

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TIAGO AUGUSTO SKROCH DE ALMEIDA

**A DEMONSTRAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**CURITIBA**

**2016**



TIAGO AUGUSTO SKROCH DE ALMEIDA

**A DEMONSTRAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2.

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós

**CURITIBA**

**2016**





Ministério da Educação  
**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
Câmpus Curitiba  
Diretoria de Graduação e Educação Profissional  
**Departamento Acadêmico de Matemática**  
**Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática**



## TERMO DE APROVAÇÃO

### “A demonstração no ensino de Geometria”

por

### “Tiago Augusto Skroch de Almeida”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 10h do dia 28 de novembro de 2016 na sala LEMAT como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O(a) aluno(a) foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho APROVADO (aprovado ou reprovado).

<hr/> <p>Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós <b>(Presidente - UTFPR/Curitiba)</b></p>	<hr/> <p>Profa. Dra. Patrícia Hess <b>(Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)</b></p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani <b>(Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)</b></p>	<hr/> <p>Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke <b>(Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</b></p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha <b>(Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</b></p>	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”



## **AGRADECIMENTOS**

À UTFPR, pelo financiamento de parte deste projeto; ao meu orientador, pela paciência e dedicação durante todo o processo de desenvolvimento do trabalho; aos amigos e familiares, pelo apoio sempre que necessário.





## RESUMO

Apresentamos neste trabalho as principais técnicas de demonstração em Matemática e as aplicamos para demonstrar alguns teoremas da Geometria Euclidiana. O intuito é ressaltar a importância da demonstração nas aulas de Geometria no Ensino Fundamental e no Ensino Médio e também na formação do professor de Matemática. Finalizamos propondo atividades para a sala de aula que abordam os conceitos, princípios e teoremas apresentados e discutidos ao longo do trabalho.

**Palavras-chaves:** técnicas de demonstração, área, volume, Teorema de Pitágoras, Teorema de Pick, Teorema dos Carpetes, Princípio de Cavalieri.



## ABSTRACT

We present in this work the main demonstration techniques in mathematics and we apply them to demonstrate some theorems of Euclidean Geometry. The aim is to highlight the importance of the demonstration in geometry classes in elementary school and in high school and also in mathematics teacher education. We finish by proposing activities for the classroom that address the concepts, principles and theorems presented and discussed throughout the work.

**Keywords:** demonstration techniques, area, volume, Pythagorean theorem, Pick's theorem, Carpets theorem, Cavalieri's principle.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Postulados e Teoremas.....	3
1.2	A Geometria Euclidiana .....	5
2	FORMAS DE DEMONSTRAÇÃO .....	7
2.1	Demonstração direta .....	7
2.1.1	Demonstrações manipulativas .....	13
2.2	Redução ao absurdo .....	21
2.3	Indução matemática .....	23
3	PRINCÍPIOS E TEOREMAS PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES.....	29
3.1	A noção intuitiva de área .....	29
3.2	O Teorema de Pick para um polígono simples .....	32
3.3	O Teorema dos Carpetes .....	42
3.4	O Princípio de Cavalieri para áreas .....	45
3.5	A noção intuitiva de volume .....	47
3.6	O Princípio de Cavalieri para volumes .....	49
3.6.1	O volume da esfera.....	50
3.6.2	O volume do toro.....	53
3.7	O Princípio de Equilíbrio de Arquimedes.....	55
4	ATIVIDADES .....	57
4.1	Manipulativas.....	57
4.1.1	Base média do trapézio.....	57
4.1.2	Teorema de Pitágoras .....	61
4.1.3	Princípio de Cavalieri – Volume da Esfera .....	66
4.2	Teorema dos Carpetes.....	67
4.3	Teorema de Pick – Geoplano.....	71
5	CONCLUSÕES .....	79

6	REFERÊNCIAS.....	81
---	------------------	----

## 1 INTRODUÇÃO

O Ensino Fundamental e o Ensino Médio não prepararam adequadamente o autor deste trabalho para a vida acadêmica, principalmente para o curso de Matemática. A linguagem e o rigor matemáticos foram grandes obstáculos nos semestres iniciais do curso. Nestes, os estudantes são estimulados a comprovar sempre propriedades e relações, situação não vivenciada na Educação Básica, uma vez que propriedades e relações matemáticas importantes foram, quando o foram, apenas apresentadas. A aprendizagem em Matemática foi estabelecida apenas por processos de repetição, não de entendimento e compreensão. Dessa forma, as estruturas de repetição incorporadas mostraram-se insuficientes à solução dos problemas propostos em disciplinas como Fundamentos de Matemática e Geometria. Na solução dos problemas apresentados nessas e em outras disciplinas do curso, é necessário destacar hipóteses e empregá-las para comprovar uma tese. Ou seja, é preciso demonstrar.

Segundo Fossa (2009, 47), para desenvolver o conhecimento é preciso saber o porquê dos acontecimentos e o porquê de um teorema matemático é a sua demonstração. Para Fossa, o matemático tem dois motivos para demonstrar. O primeiro é que uma proposição intuitivamente verdadeira pode ser provada como falsa com a utilização da demonstração. E o segundo é que a Matemática é um tipo de conhecimento e são necessárias razões suficientemente fortes para se acreditar nele.

A demonstração é importante nas diversas áreas da Matemática, pois ela é uma forma de atestar veracidade aos conhecimentos matemáticos, ou seja, é um processo argumentativo que permite concluir que propriedades matemáticas são verdadeiras. A demonstração na Matemática evidencia o poder de princípios e propriedades, assim como suas limitações.

Dessa forma, a demonstração também se faz necessária na Geometria. Segundo Boyer e Merzbach (2012), foi feito no século XIX um grande esforço para dar à Geometria um caráter mais formal, assim como era dado à Álgebra e à Análise. Contribuiu para esse formalismo a obra do alemão David Hilbert, denominada *The Foundations of Geometry* (Oliveira, 2003), na qual ele fundamenta a Geometria Euclidiana a partir de cinco grupos de axiomas.

Consciente da importância da demonstração e uma vez que deseja seguir a carreira docente, o autor deste trabalho tem a preocupação de como proceder para preparar bem

os estudantes da Educação Básica. As dificuldades que enfrentou para se adequar ao que foi exigido nos semestres iniciais do Curso de Licenciatura em Matemática foram responsáveis pela desistência de muitos de seus colegas. Para Souza, Petró e Gessinger (2012), há muitos motivos para a evasão no Ensino Superior no Brasil, contudo, um dos motivos que se pode ressaltar é que o Ensino Fundamental e o Ensino Médio não preparam adequadamente os estudantes, inclusive em Geometria.

Ainda, apesar da Geometria constar no Currículo de Matemática, os professores de Matemática da Educação Básica costumam abordá-la geralmente nos instantes finais do ano letivo. Isto evidencia o despreparo dos mesmos para ensinar Geometria com a ênfase necessária.

