UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA - DAMAT

WESLEY FELIPE GALVÃO

FORMAS DIFERENCIAIS: APLICAÇÕES NO CÁLCULO E NA FÍSICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2016

WESLEY FELIPE GALVÃO

FORMAS DIFERENCIAIS: APLICAÇÕES NO CÁLCULO E NA FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Licenciado em Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. André Fabiano Steklain Lisbôa

CURITIBA

2016

À minha mãe, meu maior exemplo, que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e de cansaço.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.
- A UTFPR, pela oportunidade de fazer o curso de Licenciatura em Matemática.
- Ao meu orientador por todo o auxílio na elaboração deste trabalho.
- A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

GALVÃO, Wesley Felipe. FORMAS DIFERENCIAIS: APLICAÇÕES NO CÁLCULO E NA FÍSICA. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

Ao iniciar o ensino superior, muitos estudantes de Engenharia se deparam com uma longa jornada a frente. De modo especial, as disciplinas de Cálculo acabam tomando grande parte da preocupação desses alunos, além de abordar os conteúdos de maneira fragmentada. Diante deste fato, a Teoria das Formas Diferenciais é capaz de reunir grande parte desses conteúdos, tornando-os mais abrangentes e possibilitando acesso a áreas ainda mais avançadas. Pensando nisso, este trabalho pretende dar um vislumbre do que são as Formas Diferenciais, fazendo antes uma breve revisão de conteúdos do Cálculo, com especial ênfase no Teorema de Stokes, além de apresentar algumas aplicações na Física, cujo objetivo é salientar as características das Formas, em particular a capacidade de generalizar alguns resultados.

Palavras-chave: Formas Diferenciais, Cálculo, Física

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao iniciar o ensino superior, muitos estudantes se deparam com uma longa jornada a frente. Na área das ciências exatas, de modo especial, o Cálculo toma grande parte da preocupação desses alunos, isso porque todo o conteúdo é abordado em diferentes disciplinas que tratam, em geral separadamente, as funções em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ e por fim sobre curvas e superfícies. Essa fragmentação do conteúdo pode tornar o processo extenso e muitas vezes cansativo.

Por outro lado, é prática comum na Matemática procurar resultados que sejam aplicáveis ao maior número possível de situações. Entendendo a Matemática como linguagem nas Ciências Exatas, ela precisa se adaptar tanto às teorias clássicas quanto às mais atuais, como por exemplo a Relatividade Geral. Diante deste fato, encontramos uma área de estudos na Matemática que é capaz de reunir alguns conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, de uma ou mais variáveis, de modo que o torna mais abrangente, em relação aos conteúdos, e mais acessível aos alunos que almejam prosseguir com estudos mais avançados. Essa é a teoria das Formas Diferenciais.

O conceito de forma diferencial pode ser interpretado como uma generalização de algumas ferramentas do Cálculo de múltiplas variáveis, como gradiente, divergente, rotacional e expressões do tipo $Pdx + Qdy$ e $Adydz + Bdzdx + Cdxdy$, comumente usadas como integrandos no cálculo de integrais de linha e de superfícies, respectivamente (SAMELSON, 2001). Essa forma de pensamento, bem como a notação adotada atualmente se devem a Élie Cartan (1869 - 1951), matemático francês, que trabalhou na teoria durante dez anos, de 1894 a 1904. Cartan também contribuiu com inúmeros trabalhos no estudo dos Grupos de Lie e também das Álgebras de Grasmann, essenciais em diversas áreas, como a Teoria Quântica de Campos (WEINBERG, 1995).

Contudo, nos trabalhos de Leonhard Euler (1707 - 1783) e Alexis Fontaine (1704 - 1771), realizados por volta de 1740, a ideia das Formas já aparecia implicitamente no que, mais tarde, passou a ser chamado *diferencial total* de uma função. O diferencial de uma função f, dado pela expressão $df = f_x dx + f_y dy$ (com f definida em $\mathbb{R}^2$), representa a variação nos valores desta função quando suas variáveis sofrem acréscimos dx e dy (infinitamente pequenos) e pode ser generalizado para funções com mais variáveis. Euler e Fontaine aparentemente tiveram, de modo simultâneo mas independente, a ideia de investigar as condições nas quais a expressão $Pdx + Qdy$ é o diferencial de uma função, sendo P e Q funções de x e y. Ambos chegaram a resultados semelhantes, estabelecendo a relação $f_{xy} = f_{yx}$ para uma função f diferenciável arbitrária e a condição $P_y = Q_x$ para as funções P e Q que estavam sendo estudadas. Mais tarde mostraram que esta condição também era suficiente, ou seja, o fato da expressão $Pdx + Qdy$ ser diferencial de uma função e a igualdade $P_y = Q_x$ são equivalentes.

Após os estudos de Euler e Fontaine, o próximo passo foi tomado por Johann Pfaff (1765 - 1825), que introduziu o conceito de variedades (*manifolds*) com o objetivo de resolver problemas de integração como os vistos pelos outros dois matemáticos. De maneira informal, uma variedade pode ser entendida como uma porção do espaço $\mathbb{R}^n$ que, localmente, possui as mesmas propriedades topológicas que o espaço $\mathbb{R}^n$. Uma superfície orientada, um conjunto de curvas ou de pontos isolados, são exemplos de variedades. Pfaff trabalhou continuamente em direção ao hoje chamado teorema de Frobenius, resultado usado constantemente na resolução de sistemas de 1-formas, também chamadas formas pfaffianas.

Já para este trabalho, será tomada uma abordagem mais recente (CARMO, 1994; WEINTRAUB, 1997), que utiliza o conceito de *espaços tangentes*. Sob essa visão, a compreensão de vários conceitos de Álgebra Linear se fazem necessários, como por exemplo a própria ideia de espaço tangente: se tomarmos um ponto p no espaço $\mathbb{R}^3$, por exemplo, o espaço tangente a esse ponto é o conjunto de todos os vetores que têm origem nele. A partir dessa definição, é associado a cada espaço tangente um espaço dual, formando-se um conjunto de aplicações, que são exatamente as Formas Diferenciais.

Entretanto, para que ocorra o desenvolvimento dessas ideias, será realizada inicialmente uma revisão de alguns assuntos abordados em disciplinas do Cálculo, a fim de selecionar as ferramentas necessárias. Em seguida, será feito um estudo da teoria das Formas Diferenciais, enfatizando as principais propriedades e ferramentas que serão utilizadas nos próximos passos, dando grande atenção ao Teorema de Stokes, que é de grande importância e reúne outros resultados geralmente tratados de modo independente. A última parte será destinada a apresentar aplicações dos resultados em assuntos da Física, particularmente, ressaltando as vantagens do uso das formas diferenciais e comparando com os resultados obtidos nas disciplinas de Cálculo.

2 REVISANDO CONCEITOS DE CÁLCULO VETORIAL

Antes de iniciar o estudo das Formas Diferenciais, é necessário recordar alguns conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral. Algumas noções mais básicas, como topologia em espaços euclidianos até limites e continuidade de funções, serão omitidas ou utilizadas apenas para dar base aos resultados, mas podem ser vistos com mais profundidade nos livros de James Stewart (STEWART, 2013) e Hamilton L. Guidorizzi (GUIDORIZZI, 2010).

O capítulo será dividido em duas partes: a primeira seção terá como foco a derivação e a integração de funções que associam pontos do espaço $\mathbb{R}^n$ a valores reais, também chamados *campos escalares*, sendo funções de uma variável (isto é, com variáveis apenas em $\mathbb{R}$) um caso particular. A segunda seção será voltada ao estudo de funções que associam pontos do $\mathbb{R}^n$ a vetores de $\mathbb{R}^m$, também chamadas *campos vetoriais*. Todas as funções serão contínuas e definidas em subconjuntos destes espaços $\mathbb{R}^n$. Em alguns momentos, será dada ênfase aos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, porém as ideias podem ser estendidas para os demais espaços $\mathbb{R}^n$.

Os resultados que serão apresentados neste capítulo são baseados no livro de James Stewart (STEWART, 2013), muito usado nas disciplinas de Cálculo dos cursos de Engenharia. Alguns teoremas receberão destaque por serem de importância fundamental, como o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Stokes.

2.1 FUNÇÕES DE VARIÁVEIS REAIS A VALORES REAIS

Como referido anteriormente, para simplificar a discussão no decorrer do texto, serão utilizadas apenas funções contínuas. Caso seja necessário, algumas discussões mais completas podem ser encontradas em livros de Cálculo.

2.1.1 DERIVAÇÃO

Para funções reais de uma variável a definição de derivada normalmente encontrada é a seguinte:

Definição 2.1. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função real. Definimos *derivada* de f em um ponto $x\in\mathbb{R}$ como:

$$\frac{df}{dx}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$

quando este limite existir.

Essa derivada também é conhecida como *derivada ordinária* de f. Geometricamente, ela pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f.

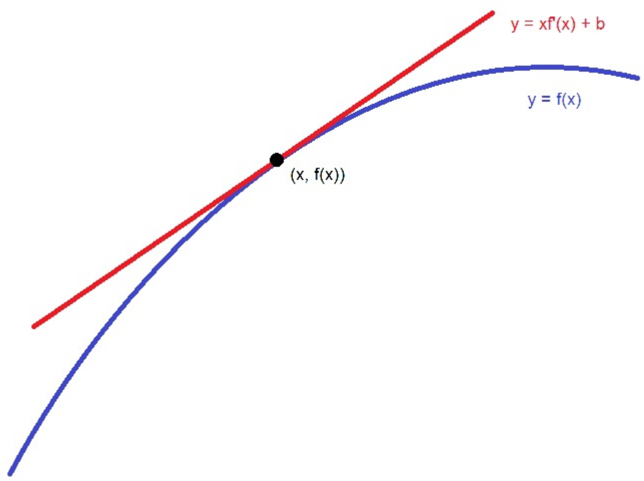

Figura 1: Interpretação gráfica para a derivada

Observação 2.2. A derivada ordinária df/dx pode ser representada utilizando a notação f', isto é,

$$\frac{df}{dx}=f'.$$

Com a derivação é possível realizar o estudo do comportamento de um grande número de funções, como por exemplo, que variações ocorrem nos valores de uma função quando sua variável recebe acréscimos ou decréscimos? Para responder a essa pergunta, podemos tomar os acréscimos ou decréscimos como uma nova variável, fazendo uso de uma ferramenta chamada *diferencial total*. Para funções de uma variável, segue a definição:

Definição 2.3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável (isto é, sua derivada existe e é contínua), o *diferencial total* de f em x é dado por uma função linear de variáveis x e dx que a cada par (x,dx) associa $dy\in\mathbb{R}$ e é definida pela expressão

$$dy=f'(x)dx$$

quando $y=f(x)$.

Para uma função de duas ou mais variáveis a valores reais a definição 2.1 pode ser estendida para a de *derivada parcial*, conforme a Definição 2.4 a seguir.

Definição 2.4. Seja a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, definimos a *derivada parcial de* f no ponto $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, em relação à i-ésima coordenada, como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \frac{\lim_{h \to 0} f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{h} \tag{2}$$

À primeira vista, a expressão acima pode parecer complicada mas a ideia é bastante simples. Para o cálculo desta derivada basta manter as demais coordenadas fixas, tratando-se f como uma função de uma variável, neste caso a variável x_i. Observando essas definições, é possível perceber que algumas das propriedades válidas no cálculo de limites também valem para derivadas, entre elas, a linearidade. Partindo da definição, também é possível obter derivadas de ordem superior (ordinária ou parciais), neste caso, dizemos que uma função é de classe C^n quando estas derivadas existem, até a ordem n, e são todas contínuas. Para algumas funções particulares, usam-se regras de derivação, para evitar o cálculo pela definição, que pode ser demorado. Alguns exemplos comuns podem ser verificados em Stewart (2013), Guidorizzi (2010), e muitos outros, em especial, as regras para polinômios e para funções trigonométricas, que são amplamente utilizadas na Engenharia.

Observação 2.5. Para a derivada parcial de uma função f com relação à i-ésima coordenada será utilizada a notação f_{x_i}, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}$$

Com a definição de derivada parcial, podemos ampliar o conceito de diferencial total, agora para mais de uma variável:

Definição 2.6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função derivável (de classe C^1), o *diferencial total* de f é dado por uma função linear de $2n$ variáveis que a cada ponto $(x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n)$ associa um valor $df \in \mathbb{R}$ e é definida por

$$df = f_{x_1} dx_1 + \cdots + f_{x_n} dx_n$$

Também é possível ampliar a ideia de *derivabilidade* para a de *diferenciabilidade* de uma função, passando a chamá-las de funções *diferenciáveis* quando essas funções obedecem a seguinte definição :

Definição 2.7. Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *diferenciável* em $x \in U$ quando cumpre as condições:

1. As derivadas parciais de f existem e são todas contínuas em x;

2. Para todo $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + h \in U$, tem-se

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}.h_i + r(h), \quad \text{onde} \quad \lim_{|h| \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Portanto, quando forem mencionadas funções diferenciáveis, estarão sendo consideradas especialmente aquelas funções que possuem todas as derivadas contínuas.

