

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALEXANDRE ARIAS JUNIOR

**ANÁLISE MATEMÁTICA APLICADA À TEORIA DE JOGOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2015

ALEXANDRE ARIAS JUNIOR

**ANÁLISE MATEMÁTICA APLICADA À TEORIA DE JOGOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para a disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2.

Orientador: Prof. Dr. Andres David Baez Sanchez

**CURITIBA**

**2015**

## TERMO DE APROVAÇÃO

### “ANÁLISE MATEMÁTICA APLICADA À TEORIA DE JOGOS”

por

### “Alexandre Arias Junior”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14:00 do dia 03 de dezembro de 2015 na sala V2-101 como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O(a) aluno(a) foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho **APROVADO**.

<hr/> <p>Prof. Dr. Andres David Baez Sanchez <b>(Presidente - UTFPR/Curitiba)</b></p>	<hr/> <p>Prof. Dr. Rubens Robles Ortega Junior <b>(Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)</b></p>
<hr/> <p>Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst <b>(Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)</b></p>	<hr/> <p>Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke <b>(Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</b></p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha <b>(Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</b></p>	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

## RESUMO

ARIAS JUNIOR, Alexandre. ANÁLISE MATEMÁTICA APLICADA À TEORIA DE JOGOS. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

O presente trabalho aborda aplicações da análise matemática em teoria de jogos. Inicialmente apresentamos uma introdução à teoria econômica de jogos, explorando o conceito de jogos na forma normal. Consideramos alguns conceitos de solução de jogos, entre eles o equilíbrio de Nash, e introduzimos os conceitos de estratégias mistas e funções melhor resposta. A partir da relação entre equilíbrios de Nash e pontos fixos da função melhor resposta do jogo, demonstramos, utilizando o teorema do ponto fixo de Kakutani, o teorema de existência de equilíbrio de Nash. Posteriormente estudamos dois casos específicos de jogos: os jogos  $2 \times 2$  e os jogos simétricos. Por fim, apresentamos uma introdução a teoria evolutiva de jogos explorando o conceito de estratégia evolutivamente estável, e demonstramos duas caracterizações equivalentes deste conceito: barreira de invasão uniforme e superioridade local.

**Palavras-chave:** Análise matemática, teoria de jogos, equilíbrio de Nash, estratégia evolutivamente estável

## ABSTRACT

ARIAS JUNIOR, Alexandre. . 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

This work presents applications of mathematical analysis in game theory. Initially we present an introduction to economical game theory, exploring the concept of normal-form game. We consider some concepts of game solution, including Nash Equilibrium, and we introduce the concept of mixed strategies and best response functions. Based on the relationship between Nash equilibria and fixed points of the best response function of the game, we prove the theorem of existence of Nash equilibrium, using Kakutani's Fixed Point Theorem. We study two specific kind of games:  $2 \times 2$  games and symmetric games. Finally, we present an introduction to evolutionary game theory exploring the concept of evolutionary stable strategy, and we prove two characterizations of this concept: uniform invasion barrier and local superiority.

**Keywords:** Mathematical analysis, game theory, Nash equilibrium, evolutionary stable strategy

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	- $\Delta_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$ . . . . .	21
FIGURA 2	- $\Delta_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ . . . . .	22
FIGURA 3	- Gráfico função melhor resposta - dilema do prisioneiro. . . . .	36
FIGURA 4	- Gráfico função melhor resposta - batalha dos sexos. . . . .	37
FIGURA 5	- Gráfico função melhor resposta - comparar moedas. . . . .	38
FIGURA 6	- Gráfico função melhor resposta - jogo da coordenação. . . . .	41
FIGURA 7	- Gráfico função melhor resposta - Hawk-Dove. . . . .	43
FIGURA 8	- Gráfico da função $f_x(\varepsilon, y)$ . . . . .	54
FIGURA 9	- Gráfico da função $f_x(\varepsilon, y)$ (caso $\varepsilon_y = 1$ ). . . . .	56
FIGURA 10	- Gráfico da função $f_x(\varepsilon, y)$ (caso $\varepsilon_y = 0$ ). . . . .	56
FIGURA 11	- Gráfico da função $f_x(\varepsilon, y)$ (caso $\varepsilon_y > 1$ ). . . . .	57
FIGURA 12	- Gráfico da função $f_x(\varepsilon, y)$ (caso $\varepsilon_y < 0$ ). . . . .	57
FIGURA 13	- Gráfico da função $f_x(\varepsilon, y)$ (caso $\varepsilon_y$ não exista). . . . .	57

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Tabela de ganhos - dilema do prisioneiro. ....	11
TABELA 2	– Tabela de ganhos - batalha dos sexos. ....	12
TABELA 3	– Etapa 1 processo dominância dilema prisioneiro. ....	14
TABELA 4	– Etapa 2 processo dominância dilema prisioneiro. ....	14
TABELA 5	– Exemplo dominância fraca. ....	16
TABELA 6	– Tabela de ganhos - comparar moedas. ....	17
TABELA 7	– Contraexemplo para recíproca da Proposição 2.13. ....	19
TABELA 8	– Tabela de ganhos - jogo da coordenação. ....	39
TABELA 9	– Tabela de ganhos - Hawk-Dove. ....	42
TABELA 10	– Tabela de ganhos - pedra-papel-tesoura. ....	50

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>JOGOS NA FORMA NORMAL</b>	<b>10</b>
2.1	O QUE É UM JOGO?	10
2.2	DEFINIÇÃO DE JOGOS NA FORMA NORMAL	11
2.3	SOLUÇÃO DE UM JOGO EM ESTRATÉGIAS PURAS	13
2.3.1	Dominância em Estratégias Puras	13
2.3.2	Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras	16
2.3.3	Relações Entre Dominância e Equilíbrios de Nash	18
2.4	ESTRATÉGIAS MISTAS	20
2.4.1	Função Utilidade Para Estratégias Mistas	23
2.4.2	Soluções em Estratégias Mistas	24
2.5	FUNÇÕES MELHOR RESPOSTA	26
2.6	TEOREMA DO EQUILÍBRIO DE NASH	30
2.7	TRANSFORMAÇÕES NAS FUNÇÕES UTILIDADE	33
2.8	JOGOS COM APENAS DOIS JOGADORES	34
2.8.1	Jogadores com Apenas Duas Estratégias	34
2.8.2	Jogos Simétricos	38
2.8.2.1	Equilíbrio de Nash Simétrico	40
2.8.2.2	Classificação de Jogos Simétricos $2 \times 2$	43
<b>3</b>	<b>ESTRATÉGIA EVOLUTIVAMENTE ESTÁVEL</b>	<b>45</b>
3.1	PRELIMINARES	45
3.2	DEFINIÇÃO DE ESTRATÉGIA EVOLUTIVAMENTE ESTÁVEL	46
3.3	JOGOS SIMÉTRICOS $2 \times 2$	51
3.4	PROPRIEDADES DO CONJUNTO $\Delta^{\text{ESS}}$	52
3.5	CARACTERIZAÇÕES DA ESS	53
3.5.1	Barreira de Invasão Uniforme	54
3.5.2	Superioridade Local	61
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>63</b>
	REFERÊNCIAS	<b>64</b>



## 1 INTRODUÇÃO

A análise matemática formaliza as ideias intuitivas do cálculo, tais como derivadas, integrais, sequências, séries, continuidade, etc. (RUDIN, 1976). Esta área é de suma importância em vários campos da matemática pura e aplicada (LIMA, 2013), (FRANKLIN, 1980).

A teoria de jogos é uma teoria matemática desenvolvida para estudar situações de conflito envolvendo dois ou mais agentes de decisão. Um de seus objetivos é fornecer antecipadamente uma previsão ou prescrição coerente do resultado da situação. Tal teoria tem aplicações em diversas áreas (biologia, economia, leilões, ciências políticas, etc.), mas também pode ser estudada como uma teoria matemática pura (BORTOLOSSI et al., 2007), (FRANKLIN, 1980), (WEIBULL, 1997).

O principal objetivo deste trabalho é mostrar como alguns tópicos da análise matemática podem ser aplicados em teoria de jogos.

No segundo capítulo apresentamos uma introdução à teoria econômica de jogos, explorando o conceito de jogos na forma normal. Neste capítulo seguimos as ideias presentes em (BORTOLOSSI et al., 2007) e (WEIBULL, 1997). Definimos os dois conceitos mais comuns de soluções de um jogo, dominância e equilíbrio de Nash, e estabelecemos algumas relações entre tais conceitos. Posteriormente definimos o importante conceito de estratégia mista e provamos algumas propriedades referentes ao conjunto de estratégias mistas do jogo (convexidade, compactidade). Em seguida, definimos as funções melhor resposta e as relacionamos com equilíbrios de Nash. Utilizando o teorema do ponto fixo de Kakutani e as funções melhor resposta, provamos o famoso teorema do equilíbrio de Nash, que garante a existência de ao menos um equilíbrio de Nash para qualquer jogo na forma normal. Por fim, encerramos este capítulo com dois casos especiais de jogos na forma normal, os jogos de dois jogadores, cada um com apenas duas estratégias puras, e os jogos simétricos.

No seguinte capítulo introduzimos o conceito de estratégias evolutivamente estáveis. Neste capítulo seguimos as ideias presentes em (WEIBULL, 1997) e (GINTIS, 2009). Provamos vários resultados a respeito de tais estratégias, e demonstramos duas caracterizações

alternativas: a existência de uma barreira de invasão uniforme e a superioridade local.

Esse trabalho pode ser útil para interessados em aprender sobre teoria de jogos ou análise matemática num contexto aplicado.

## 2 JOGOS NA FORMA NORMAL

Este capítulo tem o propósito de introduzir alguns conceitos básicos da teoria econômica de jogos: jogos na forma normal, jogos simétricos, estratégias puras, estratégias mistas, funções utilidade (ganho) e funções melhor resposta. Tais conceitos serão fundamentais no decorrer do texto. O principal resultado do capítulo é a demonstração do teorema do equilíbrio de Nash. Neste capítulo seguimos as ideias presentes em (BORTOLOSSI et al., 2007) e (WEIBULL, 1997).

### 2.1 O QUE É UM JOGO?

Afinal, o que é um jogo? Vamos introduzir esse conceito através do **dilema do prisioneiro**, talvez o mais famoso exemplo na teoria de jogos.

**Exemplo 2.1.** (*Dilema do Prisioneiro*) Suponha que dois prisioneiros são capturados e acusados de um mesmo crime. Eles são presos em celas separadas sem poderem ter contato entre si. O delegado faz a seguinte proposta: cada prisioneiro pode escolher entre negar ou confessar o crime. Se ambos negarem, ambos serão submetidos a uma pena de um ano. Caso os dois confessem, eles cumprirão uma pena de cinco anos. Por fim, se um negar e o outro confessar, o que confessou será libertado e o que negou ficará preso por dez anos.

Neste exemplo temos dois prisioneiros, designados por  $p_1$  e  $p_2$ , que chamaremos agentes de decisão ou jogadores. Cada jogador possui um conjunto de estratégias ou escolhas. Neste caso os jogadores possuem o mesmo conjunto de estratégias {confessar ( $C$ ), negar ( $N$ )}. Por fim, podemos considerar uma função utilidade para cada jogador, que associa a cada possível situação um número real, que representa, com números negativos, os anos que o jogador ficará preso.

Podemos sintetizar toda essa informação em uma tabela, denominada tabela de ganhos ou tabela de utilidades (Tabela 1).

$p_1/p_2$	$C$	$N$
$C$	$-5, -5$	$0, -10$
$N$	$-10, 0$	$-1, -1$

**Tabela 1: Tabela de ganhos - dilema do prisioneiro.**

Nesta tabela, os números de cada célula representam, respectivamente, os ganhos de  $p_1$  e  $p_2$  para as decisões de  $p_1$  e  $p_2$  correspondentes à célula.

O exemplo anterior introduz a ideia de que um jogo é uma situação de conflito envolvendo dois ou mais agentes de decisão, onde cada um deles tem um determinado conjunto de escolhas a se fazer. A seguir definiremos formalmente jogos na forma normal.

## 2.2 DEFINIÇÃO DE JOGOS NA FORMA NORMAL

Um jogo na forma normal é caracterizado pelos seguintes elementos:

- Um conjunto finito de jogadores  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , onde  $n > 1$ ;
- Para cada jogador  $p_i$ , existe um conjunto finito de estratégias puras  $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$ , onde  $m_i > 1$ ;
- Um espaço de estratégias puras do jogo  $S = \prod_{i=1}^n S_i$ . Um elemento  $s \in S$  é chamado de **perfil de estratégias puras**;
- Para cada jogador  $p_i$ , existe uma **função utilidade**  $\pi_i: S \rightarrow \mathbb{R}$  que associa cada perfil  $s \in S$  com um número real  $\pi_i(s)$ , que representa o ganho do jogador  $p_i$  quando o perfil  $s$  é jogado;
- Uma função  $\pi: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  que associa cada perfil  $s \in S$  com o vetor  $(\pi_1(s), \dots, \pi_n(s))$ . Tal função é chamada de **função utilidade do jogo**.

Nos jogos na forma normal supõe-se que cada jogador deve escolher sua estratégia sem o conhecimento das escolhas dos demais jogadores. Também presume-se que cada jogador conhece toda a estrutura do jogo. Por este motivo, jogos desse tipo também são denominados jogos não cooperativos de informação completa.

Também assume-se que os jogadores são perfeitamente racionais, ou seja, eles sempre irão escolher as estratégias que maximizem suas respectivas funções utilidade. Além disso,

cada jogador sabe que seus oponentes são racionais e que eles sabem que o jogador sabe que eles são racionais.

A partir dessas considerações temos a seguinte definição.

**Definição 2.2.** *Um jogo na forma normal é uma terna  $G = (P, S, \pi)$  onde  $P$  é um conjunto de jogadores,  $S$  é o espaço de estratégias puras e  $\pi$  é a função utilidade do jogo.*

A fim de fixar as ideias vamos apresentar o jogo conhecido como **batalha dos sexos**.

**Exemplo 2.3.** *(Batalha dos Sexos)* Um casal planeja uma tarde em conjunto. O homem ( $h$ ) prefere ir assistir a um jogo de futebol, enquanto sua mulher ( $m$ ) prefere ir ao cinema. Se ambos forem ao futebol, o homem ficará mais satisfeito do que a mulher, caso os dois escolham ir ao cinema, então a mulher ficará mais satisfeita do que o homem. Se eles saírem sozinhos, então ambos ficam igualmente insatisfeitos.

Esta situação pode ser modelada como um jogo na forma normal. A seguir vamos identificar os elementos de tal jogo.

- Conjunto de jogadores  $P = \{h, m\}$ ;
- Conjuntos de estratégias puras  $S_h = \{\text{futebol}(F), \text{cinema}(C)\}$ ,  $S_m = \{F, C\}$ ;
- Espaço de estratégias puras  $S = S_h \times S_m = \{s1, s2, s3, s4\}$ , onde  $s1 = (F, F)$ ,  $s2 = (F, C)$ ,  $s3 = (C, F)$ ,  $s4 = (C, C)$ ;
- Funções utilidade. Vamos associar os números 10, 5 e 0, respectivamente, ao ganho obtido quando um jogador faz o que quer e está acompanhado, não faz o que quer, mas está acompanhado, ou não está acompanhado, isto é,  $\pi_h: S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\pi_m: S \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\pi_h(s1) = 10$ ,  $\pi_h(s2) = 0$ ,  $\pi_h(s3) = 0$ ,  $\pi_h(s4) = 5$ ,  $\pi_m(s1) = 5$ ,  $\pi_m(s2) = 0$ ,  $\pi_m(s3) = 0$ ,  $\pi_m(s4) = 10$ .

Podemos resumir todas essas informações utilizando a seguinte tabela de ganhos (Tabela 2).

$h/m$	$F$	$C$
$F$	10,5	0,0
$C$	0,0	5,10

**Tabela 2: Tabela de ganhos - batalha dos sexos.**

É comum descrever jogos de apenas dois jogadores através da tabela de ganhos. Faremos uso dessa representação ao longo do texto.

## 2.3 SOLUÇÃO DE UM JOGO EM ESTRATÉGIAS PURAS

Um dos objetivos da teoria de jogos é obter, antecipadamente, uma previsão coerente para o jogo em questão. Esta previsão também é chamada de solução. Existem vários conceitos diferentes de solução. Neste texto iremos tratar os dois conceitos mais comuns: dominância e equilíbrio de Nash.

Antes de iniciarmos as discussões sobre soluções, iremos introduzir uma importante notação. Frequentemente vamos discutir perfis em que apenas a estratégia de um jogador  $p_i \in P$  irá variar, enquanto as estratégias dos demais jogadores permanecerão fixas. Vamos denotar por

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

uma escolha de estratégia fixa para todos os jogadores, exceto para o jogador  $p_i$ . Note que

$$s_{-i} \in S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j.$$

Utilizando esta notação, podemos denotar um perfil  $s \in S$  destacando a estratégia  $s_i$  do jogador  $p_i$ , da seguinte maneira

$$s = (s_i, s_{-i}) = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

### 2.3.1 DOMINÂNCIA EM ESTRATÉGIAS PURAS

**Definição 2.4.** (*Estratégia Pura Estritamente Dominada*) Dizemos que uma estratégia  $s_{ih} \in S_i$ , do jogador  $p_i \in P$ , é estritamente dominada pela estratégia  $s_{ik} \in S_i$  se

$$\pi_i(s_{ik}, s_{-i}) > \pi_i(s_{ih}, s_{-i})$$

para todo  $s_{-i} \in S_{-i}$ . Também dizemos que  $s_{ik}$  domina estritamente  $s_{ih}$ .

Note que se a estratégia  $s_{ik}$  domina estritamente  $s_{ih}$ , então o jogador  $p_i$  sempre terá um ganho maior jogando  $s_{ik}$  a  $s_{ih}$ , independentemente da escolha dos demais jogadores.

**Definição 2.5.** (*Dominância Estrita Iterada*) Dominância estrita iterada é o processo no qual se eliminam, de forma sequencial, as estratégias estritamente dominadas.

Vamos aplicar o processo de dominância estrita iterada no dilema do prisioneiro. Lembremos que a tabela de ganhos do jogo é:

$p_1/p_2$	$C$	$N$
$C$	$-5, -5$	$0, -10$
$N$	$-10, 0$	$-1, -1$

Note que, para o jogador  $p_1$ , a estratégia  $C$  domina estritamente a estratégia  $N$ . Com efeito, basta notar que  $\pi_1(C, C) > \pi_1(N, C)$  e  $\pi_1(C, N) > \pi_1(N, N)$ . Como o jogador é racional, podemos supor que ele não irá jogar a estratégia  $N$ , então podemos eliminar a segunda linha da tabela. Assim, obtemos a seguinte versão reduzida do jogo (Tabela 3). Agora, nesta tabela reduzida,

$p_1/p_2$	$C$	$N$
$C$	$-5, -5$	$0, -10$

**Tabela 3: Etapa 1 do processo de dominância estrita e iterada (dilema do prisioneiro).**

para o jogador  $p_2$  a estratégia  $C$  domina estritamente a estratégia  $N$ , logo podemos eliminar a segunda coluna dessa tabela (Tabela 4). Assim, obtemos um único perfil de estratégias puras

$p_1/p_2$	$C$
$C$	$-5, -5$

**Tabela 4: Etapa 2 do processo de dominância estrita e iterada (dilema do prisioneiro).**

$(C, C)$ . Podemos interpretar esse perfil como sendo a solução do jogo. Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 2.6.** (*Equilíbrio de Estratégia Estritamente Dominante*) Quando o processo de dominância estrita iterada reduz o jogo a um único perfil  $s^* \in S$ , dizemos que  $s^*$  é um equilíbrio de estratégia estritamente dominante.

