

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDUARDO HENRIQUE FERNANDES ROSA

A EVOLUÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS ATRAVÉS DA HISTÓRIA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2015

EDUARDO HENRIQUE FERNANDES ROSA

A EVOLUÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS ATRAVÉS DA HISTÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2.

Orientador: Rubens Robles Ortega Jr., Dr.

CURITIBA

2015

TERMO DE APROVAÇÃO

“A EVOLUÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS ATRAVÉS DA HISTÓRIA”

por

“Eduardo Henrique Fernandes Rosa”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14h00 do dia 11 de dezembro de 2015 na sala LIMAT como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O aluno foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho aprovado.

<hr/> <p>Prof. Dr. Rubens Robles Ortega Junior (Presidente - UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Prof. Dr. André Fabiano Steklain Lisbôa (Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Angelita Minetto Araújo (Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke (Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha (Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</p>	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Aquiles e a Tartaruga	9
FIGURA 2	– Exaustão do Círculo	11
FIGURA 3	– Exaustão do Círculo - Dinâmico	12
FIGURA 4	– Luna 1	14
FIGURA 5	– Luna 2	15
FIGURA 6	– Área do Círculo	17
FIGURA 7	– Arbelos	19
FIGURA 8	– Salinon	20
FIGURA 9	– Relação utilizada por Arquimedes na Elipse	21
FIGURA 10	– Demonstração do Teorema 14	22
FIGURA 11	– Espiral Arquimediana	24
FIGURA 12	– Método de Arquimedes para o Cálculo da Área da Espiral	26
FIGURA 13	– Área de uma volta da Espiral	27
FIGURA 14	– Segmento Parabólico	28
FIGURA 15	– Segmento Parabólico	29
FIGURA 16	– Área de Segmento Parabólico	30
FIGURA 17	– Área de Segmento Parabólico - Dinâmica	31
FIGURA 18	– Área da Elipse por Cavalieri	34
FIGURA 19	– Seção típica	35
FIGURA 20	– $\sum x = \frac{a^2}{2}$	35
FIGURA 21	– Quadratura por Fermat	36
FIGURA 22	– Cicloide	38
FIGURA 23	– Proposição 25	39
FIGURA 24	– Proposição 26	40
FIGURA 25	– Equações Paramétricas da Cicloide	41
FIGURA 26	– Companheira da Cicloide	41
FIGURA 27	– Cicloide e Companheira na demonstração de Roberval	42
FIGURA 28	– Regiões da demonstração de Reed	43
FIGURA 29	– O argumento de Reed	43
FIGURA 30	– Representação dinâmica da prova de Reed	44

SUMÁRIO

RESUMO	
ABSTRACT	
1 INTRODUÇÃO	7
2 GRÉCIA	9
2.1 MÉTODO DA EXAUSTÃO	9
2.2 LUNAS	13
2.3 ARQUIMEDES E A ANTECIPAÇÃO DO CÁLCULO INTEGRAL	16
Mensuração do Círculo	16
Livro de Lemas	18
Sobre Conoides e Esferoides	21
Sobre Espirais	23
O Método e a Lei da Alavanca	27
Quadratura da Parábola	27
3 EUROPA	32
3.1 OS INDIVISÍVEIS	32
3.2 QUADRATURAS DE X^N DE CAVALIERI	34
3.3 QUADRATURA DE X^N DE FERMAT	36
4 CICLOIDE	38
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
REFERÊNCIAS	46

RESUMO

ROSA, Eduardo Henrique Fernandes. A EVOLUÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS ATRAVÉS DA HISTÓRIA. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Este trabalho apresenta um estudo histórico da evolução das técnicas do cálculo de áreas, desde a antiguidade até o século XVII. São demonstrados resultados para as áreas de Lunas, Arbelos, Salinon, Elipse, Segmentos Parabólicos e regiões sob o gráfico de funções do tipo $f(x) = x^n$. Também é mostrado que a área compreendida entre a Cicloide e a reta de rolamento, no intervalo de uma volta, é o triplo da área do seu círculo gerador. Aliando História da Matemática com o uso da tecnologia proporcionada pelo consagrado aplicativo GeoGebra, que permite visualizar os resultados dinamicamente, este trabalho poderá servir como material de apoio ao professor de matemática, particularmente da Educação Básica, pois utiliza ideias acessíveis aos estudantes para mostrar áreas de regiões não abordadas neste nível escolar.

Palavras-chave: Método da Exaustão, Arquimedes, Espiral, Princípio de Cavalieri, Cicloide, GeoGebra.

ABSTRACT

ROSA, Eduardo Henrique Fernandes. . 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

This paper presents a historical study of the evolution of calculation techniques for areas, from antiquity to the seventeenth century. Several results are proofed for areas of Lunes, Arbelos, Salinon, Ellipse, Parabolic Segments, and regions under the graph of functions like $f(x) = x^n$. It is also shown that the area between the cycloid and its basis is three times the area of its generating circle. Combining history of mathematics with using the technology provided by the GeoGebra software, that lets you view the results dynamically, this work could serve as aid to the math teacher, particularly of basic education, because it uses affordable ideas to students to show areas of regions not covered in this grade level.

Keywords: Exhaustion Method, Archimedes, Spiral, Cavalieri's Principle, Cycloid, GeoGebra.

1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade o cálculo de áreas foi importante para a administração de grandes civilizações. No Egito, havia a cobrança de impostos dos produtores de alimentos e tal cobrança era proporcional à área de plantio da qual dispunha o produtor. Porém, a cada cheia do rio Nilo as margens se alagavam, e partes das propriedades ficavam cobertas de água, sendo, portanto, injusto pagar imposto pela parte "perdida" da propriedade.

Os gregos pensaram a geometria como uma ciência lógico-dedutiva e abordaram problemas de áreas muitas vezes sem aplicabilidade prática. Com os tratados de Euclides e Arquimedes, muito se desenvolveu quanto ao cálculo de áreas de várias formas planas como elipses, parábolas, lunas e espirais. Tais cálculos diversas vezes envolviam métodos laboriosos e engenhosos para se conseguir alcançar o resultado de forma satisfatória.

Após a idade média veio o renascimento, e com ele novos e excitantes métodos para encontrar áreas, tendo como base os clássicos gregos, mas avançando de maneira ímpar em diversos ramos da matemática, como métodos para encontrar tangentes a curvas dadas.

Este momento da história tornou-se muito favorável à descoberta, independente, por Sir Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) da relação entre o cálculo de áreas e o cálculo de tangentes, criando assim os ramos da matemática conhecidos como Cálculo Integral e Diferencial.

Tendo isso em vista, torna-se importante saber como as áreas foram calculadas ao longo da história, quais os métodos empregados e quem foram as pessoas por trás de tais métodos.

Este trabalho tem como um de seus objetivos o estudo de algumas técnicas e métodos utilizados para o cálculo de áreas de diferentes formas, antes do surgimento do Cálculo Integral. Aliando tecnologia com história da matemática, também tem como objetivo servir de material paradidático ao professor de matemática.

O cálculo de áreas é um assunto que permeia tanto a história das civilizações quanto a vida escolar dos alunos. Enquanto por um lado a história se mostra rica, com personagens interessantes e técnicas brilhantes e acessíveis, por outro lado no ensino atual o cálculo de áreas se limita a, no máximo, informar que a área do círculo de raio r é πr^2 .

Para tanto, houve uma extensa pesquisa bibliográfica em livros de história da matemática, como Eves (2004), Lino (2013), Baron e Bos (1985) e, principalmente, Edwards (2012).

Por fim, o trabalho está dividido em três capítulos: no primeiro trata-se da Grécia, no qual relata-se brevemente como o cálculo de áreas na matemática grega se desenvolveu com base no famoso problema clássico da quadratura do círculo. No segundo capítulo trata-se da Europa durante o renascimento, onde problemas de origem mecânica deram novo ânimo aos matemáticos da época para se debruçarem sobre este assunto. Finalmente, no terceiro capítulo, destaca-se a cicloide, uma curva mecânica com propriedades interessantes e com uma história muito rica, sendo apresentadas sua definição, algumas propriedades e três demonstrações envolvendo sua área.

2 GRÉCIA

2.1 MÉTODO DA EXAUSTÃO

Deve-se a Zenão de Eleia (450 a.C.) uma série de paradoxos referentes a processos infinitos que desafiaram as mentes gregas durante muito tempo. Entre eles está o famoso paradoxo "Aquiles e a Tartaruga", que diz:

O herói grego Aquiles, e a tartaruga, decidem apostar uma corrida. Como a velocidade de Aquiles é maior que a da tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando a corrida um trecho na frente do ponto inicial de Aquiles. Segundo Zenão, Aquiles nunca ultrapassaria a tartaruga, pois quando ele chegasse à posição inicial A da tartaruga, esta encontrar-se-ia mais à frente, numa outra posição B. Quando Aquiles chegasse a B, a tartaruga não estaria mais lá, pois teria avançado para uma nova posição C, e assim sucessivamente, ad infinitum.

A Figura 1 ilustra esta ideia.

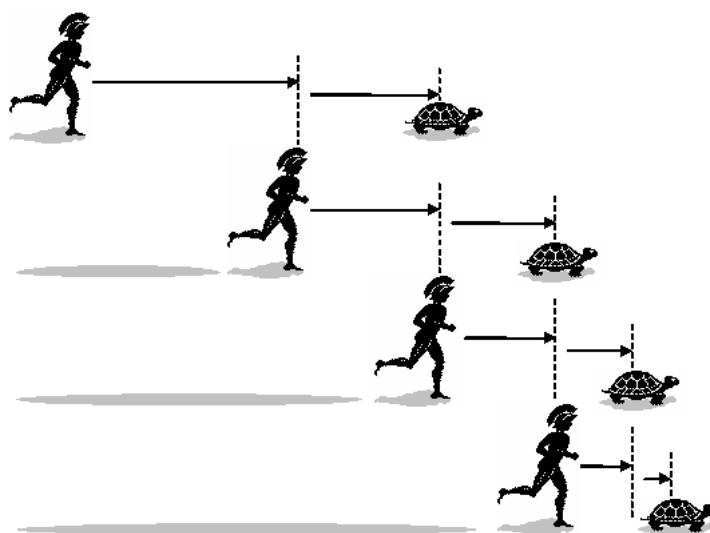


Figura 1: Aquiles e a Tartaruga

Mesmo sendo totalmente intuitivo que, de fato, Aquiles logo ultrapassaria a tartaruga, nenhuma argumentação matemática da época conseguiu explicar o que estava errado no raciocínio de Zenão. Desta forma, os matemáticos gregos aboliram os processos infinitos de seus métodos.

Outro filósofo a tratar do tema foi Antífon, o Sofista (430 a.C.), que contribuiu para o problema da quadratura do círculo afirmando que, dobrando-se sucessivamente os lados de um polígono regular inscrito em um círculo, a área do polígono iria se aproximar da área do círculo cada vez mais, e por fim, tornar-se-ia igual. Uma crítica logo levantada foi que uma grandeza pode ser dividida tanto quanto se queira, e desta forma a área do polígono jamais esgotaria a área do círculo. Diferentemente dos paradoxos de Zenão que precisaram esperar até o renascimento europeu no século XV para serem esclarecidos totalmente, uma rápida resposta foi encontrada para a argumentação de Antífon, e essa resposta foi dada por Eudóxio de Cnido (370 a.C.), que conseguiu de maneira magistral encontrar uma forma de explicar o porquê da argumentação de Antífon estar correta. Eudóxio introduziu um tipo de argumentação conhecida hoje como "método da exaustão", que se assemelha à argumentação de Antífon, porém não se utiliza de um processo infinito, e se baseia no seguinte

Axioma 1. *Dadas duas grandezas mensuráveis (de mesma espécie¹), pode-se encontrar um múltiplo da menor que supera a maior.*

Este axioma não nos permite comparar áreas com volumes, nem segmentos de retas com áreas, porém é intuitivo entender seu significado em termos geométricos.

A partir deste axioma, pode-se demonstrar a seguinte

Proposição 2 (Princípio da Exaustão). *Se de uma grandeza dada retira-se uma parte não menor do que sua metade, e do restante retira-se uma parte não menor do que sua metade, continuando com esse processo, tem-se que, após um número finito de passos, a grandeza restante será menor do que qualquer grandeza da mesma espécie dada.*

A demonstração deste resultado se encontra na proposição 1, livro X, dos Elementos de Euclides [Bicudo (2009)].

Em termos modernos, pode-se escrever o *Princípio da Exaustão* da seguinte maneira:

Proposição 3 (Princípio da Exaustão). *Sejam $\varepsilon > 0$, $M > 0$ e $1/2 \leq r < 1$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, $M(1 - r)^n < \varepsilon$.*

A partir de agora, a notação $a(X)$ será utilizada para indicar a área da figura X .

Será ilustrado como utilizar o *Princípio da Exaustão* no seguinte

Teorema 4. *Dado um círculo C e $\varepsilon > 0$, existe um polígono regular P , inscrito em C , tal que $a(C) - a(P) < \varepsilon$.*

¹Dois segmentos de reta ou duas regiões planas limitadas.

Demonstração. Seja $P_0 = EFGH$ um quadrado inscrito no círculo C e considere-se $M_0 = a(C) - a(P_0)$. Dobrando-se o número de lados de P_0 , obtém-se um octógono regular P_1 inscrito em C , e considere-se $M_1 = a(C) - a(P_1)$.

Repetindo este processo, obtém-se uma sequência $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ de polígonos regulares inscritos em C , sendo que P_n possui 2^{n+2} lados. Para cada P_n tem-se que $M_n = a(C) - a(P_n)$.

Será mostrado que

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2}M_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e então seguirá pelo Princípio da Exaustão que $M_n < \varepsilon$ para algum n suficientemente grande.