2.1.2 INTEGRAÇÃO

Com as ferramentas vistas na seção anterior, uma pergunta que pode surgir é: caso uma função seja diferenciável, mas conhecemos apenas a sua derivada, é possível, de alguma forma, ter acesso à expressão dessa função? Ou ainda, saber algo sobre o comportamento dela? Essa pergunta pode ser respondida com este próximo tema que será revisado, a integração. Primeiramente, vamos usar a ideia de "operação inversa" e enunciar a seguinte definição:

Definição 2.8. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva* de f quando F é derivável e $F' = f$, para todo x no domínio de F. É comum representar uma primitiva F de uma função f como $F = \int f dx$.

Observação 2.9. Caso a função f possua primitiva, então ela possui uma infinidade de primitivas que diferem apenas por uma constante. De fato, se F é primitiva de f e k é uma constante, então, pela linearidade da derivação, $(F+k)' = F' + k' = F'$, uma vez que a derivada da função constante é nula. Portanto, podemos escrever a primitiva de f como uma família de funções, ou seja, $\int f dx = F + k,\ k \in \mathbb{R}$

Vamos considerar, agora, uma função f definida em um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}^2$. Podemos dividir este intervalo em n subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ (com $a_1 = a$ e $a_{n+1} = b$), que chamamos de *partição*, e escolher um ponto arbitrário x_i em cada um destes subintervalos. Com isso, formamos a seguinte soma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

onde Δx_i é o comprimento do intervalo $[a_i, a_{i+1}]$.

Esta expressão é conhecida como *soma de Riemann*. No caso em que $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos de base Δx_i e altura $f(x_i)$.

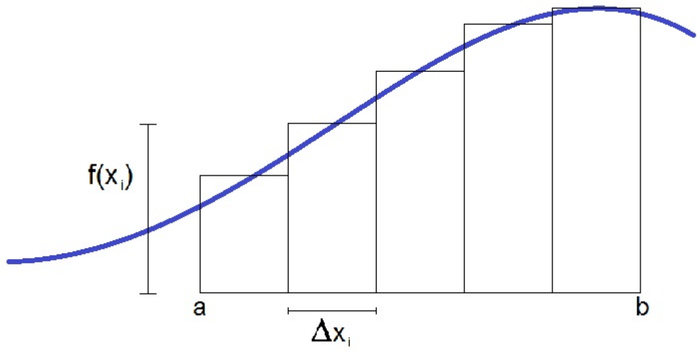

Figura 2: Interpretação geométrica para a Soma de Riemann

Tomando o limite desta soma, temos a seguinte definição:

Definição 2.10. Seja a função f, definida em um intervalo $[a,b]$. Chamamos *integral definida* da função f no intervalo $[a,b]$ o limite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

onde $\Delta x = max\{\Delta x_i\}$.

Por esta definição é possível perceber que a integração também possui a propriedade da linearidade. Além disso, como veremos a seguir, não é por acaso que o símbolo usado para integral seja o mesmo para as primitivas. Existe uma conexão importante entre os dois conceitos que é fornecida pelo seguinte resultado, o primeiro resultado importante desta revisão.

Teorema 2.11 (Teorema Fundamental do Cálculo - TFC)**.** Seja f uma função real, definida em um intervalo $[a,b]$. A função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é derivável em todos os pontos de $]a,b[$ e sua derivada é dada por $dF/dx = f(x)$

Vamos omitir a demonstração deste teorema nesta revisão, mas ela pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo (GUIDORIZZI, 2010; STEWART, 2013). Este Teorema é de fundamental importância para toda a teoria do Cálculo, no entanto, daremos especial atenção a um de seus corolários, isto é, um dos resultados que surgem como consequência dele.

Corolário 2.12. Se f é uma função real, definida em $[a,b]$ e F uma qualquer primitiva de f, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Este resultado nos permite afirmar que para calcular a integral de f no intervalo $[a,b]$ basta calcular os valores que sua primitiva toma nos extremos desse intervalo, evitando assim o cálculo diretamente pela definição.

Podemos ampliar estes conceitos para funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, dando origem à definição de integrais múltiplas. Em $\mathbb{R}^2$, por exemplo, dada uma função f definida em um conjunto $B = [a,b] \times [c,d]$, podemos subdividir esse retângulo em subconjuntos da forma $[a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$, escolher um ponto arbitrário (x_i, y_i) em cada um deles e construir a soma dupla de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta A_{ij}$$

onde ΔA_{ij} representa a área de cada partição $[a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$. Portanto a *integral dupla* de f sobre B é dada por:

$$\iint_B f(x,y)dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta A$$

onde $\Delta A = max\{\Delta A_{ij}\}$.

Para contornar o cálculo pela definição, podemos integrar a função f em relação a cada uma das variáveis, de cada vez, recorrendo a resultados auxiliares como, por exemplo, o Teorema de Fubini, que permite alternar a ordem de integração. Assim, podemos escrever

$$\iint_B f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \quad ou \quad \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Observação 2.13. O cálculo pode ser realizado deste modo mesmo quando algum dos extremos dos intervalos é caracterizado por uma função real, ou seja, mesmo quando os intervalos são da forma $[a, g(t)]$, para alguma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por exemplo.

2.2 FUNÇÕES DE VARIÁVEIS REAIS A VALORES VETORIAIS

Nesta seção, o foco será dado às funções de várias variáveis reais que tomam valores vetoriais, também chamados de *campos vetoriais*. Para facilitar a revisão, serão considerados como contra-domínio das funções os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e mais uma vez as funções serão contínuas.

Observação 2.14. De modo geral, um campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ será representado pela expressão $\vec{F} = P_1\vec{e}_1 + ... + P_m\vec{e}_m$ onde P_1, ..., P_m são funções reais, definidas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ e $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Assim, para que um campo $\vec{F}$ seja contínuo, basta que cada função componente P_i seja contínua.

2.2.1 DERIVAÇÃO

Um campo vetorial especial é o chamado *campo gradiente* de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Na literatura, é comum a construção do "operador" $\vec{\nabla}$ (nabla), com base no conceito de derivadas parciais:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ representa o "operador" derivada parcial, em relação à i-ésima coordenada.

Isso permite definir o *gradiente* de f da seguinte maneira:

Definição 2.15. Seja f uma função real, de classe C^1. O *vetor gradiente* de f é dado pela expressão:

$$grad f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$$

que pode ser escrito também como $\vec{\nabla} f$.

Assim como as funções vistas na seção anterior, os campos vetoriais também podem ser classificados em classes C^n, basta que cada uma de suas funções componentes sejam de classe C^n. Por exemplo, um campo vetorial $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é de classe C^n se P, Q e R são de classe C^n. Retomando a definição anterior (gradiente), uma vez que $\vec{\nabla} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial, podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 2.16. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial, dizemos que $\vec{F}$ é um *campo conservativo* quando existe uma função f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. Neste caso, dizemos que f é a *função potencial* do campo $\vec{F}$.

Existem ainda outras ferramentas importantes que possuem uma forte ligação com as Formas Diferenciais.

Definição 2.17. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial, de classe C^1, tal que $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Definimos o *rotacional* do campo $\vec{F}$ por:

$$rot \vec{F} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

Definição 2.18. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial, de classe C^1, tal que $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, definimos o *divergente do campo* $\vec{F}$ por

$$div \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$$

Observação 2.19. O rotacional e o divergente de um campo $\vec{F}$ podem ser representados por um produto vetorial e um produto escalar, respectivamente, usando o vetor $\vec{\nabla}$, da seguinte forma:

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

e também

$$div\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Esses dois conceitos podem ser entendidos no contexto da mecânica dos fluidos. O rotacional pode ser interpretado como um campo de velocidades, as partículas próximas a um ponto (x_0, y_0, z_0) tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de $rot\vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ e o comprimento deste vetor mede o quão rápido as partículas giram em torno deste eixo. Quando não existe rotação, ou seja, $rot\vec{F} = 0$, dizemos que $\vec{F}$ é um campo *irrotacional*. Já o divergente $div\vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ pode representar a taxa de variação, em relação ao tempo, da massa de um fluido escoando do ponto (x_0, y_0, z_0) quando $\vec{F}$ representa a velocidade deste mesmo fluido. Quando $div\vec{F} = 0$ dizemos que o fluido é *incompressível* (STEWART, 2013).

2.2.2 INTEGRAÇÃO

Nesta seção serão relembradas duas formas de integração que podem ser usadas como generalizações das integrais unidimensionais e integrais duplas. A ideia será usar curvas parametrizáveis, para além dos intervalos $[a, b]$, e superfícies, substituindo porções do plano. Para isso, vamos considerar uma curva C em $\mathbb{R}^n$, lisa [1], dada pela função $r(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, com $a \leq t \leq b$. Desta forma, podemos definir a *integral de linha* de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sobre a curva C.

Definição 2.20. Seja f uma função definida sobre uma curva lisa C, dada pela função $r(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, com $a \leq t \leq b$. Então, a *integral de linha* de f sobre C é dada por:

$$\int_C f(x_1, ..., x_n) ds = \int_a^b f(r(t)) ||r'(t)|| dt$$

onde $||r'(t)|| = \sqrt{(x_1')^2(t) + \cdots + (x_n')^2(t)}$.

De modo análogo, ao tratarmos de campos vetoriais, temos a seguinte definição:

[1] Dizemos que uma curva é lisa, quando a função que a parametriza é derivável e esta derivada não se anula

Definição 2.21. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial definido sobre uma curva lisa C, dada pela função $r(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, $a \leq t \leq b$. Então, a *integral de linha* de $\vec{F}$ sobre C é dada por

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = \int_a^b \left(\vec{F}(r(t)) \cdot r'(t) \right) dt$$

Além disso, podemos estabelecer uma *orientação* para essa curva, em outras palavras, podemos decidir se a curva é percorrida de $r(a)$ para $r(b)$ ou o contrário, de $r(b)$ para $r(a)$. Quando a curva C é fechada, ou seja, $r(a) = r(b)$, a *orientação positiva* da curva é aquela que permite percorrer a curva no sentido anti-horário. Quando fixamos uma orientação a curva é dita *orientada*. [2]

Para as superfícies, o cálculo da integral também é feito baseando-se na parametrização dessas superfícies, bem como na sua orientação. A orientação de uma superfície é geralmente estabelecida pela escolha do vetor normal $\vec{n}$. A orientação positiva será aquela que permite percorrer a curva fronteira no sentido anti-horário (orientação positiva da curva) e a orientação negativa é estabelecida quando a curva fronteira é percorrida no sentido horário (orientação negativa da curva). Para superfícies fechadas, a orientação positiva é estabelecida pela escolha do vetor normal que aponta para fora da região delimitada por essa superfície, sendo usadas a *right-hand rules* (orientação positiva) ou a *left-hand rules* (orientação negativa) (STEWART, 2013).

Figura 3: Right-hand rule

[2] Uma discussão formal será realizada na seção 3.6

O cálculo da *integral de superfície* de uma função com domínio em $\mathbb{R}^3$ é dado pela seguinte definição:

Definição 2.22. Se S é uma superfície parametrizada pela equação $r(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{k} + z(u,v)\vec{k}$, com $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função definida sobre S então definimos a *integral de superfície* de f sobre S como

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(r(u,v))|r_{(u)} \times r_{(v)}|dA$$

onde $r_{(u)} = \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $r_{(v)} = \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Para o cálculo da integral de superfície de campos vetoriais temos uma definição análoga:

Definição 2.23. Se S é uma superfície parametrizada pela equação $r(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, com $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ e $\vec{F} : S \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial então a *integral de superfície* de $\vec{F}$ sobre S é dada por

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot dS = \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \quad \text{onde} \quad \vec{n} = \frac{r_{(u)} \times r_{(v)}}{|r_{(u)} \times r_{(v)}|}.$$

Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint\limits_S \vec{F}(r(u,v)) \cdot \frac{r_{(u)} \times r_{(v)}}{|r_{(u)} \times r_{(v)}|} dS \\ &= \iint\limits_D \left[\vec{F}(r(u,v)) \cdot \frac{r_{(u)} \times r_{(v)}}{|r_{(u)} \times r_{(v)}|} \right] |r_{(u)} \times r_{(v)}| dA, \end{aligned}$$

que resulta em

$$\iint\limits_S \vec{F} dS = \iint\limits_D \vec{F}(r(u,v)) \cdot (r_{(u)} \times r_{(v)}) dA.$$

Reunindo essas integrais e retomando as Definições 2.15, 2.17 e 2.18 (gradiente, rotacional e divergente) pode-se enunciar mais alguns teoremas de grande importância para este trabalho. O primeiro é o Teorema de Green que "fornece a relação entre uma integral de linha em torno de uma curva fechada simples[3] C e uma integral dupla na região D, do plano, compreendida por C" (STEWART, 2013).