Note que em cada etapa do processo de dominância estrita iterada, o jogo é substituído por um jogo mais simples, no sentido que o conjunto de estratégias puras do jogador, aquele que possui uma estratégia estritamente dominada, é reduzido a um conjunto com menos elementos, obtido removendo as estratégias que são dominadas. No exemplo acima, temos inicialmente que

$$S_1 = \{C, N\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{C, N\}.$$

Realizando a primeira etapa, ou seja, removendo a estratégia  $N$  do jogador  $p_1$ , podemos substituir o jogo original por um mais simples, onde os conjuntos de estratégias puras dos dois jogadores são dados por

$$S_1^1 = \{C\} \quad \text{e} \quad S_2^1 = \{C, N\}.$$

Observe que as funções utilidade do novo jogo, são as restrições das funções utilidade originais ao novo espaço de estratégias puras  $S_1^1 \times S_2^1$ . Efetuando a segunda etapa, ou seja, removendo a

estratégia  $N$  do jogador  $p_2$ , podemos simplificar o jogo mais uma vez, considerando os seguintes conjuntos de estratégias puras

$$S_1^2 = \{C\} \quad \text{e} \quad S_2^2 = \{C\}.$$

Por fim note que este processo gerou uma cadeia de espaços de estratégias puras

$$S = S_1 \times S_2 \supseteq S^1 = S_1^1 \times S_2^1 \supseteq S^2 = S_1^2 \times S_2^2.$$

O processo de dominância estrita e iterada nem sempre reduz o jogo a um único perfil, pois às vezes, o jogo em questão não possui estratégias estritamente dominadas, como por exemplo: a batalha dos sexos. De fato, vamos mostrar que o jogador  $h$  não tem estratégias estritamente dominadas. Para isto basta notar que  $\pi_h(F, C) < \pi_h(C, C)$  e  $\pi_h(C, F) < \pi_h(F, F)$ . Assim, a estratégia  $F$  não domina  $C$  e  $C$  não domina  $F$ . Analogamente mostra-se que o jogador  $m$  não possui estratégias estritamente dominadas.

A seguir vamos definir conceitos análogos sobre dominância fraca.

**Definição 2.7.** (*Estratégia Pura Fracamente Dominada*) Dizemos que uma estratégia  $s_{ih} \in S_i$ , do jogador  $p_i \in P$ , é fracamente dominada pela estratégia  $s_{ik} \in S_i$  se

$$\pi_i(s_{ik}, s_{-i}) \geq \pi_i(s_{ih}, s_{-i})$$

para todo  $s_{-i} \in S_{-i}$  e pelo menos para algum  $s_{-i}^* \in S_{-i}$  tem-se

$$\pi_i(s_{ik}, s_{-i}^*) > \pi_i(s_{ih}, s_{-i}^*).$$

Também dizemos que  $s_{ik}$  domina fracamente  $s_{ih}$ .

Em outras palavras, dizer que  $s_{ik}$  domina fracamente  $s_{ih}$  é o mesmo que dizer que o jogador  $p_i$  nada perde jogando  $s_{ik}$  ao invés de  $s_{ih}$  e, pelo menos para alguma escolha dos demais jogadores, jogar  $s_{ik}$  é melhor do que jogar  $s_{ih}$ .

**Definição 2.8.** (*Dominância Fraca Iterada*) Dominância fraca iterada é o processo no qual se eliminam, de forma sequencial, as estratégias fracamente dominadas.

**Definição 2.9.** (*Equilíbrio de Estratégia Fracamente Dominante*) Quando o processo de dominância fraca iterada reduz o jogo a um único perfil  $s^* \in S$ , dizemos que  $s^*$  é um equilíbrio de estratégia fracamente dominante.

Uma pergunta natural é se o processo de eliminação das estratégias puras dominadas depende da ordem em que as eliminações são efetuadas. Para o caso de estratégias estrita-



mente dominadas, pode-se mostrar que a ordem é irrelevante (GILBOA et al., 1990). Por outro lado, o processo de eliminação de estratégias fracamente dominadas pode conduzir à resultados diferentes. Para ver isto, considere o jogo definido pela seguinte tabela de ganhos (Tabela 5). Eliminando a estratégia  $s_{22}$ , que é dominada estritamente por  $s_{21}$ , em seguida eliminando

$P_1/P_2$	$s_{21}$	$s_{22}$	$s_{23}$
$s_{11}$	0,2	0,0	1,0
$s_{12}$	0,3	1,0	0,0

**Tabela 5: O processo de dominância fraca iterada pode conduzir à resultados diferentes.**

a estratégia  $s_{12}$ , que é fracamente dominada por  $s_{11}$ , e por fim descartando a estratégia  $s_{23}$ , que é dominada estritamente por  $s_{21}$ , obteríamos o perfil  $(s_{11}, s_{21})$  como solução. Por outro lado excluindo, em sequência, as estratégias  $s_{23}$  (dominada estritamente por  $s_{21}$ ),  $s_{11}$  (fracamente dominada por  $s_{12}$ ),  $s_{22}$  (dominada estritamente por  $s_{21}$ ) teríamos o perfil  $(s_{12}, s_{21})$  como resposta.

### 2.3.2 EQUILÍBRIO DE NASH EM ESTRATÉGIAS PURAS

Agora vamos introduzir outro conceito de solução, conhecido como **equilíbrio de Nash**. Informalmente, tal solução é um perfil de estratégias onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem. Formalmente temos a seguinte definição.

**Definição 2.10.** (*Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras*) Dizemos que um perfil

$$s^* = (s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) \in S$$

é um equilíbrio de Nash se

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_{ih_i}, s_{-i}^*)$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e para todo  $h_i \in \{1, \dots, m_i\}$ .

No exemplo do dilema do prisioneiro temos que o perfil  $(C, C)$  é um equilíbrio de Nash, pois

$$\pi_{p_1}(C, C) = -5 > -10 = \pi_{p_1}(N, C)$$

e

$$\pi_{p_2}(C, C) = -5 > -10 = \pi_{p_2}(C, N),$$

ou seja, os prisioneiros não se sentem motivados a mudar sua estratégia se o outro não o fizer. Já o perfil  $(N, N)$  não é um equilíbrio de Nash, pois o  $p_1$  teria um ganho maior mudando sua

estratégia para  $C$ . Analogamente vemos que os perfis  $(C, N)$  e  $(N, C)$  não são equilíbrios de Nash. Note que o perfil  $(N, N)$  forneceria uma ganho maior do que o perfil  $(C, C)$ , para ambos os prisioneiros. Por esse motivo o jogo é batizado como dilema do prisioneiro, pois ambos prisioneiros ganhariam mais se decidissem cooperar a seguir seus próprios interesses.

No exemplo da batalha dos sexos temos que os perfis  $(F, F)$  e  $(C, C)$  são equilíbrios de Nash. De fato, temos que

$$\pi_h(F, F) = 10 > 0 = \pi_h(C, F)$$

e

$$\pi_m(F, F) = 5 > 0 = \pi_m(F, C),$$

disso segue que nem o homem e nem a mulher se sentem motivados a mudar sua estratégia se o seu oponente não o fizer. De forma análoga podemos mostrar que o perfil  $(C, C)$  também é um equilíbrio de Nash. Claramente os perfis  $(F, C)$  e  $(C, F)$  não são equilíbrios de Nash.

Acabamos de ver que existem equilíbrios de Nash no dilema do prisioneiro e na batalha dos sexos, mas será que todos os jogos na forma normal admitem equilíbrios de Nash? Antes de discutirmos tal assunto vamos analisar um jogo de comparação de moedas.

**Exemplo 2.11.** (*Comparar Moedas*) Considere dois jogadores  $p_1$  e  $p_2$ . Neste jogo os jogadores mostram, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentarem cara ( $C$ ) ou coroa ( $K$ ), então o jogador  $p_2$  entregará sua moeda para o jogador  $p_1$ . Caso uma das moedas apresente  $C$ , enquanto a outra  $K$ , então o jogador  $p_1$  dará sua moeda para o jogador  $p_2$ . Podemos representar tal jogo pela seguinte tabela de ganhos (Tabela 6), onde as entradas representam a quantidade de moedas ganhas. Note que os perfis  $(C, C)$  e  $(K, K)$

$p_1/p_2$	$C$	$K$
$C$	1, -1	-1, 1
$K$	-1, 1	1, -1

**Tabela 6:** Tabela de ganhos - comparar moedas.

não são equilíbrios de Nash, pois, nesses casos, o jogador  $p_2$  se sentiria motivado a mudar sua estratégia. Analogamente nota-se que os perfis  $(C, K)$  e  $(K, C)$  não são equilíbrios de Nash, pois, nesses casos, o jogador  $p_1$  teria incentivo para mudar de estratégia. Portanto este jogo não possui equilíbrios de Nash em estratégias puras.

Voltando à questão sobre a existência de equilíbrios de Nash, o exemplo anterior mostra que existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras, mas nem tudo

está perdido. A resposta para a questão da existência é afirmativa, se refinamos nosso conceito de estratégias puras, para o conceito de estratégias mistas. Antes de fazermos isso, iremos demonstrar algumas relações entre dominância e equilíbrios de Nash.

### 2.3.3 RELAÇÕES ENTRE DOMINÂNCIA E EQUILÍBRIOS DE NASH

**Proposição 2.12.** *O processo de dominância estrita iterada não elimina um equilíbrio de Nash ao simplificar um jogo.*

*Demonstração.* Lembramos que o processo de eliminação de estratégias estritamente dominadas gera uma cadeia

$$S = S^0 \supseteq S^1 \supseteq \dots \supseteq S^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

de espaços de estratégias puras. Note que tal processo é finito, pois os conjuntos de estratégias puras de cada jogador é finito. Dessa forma basta mostrar que se  $s^* \in S^0$  é um equilíbrio de Nash, então  $s^* \in S^k$ .

Vamos argumentar por contradição. Suponha que  $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S^0$  seja um equilíbrio de Nash, tal que  $s^* \notin S^k$ . Logo existe um índice  $i$  tal que  $s_i^* \in S_i^l$  e  $s_i^* \notin S_i^{l+1}$ , para algum  $l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  (caso  $l = 0$  considere  $S_i^0 = S_i$ ). Sem perda de generalidade, suponha que esta propriedade ocorre pela primeira vez para o índice  $i$ , ou seja,  $s_i^*$  é a primeira estratégia do perfil  $s^*$  que é eliminada por uma estratégia estritamente dominante. Portanto existe  $z_i \in S_i^l$  tal que

$$\pi_i(z_i, s_{-i}) > \pi_i(s_i^*, s_{-i})$$

para todo  $s_{-i} \in S_{-i}^l$ . Como  $s_i^*$  é a primeira estratégia a ser removida, segue que  $s_{-i}^* \in S_{-i}^l$ , e então,

$$\pi_i(z_i, s_{-i}^*) > \pi_i(s_i^*, s_{-i}^*).$$

Mas isto contradiz a hipótese de  $s^*$  ser um equilíbrio de Nash. □

**Proposição 2.13.** *Se o processo de dominância estrita iterada deixa apenas um único perfil de estratégias puras  $s^*$ , então  $s^*$  é o único equilíbrio de Nash do jogo.*

*Demonstração.* Suponha que o processo de dominância estrita iterada gere uma cadeia

$$S = S^0 = \prod S_i^0 \supseteq S^1 = \prod S_i^1 \supseteq \dots \supseteq S^k = \prod S_i^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

de espaços de estratégias puras onde

$$S^k = \{s^*\} = (s_1^*, \dots, s_n^*).$$

Note que  $s_i^* \in S_i^l$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e todo  $l \in \{1, \dots, k\}$ . Vamos mostrar que  $s^*$  é o único equilíbrio de Nash do jogo. Vamos argumentar por contradição. Suponha que  $s^*$  não seja um equilíbrio de Nash. Logo existe algum índice  $i$  e existe uma estratégia  $z_i^1 \neq s_i$  em  $S_i$ , tais que

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) < \pi_i(z_i^1, s_{-i}^*).$$

Como  $(z_i^1, s_{-i}^*) \notin S^k$ , segue que  $z_i^1$  é estritamente dominada por outra estratégia  $z_i^2 \in S_i$ . Portanto

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) < \pi_i(z_i^1, s_{-i}^*) < \pi_i(z_i^2, s_{-i}^*).$$

Tais desigualdades nos fornecem que  $z_i^2 \neq s_i^*$  e  $z_i^1 \neq z_i^2$ . Como  $(z_i^2, s_{-i}^*) \notin S^k$ , temos que existe  $z_i^3 \in S_i$  tal que  $z_i^3$  domina estritamente  $z_i^2$ . Logo

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) < \pi_i(z_i^1, s_{-i}^*) < \pi_i(z_i^2, s_{-i}^*) < \pi_i(z_i^3, s_{-i}^*)$$

com  $z_i^3 \neq s_i^*$ ,  $z_i^3 \neq z_i^1$ ,  $z_i^3 \neq z_i^2$ . Prosseguindo o raciocínio anterior obteríamos uma sequência  $(z_i^t) \subset S_i$  de estratégias puras distinta duas a duas. Mas isto é uma contradição, pois  $S_i$  é finito. Logo  $s^*$  é um equilíbrio de Nash. Como o processo de dominância estrita iterada não pode eliminar um equilíbrio de Nash, segue que o perfil  $s^*$  é o único equilíbrio de Nash do jogo.  $\square$

De forma análoga podemos provar a seguinte proposição, com a ressalva de que a unicidade não é mais garantida, pois o processo de dominância fraca iterada pode eliminar um equilíbrio de Nash.

**Proposição 2.14.** *Se o processo de dominância fraca iterada deixa apenas um único perfil de estratégias puras  $s^*$ , então  $s^*$  é um equilíbrio de Nash.*

A recíproca da Proposição 2.13 é falsa. Ou seja, se um jogo tem um único equilíbrio de Nash, ele não é necessariamente obtido através do processo de dominância estrita iterada. O jogo, dado pela seguinte tabela de ganhos (Tabela 7), nos fornece um contraexemplo. Tal jogo

$p_1/p_2$	$s_{21}$	$s_{22}$	$s_{23}$
$s_{11}$	$-1, 1$	$1, -1$	$-1, 1$
$s_{12}$	$1, -1$	$-1, 1$	$1, -1$
$s_{13}$	$-1, 1$	$1, -1$	$2^{16}, 2^{16}$

**Tabela 7: Contraexemplo para recíproca da Proposição 2.13.**

não possui estratégias estritamente dominadas e o perfil  $(s_{13}, s_{23})$  é o único equilíbrio de Nash do jogo.

## 2.4 ESTRATÉGIAS MISTAS

A seguir vamos definir o conceito de estratégias mistas.

**Definição 2.15.** *Uma estratégia mista  $y_i$ , para o jogador  $p_i$ , é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de estratégias puras  $S_i$ , ou seja,  $y_i$  é um elemento do conjunto*

$$\Delta_{m_i} = \{(x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m_i} x_i = 1\}.$$

Desse modo, temos que  $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{im_i})$ ,  $y_{ih} \geq 0$  para todo  $h \in \{1, \dots, m_i\}$  e  $\sum_{h=1}^{m_i} y_{ih} = 1$ .

Nas figuras 1 e 2 apresentamos as representações gráficas de  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$ , respectivamente.

Podemos aplicar as estratégias mistas em jogos que se repetem. Por exemplo: suponha que dois amigos joguem o jogo de comparar moedas todos os dias. Por razões óbvias não seria racional escolher sempre a mesma estratégia. Então os jogadores poderiam optar por escolher entre as estratégias puras a cada dia, seguindo uma distribuição de probabilidades, isto é, através de estratégias mistas. Considere que um jogador escolha jogar a estratégia mista  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \Delta_2$ , isto é, metade das vezes ele opta por  $C$  a outra metade por  $K$ . Isto é equivalente a ele escolher sua estratégia conforme o resultado de um lançamento de uma moeda não viciada.

Antes de demonstrarmos a próxima proposição, vamos mostrar que a função projeção  $\sigma_h: \Delta_{m_i} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\sigma_h(x) = x_h$  é contínua. De fato, basta notar que  $\sigma_h$  é lipschitziana. Com efeito,

$$|\sigma_h(x) - \sigma_h(y)|^2 = (x_h - y_h)^2 \leq \sum_{k=1}^{m_i} (x_k - y_k)^2 = \|x - y\|^2$$

para quaisquer  $x$  e  $y$  em  $\Delta_{m_i}$ .

O seguinte resultado é enunciado sem demonstração em (BORTOLOSSI et al., 2007).

**Proposição 2.16.** *O conjunto  $\Delta_{m_i}$  é compacto e convexo.*

*Demonstração.* Inicialmente vamos mostrar que o conjunto  $\Delta_{m_i}$  é compacto. De fato, considere  $x = (x_1, \dots, x_{m_i}) \in \Delta_{m_i}$ , isto é,  $\sum x_h = 1$  e  $x_h \geq 0$ , para todo  $h \in \{1, \dots, m_i\}$ . Logo

$$\|x\|^2 = \sum x_h^2 \leq (\sum x_h)^2 = 1.$$

Portanto  $\Delta_{m_i}$  é limitado. Para provarmos que  $\Delta_{m_i}$  é fechado, considere  $\sigma_h: \Delta_{m_i} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\sigma_h(x) = x_h$ . Como a função  $\sigma_h$  é contínua, temos que o conjunto  $\sigma_h^{-1}([0, \infty))$  é fechado. Defina  $f: \Delta_{m_i} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sum x_h$ . Observe que  $f$  é uma função contínua, pois  $f$  é

uma composição de somas. Note que o conjunto  $F = \{x \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum x_h = 1\}$  é fechado, pois  $F = f^{-1}(\{1\})$ . Por fim, note que

$$\Delta_{m_i} = \bigcap_{h=1}^{m_i} \sigma_h^{-1}([0, \infty)) \cap F.$$

Como a intersecção de fechados é um conjunto fechado, segue que  $\Delta_{m_i}$  é um conjunto fechado. Isto prova que  $\Delta_{m_i}$  é compacto.

Para mostrar que o conjunto é convexo, considere  $x, y \in \Delta_{m_i}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  e considere a combinação  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ . Temos que  $\sum x_h = 1$ ,  $\sum y_h = 1$ ,  $x_h \geq 0$  e  $y_h \geq 0$ . Logo  $z_h = (1 - \lambda)x_h + \lambda y_h \geq 0$ . Note que

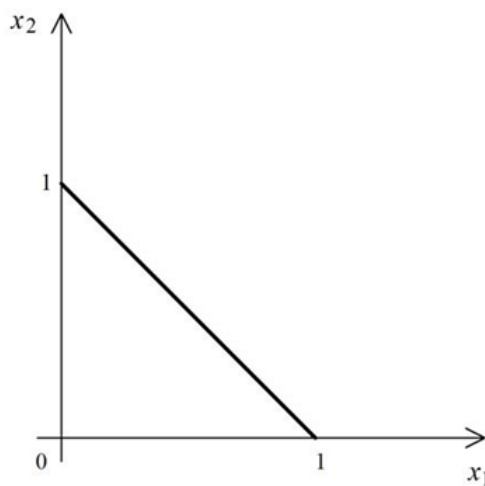
$$\sum z_h = \sum (1 - \lambda)x_h + \lambda y_h = (1 - \lambda) \sum x_h + \lambda \sum y_h = 1 - \lambda + \lambda = 1.$$

Portanto  $z \in \Delta_{m_i}$ , o que prova que  $\Delta_{m_i}$  é convexo.  $\square$

Os pontos extremos (vértices) de  $\Delta_{m_i}$ , isto é, os pontos da forma

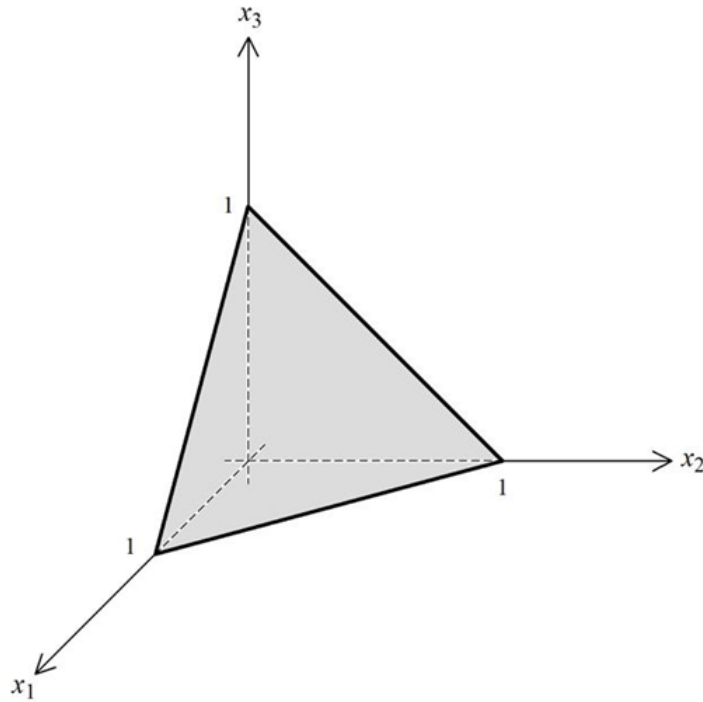
$$e_i^1 = (1, 0, \dots, 0), e_i^2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_i^{m_i} = (0, 0, \dots, 1),$$

dão probabilidade 1 às estratégias  $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}$ , respectivamente. Desse modo uma estratégia pura  $s_{ih}$  pode ser representada como a estratégia mista  $e_i^h$ , nesse sentido temos que  $S_i \subset \Delta_{m_i}$ . Faremos uso desta representação ao longo do texto.