Por tudo isto, decidimos abordar neste trabalho a demonstração em Geometria. Dessa forma, este trabalho se propõe a:

- 1º. apresentar as principais técnicas de demonstração em Matemática, aplicando-as para demonstrar teoremas da Geometria Euclidiana, plana e espacial;
- 2º. evidenciar algumas formas de demonstração próprias à Geometria, como as demonstrações manipulativas;
- 3º. organizar atividades para sala de aula que explorem a demonstração em Geometria e possam ser empregadas na Educação Básica, contribuindo para melhorar e consolidar a formação matemática dos estudantes;
- 4º. elaborar um texto de Geometria com figuras ilustrativas adequadas. Para tanto, exploramos o aplicativo Geogebra 2D e 3D e fizemos uso da fotografia.

O trabalho está estruturado da forma descrita a seguir.

- ♣ Capítulo 1: justificativa, objetivos, axiomas versus teoremas;
- ♣ Capítulo 2: principais técnicas de demonstração em Matemática;
- ♣ Capítulo 3: noção intuitiva de área e volume, alguns princípios e teoremas da Geometria Euclidiana, plana e espacial;
- ♣ Capítulo 4: atividades para sala de aula;
- ♣ Capítulo 5: conclusões.



## 1.1 Postulados e Teoremas

A Matemática, assim como a música, requer tempo para ser aprendida, tem métrica, formato e linguagem própria. A Matemática, especificamente a Geometria, é fundamentada em propriedades evidentes por si mesmas, que não precisam ser demonstradas, chamadas postulados ou axiomas. Na antiga Grécia, segundo Hygino H. Domingues por Dolce e Pompeo (2005, 196), axioma era uma sentença tomada como verdadeira para todos os campos de estudo, enquanto um postulado era uma sentença verdadeira específica. Exemplificando:

- axioma: “Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si”;
- postulado: “De qualquer ponto pode-se conduzir uma reta a qualquer ponto dado”.

No desenvolvimento deste trabalho não diferenciaremos postulado de axioma, como faziam os gregos antigos.

Para Notare (2001), os axiomas são uma coleção de conceitos definidos por termos primitivos, a partir dos quais teoremas, lemas e corolários são comprovados, sendo a Geometria Euclidiana um exemplo clássico de sistema axiomático dedutivo.

Segundo Manfio, David Hilbert (1862-1943) fundamentou a Geometria Euclidiana a partir do ponto e da reta, conhecidos como termos primitivos, e estabeleceu três relações primitivas:

- um ponto pertence a uma reta;
- um ponto está entre dois pontos;
- a relação de congruência.

Essas relações devem satisfazer um conjunto de axiomas, os quais Hilbert classificou nos cinco grupos a seguir.

1. *Axiomas de incidência*: estabelecem a noção de *estar em*.

Exemplo: “Dados dois pontos distintos quaisquer,  $A$  e  $B$ , existe uma única reta que passa por esses dois pontos.” Manfio (2).

2. *Axiomas de ordem*: estabelecem a noção de *estar entre*.

Com base nessa noção é possível ordenar pontos em uma reta, em um plano e no espaço.

Exemplo: “Para quaisquer três pontos distintos colineares, apenas um deles está entre os outros dois.” Manfio (4).

3. *Axiomas de congruência*: definem o conceito de congruência.

Exemplo: “Se dois triângulos  $ABC$  e  $XYZ$  são tais que  $\overline{AB} \equiv \overline{XY}$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{XZ}$  e  $\hat{A} \equiv \hat{X}$ , então  $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$ ”. Manfio (18).

4. *Axioma das paralelas*: definem o conceito de paralelas.

Exemplo: (5º Axioma de Euclides – Versão equivalente de Playfair) “Por um ponto não pertencente a uma reta  $r$  passa uma única reta paralela à reta  $r$ .” Manfio (33).

5. *Axiomas de continuidade*: garantem que as construções que permitem medir a distância entre pontos são possíveis.

Exemplo: “A cada segmento  $\overline{AB}$  está associado um único número real positivo, e ao segmento nulo está associado o número zero.” Manfio (8).

Diferentemente de um axioma, um teorema (do grego e do latim *theoria*) é uma propriedade não evidente, isto é, que precisa ser comprovada mediante demonstração. Lemas (do grego *lemma*) são pré-teoremas, ou seja, teoremas intermediários que permitem comprovar outros teoremas, de tese mais ampla. Já corolários (do latim *corollarium*) são consequências imediatas de um teorema, teoremas que são deduzidos facilmente de outros, isto é, são pós-teoremas.

Exemplo lema-teorema:

- lema – “Quaisquer dois círculos, de mesmo raio, são figuras congruentes.” Manfio (88);
- teorema – “A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.” Manfio (89).

Exemplo teorema-corolário:

- teorema – “A medida de um ângulo externo de qualquer triângulo é maior que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.” Manfio (23);

- corolário – “A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que  $180^\circ$ .” Manfio (23).

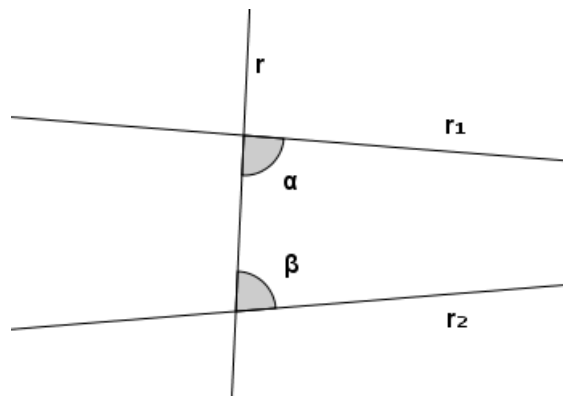
## 1.2 A Geometria Euclidiana

A Geometria é uma ciência antiga que foi utilizada por diferentes povos, como egípcios, babilônios e gregos. Euclides de Alexandria (300 a.C.) foi o primeiro a apresentar, de forma sistemática, a Matemática como ciência dedutiva (Carmo, 1987).

Foi Euclides quem definiu as bases da Geometria Euclidiana com a sua mais famosa obra, “Os Elementos”. Esta obra é composta por treze volumes, assim distribuídos: geometria plana (volumes 1 a 6), teoria dos números (volumes 7 a 10) e geometria espacial (volumes 11 a 13).

Nos volumes de geometria plana, Euclides elenca cinco axiomas com os quais comprova teoremas e estrutura sua geometria. Segundo Carmo (1987), os cinco axiomas de Euclides são:

- I. dois pontos determinam uma reta;
- II. a partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário;
- III. é possível descrever um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário;
- IV. todos os ângulos retos são iguais;
- V. se uma reta  $r$  corta outras duas retas  $r_1$  e  $r_2$  (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de  $r$  é menor que dois retos, então  $r_1$  e  $r_2$ , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de  $r$ , como mostra a Figura 1.



**Figura 1:** Retas concorrentes intersectadas por uma reta transversal.

O quinto postulado de Euclides não é evidente e, na tentativa de prová-lo, como se fosse um teorema, matemáticos definiram as bases de novas geometrias, denominadas Geometrias Não-Euclidianas.

## 2 FORMAS DE DEMONSTRAÇÃO

Segundo Fossa (2009), há várias estratégias para se efetuar uma demonstração. Dentre elas, mencionamos:

- a técnica de condicionalização:  $p \rightarrow q$ ;
- a técnica do bicondicional:  $p \leftrightarrow q$ ;
- a redução ao absurdo;
- a indução matemática;
- o emprego de outros teoremas.