Teorema 2.24 (Teorema de Green)**.** Seja C uma curva fechada simples, contínua por partes e orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q são funções reais, de

[3]Curvas simples são curvas que não possuem nenhum ponto de auto-intersecção, exceto possivelmente um no caso de curvas fechadas.

classe C^1 em uma região que contém D, então

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Existe também a versão vetorial deste teorema, quando passamos a tratar de campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ temos a expressão

$$\int_C \vec{F} \cdot dr = \iint_D (rot\vec{F}) \cdot \vec{k} dA$$

quando $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, $R = 0$ e $\vec{k}$ um dos vetor canônico de $\mathbb{R}^3$, ou ainda,

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D div\vec{F} dA$$

quando $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, e com $\vec{n}$ sendo o vetor normal à curva C.

Generalizando a ideia do Teorema de Green surge o Teorema de Stokes, que deixa o plano e trabalha com superfícies parametrizáveis e suas curvas fronteiras.

Teorema 2.25 (Teorema de Stokes)**.** Seja S uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira ∂S é uma curva fechada simples e lisa por partes, orientada positivamente. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial de classe C^1 em uma região que contém S. Então

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot dr = \iint_S (rot\vec{F}) \cdot dS$$

Partindo para uma dimensão a mais temos o Teorema do Divergente, que relaciona uma integral de superfície com uma integral tripla.

Teorema 2.26 (Teorema do Divergente)**.** Seja B uma região sólida simples de $\mathbb{R}^3$ e S a superfície fronteira de B, orientada positivamente. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial de classe C^1 em uma região que contém B. Então

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B div\vec{F} dV$$

De modo semelhante ao Corolário 2.12, os resultados enunciados permitem afirmar que o cálculo da integral de uma função ou campo vetorial sobre uma região pode ser substituído por uma integral sobre a fronteira dessa mesma região.

3 FORMAS DIFERENCIAIS

Finalizada a revisão das ferramentas do Cálculo, é preciso relembrar a motivação para essa próxima etapa, que é utilizar as *Formas Diferenciais* para tornar os resultados mais abrangentes, pois como visto, para cada tipo de região (curvas, superfícies ou porções do espaço) foi enunciado um teorema, aparentemente independente dos outros. Para que esse objetivo seja alcançado, o estudo será realizado com base nos trabalhos de Carmo (1994), Weintraub (1997) e Coutinho (2015).

3.1 DEFININDO 1-FORMAS DIFERENCIAIS

É comum, nos livros que falam do assunto, considerar as funções diferenciáveis $f : B \to \mathbb{R}^n$, com $B \subset \mathbb{R}^n$, como 0-*formas diferenciais* definidas em B. As 1-*formas diferenciais* estão definidas a seguir. A partir do conceito de 1-forma diferencial é possível construir e entender as demais formas.

Definição 3.1. Seja B um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Chamamos de 1-*forma diferencial* em B uma aplicação $\omega : B \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Quando fixamos p_0 em B, e consideramos $\omega(p_0, \vec{u})$ como função da variável vetorial $\vec{u}$, temos uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

2. Quando fixamos um vetor $\vec{u}^*$ em $\mathbb{R}^n$, e consideramos $\omega(p, \vec{u}^*)$ como função apenas de p, temos uma função diferenciável de B em $\mathbb{R}$.

Esta definição é bastante geral, mas é possível expressar qualquer 1-forma diferencial como uma expansão de 1-formas diferenciais que possuem uma expressão mais conveniente. Seja $\varepsilon = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Sabemos, recorrendo à Geometria Analítica, que dado um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, podemos reescrevê-lo na forma

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + \cdots + u_n\vec{e}_n, \text{ com } u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}.$$

Como consequência da propriedade (1) da Definição 3.1 temos

$$\begin{aligned}\omega(p;\vec{u}) &= \omega(p;u_1\vec{e}_1+\cdots+u_n\vec{e}_n)\\ &= \omega(p;u_1\vec{e}_1)+\cdots+\omega(p;u_n\vec{e}_n)\\ &= u_1\omega(p;\vec{e}_1)+\cdots+u_n\omega(p;\vec{e}_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Com base nesta propriedade vamos definir as seguintes aplicações:

$$dx_i : B\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad dx_i(p;\vec{u}) = u_i, \quad i = 1,\ldots,n,$$

isto é, a aplicação dx_i extrai a i-ésima coordenada do vetor $\vec{u}$. Note que, se $\vec{u} = \vec{e}_j$, temos $dx_i(p;\vec{e}_j) = \delta_{ij}$, sendo δ_{ij} o Delta de Kronecker, que vale 1 caso $i = j$ e 0 caso contrário. Portanto, a aplicação dx_i pertence à base dual relativa à base canônica ε, ou seja, as 1-formas diferenciais pertencem a um *espaço dual*[1].

Estas aplicações satisfazem às propriedades (1) e (2) da Definição 3.1, sendo portanto, 1-formas diferenciais. De fato, ao fixarmos um ponto p_0 qualquer em B, temos, para quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ com $\vec{u} = u_1\vec{e}_1+\ldots+u_n\vec{e}_n$ e $\vec{v} = v_1\vec{e}_1+\ldots+v_n\vec{e}_n$ e $a\in\mathbb{R}$:

$$dx_i(p_0;\vec{u}+a\vec{v}) = u_i + av_i = dx_i(p_0;\vec{u}) + a dx_i(p_0;\vec{v}).$$

Por outro lado, estas aplicações não dependem do ponto $p\in B$. Ao fixarmos um vetor $\vec{u}^* = u_1^*\vec{e}_1+\ldots+u_n^*\vec{e}_n$ em $\mathbb{R}^n$, temos $dx_i(p;\vec{u}^*) = u_i^*$, que é uma função constante, portanto, diferenciável.

Com base nestas aplicações podemos escrever toda 1-forma como uma expansão em termos das formas dx_i. Utilizando a Equação 4, dado que $u_i = dx_i(p,\vec{u})$, temos:

$$\omega(p;\vec{u}) = \omega(p;\vec{e}_1)dx_1(p;\vec{u})+\cdots+\omega(p;\vec{e}_n)dx_n(p;\vec{u}).$$

Nesta expansão cada vetor $\vec{e}_i$ é um vetor fixo em $\mathbb{R}^n$, de modo que cada termo $\omega(p,\vec{e}_i)$ é uma função diferenciável em B. Logo, pela propriedade (2) da Definição 3.1, podemos definir funções $a_i : B\to\mathbb{R}$ tais que $a_i(p) = \omega(p;\vec{e}_i)$. Com isso, a 1-forma ω passa a ter a seguinte representação:

$$\omega(p;\vec{u}) = a_1(p)dx_1(p;\vec{u})+\cdots+a_n(p)dx_n(p;\vec{u}).$$

Deixando de lado a notação que indica o ponto $p\in B$ e o vetor $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$\omega = a_1dx_1+\cdots+a_ndx_n.$$

[1]Uma discussão completa sobre espaços duais pode ser encontrada em Kostrikin e Manin (1989)

Essa é a representação mais comum para as 1-formas, com ela se torna mais fácil definirmos duas operações no conjunto das Formas Diferenciais, a Adição e o Produto por Escalar (neste caso, funções reais).

Definição 3.2 (Adição de 1-formas)**.** Sejam $\omega = a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$ e $\mu = b_1dx_1 + \cdots + b_ndx_n$ duas 1-formas, definidas em um subconjunto de $B \times \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$. A 1-forma $\omega + \mu$ é definida como

$$\omega + \mu = (a_1 + b_1)dx_1 + \cdots + (a_n + b_n)dx_n$$

Definição 3.3 (Produto por Escalar)**.** Sejam $\omega = a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$ uma 1-forma, definida em um subconjunto de $B \times \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$, e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função real. A 1-forma $f\omega$ é definida como

$$f\omega = (fa_1)dx_1 + \cdots + (fa_n)dx_n$$

onde fa_i denota a multiplicação usual entre funções.

Observação 3.4. O conjunto das 1-formas diferenciais, munido destas duas operações, forma um espaço vetorial. É possível provar que o conjunto $\{dx_1, ..., dx_n\}$ é uma base para esse espaço, como já referido. Uma demonstração detalhada pode ser encontrada no livro de Carmo (1994).

3.2 DEFININDO 2-FORMAS DIFERENCIAIS

Antes da definição de 2-formas, é preciso construir uma nova operação dentro do universo das Formas Diferenciais.

Definição 3.5 (Produto externo)**.** Sejam ω e μ duas 1-formas diferenciais, definidas no mesmo subconjunto de $B \times \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$, $p \in B$ e dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. O *produto externo* $(\omega \wedge \mu)(p; \vec{u}, \vec{v})$ é definido por

$$(\omega \wedge \mu)(p; \vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{vmatrix} \omega(p, \vec{u}) & \omega(p, \vec{v}) \\ \mu(p, \vec{u}) & \mu(p, \vec{v}) \end{vmatrix}.$$

Por se tratar de um determinante, o produto externo, também conhecido como produto cunha ($\wedge$), possui algumas propriedades listadas na Proposição 3.6 a seguir.

Proposição 3.6. Sejam ω, ω_1 e ω_2 1-formas diferenciais, definidas no mesmo subconjunto de $B \times \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$, então para quaisquer vetores em $\mathbb{R}^n$ são válidas as seguintes propriedades:

- Anti-reflexiva: $\omega \wedge \omega = 0$
- Anti-comutativa: $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$

- Distributiva (em relação à soma): $\omega \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \omega \wedge \omega_1 + \omega \wedge \omega_2$

Com essas três propriedades será possível entender melhor o comportamento das 2-formas.

Definição 3.7. Dado um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$, chamamos de 2-forma diferencial uma aplicação $\omega : B \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Quando fixamos p_0 em B, e consideramos $\omega(p_0;\vec{u},\vec{v})$ como função da variável vetorial $(\vec{u},\vec{v})$, temos uma aplicação bilinear alternada de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, isto é, ω é uma aplicação linear para cada uma de suas entradas e $\omega(p_0;\vec{u},\vec{v}) = -\omega(p_0;\vec{v},\vec{u})$

2. Quando fixamos os vetores $\vec{u}^*$ e $\vec{v}^*$, e consideramos $\omega(p;\vec{u}^*,\vec{v}^*)$ como função apenas de p, temos uma função diferenciável de B em $\mathbb{R}$.

Observação 3.8. Não foi por acaso que optou-se por enunciar primeiramente a Definição 3.5 (produto externo). Se considerarmos as 1-formas dx_i e dx_j ($i, j = 1,2,...,n$), o produto externo $dx_i \wedge dx_j$ satisfaz as condições da definição 3.7 (2-formas). De fato, para qualquer $p \in B$, ao fixarmos $(\vec{u}^*,\vec{v}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned}
(dx_i \wedge dx_j)(p;\vec{u}^*,\vec{v}^*) &= \det\begin{vmatrix} dx_i(p;\vec{u}^*) & dx_i(p;\vec{v}^*) \\ dx_j(p;\vec{u}^*) & dx_j(p;\vec{v}^*) \end{vmatrix} \\
&= \det\begin{vmatrix} u_i^* & v_i^* \\ u_j^* & v_j^* \end{vmatrix} \\
&= u_i^* v_j^* - u_j^* v_i^*,
\end{aligned}$$

uma função (constante) diferenciável. Por outro lado, fixando $p_0 \in B$, temos:

$$\begin{aligned}
(dx_i \wedge dx_j)(p_0;\vec{u}+a\vec{w},\vec{v}) &= \det\begin{vmatrix} dx_i(p_0;\vec{u}+a\vec{w}) & dx_i(p_0;\vec{v}) \\ dx_j(p_0;\vec{u}+a\vec{w}) & dx_j(p_0;\vec{v}) \end{vmatrix} \\
&= \det\begin{vmatrix} u_i + aw_i & v_i \\ u_j + aw_j & v_j \end{vmatrix} \\
&= u_i v_j + aw_i v_j - u_j v_i - aw_j v_i \\
&= (u_i v_j - u_j v_i) + a(w_i v_j - w_j v_i) \\
&= (dx_i \wedge dx_j)(p_0;\vec{u},\vec{v}) + a(dx_i \wedge dx_j)(p_0;\vec{w},\vec{v}),
\end{aligned}$$

sendo também válida a igualdade

$$(dx_i \wedge dx_j)(p_0;\vec{u},\vec{v}+a\vec{w}) = (dx_i \wedge dx_j)(p_0;\vec{u},\vec{v}) + a(dx_i \wedge dx_j)(p_0;\vec{u},\vec{w}).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(dx_i \wedge dx_j)(p;\vec{v},\vec{u}) &= v_iu_j - u_iv_j \\ &= -(u_iv_j - v_iu_j) \\ &= -(dx_i \wedge dx_j)(p_0;\vec{u},\vec{v}).\end{aligned}$$

Seguindo um raciocínio análogo ao da seção anterior podemos reescrever a expressão de uma 2-forma ω, como uma expansão em termos das 2-formas $dx_i \wedge dx_j$, ou seja,

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

para todo $p \in B$ e para quaisquer vetores $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, sendo $a_{ij} : B \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis para $i,j = 1,...,n$ com $i < j$. Podemos afirmar, portanto, que o produto externo entre duas 1-formas é uma 2-forma, embora nem toda 2-forma possa ser escrita como o produto externo de duas 1-formas. As operações de adição de 2-formas e de produto por uma função podem ser definidas de forma semelhante às definições válidas para 1-formas.