**Figura 1:**  $\Delta_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$ .

Note que o conjunto  $\Delta_{m_i}$  é o envoltório convexo do conjunto  $\{e_i^1, \dots, e_i^{m_i}\}$ , ou seja,



**Figura 2:**  $\Delta_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ .

cada estratégia mista  $x_i \in \Delta_{m_i}$  é uma combinação convexa dos vetores unitários  $e_i^h$ ,

$$x_i = \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} e_i^h.$$

**Definição 2.17.** Seja  $x_i \in \Delta_{m_i}$  uma estratégia mista do jogador  $p_i$ . Definimos o suporte de  $x_i$  como o seguinte subconjunto de  $S_i$ ,

$$C(x_i) = \{s_{ih} \in S_i : x_{ih} > 0\}.$$

Ou seja, o suporte de  $x_i$  é o conjunto das estratégias puras que recebem probabilidade positiva de serem jogadas.

O conjunto  $\text{int}(\Delta_{m_i}) = \{x_i \in \Delta_{m_i} : x_{ih} > 0, \text{ para } h = 1, \dots, m_i\}$  é chamado interior relativo de  $\Delta_{m_i}$ . Estratégias mistas pertencentes ao conjunto  $\text{int}(\Delta_{m_i})$  são ditas completamente mistas. Note que  $x_i \in \text{int}(\Delta_{m_i})$  se, e somente se,  $C(x_i) = S_i$ . A fronteira de  $\Delta_{m_i}$  é o conjunto  $\partial(\Delta_{m_i}) = \{x_i \in \Delta_{m_i} : x_i \notin \text{int}(\Delta_{m_i})\}$  das estratégias mistas, que não são completamente mistas. Note que  $x_i \in \partial(\Delta_{m_i})$  se, e somente se,  $C(x_i)$  é um subconjunto próprio de  $S_i$ .

**Observação 2.18.** O conjunto  $\Delta = \prod_{j=1}^n \Delta_{m_j}$  é denominado **espaço de estratégias mistas** do jogo. Como o produto cartesiano finito de conjuntos compactos e convexos é compacto e convexo, segue que  $\Delta$  é um conjunto compacto e convexo.

Um elemento  $x$  do conjunto  $\Delta$  é dito um **perfil de estratégias mistas**. Note que um perfil de estratégias puras  $(s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n})$  pode ser representado como  $(e_1^{h_1}, \dots, e_n^{h_n})$ , nesse sentido temos que  $S \subset \Delta$ . Novamente iremos utilizar a notação  $x_{-i}$  para representar uma escolha de estratégias mistas para todos os jogadores, exceto para jogador  $p_i$ . Dessa forma utilizaremos a seguinte notação  $x = (x_i, x_{-i})$ . Note que  $x_{-i}$  é um elemento do conjunto  $\Delta_{-i} = \prod_{j \neq i} \Delta_j$ .

#### 2.4.1 FUNÇÃO UTILIDADE PARA ESTRATÉGIAS MISTAS

Seja  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta$  um perfil de estratégias mistas. A probabilidade do perfil de estratégias puras  $s = (s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n})$  ser usado, quando o perfil  $x$  é jogado, é o produto das probabilidades atribuídas pelas estratégias mistas  $x_i \in \Delta_{m_i}$  para a respectiva estratégia pura  $s_{ih_i}$ , isto é,

$$x(s) = \prod_{i=1}^n x_{ih_i}.$$

Desse modo a utilidade esperada do jogador  $p_i$ , associado ao perfil  $x$ , é

$$u_i(x) = \sum_{s \in S} x(s) \pi_i(s).$$

Também podemos enxergar a utilidade esperada  $u_i(x)$ , para o jogador  $p_i$ , do seguinte modo: temos que

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (x_{11}, \dots, x_{1m_1}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nm_n})$$

então

$$u_i(x) = \sum_{h_1=1}^{m_1} \dots \sum_{h_n=1}^{m_n} x_{1h_1} \dots x_{nh_n} \pi_i(s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n}).$$

Assim fica definida a **função utilidade mista**  $u_i: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  para estratégias mistas do jogador  $p_i$ . Note que esta função está bem definida para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ , onde  $m = \sum m_i$ . A função  $u: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$  é chamada de **função utilidade mista do jogo**.

A função  $u_i$  é contínua. Com efeito, sabemos que as funções soma e multiplicação são contínuas e que a composição de funções contínuas resulta numa função contínua. Logo a continuidade da função  $u_i$  é consequência da mesma ser uma composição de somas e multiplicações.

Note que a função  $u_i$  é linear em todas as suas variáveis. De fato, sejam  $z_{-k} \in \Delta_{-k}$  e  $z_k = x_k + \lambda y_k \in \Delta_{m_k}$ , para algum  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Então



$$\begin{aligned}
u_i(z) &= u_i(z_k, z_{-k}) \\
&= u_i(x_k + \lambda y_k, z_{-k}) \\
&= \sum_{h_1=1}^{m_1} \dots \sum_{h_k=1}^{m_k} \dots \sum_{h_n=1}^{m_n} z_{1h_1} \dots x_{kh_k} + \lambda y_{kh_k} \dots z_{nh_n} \pi_i(s_{1h_1}, \dots, s_{kh_k}, \dots, s_{nh_n}) \\
&= \sum_{h_1=1}^{m_1} \dots \sum_{h_k=1}^{m_k} \dots \sum_{h_n=1}^{m_n} z_{1h_1} \dots x_{kh_k} \dots z_{nh_n} \pi_i(s_{1h_1}, \dots, s_{kh_k}, \dots, s_{nh_n}) \\
&\quad + \lambda \sum_{h_1=1}^{m_1} \dots \sum_{h_k=1}^{m_k} \dots \sum_{h_n=1}^{m_n} z_{1h_1} \dots y_{kh_k} \dots z_{nh_n} \pi_i(s_{1h_1}, \dots, s_{kh_k}, \dots, s_{nh_n}) \\
&= u_i(x_k, z_{-k}) + \lambda u_i(y_k, z_{-k}).
\end{aligned}$$

Isso mostra que  $u_i$  é linear em todas as variáveis. Em particular, se  $x_i \in \Delta_{m_i}$  e  $y_{-i} \in \Delta_{-i}$ , então

$$u_i(x_i, y_{-i}) = u_i\left(\sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} e_i^h, y_{-i}\right) = \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} u_i(e_i^h, y_{-i}).$$

A partir do que estudamos sobre estratégias mistas, podemos estender a Definição 2.2 para a seguinte definição.

**Definição 2.19.** *Um jogo na forma normal é uma terna  $G = (P, \Delta, u)$  onde  $P$  é um conjunto de jogadores,  $\Delta$  é o espaço de estratégias mistas e  $u$  é a função utilidade de estratégias mistas do jogo.*

#### 2.4.2 SOLUÇÕES EM ESTRATÉGIAS MISTAS

Os mesmos critérios de soluções em estratégias puras podem ser estendidos para estratégias mistas.

**Definição 2.20.** *Dizemos que a estratégia  $y_i \in \Delta_{m_i}$ , do jogador  $p_i$ , é estritamente dominada pela estratégia  $x_i \in \Delta_{m_i}$ , se*

$$u_i(x_i, z_{-i}) > u_i(y_i, z_{-i})$$

para todo  $z_{-i} \in \Delta_{-i}$ . Ou seja, o jogador  $p_i$  sempre ganha mais jogando  $x_i$  ao invés de  $y_i$ . Também dizemos que  $x_i$  domina  $y_i$ .

**Definição 2.21.** *Dizemos que a estratégia  $y_i \in \Delta_{m_i}$ , do jogador  $p_i$ , é fracamente dominada pela estratégia  $x_i \in \Delta_{m_i}$ , se*

$$u_i(x_i, z_{-i}) \geq u_i(y_i, z_{-i})$$

para todo  $z_{-i} \in \Delta_{-i}$ , e pelo menos para algum  $z_{-i}^* \in \Delta_{-i}$  tivermos

$$u_i(x_i, z_{-i}^*) > u_i(y_i, z_{-i}^*).$$

Ou seja, o jogador  $p_i$  nada perde jogando  $x_i$  ao invés de  $y_i$  e, pelo menos para uma escolha dos demais jogadores, jogar  $x_i$  é melhor do que jogar  $y_i$ . Também dizemos que  $x_i$  domina fracamente  $y_i$ .

**Definição 2.22.** (Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas) Dizemos que um perfil

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \Delta$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(y_i, x_{-i}^*)$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e para todo  $y_i \in \Delta_{m_i}$ , ou seja, nenhum jogador se sente motivado a trocar de estratégias se os demais jogadores não o fizerem.

No dilema do prisioneiro o perfil  $x = (x_1, x_2) = (e_1^1, e_2^1)$  é um equilíbrio de Nash, pois

$$u_1(y_1, e_2^1) = -5y_{11} - 10y_{12} = 5y_{11} - 10 \leq -5 = u_1(e_1^1, e_2^1) = u_1(x)$$

para todo  $y_1 \in \Delta_{m_1}$ . Na segunda igualdade utilizamos a identidade  $y_{12} = 1 - y_{11}$ . Analogamente vemos que

$$u_2(e_1^1, y_2) = -5y_{21} - 10y_{22} = 5y_{21} - 10 \leq -5 = u_2(e_1^1, e_2^1) = u_2(x)$$

para todo  $y_2 \in \Delta_{m_2}$ . Isso mostra que nenhum prisioneiro se sente motivado a mudar sua estratégia se o outro não o fizer. Note que o perfil  $x$  corresponde ao equilíbrio de Nash em estratégias puras  $(C, C)$ . Mais adiante mostraremos que este é o único equilíbrio de Nash do jogo.

No jogo de comparar moedas o perfil  $x = (x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  é um equilíbrio de Nash, pois

$$u_1(y_1, x_2) = 0 \leq 0 = u_1(x_1, x_2) = u_1(x)$$

para todo  $y_1 \in \Delta_{m_1}$ , e

$$u_2(x_1, y_2) = 0 \leq 0 = u_2(x_1, x_2) = u_2(x)$$

para todo  $y_2 \in \Delta_{m_2}$ . Estas desigualdades mostram que os jogadores não têm motivação para mudar sua estratégia se o seu oponente não o fizer. Mais adiante mostraremos que este é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Na batalha dos sexos os perfis  $(e_1^1, e_2^1)$ ,  $(e_1^2, e_2^2)$  e  $x = (x_1, x_2) = (2/3, 1/3, 1/3, 2/3)$

são equilíbrios de Nash. Note que os dois primeiros correspondem aos equilíbrios de Nash puros  $(F, F)$  e  $(C, C)$ , respectivamente. Vamos mostrar que o terceiro é um equilíbrio de Nash. Note que

$$u_1(y_1, x_2) = 10/3 \leq 10/3 = u_1(x_1, x_2) = u_1(x)$$

para todo  $y_1 \in \Delta_{m_1}$ , e

$$u_2(x_1, y_2) = 10/3 \leq 10/3 = u_2(x_1, x_2) = u_2(x)$$

para todo  $y_2 \in \Delta_{m_2}$ . Estas desigualdades mostram que os jogadores não têm motivação para mudar sua estratégia se o seu oponente não o fizer. Mais adiante mostraremos que estes são os únicos equilíbrios de Nash do jogo.

Vimos que o jogo de comparar moedas não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras, mas possui equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Então surge a questão: todo jogo na forma normal admite pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas? A resposta é sim! Veremos isso no teorema do equilíbrio de Nash, que estabelece que todo jogo na forma normal admite pelo menos um equilíbrio de Nash, mas antes estudaremos o importante conceito de função melhor resposta.

## 2.5 FUNÇÕES MELHOR RESPOSTA

Outra forma de se definir equilíbrios de Nash é através das **funções de melhor resposta**. Informalmente, tais aplicações levam um perfil em um conjunto de estratégias ótimas para o jogador contra tal perfil.

**Definição 2.23.** (*Função Melhor Resposta Pura*) A função melhor resposta pura do jogador  $p_i$  é a aplicação

$$\beta_i: \Delta_{-i} \rightarrow 2^{S_i}$$

dada por

$$\beta_i(x_{-i}) = \{s_{ih} \in S_i: u_i(e_i^h, x_{-i}) \geq u_i(e_i^k, x_{-i}) \text{ para } k = 1, \dots, m_i\},$$

onde  $2^{S_i}$  representa o conjunto das partes de  $S_i$ . Note que para cada  $x_{-i}$  a função  $\beta_i$  retorna um subconjunto de estratégias de  $S_i$ . O conjunto  $\beta_i(x_{-i})$  é denominado conjunto de melhores respostas puras para o perfil  $x$  do jogador  $p_i$ .

Note que se  $s_{ih}$  e  $s_{ik}$  pertencem a  $\beta_i(x_{-i})$ , para algum  $x_{-i} \in \Delta_{-i}$ , então as utilidades  $u_i(e_i^h, x_{-i})$  e  $u_i(e_i^k, x_{-i})$  são iguais. De fato, como  $s_{ih}$  e  $s_{ik}$  pertencem a  $\beta_i(x_{-i})$ , temos que  $u_i(e_i^h, x_{-i}) \geq u_i(e_i^k, x_{-i})$  e  $u_i(e_i^k, x_{-i}) \geq u_i(e_i^h, x_{-i})$ . Logo  $u_i(e_i^h, x_{-i}) = u_i(e_i^k, x_{-i})$ .

Nenhuma estratégia mista  $y_i \in \Delta_{m_i}$  pode ter um ganho maior do que  $s_{ih} \in \beta_i(x_{-i})$ , quando jogada contra  $x \in \Delta$ . De fato, temos que

$$u_i(y_i, x_{-i}) = \sum_{k=1}^{m_i} y_{ik} u_i(e_i^k, x_{-i}) \leq \sum_{k=1}^{m_i} y_{ik} u_i(e_i^h, x_{-i}) = u_i(e_i^h, x_{-i}).$$

Disso obtemos que

$$\beta_i(x_{-i}) = \{s_{ih} \in S_i : u_i(e_i^h, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}) \forall y_i \in \Delta_{m_i}\}.$$

**Definição 2.24.** (*Função Melhor Resposta Mista*) A função melhor resposta mista do jogador  $p_i$  é a aplicação

$$\tilde{\beta}_i : \Delta_{-i} \rightarrow 2^{\Delta_{m_i}}$$

dada por

$$\tilde{\beta}_i(x_{-i}) = \{y_i \in \Delta_{m_i} : u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(z_i, x_{-i}), \text{ para todo } z_i \in \Delta_{m_i}\},$$

onde  $2^{\Delta_{m_i}}$  representa o conjunto das partes de  $\Delta_{m_i}$ . Note que para cada  $x_{-i}$  a função  $\tilde{\beta}_i$  retorna um subconjunto de estratégias de  $\Delta_{m_i}$ . O conjunto  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é denominado conjunto de melhores respostas mistas para o perfil  $x$  do jogador  $p_i$ .

Note que se  $y_i$  e  $z_i$  pertencem a  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$ , então  $u_i(y_i, x_{-i}) = u_i(z_i, x_{-i})$ . De fato, como  $y_i$  pertence a  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$ , segue que  $u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(z_i, x_{-i})$ . Como  $z_i$  está em  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$ , concluímos que  $u_i(z_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i})$ . Portanto  $u_i(y_i, x_{-i}) = u_i(z_i, x_{-i})$ . Note também que

$$u_i(y_i, x_{-i}) = \max_{w_i \in \Delta_{m_i}} u(w_i, x_{-i}),$$

ou seja,  $y_i$  é um argumento que maximiza a aplicação  $w_i \mapsto u_i(w_i, x_{-i})$  definida em  $\Delta_{m_i}$ .

As proposições 2.25, 2.26 e 2.32 a seguir, são enunciadas sem demonstração em (WEIBULL, 1997).

**Proposição 2.25.** *Seja  $x_{-i} \in \Delta_{-i}$ . O conjunto  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é não vazio, compacto e convexo.*

*Demonstração.* A aplicação  $z_i \mapsto u_i(z_i, x_{-i})$  é contínua, pois é uma composição de somas e multiplicações, e é definida no compacto  $\Delta_{m_i}$ , portanto atinge seu máximo em algum  $y_i \in \Delta_{m_i}$ . Consequentemente  $y_i \in \tilde{\beta}_i(x_{-i})$ . Logo  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é não vazio.

Como  $\tilde{\beta}_i(x_{-i}) \subset \Delta_{m_i}$  segue que  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é limitado. Suponha  $(y_i^k) \subset \tilde{\beta}_i(x_{-i})$  tal que  $y_i^k \rightarrow y_i$ . Ora,  $u_i(y_i^k, x_{-i}) = c$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , onde  $c = \max_{z_i \in \Delta_{m_i}} u_i(z_i, x_{-i})$ . Da continuidade da função  $u_i$  temos que

$$u_i(y_i, x_{-i}) = u_i(\lim y_i^k, x_{-i}) = \lim u_i(y_i^k, x_{-i}) = c.$$

Logo  $y_i \in \tilde{\beta}_i(x_{-i})$ , e portanto segue que  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é fechado. Daí  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é compacto.

