equivalentes em relação a uma parte r de $\{T_1\} \times \{T_2\}$ se, e somente se para qualquer seqüência $s = t_1, \dots, t_k, \dots$, viável em N_1 , existe uma seqüência $q = \tau_1, \dots, \tau_k, \dots$, viável em N_2 e vice-versa.

Definição 5.4 (Rede de Ocorrência) [TKK98] - É uma rede acíclica $N = \langle P, T, F \rangle$, na qual todo lugar $p \in P$ tem, no máximo, uma transição de entrada, ou seja, $|\bullet p| \leq 1$.

Existe na literatura uma variedade de algoritmos para a obtenção da rede de ocorrência [McM92, TKK98, LK06, ES01]. Por meio de um exemplo básico, os conceitos necessários para determinar uma rede de ocorrência, serão apresentados, como segue.

Exemplo 5.1 Na Figura 22a é mostrado uma RP cíclica com marcação inicial $M_0 = p_1, p_2$.

- Segundo a Definição 5.2, têm-se as seguintes relações de ordem para a RP na Fig. 22a:

$$t_a \parallel t_b, t_b \preceq t_c \preceq t_d, p_1 \parallel p_2, p_1 \parallel p_4, t_a \vee t_e$$

- Cada transição t_i (lugar p_i), na rede original, tem um conjunto de transições $t'_i, t''_i, t'''_i, \dots$, (lugares $p'_i, p''_i, p'''_i, \dots$) correspondentes, na rede de ocorrência. São as chamadas instâncias de t_i (p_i). A rede original é traço equivalente da sua rede de ocorrência, ou seja, qualquer execução viável na rede de ocorrência, é também viável na rede original.

A Figura 22b mostra a rede de ocorrência correspondente para a RP da Figura 22a.

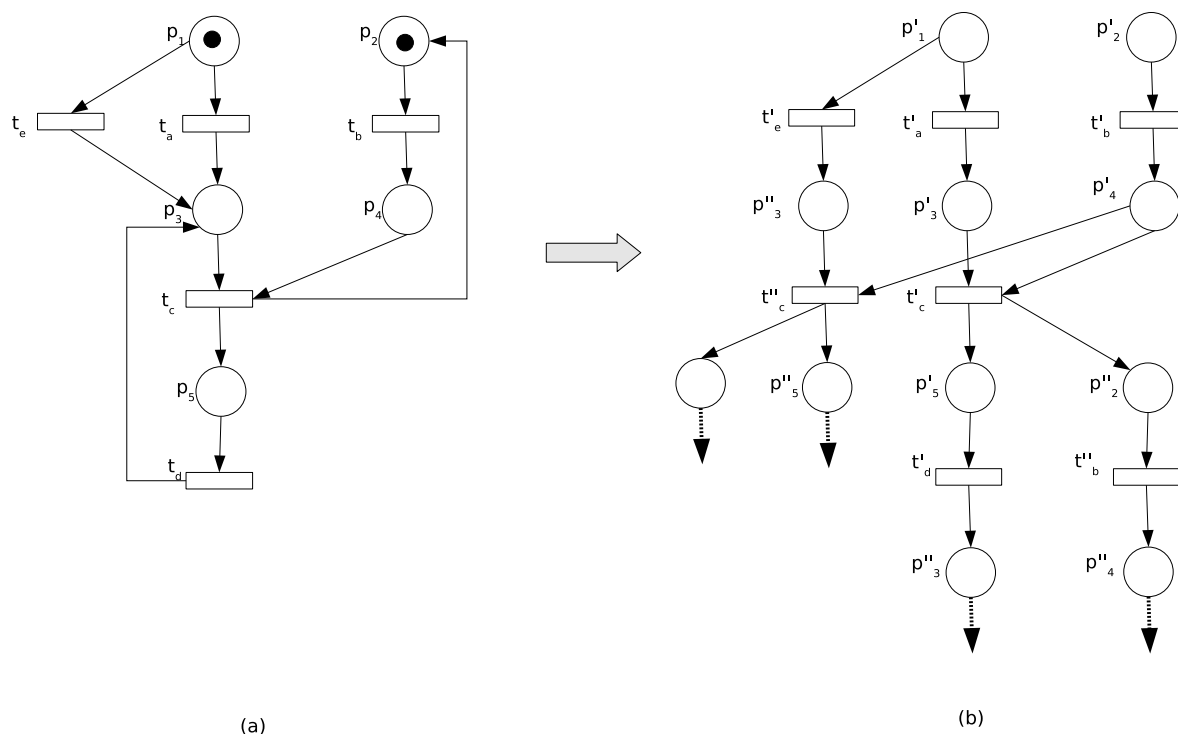


Figura 22: RP cíclica (a) e a rede de ocorrência (b)

Embora a rede de ocorrência possa ser infinita é sempre possível truncá-la numa subrede denominada "prefixo finito completo" a qual possui todas as informações a respeito da rede original. Esse prefixo finito completo é o chamado *unfolding* ou rede desdobrada. Para truncar a rede de ocorrência é necessário a noção de configuração local e marcação básica [ES01]

Definição 5.5 (Configuração) [TKK98] - um conjunto de transições $C' \subseteq T'$ é uma configuração na rede de ocorrência se:

- para cada $t' \in C'$, a configuração C' contém t' e todos os seus precedentes;
- C' não contém transições mutuamente conflitantes;

- A configuração mínima que contém t' e todos os seus precedentes, é chamado configuração local da transição t' e é denotado por $\{\preceq t'\}$.

Cada configuração C' corresponde a uma marcação que é alcançável a partir de M_0 após todas as transições de C' terem sido disparadas. Essa marcação é chamada marcação final e é denotada por $M_F(C')$. Uma marcação final de uma configuração local de t' é chamada de marcação básica de t' e é denotada por $M_B(t')$.

As redes de ocorrência são truncadas por uma transição t'_i chamada transição de corte (*cut-off*).

Definição 5.6 (*Transição de Corte*) - uma transição t'_i de uma rede de ocorrência é uma transição de corte se existe uma outra transição t'_j tal que:

- $M_B(t'_i) = M_B(t'_j)$ e $\#\{\preceq t'_i\} > \#\{\preceq t'_j\}$, sendo $\#$ a cardinalidade.

A rede resultante da rede de ocorrência, removendo todos os lugares e transições que sucedem as transições de corte, é o *unfolding*.

Na rede de ocorrência da *RP* da Figura 22b, a configuração local $\{\preceq c'\}$ é igual a $\{t'_a, t'_b, t'_c\}$. A marcação básica $M_B(c') = \{p'_5, p''_2\}$.

As redes de ocorrência são truncadas pela transição de corte segundo diferentes critérios e classes de *RP*. Para que uma transição t'_i seja de corte é necessário que a marcação básica de t'_i repita a marcação de alguma outra transição t'_j , já gerada pela rede de ocorrência. Na Figura 23 é mostrado o *unfolding* para rede cíclica da Figura 22a.

Existem vários trabalhos usando *unfolding* na análise de *RP* via relação de ordem. Além da facilidade de análise obtida ao transformar uma *RP* cíclica em uma equivalente acíclica, os métodos de relação de ordem usando *unfolding*, permitem verificar propriedades das *RPs*, tais como, segurança, limitação, persistência, entre outras. Na seqüência, são apresentados alguns teoremas e proposições resultantes da análise de *RP* usando *unfolding*.

Teorema 5.2 ([McM92]) *Seja N' o unfolding de N . A marcação M é alcançável de N se, e somente se, é a marcação final M_F de alguma C' finita de N' .*

Proposição 5.3 ([KKT98]) *Uma *RP* é segura, se e somente se, cada lugar p não tem instâncias concorrentes no seu unfolding*

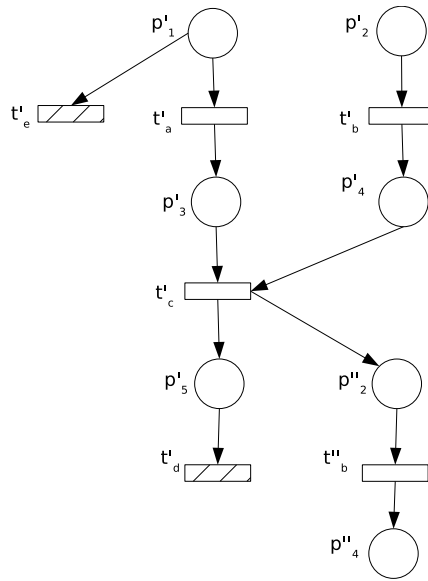


Figura 23: *Unfolding* da rede de ocorrência da Figura 22(b)

Proposição 5.4 ([KKT98]) *Seja N' o unfolding de N . N é ilimitada se, e somente se, existe uma transição $t \in T$ que tem duas instâncias em N' , t' e t'' , tais que $t' \preceq t''$ e $M_B(t') < M_B(t'')$.*

Adaptando o conceito de transições independentes de [God96], [Lil99] é desenvolvido alguns algoritmos para o cálculo do conjunto de transições persistentes, usando *unfolding* como estrutura causal de uma *RPT*. Em [LK06], é analisado um escalonamento para análise de parâmetros de desempenho em um sistema de manufatura usando o processo de *unfolding* de uma *RPT*.

5.3 Métodos de Redução para Redes de Petri Temporais

Os métodos de redução para as *RPT* são baseados nas técnicas de redução estabelecidas para redes não temporizadas. Por meio de agrupamento de transições e lugares, esses métodos visam reduzir o modelo, mantendo inalteradas as propriedades da rede original. Em geral, partem do seguinte princípio, qualquer redução no tamanho da *RP*, resulta em considerável redução no tamanho do espaço de estados correspondente [Ber87, SB96, JM92].

Vários trabalhos, investigando técnicas de redução para *RP*, são encontrados na literatura. Em particular, [Ber87] desenvolve uma série de regras para redução de uma *RP*. Em

[DE95]. São desenvolvidas regras de redução para uma subclasse de RP chamada, rede de livre escolha. Quanto às RPT , o principal e primeiro método de redução do espaço de estados é o grafo de classes de estados. Apesar das críticas quanto à sua precisão na verificação quantitativa de propriedades temporais, muitas das alternativas que surgiram, tanto para redução do espaço de estados, quanto para verificação e validação de execuções com restrições de tempo, são baseadas nas classes de estados. Dentre as alternativas à classe de estados tem-se, por exemplo, o algoritmo baseado em zona (conjunto de restrições e *clocks*), que possibilita transformar o espaço de classes em um automato temporizado, ao qual pode-se aplicar métodos de redução. Outra alternativa está no trabalho apresentado em [BV03] que propõe uma classe compacta de estado atômico.

Para as RPT s são poucos os trabalhos baseados em técnicas de redução do modelo. Dois importantes trabalhos nessa linha, são apresentados em [SB96, JM92]. Nas duas próximas seções é feita uma introdução a esses trabalhos.

5.3.1 Redução de RPT s Pontuais

Em [SB96], um conjunto de regras para redução de redes ordinárias, são entendidas para as RPT s e, usando a noção de equivalência entre redes, os autores mostram que as restrições temporais são preservadas. Usado para análise de programas para tempo real codificado em ADA, o modelo adota um caso particular das RPT s, a chamada rede STP (*Simple Time Petri Net*). Nesta rede, os intervalos associados às transições são trocados por pontos. Esta simplificação é justificada pelos autores para gerar o espaço de estados mais rapidamente e para facilitar a análise de programas para tempo real.

Nas Figuras (24) e (25), é mostrada a fusão de transições em série e em paralelo. As regras para tais fusões serão apresentadas conjuntamente com as regras para redução de RPT s, pois uma STPN é uma RPT particular.

Várias outras regras são apresentadas em [SB96]. Todas elas, porém, são propostas para serem usadas em redes STP. Além disso, as regras foram criadas para análise de programas para tempo real. Portanto, não há qualquer garantia que sejam válidas ou adequadas para outros tipos de sistemas.

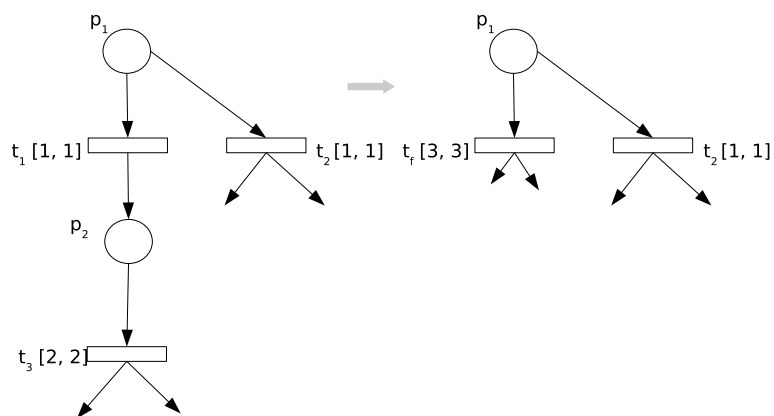


Figura 24: Fusão de transições em série para redes STP

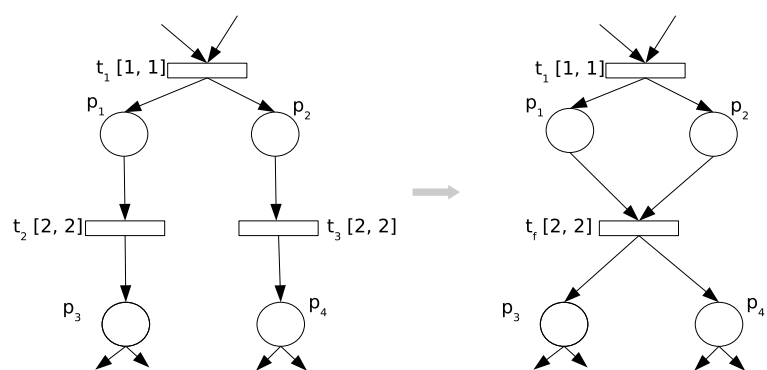


Figura 25: Fusão de transições paralelas para redes STP

5.3.2 Redução de *RPT* com *Atraso*

Em [JM92] é apresentada uma derivação das *RPTs* chamada *RPT* com atraso e que será tratada por DTPN (*Delay Time Petri Nets*). A DTPN é uma extensão das *RPs* com tempo tendo associado a cada arco um intervalo estático de atraso. Desta forma, uma marca só será utilizada para habilitar uma transição de saída, após o intervalo de tempo estático associado ao arco que liga o lugar à transição. A habilitação de uma transição ocorre, portanto, após a liberação, pelo arco de entrada da transição, da marca que ela necessita para o disparo.

Na Figura 26 mostra-se um exemplo simples de uma DTPN. Os lugares p_1 e p_2 estão inicialmente marcados. A marca no lugar p_1 pode ser usada para habilitar a transição t no intervalo $[1, 2]$. Enquanto a marca em p_2 pode ser usada por t no intervalo $[0, 3]$. A transição t começa a ser habilitada quando ambas as marcas puderem ser usadas para habilitá-la. O início da habilitação de t é, então 1, pois a marca 1 só poderá ser usada a partir desse instante, já que a marca 2 está disponível desde o instante 0. O máximo de tempo para que t permaneça habilitada é 3, que é o máximo tempo de liberação do arco $p_2 - t$

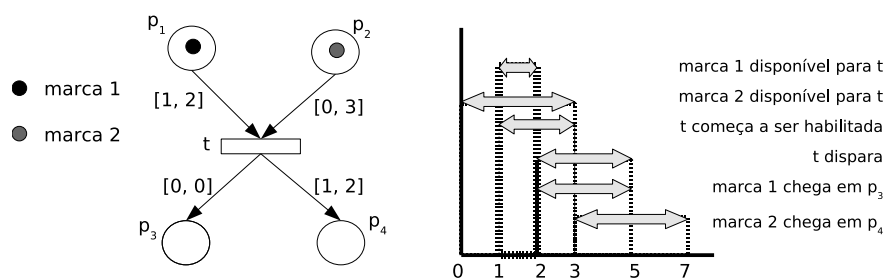


Figura 26: Um exemplo de uma DTPN

Segundo os autores, as redes de Petri temporais e as temporizadas, passam a ser subclasses das DTPNs, pois podem ser representadas a partir das DTPNs. Por exemplo, uma *RPT* é uma DTPN com todos os intervalos estáticos de atraso iguais a $[0, 0]$. Na transformação de uma *RPT* para um DTPN, já se consegue uma primeira redução na rede, e a partir de um conjunto de regras para fusão de transições e lugares obtém-se uma rede reduzida.

6 Métodos de Redução via Aproximação Intervalar

Este capítulo apresenta uma contribuição para o problema de redução de uma *RPT*. Na primeira parte do capítulo, Seção 6.1, é apresentado um método analítico que, através de um conjunto de regras, possibilita o agrupamento de transições e lugares de uma *RPT*. O objetivo desse agrupamento é provocar uma redução no modelo, sem comprometer as informações temporais da rede. Na segunda parte do capítulo, Seção 6.2, é apresentado um algoritmo que, usando elementos dos métodos de ordem parcial, produz uma rede reduzida. A rede reduzida pode ser obtida a partir da rede original ou de parte dela.

6.1 Método de Redução para *RPT* Baseado em Regras

Baseado nas regras de redução para as *RP* não temporizadas e respeitando as restrições de tempo de cada transição da rede, este método pode produzir uma redução drástica no espaço de estados da rede original, principalmente, quando há um elevado grau de paralelismo na estrutura.

Retornando à rede mostrada na Figura 20, acrescenta-se um intervalo de tempo de sensibilização a cada transição, de modo que todas sejam disparáveis no estado inicial. O grafo de alcançabilidade da rede original é mostrado na Figura 27a. Para a rede reduzida, o grafo é mostrado na Figura 27b.

Assim, a partir do estado S_0 , para alcançar o estado S_F , em vez de optar por uma das possibilidades, agrupam-se as transições cujos disparos são independentes que juntas levam ao estado final de interesse, S_F . Desta forma, preserva-se todas possibilidades de execução da rede original.

A rede reduzida deve ser capaz de representar a rede original. Porém, ocultando estados intermediários desnecessários à análise de alcançabilidade.

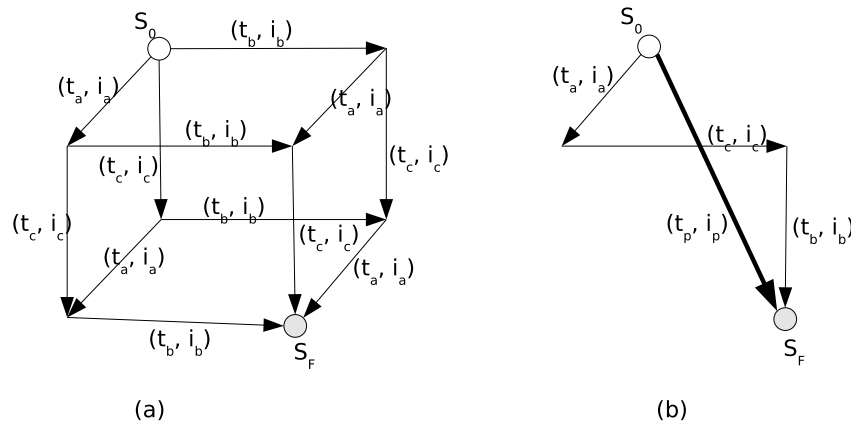


Figura 27: Espaço de estado completo (a) e reduzido (b), para a rede da Figura 20

6.1.1 Equivalência de Redes

O objetivo de se reduzir uma rede de Petri, temporizada ou não, é obter uma rede que, sob determinado ponto de vista, seja equivalente à rede original.

No caso das redes temporais, a rede reduzida deve preservar não apenas as propriedades lógicas como, bloqueio, segurança, limitação, entre outras, mas também garantir que as restrições temporais impostas à rede original sejam respeitadas.

Definição 6.1 (RedesEquivalentes) - Seja N uma rede de Petri, temporizada ou não, a qual é transformada em uma rede N' através de agrupamentos de lugares e transições. Seja também U o conjunto de lugares e transições que foram agrupados. A rede N é dita equivalente à rede N' se satisfaz às seguintes condições,

- $L(N) \setminus U = L(N') \setminus U$
- Se a rede original é segura, então, a rede reduzida também o é.

sendo $L(N)$ o conjunto de todas as seqüências legais de transições disparadas a partir de M_0 .

A primeira proposição assegura que as redes, original e reduzida, geram a mesma seqüência, quando retirados da rede os elementos envolvidos no agrupamento. A segunda proposição assegura a primeira condição, como será visto.

6.1.2 Fusão de Transições Concorrentes

Seja um grupo de transições $T_p \subseteq T$ em uma RPT. Se todas as transições $t_i \in T_p$ têm lugares de entrada distintos e todos esses lugares têm uma mesma transição precedente e não pertencente a T_p , então o conjunto T_p pode ser representado por uma única transição, como mostrado na Figura 28.

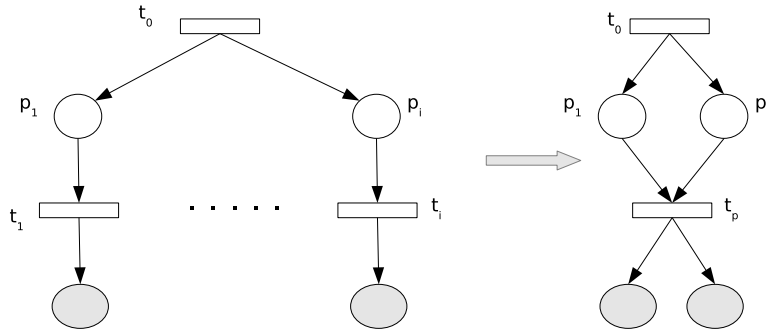


Figura 28: Fusão de transições em paralelo

Formalmente, tem-se que:

Um conjunto de transições T_p , é substituível por uma única transição t_p se, e somente se, existir uma transição $t_0 \notin T_p$ e para cada $t_i \in T_p$, há um lugar distinto p_i , tal que:

1. Cada lugar p_i tem a mesma transição de entrada, ou seja, $\bullet p_i = \{t_0\}$.
2. Todo lugar p_i tem uma só transição de saída, $p_i^\bullet = \{t_i\}$.
3. Para toda transição $t_i \in T_p$, tem-se $\bullet t_i = \{p_i\}$.
4. Todos os lugares p_i têm a mesma marcação inicial.
5. Qualquer par de transições $t_i, t_j \in T_p$, $t_i \neq t_j$, deve ter: $\mathfrak{r}^s(t_i) \cap \mathfrak{r}^s(t_j) \neq \emptyset$

Aproximação Intervalar:

O intervalo estático da transição t_p será a união intervalar dos intervalos estáticos das transições t_i ,

$$\mathbf{i}(t_p) = \mathbf{i}(t_1) \sqcup \dots \sqcup \mathbf{i}(t_i) = [\min\{\delta_i\}, \max\{\Delta_i\}]. \quad (6.1)$$

Sendo, $\mathbf{i}(t_i) = [\delta_i, \Delta_i]$ o intervalo estático da transição t_i .

As quatro primeiras condições são essencialmente as mesmas para as redes de Petri sem tempo. Em [SB96] tais condições são aplicadas a uma classe particular de RPT, na

qual, as transições em paralelo devem ter intervalos estáticos pontuais e iguais. A quinta condição garante que, ao serem habilitadas, todas as transições $t_i \in T_p$ serão disparáveis. Em uma RP marcada, a transição t_0 é a transição habilitada pela marcação inicial e M_F é a marcação objetivo, ou marcação final. Portanto, o objetivo da fusão das transições t_i é ter uma estrutura seqüencial que facilite o cálculo do intervalo de tempo necessário para, a partir da marcação inicial, alcançar uma marcação desejada.

Algumas estruturas, por serem comuns, podem ter um equivalente seqüencial definido como em [PZH97]. Algumas dessas estruturas são apresentadas, como segue:

- **Ramo Sincronizante** - caso as quatro primeiras condições sejam atendidas, e existindo uma transição $t_j \notin T_p$, tal que:

$$(i) \ t_i^\bullet = \{p_i\} \text{ e } p_i^\bullet = \{t_j\};$$

$$(ii) \ \bullet t_j = \{p_i\}$$

$$(iii) \ M(\bullet t_i) = M(t_i^\bullet) = 0.$$

Aproximação Intervalar

O intervalo da transição t_p é calculado, como segue:

$$\mathbf{i}(t_p) = [\max\{\delta_i\}, \max\{\Delta_i\}]. \quad (6.2)$$

Para a transição t_j tornar-se habilitada é necessário que todos os seus lugares de entrada, p_i , estejam marcados. Para tanto, as transições t_i devem ter sido disparadas. Estando em paralelo, a última a atingir o limite mínimo de sensibilização será a que tiver maior limite inferior do intervalo estático. De maneira semelhante, a transição de maior limite superior do intervalo estático determinará o máximo tempo de sensibilização de t_j .

Na Figura 29, é mostrado um exemplo de um ramo sincronizante. Nesta rede, a habilitação da transição t_3 só poderá ocorrer após todos os seus lugares de entrada estarem marcados e isto só acontecerá quando houver o disparo da transição com maior limite estático inferior, que neste caso é a transição t_2 , e no máximo quando houver o disparo da transição com maior limite estático superior, que neste exemplo também é t_2 . Esses limites, portanto, determinam o intervalo da transição equivalente, como definido pela Equação (6.2).

A Figura 30 mostra o grafo de alcançabilidade da marcação inicial $M_0 = p_0$ na rede original e na rede reduzida. Na rede original, o conjunto de transições é dado por $T = t_1, t_2, t_3$ e o conjunto das transições agrupadas é $U = t_1, t_2, t_p$. Assim,

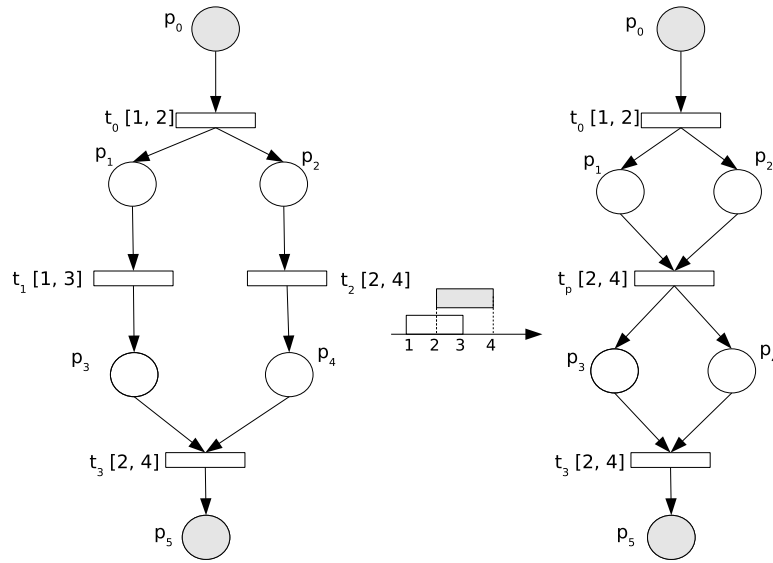


Figura 29: Exemplo de sincronização

$$L(N) = t_0, t_0t_1, t_0t_1t_2, t_0t_1t_2t_3, t_0t_2t_1, t_0t_2t_1t_3$$

$$L(N') = t_0, t_0t_p, t_0t_p t_3$$

$$L(N) \setminus U = t_0, t_0t_3t_p = L(N') \setminus U$$

o conjunto de estados alcançados a partir de M_0 para as redes, original e reduzida, sem as transições envolvidas no agrupamento, são iguais, logo, a rede reduzida e a original, são equivalentes.

- **Exclusão Mútua (*Mutex*)**- É uma estrutura para assegurar que apenas uma execução por vez seja capaz de usar um recurso compartilhado. No contexto das *RPs* pode ser definido de várias formas. Por exemplo, quaisquer duas transições estão em exclusão mútua se elas formam um invariante de lugar e a marcação inicial tal que a soma das marcas no lugar do invariante é igual a 1.

Na Figura 31a é mostrado um *mutex* em uma *RPT*. Neste caso, apesar das transições t_1 e t_2 estarem conflitantes pois, $\bullet t_1 \cap \bullet t_2 = p_5$, o disparo de t_1 , por exemplo, não retira a marca do lugar p_2 . Portanto, sendo uma rede segura, a estrutura *mutex* pode ser transformada numa estrutura seqüencial, como mostrado na Figura 31b.