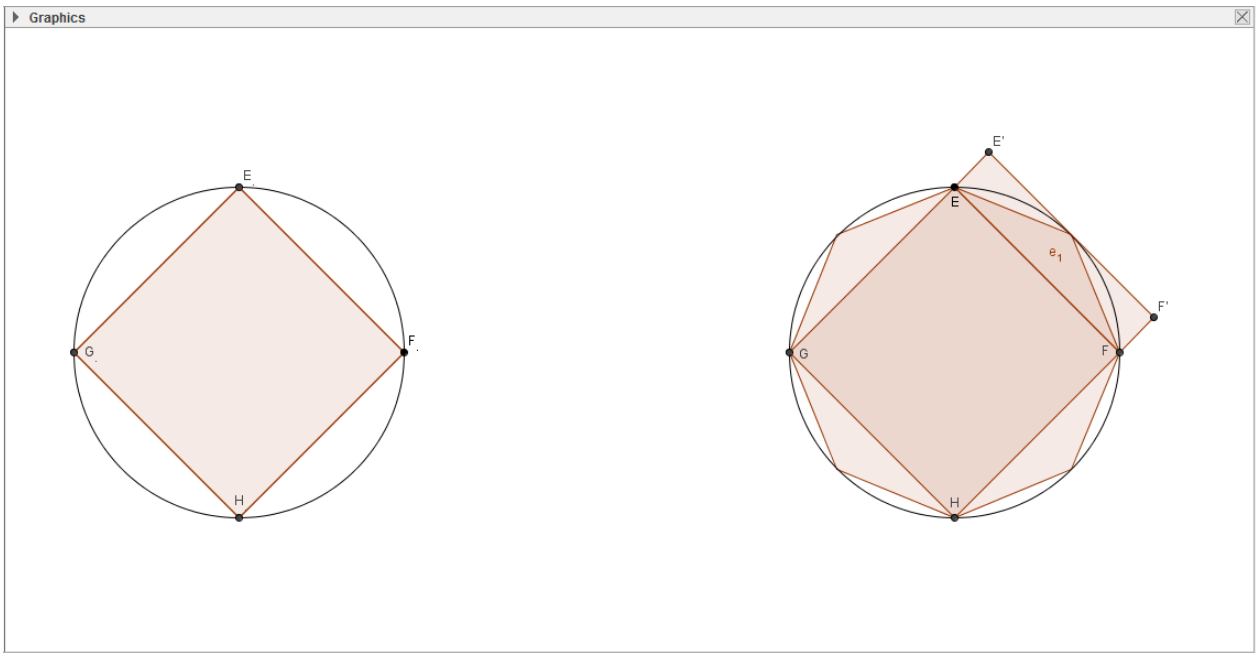


Figura 2: Exaustão do Círculo

Como a demonstração é essencialmente a mesma para todo n , será provado o caso $n = 0$, que está ilustrado na Figura 2. Tem-se que:

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= a(P_1) - a(P_0) \\ &= 4a(\triangle EFK) \\ &= 2a(\square EFF'E') \\ &> 2a(\triangle EKF) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4a(\triangle EKF) \\ &= \frac{1}{2}(a(C) - a(P_0)) \\ &= \frac{1}{2}M_0. \end{aligned}$$

Conclui-se, portanto, que $M_0 - M_1 > \frac{1}{2}(a(C) - a(P_0))$. Analogamente tem-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2}(a(C) - a(P_n)) = \frac{1}{2}M_n.$$

Segue então pelo Princípio da Exaustão que, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existirá um polígono regular inscrito em C tal que $a(C) - a(P) < \varepsilon$.

■

Através do uso do software Geogebra Hohenwarter e Hohenwarter (2009) podemos ter uma visualização dinâmica deste processo, para tanto construímos a figura abaixo.

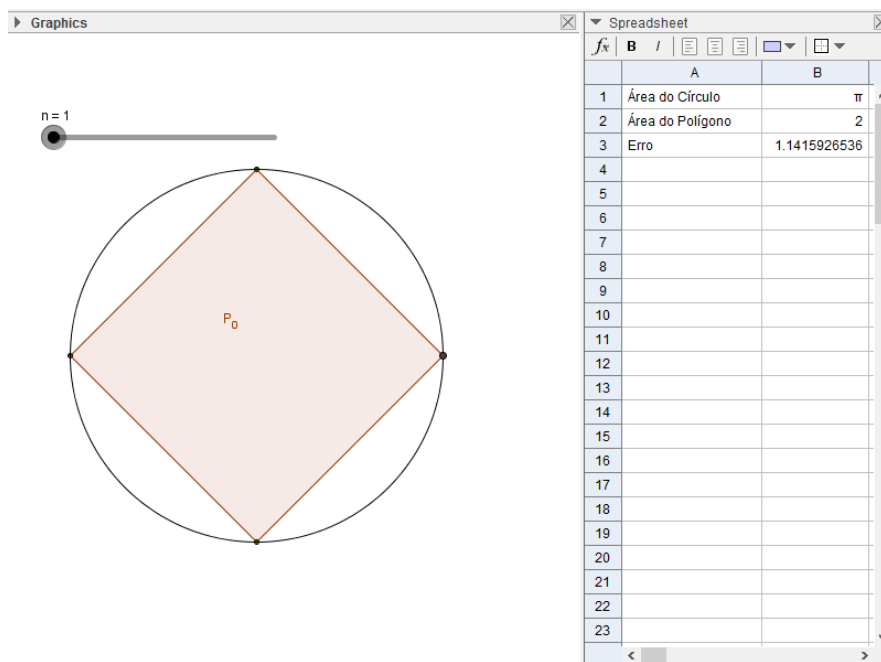


Figura 3: Exaustão do Círculo - Dinâmico

Aumentando o valor n acima, temos que o polígono inscrito ao círculo se aproxima cada vez mais do mesmo, a tabela a direita mostra esse processo. Esta visualização pode ser feita no seguinte link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2233207>.

A partir do teorema acima, pode-se provar a seguinte

Proposição 5. Se C_1 e C_2 são círculos de raios r_1 e r_2 respectivamente, então

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (1)$$

Demonstração. Sejam $A_1 = a(C_1)$ e $A_2 = a(C_2)$.

Tem-se três possibilidades: ou $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$ ou $\frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$ ou $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$.

A demonstração será feita por dupla redução ao absurdo, característica da geometria grega.

Supõe-se primeiro que $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$ ou, de outra forma, que $A_2 > \frac{A_1 \cdot r_2^2}{r_1^2} = S$, e seja $\varepsilon = A_2 - S > 0$. Pelo teorema anterior, existe um polígono P_2 inscrito em C_2 tal que $A_2 - a(P_2) < \varepsilon = A_2 - S$, portanto $a(P_2) > S$.

Mas $\frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{A_1}{S}$, onde P_1 é um polígono regular inscrito em C_1 e semelhante a P_2 .

Segue que $\frac{S}{a(P_2)} = \frac{A}{a(P_1)} = \frac{a(C_1)}{a(P_1)} > 1$, logo $S > a(P_2)$, o que é uma contradição.

Assim, a suposição $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$ é falsa.

Como $\frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2} \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} < \frac{r_2^2}{r_1^2}$, uma argumentação análoga a anterior mostra que a única opção que nos resta é a igualdade desejada.

■

Note-se que a equação (1) pode ser reescrita da forma

$$\frac{a(C_1)}{r_1^2} = \frac{a(C_2)}{r_2^2}.$$

Denotando por π_1 o valor comum destas duas razões, segue que os gregos mostraram que a área de um círculo C de raio r é $a(C) = \pi_1 r^2$.

2.2 LUNAS

Sabe-se, da geometria elementar, que se pode construir, por meio de régua não graduada e compasso, um quadrado de mesma área que a de um triângulo dado. Em geral, pode-se construir um quadrado que tenha a mesma área de um polígono qualquer (regular ou não). A partir daí, uma pergunta natural que surge é:

Pode-se construir, somente por meio de uma régua não graduada e compasso, um quadrado de mesma área do que a de um círculo dado?

Este problema instigou diversas gerações de matemáticos, não somente gregas, durante muitos séculos. De fato, ele é conhecido como *o problema da quadratura do círculo* e é um dos três problemas clássicos da matemática grega².

Na tentativa de resolvê-lo, o geômetra Hipócrates de Quios (470-410 a.C.) se envolveu no cálculo de áreas de certas figuras planas chamadas lunas.

²Os outros dois são o problema da duplicação do cubo e o problema da trissecção do ângulo.

Definição 6. Uma luna é uma figura plana delimitada por dois arcos circulares que têm em comum uma corda e estão do mesmo lado desta corda.

Hipócrates conseguiu calcular as áreas de algumas lunas particulares, como nos exemplos a seguir.

Exemplo 7 (Luna 1). Seja o ΔABC isósceles e retângulo em A , e seja M o ponto médio de \overline{CB} . Com centro em A e raio \overline{AC} , traça-se o arco de circunferência CB , e com centro em M e raio \overline{MC} , traça-se a semicircunferência Γ , formando assim uma luna. Tem-se que a área da luna obtida é igual a área do ΔABC .

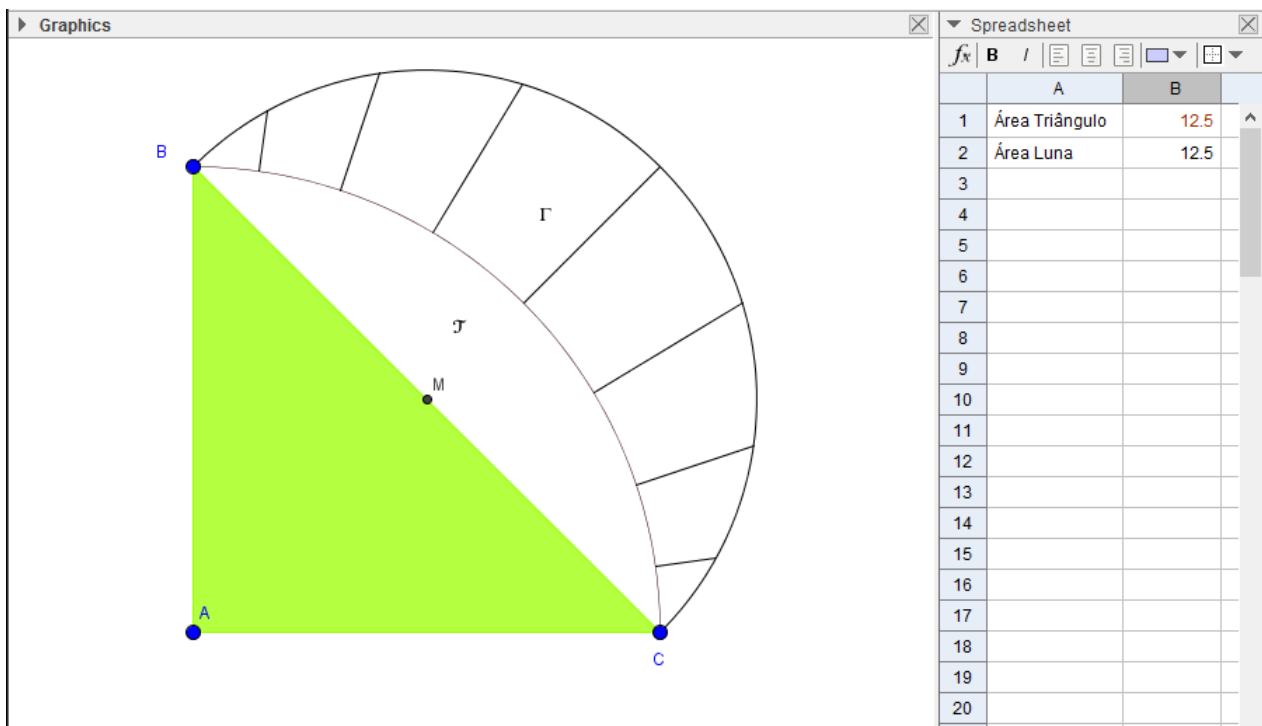


Figura 4: Luna 1

Note-se, inicialmente, que o setor ABC e o semicírculo Γ possuem uma região \mathcal{T} em comum. Além disso, $a(\text{setor}ABC) = a(\Delta ABC) + a(\mathcal{T})$ e $a(\Gamma) = a(\text{luna}) + a(\mathcal{T})$. Assim sendo, se o setor tiver a mesma área do semicírculo, então a área da luna será igual à área do triângulo.

De fato,

$$a(\Gamma) = \frac{\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi}{2} = \frac{(AB)^2 \pi}{4} \text{ e } a(\text{setor}ABC) = \frac{(AB)^2 \pi}{4}.$$

Logo, tem-se que $a(\text{luna}) + a(\mathcal{T}) = a(\Gamma) = a(\text{setor}ABC) = a(\Delta ABC) + a(\mathcal{T})$ e, portanto, $a(\text{luna}) = a(\Delta ABC)$.

A Figura 4, construída no GeoGebra, permite conferir dinamicamente este resultado. Ao

movimentar o ponto A, a figura tem seu tamanho alterado, sendo que as áreas do triângulo e da luna aparecem atualizadas na planilha à direita. Esta visualização pode ser feita através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2233003>.

Exemplo 8 (Luna 2). Seja o ΔABC retângulo em A. Sejam M o ponto médio de \overline{BC} , N de \overline{AC} e P de \overline{AB} . Com centro em M e raio \overline{MC} , traça-se a semicircunferência de diâmetro \overline{BC} e passando por A. Com centro em N e raio \overline{NA} , traça-se outra semicircunferência e, com centro P e raio \overline{PA} , outra.

Sejam L_1 e L_2 as lunas formadas em \overline{AB} e \overline{AC} respectivamente, conforme a Figura 5. Tem-se então que $a(L_1) + a(L_2) = a(\Delta ABC)$.

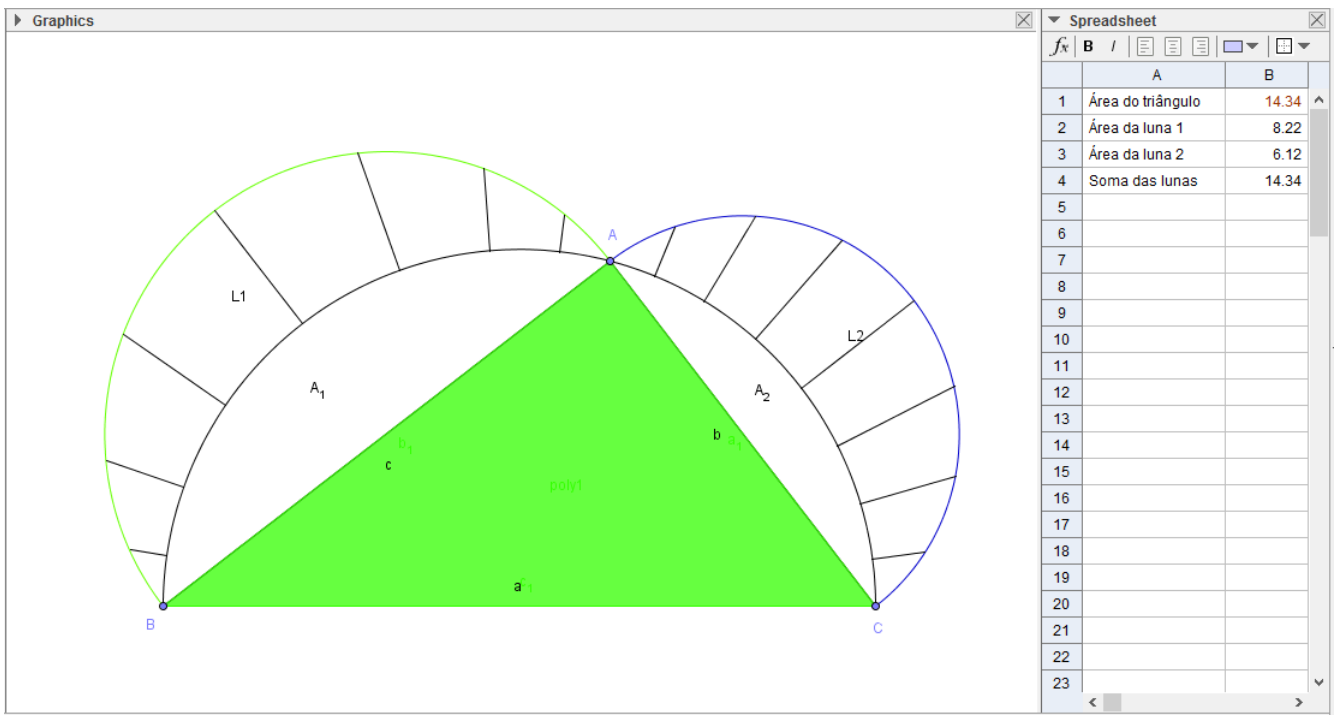


Figura 5: Luna 2

De fato, sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. As áreas dos semicírculos S_a (construído sobre \overline{BC}), S_b (construído sobre \overline{AC}) e S_c (construído sobre \overline{AB}) são:

$$a(S_a) = \frac{a^2\pi}{4}, a(S_b) = \frac{b^2\pi}{4} \text{ e } a(S_c) = \frac{c^2\pi}{4}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2\pi}{4} = \frac{b^2\pi}{4} + \frac{c^2\pi}{4} \Leftrightarrow a(S_a) = a(S_b) + a(S_c)$.