Para provarmos que  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é convexo, considere  $y_i$  e  $z_i$  em  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . Como  $y_i$  e  $z_i$  estão em  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  segue que  $u_i(y_i, x_{-i}) = u_i(z_i, x_{-i})$ . Logo

$$u_i((1 - \lambda)y_i + \lambda z_i, x_{-i}) = (1 - \lambda)u_i(y_i, x_{-i}) + \lambda u_i(z_i, x_{-i}) = u_i(y_i, x_{-i}).$$

Isso prova que  $(1 - \lambda)y_i + \lambda z_i \in \tilde{\beta}_i(x_{-i})$ . Portanto  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é convexo.  $\square$

**Proposição 2.26.** *Seja  $x \in \Delta$ . Nessas condições,  $y_i \in \tilde{\beta}_i(x_{-i})$  se, e somente se,  $C(y_i) \subset \beta_i(x_{-i})$ .*

*Demonstração.* Vamos provar a primeira implicação pela contrapositiva. Suponha que  $C(y_i)$  não esteja contido em  $\beta_i(x_{-i})$ . Então existe  $s_{ih} \in C(y_i)$  tal que  $s_{ih} \notin \beta_i(x_{-i})$ . Logo existe  $s_{ik}$  tal que  $u_i(e_i^h, x_{-i}) < u_i(e_i^k, x_{-i})$ . Considere  $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{ih}, \dots, y_{ik}, \dots, y_{im_i})$  e defina

$$z_i = (z_{i1}, \dots, z_{ih}, \dots, z_{ik}, \dots, z_{im_i})$$

tal que

$$\begin{cases} z_{ij} = y_{ij}, & j \neq h \text{ e } j \neq k, \\ z_{ij} = 0, & j = h, \\ z_{ij} = y_{ih} + y_{ik}, & j = k. \end{cases}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} u_i(z_i, x_{-i}) - u_i(y_i, x_{-i}) &= (y_{ik} + y_{ih})u_i(e_i^k, x_{-i}) - y_{ih}u_i(e_i^h, x_{-i}) - y_{ik}u_i(e_i^k, x_{-i}) \\ &= y_{ih}u_i(e_i^k, x_{-i}) - y_{ih}u_i(e_i^h, x_{-i}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Logo  $y_i \notin \tilde{\beta}_i(x_{-i})$ . Reciprocamente, suponha que  $C(y_i) \subset \beta_i(x_{-i})$ . Então, para qualquer  $s_{ih}$  em  $C(y_i)$ , temos que  $u_i(e_i^h, x_{-i}) \geq u_i(s_{ih}, x_{-i})$  para todo  $s_{ih} \in \Delta_{m_i}$ , ademais  $u_i(y_i, x_{-i}) = u_i(e_i^h, x_{-i})$ . Assim  $u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(s_{ih}, x_{-i})$  para todo  $s_{ih} \in \Delta_{m_i}$ . Portanto  $y_i \in \tilde{\beta}_i(x_{-i})$ . Isso completa a demonstração.  $\square$

Da proposição anterior segue que

$$\tilde{\beta}_i(x_{-i}) = \{y_i \in \Delta_{m_i} : C(y_i) \subset \beta_i(x_{-i})\},$$

isto é, o conjunto de melhores respostas mistas para um perfil é formado pelas combinações convexas das melhores respostas puras desse mesmo perfil.

**Definição 2.27.** (*Função Melhor Resposta Pura do Jogo*) A função melhor resposta pura do jogo é a aplicação

$$\beta: \Delta \rightarrow 2^S$$

dada por

$$\beta(x) = \beta_1(x_{-1}) \times \cdots \times \beta_n(x_{-n}),$$

onde  $2^S$  representa o conjunto das partes de  $S$ .

Note que  $\beta(x)$  é um subconjunto de  $S$ , pois cada componente  $\beta_i(x_{-i})$  é um subconjunto de  $S_i$ .

A próxima proposição nos fornece uma outra maneira de definir equilíbrio de Nash em estratégias puras.

**Proposição 2.28.** *Um perfil  $s^* = (e_1^{h_1}, \dots, e_n^{h_n}) \in S$  é um equilíbrio de Nash em estratégias puras se, e somente se, é um ponto fixo da aplicação melhor resposta pura do jogo, isto é,  $s^* \in \beta(s^*)$ .*

*Demonstração.* Basta notar que as seguintes afirmações são equivalentes.

- $s^* = (e_1^{h_1}, \dots, e_n^{h_n}) \in \Delta$  é um equilíbrio de Nash;
- $u_i(e_i^{h_i}, s_{-i}^*) \geq u_i(e_i^k, s_{-i}^*)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e para todo  $k \in \{1, \dots, m_i\}$ ;
- $e_i^{h_i} \in \beta_i(s_{-i}^*)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- $s^* \in \beta(s^*)$ .

□

**Definição 2.29.** (*Função Melhor Resposta Mista do Jogo*) A função melhor resposta mista do jogo é a aplicação

$$\tilde{\beta}: \Delta \rightarrow 2^\Delta$$

dada por

$$\tilde{\beta}(x) = \tilde{\beta}_1(x_{-1}) \times \cdots \times \tilde{\beta}_n(x_{-n}),$$

onde  $2^\Delta$  representa o conjunto das partes de  $\Delta$ .

**Observação 2.30.** Note que  $\tilde{\beta}(x)$  é um subconjunto não vazio de  $\Delta$ , pois cada componente  $\tilde{\beta}_i(x_{-i})$  é não vazia e é um subconjunto de  $\Delta_{m_i}$ . Note também que  $\tilde{\beta}(x)$  é um produto cartesiano finito de conjuntos compactos e convexos, e portanto  $\tilde{\beta}(x)$  é compacto e convexo.

A próxima proposição nos fornece uma outra maneira de definir equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

**Proposição 2.31.** *Um perfil  $x \in \Delta$  é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas se, e somente se, é um ponto fixo da aplicação melhor resposta mista do jogo, isto é  $x \in \tilde{\beta}(x)$ .*

*Demonstração.* Basta notar que as seguintes afirmações são equivalentes.

- $x \in \Delta$  é um equilíbrio de Nash;
- $u(x_i, x_{-i}) \geq u(z_i, x_{-i})$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e para todo  $z_i \in \Delta_{m_i}$ ;
- $x_i \in \tilde{\beta}_i(x_{-i})$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- $x \in \tilde{\beta}(x)$ .

□

A próxima proposição diz que se  $x \in \Delta$  é um equilíbrio de Nash, então qualquer estratégia pura, que pertença ao suporte de alguma componente de  $x$ , é uma melhor resposta para o perfil  $x$ .

**Proposição 2.32.** *Se  $x \in \Delta$  é um equilíbrio de Nash, então  $u_i(e_i^h, x_{-i}) = u_i(x)$  para toda estratégia  $s_{ih} \in C(x_i)$  e para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

*Demonstração.* Basta notar que se  $x \in \Delta$  é um equilíbrio de Nash, então  $x \in \tilde{\beta}(x)$ , e então utilizar a Proposição 2.26. □

## 2.6 TEOREMA DO EQUILÍBRIO DE NASH

Nesta secção vamos demonstrar o principal resultado deste capítulo, o famoso teorema do equilíbrio de Nash. Este teorema garante a existência de pelo menos um equilíbrio de Nash para qualquer jogo na forma normal. Para demonstrar o teorema do equilíbrio de Nash vamos utilizar o teorema do ponto fixo de Kakutani. Antes de enunciarmos o teorema de Kakutani vamos definir o que é uma aplicação semicontínua superiormente.

**Definição 2.33.** *Seja  $X$  um subconjunto compacto, convexo e não vazio de  $\mathbb{R}^n$ . Considere uma aplicação*

$$\phi: X \rightarrow 2^X,$$

*tal que  $\phi(x)$  é fechado e  $\phi(x) \subset K$  para todo  $x \in X$ , onde  $K$  é um compacto de  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso, dizemos que  $\phi$  é semicontínua superiormente se as seguintes condições:*

- $x \in X$ ;
- $(x_k) \subset X$ ;
- $x_k \rightarrow x$ ;
- $y_k \in \phi(x_k)$ ;
- $y_k \rightarrow y$ ,

*implicam que  $y \in \phi(x)$ .*

Intuitivamente, nesse contexto, uma aplicação é semicontínua superiormente quando, dados um ponto  $x$  no domínio, uma sequência  $(x_k)$  no domínio que se aproxima de  $x$ , e para cada  $x_k$  tomarmos um ponto  $y_k$  em  $\phi(x_k)$ , obtendo uma sequência  $y_k$ , se a sequência  $y_k$  se aproxima de um ponto  $y$ , então esse ponto  $y$  deve estar em  $\phi(x)$ .

Note que uma aplicação  $\phi$  é semicontínua superiormente se, e somente se, o gráfico de  $\phi$ ,

$$Gr(\phi) = \{(x, y) \in X \times X : y \in \phi(x)\},$$

é um subconjunto fechado de  $X \times X$ . De fato, suponha  $\phi$  semicontínua superiormente. Tome  $(x^k, y^k)$  uma sequência em  $X \times X$  tal que  $(x^k, y^k) \rightarrow (x, y)$ . Temos que  $x^k \rightarrow x$ ,  $y^k \rightarrow y$  e  $y^k \in \phi(x^k)$ , pois  $(x^k, y^k) \rightarrow (x, y)$  e  $(x^k, y^k) \in X \times X$ . Como  $\phi$  é semicontínua superiormente, segue que  $y \in \phi(x)$ . Logo  $(x, y) \in Gr(\phi)$ , e portanto  $Gr(\phi)$  é fechado. Reciprocamente, suponha que  $Gr(\phi)$  seja um subconjunto fechado de  $X \times X$ . Considere  $x \in X$ , uma sequência  $(x^k) \subset X$  tal que  $x^k \rightarrow x$ , e considere  $y^k \in \phi(x^k)$  tal que  $y^k \rightarrow y$ . Temos que  $(x^k, y^k) \rightarrow (x, y)$  e  $(x^k, y^k) \in Gr(\phi)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $Gr(\phi)$  é fechado, segue que  $(x, y) \in Gr(\phi)$ . Portanto  $y \in \phi(x)$ . Isso mostra que  $\phi$  é semicontínua superior.

O teorema do ponto fixo de Kakutani fornece condições suficientes para que uma aplicação semicontínua superiormente tenha pelo menos um ponto fixo. A demonstração do teorema do ponto fixo de Kakutani pode ser encontrada em (FRANKLIN, 1980).

**Teorema 2.34.** (*Ponto Fixo de Kakutani*) *Seja  $X$  um subconjunto compacto, convexo e não vazio de  $\mathbb{R}^n$ . Se*

$$\phi : X \rightarrow 2^X$$

*é semicontínua superiormente e  $\phi(x)$  é não vazio e convexo para todo  $x \in X$ , então  $\phi$  possui ao menos um ponto fixo, isto é, existe  $x^* \in X$  tal que*

$$x^* \in \phi(x^*).$$



Finalmente estamos em condições de provar o teorema do equilíbrio de Nash. A ideia da demonstração consiste em mostrar que a função de melhor resposta mista do jogo  $\tilde{\beta}$  satisfaz as hipóteses do Teorema do ponto fixo de Kakutani. Desse modo teríamos que a função  $\tilde{\beta}$  admitiria um ponto fixo  $x$  e, conseqüentemente,  $x$  seria um equilíbrio de Nash.

**Teorema 2.35.** (*Teorema do Equilíbrio de Nash*) *Todo jogo na forma normal admite pelo menos um equilíbrio de Nash.*

*Demonstração.* Basta verificar que a função melhor resposta  $\tilde{\beta}$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani. De fato:

- O conjunto  $\Delta$  é não vazio, compacto e convexo (Observação 2.18).
- Para todo  $x \in \Delta$  temos que o conjunto  $\tilde{\beta}(x)$  está contido no compacto  $\Delta$ , é não vazio, convexo, fechado e limitado (Observação 2.30).
- Vejamos que a aplicação  $\tilde{\beta}$  é semicontínua superiormente. Considere  $x \in \Delta$ , uma sequência  $(x^k) \subset \Delta$  tal que  $x^k \rightarrow x$  e considere  $y^k \in \tilde{\beta}(x^k)$  tal que  $y^k \rightarrow y$ . Temos que mostrar que  $y \in \tilde{\beta}(x)$ . Vamos argumentar por contradição. Suponha que  $y \notin \tilde{\beta}(x)$ . Então deve existir algum índice  $i$  tal que

$$y_i \notin \tilde{\beta}_i(x_{-i}),$$

isto é,  $y_i$  não é uma melhor resposta para  $x$ . Conseqüentemente, existe  $z_i \in \Delta_{m_i}$  tal que

$$u_i(z_i, x_{-i}) > u_i(y_i, x_{-i}).$$

Logo existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que

$$u_i(z_i, x_{-i}) - \varepsilon > u_i(y_i, x_{-i}) + \varepsilon.$$

Como a função  $u_i$  é contínua,  $y^k \rightarrow y$  e  $x^k \rightarrow x$ , segue que  $u_i(z_i, x_{-i}^k) \rightarrow u_i(z_i, x_{-i})$  e  $u_i(y_i^k, x_{-i}^k) \rightarrow u_i(y_i, x_{-i})$ , então para  $k$  suficientemente grande temos que

$$\begin{aligned} u_i(z_i, x_{-i}^k) &> u_i(z_i, x_{-i}) - \varepsilon \\ &> u_i(y_i, x_{-i}) + \varepsilon \\ &> u_i(y_i^k, x_{-i}^k). \end{aligned}$$

Mas isto é uma contradição, pois supomos que  $y^k \in \tilde{\beta}(x^k)$ . Logo  $y \in \tilde{\beta}(x)$ , e portanto a aplicação  $\tilde{\beta}$  é semicontínua superiormente.

Isso mostra que a função melhor resposta  $\tilde{\beta}$  satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo de Kakutani. Assim concluímos que  $\tilde{\beta}$  tem ao menos um ponto fixo, e portanto o jogo admite ao menos um equilíbrio de Nash.  $\square$

## 2.7 TRANSFORMAÇÕES NAS FUNÇÕES UTILIDADE

Em certos casos é conveniente aplicar certas transformações nas funções utilidade do jogo, a fim de facilitar certas análises. A seguir vamos introduzir dois tipos de transformações, e vamos mostrar que elas não alteram os equilíbrios de Nash e nem as relações de dominância do jogo.

Ao aplicar de uma transformação afim positiva em cada função utilidade  $\pi_i$ , não iremos alterar os equilíbrios de Nash e nem as relações de dominância do jogo. Mais precisamente, considere o jogo  $G = (P, S, \pi)$ . Para cada perfil  $s$  e para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , defina  $\pi'_i(s) = \lambda_i \pi_i(s) + \mu_i$ , onde  $\lambda_i$  é um real positivo e  $\mu_i$  é um real qualquer. Desse modo, obtemos  $G' = (P, S, \pi')$ , onde  $\pi'$  representa a função utilidade do novo jogo, obtida pelas transformações. Denotaremos por  $u'_i$  a função utilidade de estratégias mistas, para o jogador  $p_i$ , no jogo  $G'$ . Vamos mostrar que  $u_i(x_i, y_{-i}) > u_i(z_i, y_{-i})$  se, e somente se,  $u'_i(x_i, y_{-i}) > u'_i(z_i, y_{-i})$ , para qualquer  $y_{-i} \in \Delta_{-i}$  e quaisquer  $x_i, z_i \in \Delta_{m_i}$ . Com efeito, basta notar que pela definição de  $u'_i$  as seguintes desigualdades são todas equivalentes: <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} u_i(x_i, y_{-i}) > u_i(z_i, y_{-i}) \\ \sum y_{1h_1} \dots x_{ih_i} \dots y_{nh_n} \pi_i(s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n}) &> \sum y_{1h_1} \dots z_{ih_i} \dots y_{nh_n} \pi_i(s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n}) \\ \sum y_{1h_1} \dots x_{ih_i} \dots y_{nh_n} [\lambda_i \pi_i(s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n}) + \mu_i] &> \sum y_{1h_1} \dots z_{ih_i} \dots y_{nh_n} [\lambda_i \pi_i(s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n}) + \mu_i] \\ \sum y_{1h_1} \dots x_{ih_i} \dots y_{nh_n} \pi'_i(s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n}) &> \sum y_{1h_1} \dots z_{ih_i} \dots y_{nh_n} \pi'_i(s_{1h_1}, \dots, s_{nh_n}) \\ u'_i(x_i, y_{-i}) &> u'_i(z_i, y_{-i}). \end{aligned}$$

Então podemos concluir que as relações de dominância e equilíbrios de Nash são exatamente os mesmos nos jogos  $G$  e  $G'$ .

As relações de dominância e os equilíbrios de Nash do jogo não são modificados se adicionarmos uma mesma constante a todos os ganhos do jogador  $p_i$ , relacionados com a combinação  $s_{-i}$  de estratégias puras dos demais jogadores. Mais precisamente, sejam  $p_i \in P$ ,  $s_{-i}^* \in S_{-i}$  fixos e considere  $\mu_i \in \mathbb{R}$ . Defina  $\pi'_i: S \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\pi'_i(s) = \pi_i(s) + \mu_i$  se  $s_{-i} = s_{-i}^*$  e  $\pi'_i(s) = \pi_i(s)$  caso contrário. Seja  $u'_i: \Delta_{m_i} \rightarrow \mathbb{R}$  a função utilidade mista associada com  $\pi'_i$ .

<sup>1</sup>Para não sobrecarregar a notação, omitimos os índices dos somatórios nas desigualdades.

Então

$$u_i(x_i, y_{-i}) - u_i(z_i, y_{-i}) = u'_i(x_i, y_{-i}) - u'_i(z_i, y_{-i}),$$

para qualquer  $y_{-i} \in \Delta_{-i}$  e quaisquer  $x_i, z_i \in \Delta_{m_i}$ . Disso segue que as relações de dominância e equilíbrios de Nash não são afetados por tal transformação.

Assim podemos concluir que os números específicos que representam os ganhos dos jogadores não têm muita relevância. A verdadeira importância está na ordem entre eles e o que os mesmos estão representando.

## 2.8 JOGOS COM APENAS DOIS JOGADORES

Nesta secção vamos discutir dois casos especiais de jogos: os jogos com apenas dois jogadores, cada um com apenas duas estratégias puras, e os jogos simétricos.

Em jogos com apenas dois jogadores, podemos convenientemente representar as funções  $\pi_1$  e  $\pi_2$  como uma matriz de dimensão  $m_1 \times m_2$ , denominada matriz de ganhos. Vamos denotar a matriz de ganhos do jogador  $p_1$  por  $A = (a_{hk})$ , onde  $a_{hk} = \pi_1(s_{1h}, s_{2k})$ , e a matriz de ganhos do jogador  $p_2$  por  $B = (b_{hk})$ , onde  $b_{hk} = \pi_2(s_{1h}, s_{2k})$ . No exemplo de comparar moedas temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, temos uma maneira bastante simples para se calcular as utilidades  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \Delta$ , em termos de multiplicação de matrizes:

$$u_1(x) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} x_{2k} a_{hk} = x_1 A x_2^t$$

e

$$u_2(x) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} x_{2k} b_{hk} = x_1 B x_2^t = x_2 B^t x_1^t.$$

No decorrer do texto vamos utilizar o seguinte abuso de notação  $u_1(x) = x_1 A x_2$ , ficando implícito qual vetor deve ser considerado transposto.

### 2.8.1 JOGADORES COM APENAS DUAS ESTRATÉGIAS

No caso de jogos com apenas dois jogadores, cada um com apenas duas estratégias, é possível escrever o conjunto de estratégias mistas de uma maneira mais simples:

$$\Delta_2 = \{(p, 1-p) \in \mathbb{R}^2 : p \in [0, 1]\}.$$

Desse modo, podemos identificar cada estratégia com apenas um número real. Isto possibilita um procedimento prático para determinar todos os equilíbrios de Nash do jogo.

Vejamus isso aplicado no dilema do prisioneiro, batalha dos sexos e comparar moedas, respectivamente.