Neste capítulo, apresentamos três das formas de demonstração apresentadas por Fossa (2009) e as aplicamos para demonstrar teoremas da Geometria Plana e da Geometria Espacial:

- a demonstração direta;
- a redução ao absurdo;
- a indução matemática.

### 2.1 Demonstração direta

Demonstrações do tipo  $p \rightarrow q$  (lê-se:  $p$  implica  $q$ ), ou  
*se  $p$ , então  $q$ ,*

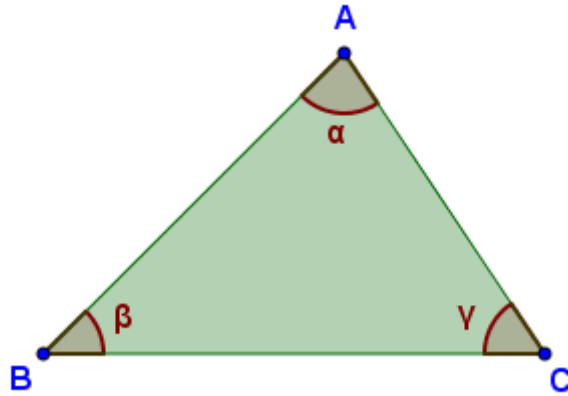
são consideradas demonstrações diretas, construtivas. Nelas,  $p$  é a *hipótese* (ou hipóteses) e  $q$  é a *tese*. E cada uma das hipóteses  $p$  deve ser empregada para mostrar a veracidade de  $q$ . Enquadram-se nesta categoria as técnicas de condicionalização e do bicondicional apresentadas por Fossa (2009).

Exemplificamos a técnica utilizando dois teoremas da Geometria Euclidiana.

#### **TEOREMA 2.1** (Soma dos ângulos internos de um triângulo)

*A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ .*

Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os ângulos internos do triângulo  $ABC$ , ilustrado na Figura 2.



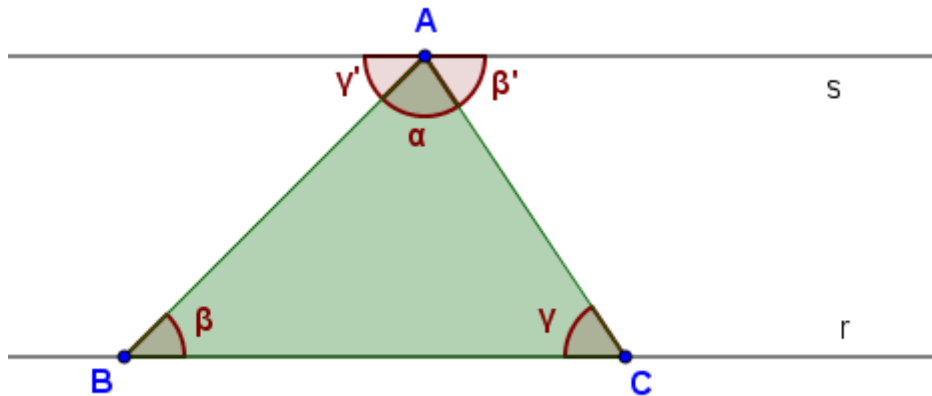
**Figura 2:** Ângulos internos do triângulo  $ABC$ .

O Teorema 2.1 pode ser reescrito como:

Se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos internos de um triângulo, então  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

**Demonstração 1**

Seja  $r$  a reta suporte do lado  $\overline{BC}$ . Consideremos a reta  $s$  tal que  $r \parallel s$  e passe pelo ponto  $A$ , conforme mostra a Figura 3.



**Figura 3:** Soma dos ângulos internos do triângulo  $ABC$ .

A reta  $s$  determina no vértice  $A$  dois ângulos  $\beta'$  e  $\gamma'$ , adjacentes ao ângulo  $\alpha$ , tais que

$$\alpha + \beta' + \gamma' = 180^\circ. \tag{2.1}$$

Como os ângulos  $\gamma$  e  $\beta'$  e  $\beta$  e  $\gamma'$  são alternos internos, temos que

$$\beta' \equiv \gamma \tag{2.2}$$

e

$$\gamma' \equiv \beta. \quad (2.3)$$

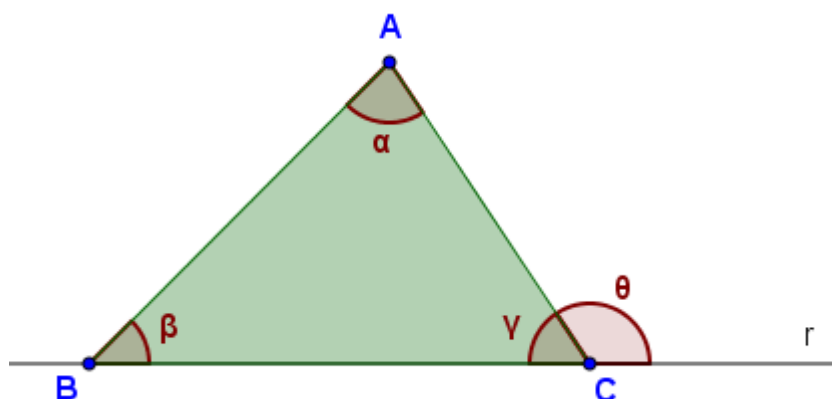
Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1), concluímos que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

■

### Demonstração 2

Seja  $\theta$  um ângulo externo do triângulo  $ABC$ , adjacente ao ângulo  $\gamma$ , como ilustra a Figura 4.



**Figura 4:** Ângulo externo  $\theta$  do triângulo  $ABC$ .

Temos que:

$$\alpha + \beta = \theta \quad (2.4)$$

e

$$\gamma + \theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 180^\circ - \gamma. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.4), obtemos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

■

Nesta demonstração, empregamos o Teorema do Ângulo Externo (2.4)<sup>1</sup> para provar de forma direta o Teorema 2.1. Empregar teoremas na demonstração é outra das técnicas descritas por Fossa (2009).

---

<sup>1</sup> Em um triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

## **TEOREMA 2.2** (Pitágoras)

*Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

O Teorema de Pitágoras, segundo Boyer (2009, 56), muito provavelmente veio dos babilônios. Esse teorema descreve a relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, ou seja, o triângulo que tem um dos ângulos internos medindo  $90^\circ$  (ângulo reto). O maior lado do triângulo retângulo é denominado hipotenusa (do grego *hypoteinousa*: estende-se sob; contrário a); os outros dois lados são denominados catetos (do grego *kathetos*: que cai perpendicularmente).

Há várias demonstrações diretas do Teorema de Pitágoras. O professor e matemático americano Elisha Scott Loomis (1852-1940) era apaixonado por esse teorema. No período de 1907 a 1927, ele colecionou demonstrações do teorema, agrupando-as em um livro denominado *The Pythagorean Proposition* (A Proposição de Pitágoras). A primeira edição, publicada em 1927, continha 230 demonstrações; já a segunda edição, publicada em 1940, continha 370 demonstrações. Loomis classificou as demonstrações em dois grupos: no primeiro, as demonstrações algébricas; no segundo, as demonstrações geométricas.