Tem-se, também, que $a(S_a) = a(\Delta ABC) + a(A_1) + a(A_2)$, enquanto que $a(S_b) = a(L_1) + a(A_1)$ e $a(S_c) = a(L_2) + a(A_2)$.

Portanto, segue que $a(\Delta ABC) = a(L_1) + a(L_2)$.

A Figura 5, construída no GeoGebra, permite conferir dinamicamente este resultado. Ao

movimentar o ponto A, a figura tem seu tamanho e forma alterados, sendo que as áreas do triângulo e das lunas aparecem atualizadas na planilha à direita. Esta visualização pode ser feita através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2230675>.

2.3 ARQUIMEDES E A ANTECIPAÇÃO DO CÁLCULO INTEGRAL

Arquimedes (287-212 a.C.) foi o maior matemático grego³ da história, e também foi físico, engenheiro, inventor e astrônomo. Nasceu e viveu a maior parte de sua vida na ilha de Siracusa, atualmente na Itália.

Muitos de seus trabalhos foram perdidos ao longo dos séculos, mas mesmo assim uma grande quantidade deles chegou até nós. Seus trabalhos versam sobre cálculo de áreas, volumes e também sobre certas leis físicas. Dentre eles, destacam-se:

- Mensuração do círculo
- Livro de lemas
- Quadratura da parábola
- Sobre a esfera e o cilindro
- Sobre espirais
- Sobre conoides e esferoides
- O método

MENSURAÇÃO DO CÍRCULO

Os gregos sabiam que dado um círculo C , de raio r e diâmetro d , $a(C) = \pi_1 r^2$ para uma certa constante π_1 e também que $l(C) = \pi_2 d$ para uma constante π_2 , onde $l(C)$ é o comprimento da circunferência C . Não está claro quem foi o primeiro a notar ou quando foi notado que $\pi_1 = \pi_2$, mas Arquimedes em seu trabalho sobre a Mensuração do Círculo deu uma prova rigorosa de que a área do círculo C é igual à área de um triângulo com a medida da base igual à da circunferência e de altura igual ao raio, ou seja, $a(C) = \frac{1}{2}rl(C)$. E portanto isso implica na igualdade entre as duas constantes. Denotando esta constante em comum por π , tem-se que $a(C) = \pi r^2$ e $l(C) = \pi d$. Convém ressaltar porém que o símbolo π só foi introduzido na matemática com o significado atual pelo matemático galês Willian Jones em 1706, e popularizado pelo matemático suíço Leonhard Euler anos mais tarde.

³Juntamente com Newton e Gauss, é considerado um dos três maiores matemáticos da história.

Já foi provado no Teorema 4 que, dado um círculo C e um $\varepsilon > 0$, existe um polígono P , inscrito em C , tal que $a(C) - a(P) < \varepsilon$. Analogamente, pode-se provar o seguinte

Teorema 9. *Dado um círculo C e um $\varepsilon > 0$, existe um polígono Q , circunscrito a C , tal que $a(Q) - a(C) < \varepsilon$.*

Antes de demonstrar o próximo teorema, enuncia-se o seguinte

Lema 10. *Sejam P e Q polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente, a um círculo de circunferência C . Então $2p(P) < 2p(C) < 2p(Q)$, onde $2p(X)$ representa o perímetro da figura X .*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [Edwards (2012)], e utiliza a seguinte desigualdade: $\sin(\theta) < \theta < \operatorname{tg}(\theta)$ se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Com isto, pode-se demonstrar o seguinte

Teorema 11. *Dado um círculo C de raio r , tem-se que $a(C) = \frac{1}{2}rl(C)$.*

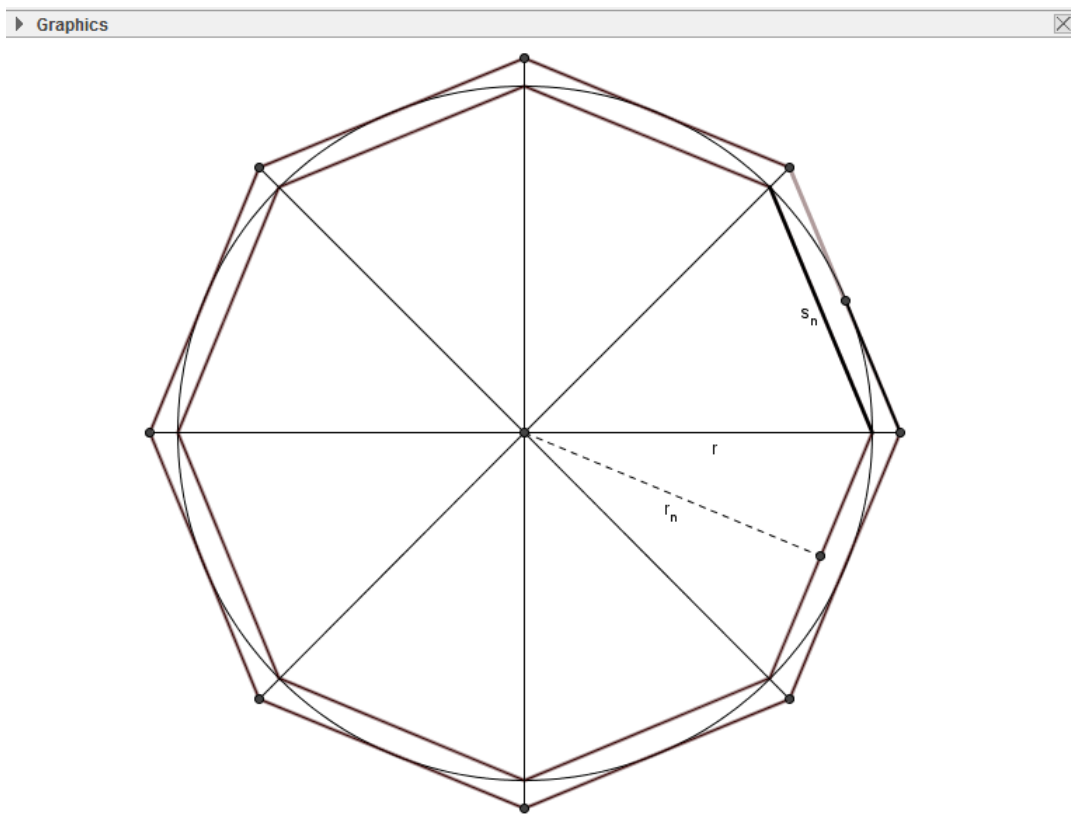


Figura 6: Área do Círculo

Demonstração. *A demonstração dar-se-á de maneira clássica, por dupla redução por absurdo. Primeiramente, considera-se um triângulo \triangle de base cujo comprimento é igual ao comprimento $l(C)$ da circunferência de C , e de altura igual ao raio r de C .*

Assim, $a(\Delta) = \frac{1}{2}rl(C)$. *Mostrar-se-á que $a(C) = a(\Delta)$.*

Primeiramente, supõe-se que $a(C) > a(\Delta) = \frac{1}{2}rl(C)$.

Sejam $\varepsilon = a(C) - a(\Delta)$ e P_n um polígono regular de n lados inscrito em C de tal forma que

$$a(P_n) > a(C) - \varepsilon = \frac{1}{2}rl(C).$$

Se s_n é o comprimento da aresta de P_n e r_n o comprimento de seu apótema (Figura 6), então

$$r_n < r \text{ e } n \cdot s_n < l(C).$$

Como P_n é a união de n triângulos isósceles com base s_n e altura r_n , segue que

$$a(P_n) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot r_n = \frac{1}{2}r_n(n \cdot s_n) < \frac{1}{2}r \cdot l(C),$$

o que é uma contradição.

O caso em que se supõe $a(C) < a(\Delta)$ é análogo e pode ser encontrado em [Edwards (2012)].

■

Neste mesmo trabalho Arquimedes deduziu uma aproximação para π ,

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

que está correta até a segunda casa decimal, e acredita-se que ele conseguiu tal estimativa inscrevendo e circunscrevendo quadrados numa circunferência, e por sucessivas duplicações do número de lados, aproximou o comprimento da circunferência pelos perímetros dos polígonos obtidos.

LIVRO DE LEMAS

Este trabalho de Arquimedes foi preservado por árabes, e apresenta diversas proposições geométricas interessantes, algumas das quais sobre o cálculo de áreas de figuras incomuns. Serão mostradas duas delas.

Exemplo 12 (Proposição 4 do livro de Lemas). *Sejam P, Q e R três pontos sobre uma linha reta, com Q entre P e R . Semicírculos são construídos sobre um mesmo lado da linha, com diâmetros \overline{PQ} , \overline{QR} e \overline{PR} . Um Arbelos \mathcal{A} é a figura delimitada por estes três semicírculos. Traça-se a perpendicular a \overline{PR} em Q , encontrando o arbelos em S . Tem-se que $a(\mathcal{A}) = a(C)$, onde C é o círculo de diâmetro \overline{QS} .*

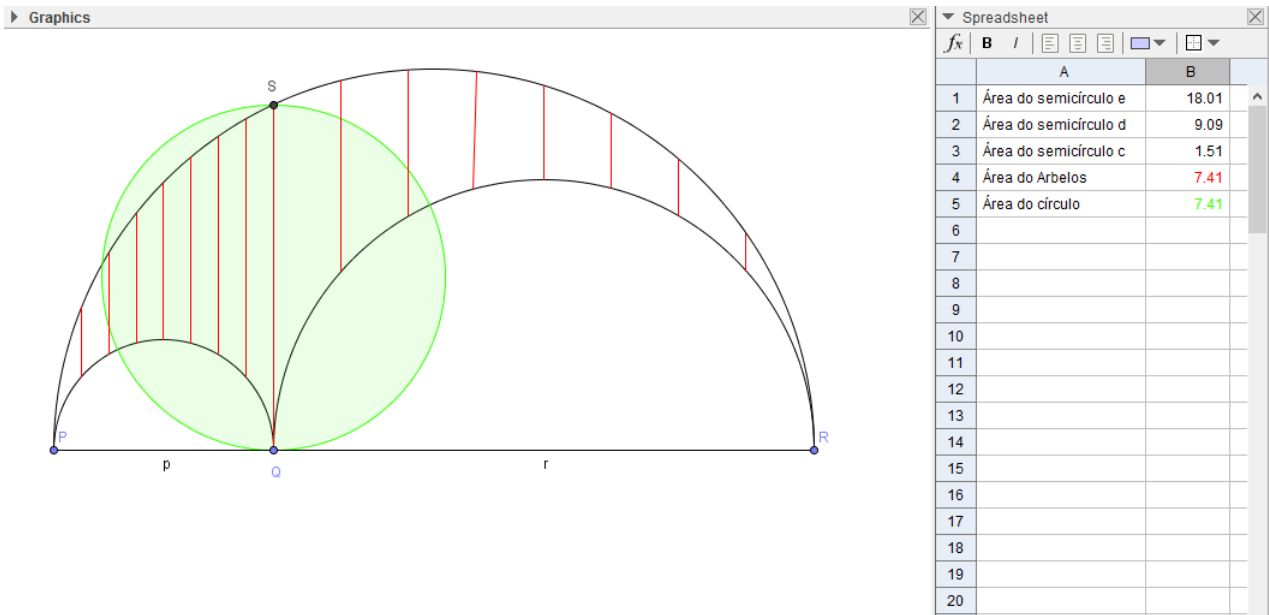


Figura 7: Arbelos

De fato, sejam $\overline{PQ} = p$, $\overline{QR} = r$ e $\overline{QS} = \sqrt{pr}$. A área do arbelos \mathcal{A} é igual à área do semicírculo de raio $\frac{p+r}{2}$ menos as áreas dos semicírculos de raios $\frac{r}{2}$ e $\frac{p}{2}$, ou seja:

$$a(\mathcal{A}) = \frac{\left(\frac{p+r}{2}\right)^2 \pi}{2} - \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2 \pi}{2} - \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi}{2} = \frac{p^2 + 2pr + r^2}{8} \pi - \frac{p^2}{8} \pi - \frac{r^2}{8} \pi = \frac{pr}{4} \pi.$$

Agora,

$$a(\mathcal{C}) = \left(\frac{\sqrt{pr}}{2}\right)^2 \pi = \frac{pr}{4} \pi.$$

Logo $a(\mathcal{A}) = a(\mathcal{C})$ e portanto está estabelecida a igualdade desejada.

A Figura 7, construída no GeoGebra, permite conferir dinamicamente este resultado. Ao movimentar o ponto Q , a figura tem seu tamanho e forma alterados, sendo que as áreas do Arbelos e do Círculo aparecem atualizadas na planilha à direita. Esta visualização pode ser feita através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2233527>.

Exemplo 13 (Proposição 14 do livro de Lemas). Sejam P , Q , R e S quatro pontos (nesta ordem) sobre uma linha reta, tal que $\overline{PQ} = \overline{RS}$. Acima da linha são construídos, com diâmetros \overline{PQ} , \overline{RS} e \overline{PS} , semicírculos, e abaixo da linha um outro semicírculo de diâmetro \overline{QR} . Um Salinon \mathcal{S} é a figura delimitada por estes quatro semicírculos. O eixo de simetria do Salinon intercepta-o nos pontos M e N . Tem-se que $a(\mathcal{S}) = a(\mathcal{C})$, onde \mathcal{C} é o círculo de diâmetro \overline{MN} .

Sejam $\overline{PQ} = \overline{RS} = r_1$, $\overline{QR} = r_2$ e $\overline{MN} = r_3$. Note-se inicialmente que $r_3 = r_1 + r_2$.