3.3 DEFININDO k-FORMAS DIFERENCIAIS

Primeiramente é preciso ampliar o conceito de produto externo

Definição 3.9 (Produto externo)**.** Sejam $\omega_1,\dots,\omega_n$, 1-formas diferenciais definidas no mesmo subconjunto de $B \times \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$, sejam $p \in B$ e $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n \in \mathbb{R}^n$, o produto externo $(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(p;\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$ é definido por:

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)(p;\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n) = \det[\omega_i(p;u_j)]$$

Com isso, podemos definir uma k-forma generalizando a definição de 2-formas:

Definição 3.10. Dado um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$, chamamos *k-forma diferencial* uma aplicação $\omega : B \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Quando fixamos p_0 em B, e consideramos $\omega(p_0;\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k)$ como função da variável vetorial $(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k)$, temos uma aplicação multilinear alternada de $(\mathbb{R}^n)^k$ em $\mathbb{R}$.

   Isto quer dizer que ω é uma aplicação linear para cada uma de suas entradas e trocando-se de posição duas entradas consecutivas de ω, o sinal também é trocado, isto é,

   $$\omega(p;\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_i,\vec{u}_{i+1},\dots,\vec{u}_n) = -\omega(p;\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_{i+1},\vec{u}_i,\dots,\vec{u}_n)$$

2. Quando fixamos os vetores $\vec{u}_1^*, \ldots, \vec{u}_k^*$ e consideramos $\omega(p; \vec{u}_1^*, \ldots, \vec{u}_k^*)$ como função apenas de p, temos uma função diferenciável de B em $\mathbb{R}$.

Assim como feito para as 1-formas e 2-formas, podemos escrever uma k-forma com uma expressão mais conveniente. Neste caso

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

para qualquer $p \in B$ e para quaisquer $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$, com $a_{i_1 \ldots i_k} : B \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Ou, de modo ainda mais simplificado, tomando conjuntos $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, onde $i_1 < \cdots < i_k$ e $1 \leq k \leq n$, de modo que $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, podemos escrever

$$\omega = \sum_I a_I dx_I.$$

3.4 O DIFERENCIAL EXTERNO

Relembrando a Definição 2.6 (diferencial total) foi visto que, dada uma função diferenciável $f : B \to \mathbb{R}$, o seu diferencial total é dado por

$$df = f_{x_1} dx_1 + \cdots + f_{x_n} dx_n.$$

Assim, podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 3.11. Seja $\omega = f$ uma 0-forma diferencial definida em B. O *diferencial externo* de ω é definido pelo diferencial total da função f, isto é,

$$d\omega = df = f_{x_1} dx_1 + \cdots + f_{x_n} dx_n$$

Vale lembrar que, inicialmente, os termos $dx_1, ..., dx_n$ foram tratados como variáveis independentes, sem preocupações mais profundas em relação ao seu significado. Contudo, nesta etapa, esses termos passarão a ser tratados como 1-formas, as mesmas definidas na seção 3.1. Para as formas de dimensões maiores, o diferencial externo também faz uso do diferencial total, do seguinte modo:

Definição 3.12. Seja $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma k-forma diferencial definida em $B \times (\mathbb{R}^n)^k$, $B \subset \mathbb{R}^n$. O *diferencial externo* de ω é dado por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

onde da_I é a derivada externa da 0-forma a_I.

Usando as propriedades do produto externo e também do diferencial total, temos os seguintes resultados:

Proposição 3.13. Sejam ω uma k-forma definida em um subconjunto de $B \times (\mathbb{R}^n)^k$, μ uma s-forma definida em um subconjunto de $B \times (\mathbb{R}^n)^s$, com $B \subset \mathbb{R}^n$ e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então são válidas as seguintes propriedades:

a) $d(\omega + \mu) = d\omega + d\mu$, se $k = s$

b) $d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^k \omega \wedge d\mu$

c) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$

Juntamente com a definição de diferencial externo, surge mais uma definição muito importante:

Definição 3.14. Uma k-forma ω é chamada *exata* quando $\omega = 0$ ou existe uma $(k-1)$-forma μ tal que $\omega = d\mu$. Além disso, uma k-forma ω é chamada *fechada* quando $d\omega = 0$.

Como consequência da propriedade (c) da proposição 3.13, podemos afirmar que toda forma diferencial exata é fechada. De fato, dada uma k-forma ω exata, então

i) se $\omega = 0$, então $d\omega = 0$, logo ω é fechada;

ii) se $\omega = d\mu$, para alguma $(k-1)$-forma μ, então $d\omega = d(d\mu) = 0$, logo ω é fechada.

A recíproca desta afirmação nem sempre é verdadeira, ou seja, uma forma fechada nem sempre é exata. No entanto, existe um resultado que ajuda a identificar quando isso acontece.

Definição 3.15. Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *simplesmente conexo* se toda curva fechada em B contorna somente pontos que pertencem a B.

Teorema 3.16 (Lema de Poincaré)**.** Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto simplesmente conexo e uma k-forma $\omega : B \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ com $d\omega = 0$. Então existe uma $(k-1)$-forma $\mu : B \times (\mathbb{R}^n)^{(k-1)} \to \mathbb{R}$ tal que $d\mu = \omega$.

Além desse resultado, é possível perceber que a Definição 3.14 lembra a Definição 2.16 (campos conservativos) e, de fato, elas estão relacionadas, como veremos a seguir.

3.5 A CORRESPONDÊNCIA FUNDAMENTAL

Nesta etapa será feita a ligação entre os dois temas centrais deste trabalho: o Cálculo e as Formas Diferenciais. Para isso serão feitas algumas correspondências entre entidades do Cálculo (funções e campos vetoriais) e as k-formas.

Vamos considerar o espaço $\mathbb{R}^3$. Já foi visto que, dado um subconjunto B de $\mathbb{R}^3$, uma função diferenciável $f : B \to \mathbb{R}$ corresponde à 0-forma $\omega = f$. Deste modo, o diferencial externo de ω equivale ao diferencial total de f, ou seja, $d\omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz$. Vetorialmente, podemos fazer uma correspondência entre $d\omega$ e o gradiente de f, representado por $\vec{\nabla} f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$.

Se considerarmos um campo vetorial $\vec{F} : B \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ e calcularmos o rotacional de $\vec{F}$ (definição 2.17), temos a expressão

$$rot\vec{F} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

Fazendo a correspondência do campo $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ com a 1-forma $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ e calculando o diferencial externo de ω, teremos

$$\begin{aligned}
d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\
d\omega &= (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dx + \\
&+ (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dy + \\
&+ (R_x dx + R_y dy + R_z dz) \wedge dz \\
d\omega &= P_x dx \wedge dx + P_y dy \wedge dx + P_z dz \wedge dx + \\
&+ Q_x dx \wedge dy + Q_y dy \wedge dy + Q_z dz \wedge dy + \\
&+ R_x dx \wedge dz + R_y dy \wedge dz + R_z dz \wedge dz \\
d\omega &= -P_y dx \wedge dy + P_z dz \wedge dx + Q_z dx \wedge dy - \\
&- Q_y dy \wedge dz - R_x dz \wedge dx + R_y dy \wedge dz \\
d\omega &= (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Isso quer dizer que se ω corresponde ao campo $\vec{F}$, então $d\omega$ corresponde a $rot\vec{F}$.

Por outro lado, ao calcularmos o divergente (definição 2.18) do campo $\vec{F}$, obteremos

$$div\vec{F} = (P_x + Q_y + R_z)$$

Fazendo a correspondência de $\vec{F}$ com a 2-forma $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ e calculando o diferencial externo de ω obtemos

$$\begin{aligned}
d\omega &= dP\wedge dy\wedge dz + dQ\wedge dz\wedge dx + dR\wedge dx\wedge dy \\
d\omega &= (Pxdx + P_y dy + P_z dz)dy\wedge dz + \\
&+ (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz)dz\wedge dx + \\
&+ (R_x dx + R_y dy + R_z dz)dz\wedge dx \\
d\omega &= P_x dx\wedge dy\wedge dz + P_y dy\wedge dy\wedge dz + P_z dz\wedge dy\wedge dz + \\
&+ Q_x dx\wedge dz\wedge dx + Q_y dy\wedge dz\wedge dx + Q_z dz\wedge dz\wedge dx + \\
&+ R_x dx\wedge dx\wedge dy + R_y dy\wedge dx\wedge dy + R_z dz\wedge dx\wedge dy \\
d\omega &= P_x dx\wedge dy\wedge dz + Q_y dx\wedge dy\wedge dz + R_z dx\wedge dy\wedge dz \\
d\omega &= (P_x + Q_y + R_z)dx\wedge dy\wedge dz
\end{aligned}$$

Portanto, se ω corresponde ao campo $\vec{F}$, o diferencial externo $d\omega$ corresponde a $div\vec{F}$.

A última correspondência é feita novamente com uma função $f : B \to \mathbb{R}$, desta vez usaremos a 3-forma $f dx\wedge dy\wedge dz$. No entando, ao calcularmos o diferencial externo de ω, temos

$$\begin{aligned}
d\omega &= df\wedge dx\wedge dy\wedge dz \\
&= (f_x + f_y + f_z)dx\wedge dy\wedge dz \\
&= f_x dx\wedge dx\wedge dy\wedge dz + f_y dy\wedge dx\wedge dy\wedge dz + f_z dz\wedge dx\wedge dy\wedge dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Observação 3.17. Esse resultado nos permite afirmar que uma 3-forma é sempre fechada em $\mathbb{R}^3$. Em geral toda k-forma é fechada quando definida em um espaço $\mathbb{R}^k$.

De forma resumida, podemos representar essa correspondência fundamental, em $\mathbb{R}^3$, com o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccc}
\text{funções} & \longleftrightarrow & \text{0-formas} \\
\text{grad}\downarrow & & \downarrow \text{d} \\
\text{campos vetoriais} & \longleftrightarrow & \text{1-formas} \\
\text{rot}\downarrow & & \downarrow \text{d} \\
\text{campos vetoriais} & \longleftrightarrow & \text{2-formas} \\
\text{div}\downarrow & & \downarrow \text{d} \\
\text{funções} & \longleftrightarrow & \text{3-formas}
\end{array}$$

Como consequência da correspondência fundamental, podemos concluir que:

a) O rotacional do gradiente de uma função é nulo. De fato, uma função f, de classe C^n corresponde a uma 0-forma $\omega = f$. Tomando $d\omega$, que corresponde ao gradiente de f (e que também equivale ao diferencial total de f), temos $d(d\omega) = 0$, pela propriedade do diferencial externo. Portanto:

$$d(d\omega) = 0 \longleftrightarrow rot(grad f) = 0$$

b) O divergente do rotacional de um campo $\vec{F}$ é nulo. De fato, um campo vetorial $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ corresponde a uma 1-forma $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Tomando $d\omega$, que corresponde ao rotacional de $\vec{F}$, temos $d(d\omega) = 0$, usando mais uma vez a propriedade do diferencial externo. Portanto:

$$d(d\omega) = 0 \longleftrightarrow div(rot\vec{F}) = 0$$

c) Se $\vec{F}$ é um campo conservativo, com função potencial f, então a forma diferencial ω, correspondente a $\vec{F}$ é exata. De fato, este é um caso particular. A correspondência é feita com o campo $\vec{F} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ e a 1-forma $\omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz$, uma vez que f é a função potencial do campo $\vec{F}$ e podemos escrever $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. Basta agora corresponder uma 0-forma μ à função f e facilmente mostramos que $\omega = d\mu$, logo, ω é exata.