- **Ramos Paralelos Independentes** - a partir da marcação inicial, são derivados caminhos independentes π_i , compostos de lugares e transições, conforme mostrado na Figura 32, satisfazendo as seguintes condições:

– cada caminho $\pi_j = t_0, p_{1j}, t_{1j}, \dots, p_{mj}$, ou seja, inicia na transição t_0 e termina em

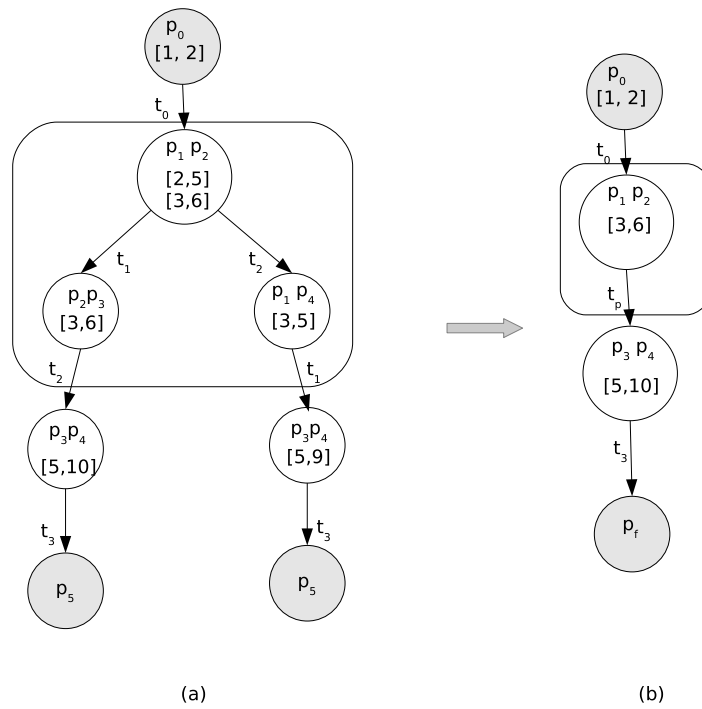


Figura 30: Grafo de alcançabilidade das redes original e reduzida, mostradas na Figura 29

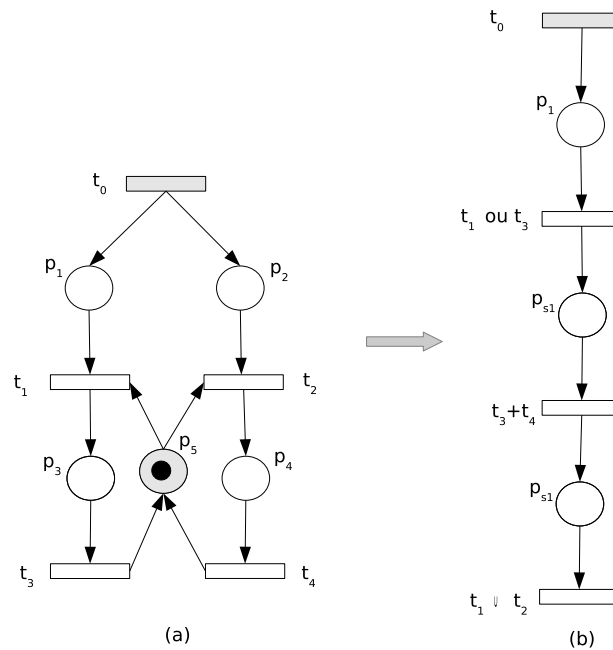


Figura 31: Exclusão Mútua (a) e sua equivalente reduzida (b)

um lugar da marcação final M_F .

- cada lugar $p \in \pi_j$, possui uma, e somente uma, transição de entrada e uma e somente uma, transição de saída. Enquanto, cada transição $t \in \pi_j$ possui um só lugar de entrada.
- para todo $p \in \pi_j$, $M_0(p) = 0$

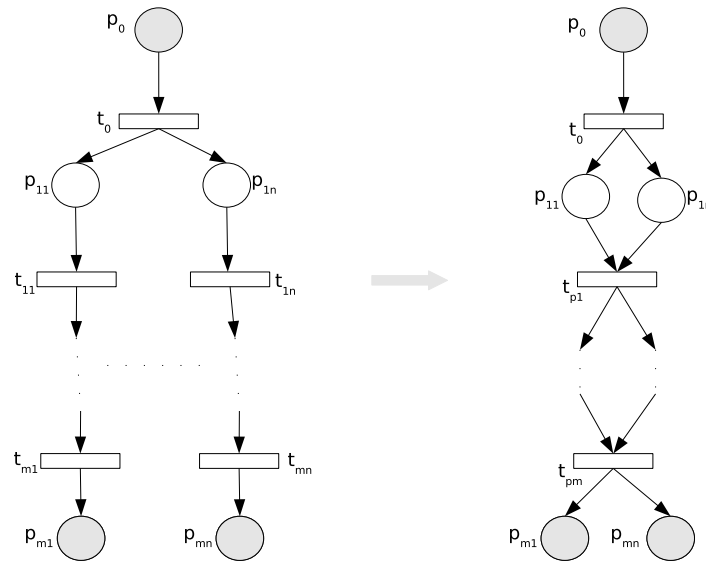


Figura 32: Fusão de ramos paralelos independentes

Respeitadas as condições anteriores e as condições gerais da regra para fusão de transições paralelas, as transições $t_{1j} \in \pi_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, podem ser fundidas e o intervalo resultante é obtido usando a Equação (6.2). A partir da fusão das transições t_{1j} , novas transições podem atender às condições para que possam também serem fundidas. Assim, pode-se obter uma rede seqüência equivalente, cujo intervalo de tempo para, a partir da marcação inicial M_0 , se alcançar a marcação objetivo M_F , contém todas as possibilidades da rede original.

De uma maneira geral tem-se a seguinte situação:

Seja $\Gamma = \langle RP, I^s \rangle$ uma RPT. Se a partir da marcação inicial, a rede possuir caminhos paralelos e independentes, que levem a lugares da marcação final, esses caminhos podem ter suas transições fundidas, segunda a regra de fusão de transições. Na rede reduzida o intervalo de tempo necessário para uma marca, a partir da marcação inicial, alcançar a marcação final, contém os intervalos de todos os caminhos independentes da rede e que foram fundidos.

Na Figura 32 são mostrados caminhos paralelos independentes.

Prova 6.1 Qualquer caminho independente π_j , iniciado em t_0 e terminado em um lugar $p_j \in P \mid M_F(p_j) > 0$, terá um intervalo de tempo, no máximo igual a:

$$i(\pi_j) = \mathbf{i}^s(t_0) + \mathbf{i}^s(t_{1j}) + \cdots + \mathbf{i}^s(t_{mj}) = \mathbf{i}_0 + \sum_{i=1}^m [\delta_{ij}, \Delta_{ij}]$$

sendo $t_{mj} \in \bullet p_j$.

- O intervalo da rede equivalente i_{eq} é composto pelos seguintes intervalos,

$$i_{eq} = \mathbf{i}^s(t_0) + \sum_{i=1}^m [\min\{\delta(t_{i1}), \dots, \delta(t_{in})\}, \max\{\Delta(t_{i1}), \dots, \Delta(t_{in})\}]$$

como,

$$\min\{\delta(t_{11}), \dots, \delta(t_{n1})\} \leq \delta(t_{j1}), \quad \forall j = 1, \dots, n$$

e,

$$\max\{\Delta(t_{11}), \dots, \Delta(t_{n1})\} \geq \Delta(t_{j1}), \quad \forall j = 1, \dots, n$$

- logo,

$$[\min\{\delta(t_{11}), \dots, \delta(t_{n1})\}, \max\{\Delta(t_{11}), \dots, \Delta(t_{n1})\}] \supseteq [\delta(t_{j1}), \Delta(t_{j1})] \quad \forall j = 1, \dots, n$$

- Assim,

$$\mathbf{i}^s(t_0) + \sum_{i=1}^m [\min\{\delta(t_{i1}), \dots, \delta(t_{in})\}, \max\{\Delta(t_{i1}), \dots, \Delta(t_{in})\}] \supseteq \mathbf{i}^s(t_0) + \sum_{i=1}^m [\delta(t_{i1}), \Delta(t_{i1})]$$

- Logo,

$$i_{eq} \supseteq i(\pi_j), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Exemplo 6.2 Na Figura 33 é mostrada a fusão das transições t_1 e t_2 , em paralelo. A fusão dessas transições gera a fusão das transições t_3 e t_4 .

Na Figura 34 é mostrado o grafo de alcançabilidade para a rede da Figura 33a com marcação inicial $M_0 = p_0$ e marcação final $M_F = \{p_5, p_6\}$. Apesar de haver apenas dois caminhos, existem seis possibilidades de execução entre a marcação inicial e a marcação final. Usando a regra para fusão de transições, pode-se reduzir consideravelmente essas possibilidades e ainda calcular o intervalo de tempo para, a partir da marcação M_0 , se alcançar a marcação M_F . A Figura 35 mostra a alcançabilidade quando apenas uma redução é feita (a) e quando a rede original é reduzida à forma seqüencial (b)

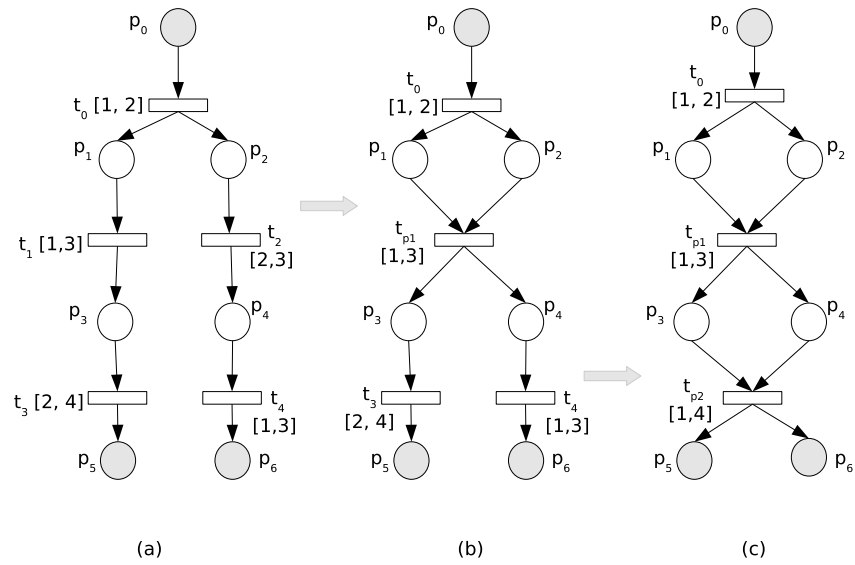


Figura 33: Fusão de ramos paralelos

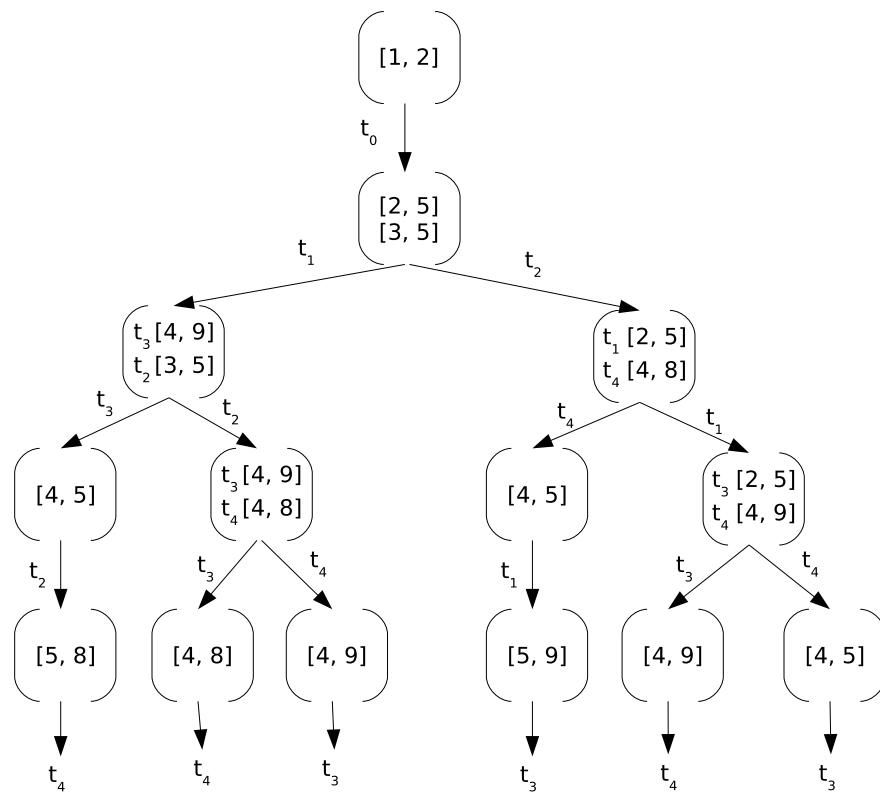


Figura 34: Alcançabilidade completa para a rede da Fig. 33

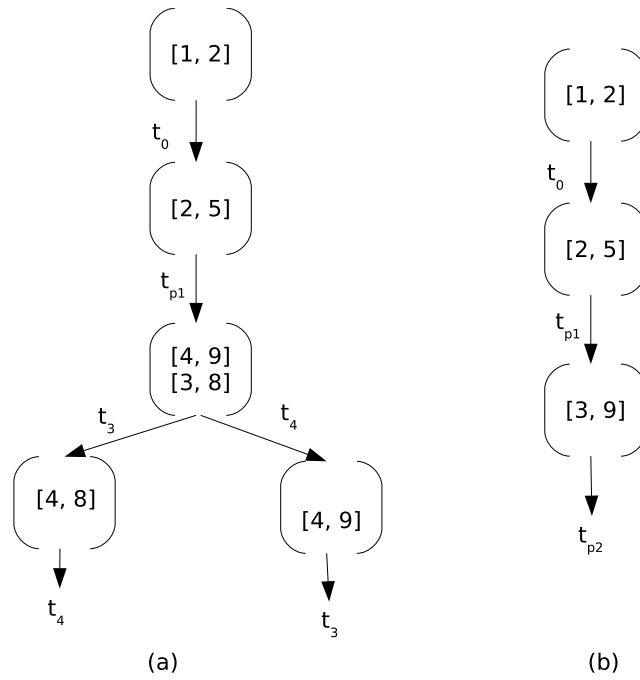


Figura 35: Alcançabilidade reduzida devido à fusão das transições $t_1 - t_2$ (a), $t_3 - t_4$ (b)

6.1.3 Fusão de Transições Conflitantes

Uma das estruturas mais comuns na modelagem de sistemas é o conflito. Do ponto de vista da análise, a melhor alternativa é verificar cada uma das possibilidades conflitantes. Essa alternativa, em muitos casos, pode ser bastante trabalhosa e cara em termos computacionais. Assim, esta subseção apresenta uma regra para fusão de transições conflitantes.

Seja $T_c \subseteq T$, um conjunto de transições conflitantes. T_c pode ser substituído por uma transição equivalente, t_c , caso as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. Todas as transições conflitantes têm mesmo lugar de entrada, ou seja, $\exists p_0$ tal que $\forall t \in T_c$ então, $\bullet t = \{p_0\}$.
2. O lugar p_0 é seguro e tem as transições conflitantes, como conjunto de transições de saída, ou seja, $p_0^\bullet = T_c$.
3. A interseção dos intervalos estáticos das transições conflitantes deve ser não nulo, ou seja, se $t_1, t_2 \in T_c$, então, $\mathfrak{I}^s(t_1) \cap \mathfrak{I}^s(t_2) \neq \emptyset$.

Aproximação Intervalar:

O intervalo da transição equivalente t_c é calculado como segue:

$$i(t_c) = [\min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}, \min\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}] \quad (6.3)$$

sendo, δ_i e Δ_i , $i = 1, \dots, n$, os limites inferiores e superiores dos intervalos estáticos das transições conflitantes.

O intervalo da transição equivalente está baseado na regra de disparabilidade para transições habilitadas em uma RPT, ou seja, se um grupo de transições concorrem pela mesma marcação, o limite máximo para essa concorrência será o menor dos limites superiores das transições. Enquanto que o limite inferior será estabelecido pela transição de menor limite inferior.

A Figura 36 mostra uma estrutura com duas transições conflitantes, t_1 e t_2 . Ambas atendem as condições exigidas na Subseção 6.1.3, então elas podem ser fundidas, como mostrado na Figura 36b. A fusão de transições conflitantes poderá gerar uma estrutura concorrente, como mostra a Figura 36b. Essas novas estruturas, se atenderem às condições da Subseção 6.1.2, poderão ter suas transições fundidas, como mostra a Figura 36c.

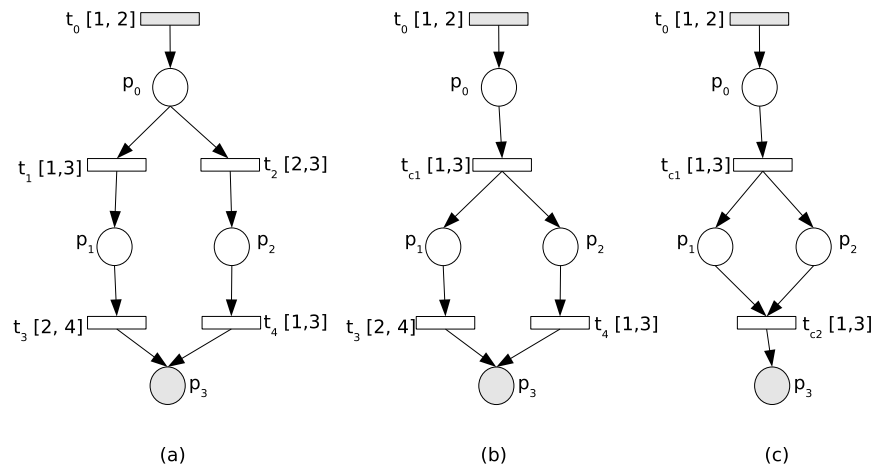


Figura 36: Transições conflitantes (a) fusão de transições conflitantes (b) fusão de transições concorrentes (c)

6.1.4 Fusão de Transições em Série

A condição para fusão de duas transições em série t_1 e t_2 é que ambas possam ser disparadas ou que nenhuma das duas jamais dispare. Para que essa condição exista é preciso que sejam separadas por um lugar p , tal que:

1. O lugar p não tem marcação inicial, $M_0(p) = 0$.

2. O lugar p é o único lugar de saída de t_1 e o único lugar de entrada de t_2 , ou seja, $t_1^\bullet = {}^\bullet t_2 = \{p\}$.
3. O lugar p só está conectado às transições t_1 e t_2 , de modo que, ${}^\bullet p = t_1$ e $p^\bullet = t_2$.
4. $\forall p \in {}^\bullet t_1$, então $p^\bullet = \{t_1\}$, exceto se, $\mathbf{i}^s(t_2) = [0, 0]$.

Aproximação Intervalar:

Neste caso, t_1 e t_2 podem ser trocadas por uma transição t_s , com intervalo estático calculado como segue:

$$\mathbf{i}^s(t_s) = \mathbf{i}^s(t_1) + \mathbf{i}^s(t_2)$$

Na Figura 37 é mostrado um exemplo de fusão de transições em série.

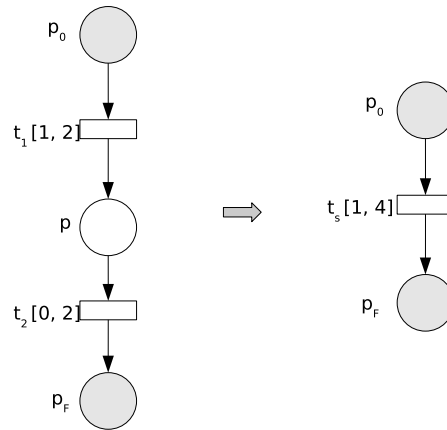


Figura 37: Fusão de transições em série

As três primeiras condições são as mesmas para as RPs não temporizadas. A quarta condição é ilustrada na Figura 38. Na Figura 38a, o lugar p_1 satisfaz às três primeiras condições da regra acima. Caso não houvesse a quarta condição, as transições t_1 e t_2 poderiam ser trocadas por uma única transição, como mostra a rede na Figura 38b. Assim, uma marca em p_0 habilita as transições t_s e t_3 , como são conflitantes, qualquer das duas poderia disparar, dentro do intervalo $[3, 4]$. Porém, a quarta condição impede que tal fusão seja feita, pois a transição t_3 , devido ao seu intervalo estático de disparo, não está em conflito com a transição t_1 .

As regras para fusão de transições em série são definidas para redes seguras, pois assegura-se a condição de equivalência entre a rede original e a rede reduzida, como mostrado a seguir.

Considerando $S_0 = \langle M_0, I_0 \rangle$ como sendo o estado inicial e $S_F = \langle M_F, I_F \rangle$ o estado final e sendo a rede segura, têm-se para a Figura 37,

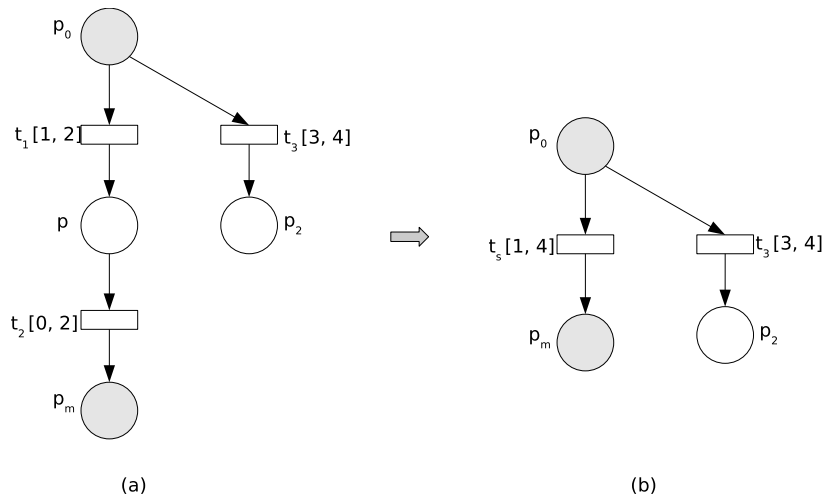


Figura 38: Fusão inadequada de transições em série

- para rede original

$$S_0 = \begin{cases} M_0 = p_0 \\ I_0 = [1, 2] \end{cases} \xrightarrow{(t_1, [1, 2])} S_1 = \begin{cases} M_1 = p \\ i_1 = [1, 4] \end{cases} \xrightarrow{(t_2, [1, 4])} S_F = \{M_F = p_F\}$$

- para rede reduzida

$$S_0 = \begin{cases} M_0 = p_0 \\ i_0 = [1, 2] \end{cases} \xrightarrow{(t_s, [1, 4])} S_F = \{M_F = p_F\}$$

As regras para fusão série também podem ser utilizadas para redes *k-limitadas*. Considerando a rede mostrada na Figura 37, se a rede original tem marcação inicial $M_0(p_0) = 2$, na Figura 39a são mostradas as marcações alcançáveis entre M_0 e M_F . O grafo da rede reduzida, Figura 39b, possui apenas os estados alcançados pelos disparos da transição t_s , que corresponde ao disparo da seqüência $t_1 t_2$. Porém, como o interesse está na estimação do intervalo de tempo entre S_0 e S_F , não havendo qualquer interesse em estados intermediários, pode-se verificar que o intervalo de tempo para alcançar o estado final, usando a rede reduzida, contém os intervalos obtidos usando a rede original, ou seja $[2, 8] \supseteq [2, 6]$.

Existem outras estruturas que permitem fundir transições em série, entretanto cada uma tem sua particularidade quando analisada com uma RPT, impossibilitando, portanto, uma generalização. Nesta tese, só será utilizado este tipo de redução, quando não houver qualquer interesse nos estados intermediários ou, então, quando a rede for segura.

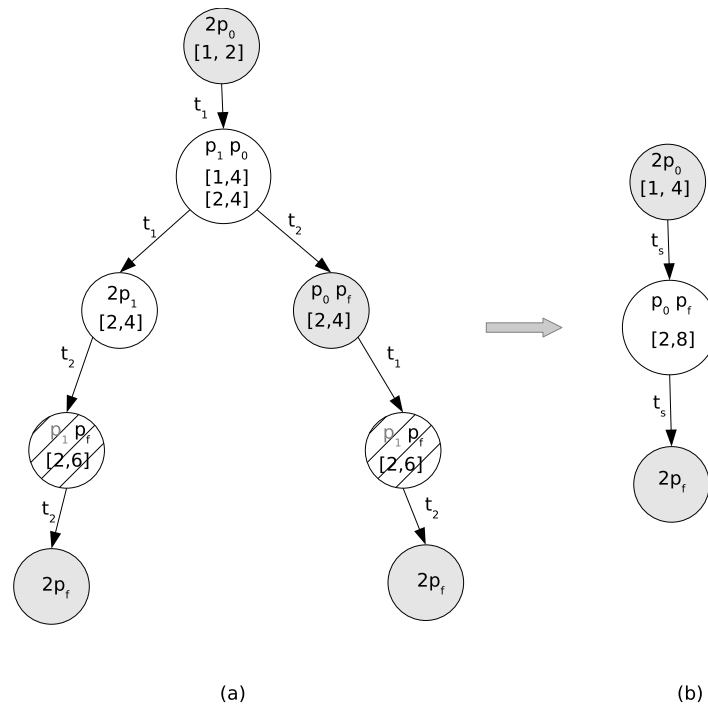


Figura 39: Grafo de classes para a rede da Figura 37 com $M_0(p_0) = 2$

6.1.5 Redução de Lugares Redundantes

Fusão de Lugares Paralelos

Se dois lugares p_1 e p_2 são paralelos e satisfazem as seguintes condições:

1. $M_0(p_1) = M_0(p_2) = \emptyset$;
2. $\bullet p_1 = \bullet p_2$ e $p_1^\bullet = p_2^\bullet \neq \emptyset$

Então, um dos lugares pode ser removido, como mostrado na Figura 40.

Remoção de Lugares

- Se um lugar p tem marcação inicial $M_0(p) = \emptyset$ e p não tem transição de entrada, ou seja, $\bullet p = \emptyset$, então, p e toda $t \in p^\bullet$, podem ser removidos.
- Se um lugar p nunca é obstáculo para o disparo de suas transições de saída, então, p é denominado de lugar implícito e pode ser removido, sem que cause qualquer modificação no comportamento da rede.

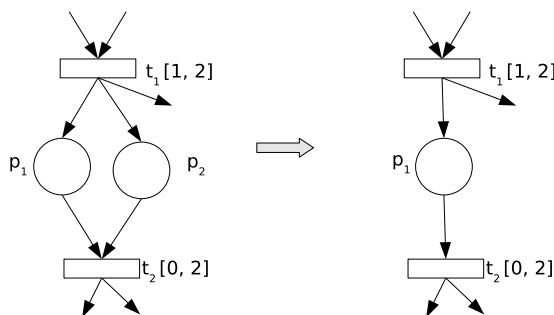


Figura 40: Fusão de lugares paralelos

Na Figura 41 é mostrado um caso especial de remoção de lugar.

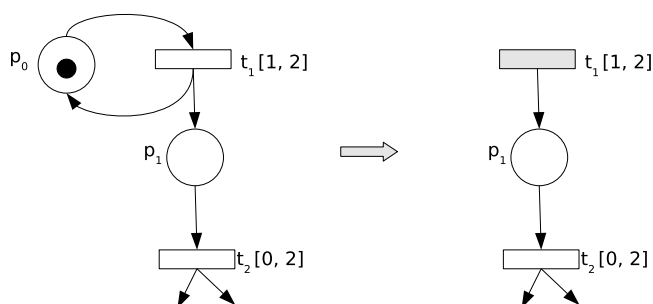


Figura 41: Redução de um lugar implícito

6.2 Método de Redução para uma RTP via Relação de Ordem de Ordem

O princípio básico desse método é garantir que, se existem duas ou mais possibilidades de ocorrências concorrentes em uma RTP, elas podem ser representadas por uma única ocorrência, desde que sejam mantidas as condições lógicas e temporais da rede. Dessa forma, pode-se limitar o número de ocorrências redundantes e transformar a rede original em um modelo equivalente bem mais simples.