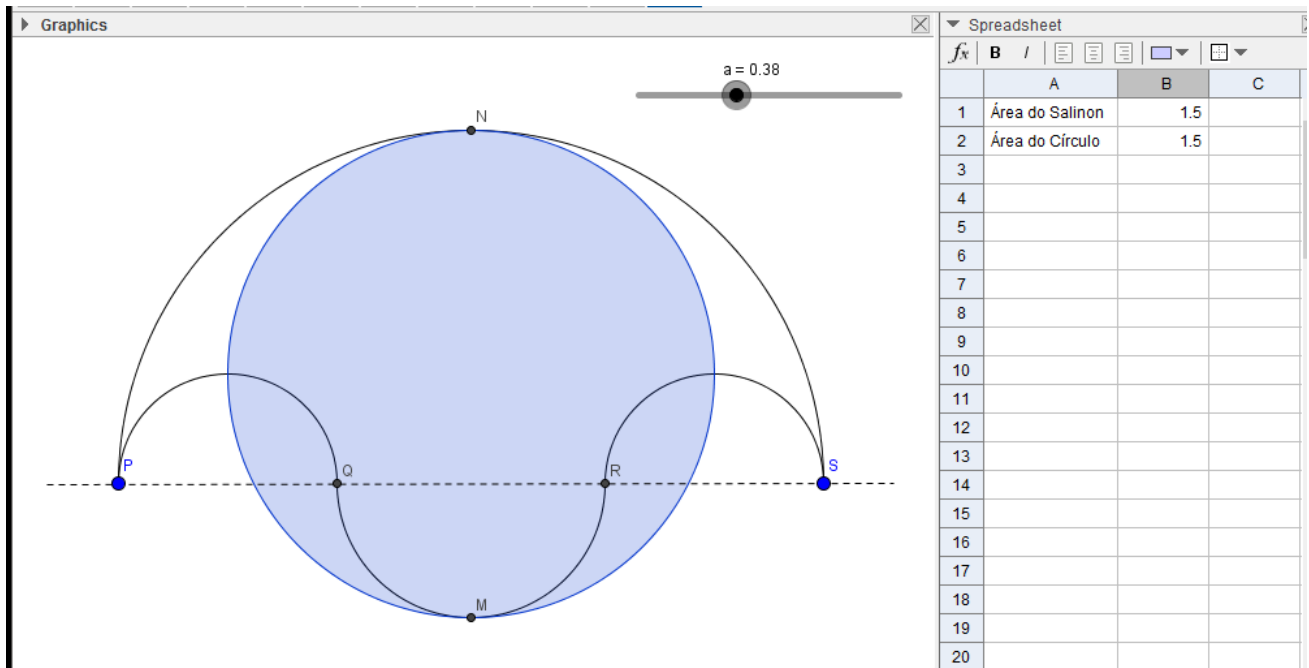


Figura 8: Salinon

Tem-se que

$$a(C) = \left(\frac{r_3}{2}\right)^2 \pi = \frac{(r_1 + r_2)^2}{4} \pi.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a(S) &= \frac{(r_1 + r_2/2)^2}{2} \pi + \frac{(r_2/2)^2}{2} \pi - 2 \frac{(r_1/2)^2}{2} \pi \\ &= \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2/4 + r_2^2/4 - 2r_1^2/4}{2} \pi \\ &= \left(\frac{r_1^2/2 + r_1 r_2 + r_2^2/2}{2}\right) \pi \\ &= \frac{(r_1 + r_2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Ou seja, $a(S) = a(C)$.

A Figura 8, construída no GeoGebra, permite conferir dinamicamente este resultado. Ao movimentar o ponto R (ou o controle deslizante "a"), a figura tem seu tamanho e forma alterados, sendo que as áreas do Salinon e do Círculo aparecem atualizadas na planilha à direita. Esta visualização pode ser feita através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2233561>.

SOBRE CONOIDES E ESFEROIDES

Neste trabalho, Arquimedes calculou as áreas e volumes de diversas figuras relacionadas à esferas e cones. Abaixo segue uma rápida e

Teorema 14. *Dada uma elipse E de semieixos a e b , tem-se que $a(E) = \pi ab$. Como consequência, segue que a área do círculo C de raio r é πr^2 , bastando tomar $a = b = r$.*

Demonstração. *Na demonstração deste teorema, Arquimedes valeu-se do seguinte resultado, ilustrado na Figura 9.*

Propriedade (Característica da Elipse). *Seja o círculo de raio " a " que é circunscrito à elipse (chamado círculo auxiliar à elipse E). Seja P um ponto no eixo maior da elipse e sejam Q e R os pontos da elipse e da circunferência, respectivamente, acima de P . Então*

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \frac{b}{a}.$$

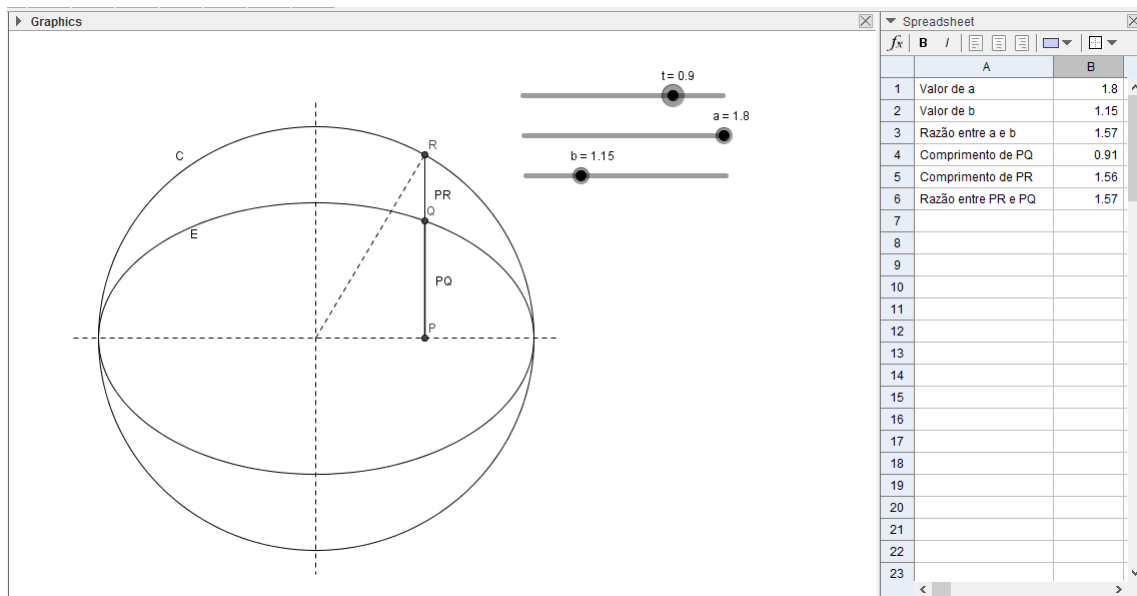


Figura 9: Relação utilizada por Arquimedes na Elipse

Para ver isto, basta considerar que E tem seu centro coincidindo com a origem do plano cartesiano, sendo a equação da elipse dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{Logo,} \quad \overline{PQ} = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} \overline{PR}.$$

A Figura 9, construída no GeoGebra, permite conferir dinamicamente este resultado. Ao movimentar qualquer um dos controles deslizantes, " a ", " b " ou " t ", a figura tem seu tamanho e forma alterados, sendo que a razão $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \frac{b}{a}$ aparece atualizada na planilha à direita. Esta visualização pode ser feita através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2252763>.

A demonstração do Teorema considera uma elipse E de eixos maior a e menor b , com círculo auxiliar C' . Sendo C'' um círculo de raio $r = \sqrt{ab}$ com mesmo centro da elipse, tem-se que $a(C'') = \pi ab$. Será mostrado, por dupla redução ao absurdo, que $a(E) = a(C'')$.

Supõe-se, inicialmente, que $a(E) < a(C'')$.

Seja P'' um polígono regular inscrito em C'' , tendo o número de lados múltiplo de quatro⁴ e com dois vértices em um diâmetro de C'' , tal que $a(P'') > a(E)$.

Se P' é um polígono regular semelhante a P'' , inscrito em C' , então

$$\frac{a(P'')}{a(P')} = \frac{r^2}{a^2} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}.$$

Seja P o polígono inscrito em E cujos vértices são as interseções de E com as perpendiculares de E , conforme Figura 10.

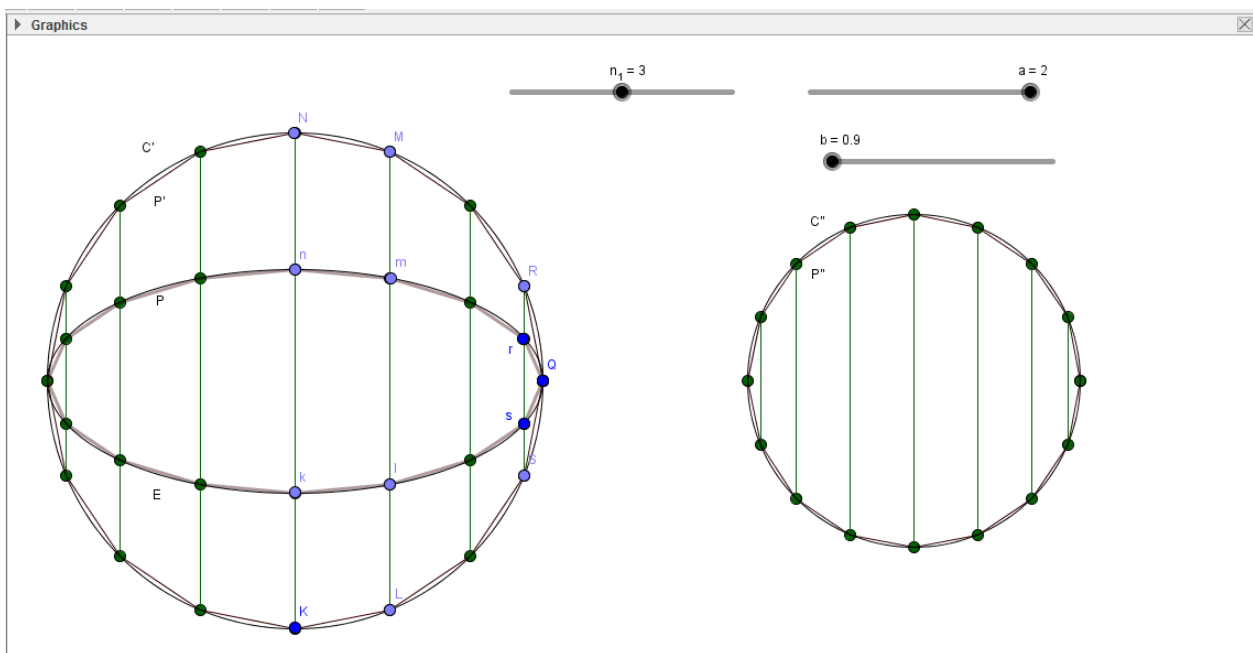


Figura 10: Demonstração do Teorema 14

Pode-se considerar P e P' como união dos correspondentes triângulos (com Qrs e QRS) e dos correspondentes trapézios (como $Klmn$ e $KLMN$).

Agora, a propriedade característica da elipse implica que

$$\frac{\overline{lm}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{kn}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{rs}}{\overline{RS}} = \frac{b}{a},$$

⁴Para que sempre tenhamos quatro vértices em diâmetros perpendiculares.

e então segue que

$$\frac{a(Klmn)}{a(KLMN)} = \frac{a(Qrs)}{a(QRS)} = \frac{b}{a},$$

e conseqüentemente

$$\frac{a(P)}{a(P')} = \frac{b}{a}.$$

Mas tem-se então que $a(P) = a(P')$, uma contradição com o fato de P estar inscrito em E . Conclui-se, então, que $a(C'') \neq a(E)$.

Assume-se agora que $a(C'') < a(E)$.

Considere-se o polígono P inscrito em E como acima, tal que $a(P) > a(C'')$. De forma análoga ao caso anterior, tem-se que

$$\frac{a(P)}{a(P')} = \frac{b}{a} = \frac{a(P'')}{a(P')},$$

mas então

$$a(P'') = a(P) > a(C''),$$

o que contradiz o fato de P'' estar inscrito em C'' .

Isto completa a dupla redução ao absurdo e portanto $a(C'') = a(E) = \pi ab$.

■

SOBRE ESPIRAIS

O Método da Compressão

Arquimedes algumas vezes utilizava um aprimoramento do método da exaustão de Eudócio. Para provar que uma certa magnitude S é igual a outra magnitude R , Arquimedes considerava duas seqüências $\{L_n\}$ e $\{U_n\}$ tais que $L_n < S < U_n$ e $L_n < R < U_n$ para todo n .

Se fosse possível provar que $U_n - L_n < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ para algum n suficientemente grande, então uma dupla redução ao absurdo mostrava que $S = R$ ⁵.

O mais difícil trabalho

A obra "Sobre Espirais" foi considerada, durante toda a história, a obra de Arquimedes de mais difícil leitura. Neste trabalho, as vinte primeiras proposições são destinadas a encontrar a tangente à espiral num ponto qualquer, enquanto que as últimas oito buscam encontrar a área de uma volta da espiral e de "seções" de uma espiral, bem como encontrar a área de mais de uma volta.

O fato de a matemática grega ser geométrica e retórica dificultava a introdução de conceitos

⁵Note que o método acima se assemelha grandemente com o **Teorema do Confronto**, ver Stewart (2005)

dinâmicos. Curvas eram descritas como "lugares geométricos" simples como, por exemplo, o círculo (lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto O dado). Também eram definidas algumas curvas por meio de interseção de duas superfícies dadas, como, por exemplo, as seções cônicas (interseção de planos e cones).

O caráter estático da geometria grega era reflexo do pouco contato com os conceitos de variação e movimento na ciência grega. Somente casos de movimento uniforme foram estudados com algum detalhe.

Tendo estas considerações em vista, a sequência irá mostrar a forma como Arquimedes definiu a famosa espiral que hoje leva seu nome.

Definição 15 (Espiral de Arquimedes). *Se um segmento de reta desenhado no plano gira a uma velocidade constante sobre uma de suas extremidades a qual se mantém fixa, e retorna à posição inicial, e se, ao mesmo tempo que o segmento gira, um ponto se move a velocidade constante sobre o segmento começando na extremidade fixa, o ponto irá descrever uma espiral no plano, como mostra a Figura 11.*

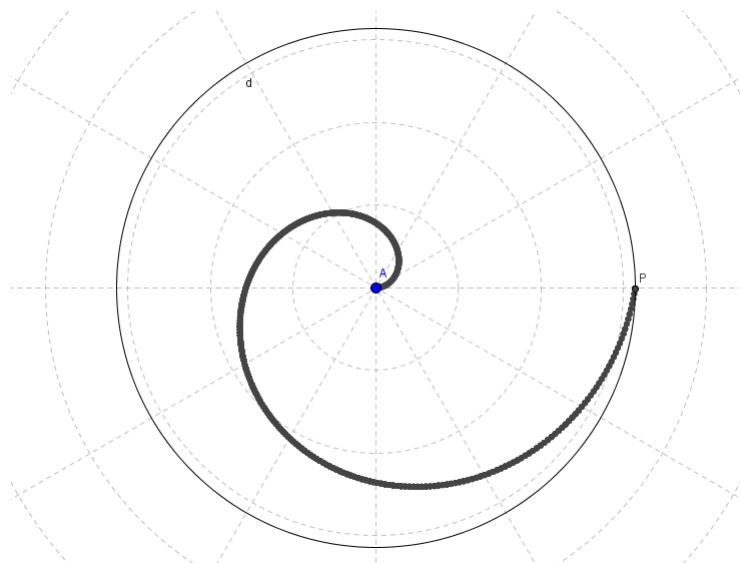


Figura 11: Espiral Arquimediana

Pode-se também descrever esta curva em termos de coordenadas polares.