- **Dilema do prisioneiro:** suponha que jogador  $p_2$  escolha a estratégia  $(q, 1 - q)$ , onde  $q$  pertence ao intervalo  $[0, 1]$ . Vamos determinar o conjunto de melhores respostas para  $p_1$  contra a estratégia  $(q, 1 - q)$ , seja qual for o  $q$ . Lembramos que a tabela de ganhos do jogo é:

$p_1/p_2$	$C$	$N$
$C$	$-5, -5$	$0, -10$
$N$	$-10, 0$	$-1, -1$

Note que

$$u_1(p, 1 - p, q, 1 - q) = -5pq - 10(1 - p)q - (1 - p)(1 - q) = p(4q + 1) - (9q + 1),$$

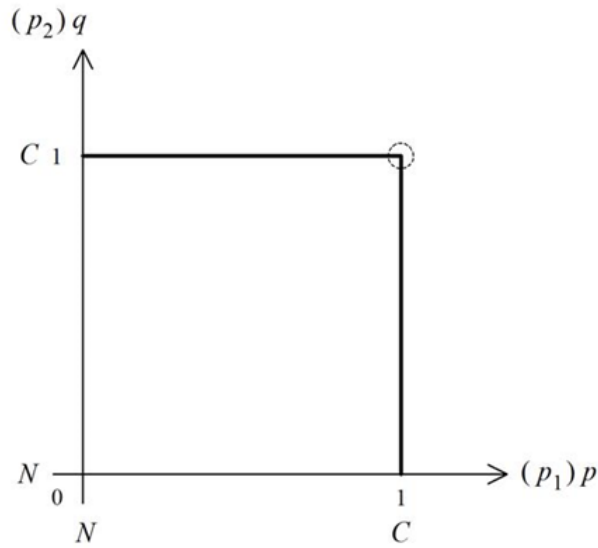
com  $p \in [0, 1]$ . Como  $4q + 1 > 0$  para todo  $q$ , o jogador  $p_1$  deverá sempre jogar  $p = 1$  para maximizar seu ganho. Desse modo, obtemos que  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \{e_1^1\}$ , ou seja, o jogador sempre deverá jogar a estratégia confessar. Agora suponha que o jogador  $p_1$  escolha a estratégia  $(p, 1 - p)$ , onde  $p$  pertence ao intervalo  $[0, 1]$ . Vamos determinar o conjunto de melhores respostas para o  $p_2$  contra  $(p, 1 - p)$ , seja qual for o  $p$ . Note que

$$u_2(p, 1 - p, q, 1 - q) = -5pq - 10p(1 - q) - (1 - p)(1 - q) = q(4p + 1) - (9p + 1),$$

com  $q \in [0, 1]$ . Como  $4p + 1 > 0$  para todo  $p$ , o jogador  $p_2$  deverá sempre jogar  $q = 1$  para maximizar seu ganho. Assim, obtemos  $\tilde{\beta}_2(p, 1 - p) = \{e_2^1\}$ , ou seja, o jogador  $p_2$  sempre deverá jogar a estratégia confessar. Podemos representar as funções melhores respostas graficamente (Figura 3). Em virtude da Proposição 2.31, segue que os únicos equilíbrios de Nash do jogo são os pontos de intersecção de tal gráfico. Logo o único equilíbrio de Nash do jogo é o perfil  $(e_1^1, e_2^1)$ .

- **Batalha dos sexos:** suponha que o jogador  $p_2$  escolha a estratégia  $(q, 1 - q)$ ,  $q \in [0, 1]$ . Vamos determinar o conjunto de melhores respostas para o  $p_1$  contra  $(q, 1 - q)$ , seja qual for o  $q$ . Lembramos que a tabela de ganhos do jogo é:

$h/m$	$F$	$C$
$F$	$10, 5$	$0, 0$
$C$	$0, 0$	$5, 10$



**Figura 3: Gráfico função melhor resposta - dilema do prisioneiro.**

Note que

$$u_1(p, 1-p, q, 1-q) = 10pq + 5(1-p)(1-q) = 5p(3q-1) + 5(1-q),$$

com  $p \in [0, 1]$ . Caso  $q \in [0, \frac{1}{3})$ , então  $3q - 1 < 0$ , logo o jogador  $p_1$  deverá escolher  $p = 0$  para maximizar seu ganho. Portanto se  $q \in [0, \frac{1}{3})$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1-q) = \{e_1^2\}$ . Se  $q = \frac{1}{3}$ , então  $u_1$  não depende de  $p$ , logo o jogador  $p_1$  poderá escolher qualquer valor de  $p$ . Portanto se  $q = \frac{1}{3}$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1-q) = \Delta_2$ . Por fim, se  $q \in (\frac{1}{3}, 1]$ , então  $3q - 1 > 0$ , logo o jogador  $p_1$  deverá escolher  $p = 1$  para obter sua utilidade ótima. Daí se  $q \in (\frac{1}{3}, 1]$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1-q) = \{e_1^1\}$ . Em resumo

$$\tilde{\beta}_1(q, 1-q) = \begin{cases} \{e_1^2\}, & q \in [0, \frac{1}{3}), \\ \Delta_2, & q = \frac{1}{3}, \\ \{e_1^1\}, & q \in (\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

Suponha agora que o jogador  $p_1$  escolha  $(p, 1-p)$ ,  $p \in [0, 1]$ . Analogamente obtemos que

$$\tilde{\beta}_2(p, 1-p) = \begin{cases} \{e_2^2\}, & p \in [0, \frac{2}{3}), \\ \Delta_2, & p = \frac{2}{3}, \\ \{e_2^1\}, & p \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Representando graficamente tais funções (Figura 4), vemos que os únicos equilíbrios de Nash do jogo são  $(e_1^1, e_2^1)$ ,  $(e_1^2, e_2^2)$  e  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

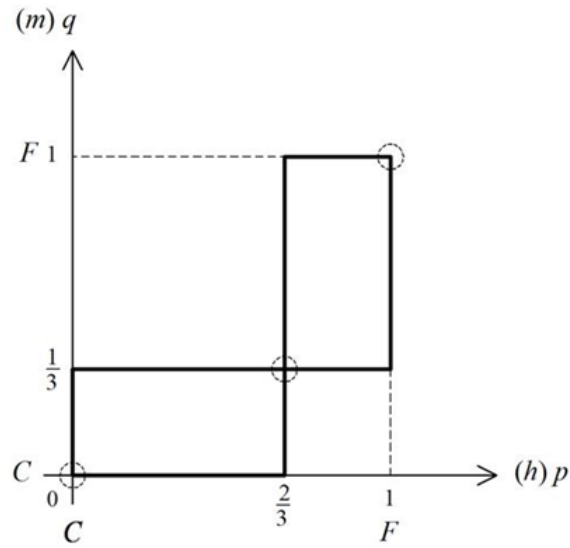


Figura 4: Gráfico função melhor resposta - batalha dos sexos.

- **Comparar moedas:** suponha que o jogador  $p_2$  jogue a estratégia  $(q, 1 - q)$ ,  $q \in [0, 1]$ . Vamos determinar o conjunto de melhores respostas para o  $p_1$  contra  $(q, 1 - q)$ , seja qual for o  $q$ . Lembramos que a tabela de ganhos do jogo é:

$p_1/p_2$	$C$	$K$
$C$	1, -1	-1, 1
$K$	-1, 1	1, -1

Note que

$$u_1(p, 1 - p, q, 1 - q) = pq - (1 - p)q - p(1 - q) + (1 - p)(1 - q) = 2p(2q - 1) + 1 - 2q,$$

com  $p \in [0, 1]$ . Caso  $q \in [0, \frac{1}{2})$ , então  $2q - 1 < 0$ , logo o jogador  $p_1$  deverá escolher  $p = 0$  para maximizar seu ganho. Portanto se  $q \in [0, \frac{1}{2})$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \{e_1^2\}$ . Se  $p = \frac{1}{2}$ , então  $u_1$  não depende de  $p$ , logo o jogador  $p_1$  poderá escolher qualquer valor de  $p$ . Portanto se  $p = \frac{1}{2}$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \Delta_2$ . Por fim, se  $q \in (\frac{1}{2}, 1]$ , então  $2q - 1 > 0$ , portanto o jogador  $p_1$  deverá escolher  $p = 1$  para obter sua utilidade ótima. Daí temos que se  $q \in (\frac{1}{2}, 1]$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \{e_1^1\}$ . Em resumo

$$\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \begin{cases} \{e_1^2\}, & q \in [0, \frac{1}{2}), \\ \Delta_2, & q = \frac{1}{2}, \\ \{e_1^1\}, & q \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Suponha agora que o jogador  $p_1$  escolha  $(p, 1 - p)$ ,  $p \in [0, 1]$ . Analogamente obtemos

que

$$\tilde{\beta}_2(p, 1-p) = \begin{cases} \{e_2^1\}, & p \in [0, \frac{1}{2}), \\ \Delta_2, & p = \frac{1}{2}, \\ \{e_2^2\}, & p \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Representando graficamente tais funções (Figura 5), vemos que o único equilíbrio de Nash do jogo é  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

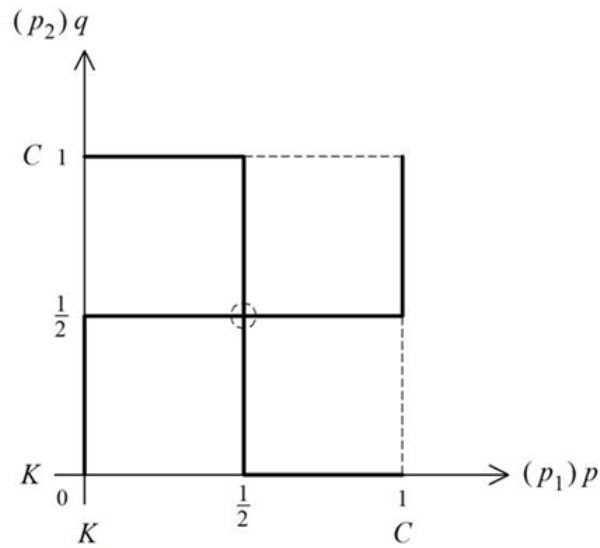


Figura 5: Gráfico função melhor resposta - comparar moedas.

## 2.8.2 JOGOS SIMÉTRICOS

Nesta secção vamos introduzir os jogos simétricos de dois jogadores. Tais jogos terão um importante papel no próximo capítulo.

**Definição 2.36.** (*Jogo Simétrico*) Um jogo  $G = (P, S, \pi)$  é simétrico se  $P = \{p_1, p_2\}$ ,  $S_1 = S_2$  e  $\pi_1(s_1, s_2) = \pi_2(s_2, s_1)$  para todo perfil  $(s_1, s_2) \in S$ .

Vamos denotar o conjunto comum de estratégias puras por  $K = \{s_1, \dots, s_k\}$ , onde  $k$  representa o número de estratégias puras disponíveis para ambos os jogadores. Note que o conjunto de estratégias mistas dos jogadores é  $\Delta_k$ . Como o espaço de estratégias mistas é o mesmo para ambos os jogadores, vamos denotar a estratégia pura  $s_k$  simplesmente por  $e^k$ .

Note que a condição  $\pi_1(s_1, s_2) = \pi_2(s_2, s_1)$  para todo perfil  $(s_1, s_2) \in S$  é equivalente à matriz de ganhos do segundo jogador ser a transposta da matriz de ganhos do primeiro jogador,

isto é,  $B = A^t$ . Daí podemos observar que, dados  $x, y$  em  $\Delta_k$  temos que

$$u_1(x, y) = xAy = yA^t x = yBx = u_2(y, x),$$

isto é, o jogador  $p_1$ , jogando  $x$  contra  $y$ , ganha o mesmo que o jogador  $p_2$ , jogando  $x$  contra  $y$ . Dessa forma, iremos denotar o ganho de um estrategista  $x$  contra um estrategista  $y$  simplesmente por  $u(x, y)$ .

O dilema do prisioneiro é um exemplo de um jogo simétrico, pois neste caso temos que  $S_1 = S_2$  e as matrizes de ganhos dos jogadores  $p_1$  e  $p_2$  são, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e obviamente temos que  $A = B^t$ . Claramente os jogos batalha dos sexos e comparar moedas não são simétricos.

O conjunto de melhores respostas de um jogador qualquer, contra uma estratégia  $y$  em  $\Delta_k$ , será denotado por

$$\beta^*(y) = \{x \in \Delta_k : u(z, y) \leq u(x, y), \text{ para todo } z \in \Delta_k\}.$$

Note que em qualquer jogo simétrico  $\tilde{\beta}_1(y) = \beta^*(y)$  e  $\tilde{\beta}_2(x) = \beta^*(x)$ , qualquer que seja o perfil  $(x, y)$ .

**Definição 2.37.** (*Jogos Duplamente Simétricos*) Um jogo simétrico é chamado de duplamente simétrico se  $A^t = A$ .

Como num jogo simétrico temos que  $A^t = B$ , segue que um jogo é duplamente simétrico se, e só se,  $A = B$ , ou equivalentemente,  $u_1(x, y) = u_2(x, y)$  para todo  $x, y \in \Delta_k$ .

Nenhum dos exemplos anteriores é um jogo duplamente simétrico. A seguir daremos um exemplo deste tipo de jogo.

**Exemplo 2.38.** (*Jogo da Coordenação*) Considere o jogo definido pela seguinte tabela de ganhos (Tabela 8). Este jogo é duplamente simétrico, pois

$p_1/p_2$	$s_1$	$s_2$
$s_1$	2, 2	0, 0
$s_2$	0, 0	1, 1

**Tabela 8:** Tabela de ganhos - jogo da coordenação.



$$A = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos calcular os equilíbrios de Nash deste jogo. Suponha que o jogador  $p_2$  escolha a estratégia  $(q, 1 - q)$ , com  $q \in [0, 1]$ . Vamos determinar o conjunto de melhores respostas para  $p_1$  contra  $(q, 1 - q)$ , seja qual for o  $q$ . Note que

$$u_1(p, 1 - p, q, 1 - q) = 2pq + (1 - p)(1 - q) = p(3q - 1) + 1 - q,$$

com  $p \in [0, 1]$ . Caso  $q \in [0, \frac{1}{3})$ , então  $3q - 1 < 0$ , logo o jogador  $p_1$  deverá escolher  $p = 0$  para maximizar seu ganho. Portanto se  $q \in [0, \frac{1}{3})$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \{e^2\}$ . Se  $p = \frac{1}{3}$ , então  $u_1$  não depende de  $p$ , portanto o jogado  $p_1$  poderá escolher qualquer valor de  $p$ . Logo se  $q = \frac{1}{3}$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \Delta_2$ . Por fim, se  $q \in (\frac{1}{3}, 1]$ , então  $3q - 1 > 0$ , e portanto o jogador  $p_1$  deverá escolher  $p = 1$  para obter sua utilidade ótima. Daí se  $q \in (\frac{1}{3}, 1]$ , então  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \{e^1\}$ . Em resumo temos que

$$\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \begin{cases} \{e^2\}, & q \in [0, \frac{1}{3}), \\ \Delta_2, & q = \frac{1}{3}, \\ \{e^1\}, & q \in (\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

Agora suponha que o jogador  $p_1$  escolha  $(p, 1 - p)$ , com  $p \in [0, 1]$ . Analogamente obtemos que

$$\tilde{\beta}_2(p, 1 - p) = \begin{cases} \{e^2\}, & p \in [0, \frac{1}{3}), \\ \Delta_2, & p = \frac{1}{3}, \\ \{e^1\}, & p \in (\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

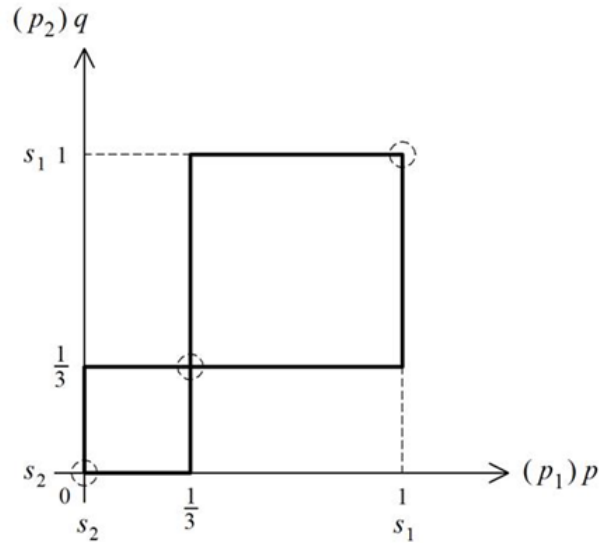
Analisando o gráfico das funções de melhor resposta (Figura 6), conclui-se que o jogo da coordenação tem exatamente os seguintes equilíbrios de Nash  $(e^1, e^2)$ ,  $(e^2, e^2)$  e  $(x, x)$ , onde  $x = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

### 2.8.2.1 EQUILÍBRIO DE NASH SIMÉTRICO

No contexto de jogos simétricos temos que um perfil  $(x, y) \in \Delta$  é um equilíbrio de Nash se, e somente se,  $x \in \beta^*(y)$  e  $y \in \beta^*(x)$ . Em tais jogos podem existir **equilíbrios de Nash simétricos**, os quais terão uma importante interpretação nas discussões do próximo capítulo.

**Definição 2.39.** (*Equilíbrio de Nash Simétrico*) Um equilíbrio de Nash  $(x, y) \in \Delta$  é simétrico se  $x = y$ .

Denotando por  $\Delta^{\text{NE}}$  o conjunto de equilíbrios de Nash e por  $\Delta^{\text{SNE}}$  o conjunto dos



**Figura 6:** Gráfico função melhor resposta - jogo da coordenação.

equilíbrios de Nash simétricos temos que

$$\Delta^{\text{SNE}} = \{(x, y) \in \Delta^{\text{NE}} : x = y\}.$$

Geometricamente podemos interpretar  $\Delta^{\text{SNE}}$  como sendo a diagonal de  $\Delta^{\text{NE}}$ . Equivalentemente,  $\Delta^{\text{SNE}}$  é o conjunto de pontos  $(x, x)$  tais que  $x$  é um ponto fixo da aplicação melhor resposta  $\beta^* : \Delta_k \rightarrow 2^{\Delta_k}$ .

Num jogo simétrico, conforme veremos no próximo exemplo, nem todos os equilíbrios de Nash são simétricos, mas sempre existirá um equilíbrio de Nash simétrico em tal jogo. Para ver isso basta notar que a aplicação  $\beta^*$  satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo de Kakutani. A prova deste fato é análoga à demonstração feita no teorema do equilíbrio de Nash, e então, pelo teorema do ponto fixo de Kakutani, possui ao menos um ponto fixo. A partir destas considerações obtemos a seguinte proposição.

**Proposição 2.40.** *Em qualquer jogo simétrico temos que  $\Delta^{\text{SNE}} \neq \emptyset$ .*

**Exemplo 2.41.** (*Hawk-Dove*) Suponha que dois animais estão disputando comida. Eles podem escolher entre atuar de forma agressiva e lutar pela comida, isto é, jogar hawk ( $H$ ), ou atuar de forma pacífica e repartir igualmente o alimento, isto é, jogar dove ( $D$ ). Considere  $v > 0$  a quantidade de alimento. Se ambos animais decidirem jogar  $D$ , ou seja, dividir igualmente a refeição, então eles irão obter um ganho de  $\frac{v}{2}$ . Caso eles decidam lutar, isto é, que ambos joguem  $H$ , então haverá um custo  $c > 0$  para o jogador que perder a luta. Assim o animal que ganhar a luta irá receber  $v$  e o que perder receberá  $-c$ , e portanto, em média, o ganho deles

será de  $\frac{v-c}{2}$ . Vamos supor que  $v < c$ , isto é, o custo de perder a luta é maior do que o ganho de vencer a luta. Por fim, se um animal joga  $H$  enquanto o outro joga  $D$ , o que jogou  $H$  irá ganhar toda a comida, obtendo um ganho igual  $v$ , e o que jogou  $D$  não ganhará nada. A partir dessas considerações obtemos a seguinte tabela de ganhos (Tabela 9). Nota-se que este é um jogo

$p_1/p_2$	$H$	$D$
$H$	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$v, 0$
$D$	$0, v$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

**Tabela 9: Tabela de ganhos - Hawk-Dove.**

simétrico. Agora vamos calcular os equilíbrios de Nash deste jogo. Suponha que o jogador  $p_2$  escolha a estratégia  $(q, 1 - q)$ , com  $q \in [0, 1]$ . Vamos determinar o conjunto de melhores respostas para o jogador  $p_1$  contra a estratégia  $(q, 1 - q)$ , seja qual for o  $q$ . Note que

$$u_1(p, 1 - p, q, 1 - q) = \frac{p}{2}(v - qc) + \frac{v}{2}(1 - q),$$

com  $p \in [0, 1]$ . Caso  $q < \frac{v}{c}$ , então  $(v - qc) > 0$ , logo o jogador  $p_1$  deverá jogar  $p = 1$  para maximizar seu ganho. Então  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \{e^1\}$ , se  $q \in [0, \frac{v}{c})$ . Se  $q = \frac{v}{c}$ , então  $u_1$  não depende de  $p$ , logo o jogador  $p_1$  poderá escolher qualquer valor para  $p$ . Portanto  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \Delta_2$ , se  $q = \frac{v}{c}$ . Por fim, se  $q > \frac{v}{c}$ , então  $(v - qc) < 0$ , logo o jogador  $p_1$  deverá jogar  $p = 0$  para maximizar seu ganho. Então  $\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \{e^2\}$ , se  $q \in (\frac{v}{c}, 1]$ . Em resumo, temos que

$$\tilde{\beta}_1(q, 1 - q) = \begin{cases} \{e^1\}, & q \in [0, \frac{v}{c}), \\ \Delta_2, & q = \frac{v}{c}, \\ \{e^2\}, & q \in (\frac{v}{c}, 1]. \end{cases}$$

Agora suponha que o jogador  $p_1$  escolha a estratégia  $(p, 1 - p)$ , com  $p \in [0, 1]$ . Vamos determinar o conjuntos de melhores respostas para o jogador  $p_2$  contra a estratégia  $(p, 1 - p)$ , seja qual for o  $p$ . Note que

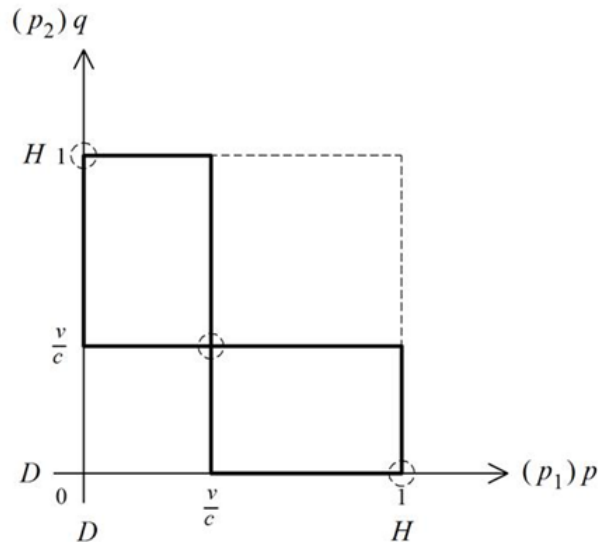
$$u_2(p, 1 - p, q, 1 - q) = \frac{q}{2}(v - pc) + \frac{v}{2}(1 - p),$$

com  $q \in [0, 1]$ . Analogamente obtemos que

$$\tilde{\beta}_2(p, 1 - p) = \begin{cases} \{e^1\}, & p \in [0, \frac{v}{c}), \\ \Delta_2, & p = \frac{v}{c}, \\ \{e^2\}, & p \in (\frac{v}{c}, 1]. \end{cases}$$

Analisando o gráfico das funções de melhor resposta (Figura 7), conclui-se que os únicos

equilíbrios de Nash do jogo são:  $(e^1, e^2)$ ,  $(e^2, e^1)$  e  $(x, x)$ , onde  $x = (\frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c})$ . O presente exemplo mostra que nem todos os equilíbrio de Nash de um jogo simétrico são simétricos.