O Teorema 2.2 pode ser reescrito como:

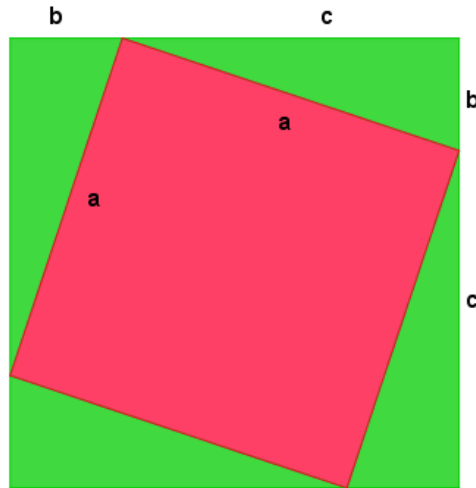
Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados de um triângulo retângulo, com  $a > b$  e  $a > c$ , então  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Apresentamos a seguir três demonstrações diretas do Teorema de Pitágoras. A primeira é uma demonstração geométrica atribuída por alguns historiadores ao próprio Pitágoras. A segunda, também uma demonstração geométrica, é denominada *a demonstração do presidente*. Esta demonstração é uma das demonstrações geométricas presentes no compêndio de Loomis. Ela é atribuída a James Abram Garfield (1831-1881), general que foi presidente dos Estados Unidos e governou por apenas seis meses e quinze dias. Ele foi baleado em um atentado a uma estação de trem de Washington D.C. e agonizou por dois meses antes de falecer. Era um grande estudioso e entusiasta da Matemática. A terceira, é uma demonstração algébrica também presente no livro de Loomis.



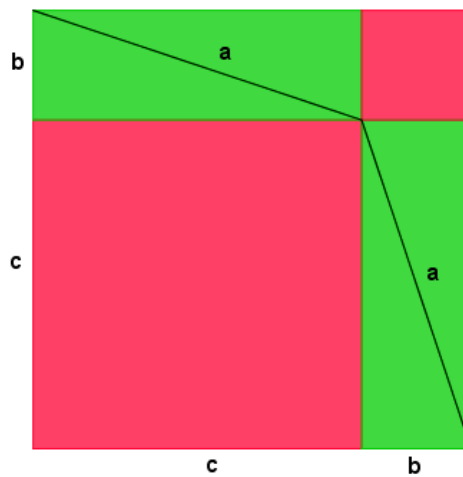
### Demonstração 1

Consideremos o quadrado de lado  $a$ , inscrito no quadrado de lado  $b + c$ , como mostra a Figura 5.



**Figura 5:** Quadrado de lado  $a$  inscrito no quadrado de lado  $b + c$ .

Empregando os quatro triângulos retângulos de catetos  $b$  e  $c$  e hipotenusa  $a$  da Figura 5, podemos construir outro quadrado de lado  $b + c$ , ilustrado na Figura 6.



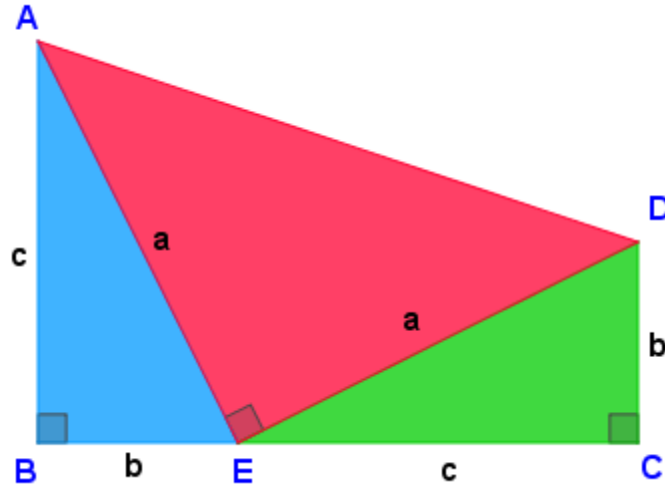
**Figura 6:** Quadrado de lado  $b + c$  formado por dois quadrados e dois retângulos.

Como os quadrados de lado  $b + c$  das Figuras 5 e 6 têm a mesma área e os triângulos retângulos também têm a mesma área, concluímos que o quadrado de lado  $a$  têm área igual à soma das áreas dos quadrados de lados  $b$  e  $c$ , isto é,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

### Demonstração 2

Seja o trapézio retângulo  $ABCD$ , ilustrado na Figura 7, reto em  $B$  e  $C$ , de modo que o ponto  $E \in \overline{BC}$ ,  $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ ,  $\overline{CE} \equiv \overline{AB}$ ,  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{CD} = b$  e  $\overline{AE} \equiv \overline{DE} = a$ . Dessa forma, o trapézio retângulo fica dividido em três triângulos retângulos.



**Figura 7:** A demonstração do presidente: trapézio retângulo  $ABCD$  decomposto em três triângulos retângulos.

Como a área do trapézio retângulo é igual à soma das áreas dos três triângulos retângulos, temos que:

$$A_{ABCD} = A_{\triangle ABE} + A_{\triangle AED} + A_{\triangle DCE};$$

$$\frac{b+c}{2}(b+c) = \frac{bc}{2} + \frac{aa}{2} + \frac{bc}{2};$$

$$\frac{(b+c)^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2};$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2;$$

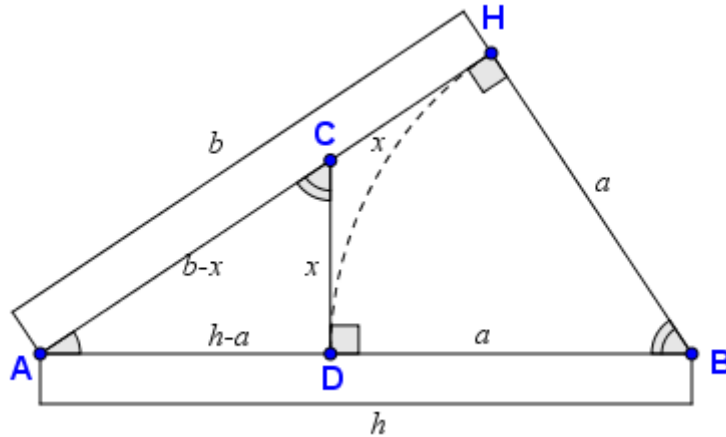
$$b^2 + c^2 = a^2.$$

■

### Demonstração 3

Seja o triângulo retângulo  $ABH$ , retângulo em  $H$ . Tracemos um segmento  $\overline{CD}$  perpendicular ao lado  $\overline{AB}$ , com  $C \in \overline{AH}$  e  $D \in \overline{AB}$ , de forma que  $\overline{BH} \equiv \overline{BD}$ , o que implica  $\overline{CD} \equiv \overline{CH}$ .

Denotemos  $\overline{AB} = h$  (hipotenusa),  $\overline{AH} = b$  (cateto),  $\overline{BH} \equiv \overline{BD} = a$  (cateto),  $\overline{CD} \equiv \overline{CH} = x$ ,  $\overline{AD} = h - a$  e  $\overline{AC} = b - x$ , como ilustra a Figura 8.