Definição 16 (Espiral de Arquimedes). *Seja ω (em radianos) a velocidade angular constante de rotação da linha (semirreta de origem A da Figura 11) e v a velocidade constante em que um ponto se move pela linha, começando da origem.*

Portanto, em coordenadas polares, o ponto estará com as seguintes coordenadas no tempo t :

$$r = v \cdot t$$

e

$$\theta = \omega \cdot t.$$

Então tem-se que a equação da espiral em coordenadas polares é

$$r = a \cdot \theta,$$

onde $a = \frac{v}{\omega}$.

Arquimedes provou que a área de uma região S limitada por uma volta de espiral e o segmento unindo seus pontos inicial e final é um terço da área do círculo C , centrado no ponto inicial da espiral e passando pelo ponto final, isto é, o seguinte

Teorema 17. *Seja S a região limitada por uma volta da espiral $r = a \cdot \theta$ e seja C um círculo de raio $2\pi a$. Então*

$$a(S) = \frac{1}{3}a(C).$$

Para demonstrar tal teorema, Arquimedes valeu-se da conhecida fórmula da soma dos n primeiros quadrados,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

que implica em

$$1^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 2^2 + \dots + n^2.$$

Então, a construção geométrica da demonstração acima é muito similar à atual forma de integral definida em coordenadas polares.

Demonstração. *Divide-se o círculo em n setores iguais, cujos raios limitantes intersectam a espiral nos pontos O, A_1, A_2, \dots, A_n , como na Figura 12.*

Escrevendo $\overline{OA_1} = b$, tem-se que $\overline{OA_2} = 2b, \dots, \overline{OA_n} = nb$. Pode-se considerar então que a espiral S contém a região P , que consiste de setores circulares de raios $0, b, \dots, (n-1)b$, e da mesma forma, considerar S contida na região Q , que consiste de setores circulares de raios $b, 2b, \dots, nb$.

Tem-se que $a(Q) - a(P)$ é igual à área de um único desses setores, e para algum n suficientemente grande, $a(Q) - a(P) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$ dado, o que permite aplicar o método da compressão.

Novamente, a demonstração será feita por dupla redução ao absurdo.

Supõe-se primeiramente que $a(S) < \frac{1}{3}a(C)$. Então, para algum n suficientemente grande,

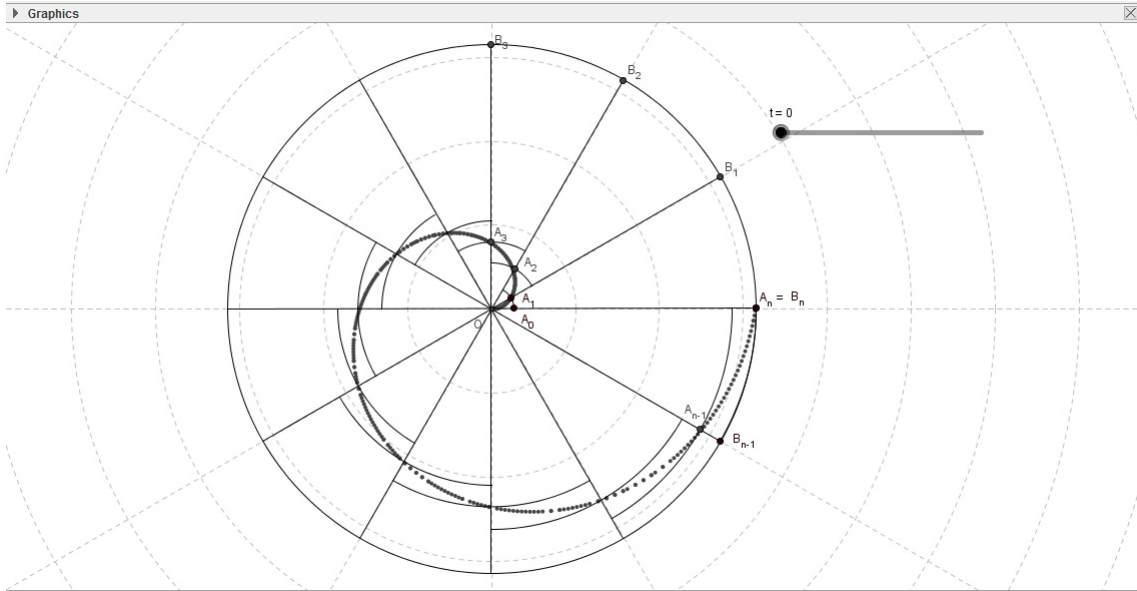


Figura 12: Método de Arquimedes para o Cálculo da Área da Espiral

$a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(S)$, seguindo então que

$$a(Q) < \frac{1}{3}a(C) \Rightarrow \frac{a(Q)}{a(C)} < \frac{1}{3}.$$

Como a razão entre as áreas de setores circulares semelhantes é igual à razão entre o quadrado de seus raios, tem-se que

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + \dots + (nb)^2}{n(nb)^2} = \frac{1^2 + \dots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3},$$

o que é uma contradição. Portanto $a(S) \not\geq \frac{1}{3}a(C)$.

De forma análoga, demonstra-se que $a(S) \not\leq \frac{1}{3}a(C)$.

Assim, tem-se que a área da região delimitada por uma volta da espiral $r = a \cdot \theta$ é, de fato, um terço da área do círculo de raio $2\pi a$, ou seja

$$a(S) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2.$$

A Figura 13, construída no GeoGebra, permite calcular dinamicamente as áreas das regiões delimitadas pela espiral e pelo segmento de reta \overline{AP} . Para isto, basta movimentar o controle deslizante "t" e ver o valor da área atualizado na planilha à direita. Esta visualização pode ser feita através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2252895>.



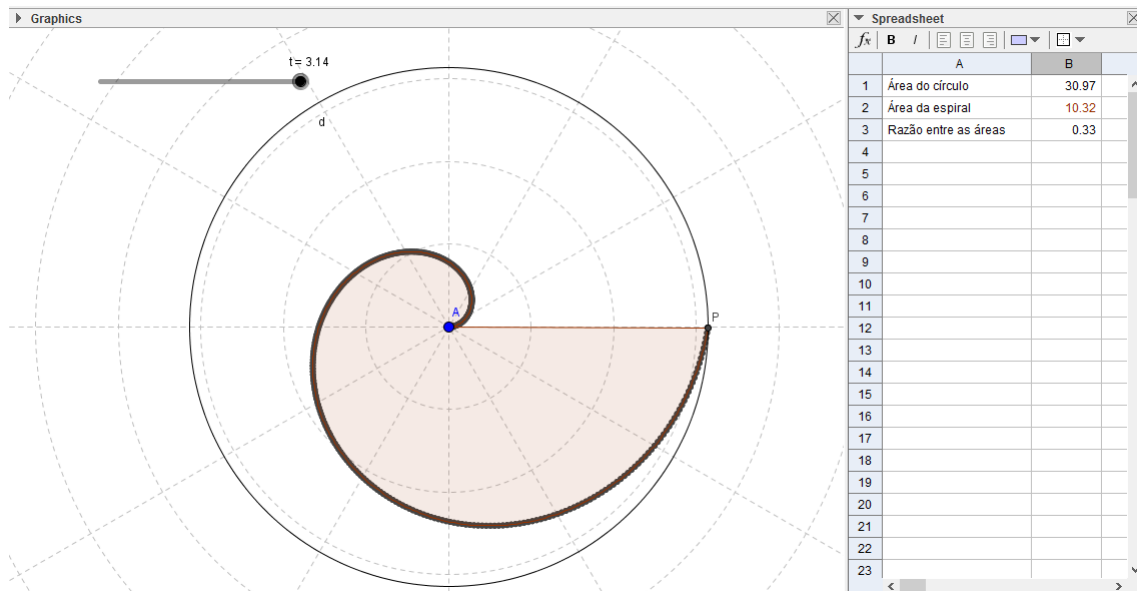


Figura 13: Área de uma volta da Espiral

O MÉTODO E A LEI DA ALAVANCA

O Método dos Teoremas Mecânicos (mais conhecido apenas como "O Método") é um trabalho de Arquimedes contido numa carta enviada a Eratóstenes, na qual ele conta como descobriu muitos de seus resultados, que foram provados rigorosamente por dupla redução ao absurdo ou pelo método da compressão. O "método mecânico" de Arquimedes se baseava na *lei da alavanca*, a qual estabelece que se duas massas m_1 e m_2 estão presas a uma haste de massa desprezível em lados opostos de um ponto de apoio, distando respectivamente d_1 e d_2 do apoio, então a haste ficará em equilíbrio se $m_1 d_1 = m_2 d_2$. Esta ideia pode-se generalizar para um número finito de massas, obtendo-se que $\sum m_i d_i = \sum m_j d_j$.

QUADRATURA DA PARÁBOLA

Um dos trabalhos mais lidos de Arquimedes foi, sem dúvidas, a quadratura da parábola. Neste trabalho Arquimedes encontra a área de um "segmento parabólico", o qual será definido mais adiante.

Na Grécia, a parábola era definida como uma seção cônica, assim como a circunferência, a elipse e a hipérbole. Dado um cone, a parábola é obtida pela interseção do cone com um plano paralelo à geratriz do cone.

Definição 18 (Parábola). *Dado um cone circular com eixo vertical, a curva obtida pela interseção do cone com um plano paralelo ao elemento gerador do cone é chamada Parábola.*

Definição 19 (Segmento Parabólico). *Sejam A e B os pontos da interseção de uma reta com uma parábola. A região delimitada pelo segmento de reta \overline{AB} e pela porção da parábola que vai de A até*

B é chamada Segmento Parabólico, representada na Figura 14.

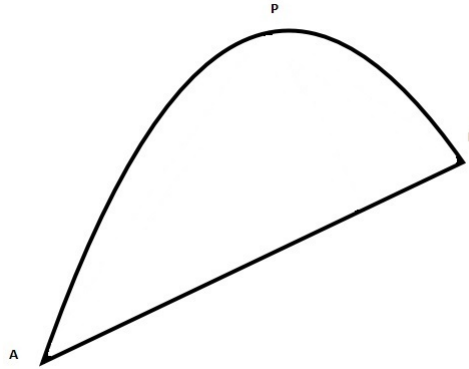


Figura 14: Segmento Parabólico

Dado um segmento parabólico de base \overline{AB} , o ponto P do segmento mais distante da base é dito vértice do segmento e o segmento perpendicular a \overline{AB} passando por P é dito altura do segmento. Arquimedes demonstrou (de duas maneiras diferentes) que a área do segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ da área do $\triangle ABP$.

No tempo de Arquimedes, alguns fatos já eram bem conhecidos sobre segmentos parabólicos arbitrários:

- A reta tangente a P é paralela à \overline{AB} .
- A linha reta paralela ao eixo (da parábola) e passando por P , corta \overline{AB} em seu ponto médio M .
- Toda corda $\overline{QQ'}$ paralela à base \overline{AB} é dividida ao meio por \overline{PM} .
- Dado um ponto N em \overline{PM} , e seja \overline{NQ} paralelo à \overline{BM} , com Q no segmento parabólico. Vale a seguinte relação:

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{NQ}^2}{\overline{MB}^2}. \quad (2)$$

Arquimedes valeu-se deles sem demonstração.

O resultado chave desta seção é o seguinte

Teorema 20. *Seja ABP um segmento parabólico de base \overline{AB} e vértice P . A área de tal segmento é $\frac{4}{3}a(\triangle ABP)$.*

A fim de demonstrar o teorema acima, seguem alguns fatos básicos sobre segmentos de parábola.

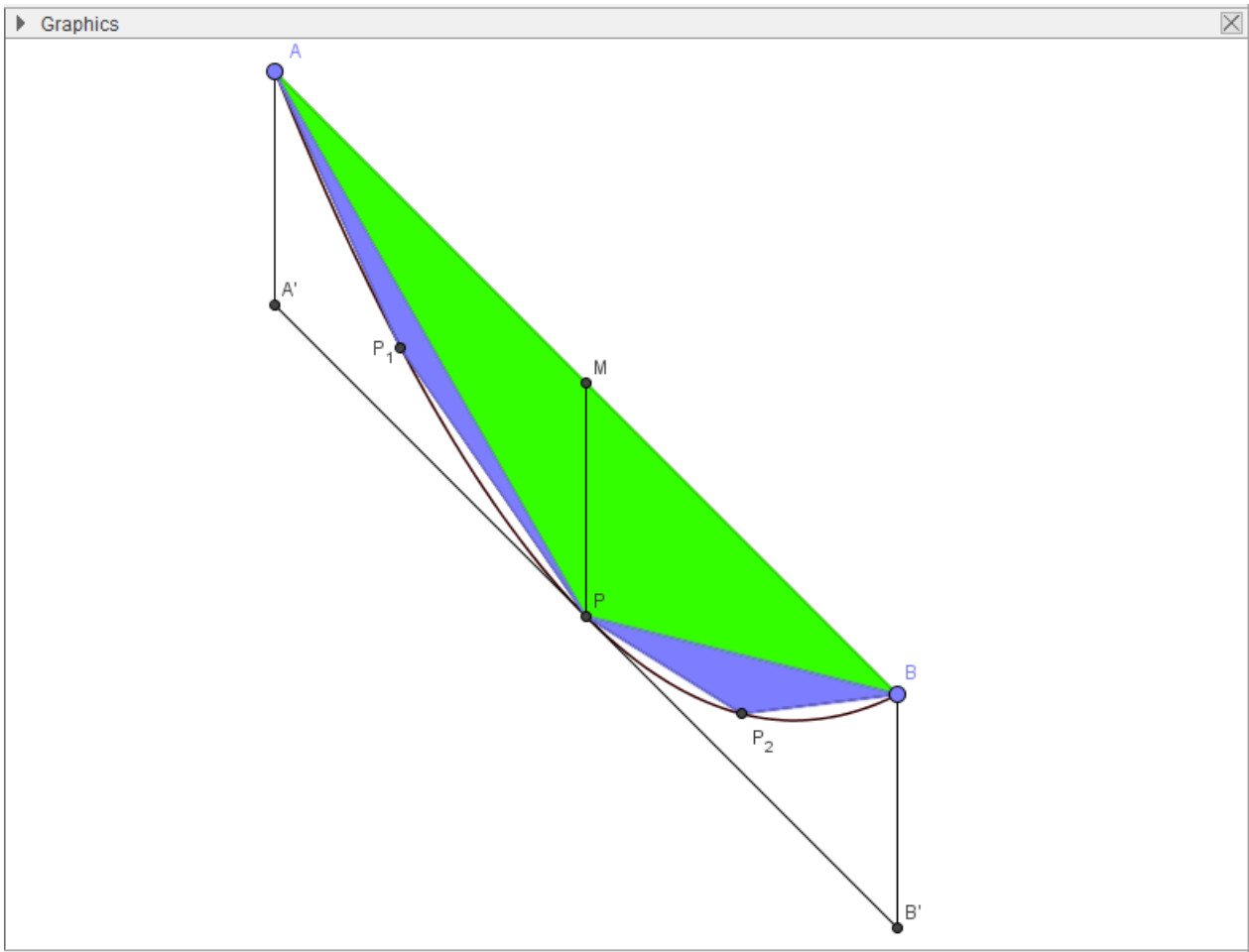


Figura 16: Área de Segmento Parabólico

é possível obter um polígono inscrito (pelo processo descrito acima) cuja área difere da área do segmento ABP por menos que ε .