Uma outra idéia na qual o método se baseia é que a ocorrência de uma transição depende, fundamentalmente, da ocorrência dos seus antecessores. Agrupando as transições da rede, segundo sua ordem de precedência, o método ordena todas as seqüências de transições originadas a partir das transições inicialmente habilitadas.

Explorando esses dois princípios, o algoritmo produz uma rede reduzida, que capta e agrupa estruturas que podem ser executadas concorrentemente, respeitando as dependências

entre ocorrências. Essas estruturas são identificadas através de uma matriz de transições que apresenta, de forma ordenada, todas as transições da rede original.

Toda transformação obtida é baseada no seguinte princípio: se em uma *RPT* há dois estados S_1 e S_2 , tal que, S_2 é alcançável a partir de S_1 , então existe um caminho equivalente entre S_1 e S_2 e que contém todos os demais caminhos.

Baseado nesse princípio, é construída uma estrutura algébrica, cujos os elementos estão descritos a seguir.

6.2.1 Matriz de Transições

A matriz de transições relaciona as transições da rede, segundo suas relações de precedência na rede. A matriz de transições é obtida a partir do conceito de matriz de caminhos da teoria de grafos orientados [LL04] e sua redução a partir de técnicas que exploram a existência do paralelismo e do conflito estruturais em uma *RPT*.

Para gerar a matriz de transições, a rede é tratada como sendo uma rede acíclica que é o traço fundamental. Para isso, serão formadas estruturas conforme explicado a seguir.

6.2.2 Conjunto de Transições

Sejam T e P , os conjuntos de transições e lugares de uma *RPT*, respectivamente. Os conjuntos T e P podem ser particionados em subconjuntos disjuntos, segundo a ordem de precedência das transições e dos lugares na rede. Assim, os seguintes pares de conjuntos serão formados:

- $P_0 = \{p \in P \mid \bullet p = \emptyset\}$
 $T_0 = \{t_0 \in T \mid \bullet t_0 \subseteq P_0\}$ ou $T_0 = \{t_0 \in T \mid Pre(t_0) \leq M(\bullet t_0)\}$
- $P_1 = \{p \in P \setminus P_0 \mid \bullet p \subseteq T_0\}$
 $T_1 = \{t_1 \in T \setminus T_0 \mid \exists (t_0, t_1), t_0 \preceq t_1, t_0 \in T_0\}$
- $P_2 = \{p \in P \setminus \{P_0 \cup P_1\} \mid \bullet p \subseteq T_1\}$
 $T_2 = \{t_2 \in T \setminus \{T_0 \cup T_1\} \mid \exists (t_0, t_1, t_2), t_0 \preceq t_1 \preceq t_2, t_0 \in T_0, t_1 \in T_1\}$
- \vdots

$$\begin{aligned}
P_n &= \{p \in P \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} P_k \mid \bullet p \subseteq T_{n-1}\} \\
\bullet T_n &= \{t_{n_i} \in T \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} T_k \mid \\
&\quad \exists (t_{0_i}, \dots, t_{n_i}), t_{0_i} \preceq \dots \preceq t_{n_i}, t_{0_i} \in T_0, \dots, t_{n-1_i} \in T_{n-1}\}
\end{aligned}$$

sendo, $t_a \preceq t_b$ a ordem de precedência entre as transições t_a e t_b . Isto significa que t_a precede t_b , ou seja, $t_a^\bullet \cap \bullet t_b \neq \emptyset$.

Para uma rede marcada, entretanto, P_0 é o conjunto dos lugares com marcas, enquanto que T_0 é conjunto das transições habilitadas pela marcação inicial ou, é o conjunto das transições fonte, caso $P_0 = \emptyset$ [Mur89].

O conjunto T_n contém todas conexões entre cada transição fonte ou transição inicialmente habilitada e as suas transições sucessoras. Portanto, se há um caminho entre uma transição t pertencente ao conjunto T_0 e uma transição objetivo, ou transição que leva a uma marcação desejada, esse caminho será composto por elementos de T_n .

6.2.3 Cardinalidade e Enumeração dos Conjuntos de Transições

A cardinalidade de cada conjunto T_k ($k = 0, \dots, n$), é indicada pelo número de transições ou o número de *tuplas* que T_k contém e é denotada por $\#T_k$. Enquanto a cardinalidade de T é igual ao número de transições da rede.

$$\begin{aligned}
T_k &= \left\{ \underbrace{(t_{01}, \dots, t_{k1})}_{T_{k1}}, \dots, \underbrace{(t_{0i}, \dots, t_{mk})}_{T_{km}} \right\} \\
T &= T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n
\end{aligned}$$

Dentre os conjuntos T_k o conjunto T_0 é o mais precedente de todos, ou seja, os elementos desse conjunto, precedem, estruturalmente, todos os demais elementos de T . Na outra extremidade da ordem de precedência está o conjunto T_n , cujos elementos são os mais sucessores de todos.

Baseado na ordem de precedência, podem-se enumerar os elementos dos conjuntos T_k . Qualquer elemento dos subconjuntos $T \setminus \{T_0, T_n\}$ é ordenado segundo sua posição na *tupla*. Porém, se um determinado elemento pertence a uma *tupla* do conjunto T_n e esse mesmo elemento pertence a uma *tupla* de um conjunto $T \setminus T_n$, então, esse elemento será ordenado segundo a sua ordem em T_n ¹.

¹Para evitar a busca pela ordem de elementos pertencentes a mais de um conjunto T_k , deve-se começar a enumeração a partir dos elementos de T_n .

Para ordenar os conjuntos T_k uma função $f : T \longrightarrow \mathbb{N}$ é definida, como segue:

$$\begin{aligned} f(t_{01}) &= 1, & f(t_{02}) &= 2, & \dots, & f(t_{0m}) &= m \\ & & & & \dots & & \\ f(t_{n1}) &= p-r, & f(t_{n2}) &= p-r+1, & \dots, & f(t_{nr}) &= p \end{aligned}$$

sendo $m = \#T_0$, $r = \#T_n$ e $p = \#T$.

6.2.4 Matriz Parcial

Cada subconjunto T_k , com suas transições já ordenadas, é transformado em uma matriz com número de linhas igual à cardinalidade de T_k e o número de colunas igual à cardinalidade de T . A posição das transições nas colunas segue a ordem de precedência na rede, ou seja, se t_1 ocupa a coluna 2 e t_6 ocupa a coluna 4, então, $t_1 \succsim t_6$, ou entre t_1 e t_6 não há dependência. A matriz parcial é, então, definida como segue.

Definição 6.2 (*Matriz Parcial*) *Seja uma RPT e T o conjunto de suas transições. Para cada conjunto $T_k \subseteq T$ e $T_k = \{\underbrace{(t_{01}, \dots, t_{k1})}_{T_{k1}}, \dots, \underbrace{(t_{0i}, \dots, t_{mk})}_{T_{km}}\}$ tem-se uma matriz parcial MP, booleana e de ordem $r \times n$, sendo r a cardinalidade do conjunto T_k e n a cardinalidade de T . Os elementos da matriz MP são definidos pela seguinte relação,*

$$MP(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{se } t_i \succsim t_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.4)$$

sendo, $t_i, t_j \in T_{ki}$, $i = 1, \dots, r$

6.2.5 Matriz de Transições

A matriz de transições é composta das matrizes parciais da rede. A matriz terá ordem $m_T \times n$, sendo m_T a soma das cardinalidades dos T_k conjuntos e n a cardinalidade de T . Logo, a matriz de transições é obtida como segue,

$$MT = \begin{bmatrix} MP_0 \\ MP_1 \\ \vdots \\ MP_n \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

A matriz MT apresenta todas as relações de precedência entre as transições da rede. Se a matriz de transições apresenta duas ou mais linhas, nas quais os últimos elementos pertencem à mesma coluna, então, estas linhas podem ser agrupadas pois, representam diferentes ramificações para se chegar à mesma transição. Após o agrupamento, a linha resultante conterá todas as precedências dessa transição.

Após todos os agrupamentos possíveis das linhas, a matriz assume a forma quadrática de ordem igual ao número de transições na rede e nessa forma passa a ser um caso particular da matriz fecho transitivo, definida na teoria dos grafos para representar relações de precedência [LL04].

6.2.6 Redução da Matriz de Transições

A matriz MT será submetida a um processo de redução, agrupando linhas e colunas que representam transições independentes ou conflitantes. O objetivo é transformar a matriz MT numa matriz reduzida equivalente, em que suas linhas representam junções de caminhos que levam ao mesmo objetivo. O processo de redução utiliza o seguinte procedimento:

1. Repetir o passo 2, enquanto as condições de agrupamento forem atendidas.
2. Variar i de 1 a n :
 - (a) Se $MT(i+1, i) = 0$
 - (b) Verificar se existe precedente comum, CASO SIM:
 - i. Agrupar as linhas e colunas i e $i+1$ de MT , de modo que, para $j = 1, 2, \dots, n$:
 - A. Somar linha i com $i+1$
Se $MT(i, j) + MT(i+1, j) \geq 1$, fazer
 $MT(i, j) = 1$.
 - B. Somar coluna i com $i+1$
Se $MT(j, i) + MT(j, i+1) \geq 1$, fazer
 $MT(j, i) = 1$.
 - ii. Anular linha e coluna $i+1$
3. Fazer $MI = MT$.
4. Verificar se t_a e t_b podem ser agrupadas
Se $\mathbf{i}(t_a) \cap \mathbf{i}(t_b) \neq \emptyset$

- Se $t_c \preceq t_a$ e $t_c \preceq t_b$
 - Se $\text{Pre}(t_a) = \text{Pre}(t_b)$ e $\bullet(\text{Pre}(t_a)) = \bullet(\text{Pre}(t_b)) = t_c$, então, $t_{ab} = t_a \vee t_b$ e,

$$\mathbf{i}(t_{ab}) = [\min\{\delta(t_a), \delta(t_b)\}, \min\{\Delta(t_a), \Delta(t_b)\}]$$

- Se $\text{Pre}(t_a) \cap \text{Pre}(t_b) \neq \emptyset$

Transformar a estrutura

- Se $\text{Pre}(t_a) \cap \text{Pre}(t_b) = \emptyset$

- (a) Se $\bullet(\text{Pre}(t_a)) = \bullet(\text{Pre}(t_b)) = t_c$

- * Se $(\text{Pos}(t_a))^\bullet = (\text{Pos}(t_b))^\bullet = t_d$, então, $t_{ab} = t_a \parallel t_b$ e,

$$\mathbf{i}(t_{ab}) = [\max\{\delta(t_a), \delta(t_b)\}, \max\{\Delta(t_a), \Delta(t_b)\}]$$

- * Caso contrário, então, $t_{ab} = t_a \parallel t_b$ e,

$$\mathbf{i}(t_{ab}) = [\min\{\delta(t_a), \delta(t_b)\}, \max\{\Delta(t_a), \Delta(t_b)\}]$$

- (b) Se $t_a, t_b \in T_0$, então, $t_{ab} = t_a \parallel t_b$ e,

$$\mathbf{i}(t_{ab}) = [\min\{\delta(t_a), \delta(t_b)\}, \max\{\Delta(t_a), \Delta(t_b)\}]$$

- Se $\preceq = t_a \preceq t_b = \emptyset$

- Se $t_a, t_b \in T_0$, então, $t_{ab} = t_a \parallel t_b$ e,

$$\mathbf{i}(t_{ab}) = [\min\{\delta(t_a), \delta(t_b)\}, \max\{\Delta(t_a), \Delta(t_b)\}]$$

6.2.7 Matriz Intervalar

A matriz intervalar \mathbf{C} pode, então, ser definida, como segue:

Definição 6.3 *Seja $MI \in \mathbb{Z}^{r \times r}$, uma matriz booleana resultante do agrupamento de transições conflitantes e independentes. A matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{IR}^{r \times r}$ é denominada matriz intervalar de uma RTP, e é obtida substituindo o elementos $MI(i, j) = 1$ pelos intervalos das transições equivalentes, como segue,*

- *Seja r a ordem da matriz reduzida MI .*

Variar $j = 1, 2, \dots, r$ e $i = j, 2, \dots, r$:

Se $MI(i, j) = 1$,
fazer $C(i, j) = i(\sigma_i)$,

A matriz intervalar C apresenta todas as relações de precedência entre as transições da rede. A partir dessa matriz, pode-se analisar, para uma ampla classe de *RPT*, aspectos como: intervalo de tempo para ocorrência de determinada transição, média de disparo em um intervalo de tempo especificado, tempo de ciclo, entre outros.

Exemplo 6.3 *Seja uma RTP cujas túplas geradas por cada subconjunto do conjunto de transições, são como segue:*

$$\begin{aligned} T_0 &= \{t_1\} \\ T_1 &= \{(t_1, t_2), (t_1, t_3), (t_1, t_5)\} \\ T_2 &= \{(t_1, t_2, t_4), (t_1, t_3, t_5), (t_1, t_5, t_6)\} \\ T_3 &= \{(t_1, t_2, t_4, t_6), (t_1, t_3, t_5, t_6)\} \end{aligned}$$

A partir das matrizes parciais MP, geradas pelos conjuntos acima, forma-se a matriz de transições, MT.

$$\begin{aligned} MP_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ MP_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ MP_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ MP_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{MT}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{MT}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6$

A matriz de transições apresenta todas as relações de precedência entre as transições da rede. Aplicando o algoritmo de redução, apresentado na seção anterior, obtém-se a matriz de transições com todas as relações de precedência entre as transições.

Na matriz MT, as transições t_2 e t_3 atendem ao requisito para serem agrupadas, pois ambas têm mesma precedência, ou seja,

$$t_1 \lesssim t_2 \text{ e } t_1 \lesssim t_3 \text{ ou } t_1 = \bullet t_2 = \bullet t_3$$

As transições t_2 e t_3 só dependem da transição t_1 . Essas duas transições podem ser agrupadas, pois são independentes.

Entretanto, as transições t_4 e t_5 , apesar de verificarem a primeira condição para serem agrupadas, não dependem uma da outra, elas não possuem mesma precedência, ou seja,

$$t_2 \lesssim t_4 \text{ e } t_3 \lesssim t_5$$

As transições t_4 e t_5 podem até ser independentes, mas não temporalmente.

Após o agrupamento das transições t_2 e t_3 , a matriz tem sua ordem reduzida. A enumeração das transições é, então, atualizada e novo processo de redução da rede é verificado.

Na segunda verificação, as transições t_4 e t_5 passam a atender as condições de agrupamento, pois a fusão das transições t_2 e t_3 passa a ser precedente dessas transições.

Após fundir t_4 com t_5 a matriz MT assume a forma MI, como segue:

$$MT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad MI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Substituindo em MI os elementos de valor 1 pelos respectivos intervalos estáticos equivalentes, tem-se a matriz **C** dos intervalos da rede reduzida equivalente.

6.2.8 Recursos Compartilhados

Dependendo da configuração do acesso ao recurso compartilhado, o método baseado na ordem de execução das transições pode não ser capaz de captar a dependência entre transições mutuamente dependentes. Portanto, caso a rede tenha compartilhamento de recurso, a estrutura envolvendo tal compartilhamento deve ser analisada separadamente. Nessa verificação, analisar se é preciso, ou não, fazer alguma transformação para que o algoritmo seja aplicado, ou se é possível aplicar tal algoritmo. Na Figura 42, são apresentados dois casos de compartilhamento de recursos. Ambos apresentam a seguinte matriz de transições:

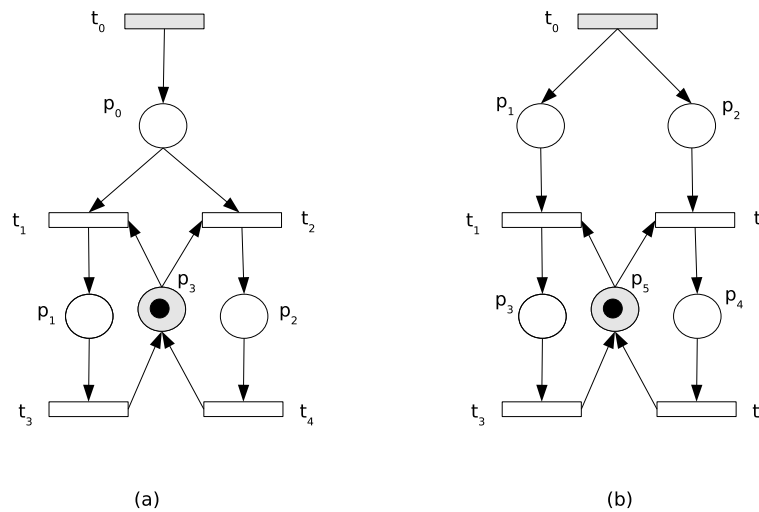


Figura 42: Exclusão mútua persistente (a) e seqüencial (b)

$$\text{MT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix}$$

Aplicando o método de redução proposto, as transições t_1 e t_2 podem ser agrupadas e por meio da verificação das transições envolvidas, elas serão agrupadas como transições conflitantes. Após o agrupamento dessas transições, outras duas, t_3 e t_4 , também serão agrupadas como transições concorrentes, devido a fusão das transições precedentes conflitantes. A matriz MT, então, assume a seguinte forma,

$$\text{MT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} t_0 \\ t_1 \vee t_2 \\ t_3 \vee t_4 \end{matrix}$$

Considerando como sendo seguras as redes mostradas na Figura 42, obtêm-se os seguintes resultados:

- **Mutex Persistente**

Para a rede mostrada na Figura 42a sempre que houver um disparo de t_0 as transições t_1 e t_2 ficarão em conflito, portanto, sempre haverá as seqüências $t_1 - t_3$ ou $t_2 - t_4$, que podem ser agrupadas, resultando na matriz MT, obtida acima. Neste caso, portanto, o algoritmo capta a dependência entre as transições.

- **Mutex Seqüencial**

Entretanto, para a rede mostrada a Figura 42b, após o conflito inicial, a rede funcionará como uma rede seqüencial, executando uma das duas seqüências seguintes,

$$t_0 - t_1 - t_3 - t_2 - t_4 \quad \text{ou,} \quad t_0 - t_2 - t_4 - t_1 - t_3$$

Ou seja, com exceção do conflito inicial, há uma seqüência que, devido ao compartilhamento do lugar p_3 , não é captada pelo método do ordenamento, visto neste capítulo. Dessa forma, para que o algoritmo seja capaz de captar todas as relações de dependência entre as transições da rede, sempre que for identificado estruturas que compartilham recursos, essas estruturas serão transformadas em estruturas acíclicas. O processo de transformação será semelhante ao do *unfolding*, porém, com corte no primeiro ciclo

da rede. A estrutura transformada será incorporada à rede original para aplicação do processo de redução. Na Figura 43 é mostrado um processo de transformação de uma estrutura com compartilhamento de recursos em um estrutura seqüencial.

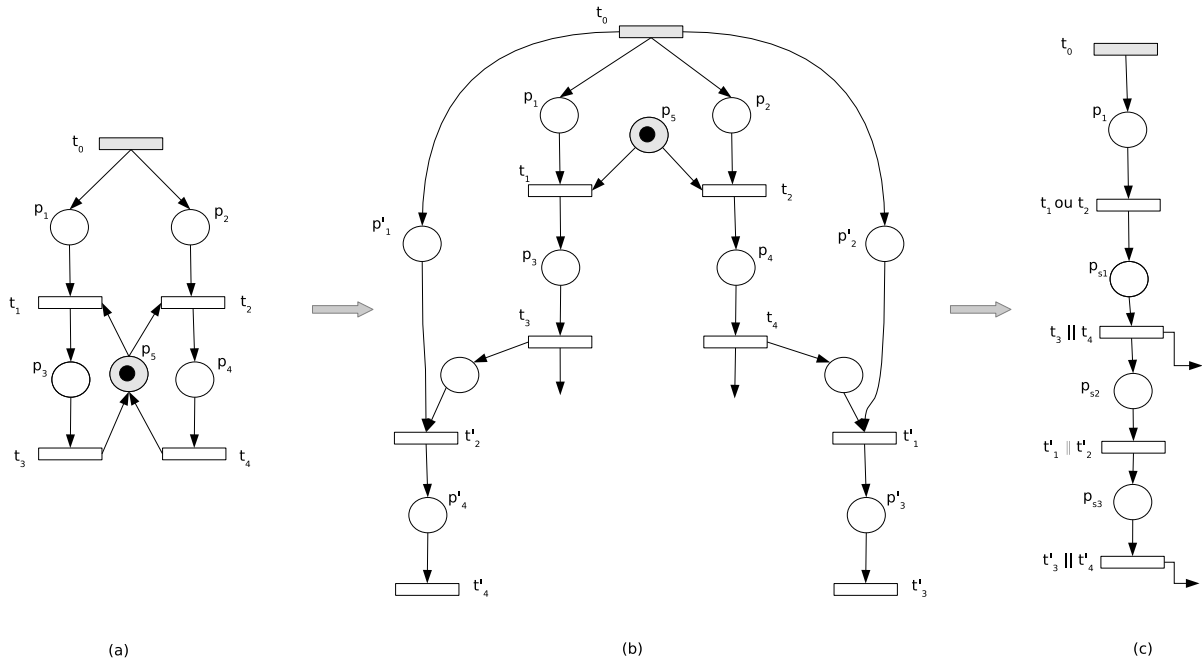


Figura 43: Transformação de uma estrutura de compartilhamento em seqüencial

A rede equivalente mostrada na Figura 43c pode, então, ser incorporada à rede.

6.3 Aplicação

Na Figura 44 é mostrado o modelo de um escalonamento em uma *RPT* para um sistema temporizado, composto de 2 recursos, \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 , os quais são utilizados para execução de 4 diferentes tarefas **a**, **b**, **c**, e **d**. No estado inicial, a tarefa **b** tem prioridade sobre as demais. Ao término da tarefa **b**, o recurso \mathbf{R}_1 irá assistir à tarefa **a**, enquanto o recurso \mathbf{R}_2 irá assistir à tarefa **d**, que tem prioridade sobre a tarefa **c**. A tarefa **c** deve ser assistida pelo recurso \mathbf{R}_2 . Na Tabela 1 são descritos os significados dos lugares e transições da rede.

A matriz intervalar da rede pode ser obtida a partir do algoritmo proposto na Seção 6.2 ou por aplicação, passo a passo, das regras de redução propostas na Seção 6.1. Ambos serão apresentados a seguir:

- matriz de transições

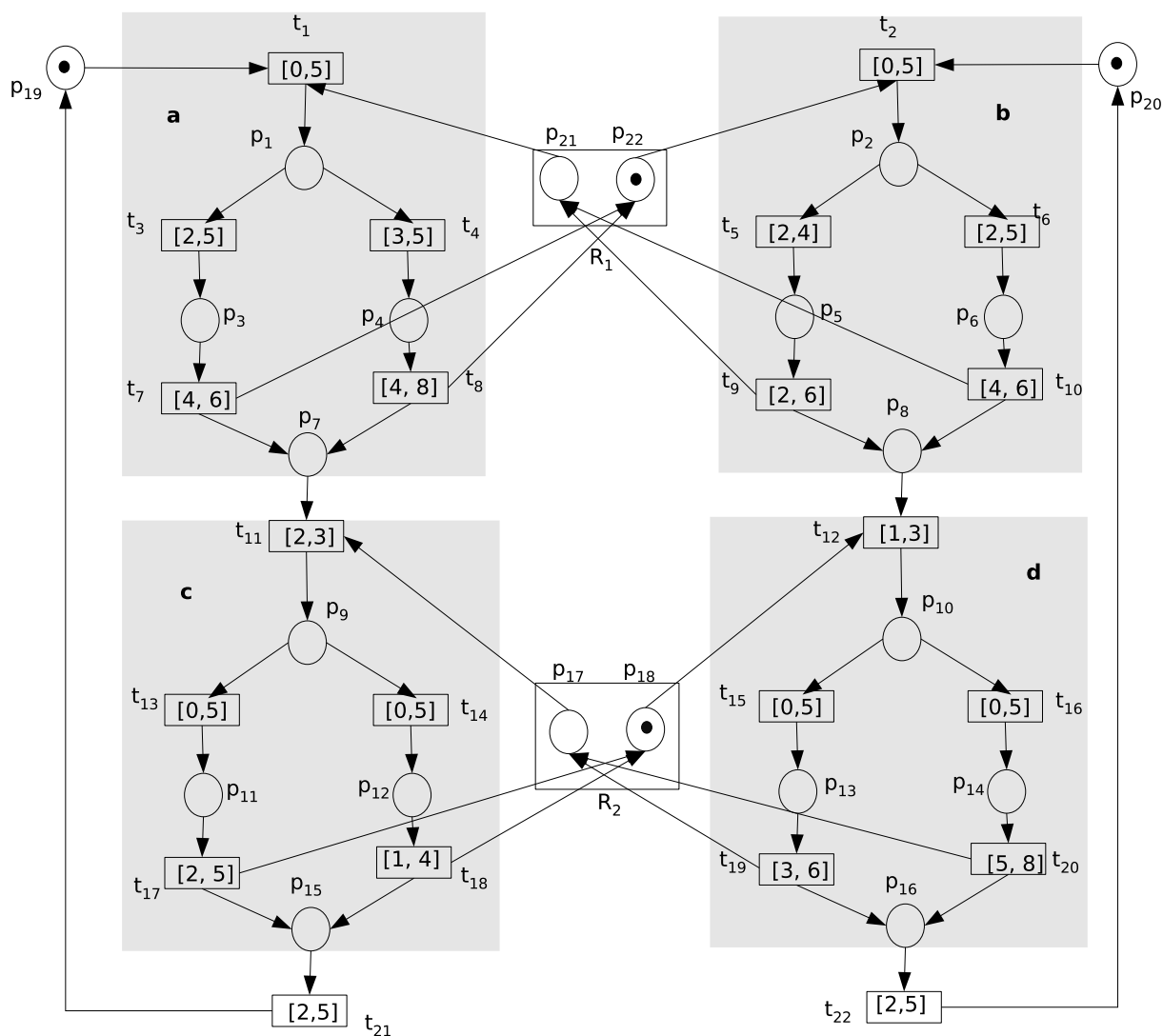


Figura 44: *RPT* para um Escalonamento de Tarefas

Tabela 1: Significado dos lugares e transições da *RPT* mostrada na Figura 44

Lugar	Descrição
p_1, p_2, p_9, p_{10} p_3, \dots, p_6 e p_{11}, \dots, p_{14} p_7, p_8, p_{15}, p_{16} p_{19}, p_{20} $p_{17}, p_{18}, p_{21}, p_{22}$	decisão sobre quem irá executar a tarefa execução de tarefas tarefas a, b, c, d terminadas, respectivamente disponibilidade do sistema disponibilidade dos recursos
t_1, t_2, t_{11}, t_{12} t_3, \dots, t_{10} e t_{13}, \dots, t_{20} t_{21}, t_{22}	solicitação dos recursos início e término de tarefas deslocamento dos recursos

4. $i = 5$: $MT(6,5) \neq 1$, logo, as transições não são agrupáveis.
5. $i = 6$: $M_{7,6} = 0$ e $MT(6,5) = MT(7,5) = 1$, porém na rede original tem-se $\text{Pos}(\text{Pre}(t_{12})) = t_9, t_{10}$ e $\text{Pos}(\text{Pre}(t_1)) = t_9, t_{10}, t_{21}$. Não podem ser agrupados como concorrentes, pois podem ser habilitadas por diferentes ocorrências.
6. $i = 7$: $MT(8,7) = 1$, logo, não podem ser agrupadas.
7. \vdots

Ao fim da primeira iteração, os pares de transições $t_3 - t_4$, $t_5 - t_6$, $t_{13} - t_{14}$ e $t_{15} - t_{16}$ aparecem como agrupáveis, todos como transições conflitantes. Assim, tem-se os seguintes intervalos para cada par:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}(t_3 \vee t_4) &= [\min\{2,3\}, \min\{5,5\}] = [2, 5] \\
 \mathbf{i}(t_5 \vee t_6) &= [\min\{2,2\}, \min\{4,5\}] = [2, 4] \\
 \mathbf{i}(t_{13} \vee t_{14}) &= [\min\{0,0\}, \min\{5,5\}] = [0, 5] \\
 \mathbf{i}(t_{15} \vee t_{16}) &= [\min\{0,0\}, \min\{5,5\}] = [0, 5]
 \end{aligned}$$

sendo que " \vee "denota o conflito entre transições.