**Figura 8:** Triângulos retângulos  $ABH$  e  $ACD$ .

O triângulo  $ACD$  é retângulo em  $D$ . Nos triângulos  $ABH$  e  $ACD$ , o ângulo  $A$  é comum a ambos e os ângulos  $H$  e  $D$  são retos. Logo, os ângulos  $B$  e  $C$  são congruentes. Assim, pelo caso  $AAA$  (ângulo-ângulo-ângulo), os triângulos  $ABH$  e  $ACD$  são semelhantes e

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{h-a} = \frac{h}{b-x}. \quad (2.6)$$

Das igualdades em (2.6), obtemos:

$$ah - a^2 = xb; \quad (2.7)$$

$$ab - ax = xh; \quad (2.8)$$

$$b^2 - bx = h^2 - ah. \quad (2.9)$$

A igualdade (2.9) pode ser reescrita como

$$xb = b^2 - h^2 + ah. \quad (2.10)$$

Comparando as igualdades (2.7) e (2.10), concluímos que

$$\begin{aligned} ah - a^2 &= b^2 - h^2 + ah; \\ h^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A igualdade (2.11) estabelece que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. ■

### 2.1.1 Demonstrações manipulativas

Dentre as demonstrações diretas em Geometria, destacamos as demonstrações manipulativas, ou seja, as demonstrações que utilizam materiais manipuláveis,

permitindo que os estudantes possam visualizar, construir e tocar durante o processo de comprovação da propriedade matemática. As demonstrações manipulativas são apropriadas tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, principalmente no ensino de Geometria Plana e Geometria Espacial.

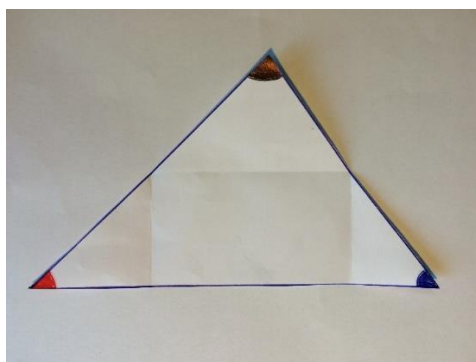
Segundo Lorenzato (2012), muitos são os educadores que evidenciam a importância do apoio visual ou do visual-tátil como facilitador para a aprendizagem. Na elaboração de atividades para tal fim podem ser utilizados materiais diversos, inclusive digitais. Em Geometria, podemos explorar o uso de dobraduras. Nessas atividades, os estudantes, ao interagirem com os materiais manipuláveis, desenvolvem o raciocínio de uma forma diferenciada do que quando o assunto em discussão é apenas apresentado/explicado. Para Rego e Rego (por Lorenzato, 2012, 43), com o uso de materiais manipulativos o professor amplia a sua formação e a dos estudantes de modo crítico.

Apresentamos a seguir demonstrações manipulativas dos dois teoremas geométricos discutidos anteriormente.

## 1. Soma dos ângulos internos de um triângulo

### Passo 1

Em uma folha de papel, desenhe um triângulo acutângulo qualquer e pinte os ângulos internos usando cores diferentes (por exemplo, preto, azul e vermelho), como mostra a Figura 9. Recorte o triângulo.

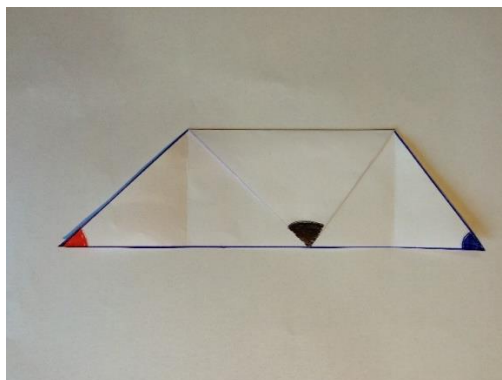


**Figura 9:** Ângulos internos de um triângulo.

### Passo 2

Usando dobradura, determine o ponto médio dos lados determinados pelos ângulos preto e vermelho e preto e azul. Faça um vinco determinando o segmento que tem por extremos os pontos médios. Isto colocará o vértice do ângulo em preto sobre o

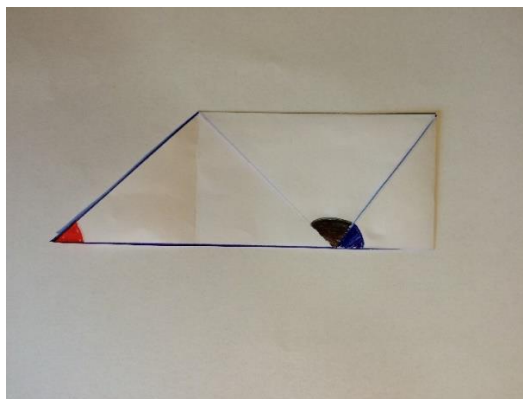
lado determinado pelos ângulos em azul e vermelho, como ilustra a Figura 10. A linha determinada pelo vinco é a base média do triângulo.



**Figura 10:** “Transportando” o vértice do ângulo em preto para o lado do triângulo oposto a ele.

### Passo 3

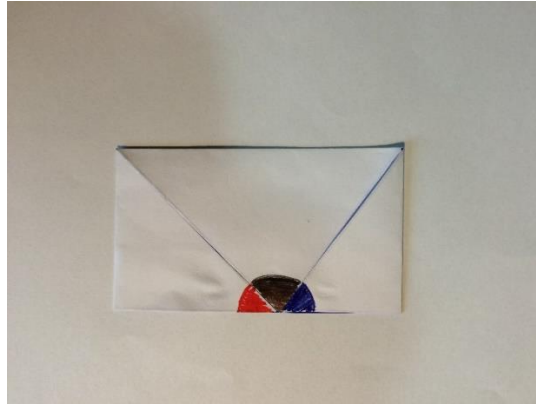
Transportar o ângulo em azul, “colocando-o ao lado” do ângulo em preto, como mostra a Figura 11.



**Figura 11:** “Transportando” o vértice do ângulo em azul.

### Passo 4

Transportar o ângulo em vermelho, “colocando-o ao lado” do ângulo em preto, como mostra a Figura 12.



**Figura 12:** “Transportando” o vértice do ângulo em vermelho.

Na Figura 12, observamos que a soma dos três ângulos internos do triângulo equivale à medida do ângulo raso.