Agora será mostrado que a soma das áreas do triângulos APP_2 e BPP_1 é $\frac{1}{4}$ da área do ΔAPB . Seja M_1 o ponto médio de \overline{BM} , Y o ponto de interseção de $\overline{P_1M_1}$ e \overline{PB} , e V a interseção com \overline{PM} da linha através de P_1 paralela à \overline{AB} .

Então $\overline{BM}^2 = 4\overline{M_1M}^2$. Segue de (2) que $\overline{PM} = 4\overline{PV}$ ou $\overline{P_1M} = 3\overline{PV}$.

Mas $\overline{YM_1} = \frac{1}{2}\overline{PM} = 2\overline{PV}$, logo $\overline{YM_1} = 2\overline{P_1Y}$.

Segue então que $a(\Delta PP_1B) = \frac{1}{2}a(\Delta PM_1B) = \frac{1}{4}a(\Delta PMB)$, aplicando duas vezes que a razão entre as áreas de dois triângulos de mesma base é igual à razão entre suas alturas.

Similarmente tem-se que $a(\Delta AP_2P) = \frac{1}{4}a(\Delta APM)$.

Obtém-se portanto que $a(\Delta PP_1B) + a(\Delta AP_2P) = \frac{1}{4}(a(\Delta PM_1B) + a(\Delta APM)) = \frac{1}{4}a(\Delta APB)$, como desejado.

Da mesma maneira poder-se-ia provar que a soma das áreas dos triângulos adicionados em

cada etapa é igual a $\frac{1}{4}$ da soma das áreas dos triângulos adicionados na etapa anterior.

Se se escreve $\alpha = a(\triangle ABP)$, segue que o polígono \mathcal{P}_n obtido após n etapas terá área $a(\mathcal{P}_n) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \dots + \frac{\alpha}{4^n}$.

Portanto tem-se que $a(\text{segmento parabólico}) = \alpha \cdot (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots) = \alpha \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\alpha}{3}$.

A figura abaixo permite que, movendo os pontos A e B , tenhamos vários possíveis segmentos parabólicos, e cada um desses segmentos determina um ponto P vértice do segmento. A tabela a direita permite conferir dinamicamente que a razão entre as áreas do segmento parabólico e do triângulo é sempre $\frac{4}{3} = 1.33\bar{3}$.

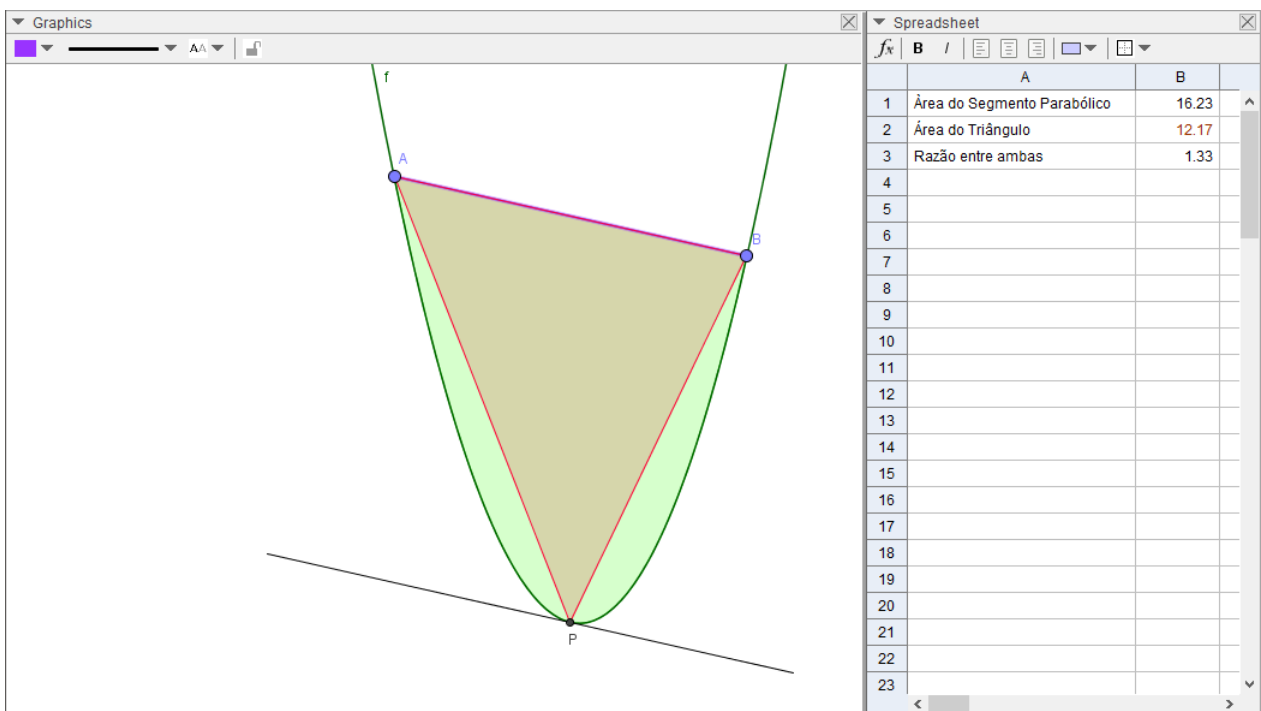


Figura 17: Área de Segmento Parabólico - Dinâmica

Esta visualização acima pode ser feita através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2253389>.

É provável que Arquimedes tenha obtido este resultado intuitivamente de maneira similar à colocada acima, porém como os processos infinitos não eram bem vistos pelos gregos, ele terminou a demonstração por dupla redução ao absurdo.

3 EUROPA

3.1 OS INDIVISÍVEIS

A Europa viveu durante os séculos XVI e XVII a ascensão do que, à época, era referido como "indivisíveis", que era uma forma de raciocínio baseada na divisão de uma figura incontáveis vezes, chegando por fim a uma figura indivisível. Essa ideia, mesmo que sem o rigor necessário, foi muito frutífera, permitindo que vários matemáticos avançassem muito em suas pesquisas, principalmente quando o objeto de estudo provinha de ideias físicas, e em particular, da mecânica.

Dois nomes importantes para os indivisíveis foram Johannes Kepler (1571-1630) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Kepler nasceu próximo a Stuttgart, na Alemanha, e estudou na Universidade de Tübingen onde pretendia tornar-se ministro luterano. Porém, devido a um forte interesse pela astronomia, mudou de planos e então dedicou-se ao estudo da Física. Posteriormente, assumiu uma cátedra na Universidade de Guntz, na Áustria, alcançando então alguns resultados interessantes em sua área de pesquisa hoje conhecidos como *Leis de Kepler*.

Cavalieri foi matemático e físico italiano. Foi aluno de Galileu Galilei e lecionou a partir de 1629 na Universidade de Bolonha, onde permaneceu até sua morte. Sua obra abrangeu Ótica e Astronomia, porém sua maior contribuição às ciências foi seu livro *Geometria Indivisibilibus*, onde ele apresenta sua "versão" do método dos indivisíveis¹. Esta obra foi a primeira que tratou inteiramente dos indivisíveis, e nele Cavalieri conseguiu alguns resultados interessantes em relações a cálculo de áreas de algumas figuras, como elipses e curvas delimitadas pelas funções $y = 0$, $y = x^n$ ($n = 1, \dots, 9$), $x = 0$ e $x = a$, conseguindo como resultado para estes casos particulares a área da seguinte forma $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, tendo por fim conjecturado a validade de tal resultado para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$.

Um ponto interessante é notar como não só o cálculo mas também a definição de área poderia mudar num mesmo contexto histórico. Kepler e Cavalieri viveram na mesma época e provavelmente tiveram acesso aos mesmos trabalhos de matemáticos anteriores, porém a forma como definiam áreas era diferente.

¹Devido à falta de rigor, muitos matemáticos desenvolviam "métodos de indivisíveis" significativamente diferentes, mesmo que a ideia intuitiva fosse a mesma.

Kepler concebia que a área de uma figura era composta por figuras indivisíveis em uma quantidade infinita, que somadas davam a área da figura original. Já Cavalieri definia uma correspondência biunívoca entre os indivisíveis de duas figuras dadas de forma que se os elementos correspondentes das duas figuras tivessem sempre a mesma razão, então a área de ambas teria a mesma razão. Para trabalhar com seu método, Cavalieri usualmente conhecia com antecedência a área de alguma das figuras dadas.

Porém, havia uma grande diferença entre a natureza dos "indivisíveis" de Kepler e Cavalieri. Para o primeiro, os elementos indivisíveis de uma área eram figuras de áreas indivisíveis, sendo assim figuras planas (em duas dimensões). Já para Cavalieri, os elementos indivisíveis de uma área eram segmentos de reta, ou seja, elementos de "uma dimensão abaixo"².

O método de comparação que Cavalieri utilizava pode ser caracterizado pelo

Teorema 21 (Princípio de Cavalieri). *Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*

Exemplo 22 (Área da elipse E). *Para ilustrar o processo pelo qual Cavalieri trabalhava, será novamente demonstrado que, dada a elipse*

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

tem-se que $a(E) = \pi ab$, e para isso será comparada a elipse com a circunferência $C : x^2 + y^2 = a^2$.

Solução. *Serão traçadas retas paralelas ao eixo Oy . Para cada $t \in (-a, a)$, tem-se que a reta $x = t$ intercepta a circunferência C em P_2 e P'_2 e intercepta a elipse E em P_1 e P'_1 , de acordo com a Figura 18.*

Tem-se que a distância do eixo x a P_1 é y_1 e como $P_1 \in E$, então

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_1^2 = b^2 \left(1 - \frac{t^2}{a^2} \right).$$

De forma análoga, sendo y_2 a distância entre P_2 e o eixo x , chega-se a $y_2^2 = a^2 - t^2$.

Agora, note-se que

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{b^2 \left(1 - \frac{t^2}{a^2} \right)}{a^2 - t^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}.$$

²De fato, Cavalieri estendia seu conceito para figuras em dimensões maiores. Por exemplo, os indivisíveis de um sólido eram regiões planas.

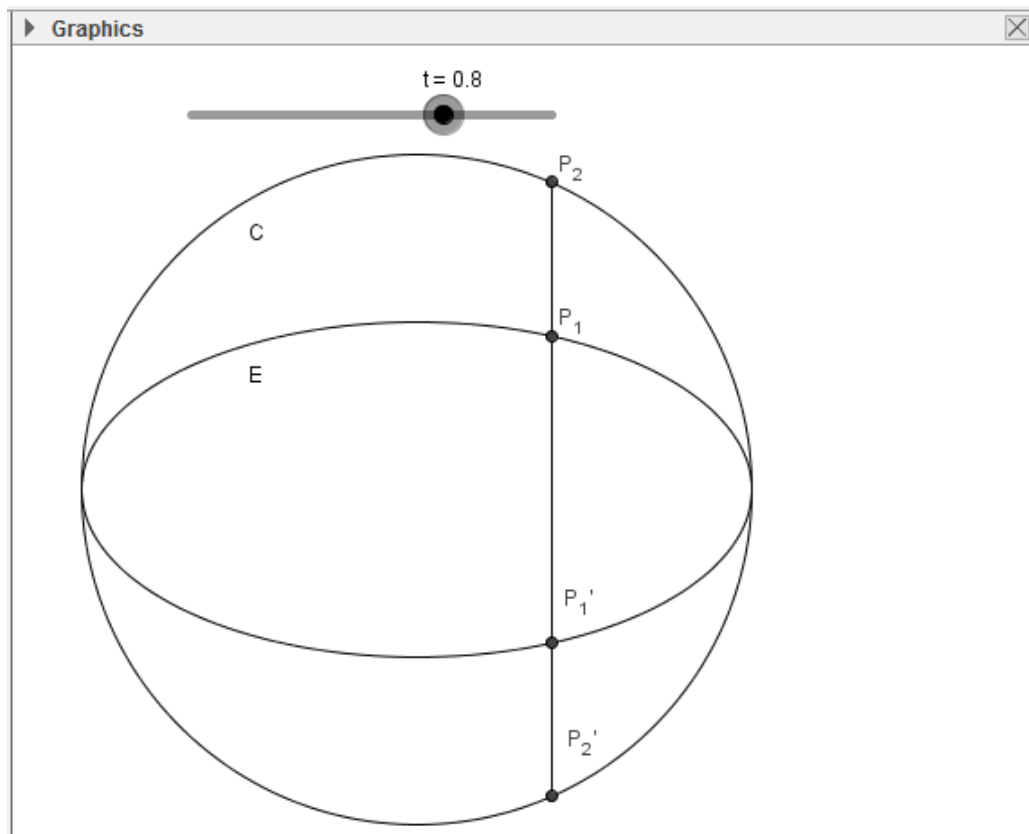


Figura 18: Área da Elipse por Cavalieri

Assim, tem-se que para toda reta secante a E e a C , a razão entre os segmentos gerados é sempre constante e igual a $\frac{b}{a}$ e, pelo Princípio de Cavalieri, tem-se que a razão entre as áreas é igual à mesma constante, ou seja:

$$\frac{a(E)}{a(C)} = \frac{a(E)}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow a(E) = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab.$$

3.2 QUADRATURAS DE X^N DE CAVALIERI

Além da utilização de seus "indivisíveis" para encontrar áreas e volumes de alguns sólidos, Cavalieri conseguiu com eles encontrar as áreas sob as curvas x^n , para $n = 1, \dots, 9$, mesmo que de forma pouco rigorosa.

Considere-se, um triângulo retângulo ABC com base e altura a , e seja \overline{PQ} uma típica seção transversal de ABC , conforme a Figura 19.