**Figura 7: Gráfico função melhor resposta - Hawk-Dove.**

### 2.8.2.2 CLASSIFICAÇÃO DE JOGOS SIMÉTRICOS $2 \times 2$

Nesta secção vamos considerar jogos simétricos onde o conjunto comum de estratégias puras contém apenas dois elementos. Há quatro categorias gerais para tais jogos. Para ver isso, vamos considerar  $A'$  uma matriz  $2 \times 2$  qualquer, que representará a matriz de ganhos do jogador  $p_1$ ,

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Vimos na Secção 2.7 que se adicionarmos uma constante a todos os ganhos de um jogador, relacionados a uma certa combinação  $s_{-i} \in S_{-i}$  dos demais jogadores, não iremos alterar os equilíbrios de Nash do jogo. Em jogos de apenas dois jogadores, essa transformação é o mesmo que adicionar uma mesma constante em uma coluna da matriz de ganhos do jogador  $p_1$ , ou em uma linha da matriz de ganhos do jogador  $p_2$ . Dessa forma podemos substituir a matriz  $A'$  pela seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{21} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos identificar qualquer jogo simétrico de dois jogadores, cada um com apenas duas estratégias, por um par ordenado  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ . Vamos supor que  $a_{11} \neq a_{21}$  e  $a_{12} \neq a_{22}$ .

Logo  $a_1$  e  $a_2$  serão diferentes de zero. Note que

$$u(p, 1-p, 1, 1-q) = p(q(a_1 + a_2) - a_2) + a_2(1-q),$$

onde  $p$  e  $q$  pertencem ao intervalo  $[0, 1]$ . A partir disso podemos classificar tais jogos em quatro categorias.

- **Categoria 1:** Caso  $a_2 < 0 < a_1$ . Um protótipo desta categoria é o dilema do prisioneiro. Vamos calcular os equilíbrios de Nash desta categoria. Note que  $q(a_1 + a_2) - a_2 > 0$  para todo  $q$ , então para maximizar  $u$  o estrategista  $(p, 1-p)$  deverá escolher  $p = 1$ , ou seja, a melhor resposta para a estratégia  $(q, 1-q)$  é  $e^1$ , seja qual for o  $q$ . A partir disso segue que  $\Delta^{\text{NE}} = \Delta^{\text{SNE}} = \{(e^1, e^1)\}$ .
- **Categoria 2:** Caso  $a_1 > 0$  e  $a_2 > 0$ . Um protótipo desta categoria é o jogo da coordenação. Vamos calcular os equilíbrios de Nash desta categoria. Note que se  $q < \frac{a_2}{a_1+a_2}$ , então  $(q(a_1 + a_2) - a_2) < 0$ , se  $q = \frac{a_2}{a_1+a_2}$ , então  $(q(a_1 + a_2) - a_2) = 0$ , e se  $q > \frac{a_2}{a_1+a_2}$ , então  $(q(a_1 + a_2) - a_2) > 0$ . Logo

$$\beta^*(q, 1-q) = \begin{cases} \{e^2\}, & q < \frac{a_2}{a_1+a_2}, \\ \Delta_2, & q = \frac{a_2}{a_1+a_2}, \\ \{e^1\}, & q > \frac{a_2}{a_1+a_2}. \end{cases}$$

A partir disso temos que  $\Delta^{\text{NE}} = \Delta^{\text{SNE}} = \{(e^1, e^1), (e^2, e^2), (x, x)\}$ , onde  $x = (\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2})$ .

- **Categoria 3:** Caso  $a_1 < 0$  e  $a_2 < 0$ . Um protótipo desta categoria é o jogo Hawk-Dove. Vamos calcular os equilíbrios de Nash desta categoria. Note que se  $q < \frac{a_2}{a_1+a_2}$ , então  $(q(a_1 + a_2) - a_2) > 0$ , se  $q = \frac{a_2}{a_1+a_2}$ , então  $(q(a_1 + a_2) - a_2) = 0$ , e se  $q > \frac{a_2}{a_1+a_2}$ , então  $(q(a_1 + a_2) - a_2) < 0$ . Logo

$$\beta^*(q, 1-q) = \begin{cases} \{e^1\}, & q < \frac{a_2}{a_1+a_2}, \\ \Delta_2, & q = \frac{a_2}{a_1+a_2}, \\ \{e^2\}, & q > \frac{a_2}{a_1+a_2}. \end{cases}$$

A partir disso temos que  $\Delta^{\text{NE}} = \{(e^1, e^2), (e^2, e^1), (x, x)\}$  e  $\Delta^{\text{SNE}} = \{(x, x)\}$ , onde  $x = (\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2})$ .

- **Categoria 4<sup>2</sup>:** Caso  $a_1 < 0 < a_2$ . Analogamente ao que foi feito na primeira categoria, segue que  $\Delta^{\text{NE}} = \Delta^{\text{SNE}} = \{(e^2, e^2)\}$ .

<sup>2</sup>Note que um jogo da categoria 4 é equivalente à um jogo da primeira categoria.

### 3 ESTRATÉGIA EVOLUTIVAMENTE ESTÁVEL

No capítulo anterior estudamos jogos sob o ponto de vista da teoria econômica de jogos, onde o resultado e os ganhos dependiam das escolhas dos jogadores, feitas de forma racional. Neste contexto o conceito de equilíbrio de Nash é a principal noção de solução. No presente capítulo faremos uma introdução à teoria evolutiva de Jogos. O conceito chave em tal teoria é o conceito de **estratégia evolutivamente estável** (ESS). No decorrer deste capítulo iremos definir e provar algumas de suas propriedades. Neste capítulo seguimos as ideias presentes em (GINTIS, 2009) e (WEIBULL, 1997).

#### 3.1 PRELIMINARES

No presente capítulo iremos focar a discussão num jogo simétrico de dois jogadores. O conjunto de estratégias puras será denotado por  $K = \{s_1, \dots, s_k\}$ , o conjunto de estratégias mistas associado por  $\Delta_k = \{x \in \mathbb{R}^k : x_i \geq 0, \sum x_i = 1\}$  e o espaço de estratégias mistas por  $\Delta_k^2$ . O ganho de uma estratégia  $x$  contra uma estratégia  $y$  é dado por  $u(x, y) = xAy$ , onde  $A$  é a matriz de ganhos do jogador  $p_1$ . O conjunto de melhores respostas contra  $y$  será denotado por  $\beta^*(y) = \{x \in \Delta_k : u(z, y) \leq u(x, y), \text{ para todo } z \in \Delta_k\}$ .

Para introduzir as ideias suponha uma grande população de pássaros, onde no decorrer do tempo os integrantes dessa população se encontram aleatoriamente em pares e disputam o jogo simétrico Hawk-Dove. Suponha que todos os pássaros sejam programados para jogar uma estratégia  $x \in \Delta_2$ . Uma pergunta natural seria: qual a melhor estratégia  $x$  para todos os integrantes da população? À primeira vista, poderíamos pensar que o equilíbrio de Nash simétrico seria um bom candidato a tal estratégia, já que se  $(x, x) \in \Delta^{\text{SNE}}$ , então  $u(x, x) \geq u(y, x)$ , para toda estratégia  $y \in \Delta_k$ , mas, na próxima secção, veremos que precisamos exigir um pouco mais. Um dos objetivos da teoria evolutiva de jogos é determinar o ponto final da evolução da população. Um conceito que aborda essa ideia é a noção de ESS.

Agora, daremos uma ideia informal sobre o conceito de ESS. Suponha uma população de jogadores, podendo ou não ser racionais, onde todos os integrantes dessa população são

programados para jogar  $x$ , onde  $x$  pode ser pura ou mista. Neste caso, dizemos que o estado da população é  $x$ . Considere que os indivíduos da população se encontram aleatoriamente em pares e joguem um jogo simétrico de dois jogadores. Agora, introduza uma pequena população de mutantes que são programados para jogar alguma outra estratégia. A estratégia  $x$  é dita evolutivamente estável se é resistente contra pequenas invasões, isto é, o ganho de quem joga  $x$  é melhor do que o ganho de quem joga a estratégia mutante, quando o estado da população é  $x$ .

Voltando ao exemplo da população de pássaros, suponha que todos os integrantes sejam programados para jogar  $D$ , isto é, o estado da população é  $D$ . Será que  $D$  é uma estratégia evolutivamente estável, isto é, resistente contra pequenas invasões? Considere que uma pequena proporção  $\varepsilon$  de mutantes, que joguem  $H$ , apareça na população. Então a proporção de jogadores do tipo  $D$ , na nova composição da população, é dada por  $(1 - \varepsilon)$  e a proporção de jogadores do tipo  $H$  é  $\varepsilon$ . Se  $\varepsilon$  for pequeno, então a chance de um jogador do tipo  $D$  ou  $H$  encontrar um jogador do tipo  $H$  é baixa, e como  $u(H, D) > u(D, D)$ , podemos concluir que uma população composta por  $D$  está sujeita a uma invasão de mutantes que jogam  $H$ , pois, neste estado da população, jogar  $H$  é melhor do que jogar  $D$ . Em outras palavras, é vantajoso jogar  $H$  numa população em que sua grande maioria é composta por  $D$ . A partir dessas considerações podemos concluir que  $D$  não é um bom candidato a ESS.

Vale ressaltar que o conceito de ESS não explica como a população evolui até tal estratégia. No entanto, tal estratégia é resistente contra pequenas invasões, portanto seria uma boa escolha considerá-la como ponto final da evolução da população. Na seguinte secção definiremos formalmente tal conceito.

### 3.2 DEFINIÇÃO DE ESTRATÉGIA EVOLUTIVAMENTE ESTÁVEL

Suponha que um pequeno grupo de mutantes apareça em uma grande população, onde todos são programados para jogar a mesma estratégia  $x \in \Delta_k$ , isto é, o estado da população é  $x$ . Admita que os mutantes são programados para jogar alguma outra estratégia  $y \in \Delta_k$ . Considere que a proporção de mutantes na população é  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Suponha que os jogadores se encontrem aleatoriamente em pares e disputem o jogo simétrico. A probabilidade de um jogador encontrar um oponente mutante é  $\varepsilon$ , e a probabilidade de encontrar um oponente que joga  $x$  é  $(1 - \varepsilon)$ . Desse modo, o novo estado da população é  $(1 - \varepsilon)x + \varepsilon y$ . Logo, os ganhos esperados dos jogadores dos tipos  $x$  e  $y$  quando o estado da população é  $(1 - \varepsilon)x + \varepsilon y$ , são, respectivamente,

$$u(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) \quad \text{e} \quad u(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y).$$

Intuitivamente uma estratégia mutante é *prejudicada* pela seleção natural se no estado atual da população o seu ganho é menor do que o ganho da estratégia  $x$ , isto é,

$$u(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) > u(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y).$$

Um estratégia é dita evolutivamente estável se é resistente contra pequenas invasões de estratégias mutantes. Formalmente temos a seguinte definição.

**Definição 3.1.** Dizemos que  $x \in \Delta_k$  é uma ESS se para toda estratégia  $y \in \Delta_k$ , com  $y \neq x$ , existe  $\varepsilon_y \in (0, 1)$  tal que a desigualdade

$$u(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) > u(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) \quad (1)$$

é válida para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ .

Denote por  $\Delta^{\text{ESS}}$  o conjunto de estratégias evolutivamente estáveis do jogo. Agora veremos uma importante proposição, que será útil para determinar todas as estratégias evolutivamente estáveis de um jogo. Esta proposição é citada sem demonstração formal em (WEIBULL, 1997).

**Proposição 3.2.** Uma estratégia  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$  se, e somente se, as seguintes condições são válidas:

$$u(y, x) \leq u(x, x), \quad \forall y \in \Delta_k; \quad (2)$$

$$u(y, x) = u(x, x) \Rightarrow u(x, y) > u(y, y), \quad \forall y \in \Delta, y \neq x. \quad (3)$$

*Demonstração.* Suponha  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Logo para toda estratégia  $y \neq x$ , existe  $\varepsilon_y \in (0, 1)$  tal que

$$u(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) > u(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y)$$

para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ . Note que a desigualdade anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$(1 - \varepsilon)u(x, x) + \varepsilon u(x, y) > (1 - \varepsilon)u(y, x) + \varepsilon u(y, y). \quad (4)$$

Fazendo  $\varepsilon$  tender a zero pela direita (podemos fazer isso, pois a desigualdade é válida para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ ), obtemos que  $u(x, x) \geq u(y, x)$ . Caso  $u(x, x) = u(y, x)$ , pela desigualdade (4) segue que

$$u(x, y) > u(y, y).$$

Reciprocamente, suponha que as condições (2) e (3) sejam satisfeitas. Se  $u(y, x) = u(x, x)$ , então  $u(x, y) > u(y, y)$  e portanto, escolhendo qualquer  $\varepsilon_y$  em  $(0, 1)$ , temos que

$$(1 - \varepsilon)u(x, x) + \varepsilon u(x, y) > (1 - \varepsilon)u(y, x) + \varepsilon u(y, y)$$



para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ . Caso  $u(x, x) - u(y, x) > 0$ , então deve existir um  $\varepsilon_y \in (0, 1)$  tal que

$$(1 - \varepsilon)(u(x, x) - u(y, x)) + \varepsilon(u(x, y) - u(y, y)) > 0 \quad (5)$$

para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ , independentemente do sinal de  $u(x, y) - u(y, y)$ <sup>1</sup>. Como (4) é equivalente a (5) concluimos que  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ .  $\square$

Note que a condição (2), conhecida como **condição de equilíbrio**, é equivalente a dizer que o perfil  $(x, x)$  é um equilíbrio de Nash simétrico. A condição (3), conhecida como **condição de estabilidade**, nos diz que se  $y$  é uma melhor resposta alternativa para  $x$ , então jogar  $x$  em um ambiente  $y$  é melhor do que jogar  $y$  nesse mesmo ambiente. A partir dessas considerações podemos escrever

$$\Delta^{\text{ESS}} = \{x \in \Delta_k : (x, x) \in \Delta^{\text{SNE}}, u(x, y) > u(y, y) \text{ para todo } y \in \beta^*(x), y \neq x\}.$$

Assim  $x$  é uma ESS se  $(x, x)$  é um equilíbrio de Nash simétrico resistente a melhores respostas alternativas.

**Definição 3.3.** Considere  $(x, x) \in \Delta^{\text{SNE}}$ . Dizemos que  $(x, x)$  é um equilíbrio de Nash simétrico estrito, se

$$u(x, x) > u(y, x)$$

para todo  $y \in \Delta_k$  com  $y \neq x$ .

Segue imediatamente da Proposição 3.2 que se  $(x, x)$  é um equilíbrio de Nash estrito, então  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ .

A Proposição 3.2 nos fornece um meio para determinar o conjunto  $\Delta^{\text{ESS}}$  de um jogo. Basta determinarmos todos os equilíbrios de Nash simétricos e verificar quais deles satisfazem a condição de estabilidade. Vamos determinar as estratégias evolutivamente estáveis dos jogos dilema do prisioneiro, jogo da coordenação e Hawk-Dove, respectivamente.

- **Dilema do prisioneiro:** Pela Proposição 3.2, segue que a única candidata a ESS é a estratégia  $e^1$ , pois o único equilíbrio de Nash simétrico do jogo é  $x = (e^1, e^1)$ . Vamos mostrar que  $x$  é estrito. Com efeito, suponha  $y = (y_1, y_2) \in \Delta_2$  com  $y \neq x$ . Como  $y \neq e^1$ , segue que  $y_2 > 0$ . Então

$$u(x) = -5 > -5y_1 - 10y_2 = u(y, e^1).$$

<sup>1</sup>Sejam  $a$  e  $b$  números reais com  $a > 0$ . Então, pela continuidade da função  $f(\lambda) = (1 - \lambda)a + \lambda b$ , como  $f(0) = a$ , existe um  $\varepsilon \in (0, 1)$  tal que  $(1 - \lambda)a + \lambda b > 0$  para todo  $\lambda \in (0, \varepsilon)$

Logo  $x$  é estrito, e portanto  $e^1 \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Em resumo  $\Delta^{\text{ESS}} = \{e^1\}$ .

- **Jogo da coordenação:** No jogo da coordenação temos que as únicas candidatas a ESS são  $e^1$ ,  $e^2$  e  $x$ , onde  $x = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , pois os únicos equilíbrios de Nash simétricos do jogo são  $(e^1, e^1)$ ,  $(e^2, e^2)$  e  $(x, x)$ . Note que o perfil  $(e^1, e^1)$  é um equilíbrio de Nash simétrico estrito. De fato, considere  $y = (y_1, y_2) \in \Delta_2$ , com  $y \neq e^1$ . Como  $y \neq e^1$ , segue que  $0 \leq y_1 < 1$ . Então

$$u(e^1, e^1) = 2 > 2y_1 = u(y, e^1).$$

Logo  $(e^1, e^1)$  é estrito, portanto  $e^1 \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Analogamente prova-se que o perfil  $(e^2, e^2)$  é um equilíbrio de Nash simétrico estrito, portanto  $e^2 \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Agora vamos mostrar que  $x \notin \Delta^{\text{ESS}}$ . Com efeito, note que

$$u(x, x) = \frac{2}{3} = u(e^1, x)$$

e

$$u(x, e^1) = \frac{2}{3} < 2 = u(e^1, e^1).$$

Logo a condição de estabilidade não é satisfeita, e portanto  $x$  não é uma ESS. Em resumo  $\Delta^{\text{ESS}} = \{e^1, e^2\}$ .