Complementando a ideia da correspondência fundamental, definimos o operador $\star$, chamado de operador de Hodge:

Definição 3.18. Seja $\omega = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ uma k-forma definida em $B \times \mathbb{R}^n$, a $(n-k)$-forma $\star\omega$ é dada por:

$$\star\omega = (-1)^{\sigma} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-k}}$$

onde $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_{n-k}$. Além disso, $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ é obtido permutando o termos de $(1, 2, \ldots, n)$ de modo que σ representa o número de permutações realizadas.

Em $\mathbb{R}^3$, podemos entender o operador $\star$ da seguinte forma:

- $\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz$
- $\star dx = dy \wedge dz$, $\star dy = dz \wedge dx$, $\star dz = dx \wedge dy$
- $\star(dx \wedge dy) = dz$, $\star(dy \wedge dz) = dx$, $\star(dz \wedge dx) = dy$
- $\star(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$

Com esse operador, reescrevemos a correspondência fundamental:

- A uma função f pode corresponder à 0-forma $\omega = f$ ou à 3-forma $\star\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$
- A um campo vetorial $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ pode corresponder à 1-forma $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ ou à 2-forma $\star\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$

A escolha da dimensão da forma diferencial usada geralmente está relacionada à simetria da função e do campo vetorial. Se $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é tal que $\vec{F}(-\vec{x}) = -\vec{F}(\vec{x})$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, então escolhe-se uma forma diferencial de dimensão ímpar. Se, por outro lado, $\vec{F}(-\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, então escolhe-se uma forma diferencial de dimensão par.

3.6 *MANIFOLDS* (VARIEDADES)

Até o momento as formas diferenciais foram definidas em subconjuntos de $B \times (\mathbb{R}^n)^k$ sem muita preocupação com as particularidades destes subconjuntos. No entanto, uma especificação se faz necessária. Para isso, serão seguidas algumas ideias de Weintraub (1997) que define, primeiramente, o que são *manifolds* (ou variedades). Intuitivamente, um *manifold* de dimensão n é um conjunto que, localmente (isto é, em uma vizinhança de um ponto arbitrário) possui propriedades semelhantes a uma porção (conjunto aberto) do espaço $\mathbb{R}^n$. Por exemplo:

* Se $n = 0$, por convenção, $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ é um único ponto e por consequência um ponto isolado. Logo, um 0-*manifold* caracteriza-se por um conjunto com um único ponto ou por uma coleção de pontos isolados.
* Se $n = 1$, temos $\mathbb{R}$, a reta real. Assim, um 1-*manifold* é caracterizado por um conjunto de pontos cujas vizinhanças se assemelham a segmentos de retas. Logo, podemos considerar uma curva ou uma união de curvas.
* Se $n = 2$, temos o plano $\mathbb{R}^2$. Portanto um 2-*manifold* se caracteriza por um conjunto de pontos cujas vizinhanças se assemelham a um disco (plano) aberto. Logo, podemos considerar uma superfície ou uma união de superfícies.

O mesmo ocorre para espaços de maior dimensão. Se pensarmos novamente em pontos, curvas e superfícies parametrizáveis, etc., que foram usados no capítulo de revisão, os *manifolds* podem ser vistos como uma generalização.

Contudo, o objetivo desta seção é fazer uma preparação para o próximo assunto: a integração de Formas Diferenciais. Sendo assim, serão usados apenas *manifolds* limitados e preferencialmente fechados, com o intuito de evitar, por exemplo, casos como a integral abaixo:

$$\int_{\mathbb{R}} 1dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx$$

que não é definida.

De maneira mais formal, podemos usar uma definição mais abrangente, a de *manifolds diferenciáveis* (CARMO, 1994):

Definição 3.19. Um *manifold diferenciável de dimensão n* é um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ juntamente com uma família de homomorfismos $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, onde U_α é um conjunto aberto, que satisfaz as condições:

1) $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$ (para todo U_α);

2) Para cada par α, β, com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ e as funções $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ e $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ são também diferenciáveis;

Além disso, cada par (U_α, f_α) chamamos *parametrização* ou *sistema de coordenadas* de M.

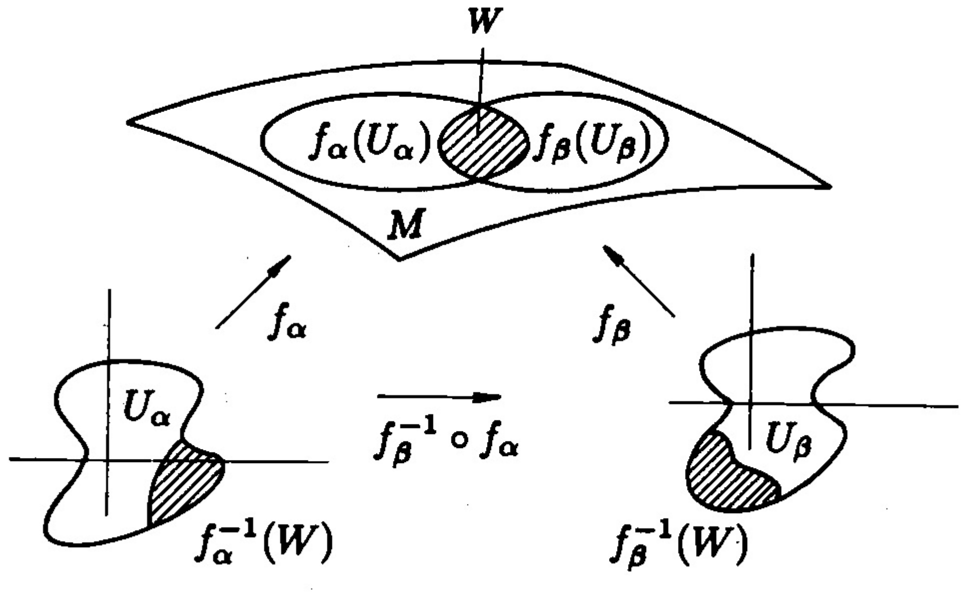

Figura 4: ***Manifolds*** **diferenciáveis (CARMO, 1994)**

Essa definição compreende os *manifolds* que possuem inúmeras parametrizações e que são, eventualmente, constituídos por várias partições (cada U_α é um conjunto diferente) que podem ou não se intersectar. Contudo, para simplificar o trabalho, serão usados *manifolds* mais simples, formados por um único “pedaço”.

Em relação à orientação de *manifolds*, será usada a seguinte definição:

Definição 3.20. Um manifold diferenciável M diz-se *orientável* quando existe uma família de aplicações $f_\alpha : U_\alpha \to M$ tal que, para cada par f_α e f_β, com $f_\alpha(U_\alpha) \cup f_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, o diferencial da função de mudança de coordenada $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ tem sinal positivo.

Observação 3.21. Também podemos dizer que, se M é um *n-manifold* orientado que possui fronteira, então sua fronteira ∂M é um $(n-1)$-*manifold* e sua orientação é induzida pela orientação de M. Essa demonstração pode ser encontrada em Carmo (1994).

Exemplo 3.22. Alguns exemplos simples de *manifolds* são:

a) O intervalo fechado $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é um 1-*manifold* cuja fronteira é o conjunto $\{a,b\}$, um 0-*manifold*. A orientação positiva é estabelecida a partir do extremo a para o extremo b.

b) O gráfico da função $y = f(x)$ em $\mathbb{R}^2$, $x \in [a,b]$, é um 1-*manifold* com fronteira $\{(a, f(a)), (b, f(b))\}$. A orientação positiva é estabelecida do extremo $(a, f(a))$ para o extremo $(b, f(b))$.

c) O círculo unitário é um 2-*manifold*, em $\mathbb{R}^2$, cuja fronteira é uma circunferência unitária. A orientação positiva é estabelecida no sentido anti-horário que induz a mesma orientação em sua fronteira.

Vamos considerar agora um *manifold* fechado e limitado M e fixar um ponto p em M. Podemos formar um espaço, de mesma dimensão que M, com todos os vetores tangentes a M em p, em outras palavras, todos os vetores com origem em p. Esse espaço é chamado *espaço tangente* a M em p e é denotado por T_pM. O próximo passo é construir, para cada p em M, as aplicações das definições 3.1, 3.7 e 3.10, definidas em conjuntos do tipo $M \times (T_pM)^k$, esse é o espaço onde serão definidas as Formas Diferenciais. Já o conjunto de todas as k-formas diferenciais definidas sobre um *manifold* M é, em geral, denotado por $\Lambda^k(M)$. Formalmente, definimos da seguinte maneira:

Definição 3.23. Seja M um *n-manifold* e T_pM o espaço tangente a M em p. Uma k-forma diferencial, definida em um *manifold* M é a aplicação $\omega : M \times (T_pM)^k \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

1. Quando fixamos p_0 em M, e consideramos $\omega(p_0;\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k)$ como função da variável vetorial $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k)$, temos uma aplicação multilinear alternada de $(T_pM)^k$ em $\mathbb{R}$.

2. Quando fixamos os vetores $\vec{u}_1^*,\ldots,\vec{u}_k^*$ e consideramos $\alpha(p;\vec{u}_1^*,\ldots,\vec{u}_k^*)$ como função apenas de p, temos uma função diferenciável de M em $\mathbb{R}$.

Além disso, dada uma k-forma ω definida em um *manifold* M, para cada parametrização $f_\alpha : U_\alpha \to M$ e para cada ponto $x \in U_\alpha$ definimos uma representação ω_α em $f_\alpha(U_\alpha)$ dada por:

$$\omega_\alpha(x;\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k) = \omega(f_\alpha(x);df_\alpha(\vec{v}_1),\ldots,df_\alpha(\vec{v}_k)).$$

Com base nesta definição, podemos considerar o conceito mais geral quando passamos de representações para aplicações entre *manifolds*:

Definição 3.24 (Pull-backs)**.** Sejam M e N dois *manifolds* e $\varphi : N \to M$ uma função diferenciável. Chamamos de *pull-back (ou imagem inversa)* de uma forma diferencial ω, definida em M, a forma $\varphi^*(\omega)$, definida em N, dada por:

$$\varphi^*(\omega)(p;\vec{v}_1,...,\vec{v}_n) = \omega(\varphi(p);d\varphi(\vec{v}_1),...,d\varphi(\vec{v}_n))$$

com $p \in N$ e $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n \in T_pN$

Observação 3.25. Aplicando a definição em espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, temos

a) Em $\mathbb{R}^3$, se $\varphi(t) = (f(t),g(t),h(t))$ e tomarmos $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$ então $dx = f'(t)dt$, $dy = g'(t)dt$ e $dz = h'(t)dt$. Assim, para uma 1-forma $\omega = adx + bdy + cdz$, tem-se
$$\varphi^*(\omega) = a(\varphi(t))f'(t)dt + b(\varphi(t))g'(t)dt + c(\varphi(t))h'(t)dt$$

b) De modo análogo, se $\varphi(u,v) = (f(u,v),g(u,v),h(u,v))$ e $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ e $z = h(u,v)$, então $dx = f_u(u,v)du + f_v(u,v)dv$, $dy = g_u(u,v)du + g_v(u,v)dv$ e $dz = h_u(u,v)du + h_v(u,v)dv$. Assim, para uma 1-forma $\omega = adx + bdy + cdz$, tem-se

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega) \quad &= \quad a(\varphi(u,v))(f_u(u,v)du + f_v(u,v)dv) \\ &\quad\quad +b(\varphi(u,v))(g_u(u,v)du + g_v(u,v)dv) \\ &\quad\quad +c(\varphi(u,v))(h_u(u,v)du + h_v(u,v)dv)\end{aligned}$$

Para uma 0-forma $\omega = f$, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o *pull-back* $\varphi^*(\omega)$ fica definido pela composição das funções φ e f, ou seja,

$$\varphi^*(\omega)(p) = \omega(\varphi(p)) = f(\varphi(p))$$

A definição 3.24 vale também para formas de maior dimensão, entretanto, para um melhor entendimento será preciso usar a seguinte propriedade:

Proposição 3.26. Sejam ω_1 e ω_2 duas 1-formas e φ uma função diferenciável. Então

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$$

Observação 3.27. Usando esta proposição, para uma função $\varphi(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$ e para uma 2-forma $\omega = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$, tem-se

$$\varphi^*(\omega) = a(\varphi(u,v))dg \wedge dh + b(\varphi(u,v))dh \wedge df + c(\varphi(u,v))df \wedge dg$$

Finalmente, se $\varphi(u,v,w) = (f(u,v,w), g(u,v,w), h(u,v,w))$ e $\omega = adx \wedge dy \wedge dz$, tem-se

$$\varphi^*(\omega) = adf \wedge dg \wedge dh$$

Também é possível relacionar o *pull-back* com o diferencial externo:

Teorema 3.28. Seja $\varphi : N \to M$ uma função diferenciável e seja ω uma k-forma definida sobre a imagem de φ. Então

$$d(\varphi^*(\omega)) = \varphi^*(d\omega)$$

Isso quer dizer que as duas operações comutam, podendo o cálculo ser realizado na sequência que for mais conveniente.