Na segunda iteração, devido ao agrupamento anterior, aparecem novos pares agrupáveis, $t_7 - t_8$, t_9, t_{10} , $t_{17} - t_{18}$ e $t_{19} - t_{20}$, cujos intervalos são:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}(t_7 \underline{\vee} t_8) &= [\min\{4,4\}, \max\{6,8\}] = [4, 8] \\
 \mathbf{i}(t_9 \underline{\vee} t_{10}) &= [\min\{2,4\}, \max\{6,6\}] = [2, 6] \\
 \mathbf{i}(t_{17} \underline{\vee} t_{18}) &= [\min\{2,1\}, \max\{5,4\}] = [1, 5] \\
 \mathbf{i}(t_{19} \underline{\vee} t_{20}) &= [\min\{3,5\}, \max\{6,8\}] = [3, 8]
 \end{aligned}$$

sendo que " $\underline{\vee}$ "significa paralelismo resultante do agrupamento de precedentes conflitantes.

Após tais agrupamentos, a matriz MT assume a forma seguinte:

$$\text{MT}^1 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix} \begin{matrix}
t_2 \\
t_5 \vee t_6 \\
t_9 \vee t_{10} \\
t_{12} \\
t_1 \\
t_3 \vee t_4 \\
t_7 \vee t_8 \\
t_{15} \vee t_{16} \\
t_{19} \vee t_{20} \\
t_{11} \\
t_{13} \vee t_{14} \\
t_{22} \\
t_{17} \vee t_{18} \\
t_{21}
\end{matrix}$$

Efetuada mais uma iteração há alguns pares de transições que satisfazem à primeira condição de agrupamento, porém, no processo de verificação da precedência esses pares não atendem à condição exigida para que sejam agrupados.

Com o fim dos agrupamentos concorrentes pode-se fazer novos agrupamentos, agora daquelas transições em série. Desejando-se agrupar as tarefas **a**, **b**, **c** e **d** elas podem ser delimitadas pela solicitação e liberação dos recursos R_1 e R_2 . Portanto, o início e término de cada tarefa são determinados pelas transições t_2 e t_{9-10} , t_1 e t_{7-8} , t_{11} e t_{17-18} , t_{12} e t_{19-20} , respectivamente. Pode-se, então, agrupar as linhas e colunas correspondentes às transições pertencentes a essa delimitação, como segue:

$$\text{MT}^2 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix} \begin{matrix}
t_2 + (t_5 \vee t_6) + (t_9 \vee t_{10}) \\
t_{12} \\
t_1 + (t_3 \vee t_4) + (t_7 \vee t_8) \\
(t_{15} \vee t_{16}) + (t_{19} \vee t_{20}) \\
t_{11} + (t_{13} \vee t_{14}) \\
t_{22} \\
t_{17} \vee t_{18} \\
t_{21}
\end{matrix}$$

Observa-se que matriz MT^2 pode induzir à existência de um paralelismo entre as transições nas posições $\text{MT}^2(2,2)$ e $\text{MT}^2(3,3)$, porém, só após o término dos agrupamentos

série é que poderá executar o algoritmo para agrupamento de transições concorrentes. Baseado na ordem de precedência, pode-se observar na matriz MT^2 , a seguinte ordem:

$$t_{12} \preceq (t_{15} \vee t_{16}) + (t_{19} \vee t_{20})$$

e,

$$t_{11} + (t_{13} \vee t_{14}) \preceq (t_{17} \vee t_{18})$$

Logo, pode-se fazer a fusão série de tais transições, formando a matriz equivalente das tarefas **a**, **b**, **c** e **d**, como segue.

$$\text{Tarefa a: } t_a = t_1 + (t_3 \vee t_4) + (t_7 \vee t_8) = [6, 18]$$

$$\text{Tarefa b: } t_b = t_2 + (t_5 \vee t_6) + (t_9 \vee t_{10}) = [4, 15]$$

$$\text{Tarefa c: } t_c = t_{11} + (t_{13} \vee t_{14}) + (t_{17} \vee t_{18}) = [3, 13]$$

$$\text{Tarefa d: } t_d = t_{12} + (t_{15} \vee t_{16}) + (t_{19} \vee t_{20}) = [4, 16]$$

$$MT^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} t_b \\ t_d \\ t_a \\ t_c \\ t_{22} \\ t_{21} \end{matrix}$$

As transições t_a e t_d , assim como t_c e t_{22} podem, então, serem agrupadas, com segue,

$$\mathbf{i}(t_a \parallel t_d) = [\min\{6, 4\}, \max\{18, 16\}] = [4, 18]$$

$$\mathbf{i}(t_c \parallel t_{22}) = [\min\{3, 2\}, \max\{13, 5\}] = [2, 13]$$

Após tal agrupamento, resulta na matriz M_I , que apresenta de forma compacta, todas as relações de precedência entre as transições na rede.

$$MT^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} t_b \\ t_{g3} \\ t_{g4} \\ t_{21} \end{matrix}$$

• Matriz Intervalar

Substituindo em MI os elementos iguais a 1 por seus respectivos intervalos, tem-se a matriz intervalar correspondente.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [4, 15] & 0 & 0 & 0 \\ [4, 15] & [4, 18] & 0 & 0 \\ [4, 15] & [4, 18] & [2, 13] & 0 \\ [4, 15] & [4, 18] & [2, 13] & [2, 5] \end{pmatrix} \begin{matrix} t_b \\ t_{g3} \\ t_{g4} \\ t_{21} \end{matrix}$$

Todo processo de redução pode também ser desenvolvido analiticamente, aplicando as regras de redução proposta na Seção 6.1, como segue:

- **redução gráfica**

Na Figura 45 é mostrado o processo de redução da tarefa **a** da rede. Nesta tarefa, as transições t_3 e t_4 estão conflitantes e como os caminhos iniciados por ambas levam ao mesmo lugar p_7 , pode-se aplicar a regra de junção das transições para calcular a aproximação intervalar que conterà os intervalos de tempo de ambos os caminhos, logo,

$$\begin{aligned} t_{g1} &= t_3 \vee t_4 \\ \mathbf{i}(t_{g1}) &= [\min\{2, 3\}, \min\{5, 5\}] = [2, 5] \end{aligned}$$

Ao agrupar t_3 e t_4 , as transições t_7 e t_8 passam à condição de concorrentes, Figura 45b. Portanto, também podem ser agrupadas,

$$\begin{aligned} t_{g2} &= t_7 \vee t_8 \\ \mathbf{i}_{t_{g2}} &= [\min\{4, 4\}, \max\{6, 8\}] = [4, 8] \end{aligned}$$

Finalmente, toda tarefa **a**, mostrada na Figura 45c, pode ser agrupada em uma única transição t_a , como mostrado na Figura 45d.

$$\mathbf{i}(t_a) = \mathbf{i}(t_1) + \mathbf{i}(t_{g1}) + \mathbf{i}(t_{g2}) = [0, 5] + [2, 5] + [4, 8] = [6, 18]$$

De modo semelhante, as tarefas **b**, **c** e **d** são agrupadas obtendo-se a rede reduzida mostrada na Figura 46 e que corresponde à matriz \mathbf{MT}^3 .

Na Figura 47 é mostrado a rede da Figura 46, sendo vista como uma rede acíclica. Nesta rede nota-se que as transições t_a e t_d , assim como t_c e t_{22} são concorrentes. Portanto, podem ser agrupadas.

O agrupamento dessas transições são, então, como segue:

$$\begin{aligned} t_{g3} &= t_a \parallel t_d \Rightarrow \mathbf{i}(t_{g3}) = [\min\{6, 4\}, \max\{16, 18\}] = [4, 18] \\ t_{g4} &= t_c \parallel t_{22} \Rightarrow \mathbf{i}(t_{g4}) = [\min\{3, 2\}, \max\{13, 5\}] = [2, 13] \end{aligned}$$

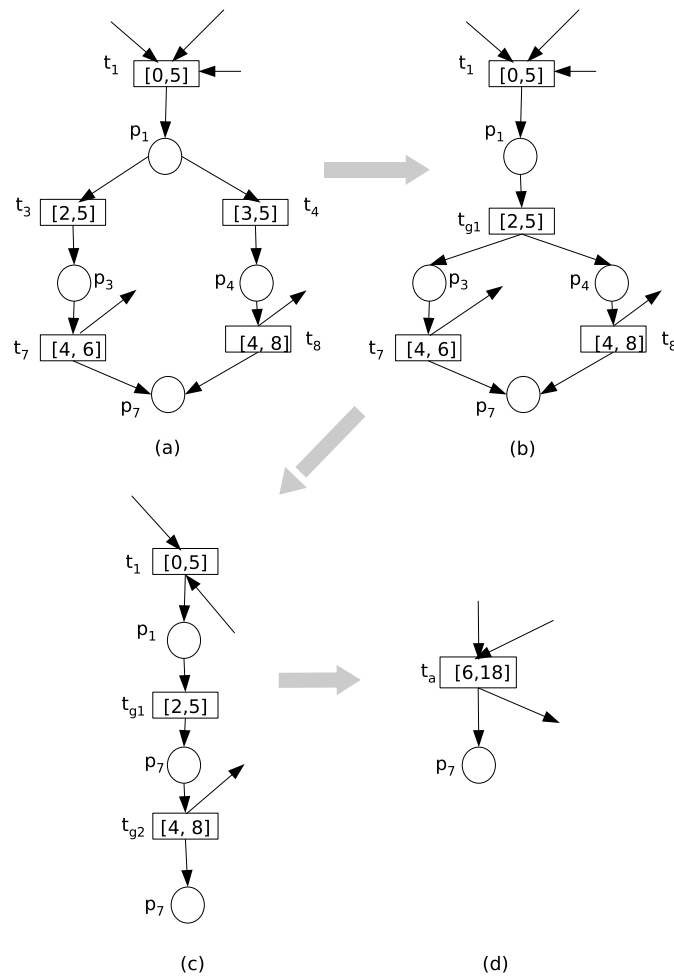


Figura 45: Redução de um módulo conflitante

sendo que "||" significa paralelismo entre as transições.

Na Figura 48 é mostrada uma rede equivalente, obtida pelo processo de redução e tendo seus laços recuperados. Essa rede tem como matriz de transições a matriz reduzida obtida pelo processo matricial.

A partir da rede equivalente, mostrada na Figura 48 ou a partir da matriz reduzida MI, obtém-se a matriz intervalar \mathbf{C} , substituindo cada elemento da MI por seu respectivo intervalo, como a seguir:

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}(i, i) = \mathbf{I}^s(i), \\ \mathbf{C}(i, j) = \mathbf{I}^s(j), & j \leq i \text{ se } t_i \text{ precede } t_j \\ \mathbf{C}(i, j) = 0, & j \leq i \text{ se } t_j \text{ não precede } t_i \\ \mathbf{C}(i, j) = 0, & j > i \end{cases} \quad (6.6)$$

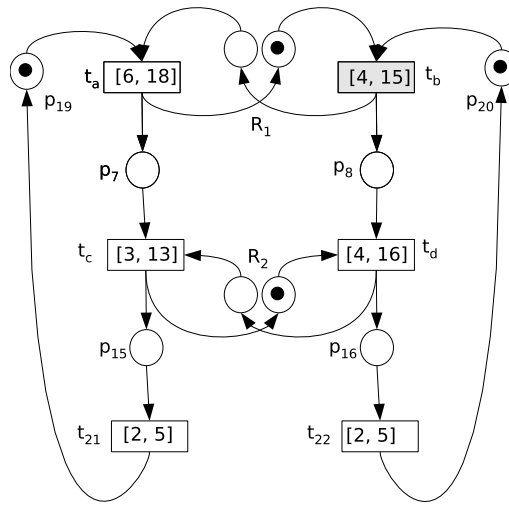


Figura 46: RPT reduzida equivalente à matriz MT^3

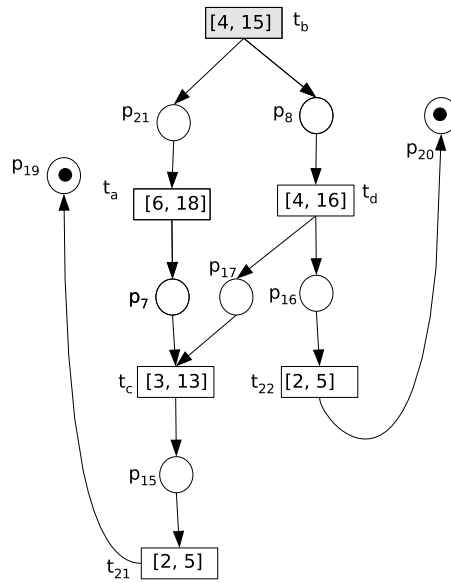


Figura 47: RPT reduzida no início do algoritmo

Assim,

$$C = \begin{pmatrix} t_b & t_{g3} & t_{g4} & t_{21} \\ [4, 15] & 0 & 0 & 0 \\ [4, 15] & [4, 18] & 0 & 0 \\ [4, 15] & [4, 18] & [2, 13] & 0 \\ [4, 15] & [4, 18] & [2, 13] & [2, 5] \end{pmatrix}$$

As redes 46 e 48 são redes equivalentes, porém com diferentes níveis de redução. Para

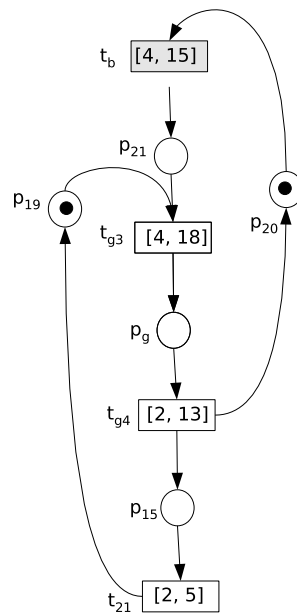


Figura 48: *RPT* reduzida equivalente à matriz MT^4

obter-se a matriz intervalar é preciso que a rede reduzida na forma tal, que suas transições, sejam dependentes umas das outras. Isto significa que, se houver possibilidade de redução de transições ela deve ser feita. A partir da matriz intervalar se pode obter uma análise temporal das *RPTs* sem que seja necessário executar a rede. No próximo capítulo tal equação será explorada.

6.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados dois métodos para redução de *RPTs*. No primeiro método foram usados os mesmos princípios da redução das *RP*s não temporizadas, porém, considerando as restrições de tempo impostas à rede. O método possibilita o agrupamento entre transições e entre lugares da rede original, obtendo-se um modelo reduzido, porém, capaz de gerar um espaço de estados reduzido, mas que contém, de forma compactada, o espaço de estados da rede original. O segundo método apresenta um algoritmo para implementação de um método de redução para uma *RPT*. O método é baseado na relação de ordem entre as transições. Essa relação de ordem é estabelecida não apenas pelas relações causais das transições, mas também devido às relações temporais entre elas. O algoritmo proposto explora estruturas regulares da rede e, através de agrupamento de linhas e colunas, obtém-se uma matriz reduzida e que equivale a uma rede reduzida. Além do agrupamento

das estruturas concorrentes, que permite gerar uma rede equivalente, sem ou com poucas transições persistentes, a rede reduzida possibilita a análise via alcançabilidade, com o número de estados bastante reduzido em relação à rede original. Na maioria dos problemas de redução, qualquer dos dois métodos apresentará a mesma rede reduzida, exceto os casos em que há exclusão mútua. Nestes casos o método baseado em relação de ordem, não capta tal estrutura.

7 Aproximações Intervalares para Estimação de Tempos em *RPTs*

A análise das redes de Petri temporais tem sido feita, basicamente, por meio de métodos enumerativos, os quais relacionam os estados alcançáveis da rede. Nesse caso, o problema de estimação dos tempos de disparos em uma *RPT* tem um horizonte limitado pela necessidade de explicitar todo o espaço de estados. Alguns trabalhos procuram determinar o intervalo de tempo para ocorrência de determinada seqüência de transições, porém, um conjunto de inequações deve ser solucionado [BV95, TYC95, SLK04, PZ91].

Nesse capítulo, usando recursos da álgebra intervalar, é apresentada uma contribuição para o problema de estimação de tempos de execução em uma *RPT*. Inicialmente, desenvolve-se uma expressão algébrica para cálculo de intervalos dinâmicos entre dois estados consecutivos de uma *RPT*. Sob determinadas restrições, essa expressão é transformada em uma equação intervalar, mesmo que para uma classe restrita de redes de Petri. A partir da equação intervalar é possível calcular intervalos de tempo de disparo de transições habilitadas após a ocorrência de uma seqüência de disparo de transições. Utilizando um dos métodos de redução, propostos no Capítulo 6, a equação intervalar é aplicada a uma classe mais ampla de redes de Petri temporais. Por fim, uma aplicação explorando as potencialidades da equação intervalar no cálculo de medidas de desempenho é apresentada.

7.1 Estimação de Intervalos de Tempo em *RPT*

Conforme analisado no Capítulo 4, a análise de uma *RPT* via alcançabilidade consiste em a cada estado estimar o seu sucessor, seja qual for o método ou ferramenta de simulação. Assim, dado um estado S_0 , os métodos permitem avaliar se S_0 é capaz de alcançar algum estado S_1 devido à ocorrência de uma transição. Neste capítulo, entretanto, será explorado o seguinte problema:

Seja S_0 o estado inicial de uma RPT. Assumindo que uma seqüência de transições σ_i é executável a partir de S_0 e o seu disparo pode levar a rede ao estado S_n . Qual deve ser o intervalo de tempo de disparo das transições habilitadas em S_n ?

A essa formulação denomina-se *Estimação de Intervalos de Tempo para uma RPT*, como está ilustrada na Figura 49.

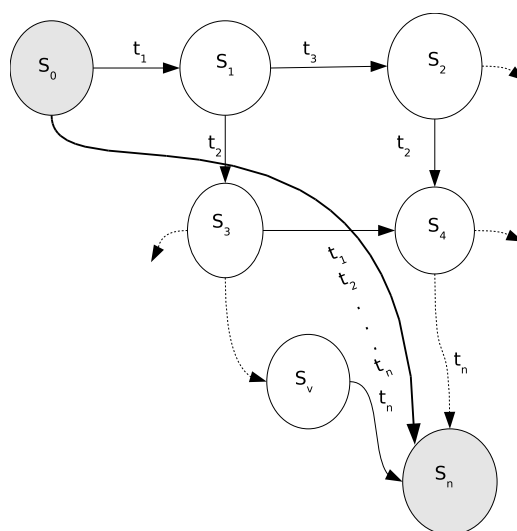


Figura 49: Estimação do estado S_n a partir de S_0

Usando a análise baseada em tempo global, esse problema será transformado em um problema de equação intervalar e através do conceito de aproximação intervalar e rede reduzida será proposta uma estimacão como solução para tal problema.

7.2 Fórmula Algébrica para Cálculo de Intervalos

No capítulo 4, o estado inicial de uma RPT foi definido pelo par $S_0 = \langle M_0, I_0 \rangle$, sendo M_0 a marcação inicial da rede e I_0 o conjunto de intervalos de disparo das transições habilitadas. Suponha que a mudança para um novo estado $S_1 = \langle M_1, I_1 \rangle$, alcançável a partir de S_0 , ocorre devido ao disparo de uma transição t_j no intervalo $i^d = [\delta^d, \Delta^d]$.

$$S_0 \xrightarrow{(t_j, i^d)} S_1$$

O intervalo de disparo de cada transição t habilitada no novo estado S_1 é determinado

como segue:

$$\mathbf{I}_1(t) = \begin{cases} \mathbf{i}^d + \mathbf{I}^s(t), & t \in \mathcal{N}_1 \\ [\max\{\delta^d, \delta_0(t)\}, \Delta_0(t)], & t \in \mathcal{P}_1 \end{cases} \quad (7.1)$$

sendo $[\delta_0, \Delta_0]$ o intervalo de disparo da transição t em S_0 , \mathcal{N}_1 , o conjunto das transições habilitadas a partir do disparo de t_j e \mathcal{P}_1 é o conjunto de transições persistentes, ou seja, transições habilitadas em S_0 e que permaneceram habilitadas em S_1 , mesmo após o disparo de t_j .

Em uma *RPT*, quando há duas ou mais transições habilitadas a disparar, qualquer uma delas pode ser a primeira. Entretanto, dependendo de qual delas dispare primeiro, tal disparo pode interferir nos intervalos de disparos das outras que permaneceram habilitadas. Por exemplo, se as transições t_1 , t_2 e t_3 estão habilitadas em um determinado estado e $[1, 4]$, $[2, 5]$, $[0, 3]$ são seus intervalos de disparo, respectivamente, então, no intervalo $[1, 3]$, qualquer das três transições pode disparar. Considerando que o disparo de qualquer uma delas não desabilita as demais, tem-se que:

- Disparando t_1 , os intervalos de t_2 e t_3 serão $[2, 5]$ e $[1, 3]$, respectivamente.
- Disparando t_2 , os intervalos de t_1 e t_3 serão $[2, 4]$ e $[2, 3]$, respectivamente.
- Disparando t_3 , os intervalos de t_1 e t_2 serão $[1, 4]$ e $[2, 5]$, respectivamente.

Nota-se que o disparo da transição t_3 , foi o único que não modificou os intervalos das demais transições. De um modo geral, tem-se que: se em determinado estado há duas ou mais transições habilitadas a disparar, o disparo daquela que tem o menor limite inferior do intervalo de sensibilização não irá interferir nos intervalos das demais transições. A partir dessa afirmativa, será assumida a seguinte suposição em relação à equação (7.1):

$$\max\{\delta^d, \delta_0(t)\} = \delta_0(t), \quad (7.2)$$

ou seja, entre as transições disparáveis no estado S_0 , deve-se, se possível, escolher entre as disparáveis, aquela com menor limite inferior do intervalo de sensibilização. Uma escolha diferente pode acarretar em um aumento da imprecisão dos intervalos de disparos subsequentes.

Baseado na condição (7.2), a equação (7.1) pode ser reescrita, como segue:

$$\mathbf{I}_1(t) = \begin{cases} \mathbf{i}^d + \mathbf{I}^s(t), & t \in \mathcal{N}_1 \\ [\delta_0(t), \Delta_0(t)] = \mathbf{i}_0(t), & t \in \mathcal{P}_1 \end{cases} \quad (7.3)$$

ou seja, em uma *RPT*, quando ocorre uma mudança de estado, os intervalos das transições recém-habilitadas terão acrescidos aos seus intervalos estáticos, o intervalo de disparo da transição recém-disparada, enquanto que as transições que permaneceram habilitadas, terão seus intervalos de disparo inalterados.

A equação (7.3) também apresenta uma partição do conjunto de transições habilitadas \mathcal{H}_1 em dois conjuntos disjuntos: conjunto de transições recém-habilitadas (ou novas) \mathcal{N}_1 , e conjunto de transições persistentes \mathcal{P}_1 . A partir desses conjuntos, pode-se definir uma representação vetorial para a equação (7.3).

Definição 7.1 (Vetores de Transições) *Seja uma RPT com n transições. Definem-se os vetores \mathbf{h} , \mathbf{n} e \mathbf{p} , como sendo vetores de 0's e 1's, representando transições habilitadas, recém-habilitadas e persistentes, respectivamente. Se o elemento na posição j do vetor tem valor 1, então, a transição correspondente estará recém-habilitada ou é uma transição persistente. Caso contrário, o elemento terá valor 0.*

Assim, a representação dos estados de habilitação das transições passa de uma representação por conjuntos para uma representação vetorial.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbf{h} \\ \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbf{n} \\ \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbf{p} \end{aligned}$$

e, a partir da Equação (7.3), esses vetores guardam entre si a seguinte relação,

$$\mathbf{h} = \mathbf{n} + \mathbf{p} \quad (7.4)$$

Assim, o conjunto de intervalos das transições habilitadas em S_1 , conforme Equação (7.3), pode ser escrito na forma vetorial,

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{n_1} + \mathbf{I}_{p_1} \quad (7.5)$$

sendo, \mathbf{I}_{n_1} o vetor dos intervalos das transições recém-habilitadas, \mathbf{I}_{p_1} é o vetor intervalar das transições habilitadas no estado S_0 e que permaneceram habilitadas no estado S_1 (transições persistentes).

O intervalo dinâmico das transições recém-habilitadas, resulta da soma de um intervalo de disparo com seus intervalos estáticos. Na forma vetorial tem-se, como segue

$$\mathbf{I}_{n_1} = \mathbf{i}^d + \mathbf{I}^s \mathbf{n}_1$$

sendo, $\mathbf{i}^d \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^+$ um simples intervalo e $\mathbf{I}^s \in (\mathbb{I}\mathbb{Q}^+)^n$ um vetor de intervalos.

Para que o intervalo \mathbf{i}^d seja adicionado a cada elemento j de \mathbf{I}^s , em que $\mathbf{n}(j) = 1$, define-se o vetor coluna unitário \mathbf{u} , tal que,

$$\mathbf{I}_{n_1} = \left(\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s \right) \mathbf{n}_1$$

Quanto ao vetor das transições persistentes, os intervalos de disparo permanecem iguais aos do estado anterior, conforme condição (7.2), ou seja

$$\mathbf{I}_{p_1} = \mathbf{I}_0 \mathbf{p}_1$$

Portanto, a equação (7.3) assume a forma vetorial definitiva, como segue:

$$\mathbf{I}_1 = \left(\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s \right) \mathbf{n}_1 + \mathbf{I}_0 \mathbf{p}_1 \quad (7.6)$$

sendo,

$\mathbf{I}_1 \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^n$ o vetor cujos elementos são os intervalos de disparo para as transições habilitadas ou são zeros para as transições desabilitadas;

$\mathbf{I}^s \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^n$ o vetor dos intervalos estáticos;

\mathbf{i}^d o intervalo de disparo da transição recém-disparada, t_j ;

\mathbf{u} vetor coluna unitário.

Para o estado inicial, o vetor intervalos de disparos é dado por $\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}^s \mathbf{h}_0$, sendo \mathbf{h}_0 o vetor das transições habilitadas nesse estado.

A equação (7.6), pode ser calculada a partir das operações definidas na Seção 2 e da seguinte operação:

1. Produto componente a componente de um vetor intervalar por um vetor pontual.

$$\begin{pmatrix} [a_1, b_1] \\ \vdots \\ [a_n, b_n] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1, b_1] \cdot q_1 \\ \vdots \\ [a_n, b_n] \cdot q_n \end{pmatrix}$$

sendo,

$$[a \ b] q_i = \begin{cases} [a, b] & \text{se } q_i = 1 \\ 0 & \text{se } q_i = 0 \end{cases}$$

Neste caso, $q_i = 0$ representa transição desabilitada, enquanto $q_i = 1$ representa transição habilitada. Desta forma, pode-se diferenciar uma transição não habilitada 0 de uma outra habilitada, porém, com intervalo $[0, 0]$.

A equação (7.6) é uma forma fechada para o cálculo de intervalos de disparos das transições em uma *RPT*. Por meio dessa equação podem-se mapear todos os intervalos possíveis de serem alcançados pela rede, sem que seja necessário executá-la.

Generalizando, um estado S_{k+1} , alcançável a partir de um estado S_k , devido ao disparo de uma transição t_d , pode ser caracterizado pelo par $\langle \mathbf{M}_{k+1}, \mathbf{I}_{k+1} \rangle$, obtido por:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_k + \text{Post}(t) - \text{Pre}(t) \\ \mathbf{I}_{k+1} = (\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) \mathbf{n}_{k+1} + \mathbf{I}_k \mathbf{p}_{k+1} \end{cases} \quad (7.7)$$

O par de equações (7.7) caracteriza completamente a dinâmica de uma *RPT*, e possibilita obter resultados algébricos para estimar a evolução dos intervalos de disparos das transições, sem que a rede seja executada.