- **Hawk-Dove:** No jogo Hawk-Dove, a única candidata a ESS é  $x = (\frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c})$ , pois o único equilíbrio de Nash simétrico do jogo é  $(x, x)$ . Vamos mostrar que  $x$  é uma ESS. Para quaisquer  $x, y \in \Delta_k$ , temos que

$$u(x - y, y) = \frac{c}{2}(x_1 - y_1) \left( \frac{v}{c} - y_1 \right).$$

Logo, para  $x = (\frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c})$  e  $y \neq x$ , obtemos

$$u(x - y, y) = \frac{c}{2} \left( \frac{v}{c} - y_1 \right)^2 > 0.$$

Portanto a estratégia  $x$  satisfaz a condição de estabilidade e portanto  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Em resumo  $\Delta^{\text{ESS}} = \{x\}$ .

O próximo exemplo mostra que o conjunto  $\Delta^{\text{ESS}}$  de um jogo pode ser vazio. Neste exemplo vamos mostrar que o jogo pedra-papel-tesoura possui um único equilíbrio de Nash simétrico  $(x, x)$ , e em seguida mostraremos que  $x$  não é uma ESS. A unicidade de tal equilíbrio é comentada em (WEIBULL, 1997), porém sem todos os detalhes.

**Exemplo 3.4.** (*Pedra-Papel-Tesoura*) Neste exemplo, vamos introduzir o famoso jogo pedra, papel e tesoura. No jogo, os jogadores devem simultaneamente esticar a mão, na qual cada um

formou um símbolo (pedra ( $R$ ), papel ( $P$ ) ou tesoura ( $S$ )). Em seguida os jogadores comparam os símbolos e decidem o resultado da seguinte maneira:

- Empate, se os símbolos são iguais;
- $R$  ganha de  $S$ ;
- $S$  ganha de  $P$ ;
- $P$  ganha de  $R$ .

Vamos sintetizar toda essa informação na seguinte tabela de ganhos (Tabela 10), utilizando os números 1, 0 e  $-1$  para representar, respectivamente, o ganho de quem vence, empate ou perde. Nota-se que este jogo é simétrico e que a matriz de ganhos do primeiro jogador é

$p_1/p_2$	$R$	$P$	$S$
$R$	0,0	-1,1	1,0
$P$	1,-1	0,0	-1,1
$S$	-1,1	1,-1	0,0

**Tabela 10: Tabela de ganhos - pedra-papel-tesoura.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos mostrar que se  $(x, y) \in \Delta_3^2$  é um equilíbrio de Nash, então  $x$  e  $y$  devem ser estratégias completamente mistas. Vamos dividir a prova em dois passos: primeiro mostraremos que o suporte de uma estratégia não pode ser formado por uma única estratégia, e depois mostraremos que o suporte não pode ser formado por exatamente duas estratégias.

- Caso o suporte seja unitário. Suponha  $C(x) = \{e^1\}$ , isto é, o jogador  $p_1$  irá jogar  $R$ . Então o jogador  $p_2$  estaria motivado a jogar  $y = e^2$ , isto é, jogar  $P$ , e portanto  $(x, y)$  não poderia ser um equilíbrio de Nash. Analogamente é possível mostrar que não acontecem os seguintes casos:  $c(x) = \{e^2\}$ ,  $c(x) = \{e^3\}$ ,  $c(y) = \{e^1\}$ ,  $c(y) = \{e^2\}$ ,  $c(y) = \{e^3\}$ . Isso mostra que o jogo não admite equilíbrios de Nash em estratégias puras.
- Caso o suporte seja formado por exatamente dois elementos. Suponha  $C(x) = \{e^1, e^2\}$ , isto é,  $x = (x_1, x_2, 0)$ , com  $x_1$  e  $x_2$  estritamente positivos. Vamos mostrar que se  $(x, y)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , é um equilíbrio de Nash, então  $y_1 = 0$ . De fato, suponha  $y_1 > 0$  e defina

a estratégia  $z = (0, y_1 + y_2, y_3)$ . Note que

$$u(z, x) = x_1(y_1 + y_2 - y_3) + x_2y_3, \quad u(y, x) = x_1y_2 - x_2y_1 + y_3(x_2 - x_1).$$

É possível concluir que  $u(z, x) > u(y, x)$ , e portanto  $(x, y)$  não seria um equilíbrio de Nash. Logo  $y_1 = 0$ , e portanto  $y = (0, y_2, y_3)$ . Agora vamos mostrar que  $x_2$  não pode ser estritamente positivo. De fato, defina  $w = (x_1, 0, x_2)$ . Note que

$$u(x, y) = -x_1y_2 + y_3(x_1 - x_2), \quad u(w, y) = x_1y_3 + y_2(x_2 - x_1).$$

É possível concluir que  $u(w, y) > u(x, y)$ , e portanto  $(x, y)$  não seria um equilíbrio de Nash. Logo  $x_1 = 0$ . Isso mostra que se  $(x, y)$  é um equilíbrio de Nash, então  $C(x)$  não pode ser igual a  $\{e^1, e^2\}$ . Analogamente é possível mostrar que não acontecem os seguintes casos:  $C(x) = \{e^1, e^3\}$ ,  $C(x) = \{e^2, e^3\}$ ,  $C(y) = \{e^1, e^2\}$ ,  $C(y) = \{e^1, e^3\}$ ,  $C(y) = \{e^2, e^3\}$ .

Assim, concluímos que se  $(x, y)$  é um equilíbrio de Nash, então  $C(x) = C(y) = \{e^1, e^2, e^3\}$ . Agora vamos supor que o perfil  $(x, y) = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$  seja um equilíbrio de Nash (podemos fazer tal suposição, pois existe ao menos um equilíbrio). Pelas considerações anteriores temos que  $C(x) = C(y) = \{e^1, e^2, e^3\}$ . Utilizando a Proposição 2.32, temos que

$$u(x, y) = u(x, e^1) = u(x, e^2) = u(x, e^3).$$

Isso implica que

$$x_2 - x_3 = x_3 - x_1 = x_1 - x_2.$$

Logo  $x_1 = x_2 = x_3$ , e como  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , segue que  $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Analogamente mostra-se que  $y = x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Então podemos concluir que  $\Delta^{\text{NE}} = \Delta^{\text{SNE}} = \{(x, x)\}$ , onde  $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Como o único equilíbrio de Nash simétrico do jogo é o perfil  $(x, x)$ , onde  $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , segue que a única estratégia candidata a ESS do jogo é  $x$ . Vamos mostrar que  $x$  não é uma ESS. De fato, como  $C(x) = \{e^1, e^2, e^3\}$ , segue que  $u(x, x) = u(y, x) = 0$ , para toda estratégia  $y \neq x$ . Considere  $y = e^1$ . Então temos que  $u(y, y) = 0 = u(x, y)$ . Isso mostra que  $x$  não satisfaz a condição de estabilidade. Logo  $\Delta^{\text{ESS}} = \emptyset$ .

### 3.3 JOGOS SIMÉTRICOS $2 \times 2$

Na secção 2.7 vimos que equilíbrios de Nash são invariantes sobre certas transformações nas funções utilidade. Como essas transformações preservam a ordem das funções utilidade, segue que as estratégias evolutivamente estáveis também são invariantes sobre tais transformações. Desse modo, podemos supor, sem perda de generalidade, que a matriz do

primeiro jogador é

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Estamos interessados no caso em que  $a_1 a_2 \neq 0$ . Vamos utilizar o mesmo esquema de classificação da subsecção 2.8.2.2.

- **Categorias 1 e 4:** Se  $a_1$  e  $a_2$  tem sinais opostos, então temos uma variação do dilema do prisioneiro. Jogos nestas categorias possuem exatamente um equilíbrio de Nash simétrico estrito. Então  $\Delta^{\text{ESS}} = \{e^1\}$ , se  $a_2 < 0$ , e  $\Delta^{\text{ESS}} = \{e^2\}$ , se  $a_1 < 0$ .
- **Categoria 2:** Se  $a_1$  e  $a_2$  são positivos, então temos uma variação do jogo da coordenação. Jogos nesta categoria possuem o seguinte conjunto de equilíbrios de Nash simétricos  $\Delta^{\text{SNE}} = \{(e^1, e^1), (e^2, e^2), (x, x)\}$ , onde  $x = (\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2})$ . Como  $(e^1, e^1)$  e  $(e^2, e^2)$  são estritos, segue que  $e^1$  e  $e^2$  são estratégias evolutivamente estáveis. Entretanto,  $x \notin \Delta^{\text{ESS}}$ , pois

$$u(x, x) = u(e^1, x)$$

e

$$u(e^1, e^1) = a_1 > \left( \frac{a_2}{a_1+a_2} \right) = u(x, e^1).$$

Logo a condição de equilíbrio não é satisfeita. Em resumo,  $\Delta^{\text{ESS}} = \{e^1, e^2\}$  para todos os jogos nesta categoria.

- **Categoria 3:** Se  $a_1$  e  $a_2$  são negativos, então temos uma variação do jogo Hawk-Dove. Jogos nesta categoria possuem exatamente um equilíbrio de Nash simétrico  $(x, x)$ , onde  $x = (\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2})$ . Vamos mostrar que  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ . De fato, para qualquer  $y \in \Delta_k$ , com  $y \neq x$ , temos que  $u(x, x) = u(y, x)$  e

$$u(y, y) = y_1^2 a_1 + y_2^2 a_2 < \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = u(x, x).$$

Portanto  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Em resumo,  $\Delta^{\text{ESS}} = \{x\}$  para todos os jogos nesta categoria.

### 3.4 PROPRIEDADES DO CONJUNTO $\Delta^{\text{ESS}}$

Nesta secção vamos demonstrar algumas propriedades do conjunto  $\Delta^{\text{ESS}}$ .

**Proposição 3.5.** *Se  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$  e  $C(y) \subset C(x)$  para alguma estratégia  $y \in \Delta_k$ ,  $y \neq x$ , então  $(y, y) \notin \Delta^{\text{SNE}}$ .*

*Demonstração.* Suponha  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$  e  $C(y) \subset C(x)$  para alguma estratégia  $y \in \Delta_k$ , com  $y \neq x$ . Como  $(x, x)$  é um equilíbrio de Nash e  $C(y) \subset C(x)$ , da Proposição ??, segue que as utilidades  $u(x, x)$  e  $u(y, x)$  são iguais. Da condição de estabilidade obtemos que  $u(y, y) < u(x, y)$ . Logo  $(y, y)$  não pode ser um equilíbrio de Nash simétrico.  $\square$

**Proposição 3.6.** *O conjunto  $\Delta^{\text{ESS}}$  é finito. Se  $x \in \Delta^{\text{ESS}} \cap \text{int}(\Delta_k)$ , então  $\Delta^{\text{ESS}} = \{x\}$ .*

*Demonstração.* Da proposição anterior, podemos concluir que o suporte de uma ESS não pode conter o suporte de outra ESS. Daí concluímos que se  $x \in \Delta^{\text{ESS}} \cap \text{int}(\Delta_k)$ , então  $x$  é a única ESS do jogo, já que  $C(x) = K$ . Ademais, como existem apenas um número finito de suportes, já que o conjunto  $K$  é finito, segue que a quantidade de estratégias evolutivamente estáveis em um jogo é finita.  $\square$

**Proposição 3.7.** *Se  $x \in \Delta_k$  é fracamente dominada, então  $x \notin \Delta^{\text{ESS}}$ .*

*Demonstração.* Suponha  $x$  fracamente dominada por  $y$ . Logo  $u(x, y) \leq u(y, y)$ . Da condição de estabilidade concluímos que  $x$  não pode ser uma ESS.  $\square$

### 3.5 CARACTERIZAÇÕES DA ESS

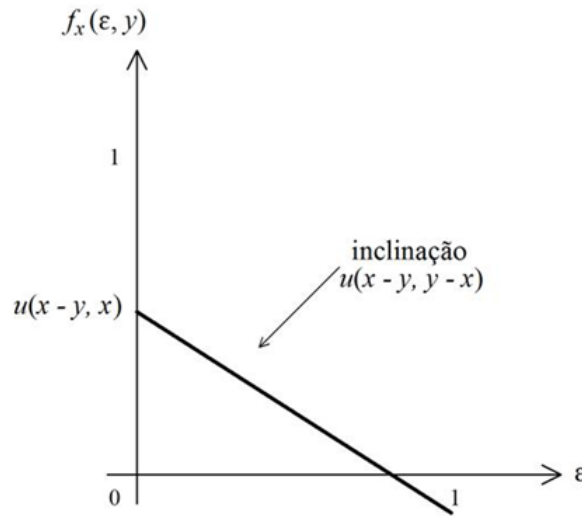
A Proposição 3.2 fornece uma caracterização alternativa para a definição de estratégias evolutivamente estáveis. Nesta secção veremos mais duas caracterizações: a **barreira de invasão uniforme** e a **superioridade local**. Para tal fim vamos definir uma importante função. Considere uma estratégia  $x$  e defina  $f_x: [0, 1] \times \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f_x(\varepsilon, y) = u(x - y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) = u(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) - u(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y). \quad (6)$$

Para  $x$  ser uma ESS é necessário e suficiente que a função  $f_x(\varepsilon, y)$  seja positiva para todo  $y \neq x$  e todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Note que podemos escrever

$$f_x(\varepsilon, y) = u(x - y, x) + \varepsilon u(x - y, y - x). \quad (7)$$

Assim, para  $x$  e  $y$  fixados, a função  $f_x$  é afim em  $\varepsilon$ , com inclinação  $u(x - y, y - x)$  e intercepta o eixo vertical em  $u(x - y, x)$ . Dessa forma, a condição de equilíbrio (2) é equivalente a afirmar que o gráfico da função  $f_x$  nunca intercepta o eixo vertical num ponto negativo, e a condição de estabilidade (3) é equivalente a afirmar que a função  $f_x$  tem inclinação positiva caso o gráfico corte a origem. Desse modo, se essas duas condições forem satisfeitas, existirá um  $\varepsilon_y \in (0, 1)$  tal que  $f_x(\varepsilon, y) > 0$  para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ , isto é,  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Veja a representação gráfica da função na Figura 8.



**Figura 8:** Gráfico da função  $f_x(\varepsilon, y)$ .

### 3.5.1 BARREIRA DE INVASÃO UNIFORME

Se  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ , então para cada  $y \neq x$  deve existir algum  $\varepsilon_y \in (0, 1)$  tal que  $x$  resista à invasão de  $y$  sempre que a frequência da população mutante for menor do que  $\varepsilon_y$ . Nesse sentido podemos considerar  $\varepsilon_y$  como sendo uma barreira de invasão para estratégia  $y$ . Uma pergunta natural é se existe uma barreira que cumpra a definição para todas as estratégias diferentes de  $x$ , isto é, se existe algum  $\bar{\varepsilon}$  que respeite a desigualdade (1) para todo  $y \neq x$  e para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ , ou seja, se  $x$  possui uma barreira de invasão uniforme.

**Definição 3.8.** Dizemos que a estratégia  $x \in \Delta_k$  possui uma barreira de invasão uniforme se existe um  $\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$  tal que a desigualdade

$$u(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) > u(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y)$$

seja válida para todas as estratégias  $y \neq x$  e para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ .

Note que a definição anterior é equivalente a dizer que existe  $\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$ , tal que  $f_x(\varepsilon, y) > 0$  para  $y \neq x$  e para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ .

Para qualquer estratégia  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$  vamos definir a barreira de invasão  $b(y)$  de  $x$  contra a estratégia  $y \neq x$ , como o maior valor possível para  $\varepsilon_y$  tal que  $x$  resista à invasão de  $y$ , ou seja,

$$b(y) = \sup\{\delta \in [0, 1]: f_x(\varepsilon, y) > 0 \text{ para todo } \varepsilon \in (0, \delta)\}. \quad (8)$$

Como  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ , segue que  $b(y) > 0$  para toda estratégia  $y \neq x$ . Ademais,  $x$  tem uma barreira uniforme de invasão se, e somente se, existe algum  $\bar{\delta} > 0$  tal que  $b(y) > \bar{\delta}$  para todo  $y \neq x$ .

Antes de provarmos o próximo resultado, vamos fazer algumas observações e provar dois lemas auxiliares. As observações 3.10 e 3.11 e os lemas 3.12 e 3.13 são enunciados sem demonstração em (WEIBULL, 1997).

**Observação 3.9.** Considere um real  $\theta > 0$ . Como a função  $u$  é contínua, segue que existe um real  $\alpha > 0$  tal que

$$\|y - z\| < \alpha \Rightarrow |u(x - y, x) - u(x - z, x)| < \frac{\theta}{2}$$

e

$$\|y - z\| < \alpha \Rightarrow |u(x - y, y - x) - u(x - z, z - x)| < \frac{\theta}{2}.$$

Considere  $\varepsilon \in [0, 1]$  fixo. Então, se  $\|y - z\| < \alpha$ , temos que

$$\begin{aligned} |f_x(\varepsilon, y) - f_x(\varepsilon, z)| &= |u(x - y, x) + \varepsilon u(x - y, y - x) - u(x - z, z) - \varepsilon u(x - z, z - x)| \\ &= |u(x - y, x) - u(x - z, x) + \varepsilon(u(x - y, y - x) - u(x - z, z - x))| \\ &\leq |u(x - y, x) - u(x - z, x)| + \varepsilon |u(x - y, y - x) - u(x - z, z - x)| \\ &\leq |u(x - y, x) - u(x - z, x)| + |u(x - y, y - x) - u(x - z, z - x)| \\ &\leq \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta. \end{aligned}$$

Logo, dado  $\theta > 0$ , existe  $\alpha > 0$  tal que se  $\|y - z\| < \alpha$ , então  $|f_x(\varepsilon, y) - f_x(\varepsilon, z)| < \theta$  para qualquer  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

**Observação 3.10.** Se  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$  e  $z \in \Delta_k$  com  $z \neq x$ , então  $f_x(\varepsilon, z)$ , como função de  $\varepsilon$ , não pode ser identicamente nula. De fato, suponha que  $f_x(\varepsilon, z) = 0$  para todo  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Logo

$$f_x(0, z) = u(x - z, x) = 0$$

e

$$f(1, z) = u(x - z, x) + u(x - z, z - x) = u(x - z, z) = 0.$$

Isso contradiz a condição de estabilidade. Portanto  $f_x(\varepsilon, z)$  não pode ser identicamente nula. A partir disso podemos concluir que se  $f_x(\varepsilon, z)$  é constante, então  $f_x(\varepsilon, z) = u(x - z, x) > 0$  para todo  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

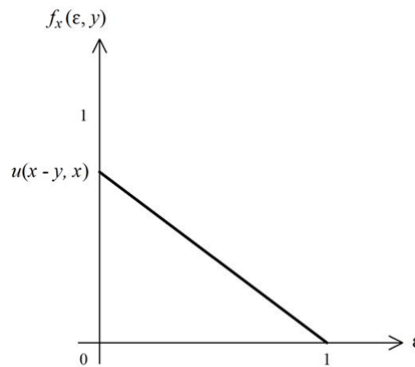
**Observação 3.11.** Considere  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$  e  $y \in \Delta_k$ , com  $y \neq x$ , fixos. Temos que a função  $f_x(\varepsilon, y)$  é zero para no máximo um  $\varepsilon$ , que será denotado por  $\varepsilon_y$ . Note que se  $\varepsilon_y$  existe, então ele é dado por  $\frac{u(x-y, y)}{u(x-y, x-y)}$ . Se  $\varepsilon_y \in (0, 1]$ , então  $b(y) = \varepsilon_y$ , pois a função  $f_x(\varepsilon, y)$  é afim em  $\varepsilon$  e, neste caso, o gráfico da função sempre intercepta o eixo vertical em um número positivo (Figuras 8 e 9).