A primeira aplicação direta para os *pull-backs* é na mudança de sistemas de coordenadas, dentro de um mesmo *manifold*. Vamos considerar um *manifold* M e duas quaisquer parametrizações f_α e f_β. Então, para $p \in f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta)$, temos:

$$\omega(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \omega_\alpha(df_\alpha(\vec{v}_1), \ldots, df_\alpha(\vec{v}_k)).$$

Definindo $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$, a aplicação que faz a mudança de coordenadas , obtemos:

$$\begin{aligned}
(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)^* \omega_\beta(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) &= \omega_\beta(d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(\vec{v}_1), \ldots, d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(\vec{v}_k)) \\
&= \omega(df_\beta \circ d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(\vec{v}_1), \ldots, df_\beta \circ d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(\vec{v}_k)) \\
&= \omega_\alpha(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k).
\end{aligned}$$

Com todos esses conceitos reunidos temos as ferramentas necessárias para estudar a integração de Formas Diferenciais.

3.7 INTEGRAÇÃO DE FORMAS DIFERENCIAIS

Como já mencionado anteriormente, para evitar problemas de convergência, vamos considerar um *manifold* M compacto, isto é, fechado e limitado. Neste contexto, a integral de uma k-forma pode ser definida da seguinte maneira:

Definição 3.29. Seja M um *manifold* compacto e f_α uma qualquer parametrização de M. Seja N um subconjunto de M tal que $N = f_\alpha(U_\alpha)$, com $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e uma k-forma ω definida em M. Se $\omega_\alpha = a(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ é a representação de ω em U_α, a integral de ω sobre N é dada por:

$$\int_N \omega = \int_{U_\alpha} a(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

onde o termo da direita é calculado com uma integral múltipla em $\mathbb{R}^n$.

Podemos reescrever essa definição utilizando o conceito de *pull-back*, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\int_N \omega = \int_{U_\alpha} f_\alpha^*(\omega)$$

onde $f_\alpha^*(\omega)$ é a representação de ω em U_α.

Vale ressaltar que existe o caso em que N esta contido em uma região de M que possui outra parametrização f_β, ou seja, podemos escrever $N = f_\beta(U_\beta)$. A Definição 3.29 pode ser aplicada do mesmo modo e é ainda possível mostrar que o calculo não depende da parametrização escolhida, isto é

$$\int_N \omega = \int_{U_\alpha} f_\alpha^*(\omega) = \int_{U_\beta} f_\beta^*(\omega)$$

Pode-se estender o conceito de integração para qualquer *manifold* M composto por diferentes partições, cada uma com uma parametrização diferente. Para isso é necessário estabelecer uma partição da unidade, isto é, uma família de funções diferenciáveis $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ que satisfazem as condições:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i = 1,\ 0 \leq \varphi_i \leq 1;$

b) o suporte de $\varphi_i\omega$, dado pelo fecho do conjunto $\{p \in M;\ \varphi_i\omega(p) \neq 0\}$, está contido em algum $V_i = f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$.

Assim,

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i \omega.$$

Esse aprofundamento do tema não será abordado neste trabalho, mas pode ser encontrado no texto de (CARMO, 1994).

Particularmente, no caso em que ω é uma 0-forma, definida em um 0-*manifold* $M = \{p\}$ a integral é dada de modo especial pelo valor da função correspondente no ponto dado, isto é,

$$\int_M \omega = f(p).$$

Vejamos alguns exemplos para diferentes *manifolds*:

Exemplo 3.30. Seja $M = \mathbb{R}^n$. Se $B \subset \mathbb{R}^n$ é tal que $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, podemos definir $f : B \to B$ sendo a função identidade, de modo que $f^*(\omega) = \omega$, para uma forma ω definida em $\mathbb{R}^n$. Logo, se $\omega = a(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, então

$$\int_B \omega = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} a(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n$$

Exemplo 3.31. (Integral de linha) Seja C uma curva lisa em $\mathbb{R}^n$, dada pela equação paramétrica $r(t) = (x_1(t), \ldots x_n(t))$, $a \leq t \leq b$. Seja $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i dx_i$ uma 1-forma definida em $\mathbb{R}^n$. Então $r^*(\omega)$ é uma 1-forma definida em $\mathbb{R}$, dada por

$$r^*(\omega) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1(t), \ldots, x_n(t))x_i'(t)dt$$

de modo que

$$\int_C \omega = \int_a^b r^*(\omega) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1(t), \ldots, x_n(t))x_i'(t) \right) dt$$

Exemplo 3.32. (Integral de superfície) Seja S uma superfície lisa em $\mathbb{R}^n$, dada pela parametrização $r(u,v) = (x^{(1)}(u,v), \ldots x^{(n)}(u,v))$, $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. Seja $\omega = \sum\limits_{i<j} f_{ij} dx^{(i)} \wedge dx^{(j)}$ uma 2-forma definida em $\mathbb{R}^n$. Então, cada termo $dx^{(i)} \wedge dx^{(j)}$ é dado por:

$$dx^{(i)} \wedge dx^{(j)} = det \begin{bmatrix} x_u^{(i)}du & x_v^{(i)}dv \\ x_u^{(j)}du & x_v^{(j)}dv \end{bmatrix} = (x_u^{(i)}x_v^{(j)} - x_u^{(j)}x_v^{(i)})dudv$$

assim, $r^*(\omega)$ é uma 2-forma em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$r^*(\omega) = \sum_{i<j} f_{ij}(x^{(1)}(u,v), \ldots, x^{(n)})(x_u^{(i)}x_v^{(j)} - x_u^{(j)}x_v^{(i)})dudv$$

e portanto

$$\int_S \omega = \int_c^d \int_a^b r^*(\omega) = \int_c^d \int_a^b \left(\sum_{i<j} f_{ij}(x^{(1)}(u,v),\ldots,x^{(n)})(x_u^{(i)}x_v^{(j)} - x_u^{(j)}x_v^{(i)}) \right) dudv.$$

3.8 O TEOREMA DE STOKES GENERALIZADO

O resultado mais importante deste capítulo relaciona a integral de uma $k-1$-forma ω sobre a fronteira de um *k-manifold* M com a integral do diferencial externo $d\omega$ sobre o próprio *manifold* M, isso feito do seguinte modo:

Teorema 3.33 (Teorema de Stokes Generalizado)**.** Seja M um *k-manifold* em $\mathbb{R}^n$, e seja ω uma $(k-1)$-forma diferencial definida na fronteira de M. Então

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Demonstração. Será dada uma ideia para a demonstração deste Teorema, uma vez que a demonstração formal exige ferramentas que não foram abordadas neste trabalho. Portanto, seja

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} A^{(j)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

então

$$\mu = d\omega = (A_{x_1}^{(1)} + \cdots + A_{x_k}^{(k)}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Assim, devemos provar que $\int_M \mu = \int_{\partial M} \omega$.

Para facilitar a demonstração, vamos definir as formas diferenciais

$$\omega^{(i)} = A^{(i)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k \;\text{ e }\; \mu^{(i)} = A_{x_i}^{(i)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

É fácil perceber que

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega^{(1)} + \cdots + \int_{\partial M} \omega^{(k)} \;\text{ e }\; \int_M \mu = \int_M \mu^{(1)} + \cdots + \int_M \mu^{(k)}.$$

Logo, basta mostrar, para cada i, que

$$\int_{\partial M} \omega^{(i)} = \int_M \mu^{(i)} \tag{14}$$

Vamos definir, agora, uma função diferenciável $f : B \to M$, tal que

i) $f = (f_1, \ldots, f_k)$;

ii) B é um conjunto do tipo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$;

iii) $f(\partial B) = \partial M$;

Mais uma vez, com o intuito de simplificar a demonstração, será feita a prova para $i = 1$. Contudo, vale ressaltar que, para outros valores de i, a demonstração se torna análoga.

Considerando o segundo termo na equação 14, temos

$$\begin{aligned}
\int_M \mu^{(1)} &= \int_M A^{(1)}_{x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_B A^{(1)}_{x_1}(f) df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} A^{(1)}_{x_1}(f) df_1 \wedge \cdots \wedge df_k.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{a_1}^{b^1} A^{(1)}_{x_1}(f) df_1 = A^{(1)}(f(b_1, x_2, \ldots, x_k)) - A^{(1)}(f(a_1, x_2, \ldots, x_k))$$

temos

$$\int_M \mu^{(1)} = \int_{a_2}^{b^2} \cdots \int_{a_k}^{b^k} [A^{(1)}(f(b_1, x_2, \ldots, x_k)) - A^{(1)}(f(a_1, x_2, \ldots, x_k))] dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k. \tag{16}$$

Por outro lado, tomando o termo do lado esquerdo da equação 14, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega^{(1)} &= \int_{\partial M} A^{(1)} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{f(\partial B)} A^{(1)} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{\partial B} A^{(1)}(f) df_2 \wedge \cdots \wedge df_k \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_k}^{b_k} A^{(1)}(f) df_2 \wedge \cdots \wedge df_k
\end{aligned}$$

Note que

$$\int_{a_1}^{b_1} A^{(1)}(f) = A^{(1)}(f(b_1, ..., x_k)) - A^{(1)}(f(a_1, ..., x_k))$$

logo, podemos afirmar que

$$\int_{\partial M} \omega^{(1)} = \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_k}^{b_k} [A^{(1)}(f(b_1,\ldots,x_k)) - A^{(1)}(f(a_1,\ldots,x_k))] df_2 \wedge \cdots \wedge df_k \tag{18}$$

Se compararmos as equações 18 e 16 fica claro que são equivalentes. Generalizando para todos os valores de i, prova-se o Teorema. □

Agora, vejamos como este resultado é interpretado. Vamos recordar novamente alguns resultados vistos no capítulo 2, será possível perceber que se trata de uma generalização de todos eles. De fato, vamos retomar o Corolário do TFC:

"Seja f uma função definida no intervalo $N = [a,b]$ e F uma primitiva de f, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\text{"}$$

Usando a correspondência fundamental, fazemos

$$\begin{array}{ccl} F & \longleftrightarrow & 0-forma\ \omega = F\ (definida\ em\ \partial N = \{-a,b\}) \\ \dfrac{dF}{dx} = f & \longleftrightarrow & 1-forma\ d\omega = fdx\ (definida\ em\ N = [a,b]) \end{array}$$

Tomando $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ definida por $\varphi(t) = t$, reescrevemos o corolário do TFC da seguinte forma:

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega$$

Agora relembramos o Teorema de Green, no plano:

"Seja C uma curva simples, fechada e contínuas por partes, orientada positivamente e seja D a região delimitada por C. Se P e Q são funções reais, de classe C^1 em uma região que contém D. Então:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA\text{"}$$

Usando a correspondência fundamental novamente, fazemos

$$\begin{array}{ccl} P\ e\ Q & \longleftrightarrow & 1-forma\ \omega = Pdx + Qdy \\ (Q_x - P_y) & \longleftrightarrow & 2-forma\ d\omega = (Q_x - P_y)dx \wedge dy \end{array}$$

Tomando $\varphi : T_pD \to D$ (mantendo a orientação em D), representamos o Teorema de Green da seguinte forma:

$$\int_D d\omega = \int_C \omega$$

com $C = \partial D$.

O próximo resultado é o Teorema de Stokes: "Seja S uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira ∂S é uma curva fechada simples, lisa por partes e orientada positivamente. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial de classe C^1 em uma região que contém S. Então

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot dr = \iint_S (rot\vec{F}) \cdot dS\text{"}$$

Usando a correspondência fundamental, fazemos

$$\begin{array}{lcl} \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} & \longleftrightarrow & 1-forma\ \omega = Pdx + Qdy + Rdz \\ rot\vec{F} & \longleftrightarrow & 2-forma\ d\omega = (R_y + Q_z)dy \wedge dz + \\ & & +(P_z + R_x)dz \wedge dx + (Q_x + P_y)dx \wedge dy \end{array}$$

Tomando $\varphi : T_pS \to S$ (mantendo a orientação em S), reescrevemos o Teorema de Stokes da seguinte forma:

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

Por fim, relembrando o Teorema do divergente (ou de Gauss):

"Seja B uma região sólida simples e S a superfície fronteira de B, orientada positivamente. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial de classe C^1 em uma região que contém B. Então

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iiint_B (div\vec{F}) \cdot dV\text{"}$$

Mais uma vez, usando a correspondência fundamental, fazemos

$$\begin{array}{lcl} \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} & \longleftrightarrow & 2-forma\ \omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \\ div\vec{F} & \longleftrightarrow & 3-forma\ d\omega = (P_x + Q_y + R_z)dx \wedge dy \wedge dz \end{array}$$

Tomando $\varphi : T_pB \to B$ (mantendo a orientação em B), reescrevemos o Teorema do Divergente da seguinte forma:

$$\int_B d\omega = \int_S \omega$$

com $S = \partial B$.