**Definição 2.1** (Base média do triângulo)

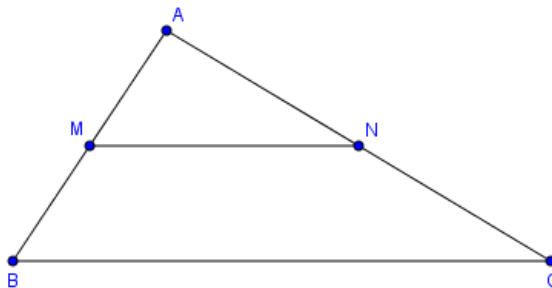
*O segmento que tem por extremos os pontos médios de dois lados de um triângulo é denominado base média do triângulo.*

**TEOREMA 2.3** (Base média do triângulo)

*A base média de um triângulo é paralela ao terceiro lado e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.*

**Demonstração**

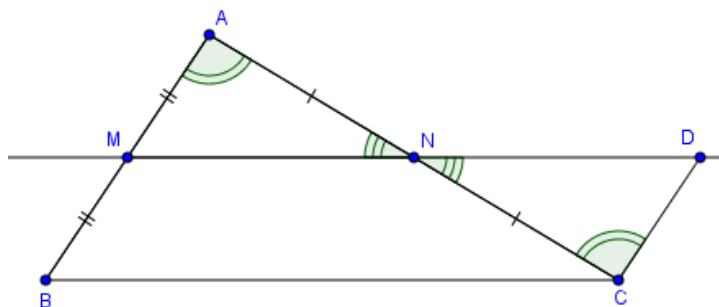
Seja um triângulo  $ABC$  onde  $M$  é o ponto médio do lado  $\overline{AB}$  e  $N$  é o ponto médio do lado  $\overline{AC}$ , como mostra a Figura 13. Desse modo,  $\overline{MN}$  é a base média do triângulo  $ABC$ .



**Figura 13:** Triângulo  $ABC$  e a base média  $\overline{MN}$ .

Temos, por hipótese, que  $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$  e  $\overline{NA} \equiv \overline{NC}$ .

Tracemos por  $C$  uma reta paralela a  $\overline{AB}$  que intersecta o prolongamento de  $\overline{MN}$  em  $D$ . Definimos assim o triângulo  $CDN$ , como mostra a Figura 14.



**Figura 14:** Triângulos  $ABC$  e  $CDN$ .

Como  $\overline{AC}$  é transversal a  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ,  $\hat{C} \equiv \hat{A}$  (ângulos alternos internos). Os ângulos  $\hat{ANM}$  e  $\hat{CND}$  são congruentes (ângulos opostos pelo vértice) e, por hipótese,  $\overline{NA} \equiv \overline{NC}$ . Logo, pelo caso  $ALA$  (ângulo-lado-ângulo), os triângulos  $AMN$  e  $CDN$  são congruentes. Disto decorre que:

$$\overline{MN} \equiv \overline{ND};$$

$$\overline{CD} \equiv \overline{AM} \equiv \overline{MB}.$$

Como  $\overline{CD} \parallel \overline{MB}$  e  $\overline{CD} \equiv \overline{MB}$ ,  $BCDM$  é um paralelogramo. Logo,

$$\overline{MD} \parallel \overline{BC};$$

$$MD = 2.MN = BC \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}.$$

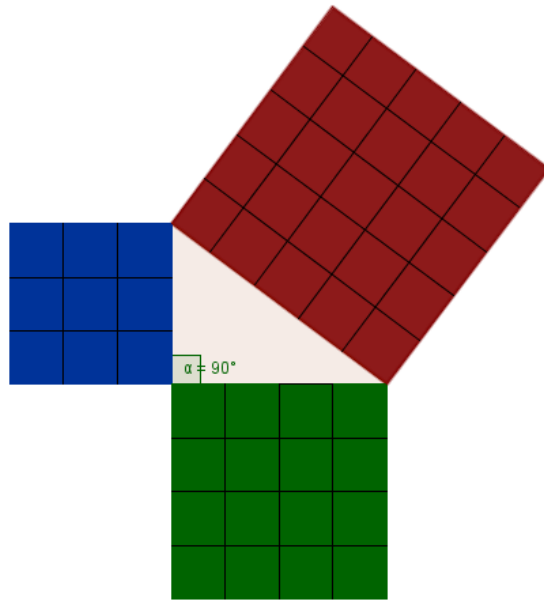
■

## 2. Teorema de Pitágoras

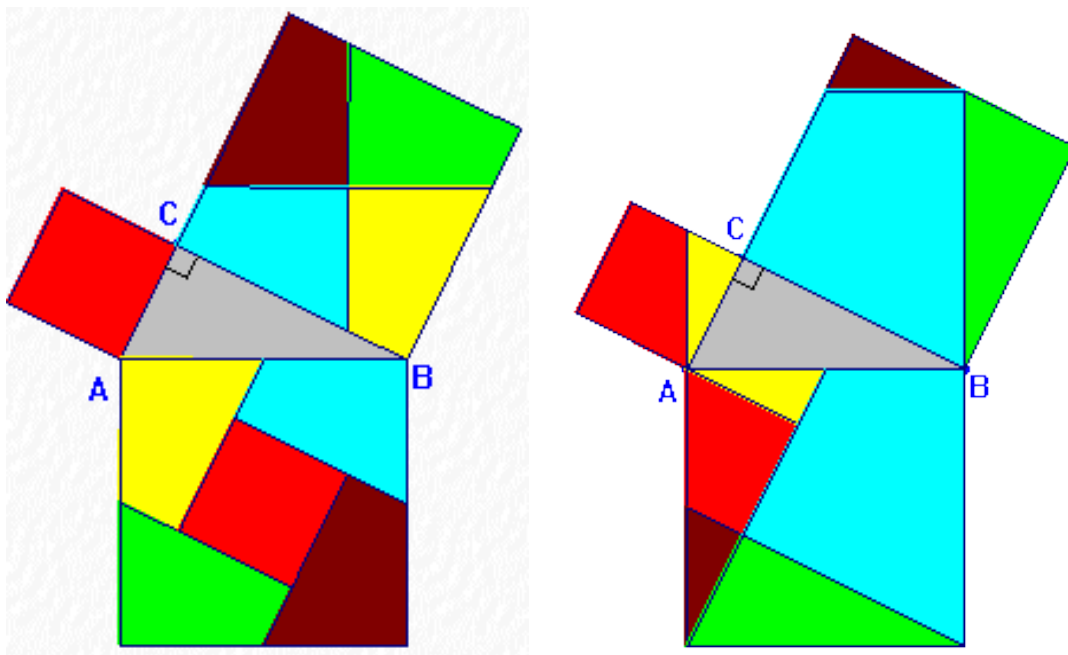
As demonstrações manipulativas do Teorema de Pitágoras são geométricas e exploram os conceitos de área e de equivalência de figuras geométricas planas. Elas são também demonstrações visuais, que podem ser refeitas empregando-se papéis coloridos ou etil vinil acetato - EVA. Nas Figuras 15 a 20, ilustramos alguns exemplos.