Exemplo 7.1 Baseando-se na *RPT* mostrada na figura 50 e aplicando a equação (7.7), determina-se o intervalo de tempo necessário para que a transição t_4 possa ser disparada.

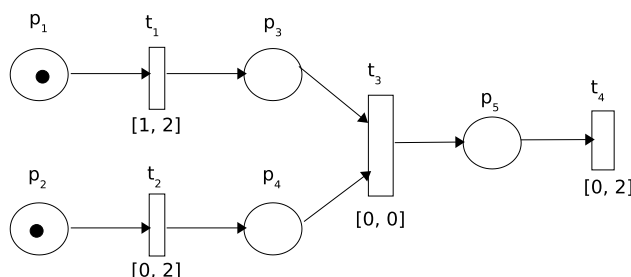


Figura 50: *RPT* para o Exemplo 7.1

- As matrizes de entrada e saída da rede e o vetor de intervalos estáticos são dados a seguir:

$$\text{Pre} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Pos} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}^s = ([1,2] [0,2] [0,0] [0,2])^T$$

- O estado inicial $S_0 \langle M_0, \mathbf{I}_0 \rangle$ é caracterizado como segue:

$$\begin{aligned} M_0 &= [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ M_0 \geq \text{Pre}(t_1), M_0 \geq \text{Pre}(t_2) &\Rightarrow h_0 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{I}_0 = \mathbf{I}^s h_0 &= \left((1,2] \ [0,2] \ 0 \ 0 \right)^T \end{aligned}$$

Portanto, no estado inicial, as transições t_1 e t_2 estão habilitadas. Usando a condição (7.2), a transição a ser disparada será a transição t_2 .

- Disparando a transição t_2 , o seu intervalo de disparo será $i_d = [0, 2]$. O novo estado $S_1 = \langle M_1, \mathbf{I}_1 \rangle$, pode ser calculado, como segue:

$$\begin{aligned} M_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \\ M_1 \geq \text{Pre}(t_1) &\Rightarrow h_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ n_1 = \max\{0, h_1 - h_0 \setminus \{t_2\}\} &= 0 \Rightarrow h_1 = p_1 \\ \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 p_1 &= \left([1,2] \ 0 \ 0 \ 0 \right)^T \end{aligned}$$

- Disparando a transição t_1 , no intervalo $i^d = [1, 2]$, um novo estado $S_2 = \langle M_2, \mathbf{I}_2 \rangle$ é alcançado e calculado, como segue:

$$\begin{aligned} M_2 &= [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T \\ M_2 \geq \text{Pre}(t_3) &\Rightarrow h_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \\ n_2 = \max\{0, h_2 - h_1 \setminus \{t_1\}\} &= h_2 \Rightarrow p_2 = 0 \\ \mathbf{I}_2 = (i^d u + \mathbf{I}^s) n_2 &= \left(0 \ 0 \ [1,2] \ 0 \right)^T \end{aligned}$$

- Disparando a transição t_3 , no intervalo $\mathbf{i}^d = [1, 2]$, um novo estado $S_3 = \langle M_3, I_3 \rangle$ é alcançado, e pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} M_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ M_3 \geq \text{Pre}(t_4) &\Rightarrow h_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ n_3 &= \max\{0, h_3 - h_2 \setminus \{t_3\}\} = h_3 \Rightarrow p_3 = 0 \\ I_3 &= (\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) n_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & [1, 4] \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

O intervalo $I_3(4) = [1, 4]$ é o intervalo de disparo da transição t_4 e esse intervalo indica o intervalo de tempo para ocorrência do disparo da transição t_4 , contado a partir do início da execução da rede. Qualquer dos caminhos usados para, a partir da marcação M_0 , alcançar a marcação M_3 , o intervalo de tempo estará contido no intervalo $[1, 4]$. O intervalo I_3 é uma aproximação intervalar externa.

7.3 Equação Linear Intervalar para uma RPT

A equação (7.7) possibilita o cálculo dos intervalos de disparo das transições habilitadas devido ao disparo de uma única transição. Para algumas classes de RPT, tais como alguns grafos marcados, redes de livre escolha e máquinas de estado, entre outras, cada estado da rede pode apresentar apenas uma transição disparável ou o disparo de uma transição desabilita todas as outras que estavam habilitadas. Na figura 51, é mostrado um exemplo de uma RPT que satisfaz tal condição. Nestes casos, a cada estado alcançado pela rede, o vetor de transições persistentes será nulo, e o termo correspondente na equação (7.7) se anula, ou seja,

$$p = 0 \Rightarrow h = n \quad (7.8)$$

Assim, a equação (7.7) assume, para essa classe particular de RPT, a seguinte forma:

$$I_k = (\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) h_k, \quad p_k = 0 \quad (7.9)$$

Na análise dessa classe das RPTs, pode-se avançar na evolução da rede com a execução de uma seqüência de transições. Supondo que uma seqüência de disparos de transições, σ , seja executável, a partir do estado S_0 , e alcance o estado S_k . Como não há transições persistentes em cada um dos estados intermediários, têm-se que:

$$S_0 \xrightarrow{\sigma_1} S_1 \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_k} S_k \approx S_0 \xrightarrow{\sigma} S_k$$

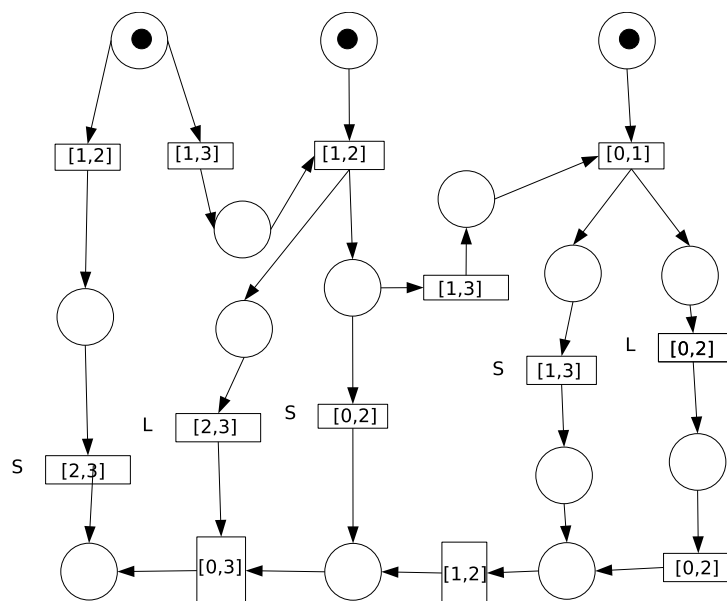


Figura 51: RPT que não apresenta transição persistente

Sendo a seqüência σ executável, é possível calcular os intervalos de disparo das transições habilitadas em S_k sem recorrer aos métodos enumerativos?

Usando a equação (7.9), tem-se para cada estado os seguintes intervalos de disparo:

$$\bullet S_0 \begin{cases} \mathbf{I}_0 = \mathbf{I}^s \mathbf{h}_0, \\ \mathbf{i}^d = \mathbf{I}^s(\sigma_1) \end{cases}$$

No estado inicial S_0 , as transições habilitadas têm como intervalo de disparo seus intervalos estáticos.

Disparando σ_1 a rede alcança o estado S_1 .

$$\bullet S_1 \begin{cases} \mathbf{I}_1 = (\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_1 = (\mathbf{I}^s(\sigma_1) \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{i}^d = \mathbf{I}^s(\sigma_1) + \mathbf{I}^s(\sigma_2) \end{cases}$$

No estado S_1 cada transição habilitada tem como intervalo dinâmico a soma do seu intervalo estático com o intervalo de disparo de σ_1 .

Com o disparo da transição σ_2 seu intervalo de disparo será o acúmulo dos intervalos desde o início da execução da rede.

$$\bullet S_2 \begin{cases} \mathbf{I}_2 = (\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_2 = ((\mathbf{I}^s(\sigma_1) + \mathbf{I}^s(\sigma_2)) \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{i}^d = \mathbf{I}^s(\sigma_1) + \mathbf{I}^s(\sigma_2) + \mathbf{I}^s(\sigma_3) \end{cases}$$

⋮

- $S_{k-1} \begin{cases} \mathbf{I}_{k-1} = (\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_{k-1} = (\mathbf{I}^s(\boldsymbol{\sigma}_1) \mathbf{u} + \cdots + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_{k-1} \\ \mathbf{i}^d = \mathbf{I}^s(\boldsymbol{\sigma}_1) + \cdots + \mathbf{I}^s(\boldsymbol{\sigma}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{I}^s(\boldsymbol{\sigma}_i) \end{cases}$
- $S_k \begin{cases} \mathbf{I}_k = (\mathbf{i}^d \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_k = (\mathbf{I}^s(\boldsymbol{\sigma}_1) \mathbf{u} + \cdots + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_k \end{cases}$

Portanto, as transições habilitadas no estado S_k terão seus intervalos de disparo calculados pelo vetor de intervalos

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_k &= (\sum_{i=0}^k \mathbf{I}^s(\boldsymbol{\sigma}_i) \mathbf{u} + \mathbf{I}^s) \mathbf{h}_k \\ \mathbf{p} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Para cada transição habilitada em S_k , o intervalo de disparo será igual à soma dos intervalos estáticos das transições da seqüência, adicionado ao seu intervalo estático.

Assumindo como sendo n , o número de transições na rede e definindo o vetor \mathbf{q} , de θ 's e I 's, como sendo um vetor de disparo de transições, a equação (7.10) pode ser escrita para cada transição, como a seguir,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n(\boldsymbol{\sigma}) &= (\sum_{i=1}^n \mathbf{I}^s(\boldsymbol{\sigma}_i)) \mathbf{q} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.11)$$

A equação (7.11) pode ser vista como um produto intervalar entre o vetor de intervalos estáticos da rede \mathbf{I}^s e o vetor pontual \mathbf{q} , que representa as quantidades de disparos das transições, ou seja, $\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}^+)^n$. O resultado da equação (7.11) é um intervalo que representa o tempo de disparo para uma transição habilitada, após uma seqüência de disparo de transições. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_n &= (\mathbf{I}^s)^T \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_n &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Considerando $\mathbf{c} = (\mathbf{I}^s)^T$, a equação (7.12) assume a forma de uma equação linear intervalar do tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{c} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.13)$$

sendo, $\mathbf{c} \in \mathbb{IQ}^n$, $\mathbf{i} \in \mathbb{IQ}$, $\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}^+)^n$.

A equação (7.13) permite acompanhar a evolução dos intervalos de disparo em uma RPT e possibilita o cálculo do intervalo de disparo de uma transição habilitada em S_k , após uma seqüência de disparo de transições, a partir de S_0 , sem que seja necessário determinar estados intermediários. Porém, a rede deve ser: segura, cíclica (repetitiva) e não persistente.

Apesar da restrição $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ter limitado a uma restrita classe de RPT, a aplicação da

equação (7.13) é um importante meio para a formulação de possibilidades para análise de uma RPT. Cálculos como medidas de desempenho, validação de seqüências de execução e também solução de problemas como alcançabilidade de intervalos, entre outros, de sistemas com restrições temporais.

O intervalo \mathbf{i} é delimitado pelos valores mínimos e máximos para a execução de uma seqüência e, juntamente com a equação de estado das RPs, podem mapear toda a evolução de uma RPT.

No exemplo a seguir, alguns problemas serão explorados, enquanto outros aparecerão ao longo das demais seções.

Exemplo 7.2 A RPT mostrada na Figura 52 é uma rede segura denominada *closed-loop*, e é muito utilizada na modelagem de protocolos de comunicação. Um transmissor envia uma mensagem a partir de uma caixa eletrônica e também ativa uma unidade de recepção para sinalizar o momento do envio de uma nova mensagem. Na Tabela 2 é mostrado o significado de cada lugar e transição da rede.

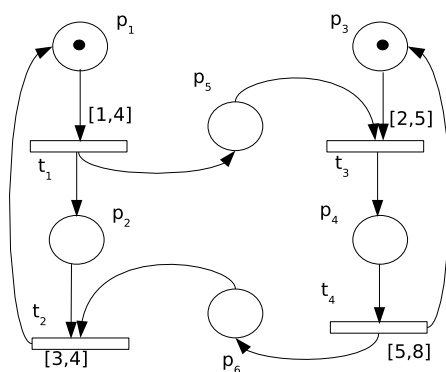


Figura 52: Exemplo de uma RPT *closed-loop*

A marcação inicial da rede é $M_0 = [1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$ e o vetor intervalos estáticos

$$\mathbf{I}^s = ([1, 4], [3, 4], [2, 5], [5, 8])^T$$

Assim, a equação (7.13) é escrita como segue,

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} [1, 4] \\ [3, 4] \\ [2, 5] \\ [5, 8] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$$

Tabela 2: Significado dos lugares e transições da RPT mostrada na Figura 52

Lugar	Descrição
p_1	transmissor pronto para enviar uma mensagem
p_2	transmissor em estado de recepção
p_3	receptor pronto pra receber mensagem
p_4	mensagem recebida pelo receptor
p_5	mensagem sendo transmitida
p_6	mensagem confirmando sucesso na recepção
t_1	transmissor enviou mensagem
t_2	transmissor elaborar nova mensagem
t_3	receptor recebeu mensagem
t_4	receptor envia confirmação e prepara-se para receber nova mensagem

- Sendo $\mathbf{q} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, ou seja, disparando todas as transições, o intervalo de disparo da última transição é obtido como segue:

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} [1, 4] \\ [3, 4] \\ [2, 5] \\ [5, 8] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [11, 21]$$

Esse intervalo representa o intervalo de disparo da seqüência de transições $\sigma = t_1 - t_2 - t_3 - t_4$, independente da ordem de disparo e esse intervalo corresponde ao tempo de execução da seqüência. Devido a $\mathbf{m}_0 = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$, o vetor q representa seqüência a seguir,

$$M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_3} M_2 \xrightarrow{t_4} M_3 \xrightarrow{t_2} M'_0$$

- O resultado da equação (7.13) representa o intervalo de tempo para execução dessa seqüência e é denominado intervalo de tempo global. Cada transição da rede tem seu intervalo de tempo global (tempo contado a partir da execução da rede), e terá seu valor dependente do instante de ocorrência na seqüência.
 - Se a marcação inicial da rede é M_0 , então, a seqüência de disparo é dada por $\sigma = t_1 - t_3 - t_4 - t_2$. Para o primeiro ciclo, os tempos globais das transições são calculados como segue:

$$\mathbf{I}_G^1(t_1) = [1, 4]$$

$$\mathbf{I}_G^1(t_3) = \mathbf{I}_G^1(t_1) + \mathbf{I}^s(t_3) = [1, 4] + [2, 5] = [3, 9]$$

$$\mathbf{I}_G^1(t_4) = \mathbf{I}_s(t_4) + \mathbf{I}_G^1(t_3) = [5, 8] + [3, 9] = [8, 17]$$

$$\mathbf{I}_G^1(t_2) = \mathbf{I}_s(t_2) + \mathbf{I}_G^1(t_4) = [3, 4] + [8, 17] = [11, 21]$$

- Para os demais ciclos, o tempo global de cada transição é obtido adicionando o tempo no primeiro ciclo ao tempo de ciclo da rede vezes o número de ciclos. Assim,

$$\mathbf{I}_G^k = \mathbf{I}_G^1 + \mathbf{d}ku, \quad (7.14)$$

sendo, \mathbf{I}_G^k o vetor intervalo de tempo global após $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ disparos de cada transição; $\mathbf{d} = [\underline{d}, \bar{d}] \in \mathbb{IR}$ é intervalo de tempo de um ciclo.

- A Tabela 3 mostra os tempos globais para os primeiros três ciclos da rede.

Tabela 3: Tempos globais de cada transição

σ	\mathbf{I}^s	\mathbf{I}_G^1 $k = 0$	\mathbf{I}_G^2 $k = 1$	\mathbf{I}_G^3 $k = 2$
t_1	[1, 4]	[1, 4]	[12, 25]	[23, 46]
t_3	[2, 5]	[3, 9]	[14, 30]	[25, 51]
t_4	[5, 8]	[8, 17]	[19, 38]	[40, 59]
t_2	[3, 4]	[11, 21]	[22, 42]	[33, 63]

- O intervalo de tempo para um ciclo da rede foi obtido igual a [11,21], porém, em problemas reais trabalha-se com ciclos pontuais. Para um ciclo de 15 u.t. pode-se obter os tempos de cada transição, como segue.

Têm-se que,

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} [1, 4] \\ [3, 4] \\ [2, 5] \\ [5, 8] \end{pmatrix}^T \mathbf{q}_1 = 15$$

Deve-se calcular os inteiros $\{\mathbf{c} \in \mathbf{c} \mid \mathbf{c}\mathbf{q}_1 = 15\}$.

Assumindo valores inteiros para c ,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 15 \\ 1 \leq c_1 \leq 4 \\ 3 \leq c_2 \leq 4 \\ 2 \leq c_3 \leq 5 \\ 5 \leq c_4 \leq 8 \end{array} \right. \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 4 \\ 3 & 3 & \dots & 4 \\ 3 & 4 & \dots & 2 \\ 8 & 7 & \dots & 5 \end{pmatrix}$$

Assim, pode-se gerar os chamados estados inteiros [PZ98], ou seja, pode-se ramificar o intervalo de tempo de disparo das transições habilitadas, gerando um grafo de alcançabilidade bem mais amplo.

7.4 Equação Intervalar Geral para uma RPT

A Equação (7.13) foi obtida considerando a rede não persistente, segura e reversível. A partir dos resultados do Capítulo 6 é possível ampliar a classe de RPT para a qual a equação intervalar (7.13) pode ser aplicada. Portanto, para uma RPT, na sua forma reduzida, pode-se determinar os intervalos de disparo das transições da rede, usando a equação intervalar, agora na forma matricial, como segue:

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}(i, i) = \mathbf{I}^s(i), \\ \mathbf{C}(i, j) = \mathbf{I}^s(j), & j \leq i \quad \text{se } t_i \text{ precede } t_j \\ \mathbf{C}(i, j) = 0, & j \leq i \quad \text{se } t_j \text{ não precede } t_i \\ \mathbf{C}(i, j) = 0, & j > i \end{cases} \quad (7.15)$$

A Equação intervalar 7.13 assume, então, uma forma matricial, como segue,

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}q \quad (7.16)$$

sendo que, $\mathbf{C} \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^{r \times r}$ é a matriz de intervalos de uma RPT, $q \in (\mathbb{Z}^+)^r$ é o vetor quantidade de disparos das transições e $\mathbf{I} \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^n$ são as restrições de tempo para os caminhos formados pelas linhas de \mathbf{C} .

A equação (7.16) é uma fórmula geral para análise temporal da rede. Ela amplia a classe das RPT, para a qual pode-se estimar a dinâmica dos intervalos de disparo das transições, com a mudança de estado da rede. Também possibilita, sob o ponto de vista temporal, a verificação e a validação de seqüências de disparos de transições, sem que seja necessária a execução da rede.

Nota-se que a equação (7.13) passa a ser um caso particular da equação (7.16), sendo o

vetor \mathbf{c} a última linha da matriz \mathbf{C} .

Com a definição da matriz intervalar torna-se possível a estimação do intervalo de disparo de todas as transições da rede. Ela também possibilita expressar restrições temporais para uma região da rede, sem que seja necessário analisar toda a rede. Para isso, basta que a matriz \mathbf{C} seja a matriz intervalar equivalente à região desejada.

A Equação (7.7) pode agora ser generalizada, como segue,

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{D}\mathbf{q} \\ \mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{q} \end{cases} \quad (7.17)$$

Exemplo 7.3 Atribuindo à matriz \mathbf{MI} , obtida no Exemplo 6.3, um vetor de intervalos estáticos dado por $\mathbf{F} = ([1, 2] [2, 3] [1, 4] [1, 2])^T$ e usando a equação (7.16), obtém-se os seguintes resultados:

Matriz Intervalar e Rede Equivalente

Substituindo os intervalos estáticos por suas posições na matriz \mathbf{M}_I obtém-se a matriz intervalar \mathbf{C} . A última linha da matriz \mathbf{C} , geralmente guarda todas as relações de precedência, quando isso ocorre ela pode ser representada por uma rede equivalente, como a rede cíclica, mostrada na Figura 53.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [1, 2] & 0 & 0 & 0 \\ [1, 2] & [2, 3] & 0 & 0 \\ [1, 2] & [2, 3] & [1, 4] & 0 \\ [1, 2] & [2, 3] & [1, 4] & [1, 2] \end{pmatrix}$$

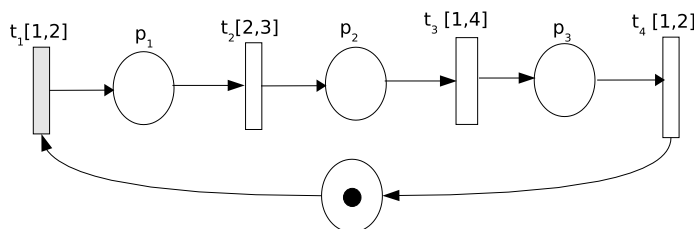


Figura 53: RPT cíclica equivalente para a matriz \mathbf{C}

Na sua forma padrão, a equação intervalar é dada como segue:

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{q} = \begin{pmatrix} [1, 2] & 0 & 0 & 0 \\ [1, 2] & [2, 3] & 0 & 0 \\ [1, 2] & [2, 3] & [1, 4] & 0 \\ [1, 2] & [2, 3] & [1, 4] & [1, 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}.$$

Para cálculo dos intervalos de disparo das transições, a equação (7.16) pode assumir formas particulares, conforme o tipo de rede a ser analisada.

1. Rede Cíclica Segura

Neste caso, todos os lugares da rede podem receber no máximo uma marca por vez e a rede assume a forma da Figura 53. Considerando a rede com uma marcação inicial, o intervalo de tempo de disparo para um ciclo de execução que equivale à seqüência de disparo $t_1 - t_2 - t_3 - t_4$, têm-se,

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{q} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [3, 5] \\ [4, 9] \\ [5, 11] \end{pmatrix}$$

sendo, $\mathbf{q} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.

Em uma rede cíclica segura, portanto, a aproximação intervalar para o disparo de uma seqüência de transições obtém-se diretamente da soma dos intervalos que compõem a rede equivalente. Neste caso, a aproximação intervalar contém do menor ao maior tempo para a execução da seqüência, ou seja, para \mathbf{q} fixo,

$$\{\forall \mathbf{C} \in \mathbf{C}, \exists \mathbf{I} \in \mathbf{I} \mid \mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{q}\}$$

O vetor \mathbf{I} , portanto, é um envelope intervalar contendo desde o pior até o melhor tempo para uma execução \mathbf{q} .

De forma semelhante à Seção 7.3, para se obter o intervalo de tempo global de cada transição pertencente à seqüência usa-se a equação (7.14). Porém, para o primeiro ciclo de execução da rede, cada elemento do vetor $\mathbf{I}(j)$ representa o tempo global da transição t_j . Assim, para o primeiro ciclo, o vetor tempo global da rede é calculado como segue,

$$\mathbf{I}_G^1 = \mathbf{C}\mathbf{q}$$

para $\mathbf{q} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.

Para calcular o tempo global de uma transição em um ciclo qualquer da rede, deve-se usar a Equação (7.14). Para o segundo ciclo, os tempos globais das transições, são calculados como segue,

$$\mathbf{I}_G^2 = \mathbf{C}q + \mathbf{d}ku = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [3, 5] \\ [4, 9] \\ [5, 11] \end{pmatrix} + [5, 11] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [6, 13] \\ [8, 16] \\ [9, 20] \\ [10, 22] \end{pmatrix}$$

sendo, $q = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.

Na Figura 54 é mostrado um exemplo de uma rede cíclica segura cuja equivalente é a rede da Figura 53.

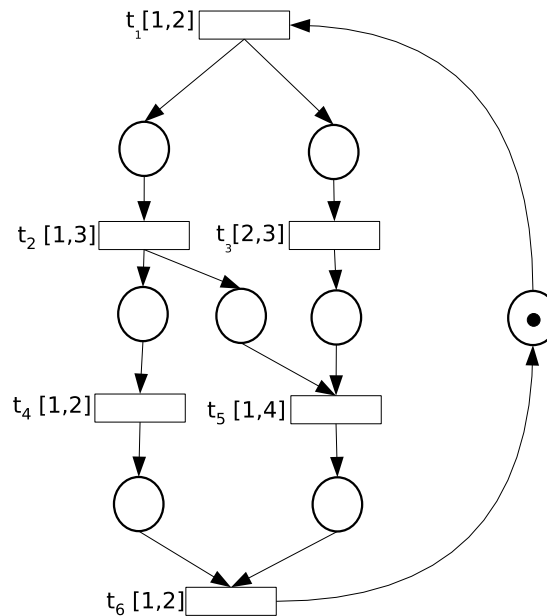


Figura 54: Grafo marcado temporal cíclico

2. Rede Acíclica Segura

Para as redes acíclicas, como não há ciclo, costuma-se calcular o fluxo de marcas por unidade de tempo para uma transição da rede, correspondendo à taxa de disparo da transição. Para obter essa taxa, uma rede acíclica pode ser vista como sendo uma rede cíclica, com capacidade suficiente para manter contínuo o fluxo de marcas entrando na rede. Dessa forma, no lugar de alimentação da rede cíclica equivalente, deve haver um número de marcas, no mínimo igual ao número de lugares na rede

acíclica. Considerando os dados do Exemplo 7.3, uma rede acíclica é mostrada na Figura 55, sendo a parte sombreada correspondente ao lugar de alimentação da rede cíclica equivalente.

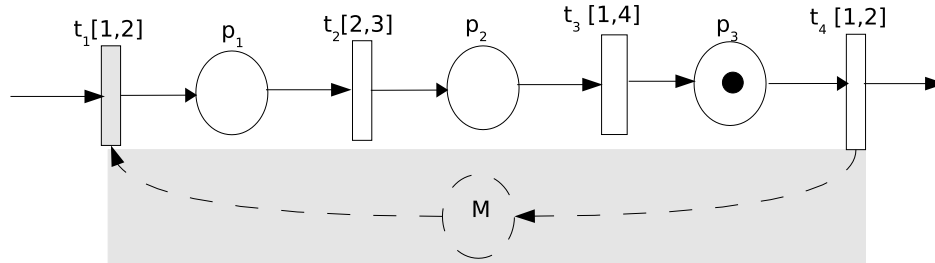


Figura 55: RPT acíclica e segura

Como a rede é segura, cada lugar da rede só pode receber uma marca por vez. Assim, para $M = 3$, têm-se o seguinte intervalo de tempo para que as três marcas completem um ciclo:

I_G^1	$t_1 [1, 2]$	$t_2 [3, 5]$	$t_3 [4, 9]$	$t_4 [5, 11]$		
I_G^2		$t_1 [4, 7]$	$t_2 [6, 10]$	$t_3 [7, 14]$	$t_4 [8, 16]$	
I_G^3			$t_1 [7, 12]$	$t_2 [9, 15]$	$t_3 [10, 19]$	$t_4 [11, 21]$

- A primeira marca faria o percurso num intervalo de tempo igual ao caso da rede cíclica segura, ou seja, não sofre qualquer influência causada pela intercalação¹. O tempo global para a primeira marca, portanto, é o menor intervalo de tempo de ciclo da rede.
- A segunda marca é mantida no lugar inicial, até que a primeira marca permita que ela entre na rede. O tempo global inicial, para a segunda marca habilitar a transição t_1 , é obtido a partir do tempo decorrido desde o início da execução da rede, acrescido do intervalo estático da transição t_1 .
- A terceira marca, idem com relação à segunda.

Para que as três marcas completem o ciclo, o intervalo de tempo pode ser obtido a partir desses limites, ou seja,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_G^1(t_4) \cap \mathbf{I}_G^2(t_4) \cap \mathbf{I}_G^3(t_4) = [5, 11] \cap [8, 16] \cap [11, 21] = [11, 21].$$

Esse tempo corresponde a um ciclo médio na rede cíclica com três marcas, logo, o intervalo de tempo médio para uma marca seria $[3, 7] \text{ut} / \text{marcas}$. Isto significa que em

¹Intercalação é o efeito o domínio que uma transição exerce sobre o da outra

uma rede acíclica segura na qual cada um dos seus lugares possui uma marca, a taxa média de disparo da transição de saída equivale ao tempo de ciclo por marca de uma rede cíclica segura equivalente.