Como visto, em todos os casos, os teoremas puderam ser reescritos e as expressões resultantes diferem apenas de acordo com a região e o espaço envolvidos. Em outras palavras, todos os resultados enunciados anteriormente podem ser interpretados como casos particulares do Teorema de Stokes Generalizado para Formas Diferenciais.

4 APLICAÇÕES

4.1 AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

James Clerk Maxwell (1831 - 1879) foi um físico e matemático escocês conhecido por formalizar a teoria moderna do eletromagnetismo. Em seu trabalho mais notável, publicado em 1865, Maxwell mostra que fenômenos elétricos e magnéticos estão intimamente relacionados e fazem parte de uma única teoria. Deste contexto surgem as Equações de Maxwell, batizadas em sua honra por terem sido estudadas e aperfeiçoadas por ele. Nelas são considerados o campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$, os quais possuem uma relação entre si e dependem também da densidade de carga elétrica ρ e da densidade de corrente elétrica $\vec{J}$ (OWERRE, 2010). As equações de Maxwell são quatro (FEYNMAN, 1977):

- Lei de Faraday: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
  Relaciona o surgimento de campos elétricos a variações temporais em campos magnéticos.

- Lei de Ampère: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$
  Relaciona o surgimento de campos magnéticos ao movimento de cargas ou a variações temporais de campos elétricos.

- Lei de Gauss para campos magnéticos: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
  Mostra que fluxo de um campo magnético em uma superfície fechada sempre se anula (não existem monopolos magnéticos).

- Lei de Gauss para campos elétricos: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
  Relaciona o fluxo de um campo elétrico sobre uma superfície fechada com a carga elétrica na região interior a essa superfície.

Segundo estas equações a velocidade de qualquer onda eletromagnética (em particular a velocidade da luz) é constante, sendo dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Até o início do Século XX supunha-se que as Equações de Maxwell precisavam ser modificadas para abrigar as Transformações de Galileu entre sistemas inerciais. Acreditava-se que a descrição dos fenômenos eletromagnéticos pelas Equações de Maxwell era apenas válida no sistema vinculado ao *ether*, substância invisível que permearia todo o espaço. O fato de as equações descreverem corretamente fenômenos eletromagnéticos em diferentes sistemas inerciais era considerado mera coincidência. Albert Einstein (1879 - 1955), complementou os trabalhos de Maxwell com a Teoria da Relatividade. Einstein não acreditava nessas coincidências, mas sim que as Equações de Maxwell eram válidas em todos os sistemas inerciais. Einstein então lançou as bases de uma nova Mecânica, baseada em dois postulados (GRIFFITHS, 1999):

- O princípio da relatividade: Todas as leis da Física são aplicáveis em todos os sistemas inerciais.
- A universalidade da velocidade da luz: no vácuo, a velocidade da luz é a mesma para qualquer observador, independentemente da sua movimentação.

Assim, de acordo com esses postulados, qualquer referencial se torna adequado para o cálculo das equações de Maxwell, sendo as velocidades das cargas calculadas também em relação a esse referencial. Isso nos permite transportar as equações para o universo das Formas Diferenciais usando a correspondência fundamental. Para facilitar a discussão vamos considerar as equações no vácuo, estabelecendo a velocidade da luz como unidade, de modo que $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$. Em ambientes macroscópicos, a forma das equações pode ser modificada levadas em consideração ainda outros campos auxiliares, como a polarização e a magnetização (JACKSON, 1999).

Em seguida, estabelecemos as seguintes correspondências:

- Para o campo elétrico:

$$\vec{E} = E^x\vec{i} + E^y\vec{j} + E^z\vec{k} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} E = E^x dx + E^y dy + E^z dz \\ \tilde{E} = E^x dy \wedge dz + E^y dz \wedge dx + E^z dx \wedge dy \end{array}$$

- Para o campo magnético

$$\vec{B} = B^x\vec{i} + B^y\vec{j} + B^z\vec{k} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} B = B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy \\ \tilde{B} = B^x dx + B^y dy + B^z dz \end{array}$$

- Para a corrente elétrica

$$\vec{J} = J^x\vec{i} + J^y\vec{j} + J^z\vec{k} \quad \longleftrightarrow \quad J_* = J^x dy \wedge dz + J^y dz \wedge dx + J^z dx \wedge dy$$

- Para a carga elétrica

$$\rho \quad \longleftrightarrow \quad \rho_* = \rho dx \wedge dy \wedge dz$$

Usando como referência um sistema inercial de dimensão quatro, construiremos também o *campo tensor eletromagnético* (LEE, 2000) definido por:

$$F^{ij} = \left\{ \begin{matrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{matrix} \right\}, \ 0 \leq i \leq 3, \ 0 \leq j \leq 3$$

e com isso definir a forma diferencial

$$F = \sum_{i<j} F^{ij} dx_i \wedge dx_j \quad (x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$$

onde $F^{01} = E^x$, $F^{02} = E^y$, $F^{03} = E^z$, $F^{12} = B^z$, $F^{13} = B^y$, $F^{23} = B^x$, que nos permite tratar o campo elétrico e o campo magnético como um único objeto.

Deve-se ressaltar agora algumas particularidades do espaço em que essas formas estão definidas. Usualmente, as equações são estudadas no tempo presente (GRIFFITHS, 1999), de modo que a variável “tempo”não influencia os cálculos de forma significativa. Contudo, o modelo de Maxwell obedece à Teoria da Relatividade, como já mencionado, portanto é necessário adequar os cálculos a ela, de modo que o referencial usado terá influência direta do tempo. Assim, os processos físicos envolvidos serão tratados como *eventos*. Cada *evento* é dado por uma localização (x, y, z) no espaço e uma localização (t) no tempo.

Acrescentando esta variável (t), no entanto, surgem alguns problemas pois, novamente na Relatividade, ela possui um comportamento diferente das demais componentes. Como consequência, o espaço usado para definir os campos elétrico e magnético não será um conjunto $\mathbb{R}^4$ usual. Para contornar este problema, será usado o conjunto $\mathbb{R}^{1,3}$, conhecido por *Minkowski spacetime*, em referência ao matemático alemão Hermann Minkowski (1864 - 1909). Neste espaço, a principal diferença está relacionada à sua métrica, ou à distância entre dois eventos:

Métrica no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$	$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (dt)^2$
Métrica no espaço Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$	$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (dt)^2$

Ao definir as formas E, $\tilde{E}$, B e $\tilde{B}$ neste espaço e calcular o diferencial externo de cada uma delas, obtemos:

$$\begin{aligned}
dE &= (E^z_y - E^y_z)dy\wedge dz + (E^x_z - E^z_x)dz\wedge dx + (E^y_x - E^x_y)dx\wedge dy - (\frac{\partial}{\partial t}E)\wedge dt \\
d\tilde{E} &= (E^x_x + E^y_y + E^z_z)dx\wedge dy\wedge dz + (\frac{\partial}{\partial t}\tilde{E})\wedge dt \\
d\tilde{B} &= (B^x_x + B^y_y + B^z_z)dx\wedge dy\wedge dz + (\frac{\partial}{\partial t}\tilde{B})\wedge dt \\
d\tilde{B} &= (B^z_y - B^y_z)dy\wedge dz + (B^x_z - B^z_x)dz\wedge dx + (B^y_x - B^x_y)dx\wedge dy - (\frac{\partial}{\partial t}\tilde{B})\wedge dt
\end{aligned}$$

Deste modo, as equações de Maxwell tomam uma nova aparência:

$$dE = \frac{\partial}{\partial t}B - \left(\frac{\partial}{\partial t}E\right)\wedge dt \qquad dB = \left(\frac{\partial}{\partial t}B\right)\wedge dt \tag{20}$$

$$d\tilde{B} = J + \frac{\partial}{\partial t}E - \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{B}\right)\wedge dt \qquad d\tilde{E} = \rho_* - \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{E}\right) \tag{21}$$

Retornando agora à forma F, é possível unificar as equações (20) por meio do diferencial externo dF:

$$\begin{aligned}
dF &= dE\wedge dt - dB \\
dF &= \left[\frac{\partial}{\partial t}B - \left(\frac{\partial}{\partial t}E\right)\wedge dt\right]\wedge dt - \left(\frac{\partial}{\partial t}B\right)\wedge dt \\
dF &= \left(\frac{\partial}{\partial t}B\right)\wedge dt - \left(\frac{\partial}{\partial t}B\right)\wedge dt \\
dF &= 0
\end{aligned}$$

De modo análogo, podemos unificar as equações (21). Primeiramente, aplica-se o operador $\star$ de Hodge à forma F, seguindo as regras do espaço Minkowski:

Definição 4.1. Seja ω uma k-forma definida no espaço $\mathbb{R}^{1,3}$, definimos a $(4-k)$-forma $\star\omega$ da seguinte maneira:

- Se $\omega = dt\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k-1}}$ então $\star\omega = (-1)^\sigma dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{4-k}}$ (com $i_1 < \cdots < i_{k-1}$, $j_1 < \cdots < j_{4-k}$).
- Se $\omega = dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ então $\star\omega = (-1)^\sigma dt\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{3-k}}$ (com $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_{3-k}$).

Em ambos os casos, $(i_1,\dots,i_{k-1},j_1,\dots,j_{4-k})$ e $(i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_{3-k})$ são obtidos permutando-se os elementos de $(1,2,3)$ de modo que σ representa o número de permutações realizadas.

Aplicando a definição 4.1 à forma F obtemos

$$\star F = \tilde{E} + \tilde{B} \wedge dt$$

Em seguida, calcula-se o diferencial externo $d \star F$:

$$\begin{aligned}
d \star F &= d\tilde{E} - d\tilde{B} \wedge dt \\
d \star F &= \rho_* - \left(\frac{\partial}{\partial t} E\right) \wedge dt + \left[J_* + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{E} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{B}\right) \wedge dt\right] \wedge dt \\
d \star F &= \rho_* - \left(\frac{\partial}{\partial t} E\right) \wedge dt + J_* \wedge dt + \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{E}\right) \wedge dt \\
d \star F &= \rho_* + J_* \wedge dt
\end{aligned}$$

Observando o segundo termo desta igualdade, pode-se perceber que a forma ρ_*, referente à carga elétrica, e a forma J_*, referente à corrente elétrica, aparecem juntas, o que permite definir uma nova forma diferencial J que reúne ambas em um único objeto, assim como foi feito com os campos elétrico a megnético:

$$J = \rho_* + J_* \wedge dt$$

Também podemos afirmar que $\star F$ é exata e consequentemente J é fechada uma vez que $dJ = d(d \star F) = 0$. Também é possível mostrar que J é fechada com a *equação da continuidade* (por isso a motivação para a construção da forma J), que pode ser deduzida a partir das equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\rho_t$$

que implica em

$$\begin{aligned}
dJ &= d\rho * + dJ_* \wedge dt \\
dJ &= \rho_t dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt + (J_x^x + J_y^y + J_z^z) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \\
dJ &= \rho_t dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt - \rho_t dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \\
dJ &= 0
\end{aligned}$$

Em resumo, na linguagem das Formas Diferenciais, podemos tratar os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ como uma única forma diferencial F e, do mesmo modo, tratar a carga elétrica ρ e a corrente elétrica $\vec{J}$ como a forma J. Consequentemente as Equações de Maxwell se reduzem a metade, sendo elas:

$$dF = 0 \qquad \text{e} \qquad d \star F = J.$$

Utilizando formas diferenciais para escrever as equações de Maxwell é possível extender a teoria para um espaço com mais dimensões Isso torna-se muito útil na Teoria das Cordas, na qual o espaço-tempo é 10-dimensional, além disso, as dimensões dos campos não precisam ser necessariamente iguais (ZWIEBACH, 2009).