Segundo a ideia de indivisíveis de Cavalieri, o triângulo é a soma de todos os segmentos desta forma, logo pode-se escrever

$$a(\Delta ABC) = \sum x.$$

Agora, com ajuda da Figura 20, tem-se que $\sum a = \sum(x + y) = \sum x + \sum y = 2\sum x$. Logo,

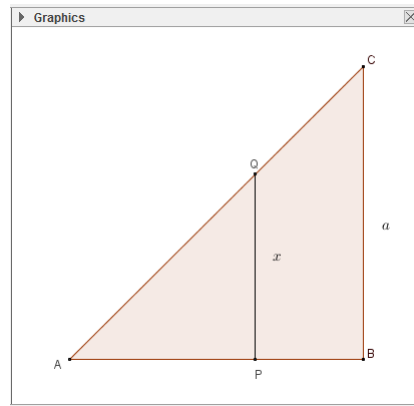


Figura 19: Seção típica

$$\sum x = \frac{\sum a}{2} = \frac{a^2}{2}, \text{ pois } \sum a \text{ representa a área do quadrado.}$$

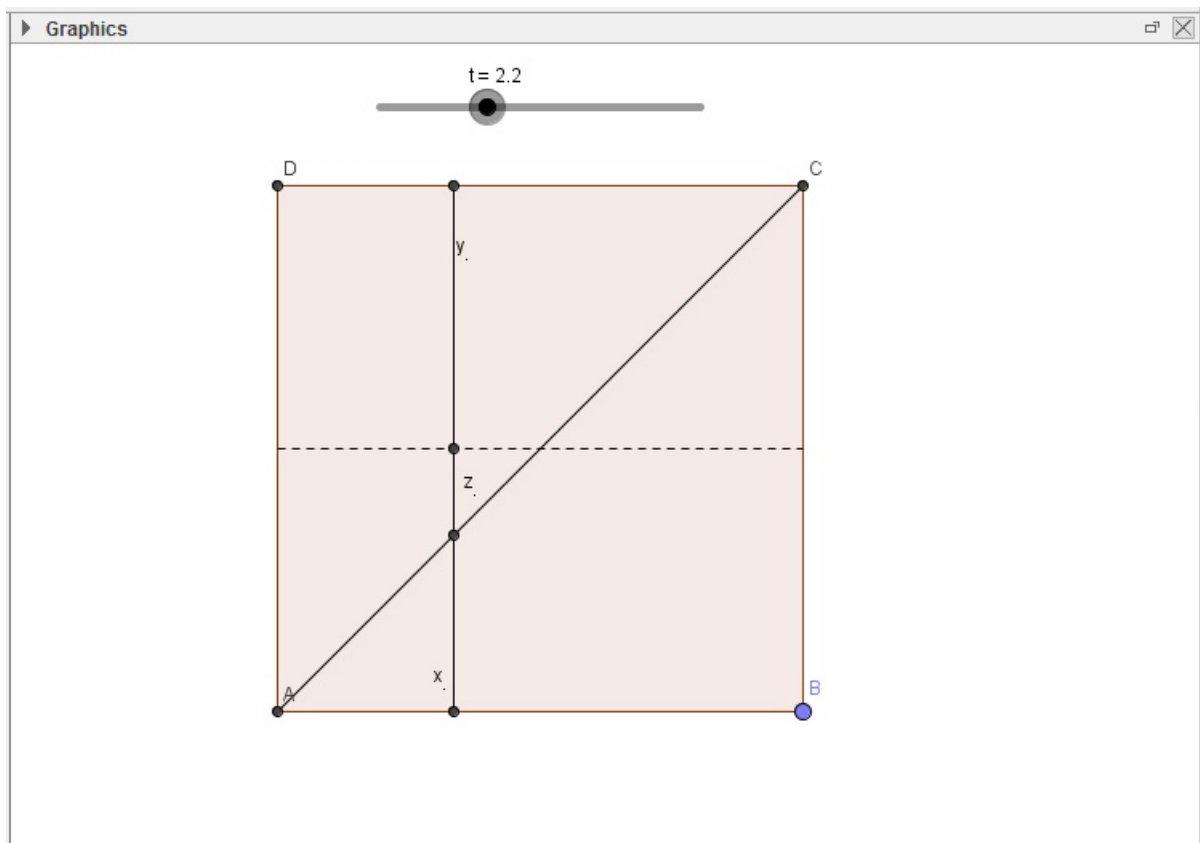


Figura 20: $\sum x = \frac{a^2}{2}$

Isto mostra como Cavalieri aplicou seu método para concluir que a área abaixo da curva $y = x$, desde $x = 0$ até $x = a$, é $\frac{a^2}{2}$.

Com argumentos mais complexos e laboriosos, Cavalieri prosseguiu com seu método, conseguindo chegar às seguintes igualdades para o cálculo das áreas:

$$\sum x^2 = \frac{a^3}{3}, \sum x^3 = \frac{a^4}{4}, \sum x^4 = \frac{a^5}{5}, \dots, \sum x^9 = \frac{a^{10}}{10}.$$

3.3 QUADRATURA DE x^n DE FERMAT

Pierre de Fermat (1601-1665) foi um dos matemáticos mais brilhantes do século XVII, e sua genialidade fez com que atacasse, com sucesso, alguns dos principais problemas da época.

Assim como Cavalieri, debruçou-se sobre o problema de encontrar a área sob a curva $y = x^n$, com $x = 0$ até $x = b$. Recorde-se que Cavalieri, através de um laborioso método, resolveu o problema para $n = 1, \dots, 9$.

O método de Fermat que aqui será mostrado é válido para todo n inteiro positivo, e portanto muito mais poderoso que o método de Cavalieri.

Exemplo 23 (Quadratura de x^n de Fermat). *Seja $r < 1$ e considere-se o intervalo $[0, b]$ dividido em infinitos intervalos, $[rb, b]$, $[r^2b, rb]$, $[r^3b, r^2b]$, ..., $[r^n b, r^{(n-1)}b]$, ..., como ilustrado na Figura 21.*

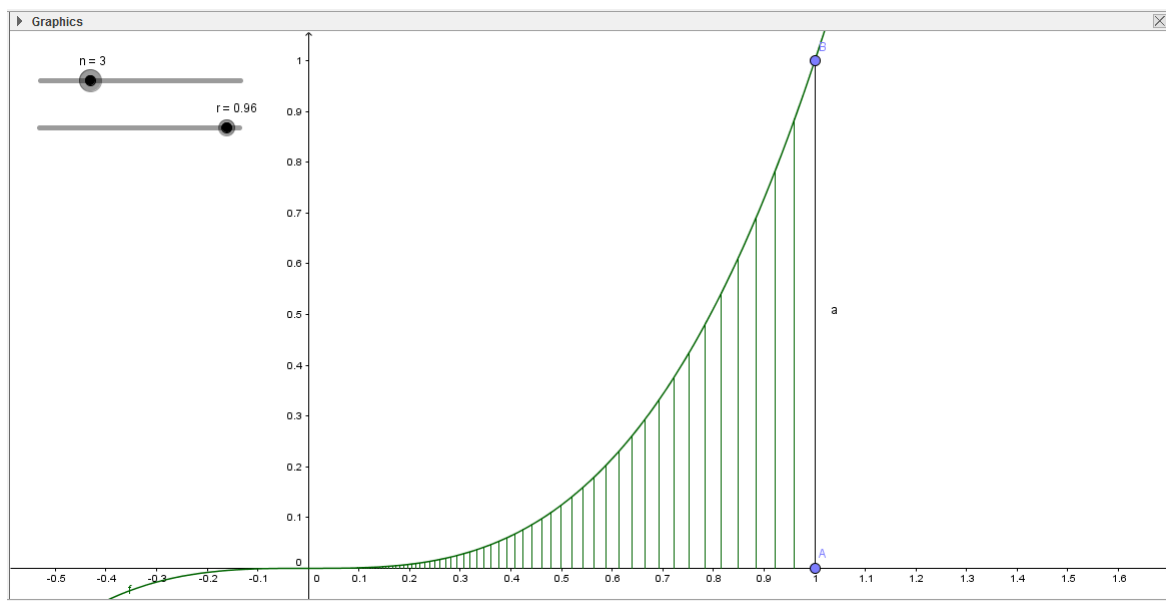


Figura 21: Quadratura por Fermat

Nota-se que quanto mais próximo r estiver de 1, mais próximo rb estará de b , r^2b estará de rb , e assim por diante.

A área $a(x^n|_0^b)$ será aproximadamente a soma das áreas dos retângulos construídos sobre os intervalos que dividem $[0, b]$:

$$\begin{aligned}
a(x^n|_0^b) &\sim (b - rb)b^n + (br - br^2)(rb)^n + \dots \\
&= b^{n+1}(1 - r) + b^{n+1}r^{n+1}(1 - r) + \dots \\
&= b^{n+1}(1 - r)[1 + r^{n+1} + (r^{n+1})^2 + \dots] \\
&= \frac{b^{n+1}(1 - r)}{1 - r^{n+1}} \\
&= \frac{b^{n+1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^n}.
\end{aligned}$$

Quanto mais próximo r estiver de 1, melhor será a aproximação de $a(x^n|_0^b)$ que se obtém com o processo anteriormente descrito. Então

$$a(x^n|_0^b) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{b^{n+1}}{1 + r + r^2 + \dots + r^n} = \frac{b^{n+1}}{(n + 1)}.$$

A Figura 21, construída no GeoGebra, permite observar dinamicamente esta ideia. Ao movimentar o controle deslizante n , tem-se a imagem da curva $y = x^n$. Por outro lado, o controle deslizante r mostra os intervalos utilizados nas aproximações consideradas. Esta visualização acima pode ser feita através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2254295>.

4 CICLOIDE

Este capítulo é dedicado a um breve estudo da cicloide, e algumas formas de obter sua área. Será apresentado conforme exposto em [Proctor (1878)].

Definições. A cicloide é a curva traçada por um ponto sobre uma circunferência de um círculo que rola, sem deslizar, sobre uma linha reta. O círculo rolator é chamado de círculo gerador da cicloide, o ponto sobre a circunferência é dito ponto de traço. O diâmetro que passa pelo ponto de traço e pelo centro do círculo é chamado diâmetro de traço. A Figura 22 mostra a cicloide e seus elementos.

Uma cicloide completa consiste em um número infinito de arcos cicloidais iguais, mas frequentemente se refere ao arco $D'AD$ como a cicloide, e assim será feito durante o resto do trabalho.

A construção mecânica da Cicloide pode ser observada através do link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2254367>.

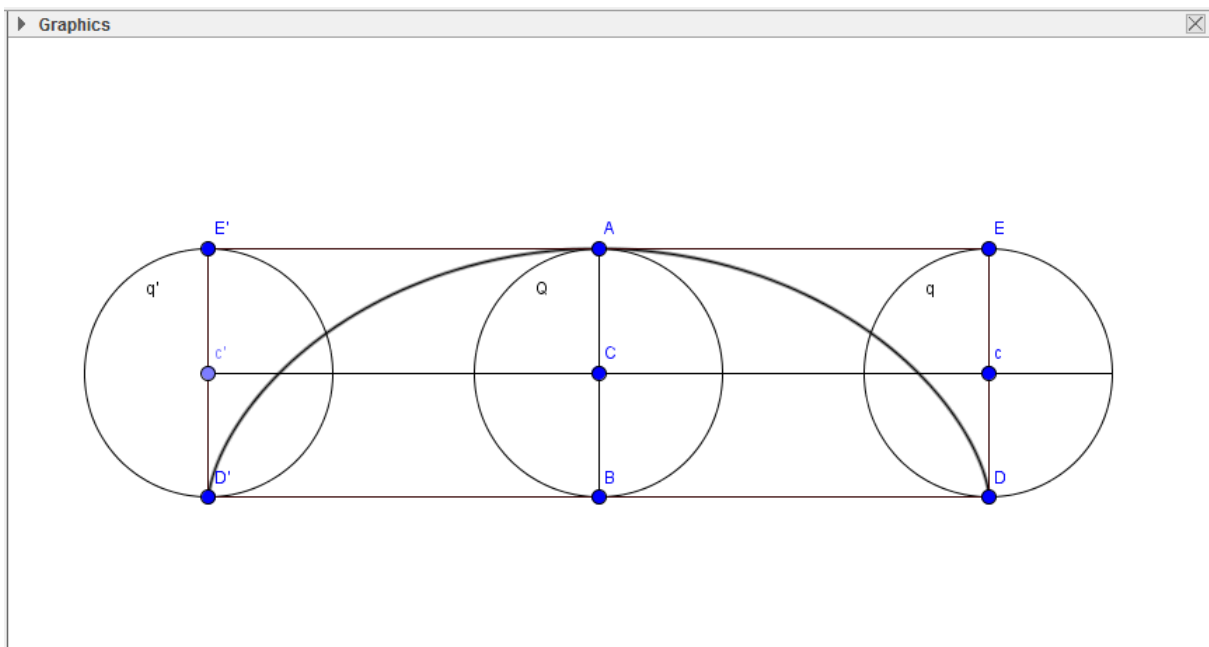


Figura 22: Cicloide

Proposição 24. A base $\overline{D'D}$ de uma cicloide tem comprimento igual à circunferência do círculo gerador.

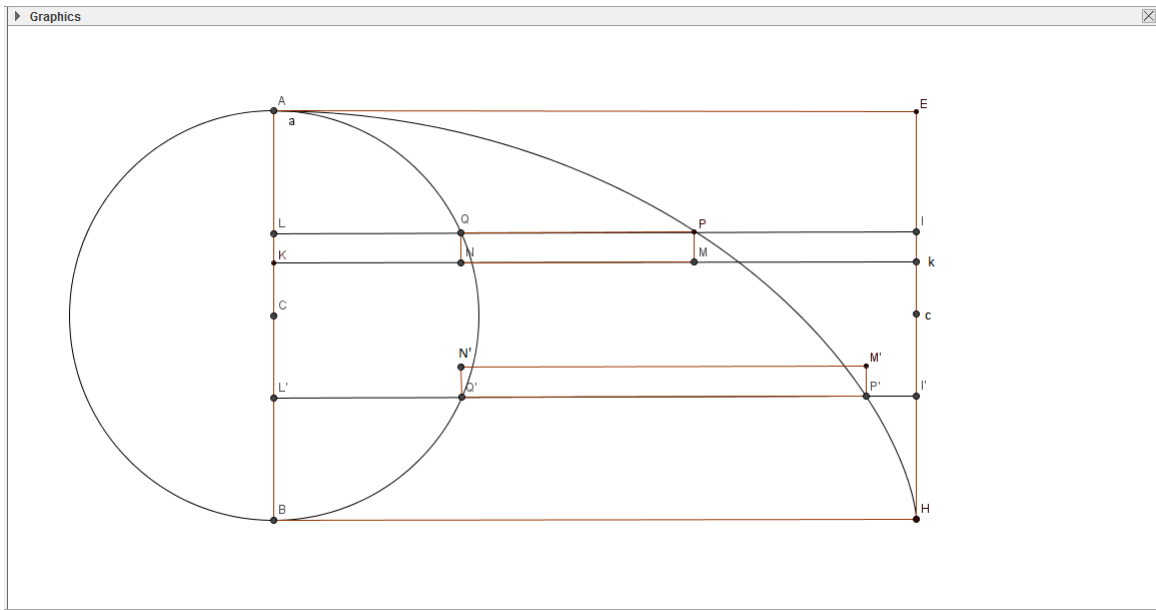


Figura 24: Proposição 26

Pela Proposição 25, tem-se que $\overline{QP} = \text{arco}(AQ)$ e $\overline{Q'P'} = \text{arco}(AQ') = \text{arco}(BQ)$. Portanto tem-se que $\overline{QP} + \overline{Q'P'} = \text{semicírculo}(AQB) = \overline{Ll}$, e portanto a soma das áreas dos retângulos $PQNM$ e $P'M'N'Q'$ é igual à área do retângulo $LKkl$. Tomando todos os pares de retângulos como NP e $N'P'$ segue (Corolário 2, Proposição 1 de [Proctor (1878)]) que, no limite:

$$a(AQBBDP) = a(ACcE) = a(\odot AQB).$$

$$\text{Portanto } a(\text{cicloide}) = 3 \cdot a(\odot AQB).$$

■

Essa primeira demonstração é construtiva. Por outro lado, a próxima, devida a Roberval, é mais analítica.