Baseado nos intervalos obtidos, o intervalo de tempo global, correspondente à taxa de disparo da transição de saída, em uma rede acíclica é calculado como segue:.

- $\mathbf{I}_G^1(t_4) = [5, 11]$
- $\mathbf{I}_G^2(t_4) = \mathbf{I}_G^1(t_4) + (\mathbf{I}^s(t_1) + \mathbf{I}^s(t_2))$
- $\mathbf{I}_G^3(t_4) = \mathbf{I}_G^1(t_4) + 2(\mathbf{I}^s(t_1) + \mathbf{I}^s(t_2)) = \mathbf{I}_G^1 + 2\sum_{i=1}^2 \mathbf{I}^s(t_i)$

Seja e uma matriz identidade de ordem igual ao número de transições da rede, têm-se, então:

$$\bullet e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Assumindo P como sendo o número de lugares de uma rede acíclica na sua forma reduzida, como mostrado na Figura 55, o intervalo de tempo \mathbf{i}_g , para que as M marcas atravessem a rede, sendo $M \leq P$ é calculado pela a aproximação intervalar dada pela equação (7.16), acrescida de um fator, como segue:

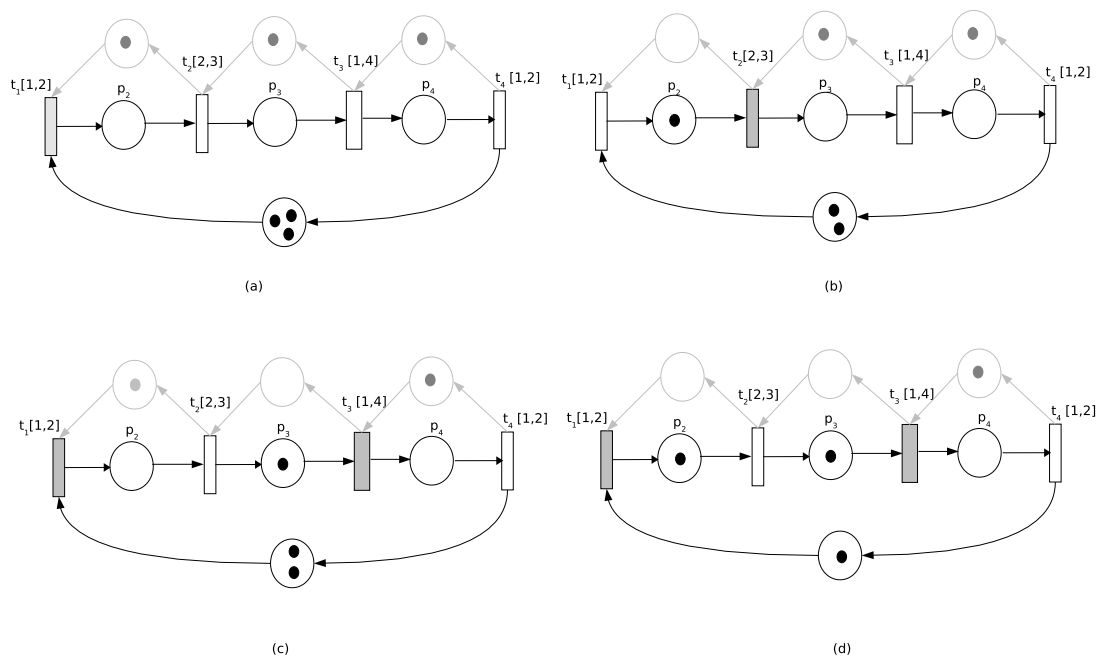
$$\mathbf{i}_g = \mathbf{c}q + \mathbf{c}q_n = \mathbf{c}(q + q_n) \quad (7.18)$$

sendo, $\mathbf{c} \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, $q_n = (M - 1) (\sum_{i=1}^{M-1} e_i)^T$.

A equação (7.18), também pode ser utilizada para calcular tempo de ciclo de uma rede cíclica "semi-segura", ou seja, uma rede cíclica com P lugares sendo, $(P - 1)$ lugares seguros e um lugar k -limitado. Na Figura 56a é mostrado uma rede semi-cíclica contendo 4 lugares, porém, três desses lugares são lugares seguros, ou seja, a marcação de cada desses lugares é no máximo igual a 1. Nas Figuras 56b, c e d são mostrados diferentes estados dessa rede.

3. Rede Acíclica K -Limitada

Cada lugar da rede acíclica tem capacidade de receber no máximo k marcas. Neste caso, pode-se usar o resultado anterior, passando a rede acíclica de k -limitada para uma rede "semi-segura". Para uma rede acíclica com P lugares, têm-se as seguintes relações com rede segura:

Figura 56: *RPT* semi-cíclica

Número de Lugares	k -limitada	Cíclica Segura
P=2	k=2	M=1
	k=4	M=2
P=3	k=3	M=1
	k=6	M=2
	k=9	M=3

7.5 Aplicações

Nesta seção serão apresentadas algumas aplicações que exploram os resultados obtidos nesse capítulo. Usando a equação intervalar geral pode-se obter medidas como: tempo de ciclo, tempo de execução de tarefas, programação para utilização de recursos, entre outros. Além disso, explorando os resultados do Capítulo 6, será feita uma análise sobre o grafo de alcançabilidade da rede mostrada na Figura 44. Para isso, será utilizada sua rede equivalente mostrada na Figura 57.

A partir da rede equivalente, mostrada na Figura 57 ou a partir da matriz reduzida MI, obtém-se a matriz intervalar C , substituindo cada elemento da MI por seu respectivo intervalo, como seguir:

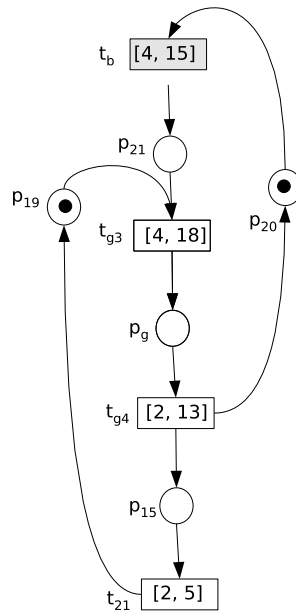


Figura 57: RPT reduzida obtida na aplicação do Capítulo 6

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}
 & t_b & t_{g3} & t_{g4} & t_{21} \\
 [4, 15] & 0 & 0 & 0 \\
 [4, 15] & [4, 18] & 0 & 0 \\
 [4, 15] & [4, 18] & [2, 12] & 0 \\
 [4, 15] & [4, 18] & [2, 12] & [2, 5]
 \end{pmatrix}$$

Usando a equação intervalar (7.16), pode-se calcular aproximações intervalares e datas para execução de determinadas tarefas do sistema. Além disso, algumas medidas de desempenho podem ser obtidas via equação intervalar.

1. Equação intervalar

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix}
 [4, 15] & 0 & 0 & 0 \\
 [4, 15] & [4, 18] & 0 & 0 \\
 [4, 15] & [4, 18] & [2, 13] & 0 \\
 [4, 15] & [4, 18] & [2, 13] & [2, 5]
 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}
 q_1 \\
 q_2 \\
 q_3 \\
 q_4
 \end{pmatrix}$$

2. Tempo de ciclo

Um ciclo representa o tempo, ou intervalo de tempo, para se completar um serviço. Neste caso, corresponde ao tempo entre a habilitação da transição t_b e o disparo da

transição t_{21} . Usando a equação intervalar para o sistema, obtém-se o intervalo de tempo correspondente, como segue:

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}q = \begin{pmatrix} [4, 15] \\ [8, 33] \\ [10, 46] \\ [12, 51] \end{pmatrix}$$

sendo, $q = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.

O intervalo $[12, 51]$ é uma aproximação intervalar para os possíveis tempos necessários para se completar um serviço. Na realidade, quando ocorre o disparo da última transição, representando a disponibilidade para realizar novo serviço, este já foi inicializado pelo servidor R_1 , significando que o intervalo real para um ciclo, pode ser menor que o calculado.

3. Tempo para execução de cada tarefa

Na rede reduzida, os tempos estão associados às transições agrupadas, correspondendo, portanto, à execução conjunta de tarefas. Os tempos globais dessas tarefas são obtidos na rede original ou a partir dos tempos da rede reduzida equivalente, como segue,

Para a rede reduzida, mostrada na Figura 48, as transições t_{g3} e t_{g4} tiveram os seguintes tempos globais:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_G(t_{g3}) &= [8, 33] \\ \mathbf{i}_G(t_{g4}) &= [10, 46] \end{aligned}$$

A transição t_{g3} resulta do seguinte agrupamento:

$t_{g3} = t_a \parallel t_d$, logo,

$$\mathbf{i}(t_{g3}) = [\min\{\delta_a, \delta_d\}, \max\{\Delta_a, \Delta_d\}]$$

.

Sendo $\mathbf{i}(t_a) = [\delta_a, \Delta_a] = [6, 18]$ e $\mathbf{i}(t_d) = [\delta_d, \Delta_d] = [4, 16]$, têm-se :

$$\begin{aligned} t_{g3} : [4, 18] &\xrightarrow{\mathbf{d}} [8, 33] \\ t_a : [6, 18] &\xrightarrow{\mathbf{d}} [?, 33] \\ t_d : [4, 16] &\xrightarrow{\mathbf{d}} [8, ?] \end{aligned}$$

Como $\mathbf{i}_G(t_{g3})$ e $\mathbf{i}(t_{g3})$ são intervalos dependentes, então, \mathbf{d} pode ser calculado usando a subtração dependente, como segue,

$$\mathbf{i}_G(t_{g3}) = \mathbf{i}(t_{g3}) + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{i}_G(t_{g3}) \ominus \mathbf{i}(t_{g3}) = [4, 15]$$

Assim,

$$\mathbf{i}_G(t_a) = \mathbf{i}(t_a) + d = [10, 33]$$

$$\mathbf{i}_G(t_d) = \mathbf{i}(t_d) + d = [8, 31]$$

Repetindo, para a transição t_{g4} , o procedimento usado no item anterior, têm-se:

$$t_{g4} : [2, 13] \xrightarrow{\mathbf{d}} [10, 46]$$

$$t_c : [3, 13] \xrightarrow{\mathbf{d}} [?, 46]$$

$$t_{22} : [2, 5] \xrightarrow{\mathbf{d}} [10, ?]$$

Como,

$$\mathbf{d} = \mathbf{i}_G(t_{g4}) \ominus \mathbf{i}(t_{g4}) = [8, 33]$$

os tempos globais das transições t_c e t_{22} , são:

$$\mathbf{i}_G(t_c) = [3 + 8, 46] = [11, 46]$$

$$\mathbf{i}_G(t_{22}) = [10, 5 + 33] = [10, 38]$$

Têm-se, então, os seguintes tempos globais e relativos, para cada tarefa:

Tabela 4: Tempos globais e relativos de cada transição

Tarefa	Tempo Global	Tempo Relativo
b	[4, 15]	[4, 15]
a	[10, 33]	[6, 18]
d	[8, 31]	[4, 16]
c	[11, 46]	[3, 13]
22	[10, 38]	[2, 7]
21	[12, 51]	[1, 5]

Os intervalos das transições acima representam os tempo para execução de cada tarefa. A execução da tarefa t_a , por exemplo, significa a ocorrência da seqüência $t_1 - t_3 - t_7$ ou $t_1 - t_4 - t_8$.

Dessa forma, os intervalos de disparo de transições para estados intermediários podem ser obtidos sem executar a rede e sem mapear o completo espaço de estado. Assim, o disparo da seqüência $t_a = t_1 - t_3 - t_7$ ou $t_a = t_1 - t_4 - t_8$ ocorre no intervalo de tempo global [10, 33]. Este valor é contado a partir do estado inicial, portanto, o intervalo de

tempo da tarefa t_b está embutido neste intervalo. O tempo de execução da tarefa t_a é obtido pela subtração dependente entre t_a e t_b , como segue:

$$\mathbf{i}(t_a) = \mathbf{i}_G(t_a) \ominus \mathbf{i}_G(t_b) = [8, 33] - [4, 15] = [4, 18].$$

Esse tempo corresponde ao tempo relativo da tarefa \mathbf{a} , ou seja, seu tempo de execução.

4. Utilização dos recursos

Baseado nos resultados via equação intervalar, pode-se também avaliar a utilização dos recursos R_1 e R_2 . Na Figura 58 são mostrados os intervalos para possíveis execuções da rede reduzida, a partir da qual pode-se determinar os tempos de execução de cada tarefa, bem como verificação e validação de seqüências para execução do serviço.

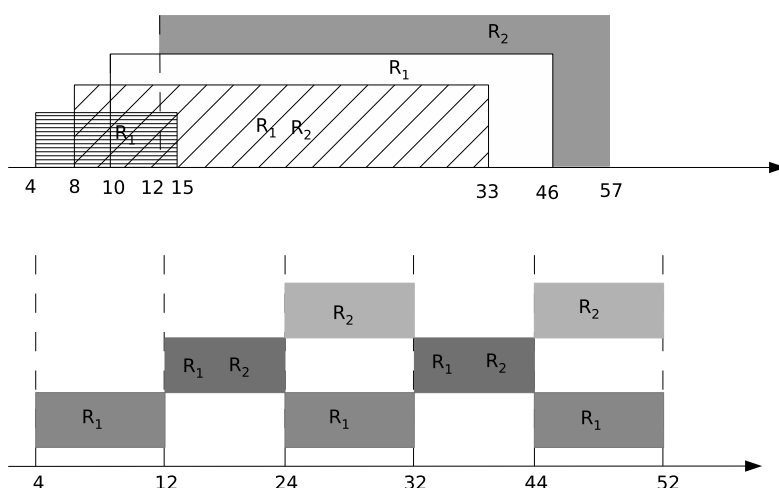


Figura 58: Tempo global e escala de operação dos recursos R_1 e R_2

Para a escala de serviço sugerida, os intervalos de tempo globais, são calculados como segue:

$$\mathbf{I}_G^k = \begin{pmatrix} [4, 12] \\ [14, 24] \\ [26, 32] \\ [34, 44] \end{pmatrix} + [20, 20]k\mathbf{u}$$

sendo k o número de serviços completados e $\mathbf{d} = [20, 20]$ o tempo de ciclo.

5. espaço de estados reduzido

A análise via alcançabilidade para a rede mostrada na Figura 44 é inviável devido ao problema de explosão do número de estados. Porém, considerando a rede mostrada na Figura 59, pode-se avaliar, via alcançabilidade, questões como intervalos de tempo com

variação da seqüência de execução das tarefas, bloqueio no uso dos recursos, tempo de espera, entre outros.

Na Figura 60 é mostrado o grafo de classe para a rede reduzida da Figura 45.

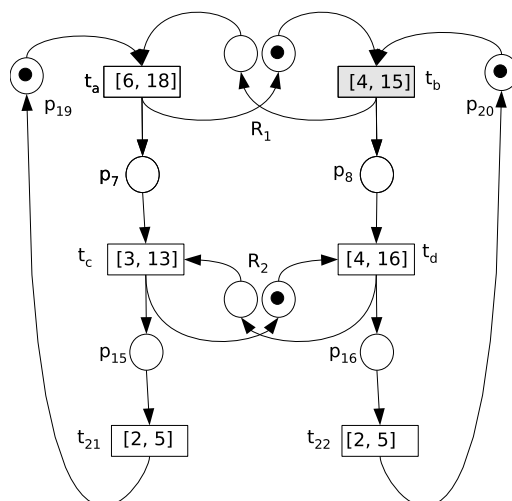


Figura 59: *RPT* reduzida representando as tarefas

Devido à natureza do tempo global, o grafo é ilimitado, caso não se considere a equivalência de classes. Uma forma de garantir a equivalência seria manter a rede com mesma seqüência, com isso o intervalo de tempo de ciclo seria o mesmo e as classes com mesma marcação teriam tempos proporcionais. Por exemplo, para a rede mostrada na Figura 59, sendo mantida a seqüência $\sigma = t_b - t_a - t_d - t_c - t_{22} - t_{21}$, o intervalo de tempo global para o disparo de cada transição seria calculado conforme a Equação (7.14), como segue:

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} [4, 15] \\ [8, 31] \\ [8, 31] \\ [11, 36] \\ [11, 36] \\ [12, 36] \end{pmatrix} + [12, 36] \mathbf{k}\mathbf{u}$$

Caso se amplie o intervalo de ciclo, novas seqüências poderão ser realizadas e mesmo assim se obterem classes equivalentes, como é o caso das seqüências ressaltadas na Figura 60, em que o tempo de ciclo é ampliado para $[12, 41]$. Com isso, a rede passa a ter 4 caminhos possíveis de serem seguidos, mantendo o tempo de ciclo dentro do estabelecido.

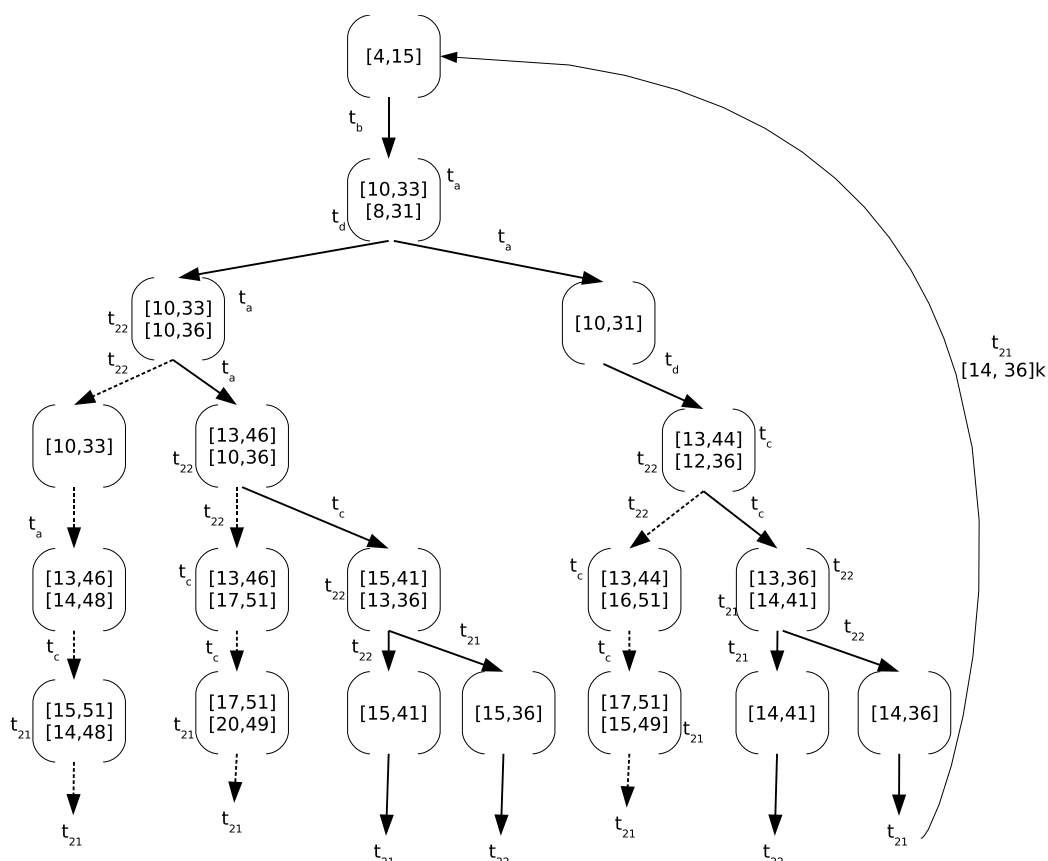


Figura 60: Espaço de classes de estados reduzido

7.6 Conclusões

Neste capítulo foi proposto uma solução, via aproximação intervalar, para o problema de estimação de intervalos de disparos. A equação intervalar é composta pelos intervalos estáticos de uma *RPT* equivalente, obtida por um dos métodos de redução, discutidos no Capítulo 5. Para determinada seqüência de disparo, é possível calcular o intervalo de tempo, no qual, para qualquer data de disparo, o tempo resultante permanecerá dentro desse intervalo. O cálculo é feito sem que seja necessário executar a rede e o resultado é obtido sem que seja necessário lançar mão de qualquer complexidade algébrica.

A equação intervalar mostrou-se adequada para redes cíclicas e acíclicas, seguras e k -limitadas. Além disso, a equação também possibilita o cálculo de métricas que são utilizadas na análise de desempenho de sistemas, tais como: tempo de ciclo, taxa de disparo, escalonamento de tarefas, entre outros.

A partir da equação intervalar também foi possível restringir o espaço de estado de uma

RPT a uma região do espaço e assim delimitar o espaço de busca, por exemplo. A equação intervalar, portanto, mostrou-se adequada não só como solução para o problema da estimação de intervalos de tempo, como também, para análise dos requisitos temporais impostos a uma *RPT*.

8 Alcançabilidade de Intervalo de Tempo em uma *RPT*

Neste capítulo é apresentado o problema de *Alcançabilidade de um Intervalo de Tempo* em uma *RPT* e que pode ser enunciado da seguinte forma:

Seja $S_0 = \langle M_0, I_0 \rangle$ o estado inicial de uma *RPT*. Assumindo que o estado $S_n = \langle M_n, I_n \rangle$ seja alcançável, a partir de S_0 , para a rede sem restrição temporal. Quais as possíveis seqüências de transições, executáveis ou não, capazes de levar a rede do estado S_0 para S_n , dentro de determinada restrição de tempo I ?

O problema é denominado de *Alcançabilidade de um Intervalo de Tempo* para uma *RPT* e se resume em uma busca das possíveis seqüências para, a partir de um estado inicial, alcançar um estado objetivo, dentro de uma especificação de tempo. Na Figura 61 é ilustrado tal problema.

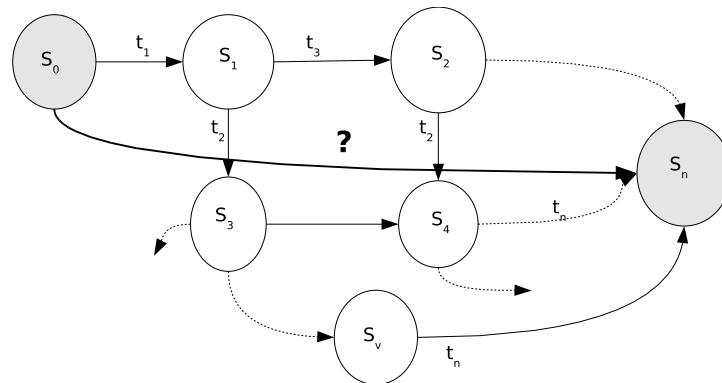


Figura 61: Alcançabilidade de intervalos de tempo

De forma semelhante ao problema de estimação de intervalos de tempo, o problema alcançabilidade de intervalos será tratado como um problema de análise intervalar. O objetivo, portanto, é delimitar uma região do espaço de seqüências, na qual qualquer execução leva para o intervalo especificado. Desta forma, o problema de alcançabilidade de intervalos, será

resumido à caracterização do conjunto solução de uma equação linear intervalar obtida a partir de uma *RPT* reduzida e sujeita a determinadas restrições de tempo.

8.1 Equação Intervalar e o Problema de Alcançabilidade de Intervalos

Conforme o Capítulo 7, a estimação de intervalos de tempo, para execução de uma seqüência de transições foi resolvido através de uma equação intervalar, obtida a partir de uma *RPT* reduzida. Tal equação intervalar é da forma:

$$\mathbf{Cq} = \mathbf{I} \quad (8.1)$$

sendo, $\mathbf{C} \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^{n \times n}$ a matriz dos intervalos estáticos da rede, $\mathbf{I} \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^n$ o vetor restrição de tempo para disparos de transições e $\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}^+)^n$ o vetor quantidade de disparo.

O problema de alcançabilidade de intervalos consiste, conforme enunciado, em determinar a solução da Equação (8.1), quando se conhece a matriz intervalar, \mathbf{C} , e as restrições de tempo, \mathbf{I} , impostas à rede.

Conforme apresentado no Capítulo 2, uma equação intervalar pode ser interpretada de diferentes maneiras. Uma delas é a solução geral (*united solution set*), dada como segue:

$$\mathcal{Q}_g = \{\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}^+)^n \mid \exists \mathbf{C} \in \mathbf{C}, \exists \mathbf{I} \in \mathbf{I}, \mathbf{Cq} = \mathbf{I}\} = \{\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}^+)^n \mid \mathbf{Cq} \cap \mathbf{I} \neq \emptyset\} \quad (8.2)$$

A solução geral contém a união de todas soluções que para algum \mathbf{C} e algum \mathbf{I} satisfazem à Equação (8.1). Isto significa que a solução geral pode conter seqüências de transições que não satisfazem as restrições temporais, uma vez que não valem para todo \mathbf{C} . Na Figura 62 é mostrado que, do espaço de seqüências gerado por uma *RPT*, o conjunto das soluções gerais será composto por todas as seqüências que levam a algum intervalo comum com a restrição

Uma solução alternativa, discutida no Capítulo 2, é o conjunto das soluções restritas, definida por:

$$\mathcal{Q}_r = \{\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}^+)^n \mid \forall \mathbf{C} \in \mathbf{C}, \exists \mathbf{I} \in \mathbf{I} \mathbf{Cq} = \mathbf{I}\}, \quad (8.3)$$

ou seja, \mathcal{Q}_r é o conjunto formado por todos os $\mathbf{q} \in (\mathbb{Z}^+)^n$ tal que o produto \mathbf{Cq} ocorre em \mathbf{I} , qualquer que seja $\mathbf{C} \in \mathbf{C}$.

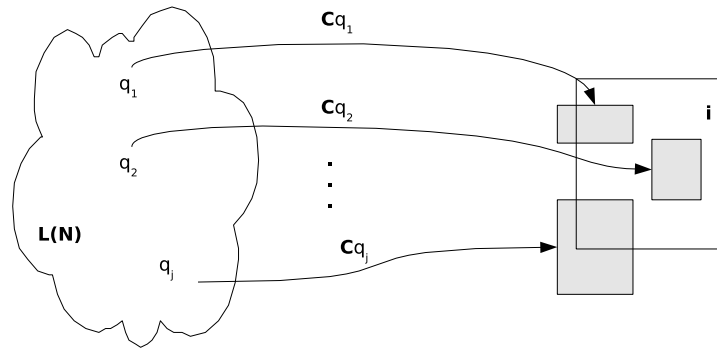


Figura 62: Solução geral de uma equação intervalar

O conjunto das soluções restritas também pode ser definido, como segue.

$$\mathcal{Q}_r = \{q \in (\mathbb{Z}^+)^n \mid Cq \subseteq \mathbf{I}\}. \quad (8.4)$$

Para as *RPTs*, isto significa que qualquer seqüência de transições, pertencente ao conjunto de soluções restritas, irá respeitar a restrição de tempo. Isso, entretanto, não valida tais seqüências, pois o fato de se obter uma seqüência de transições, não assegura que tal transição será executável. Porém, as seqüências válidas pertencem ao conjunto de soluções restritas.

Na Figura 63 é mostrado que o conjunto \mathcal{Q}_r é formado por todas as seqüências geradas por uma *RPT*, tal que, quando executadas, têm seus intervalos de tempo respeitando a restrição temporal, imposta à rede.

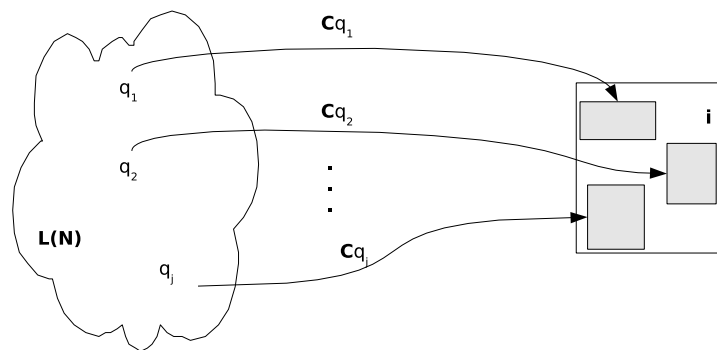


Figura 63: Solução restrita de uma equação intervalar

O conjunto de soluções restritas \mathcal{Q}_r , para a Equação (8.1), é a solução de interesse para determinar o conjunto de seqüências de transições, sejam elas viáveis ou não, para levar uma *RPT*, desde o estado S_0 até estado S_n , dentro de um especificado intervalo de tempo.