4.2 A EQUAÇÃO DO CALOR

Assim como feito com as Equações de Maxwell, a ideia para esta seção é tornar o resultado enunciado mais gerais, fazendo-o valer para espaços de dimensões quaisquer. Para isso, vamos considerar a seguinte equação parcial de segunda ordem (FLANDERS, 1989):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{ou} \quad u_{xx} + u_{yy} = u_t$$

Esta equação é chamada de *equação do calor*. Por meio de sua solução u é possível descrever a temperatura de um objeto (em um determinado ponto) em relação ao tempo. Supondo que a solução u esta definida em uma região de coordenadas x, y e t, que contém uma região B com fronteira, vamos considerar a 2-forma

$$\omega = (u_x dy - u_y dx) \wedge dt - u dx \wedge dy$$

Então

$$\begin{aligned}
d\omega &= (du_x \wedge dy - du_y \wedge dx) \wedge dt - du \wedge dx \wedge dy \\
d\omega &= (u_{xx} dx \wedge dy + \cancel{u_{xt} dt \wedge dy} - u_{yy} dy \wedge dx - \cancel{u_{yt} dt \wedge dx}) \wedge dt - u_t dt \wedge dx \wedge dy \\
d\omega &= (u_{xx} dx \wedge dy \wedge dt - u_{yy} dy \wedge dx \wedge dt - u_y dt \wedge dx \wedge dy \\
d\omega &= (u_{xx} + u_{yy} - u_t) dx \wedge dy \wedge dt = 0
\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Stokes (Generalizado), podemos afirmar que

$$\int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega = 0$$

Vamos considerar, agora, a 2-forma

$$\mu = (2uu_x dy - 2uu_y dx) \wedge dt - u^2 dx \wedge dy$$

Então

$$\begin{aligned}
d\mu &= (2d(uu_x)\wedge dy - 2d(uu_y)\wedge dx)\wedge dt - du^2\wedge dx\wedge dy \\
d\mu &= (2u_x^2 dx\wedge dy + \cancel{2u_xu_t dt\wedge dy} + 2uu_{xx}dx\wedge dy + \cancel{2uu_{xt}dt\wedge dy})\wedge dt - \\
&\quad -(2u_y^2 dy\wedge dx + \cancel{2u_yu_t dt\wedge dx} + 2uu_{yy}dy\wedge dx + \cancel{2uu_{yt}dt\wedge dx})\wedge dt - \\
&\quad -2uu_t dt\wedge dx\wedge dy \\
d\mu &= 2[(u_x^2 + uu_{xx})dx\wedge dy\wedge dt - (u_y^2 + u_{yy})dy\wedge dx\wedge dt - uu_t dt\wedge dx\wedge dy] \\
d\mu &= 2[u_x^2 + u_y^2 + \cancel{u(u_{xx} + u_{yy} - u_t)}]dt\wedge dx\wedge dy \\
d\mu &= 2(u_x^2 + u_y^2)dt\wedge dx\wedge dy
\end{aligned}$$

Assim, usando o Teorema de Stokes novamente, temos:

$$\int_{\partial B}\mu = \int_B \mu = 2\int_B (u_x^2 + u_y^2)dt\wedge dx\wedge dy$$

Vamos supor que B tem o formato de um cilindro $T\times[0,b]$, onde T é uma região do plano xy. Então

$$\partial B = \partial T\times[0,b] + T\times\{b\} - T\times\{0\}$$

Logo

$$\int_{\partial B}\mu = \int_{\partial T\times[0,b]}\mu + \int_{T\times\{b\}}\mu - \int_{T\times\{0\}}\mu$$

Para continuar o raciocínio será usado um resultado auxiliar:

Proposição 4.2. Se u se anula na base $T\times\{0\}$ e na superfície lateral $\partial T\times[0,b]$, então u é identicamente nula no interior de B.

Com isso, a integral $\int_{\partial B}\mu$ se reduz a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B}\mu &= \int_{T\times\{b\}} 2u(u_x dy - u_y dx)\wedge dt - u^2 dx\wedge dy \\
\int_{\partial B}\mu &= -\int_T u^2(x,y,b)dx\wedge dy
\end{aligned}$$

Portanto

$$-\int_T u^2(x,y,b)dx\wedge dy = 2\int_B (u_x^2 + u_y^2)dt\wedge dx\wedge dy$$

$$2\int_B (u_x^2 + u_y^2)dt\wedge dx\wedge dy + \int_T u^2(x,y,b)dx\wedge dy = 0$$

Nesta equação, os dois termos são positivos, logo podemos estabelecer as seguintes condições:

$$\begin{cases} u_x = u_y = 0 \text{ em B} \\ u = 0 \text{ em } T \times \{b\} \end{cases}$$

Podemos, finalmente, afirmar que $u = 0$ em B, uma vez que isso ocorre na base $T \times \{b\}$ e não houve variações no intervalo $[0,b]$ (u_x e u_y são nulas em B). Conclui-se que se a distribuição de temperatura é a mesma para $t = 0$ e na fronteira de B, então ela também coincide no interior de B.

Vamos generalizar essa ideia para $(n+1)$ dimensões. Sejam $x_1, \ldots, x_n, t$ nossas variáveis e a equação do calor

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = u_t$$

Recorrendo ao operador $\star$ de Hodge, definimos a forma diferencial

$$\mu = 2u(\star du) \wedge dt + (-1)^{n-1} u^2 dx_N$$

onde $dx_N = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Assim

$$d\mu = 2d[u(\star du)] \wedge dt + (-1)^{n-1} du^2 \wedge dx_N$$

A expressão $u(\star du)$ pode ser reescrita do seguinte modo

$$\begin{aligned} u(\star du) &= u\left(\star \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} dx_i\right) \\ u(\star du) &= \left(\sum_{i=1}^{n} u u_{x_i} \star dx_i\right) \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} d[u(\star du)] &= d\left(\sum_{i=1}^{n} u u_{x_i} \star dx_i\right) \\ d[u(\star du)] &= \sum_{i=1}^{n} d(u u_{x_i}) \wedge (\star dx_i) \\ d[u(\star du)] &= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} du \wedge (\star dx_i) + \sum_{i=1}^{n} u du_{x_i} \wedge (\star dx_i) \end{aligned}$$

Como

$$du \wedge (\star dx_i) = u_t dt \wedge (\star dx_i) + \sum_{j=1}^{n} u_{x_j} dx_j \wedge (\star dx_i)$$

e $u_{x_j}dx_j \wedge (\star dx_i)$ se anula sempre que $i \neq j$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} du \wedge (\star dx_i) = \sum_{i=1}^{n} [u_t dt \wedge (\star dx_i) + u_{x_i}^2 dx_N]$$

De modo análogo,

$$du_{x_i} \wedge (\star dx_i) = u_{x_i t} dt \wedge (\star dx_i) + \sum_{j=1}^{n} u_{x_i x_j} dx_j \wedge (\star dx_i)$$

e $u_{x_i x_j} dx_j \wedge (\star dx_i)$ se anula sempre que $i \neq j$, logo

$$\sum_{i=1}^{n} u du_{x_i} \wedge (\star dx_i) = \sum_{i=1}^{n} [u u_{x_i t} dt \wedge (\star dx_i) + u u_{x_i x_i} dx_N]$$

A expressão para $d\mu$ se torna

$$\begin{aligned}
d\mu &= 2\sum_{i=1}^{n} [u_t dt \wedge (\star dx_i) + u_{x_i}^2 dx_N] + 2\sum_{i=1}^{n} [u u_{x_i t} dt \wedge (\star dx_i) \\
&\quad + u u_{x_i x_i} dx_N] + (-1)^{n-1} 2 u u_t dt \wedge dx_N \\
d\mu &= 2\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx_N \wedge dt + (-1)^n 2 \sum_{i=1}^{n} u u_{x_i x_i} dt \wedge dx_N + (-1)^{n-1} 2 u u_t dt \wedge dx_N \\
d\mu &= 2\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx_N \wedge dt
\end{aligned}$$

Portanto, usando o Teorema de Stokes mais uma vez, temos

$$\int_{\partial B} \mu = \int_{B} d\mu = 2\int_{B} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx_N \wedge dt$$

Agora, seja T uma região de $\mathbb{R}^n$, tal que $B = T \times [0,b]$. Então

$$\begin{aligned}
\partial B &= \partial T \times [0,b] + (-1)^n T \times \partial [0,b] \\
&= \partial T \times [0,b] + (-1)^n T \times \{b\} + (-1)^{n-1} T \times \{0\}
\end{aligned}$$

Supondo que u se anula em $\partial T \times [0,b]$ e também em $T \times \{0\}$, como na proposição 4.2 e considerando $dt = 0$ em $T \times \{b\}$ (pois $t = b$ é constante) temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} \mu &= \int_{\partial B} 2u(\star du) \wedge dt + (-1)^{n-1} u^2 dx_N \\
\int_{\partial B} \mu &= (-1)^n \int_{T \times \{b\}} (-1)^{n-1} u^2 dx_N = -\int_{T} u^2(x_1, \ldots, x_n, b) dx_N
\end{aligned}$$

Logo

$$-\int_T u^2(x_1,\ldots,x_n,b)dx_N = 2\int_B \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx_N \wedge dt$$

$$2\int_B \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx_N \wedge dt + \int_T u^2(x_1,\ldots,x_n,b)dx_N = 0$$

Como ocorreu anteriormente, ambos os termos são positivos, portanto

$$\begin{cases} u_{x_i} = 0 \ \text{ em B, para } i = 1,\ldots,n \\ \qquad\qquad u = 0 \ \text{ em } \ T \times \{b\} \end{cases}$$

A conclusão também torna-se imediata: Se a distribuição de temperatura é a mesma (homogênea) para $t = 0$ e se mantém na fronteira de T conforme t percorre o intervalo $[0,b]$, então a temperatura permanecerá a mesma em toda a região T, consequentemente no interior de B. Além disso, o resultado passa a valer para qualquer $n > 2$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como pôde ser visto neste trabalho, a teoria das Formas Diferenciais pode ser interpretada como uma extensão dos conteúdos estudados nas disciplinas de Cálculo, visto que os resultados abordados foram facilmente transportados e generalizados para esse novo contexto. O exemplo mais notável certamente foi o Teorema de Stokes, que unificou quatro resultados aparentemente distintos e ainda o generalizou para dimensões maiores, o que também ocorreu com a equação do calor. Também foi possível observar a possibilidade de reunir assuntos de áreas diversas, como por exemplo o Cálculo e a Geometria Analítica, com maior eficácia além de servir como uma ponte para outras áreas, como a Física e teorias ainda mais avançadas como a Relatividade.

Entre os objetivos deste trabalho, estava apresentar as Formas Diferenciais de modo simplificado, para que fosse possível adequá-la a alunos de Engenharia, embora esta área de estudo seja incrivelmente ampla. Por não se tratar de um assunto fácil, acaba exigindo um conhecimento prévio bem consolidado por parte de quem pretende seguir dedicando-se a esses estudos. Dentre as diversas aplicações possíveis, optou-se por escolher assuntos da Física e com isso foi evidenciado o fato desta área de conhecimento estar cada vez mais conectada à Matemática, sendo quase impossível desassociá-las, especialmente para os alunos de Engenharia. Contudo, esses exemplos constituem apenas uma fração de todo o potencial de uso para as Formas Diferenciais, havendo uma grande variedade de escolhas de conteúdos para aqueles que pretendem também prosseguir nos estudos das Formas.

Para finalizar, deixo minha opinião pessoal, ressaltando que a elaboração deste trabalho foi de grande relevância para meu crescimento pessoal e principalmente acadêmico por me dar acesso a conhecimentos que antes julgava ser destinado apenas aos grandes estudiosos, particularmente as discussões envolvendo a Teoria da Relatividade, o que evidencia que qualquer pessoa, com as ferramentas certas, é capaz de grandes feitos.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. do. **Differential Forms and Applications**. 1. ed. Springer-Verlag: Universitext, 1994.

COUTINHO, S. C. **Cálculo Vetorial com Formas Diferenciais**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2015. Disponível em: <http://www.dcc.ufrj.br/ collier/e-books/formas.pdf>. Acesso em: 09/10/2015.

FEYNMAN, R. P. **The Feynman Lectures on Physics**. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

FLANDERS, H. **Differential Forms with Applications to the Physical Sciences**. 1. ed. New York: Dover Publications, 1989.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2010.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. Hoboken: John Wiley and Son, 1999.

KOSTRIKIN, A. I.; MANIN, Y. I. **Linear Algebra and Geometry**. 2. ed. Amsterdã: Gordon and Breach Science Publishers, 1989.

LEE, J. M. **Differential Geometry, Analysis and Physics**. [S.l.: s.n.], 2000.

OWERRE, S. A. Maxwell's equations in terms of differential forms. p. 1 – 29, 2010.

SAMELSON, H. Differential forms, the early days; or the stories of deahna's theorem and of volterra's theorem. v. 108, n. 6, p. 522 – 530, 2001.

STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cegage Learning, 2013.

WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

WEINTRAUB, S. H. **Differential forms: A complement to Vector Calculus**. 2. ed. Baton Rouge: Academic Press, 1997.

ZWIEBACH, B. **A First Course in String Theory**. 2. ed. Cambridge: Cambridge Press, 2009.