### **Definição 2.2** (Figuras equivalentes)

*Duas figuras geométricas planas são equivalentes quando têm a mesma área.*

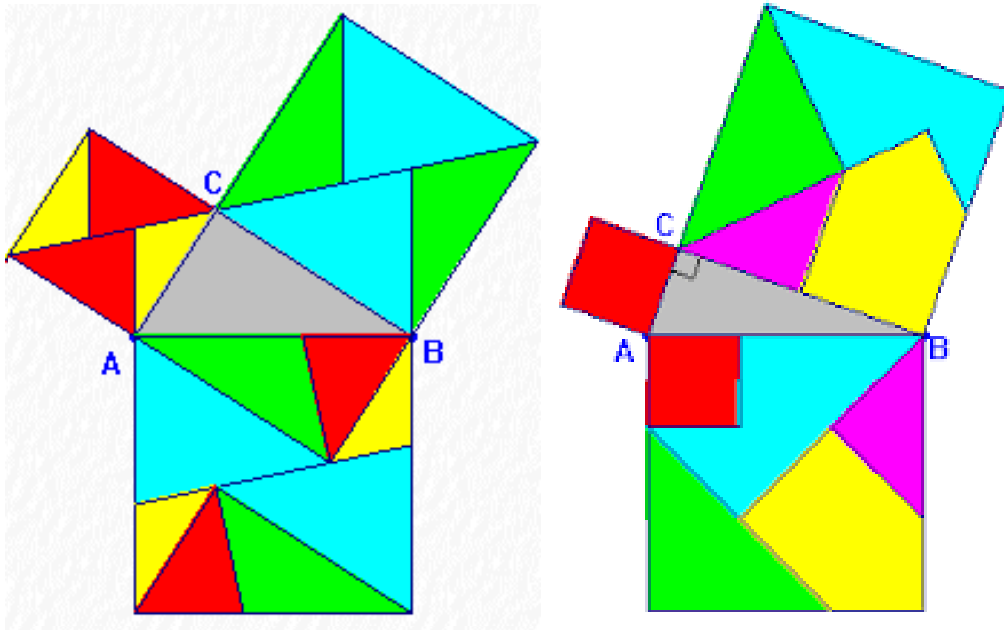


**Figura 15:** Demonstração manipulativa do Teorema de Pitágoras - Santos (2011, 23).

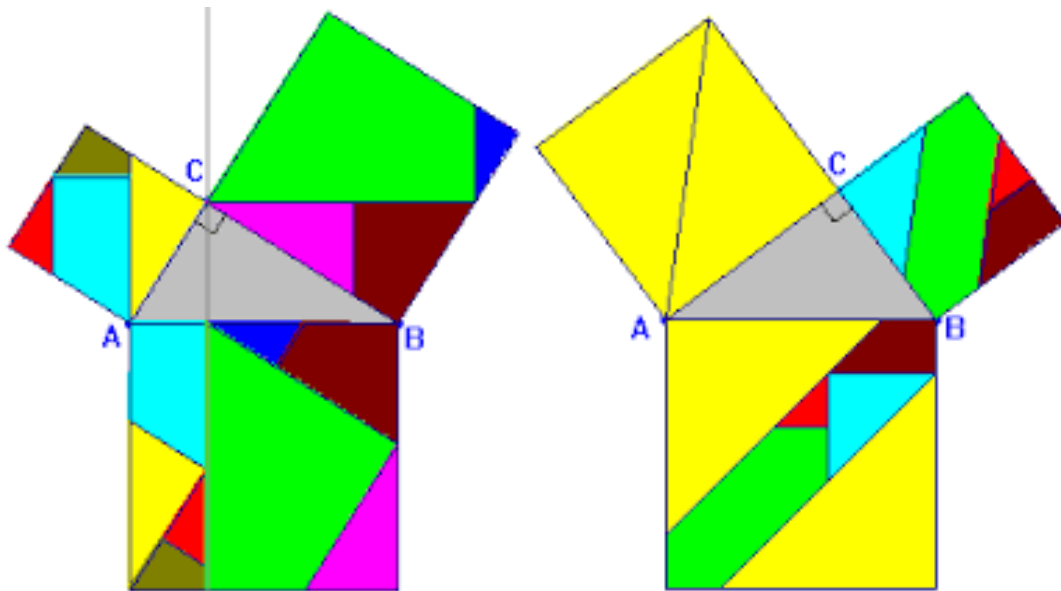


**Figura 16:** Demonstrações manipulativas do Teorema de Pitágoras – Intef (2016).

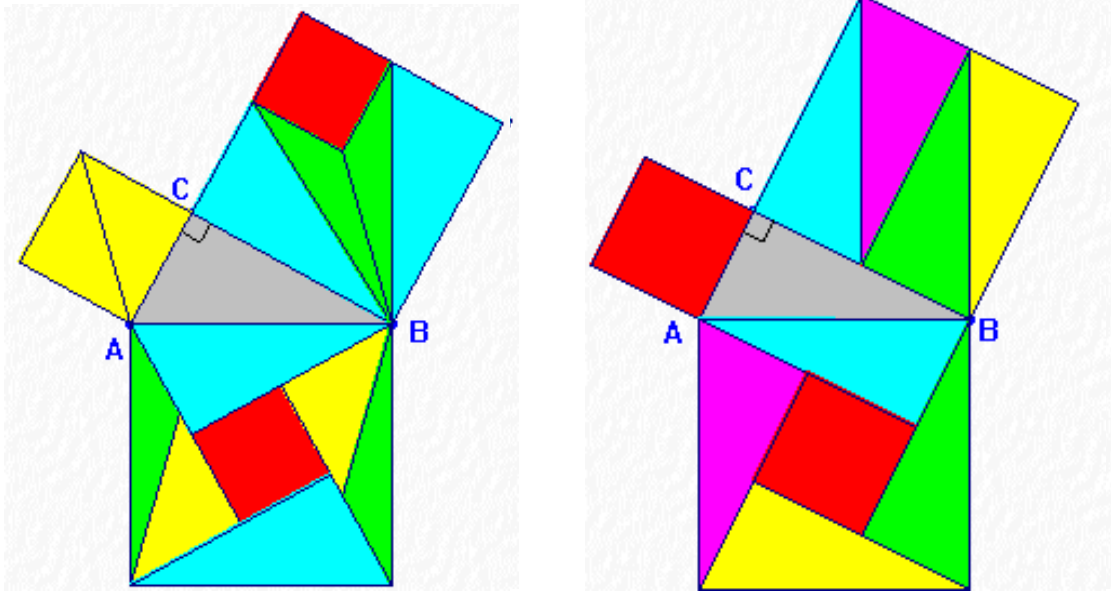




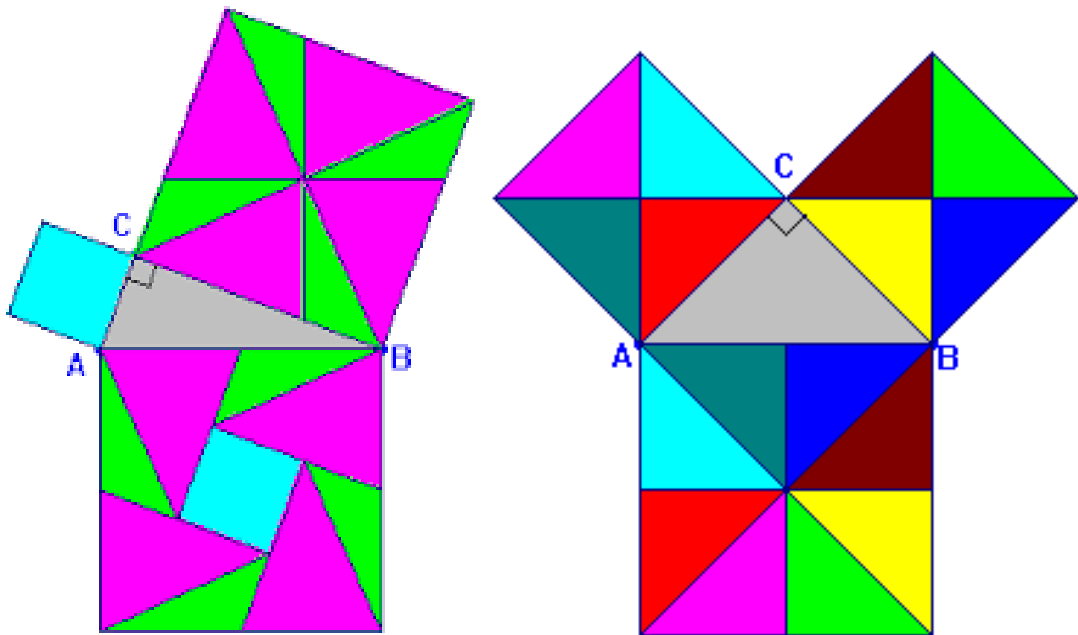
**Figura 17:** Demonstrações manipulativas do Teorema de Pitágoras – Intef (2016).