8.2 Aproximação Intervalar para o Conjunto de Soluções Restritas

O conjunto solução restrita, \mathcal{Q}_r , apesar de ser composto por intervalos, nem sempre tem uma forma intervalar, pois a composição de intervalos geralmente não é um intervalo.

Conforme discutido no Capítulo 2, o conjunto solução restrita \mathcal{Q}_r , quando confinado no primeiro ortante, pode ser caracterizado por um poliedro convexo, podendo ser representado por uma solução intervalar \mathbf{q} .

A solução intervalar pode ser: uma aproximação externa, \mathbf{q}_{ext} , ou uma aproximação interna, \mathbf{q}_{int} , desse poliedro. Quando o conjunto de soluções restritas é limitado e não vazio, a aproximação intervalar existe e pode ser encontrada, conforme mostrado na Figura 64a. Um método para determinar a aproximação intervalar externa ótima é encontrado em [Sha97], enquanto métodos para encontrar a aproximação intervalar interna máxima são encontrados em [Sha01, Sha04]. Considerando apenas os intervalos clássicos (fechados), quando o poliedro é ilimitado, pode-se ter uma das seguintes situações:

- A aproximação externa não existe, Figuras 64b,c,d;
- Qualquer aproximação intervalar interna é significativamente menor que o conjunto calculado, Figuras 64b,c,d;
- A aproximação intervalar interna máxima pode não existir, Figuras 64b,c.

8.2.1 Cálculo da Aproximação Intervalar Interna para o Conjunto das Soluções Restritas

Dada uma RPT, juntamente com uma especificação de tempo, quais as possíveis seqüências de transições, viáveis ou não, capazes de levar a rede do seu estado inicial $S_0 = \langle M_0, I_0 \rangle$ ao estado $S_n = \langle M_n, I_n \rangle$, dentro da restrição de tempo especificada?

A justificativa para calcular uma aproximação interna, ao invés da externa, está na especificação do problema, a qual estabelece que a solução, se existir, deve levar a rede para a marcação desejada dentro do tempo especificado.

1. A partir do modelo reduzido de uma RPT, obtém-se a matriz intervalar, \mathbf{C} , conforme

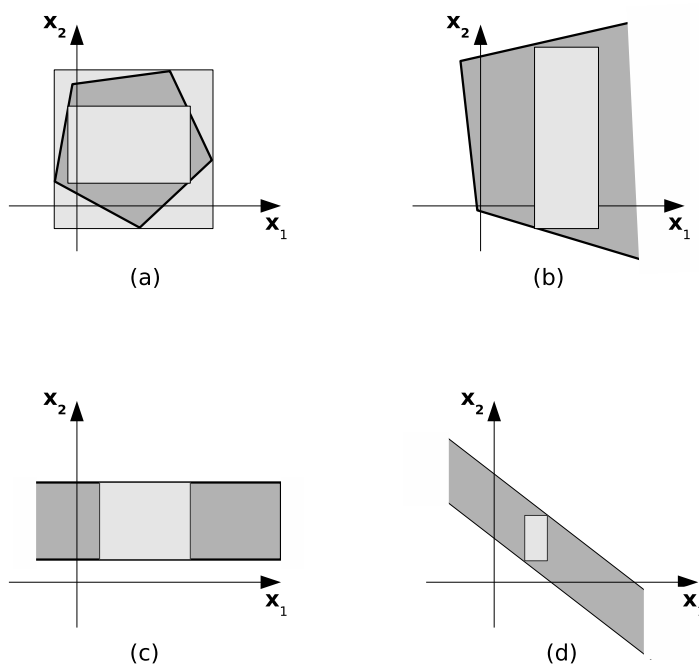


Figura 64: Aproximações intervalares de poliedros

Equação (6.6). Como é conhecida uma especificação de tempo, \mathbf{I} , o problema, então, é encontrar o conjunto solução da equação intervalar,

$$\mathbf{Cq} = \mathbf{I}$$

sendo, $[\mathbf{C}] = [\underline{\mathbf{C}} \ \overline{\mathbf{C}}]$, $[\mathbf{I}] = [-\underline{\mathbf{I}} \ \overline{\mathbf{I}}]$

2. A equação intervalar acima é transformada em um sistema de equações lineares do tipo:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

sendo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\underline{\mathbf{C}} & \mathbf{I} \\ \overline{\mathbf{C}} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\underline{\mathbf{I}} \\ \overline{\mathbf{I}} \end{pmatrix},$$

3. O conjunto solução do sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ é determinado através dos pontos extremos do poliedro convexo que o caracteriza.
4. O conjunto dos pontos extremos, \mathcal{V} , é obtido, conforme apresentado no Capítulo 2, da seguinte forma: enumerando todas as possíveis bases do sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, para o conjunto de soluções limitadas e calculando o espaço nulo de \mathbf{A} , para o conjunto das soluções ilimitadas.

5. A primeira aproximação intervalar, denominada de \mathbf{q}_{ext} , é obtida pelos limites máximos e mínimos de cada coordenada do conjunto \mathcal{V} . Assim, \mathbf{q}_{ext} é uma aproximação externa, calculada como segue:

$$\mathbf{q}_{ext} = [\min\{\mathcal{V}_i\}, \max\{\mathcal{V}_i\}], \quad i = 1, \dots, n$$

6. A partir do vetor \mathbf{q}_{ext} determina-se o vetor \mathbf{q}_0 , interno ao poliedro, como a seguir

$$\mathbf{q}_0 = [\max \mathbf{q}_{ext}(\cdot, 1), \min \mathbf{q}_{ext}(\cdot, 2)]$$

7. Se $\mathbf{C}\mathbf{q}_0 \subseteq \mathbf{I}$, então, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ e expande-se \mathbf{q} , pelo limite superior, de modo a explorar a relação entre o número de disparos das transições.
8. Se $\mathbf{C}\mathbf{q}_0 \not\subseteq \mathbf{I}$, faz-se $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, e varia-se \mathbf{q} , contraindo-o pelo limite inferior, até que $\mathbf{C}\mathbf{q} \subseteq \mathbf{I}$.
9. Solução intervalar restrita, $\mathbf{q}_r = \mathbf{q}$

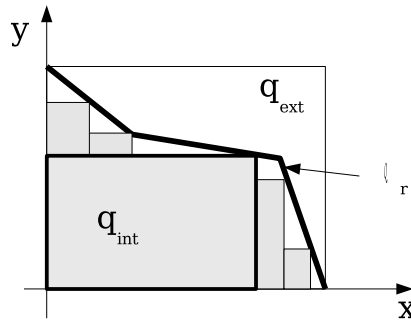


Figura 65: Aproximação intervalar interna

Se o vetor \mathbf{q} é uma aproximação intervalar interna, então, ele pode não conter toda a região na qual $\mathbf{C}\mathbf{q} \subseteq \mathbf{I}$ é satisfeita. Entretanto, se o vetor \mathbf{q} é uma aproximação externa, esse vetor conterá toda a região na qual a condição $\mathbf{C}\mathbf{q}_r \subseteq \mathbf{I}$ é satisfeita, porém, também poderá conter elementos que não respeitam a restrição temporal. A figura 65 ilustra os possíveis limites para as aproximações interna e externa.

Para alguns tipos de *RPT*, pode-se obter uma aproximação interna, o mais próximo possível do conjunto \mathcal{Q}_r . Isto ocorre devido ao fato de não haver restrição entre o número de disparos das transições da rede. Neste caso, a solução \mathcal{Q}_r seria dada por

$$\mathbf{q}_{int} = \bigcup \mathbf{q}_i \quad (8.5)$$

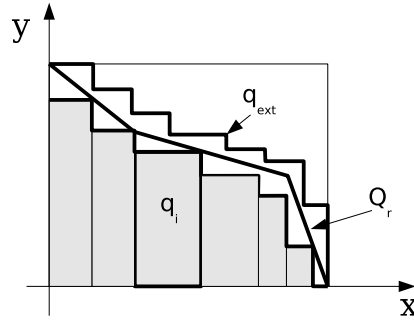


Figura 66: Aproximações interna e externa

sendo $q_i \in (\mathbb{I}\mathbb{Z}^+)^n$, conforme mostrado na figura 66.

A partir do vetor q_r , pode-se gerar todas as possíveis seqüências de transições, factíveis ou não, que levam o sistema modelado ao estado desejado e respeitando as restrições de tempo especificadas.

Exemplo 8.1 O modelo reduzido de uma RPT, é mostrado na Figura 67. A matriz intervalar equivalente e o vetor de restrições temporais são dados, como segue,

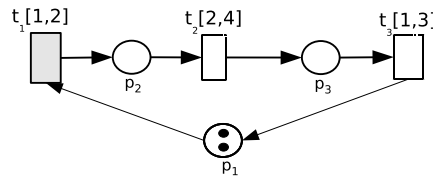


Figura 67: Modelo reduzido de uma RPT, Exemplo 8.1

$$C = \begin{pmatrix} [1,2] & 0 & 0 \\ [1,2] & [2,4] & 0 \\ [1,2] & [2,4] & [1,3] \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} [0,15] \\ [5,30] \\ [10,50] \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Algoritmo para cálculo da aproximação intervalar interna

- Solução Limitada

1. Para a RPT, mostrada na Figura 67, a equação intervalar é dada como,

$$Cq = I$$

2. O sistema de equações, $Ax=b$, para obtenção do conjunto de soluções restritas, é dado, como segue:

$$A = \begin{pmatrix} -\underline{C} & \mathbf{I} \\ \overline{C} & \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\underline{I} \\ \overline{I} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

3. Cálculo do número máximo de soluções básicas viáveis para $Ax = b$

$$nv = \binom{n}{m} = 84$$

sendo, n o número de colunas e m o número de linhas de A . Assim, há 84 possibilidades de combinar as 9 colunas de A em grupos de 6. Cada um desses grupos pode formar uma base B .

4. Soluções viáveis

$$\tilde{x} = B^{-1}b$$

sendo $\tilde{x} \geq 0$.

5. Conjunto de de soluções de associadas aos vértices do politopo que caracteriza $Ax=b$.

$$\mathcal{V}_1 = \{\tilde{x}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 5 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 13 & 0 & 0 & 7 & 5 & 13 & 3 & 12 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- Solução Ilimitada

6. O sistema homogêneo correspondente, $Ay = 0$, tem uma única solução (nula), logo, a solução completa é limitada.

- Cálculo das Aproximações

7. O vetor solução intervalar externa \mathbf{q}_{ext} e a primeira aproximação interna \mathbf{q}_0 , são dados, como segue:

$$\mathbf{q}_{ext} = \begin{pmatrix} [0, 8] \\ [0, 8] \\ [0, 13] \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} [0, 8] \\ [0, 8] \\ [0, 8] \end{pmatrix}$$

8. Tanto \mathbf{q}_{ext} quanto \mathbf{q}_0 possuem elementos que levam \mathbf{Cq} para fora do intervalo \mathbf{I} .
9. Considerando que a rede é cíclica e segura, calcula-se o vetor intervalar para a solução restrita variando o vetor \mathbf{q}_0 , de modo $\mathbf{Cq}_0 \subseteq \mathbf{I}$, conforme a relação entre os disparos das transições da rede. A aproximação interna encontrada é dada por:

$$\mathbf{q}_r = \begin{pmatrix} [3, 5] \\ [3, 5] \\ [2, 5] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Cq}_r = \begin{pmatrix} [3, 10] \\ [9, 30] \\ [11, 45] \end{pmatrix} \subseteq \mathbf{I}$$

sendo,

$$\begin{aligned} q_2 &\leq q_1 \leq q_2 + 1 \\ q_3 &\leq q_2 \leq q_3 + 1 \\ q_3 &\leq q_1 \leq q_3 + 1 \\ q_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

10. Exemplos de seqüências

$$\mathbf{q}_r = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

11. O vetor intervalar solução também pode ser obtido usando métodos iterativos, tais como: eliminação Gaussiana, método de Hansen e a fórmula de Neumaier, conforme Apêndice A. Os resultados, usando tais métodos, são mostrados na tabela 5. Todos esses resultados, porém, apresentam uma aproximação externa.

Tabela 5: Vetor Solução Geral (\mathbf{q}_{ext})

Eliminação	Hansen	Neumaier
$\begin{pmatrix} [3, 20] \\ [0, 15] \\ [0, 40] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0, 15] \\ [2, 7] \\ [2, 20] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} [0, 15] \\ [2, 7] \\ [2, 20] \end{pmatrix}$

Exemplo 8.2 Considerando que os intervalos estáticos da rede mostrada na Figura 67 foram alterados e os novos intervalos são dados na matriz intervalar (8.7). Nota-se que os intervalos da primeira coluna foram trocados por intervalos nulos,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [0,0] & 0 & 0 \\ [0,0] & [2,4] & 0 \\ [0,0] & [2,4] & [1,3] \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Seguindo o procedimento apresentado no Exemplo 8.1, obtém-se os seguintes resultados:

- Solução Limitada

1. O conjunto de pontos extremos é dado por

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 8 & 8 \\ 5 & 13 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. O vetor solução intervalar externa \mathbf{q}_{ext} é dado por

$$\mathbf{q}_{ext} = \begin{pmatrix} [0,0] \\ [3,8] \\ [0,13] \end{pmatrix}$$

3. O intervalo $[0,0]$, para a primeira coordenada do vetor \mathbf{q}_{ext} , poderia significar que, a transição associada a esta variável não faz qualquer disparo, porém, a realidade é o oposto. Se a rede é cíclica, o número de disparos dessa transição será pelo menos igual ao das demais transições. Desta forma, os seguintes vetores intervalares são obtidos,

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} [3,8] \\ [3,8] \\ [3,8] \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_{tot} = \begin{pmatrix} [4,8] \\ [4,7] \\ [3,7] \end{pmatrix}$$

4. Caso a rede seja acíclica, a transição associada ao intervalo $[0,0]$, por ser transição fonte, é permanentemente habilitada e pode disparar indefinidamente, sem que seu dispare altere o intervalo de tempo dinâmico.

- Solução Ilimitada

1. Sob o ponto de vista analítico, o conjunto solução limitada \mathcal{Q} , para a rede acíclica, é apenas uma solução particular, visto que a solução homogênea de $\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, é diferente da trivial e igual a

$$\mathcal{V}_2 = (100)^T$$

2. Um vetor $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{V}_2$ aponta a direção da coordenada na qual o poliedro cresce definido por \mathcal{V}_1 . Isto significa que a primeira variável do vetor \mathbf{q}_{ext} pode assumir qualquer valor pertencente ao conjunto $\{0, 1, \dots, \}$.

• Solução Completa

1. A solução completa, segundo o Teorema 2.8, é calculada como segue:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \theta \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} \theta & \theta & \theta & \theta & \theta \\ 3 & 3 & 5 & 8 & 8 \\ 5 & 13 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Os vetores \mathbf{q}_{ext} e \mathbf{q}_r são obtidos e dados por,

$$\mathbf{q}_{ext} = \begin{pmatrix} [0, 8] \\ [0, 8] \\ [0, 8] \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_{tol} = \begin{pmatrix} [4, 8] \\ [4, 7] \\ [3, 7] \end{pmatrix}$$

3. Na Figura 68 são mostrados o conjunto solução, o vetor aproximação externa e o vetor solução restrita (tolerável), para $\theta = 20$.

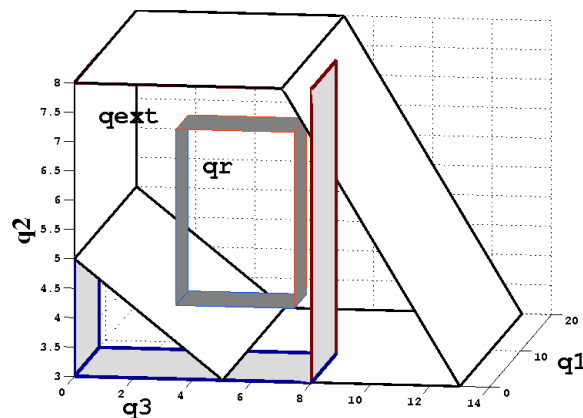


Figura 68: Conjunto solução ilimitada, Exemplo

Isto mostra que as soluções limitadas e ilimitadas devem ser consideradas conjuntamente.

Se a matriz C tem coluna nula, os métodos iterativos, para cálculo da solução intervalar geral, são inviáveis, devido à impossibilidade da divisão por zero, como é o caso do processo de eliminação, por exemplo. Já o cálculo pelo método de Hansen e também de Neumaier é inviável pelo fato da matriz C ser não regular.

8.3 Aplicações

Na Figura 69 é mostrada uma planta de manufatura, a qual pode assumir diferentes configurações. Os recursos R_1 , R_2 e R_3 alimentam as máquinas M_1/M_2 , M_3 e M_4/M_5 , respectivamente.

A planta é capaz de fabricar diferentes peças ao mesmo tempo, conforme sua programação. Por exemplo, na Tabela 6 são mostrados três tipos de produtos que podem ser manufaturados pela planta.

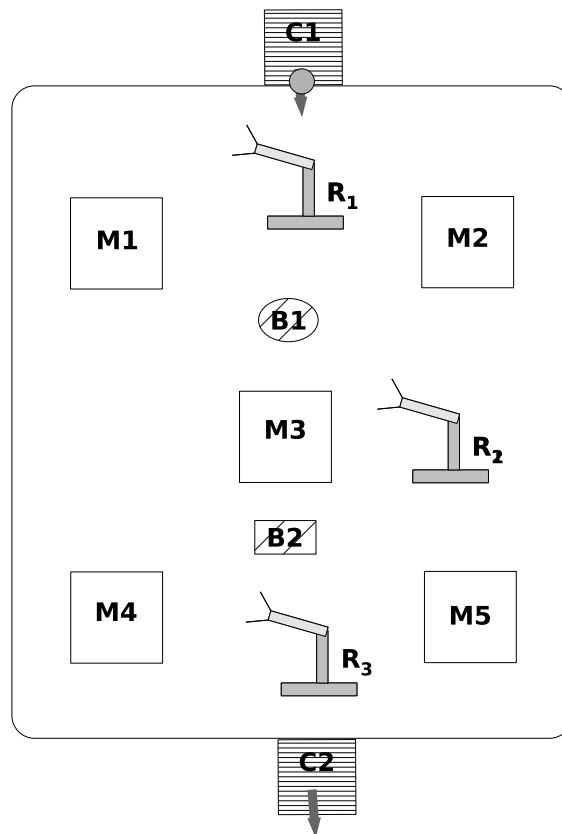


Figura 69: Exemplo de uma planta de manufatura

Na Figura 70 é mostrado o modelo da rede Petri temporal da planta, já com os tempos mínimo e máximo de operação de cada componente da planta. Na tabela 7 é apresentada a

Tabela 7: Descrição dos elementos da rede de Petri

Componente	Descrição
M_1, \dots, M_5	Máquinas disponíveis
R_1, R_2, R_3	Robôs disponíveis
A	Alimentação de peças a serem trabalhadas
p_1, \dots, p_5	Máquinas e robôs não disponíveis
t_1, t_2, t_5, t_7	Deslocamento e peças
t_3, t_4, t_6	Máquinas em operação

Cada produto terminado significa uma seqüência de transição executada. O problema, portanto, é determinar as quantidades das possíveis seqüências necessárias para completar cada produto. Tais seqüências têm início em t_1 ou t_2 e terminam nos lugares p_6, p_7 e p_8 . Para o produto 1, por exemplo, a planta deve executar a seguinte seqüência,

$$t_1 - t_3 - t_5 - t_6 - t_7 - t_{10}$$

ou

$$t_2 - t_4 - t_5 - t_6 - t_7 - t_{10}$$

Pode-se verificar se tal seqüência é executável e caso sim, qual o intervalo de tempo para executá-la. O mesmo procedimento deve ser feito para as seqüências que levam à manufatura dos produtos 2 e 3. Como esses produtos utilizam os mesmos recursos, se deve fazer um escalonamento para o uso de tais recursos.

Uma outra maneira de verificar quais as possibilidades de execução é usar a abordagem proposta neste capítulo. Para isso, utiliza-se a rede reduzida do modelo original, como é mostrada na Figura 71.

Nesta aplicação, serão exploradas diferentes configurações para a planta.

1. **Rede Cíclica** - A planta funciona de forma fechada, ou seja, cada peça que entra na planta é transportada através de um *pallet* e após o término de cada produto, retorna ao início da planta.
 - **Rede Cíclica Segura** - apenas uma peça é trabalhada por vez na planta. Para esta configuração, a rede reduzida é mostrada na figura 72.

A matriz \mathbf{C} da equação intervalar (8.1) para a rede reduzida é dada por,

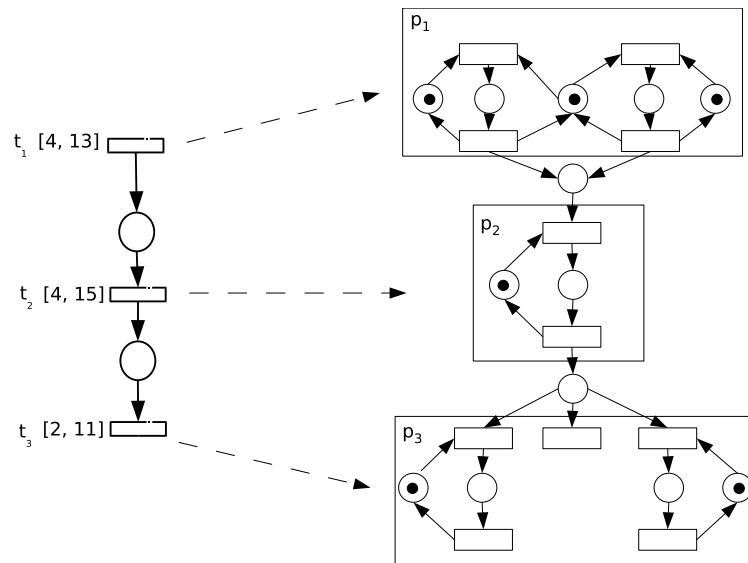


Figura 71: Redução da rede de Petri temporal

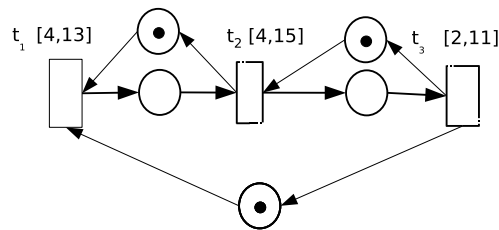


Figura 72: Rede reduzida para rede segura

$$C = \begin{pmatrix} [4, 13] & 0 & 0 \\ [4, 13] & [4, 15] & 0 \\ [4, 13] & [4, 15] & [2, 11] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 300] \\ [0, 300] \\ [0, 300] \end{pmatrix}.$$

Como a rede é segura o número de disparo das transições da rede serão iguais e a matriz C assumirá a forma de vetor intervalar, logo

$$c q = i$$

$$\begin{pmatrix} [4, 13] \\ [4, 15] \\ [2, 11] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} q_0 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = [0, 300]$$

Como para cada produto acabado tem-se $q_0 = q_2 = q_3 = q$, então, o vetor c pode ser substituído por um intervalo, resultante da soma dos intervalos das transições. Assim, para o período especificado, tem-se as seguintes quantidades de processos completados:

$$[10, 39]q = [0, 300]$$

Para que a solução q seja uma solução restrita, ou seja, $cq \subseteq i$, deve-se ter,

$$0 \leq 10q \leq 300 \quad \text{e} \quad 0 \leq 39q \leq 300$$

$$q \geq \frac{0}{10} = 0 \quad \text{e} \quad q \leq \frac{300}{39} = 7,6$$

sendo $q \in \mathcal{Z}^+$, a solução intervalar, para o intervalo especificado é, então,

$$q_{int} = [0, 7]$$

Assim, para se fabricar 7 produtos, independente de qual deles, pode-se fazê-los dentro do período de 300 unidades de tempo.

- **Rede Cíclica N-Limitada** - A planta é configurada para trabalhar mais de uma peça ao mesmo tempo e os *buffers* intermediários têm capacidades limitadas ao número de peças que a planta é capaz de manufaturar simultaneamente. Uma rede reduzida cíclica 2-limitada, para essa configuração é mostrada na figura 73.

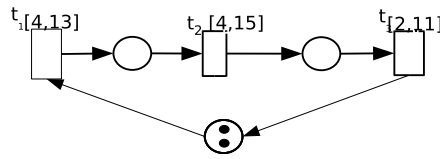


Figura 73: Rede cíclica 2-limitada

A equação intervalar, para rede com mais de uma marca é dada por,

$$Cq_N = I \tag{8.8}$$

sendo $q_N = [1, N]q$, N o número de marcas na rede.

Assim, para $N = 2$, a quantidade de disparos de transições no tempo especificado é igual a,

$$q_N = [1, N]q = [1, 2][0, 7] = [0, 14]$$

2. **Rede Acíclica** - A planta funciona de forma aberta, com alimentação constante e independente de peças a serem trabalhadas. A planta pode ainda ser configurada como:

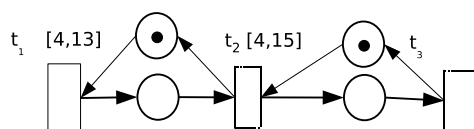


Figura 74: Rede acíclica e segura

- **Rede Acíclica Segura** - Neste caso, a alimentação de marcas na rede independe do retorno dado pela última transição, como foi o caso cíclico. O modelo reduzido como mostrado na figura 74¹.

Utilizando o modelo reduzido, observa-se que, sempre que a transição t_2 estiver habilitada, as transições t_1 e t_3 estarão desabilitadas, e vice-versa. Neste caso, as transições t_1 e t_3 podem ser reduzidas a uma só transição, a fim de se calcular o tempo necessário para se manufaturar completamente uma peça. Isto é ilustrado na figura 75.

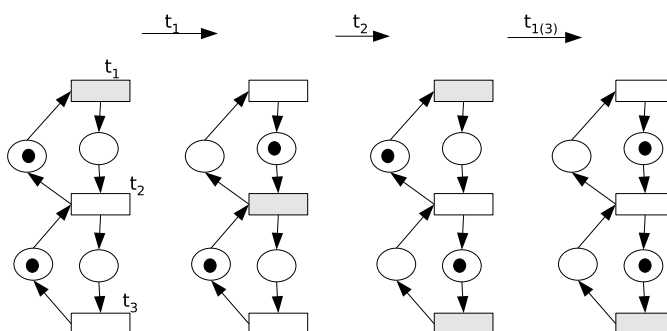


Figura 75: Rede acíclica e segura em execução

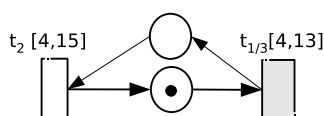


Figura 76: Rede reduzida acíclica e segura equivalente à rede

Assim, a rede acíclica segura, mostrada em 76, equivale à rede mostrada na figura 76 e a equação intervalar assume a forma,

$$[8, 28] \mathbf{q} = [0, 300].$$

O vetor intervalo das quantidades de disparo é dado por,

$$\mathbf{q} = [0, 10].$$

¹Conforme definição, uma rede acíclica não possui qualquer ciclo, portanto os lugares marcados, mostrados nessa figura são apenas para forçar a condição de segurança dos lugares da rede.

Usando a rede reduzida, mostrada na figura 76, pode-se gerar um mapa dos intervalos de execução da rede, como o seguinte:

$$[4, 13] \xrightarrow{t_{1/3}} [8, 28] \xrightarrow{t_2} [12, 41] \xrightarrow{t_{1/3}} [16, 58] \xrightarrow{t_2} [20, 69] \dots$$

Assim, segundo determinada política, pode-se programar um escalonamento a ser executado pela planta. Por exemplo, iniciando a operação pela etapa E_1 e esta etapa durando todo seu intervalo, ou seja, $[4, 13]$, pode-se obter um escalonamento para a planta.