Demonstração 2. Em simbologia atual, um ponto P da cicloide tem as seguintes equações paramétricas (ver, por exemplo, [Stewart (2005)]):

$$\begin{cases} x_p = AM - R \cdot \sin(\theta) = R(\theta - \sin(\theta)), \\ y_p = R - R \cdot \cos(\theta) = R(1 - \cos(\theta)). \end{cases}$$

Sejam O o centro do círculo gerador da cicloide, M a projeção de O sobre a base da cicloide e P um ponto da cicloide. Seja Q o ponto projeção de P sobre a reta OM . O lugar geométrico formado pela união dos pontos Q assim formados é chamado de curva companheira da cicloide (Figura 26).

Um ponto Q qualquer da companheira tem as seguintes coordenadas:

Tome-se sobre a companheira um ponto qualquer F , correspondente a uma rotação $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ do círculo gerador.

Tem-se também que sempre existirá um ponto F' correspondente ao ângulo de rotação $(\pi - \theta)$.

De fato, $\overline{EF} = R - R \cdot \cos(\theta)$ enquanto que $\overline{E'F'} = R - R \cdot \cos(\pi - \theta) = R - R \cdot \cos(\theta) = \overline{EF}$. Além disso, $\overline{AE} = \overline{E'C'}$. Logo, pelo princípio de Cavalieri, as áreas das duas regiões delimitadas pela companheira são iguais.

(b) A área compreendida entre a semicicloide e a companheira é metade da área do círculo gerador.

De fato, $x_c - x_p = \sin(\theta)$, e se $0 \leq \theta \leq \pi$ então, pelo princípio de Cavalieri, tem-se que a área entre a cicloide e a companheira é igual à área do semicírculo gerador.

$$\text{Assim sendo, } a(\text{cicloide}) = 2 \cdot (a(\text{AQCD}) + \frac{\pi r^2}{2}) = 2 \cdot (\frac{3\pi r^2}{2}) = 3\pi r^2.$$

■

A Figura 27 ilustra a demonstração.

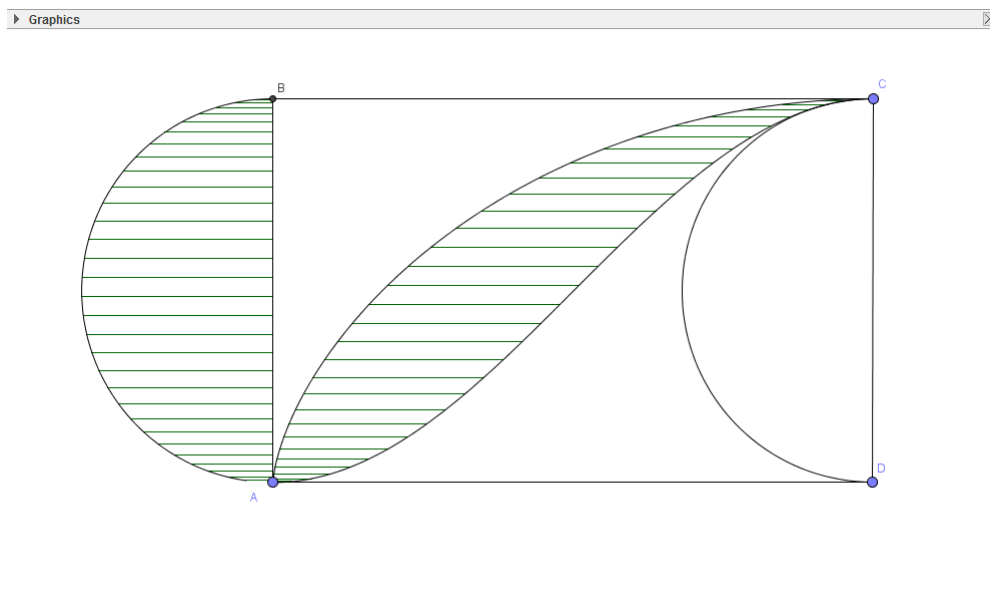


Figura 27: Cicloide e Companheira na demonstração de Roberval

A seguir será apresentada mais uma demonstração da área sob um arco da cicloide, novamente utilizando o princípio de Cavalieri. Esta demonstração moderna foi publicada em [Reed (1986)] por N. Reed.

Demonstração 3. Dada a cicloide $D'AD$, traçam-se os segmentos $\overline{D'A}$ e \overline{AD} , de mesma medida, dividindo-a em três regiões: duas curvilíneas δ_1 e δ_2 e uma triangular, $\Delta D'AD$. Como $a(\Delta D'AD) = 2\pi r^2$ (Figura 28), falta calcular a soma das áreas δ_1 e δ_2 .

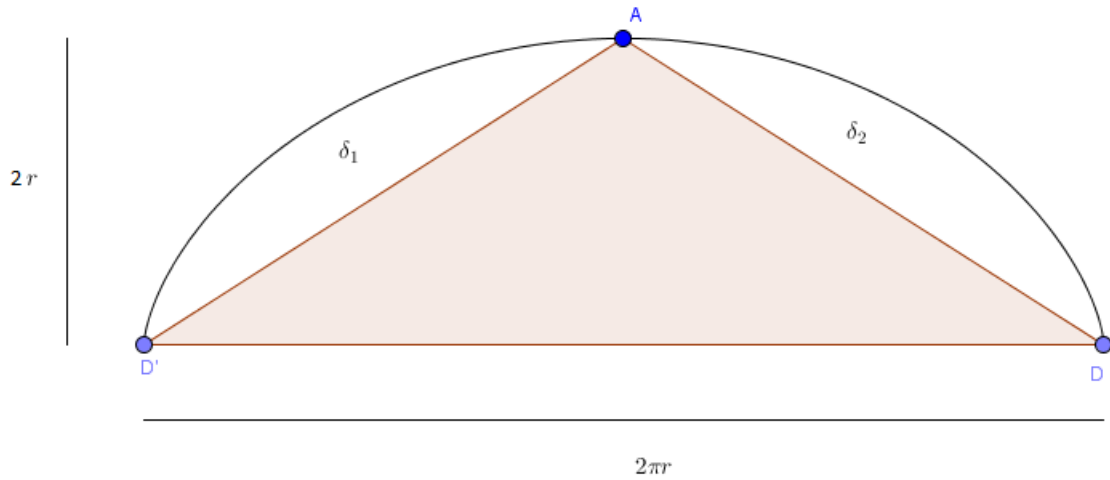


Figura 28: Regiões da demonstração de Reed

Resta mostrar que $a(\delta_1 \cup \delta_2) = \pi r^2$. Transportando δ_2 até "encostar" em δ_1 , tem-se a situação descrita na Figura 29.

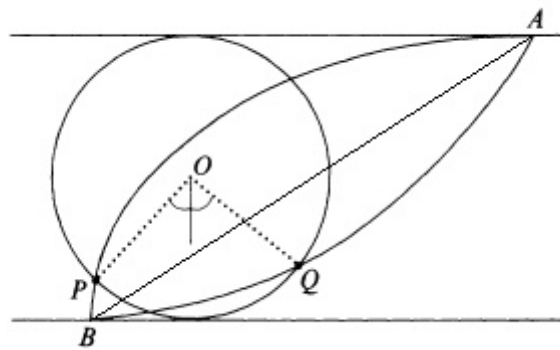


Figura 29: O argumento de Reed

Tem-se então que $a(APBQ) = a(\delta_1 \cup \delta_2)$.

Agora, observe-se que, por rolamento do círculo, a partir do ponto B, sobre a linha inferior no sentido horário, gera-se a cicloide BPA, enquanto que o mesmo círculo rolando, a partir do ponto B, sobre a linha superior no sentido anti-horário, gera a cicloide BQA. Note-se que, neste caso, os raios \overline{OP} e \overline{OQ} terão girado de ângulos iguais, o que implica que PQ é um segmento horizontal.

Assim, a região APBQ é meramente uma versão "cisalhada" do círculo. Logo, pelo princípio

de Cavalieri, $a(APBQ) = a(\delta_1 \cup \delta_2) = \pi r^2$. Portanto,

$$a(\text{cicloide}) = a(\Delta D'AD \cup \delta_1 \cup \delta_2) = a(\Delta D'AD) + a(\delta_1 \cup \delta_2) = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2.$$

■

A Figura 30, feita no GeoGebra, que pode representar posições sucessivas por rolamento do círculo, fornece uma representação dinâmica desta prova.

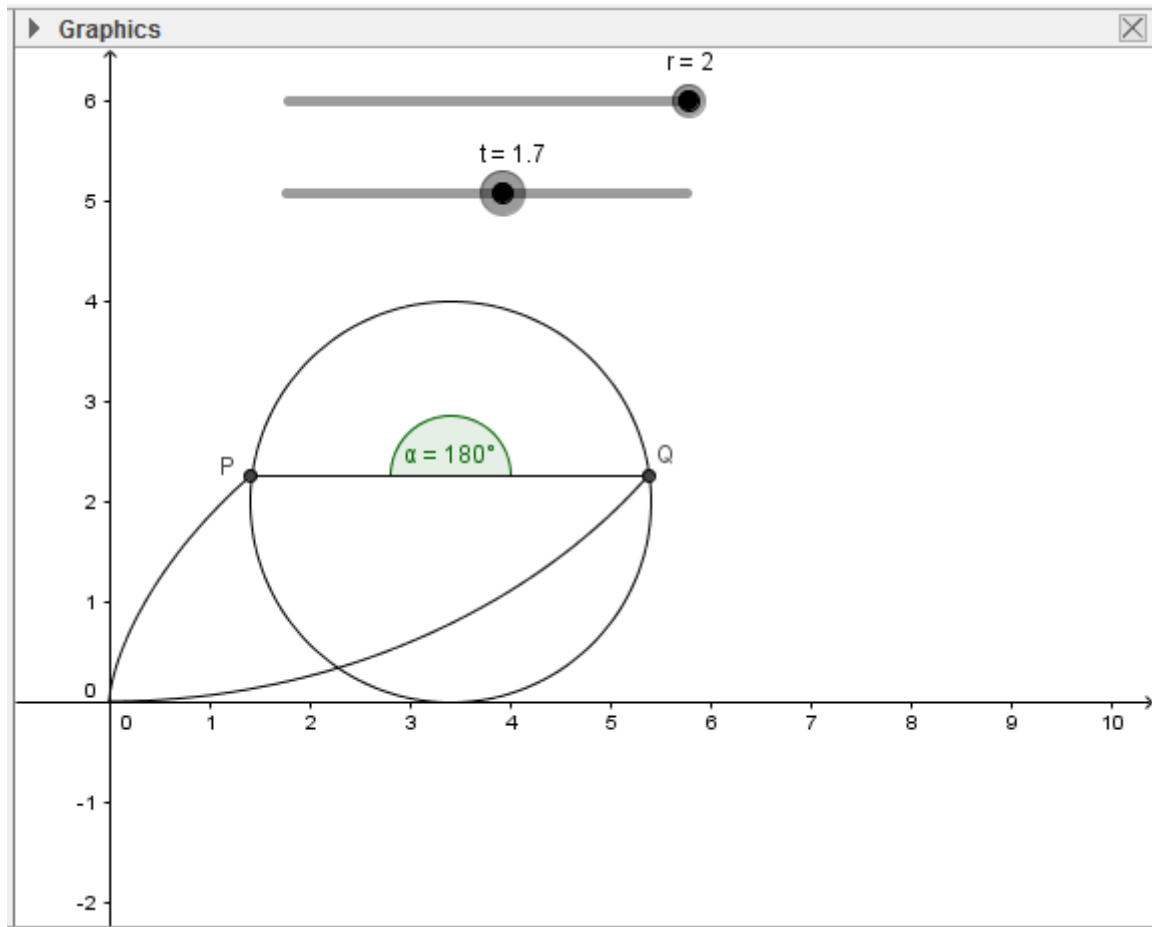


Figura 30: Representação dinâmica da prova de Reed

A argumentação de Reed pode ser observada dinamicamente por através deste link:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2254457>.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática teve e tem seu desenvolvimento histórico intimamente ligado ao desenvolvimento social do homem, que a utiliza como ferramenta indispensável na compreensão de inúmeras situações concretas de seu dia a dia.

O tema tratado neste trabalho, "cálculo de área", é muito antigo e apareceu na primeira grande obra e uma das mais importantes da História da Matemática, "Os Elementos", escrita por Euclides de Alexandria há mais de dois milênios.

Com base neste grande tratado, a ideia de área de figura plana é apresentada aos estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental, particularmente no cálculo de áreas de triângulos, quadrados e retângulos.

Antes de finalizar o Ensino Fundamental, os estudantes completam o estudo do cálculo de área aprendendo a calcular a área do círculo, que possui um grau maior de complexidade pela presença de um número irracional na sua fórmula. Na continuidade, até o final do Ensino Médio, praticamente nada sobre cálculo de áreas é acrescentado, e a maioria dos estudantes que encerra o ciclo da Educação Básica fica privada de saber como proceder no caso de regiões que não se enquadram entre as vistas até então: triângulos, polígonos, círculo e frações deste.

Por outro lado, historicamente, o homem sempre se preocupou com o cálculo de áreas de figuras planas diversas, e muitos métodos foram desenvolvidos para diversas situações específicas. Esta trajetória, até que se conseguisse um método geral para o cálculo de áreas, está intimamente ligada do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, sistematizado no final do século XVII, sendo que nomes como Eudóxio de Cnido, Euclides, Arquimedes, Heron de Alexandria, Pappus, Oresme, Galileu, Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat, Wallis, Barrow, Newton e Leibniz foram decisivos neste processo que levou mais de dois mil anos [?]

A proposta deste trabalho, que mescla história, teoria matemática e uso da tecnologia proporcionada pelo aplicativo GeoGebra, é mostrar que é possível, apenas com conhecimentos do Ensino Básico, estudar áreas de algumas figuras planas em situações mais gerais. Pretende-se que os resultados apresentados possam servir de apoio aos professores de Matemática em geral, e contribuir com o Ensino da Matemática, tão fundamental para o desenvolvimento do país.

REFERÊNCIAS

- BARON, M. E.; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. [S.l.]: UnB., (1985).
- BICUDO, I. **Os Elementos - Euclides**. [S.l.]: São Paulo: Editora Unesp, (2009).
- EDWARDS, C. J. **The historical development of the calculus**. [S.l.]: Nova York: Springer Science & Business Media, (2012).
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: São Paulo: Editora Unicamp, (2004).
- HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **GeoGebra-official guide**. (2009).
- LINO, P. S. C. **O Cálculo Através da História**. [S.l.]: Fortaleza: VestSeller, (2013).
- PROCTOR, R. A. **A Treatise on the Cycloid and all Forms of Cycloidal Curves**. [S.l.]: Longmans, Green, (1878).
- REED, N. An elementary proof of the area under a cycloid. **The Mathematical Gazette**, JSTOR, p. 290–291, (1986).
- STEWART, J. **Cálculo Volume I**. [S.l.]: São Paulo: Pioneira Thomson Learning, (2005).
- STEWART, J. **Cálculo Volume II**. [S.l.]: São Paulo: Pioneira Thomson Learning, (2005).