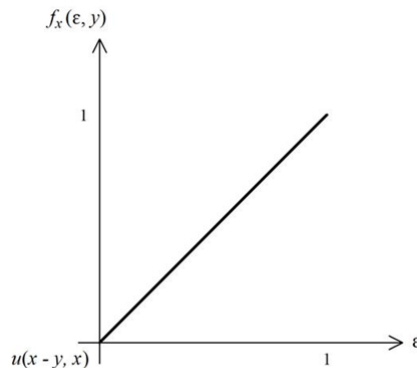
Caso  $\varepsilon_y = 0$ , então  $u(x - y, y) = 0$ , e neste caso o gráfico da função corta a origem, portanto  $f_x(\varepsilon, y)$  tem inclinação positiva, daí  $f_x(\varepsilon, y) > 0$  para todo  $\varepsilon \in (0, 1]$ , logo  $b(z) = 1$  (Figura 10). Caso  $\varepsilon_y \notin [0, 1]$ , então a função  $f_x(\varepsilon, y) > 0$  para todo  $\varepsilon \in [0, 1]$ , pois o gráfico da função corta o eixo vertical num número positivo, logo  $b(y) = 1$  (Figuras 11 e 12). Por fim, se  $\varepsilon_y$  não existe, então a função  $f_x(\varepsilon, y)$  é constante igual a  $u(x - y, x) > 0$ , portanto  $f_x(\varepsilon, y) > 0$  para todo  $\varepsilon \in [0, 1]$ , logo  $b(y) = 1$  (Figura 13). A partir dessas considerações obtemos que:

$$b(y) = \begin{cases} \varepsilon_y, & \varepsilon_y \in (0, 1) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

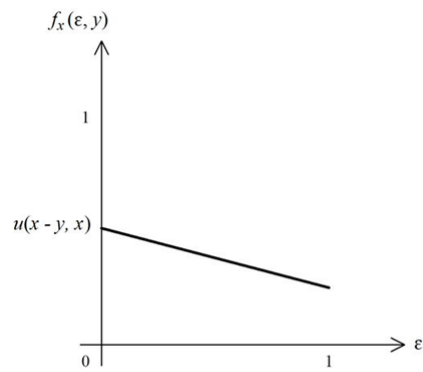
para qualquer  $y \neq x$  em  $\Delta_k$ .



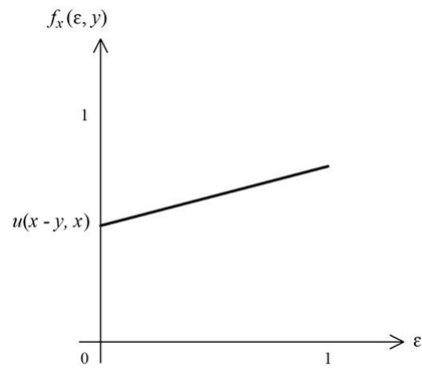
**Figura 9:** Gráfico da função  $f_x(\varepsilon, y)$  (caso  $\varepsilon_y = 1$ ).



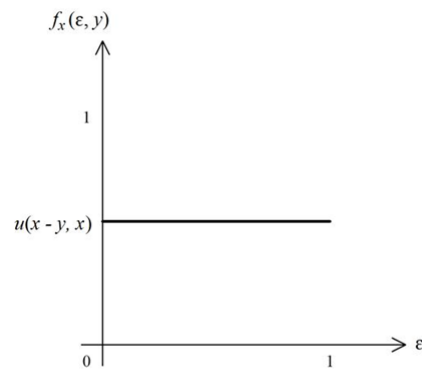
**Figura 10:** Gráfico da função  $f_x(\varepsilon, y)$  (caso  $\varepsilon_y = 0$ ).



**Figura 11: Gráfico da função  $f_x(\varepsilon, y)$  (caso  $\varepsilon_y > 1$ ).**



**Figura 12: Gráfico da função  $f_x(\varepsilon, y)$  (caso  $\varepsilon_y < 0$ ).**



**Figura 13: Gráfico da função  $f_x(\varepsilon, y)$  (caso  $\varepsilon_y$  não exista).**

**Lema 3.12.** Considere  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$  e defina  $Z_x = \{z \in \Delta_k : z_i = 0, \text{ para algum } i \text{ tal que } s_i \in C(x)\}$ . A função  $b: Z_x \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $b(z) = \sup\{\delta \in [0, 1] : f_x(\varepsilon, z) > 0 \text{ para todo } \varepsilon \in (0, \delta)\}$ , admite um mínimo positivo.

*Demonstração.* Como  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$  e  $x \notin Z_x$ , segue que  $b(z) > 0$  para todo  $z \in Z_x$ . Agora vamos mostrar que o conjunto  $Z_x$  é compacto. De fato, temos que  $Z_x \subset \partial(\Delta_k) \subset \Delta_k$ , portanto  $Z_x$  é limitado. Considere a função projeção  $\sigma_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\sigma_i(x) = x_i$ . Note que

$$Z_x = \bigcup_{\{i: s_i \in C(x)\}} \sigma_i^{-1}(\{0\}) \cap \Delta_k.$$

Logo  $Z_x$  é fechado. Isso mostra que  $Z_x$  é compacto. Agora vamos mostrar que  $b$  é contínua em  $Z_x$ . Fixe  $z \in Z_x$ . Como  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ , segue que  $f_x(\varepsilon, z) = 0$  para no máximo um  $\varepsilon$ , que será denotado por  $\varepsilon_z$ . Caso  $\varepsilon_z$  exista, então ele é dado por  $\frac{u(x-z, x)}{u(x-z, x-z)}$ . Pela Observação 3.11, temos que

$$b(z) = \begin{cases} \varepsilon_z, & \varepsilon_z \in (0, 1) \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora vamos dividir em casos.

- Se  $b(z) = \varepsilon_z = \frac{u(x-z, x)}{u(x-z, x-z)}$ , então da continuidade da função  $u$ , segue que  $b$  é contínua em  $z$ .
- Se  $b(z) = 1$ . Então temos as seguintes possibilidades:
  - Se  $\varepsilon_z$  não existe. Neste caso a função  $f_x(\varepsilon, z)$  é constante igual a  $u(x-z, x) > 0$ . Tome  $\theta = \frac{u(x-z, x)}{2}$ . Sabemos que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\|y - z\| < \alpha \Rightarrow |f_x(\varepsilon, y) - f_x(\varepsilon, z)| < \theta,$$

para todo  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Logo, se  $\|y - z\| < \alpha$ , então  $f_x(\varepsilon, y) > \theta > 0$  para qualquer  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Disso segue que se  $\|y - z\| < \alpha$ , então  $b(y) = 1$ . Isso mostra que  $b$  é contínua em  $z$ .

- Caso  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Então temos as seguintes possibilidades:

- \* Se  $\varepsilon_z < 0$ . Então  $\frac{u(x-z, x)}{u(x-z, x-z)} < 0$ . Da continuidade da função  $u$ , segue que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\|y - z\| < \alpha \Rightarrow \frac{u(x-y, x)}{u(x-y, x-y)} = \varepsilon_y < 0.$$

Logo  $b(y) = 1$  sempre que  $\|y - z\| < \alpha$ . Isso mostra que  $b$  é contínua em  $z$ .

- \* Se  $\varepsilon_z > 1$ . Então  $\frac{u(x-z, x)}{u(x-z, x-z)} > 1$ . Da continuidade da função  $u$ , segue que existe  $\alpha$  tal que

$$\|y - z\| < \alpha \Rightarrow \frac{u(x-y, x)}{u(x-y, x-y)} = \varepsilon_y > 1.$$

Logo  $b(y) = 1$  sempre que  $\|y - z\| < \alpha$ . Isso mostra que  $b$  é contínua em  $z$ .

- \* Se  $\varepsilon_z = 0$ . Então  $u(x-z, x) = 0$ . Logo  $u(x-z, z-x) > 0$ . Da continuidade da função  $u$ , segue que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \|y - z\| < \alpha &\Rightarrow u(x-y, y-x) > 0 \\ &\Rightarrow u(x-y, x-y) < 0 \\ &\Rightarrow \frac{u(x-y, x)}{u(x-y, x-y)} = \varepsilon_y \leq 0. \end{aligned}$$

Se  $\varepsilon_y = 0$ , então  $u(x-y, x) = 0$  e  $u(x-y, y-x) > 0$ . Logo  $f_x(\varepsilon, y) > 0$  para todo  $\varepsilon \in (0, 1]$ , e então  $b(y) = 1$ . Caso  $\varepsilon_y < 0$ , também temos  $b(y) = 1$ . Isso mostra que  $b$  é contínua em  $z$ .

- \* Se  $\varepsilon_z = 1$ . Então  $\frac{u(x-z, x)}{u(x-z, x-z)} = 1$ . Da continuidade de  $u$ , segue que existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\|y - z\| < \alpha \Rightarrow |\varepsilon_y - \varepsilon_z| < \theta \Rightarrow 1 - \theta < \varepsilon_y < 1 + \theta$$

para qualquer  $\theta \in (0, 1)$ . Se  $\varepsilon_y \in [1, 1 + \theta)$ , então  $b(y) = 1$ , e neste caso  $b$  seria contínua em  $z$ . Caso  $\varepsilon_y \in (1 - \theta, 1)$ , então  $b(y) = \varepsilon_y$ . Logo  $|b(y) - b(z)| < \theta$  sempre que  $\|y - z\| < \alpha$ . Logo, neste caso  $b$  também é contínua em  $z$ .

Isso mostra que  $b$  é contínua em  $Z_x$ . Como  $b(z) > 0$  para todo  $z \in Z_x$ ,  $Z_x$  é compacto e  $b$  é contínua em  $Z_x$ , segue que  $\min\{b(z) : z \in Z_x\} > 0$ . Isso completa a demonstração.  $\square$

**Lema 3.13.** *Considere  $x$  e  $y$  em  $\Delta_k$ , com  $y \neq x$ , e considere  $Z_x$  como no lema anterior. Então existem  $z \in Z_x$  e  $\lambda \in (0, 1]$  tais que  $y = (1 - \lambda)x + \lambda z$ .*

*Demonstração.* Defina  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$  dada por  $f(t) = x + (y - x)t$ . Como  $x \neq y$ , segue que existe algum índice  $i$  tal que  $x_i > y_i$ . De fato, caso não exista tal  $i$ , então  $x_j \leq y_j$  para todo  $j$ . Como  $x \neq y$ , segue que  $x_k < y_k$  para algum  $k$ . Daí,  $1 = \sum x_j < \sum y_j = 1$ , o que é uma contradição.

Defina

$$B = \left\{ \frac{x_i}{x_i - y_i} : i \in \{1, \dots, k\}, x_i - y_i > 0 \right\}.$$

Pelas considerações anteriores segue que  $B \neq \emptyset$ . Claramente  $B$  é finito. Seja

$$\beta = \frac{x_l}{x_l - y_l} = \min(B).$$

Note que  $\beta \geq 1$ , pois  $x_l - y_l \leq x_l$ . Note também que a imagem de  $f$  está contida no plano  $\{x \in \mathbb{R}^k : \sum x_i = 1\}$ , e portanto  $\sum f(\beta)_i = 1$ . Afirmamos que  $f(\beta)_j \geq 0$ , para todo  $j$ . De fato, suponha que exista um índice  $m$  tal que  $f(\beta)_m < 0$ , então

$$f(\beta)_m = x_m + (y_m - x_m)\beta < 0 \Leftrightarrow x_m < (x_m - y_m)\beta \Leftrightarrow \frac{x_m}{\beta} = \frac{x_m(x_l - y_l)}{x_l} < (x_m - y_m).$$

Se  $x_m = 0$ , então  $0 < -y_m$ , o que seria uma contradição. Se  $0 < x_m \leq 1$ , então  $0 < \frac{x_l - y_l}{x_l} < \frac{x_m - y_m}{x_m}$ , portanto  $\beta = \frac{x_l}{x_l - y_l} > \frac{x_m}{x_m - y_m}$ . Isso contradiz o fato de  $\beta$  ser o mínimo de  $B$ . Logo  $f(\beta)_j \geq 0$  para todo  $j$ , e portanto  $f(\beta) \in \Delta_k$ . Como

$$f(\beta)_l = x_l + (y_l - x_l)\beta = x_l + (y_l - x_l)\frac{x_l}{x_l - y_l} = x_l - x_l = 0$$

e  $x_l > 0$ , segue que  $f(\beta) \in Z_x$ . Por fim, note que

$$f(\beta) = x + (y - x)\beta = (1 - \beta)x + \beta y \Leftrightarrow y = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\beta}f(\beta).$$

Como  $\beta \geq 1$ , segue que  $0 < \frac{1}{\beta} \leq 1$ . Tomando  $\lambda = \frac{1}{\beta}$  e  $z = f(\beta)$ , completamos a demonstração.  $\square$

**Proposição 3.14.** *A estratégia  $x \in \Delta_k$  possui uma barreira de invasão uniforme se, e somente se,  $x \in \Delta^{ESS}$ .*

*Demonstração.* Suponha  $\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$  uma barreira de invasão uniforme para  $x \in \Delta_k$ . Então dada  $y \in \Delta_k$  com  $y \neq x$ , escolha  $\varepsilon_y = \bar{\varepsilon}$ . Logo a desigualdade (1) é satisfeita para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ .

Reciprocamente suponha que  $x \in \Delta^{ESS}$  e seja  $Z_x$  como definido anteriormente. Considere  $y \in \Delta_k$  tal que  $y \neq x$ . Pelo Lema 3.13, sabemos que existem  $z \in Z_x$  e  $\lambda \in (0, 1]$  tais que  $y = (1 - \lambda)x + \lambda z$ . Note que

$$\begin{aligned} f_x(\varepsilon, y) &= u(x - y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) \\ &= u(x - [(1 - \lambda)x + \lambda z], (1 - \varepsilon)x + \varepsilon[(1 - \lambda)x + \lambda z]) \\ &= \lambda u(x - z, (1 - \lambda\varepsilon)x + \lambda\varepsilon z) \\ &= \lambda f_x(\varepsilon\lambda, z). \end{aligned}$$

Logo a raiz  $\varepsilon_y$  existe, se e somente se, a raiz  $\varepsilon_z$  existe, e temos a seguinte relação  $\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_z}{\lambda}$ . Caso  $\varepsilon_y \in (0, 1)$ , então  $b(y) = \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_z}{\lambda} \geq b(z)$ , pois neste caso  $b(z) = \varepsilon_z$ . Caso  $\varepsilon_y \notin (0, 1)$  ou  $\varepsilon_y$  não exista, então  $b(y) = 1$ , e portanto  $b(y) \geq b(z)$ , pois  $b(z) = \varepsilon_z$  ou  $b(z) = 1$ . A partir disso podemos concluir que

$$\min\{b(y) : y \in \Delta_k, y \neq x\} \geq \min\{b(z) : z \in Z_x\} > 0.$$

Logo basta tomar  $\bar{\varepsilon} = \min\{b(z) : z \in Z_x\}$  como barreira de invasão uniforme para  $x$ . Isso completa a demonstração.  $\square$

### 3.5.2 SUPERIORIDADE LOCAL

Agora vamos mostrar que se  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ , então  $u(x, y) > u(y, y)$  para todo  $y$  numa vizinhança de  $x$ , isto é, jogar  $x$  num ambiente  $y$  é sempre melhor do que jogar  $y$  num ambiente  $y$ , para qualquer  $y$  suficientemente perto de  $x$ .

**Definição 3.15.** *Considere  $x \in \Delta_k$ . Dizemos que  $x$  é localmente superior se existe uma bola aberta  $B_r(x)$ , de centro em  $x$  e raio  $r > 0$ , tal que*

$$u(x, y) > u(y, y)$$

para todo  $y \in \Delta_k \cap B_r(x)$  com  $y \neq x$ .

A próxima proposição é enunciada e demonstrada em (WEIBULL, 1997), mas a demonstração que apresentaremos a seguir é diferente.

**Proposição 3.16.** *A estratégia  $x \in \Delta_k$  é localmente superior se, e somente se,  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ .*

*Demonstração.* Suponha  $x$  localmente superior. Logo existe uma bola aberta  $B_r(x)$ , de centro em  $x$  e raio  $r > 0$ , tal que  $u(x, y) > u(y, y)$  para todo  $y \in \Delta_k \cap B_r(x)$  com  $y \neq x$ . Como  $B_r(x)$  é um conjunto aberto, segue que para qualquer  $z \in \Delta_k$ ,  $z \neq x$ , existe  $\varepsilon_z \in (0, 1)$  tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_z)$ ,  $w = \varepsilon z + (1 - \varepsilon)x \in B_r(x)$ . Então

$$\begin{aligned} u(x, w) > u(w, w) &\iff u(x, w) > (1 - \varepsilon)u(x, w) + \varepsilon u(z, w) \\ &\iff u(x, w) > u(z, w) \end{aligned}$$

para qualquer  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_z)$ . Portanto  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Reciprocamente, suponha que  $x \in \Delta^{\text{ESS}}$ . Seja  $\bar{\varepsilon}$  a barreira de invasão uniforme de  $x$  e seja  $Z_x = \{z \in \Delta_k : z_i = 0, \text{ para algum } i \text{ tal que } s_i \in C(x)\}$ . Como  $Z_x$  é um conjunto fechado e  $x \notin Z_x$ , segue que  $M = d(x, Z_x) = \min\{\|x - z\| : z \in Z_x\} > 0$ . Considere a bola aberta  $B_\delta(x)$ , de centro em  $x$  e raio  $\delta = M\bar{\varepsilon} > 0$ . Seja  $y \in B_\delta(x) \cap \Delta_k$ , com  $y \neq x$ . Temos que existem  $z \in Z_x$  e  $\lambda \in (0, 1]$  tais que  $y = (1 - \lambda)x + \lambda z$ . Então

$$M\bar{\varepsilon} > \|y - x\| = \lambda \|z - x\| \geq M\lambda.$$

Portanto  $\bar{\varepsilon} > \lambda$ . Como  $\bar{\varepsilon}$  é a barreira de invasão uniforme para  $x$ , segue que

$$u(x, (1 - \lambda)x + \lambda z) > u(z, (1 - \lambda)x + \lambda z),$$

isto é,

$$u(x, y) > u(z, y),$$

e portanto

$$u(x - y, y) = \lambda u(x - z, y) > 0.$$

Isso mostra que  $x$  é localmente superior.

□

## 4 CONCLUSÃO

A análise matemática, além de ser uma bela teoria matemática pura, é uma importante área da matemática que possui diversas aplicações. Neste trabalho conseguimos apresentar aplicações relevantes da análise na teoria de jogos, destacando o teorema do equilíbrio de Nash e as caracterizações alternativas das estratégias evolutivamente estáveis. Nas demonstrações destes resultados, foram utilizados os conceitos de continuidade, compacidade, convexidade, entre outros, de forma não imediata.

O estudo de análise num contexto aplicado facilitou a compreensão de resultados abstratos e proporcionou um aprendizado significativo dos fundamentos da análise matemática. Além disso, o conhecimento adquirido em teoria de jogos permitiu visualizar o potencial da matemática em outras áreas.

Para finalizar, a realização deste trabalho trouxe experiência com a atividade de pesquisa e escrita científica.



## REFERÊNCIAS

- BORTOLOSSI, H.; GARBAGIO, G.; SARTINI, B. **Uma Introdução à Teoria Econômica dos Jogos**. RJ: IMPA, 2007.
- FRANKLIN, J. N. **Methods of mathematical economics: linear and nonlinear programming, fixed-point theorems**. New York: SIAM, 1980.
- GILBOA, I.; KALAI, E.; ZEMEL, E. On the order of eliminating dominated strategies. **Operations Research Letters**, Elsevier, v. 9, n. 2, p. 85–89, 1990.
- GINTIS, H. **Game theory evolving: A problem-centered introduction to modeling strategic behavior**. 2. ed. New Jersey: Princeton University Press, 2009.
- LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 5. ed. RJ: IMPA, 2013.
- RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. London: Mc-GRAW-HILL, 1976.
- WEBB, J. N. **Game Theory Decisions, Interaction and Evolution**. London: Springer, 2007.
- WEIBULL, J. W. **Evolutionary Game Theory**. Massachusetts: MIT, 1997.