- **Rede Acíclica Livre** - Cada etapa do processo tem alimentação suficiente de modo a ser independente da etapa anterior. Portanto, cada transição da rede tem liberdade para disparar. Assim, a matriz \mathbf{C} assume a forma diagonal, como segue,

$$\begin{pmatrix} [4, 13] & 0 & 0 \\ 0 & [4, 15] & 0 \\ 0 & 0 & [2, 11] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 300] \\ [0, 300] \\ [0, 300] \end{pmatrix}.$$

A solução intervalar, para a equação acima, é obtida a partir dos pontos extremos do poliedro que a caracteriza e é dado por,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} [0, 23] \\ [0, 20] \\ [0, 27] \end{pmatrix}.$$

O espaço da solução restrita para as tarefas completadas é a região \mathcal{Q}_2 , mostrado na figura 77. A região delimitada por \mathcal{Q}_1 representa uma rede cíclica com a seguinte relação entre os disparos:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 20$$

8.4 Conclusões

Neste capítulo foi abordado o problema de alcançabilidade de intervalos de tempo. O problema consiste em determinar as seqüências de transições capazes de levar uma *RPT*, a partir de um estado inicial, para um estado objetivo, dentro de um tempo pré-estabelecido.

Usando o processo de redução do modelo original da rede, o problema da alcançabilidade foi transformado em um problema de solução de uma equação linear intervalar. Esse

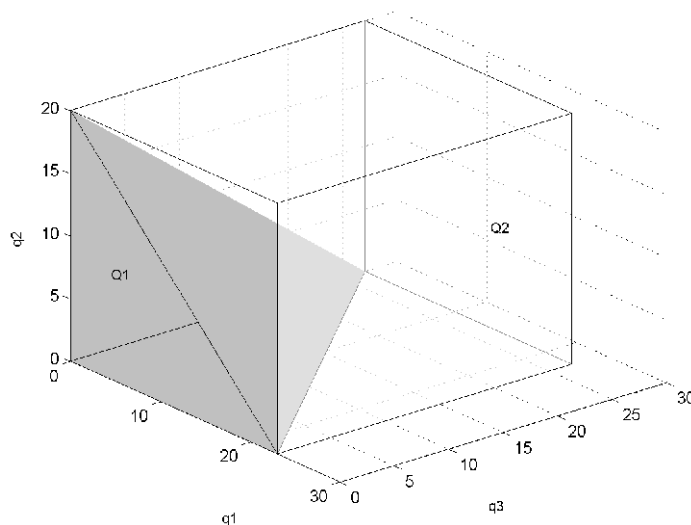


Figura 77: Solução restrita para as redes acíclicas livre Q_2 e limitada Q_1

problema é bastante discutido na literatura, principalmente por assumir diversas particularidades. Uma dessas particularidades foi explorada neste capítulo.

Transformando o problema de solução de uma equação intervalar, em um problema de solução de um sistema de equações lineares e usando elementos da álgebra linear e da análise convexa, foi obtido um procedimento que delimita uma região na qual se encontra o conjunto solução do problema.

Até o momento não foram encontrados na literatura trabalhos sobre o problema de se determinar um intervalo para um número de disparos de transições num dado intervalo de tempo. Este capítulo é uma contribuição para a solução deste problema via análise intervalar.

9 Conclusões e Trabalhos Futuros

9.1 Conclusões

Nas últimas décadas, as redes de Petri têm sido utilizadas em diversas áreas tecnológicas, contribuindo não só para o melhor entendimento dos sistemas por elas modelados, mas permitindo o desenvolvimento desses sistemas. Novas ferramentas de simulação possibilitam cada vez mais a exploração de diferentes formas de implementação. Por sua vez, o uso de novas ferramentas algébricas fornece cada vez mais condições formais para análise, validação e estimação do sistema modelado. O surgimento das redes de Petri temporais, juntamente com outras extensões das redes de Petri, aumentaram ainda mais o seu poder de expressividade. O aumento do poder de representação, no entanto, foi acompanhado de uma maior complexidade computacional nos procedimentos de análise. Diferentes propostas de como tratar o tempo, de maneira a compensar o custo computacional, têm surgido na literatura. Neste contexto, o trabalho apresentado nesta tese apresenta duas contribuições principais. Primeiro, por utilizar uma ferramenta matemática concebida para tratar como intervalo, grandezas que por sua natureza são intervalares, ou seja, as incertezas intervalares relacionadas aos momentos de disparo das transições não são tratadas como incertezas no campo dos reais e sim como elemento do espaço dos intervalos, conseqüentemente, sujeitas às operações, propriedades e topologia próprias. Segundo, o ganho de se poder estimar, mesmo que com certo grau de aumento na imprecisão dos resultados, intervalos de tempos de disparo para um horizonte além do próximo estado, sem gerar, mesmo que parcialmente, o grafo de estados da rede.

Apesar da complexidade das redes temporais não seguras, por causa do forte efeito da intercalação dos disparos, a equação intervalar possibilita a estimação de algumas medidas quantitativas para tais redes. Entre essas medidas, têm-se: tempo de ciclo em redes reversíveis, taxa de disparo em redes acíclicas, tempo de execução de tarefas e tempo entre disparos de transições. Além disso, a equação possibilita a validação de seqüências de ocorrências de transições, o que permite, por exemplo, o planejamento de um escalonamento para execução

de tarefas a serem executadas no sistema modelado.

Uma outra contribuição deste trabalho está em possibilitar uma relação inversa entre as classes de estados da rede. Nos diversos trabalhos encontrados na literatura que trata da análise de redes temporais, não existe uma relação de bijeção entre dois domínios de disparos pertencentes a dois estados, mesmo que um seja alcançável pelo outro. A partir da equação intervalar, entretanto, é possível determinar uma região do espaço de disparos, na qual é possível identificar, caso existam, quais os vetores de disparos que levam a rede de um estado a outro qualquer, dentro de uma pré-definida restrição temporal. A importância dessa contribuição se estende desde a possibilidade de redução do espaço de busca, para análise de alcançabilidade, até a possibilidade de resolução de problemas de escalonamento e controle sob restrição de tempo.

O desenvolvimento dessas principais contribuições só foram possíveis graças a outras menores, mas não menos importantes, tais como:

1. Desenvolvimento de um método exaustivo para análise de uma *RPT*, baseado no tempo global de execução da rede. Usando elementos da matemática intervalar, o método possibilitou não só reduzir a complexidade da enumeração das classes, mas também apresentou algumas vantagens em relação aos equivalentes encontrados na literatura:
 - Não aumento da imprecisão dos intervalos de disparos em caso de disparos de transições concorrentes;
 - Possibilidade de tratar os domínios dinâmicos usando tempo global ou relativo;
 - Validação de seqüências de disparos de transições sem que seja necessária a construção do completo espaço de estados; e
 - Redução do grafo de alcançabilidade da rede com a definição de equivalência entre classes de estados.
2. Um conjunto de regras de redução para uma *RPT*, que transforma uma rede original em uma rede reduzida. Este conjunto de regras preserva as restrições temporais e viabilidade de ocorrências das transições.
3. Um algoritmo que implementa o processo de redução para redes seguras. Usando elementos de conjuntos ordenados parcialmente o algoritmo capta todas as concorrências da rede e gera uma matriz que equivale a uma rede reduzida da rede original.
4. Implementação de uma ferramenta computacional para simulação e análise das *RPTs*.

9.2 Trabalhos Futuros

Essa pesquisa permitiu explorar um pouco da potencialidade algébrica das redes de Petri temporais por meio de uma nova ferramenta matemática que é a álgebra intervalar. Desta forma, várias questões tanto do ponto vista da análise das redes de Petri temporais quanto da exploração da álgebra intervalar, são apontadas ao longo do trabalho. Dentre estas questões pode-se citar:

1. Usar a abordagem intervalar modal em substituição aos intervalos clássicos e estender para o campo dos reais os intervalos de tempo. Assim, importantes fatores podem ser explorados, tais como: o alargamento de resultados intervalares devido às operações com intervalos clássicos, a possibilidade de explorar propriedades inerentes à ramificação do tempo, por exemplo, a vivacidade de uma transição.
2. Formalizar o algoritmo de redução baseado em relação de ordem usando álgebra intervalar e explorando diferentes tipos de aproximações. Por exemplo, na concorrência entre transições ao invés de considerar uma aproximação intervalar externa, onde todos os disparos são possíveis, pode-se considerar apenas a região comum a esses disparos.
3. Explorar a análise considerando o tempo de disparo como absoluto e o tempo dos intervalos dinâmicos como relativo. Apesar da importância desse resultado, ele foi analisado apenas como uma maneira de corrigir uma limitação da análise usando o tempo global.
4. Desenvolver uma solução algébrica fechada para o problema de alcançabilidade de intervalos e estendê-la para a abordagem nodal.
5. Estender a abordagem para outras áreas de aplicação tais como, controle supervisorio, escalonamento, verificação formal.
6. Implementar novos módulos na ferramenta de simulação, tais como: redução de uma rede de Petri temporal, estimação de classes de estados, cálculo dos caminhos viáveis para se alcançar determinada classe a partir de uma classe inicial, entre outros.

Referências Bibliográficas

- [AM00] G. Alefeld and G. Mayer. Interval analysis; theory and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 121:421–464, 2000.
- [Aur96] T. Aura. *Time Processes for Time Petri Nets*. PhD thesis, Helsinki University of Technology, 1996.
- [BB02] H. Boucheneb and G. Berthelot. Contraction of the itcpn state space. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 65:1–15, 2002.
- [BBAC02] P. Bonhomme, G. Berthelot, P. Agaline, and S. Calvez. Hierarchical control of time Petri nets by means of transformations. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 4, 2002.
- [BBAC04] P. Bonhomme, G. Berthelot, P. Agaline, and S. Calvez. Verification technique for time Petri nets. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 4278–4283, 2004.
- [BCH⁺05] B. Bérard, F. Cassez, S. Haddad, D. Lime, and O. H. Roux. Comparison of different semantics for time Petri nets. In *Automated Technology for Verification and Analysis (ATVA'05)*, volume 3707 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–16, 2005.
- [BD91] B. Berthomieu and M. Diaz. Modeling and verification of time dependent systems using Petri nets. In *IEEE Transactions on Software Engineering*, volume 17, pages 259–273, 1991.
- [BD01] M. Boyer and M. Diaz. Multiple enabledness of transitions in Petri nets with time. In *Proceedings. 9th International Workshop on Petri Nets and Performance Models*, pages 219–228, 2001.
- [Ber87] G. Berthelot. Transformations and decompositions of nets. In *Advances in Petri nets 1986, part I on Petri nets: central models and their properties*, pages 359–376, 1987.
- [BM82] B. Berthomieu and M. Menasche. A state enumeration approach for analyzing time Petri nets. In *3rd European Workshop on Applications and Theory of Petri Nets*, 1982.
- [BP01] O. Beaumont and B. Philippe. Linear interval tolerance problem and programming techniques. *Reliable Computing*, 7:433–447, 2001.

- [BPV05] G. Bucci, R. Piovosi, and E. Vicario. Introducing probability within state class analysis of dense-time-dependent systems. In *Proc. Second International Conference on the Quantitative Evaluation of Systems*, 2005.
- [BRV03] B. Berthomieu, P. O. Ribert, and F. Vernadat. The tool - construction of abstract state spaces for Petri nets and time petri nets. <http://www.laas.fr/tina>, 2003.
- [BV95] G. Bucci and E. Vicario. Compositional validation of time-critical systems using communicating time Petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 21(12):969–992, 1995.
- [BV03] B. Berthomieu and F. Vernadat. State class constructions for branching analysis of time Petri nets. In *Proc. of the 9th Int. Conf. on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'03)*, 2619:442–457, 2003.
- [Cel82] J. Celko. Time token design methodology. In *Software - Practice and Experience*, volume 2(10), pages 889–895, 1982.
- [CMS99] A. Cerone and A. Maggiolo-Schettini. Time-base expressivity of time Petri nets. In *Theoretical Computer Science*, volume 216, pages 1–53, 1999.
- [Coh01] G. Cohen. *Análisis y Control de Sistemas de Eventos Discretos: De Redes de Petri Temporizadas al Álgebra*. Cuadernos del Instituto de Matematica "Beppo Levi", 2001.
- [DBDS94] S. Duri, U. Buy, R. Devarapalli, and S. M. Shatz. Application and experimental evaluation of state space reduction methods for deadlock analysis in ada. *ACM Transactions on Software Engineering and Methodology*, 3(4):340–380, 1994.
- [DE95] J. Desel and J. Esparza. *Free Choice Petri Nets*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 1995.
- [ES01] J. Esparza and C. Schröter. Unfolding based algorithms for reachability problem. *Fundamenta Informaticae*, (34):1–16, 2001.
- [Fre82] S. French. *Sequencing and Scheduling - An Introduction to the Mathematics of the Job-Shop*. John Wiley, 1982.
- [Ger99] R. Gerth. A partial order approach to branching time logic model checking. *Information and Computation*, 150:132–152, 1999.
- [GGR05] M. Magnin G. Gardey, D. Lime and O. H. Roux. Roméo: A tool for analyzing time petri nets. In *In 17th International Conference on Computer Aided Verification (CAV'05)*, 2005.
- [God96] P. Godefroid. *Partial Order Methods for the Verification of Concurrent Systems*. PhD thesis, Université de Liege, 1996.
- [GRR05] G. Gardey, O. H. Roux, and O. F. Roux. State space computation and analysis of time Petri nets. *Theory and Practice of Logic Programming (TPLP). Special Issue on Specification Analysis and Verification of Reactive Systems*, 2005.

- [Han00] E. R. Hansen. The hull of preconditioned interval linear equations. *Reliable Computing*, 6:95–103, 2000.
- [HW04] E. Hansen and G. W. Walster. *Global Optimization Using Interval Analysis*. Marcel Dekker, 2004.
- [JBH99] L. Jaulin, J.L. Boimond, and L. Hardouin. Estimation of discrete-event systems using interval computation. *Reliable Computing*, 5(2):165–173, 1999.
- [JKDW95] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM - Studies in Applied Mathematics, 1995.
- [JM92] E. Y. Juan and T. Murata. A technique of state space search based on unfolding. *Kluwer Academic Publishers*, (9):1–22, 1992.
- [KKT98] A. Kondratyev, M. Kishinevsky, A. Taubin, and S. Ten. Analysis of Petri nets by ordering relations in reduced unfoldings. *Formal Methods in System Design: An International Journal*, 12(1):5–38, July 1998.
- [Lil99] J. Lilius. Efficient state space search for time Petri nets. In *In Proc. MFCS'98 Workshop on Concurrency*, volume 18, 1999.
- [LK06] J. K. Lee and O. Korba. Scheduling analysis of fms: an unfolding timed Petri nets approach. *Math. Comput. Simul.*, 70(5):419–432, 2006.
- [LL04] S. Lipschutz and M. Lepson. *Matemática Discreta*. Bookman, 2004.
- [LLK05] E. A. Lima, R. Lüders, and L. A. Künzle. Análise de redes de Petri temporais usando tempo global. In *VII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI*, number 7, 2005.
- [LLK06a] E. A. Lima, R. Lüders, and L. A. Künzle. Análise de redes de Petri temporais via Álgebra intervalar. In *XVI Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, number 16, 2006.
- [LLK06b] E. A. Lima, R. Lüders, and L. A. Künzle. Interval analysis of time Petri nets. In *4th CESA Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications*, number 4, 2006.
- [McM92] K. L. McMillan. A technique of state space search based on unfolding. *Kluwer Academic Publishers*, (9):1–22, 1992.
- [Mer74] P. Merlin. *A Study of Recoverability of Computer Systems*. PhD thesis, University of California IRVINE, 1974.
- [MF76] P. Merlin and D. J. Farber. Recoverability of communication protocols. *IEEE Transaction on Communication*, 24(9), 1976.
- [MGV00] L. Montano, F. J. Garci, and J. L. Villarroel. Using time Petri net formalism for specification, validation, and code generation in robot-control applications. *The International Journal of Robotics Research*, 19(1):59–76, 2000.

- [Moo95] R. E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM - Studies in Applied Mathematics, 1995.
- [Mur85] K. G. Murty. *Linear and Combinatorial Programming*. 1985.
- [Mur89] T. Murata. Petri nets: Properties, analysis and applications. In *Proceedings of IEEE*, volume 77, pages 541–580, 1989.
- [Neu90] A. Neumaier. *Interval Methods for Systems of Equation*. Cambridge Univ. Press, 1990.
- [Nid94] M. Nidd. Time extensions of Petri nets. Technical report, Department of Computer Science, University of Waterloo, 1994.
- [Pet81] J. L. Peterson. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Prentice Hall, 1981.
- [PP04] A. Pólrola and W. Penczek. Minimization algorithms for time Petri nets. In *Fundamenta Informaticae*, volume 60, pages 307–331, 2004.
- [PZ91] L. Popova-Zeugmann. On time Petri nets. *Journal of Information Processing and Cybernetics*, 27(4):227–244, 1991.
- [PZ98] L. Popova-Zeugmann. Essential states in time Petri nets, 1998.
- [PZH97] L. Popova-Zeugman and M. Heiner. Worst-case analysis of concurrent systems with duration interval Petri nets. *Informatik - Bericht*, 83:1–18, 1997.
- [PZS99] L. Popova-Zeugman and D. Schlatter. Analysing paths in time Petri nets. In *Fundamenta Informaticae*, volume 34, pages 1–18, 1999.
- [Ram74] R. Ramchandani. *Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Time Petri Nets*. PhD thesis, Cambridge, Mass.: MIT, Dept. Electrical Engineering, 1974.
- [RK04] P. Ramachandran and M. Kamath. A sufficient condition for reachability in a general Petri net. *Discrete Event Dynamic Systems*, 14(3):251–266, 2004.
- [RR98] W. Reisig and G. Rozenberg. *Lectures on Petri Nets I: Basic Models*. Springer, 1998.
- [SB96] R. H. Sloan and U. A. Buy. Reduction rules for time Petri nets. *Acta Informatica*, 33(7):687–706, 1996.
- [SB97] R. H. Sloan and U. Buy. Stubborn sets for real-time Petri nets. *Formal Methods in System Design: An International Journal*, 11(1):23–40, July 1997.
- [Sch00] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley and Sons, 2000.
- [Sha96] S. P. Shary. A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty. *Scientific Computing and Validated Numerics*, pages 118–132, 1996.

- [Sha97] S. P. Shary. Algebraic approach in the outer problem for interval linear equations. *Reliable Computing*, 3:103–135, 1997.
- [Sha01] I. A. Sharaya. On maxima inner estimation of the solution sets of linear systems with interval parameters. *Reliable Computing*, 7:409–424, 2001.
- [Sha04] S. P. Shary. An interval linear tolerance problem. *Automation and Remote Control*, 65(10):1653–1666, 2004.
- [Sha05] I. A. Sharaya. On unbounded tolerable solution sets. *Reliable Computing*, 11:425–432, 2005.
- [Sif77] J. Sifakis. Etude du comportement permanent des réseaux de Petri temporisés. In *Réseaux de Petri. Paris, 23–24 Mars 1977 AFCET. / Edité par l’Institut de Programmation de Paris*, pages 165–184, 1977.
- [Sil93] M. Silva. *Pratice of Petri nets in manufacturing*. Chapman and Hall, 1993.
- [SK98] A. S. Sathaye and B. H. Krogh. Supervisor synthesis for real-time discrete event sstems. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, 8:5–36, 1998.
- [SLK04] V. Schastai, E.A. Lima, and L.A. Künzle. Sequence analysis for time Petri nets. In *Proc. of 7th Inter. Workshop on Discrete Event Systems*, pages 445–450, 2004.
- [TKK98] A. Taubin, A. Kondratyev, and M. Kishinevsky. Deacdlock prevention using Petri nets and their unfoldings. *Advanced Manufacturing Tachnology*, (14):750–759, 1998.
- [TYC95] J. J. P. Tsai, S. J. Yang, and Y. H. Chang. Timming constraint Petri nets and their application to schedulability analsis of real-time systems specifications. *IEEE Transactions on Software Engeneering*, 21(1):32–49, 1995.
- [Val92] Antti Valmari. A stubborn attack on state explosion. *Form. Methods Syst. Des.*, 1(4):297–322, 1992.
- [Val94] Antii Valmari. State of the art report: Stubborn sets. *Petri Net Newsletter*, (46):6–14, apr 1994.
- [Var93] K. Varpaaniemi. Efficient detection of deadlocks in Petri nets. Technical report, Department of Computer Science, Helsinki University of Technology, 1993.
- [Vic01] Enrico Vicario. Static analysis and dynamic steering of time-dependent systems. *IEEE Transactions on Software Engeneering*, 27(8):728–748, 2001.
- [WD00] J. Wang and Y. Deng. Reachability analysis of real-time systems using time Petri nets. In *IEEE Transactions on Systems , Man, and Cybernetics - Part B*, volume 30, pages 725 – 73, 2000.
- [WG93] P. Wolper and P. Golefroid. Partial-order methods for temporal verification. *Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag*, pages 1–14, 1993.

- [XHD02] D. Xu, X. He, and Y. Deng. Compositional schedulability analysis of real-time systems using time Petri nets. *IEEE Trans. Soft. Engineering*, 28(10):984–996, 2002.
- [Xua01] L. Xuandong. Verifying time Petri nets by linear programming. In *Journal Computer Science and Technology*, volume 16(1), pages 39–45, 2001.
- [Yov97] S. Yovine. Kronos: A verification tool for real-time systems. *International Journal of Software Tools for Technology Transfer*, 1(1):123–133, 1997.
- [YR98] T. Yoneda and H. Ryuba. Ctl model checking of time Petri nets using geometric regions. *IEICE Trans. Inf. and Syst.*, 3:1–11, 1998.
- [YS97] T. Yoneda and B.-H. Schlingloff. Efficient verification of parallel real-time systems. In *Formal Methods in System Design*, volume 11, pages 187–215, 1997.
- [ZD93] M. Zhou and F. DiCesare. *Petri Net Synthesis for Discrete Event Control of Manufacturing Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

APÊNDICE A – Equações Lineares Intervalares

A.1 Sistema de Equações Lineares Intervalares

Seja o conjunto de equações lineares

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{A.1}$$

com $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Determinar o vetor intervalar do conjunto solução de (A.1) é um problema *NP-difícil* [HW04]. Uma prática comum é determinar o vetor envelope através de métodos iterativos. Esses métodos, porém, são bastante afetados com o efeito dependência, além de dependerem da regularidade da matriz \mathbf{A} . Há, entretanto, diversos trabalhos explorando diferentes técnicas, tais como: geometria do problema, pré-condicionamento do sistema, fórmulas fechadas, entre outras.

A.1.1 Métodos Iterativos

A intervalização direta desses métodos obtém-se trocando as variáveis reais por seus respectivos domínios intervalares e as operações da aritmética real pelas correspondentes na intervalar. Porém, devido ao efeito dependência [Moo95], os resultados são hiperestimados.

- Intervalização da Eliminação de Gauss Apresentado na Tabela 8

O método de eliminação Gaussiana apresenta solução intervalar muito distante do conjunto solução. Uma forma de melhorar a estimativa externa dos métodos iterativos é usar um conjunto solução geral auxiliar obtido por meio do pré-condicionamento do sistema original.

Tabela 8: Intervalização Gaussiana

```

1 for i = 1, ..., n
2 if aii ≠ 0
3 for j = i + 1, ..., n
4   αj = aji / aii
5   bj = bj - αj * bi
6 for k = 1, ..., n
7   ajk = ajk - αj * aik
8 for i = n, ..., 1
9   xi = (bi - ∑j=i+1n aij * xj) / aii

```

A.1.2 Pré-Condicionamento

O Pré-condicionamento do sistema A.1 consiste em encontrar um sistema equivalente que possua uma solução intervalar mais próxima da solução geral [HW04].

O processo consiste nos seguintes passos:

1. Calcular a matriz centro de \mathbf{A}

$$\mathbf{A}_c = \frac{[\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]}{2}$$

2. Calcular a matriz condicionamento

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_c^{-1}$$

3. Calcula-se o sistema pré-condicionado

$$\underbrace{\mathbf{BA}}_{\mathbf{M}} \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{Bb}}_{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{r}$$

A.1.3 Envelope Intervalar da Solução Geral

A partir do sistema pré-condicionado, além de melhorar a eficiência dos métodos iterativos, em [HW04] é apresentado um procedimento para obtenção do vetor intervalar que contém a solução geral para o sistema A.1. Este procedimento é apresentado, como segue,

Sejam, $\mathbf{M} = [\underline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}}]$ e $\mathbf{r} = [\underline{\mathbf{r}}, \overline{\mathbf{r}}]$

1. Limitante superior do vetor

$$\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{P}\overline{\mathbf{r}}_i$$

sendo, $\mathbf{P} = \underline{\mathbf{M}}^{-1}$

2. Limitante inferior do vetor

$$\underline{\mathbf{h}} = \begin{cases} C_i Z_i & \text{se } Z_i > 0 \\ Z_i & \text{se } Z_i \leq 0 \end{cases}$$

sendo,

$$C_i = \frac{1}{2P_{ii} - 1} \quad \text{e} \quad Z_i = (\underline{\mathbf{r}}_i + \overline{\mathbf{r}}_i)P_{ii} - \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}\overline{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{S}_G = [\underline{\mathbf{h}}, \overline{\mathbf{h}}]$$

condição:

- O centro de \mathbf{M} é \mathbf{I}
- \mathbf{M} é regular
- $0 \leq \|\underline{\mathbf{r}}_i\| \leq \overline{\mathbf{r}}_i$

A.1.4 Fórmula Fechada

Em [Neu90] é apresentado o cálculo do envelope intervalar para a solução geral, sob algumas restrições, como segue:

$$\mathbf{S}_G = \begin{cases} \left[\overline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{A}}^{-1} \overline{\mathbf{b}} \right] & \text{se } \mathbf{b} \geq 0 \\ \left[\underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{A}}^{-1} \overline{\mathbf{b}} \right] & \text{se } \mathbf{b} \ni 0 \\ \left[\underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{A}}^{-1} \overline{\mathbf{b}} \right] & \text{se } \mathbf{b} \leq 0 \end{cases}$$

RESUMO

O objetivo dessa tese é formalizar a análise das redes de Petri temporais usando a álgebra intervalar como ferramental matemático. A álgebra intervalar é tradicionalmente usada na solução de problemas relacionados com imprecisão. Por sua vez, as redes de Petri temporais se caracterizam, por definição, por possuir um intervalo temporal que delimita os períodos mínimos e máximos de sensibilização das transições. Em consequência, a imprecisão quanto a data de disparo das transições é denotada por um intervalo. Assim, neste trabalho, a dinâmica dos intervalos de disparos ao longo da evolução da rede é modelada por uma equação linear intervalar, que possibilita o cálculo de intervalos de tempo de ocorrências de transições sem que seja necessário explorar, completa ou parcialmente, o espaço de estados. Essa mesma equação pode ser usada para tratar do problema inverso: identificar seqüências de disparos de transições que permitam alcançar uma determinada marcação respeitando uma janela temporal pré-definida. Este problema foi denominado de alcançabilidade temporal. Ao longo do desenvolvimento dessa abordagem, outros importantes resultados foram obtidos, tais como: método enumerativo usando tempo global para análise via alcançabilidade da rede, métodos de redução baseados em aproximações intervalares, redução do espaço de estados. A abordagem desenvolvida foi aplicada a diferentes problemas a fim de calcular grandezas como: tempos máximo e mínimo entre a ocorrência de duas transições, validação de seqüências de disparos, tempos de ciclos, entre outras.

PALAVRAS-CHAVE

Redes de Petri Temporais, Álgebra Intervalar, Análise Temporal, Redução de Redes de Petri Temporais, Estimação de Intervalos de Tempo, Alcançabilidade de Intervalos de Tempo.

ÁREA/SUB-ÁREA DE CONHECIMENTO

1.03.00.00-7 - Ciência da Computação

1.03.01.01-1 - Computabilidade e Métodos de Computação

1.03.02.02-6 - Métodos Analíticos e de Simulação

ano:

2007

Nº.: 23