**Figura 18:** Demonstrações manipulativas do Teorema de Pitágoras– Intef (2016).



**Figura 19:** Demonstrações manipulativas do Teorema de Pitágoras – Intef (2016).



**Figura 20:** Demonstrações manipulativas do Teorema de Pitágoras – Intef (2016).

## 2.2 Redução ao absurdo

A demonstração por redução ao absurdo, ou prova por contradição, é uma técnica de demonstração indireta, não construtiva. Demonstrações desse tipo são feitas negando-se o que se quer provar. A negação conduz a uma contradição. Fossa (2009, 77) define contradição como uma proposição que ao mesmo tempo afirma e nega algo.

Exemplificando, em teoremas do tipo

se  $p$ , então  $q$ ,

a prova por redução ao absurdo consiste na negação da tese  $q$ , isto é, parte-se de não  $q$ , o que conduz a uma contradição. A contradição evidencia que a negação é falsa, ou seja, a implicação inicial é verdadeira.

A prova por contradição é muito utilizada na demonstração de teoremas de existência. Ilustramos a seguir o emprego dessa técnica na demonstração de um teorema da Geometria Plana.

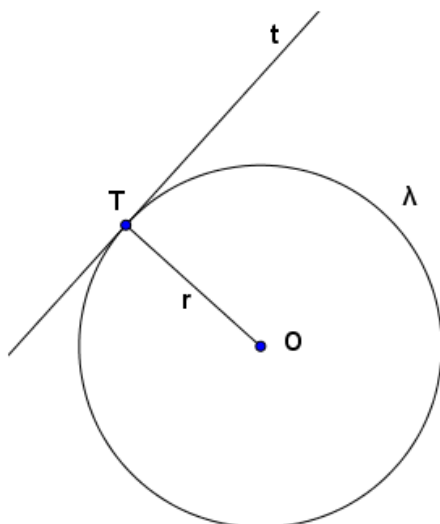
### **TEOREMA 2.4** (Reta tangente à circunferência)

*Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.*

Segundo Dolce e Pompeo (2005, 152), uma reta é tangente a uma circunferência quando essa reta intersecta a circunferência em apenas um único ponto. Logo, a reta e a circunferência têm um único ponto em comum e os demais pontos da reta são exteriores à circunferência.

### **Demonstração**

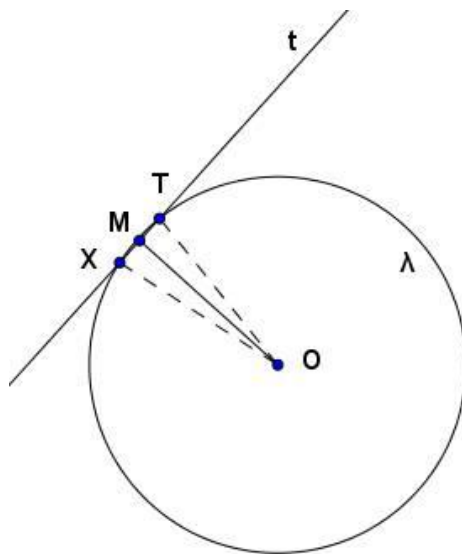
Sejam a circunferência  $\lambda$ , de centro  $O$  e raio  $r$ , e a reta  $t$  tangente à  $\lambda$  no ponto  $T$ , como mostra a Figura 21.



**Figura 21:** Reta  $t$  tangente à circunferência  $\lambda$  em  $T$ .

A reta  $t$  tangente à circunferência  $\lambda$  em  $T$  (*hipótese*)  $\Rightarrow t \perp \overline{OT}$  em  $T$  (*tese*).

Negação da tese:  $t$  não é perpendicular a  $\overline{OT}$  em  $T$ , como na Figura 22.



**Figura 22:** A reta  $t$  não é perpendicular a  $\overline{OT}$  em  $T$ .

Seja  $M$  o pé da perpendicular à reta  $t$  por  $O$ . O ponto  $M$  é distinto de  $T$ .

Considerando na semirreta oposta a  $\overline{MT}$  um ponto  $X$  tal que  $\overline{MX} \equiv \overline{MT}$ , temos

que:

$$\overline{OM} \text{ comum aos triângulos } OMT \text{ e } OMX, \overline{OM} \perp \overline{TX}, \overline{MX} \equiv \overline{MT} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \Delta OMX \equiv \Delta OMT \\ \Rightarrow \overline{OX} \equiv \overline{OT} \Rightarrow \overline{OX} = r \Rightarrow X \in \lambda.$$

Portanto,  $t$  intersecta  $\lambda$  em dois pontos distintos,  $T$  e  $X$ , o que é um absurdo, uma vez que, por hipótese,  $t$  intersecta  $\lambda$  apenas no ponto  $T$ .

Logo,  $t$  é perpendicular a  $\overline{OT}$  em  $T$ .

■

### 2.3 Indução matemática

Segundo o dicionário Michaelis, a palavra indução significa “o raciocínio em que de fatos particulares se tira uma conclusão genérica”.

Para Fossa (2009), o princípio de indução é uma técnica de demonstração poderosa que pode ser compreendida com a seguinte analogia: suponha colocar as peças de dominó em uma fileira, com todas as peças em pé. Para derrubar todas as peças, basta dar um empurrão na primeira peça, sendo que a primeira irá derrubar a segunda, a segunda irá derrubar a terceira e assim o processo se repete até que todas as peças sejam derrubadas. Nessa analogia, temos duas condições para que todas as peças sejam derrubadas: é necessário um empurrão na primeira peça; cada peça deve derrubar a peça seguinte da fila.

Na indução matemática temos uma situação similar, pois basta pensar que as peças do dominó são os números naturais. Para demonstrar determinada propriedade, iniciamos a demonstração para o primeiro número natural. A comparação com a analogia é o ato de dar o empurrão na primeira peça do dominó. Assim, a demonstração da propriedade para o primeiro número natural é chamada *base de indução*.

A segunda condição é a sequência de derrubamentos das peças do dominó. O raciocínio é que se uma propriedade é verdadeira para um número natural, a *hipótese de indução*, então ela também deve valer para o sucessor desse número. Assim, a propriedade será válida para todos os números naturais.

O empurrão pode ser dado na segunda peça de dominó da fila e todas as peças a partir da segunda serão derrubadas, ficando apenas a primeira sem cair. A base de indução neste caso não será mais o primeiro número natural, mas sim o segundo. Por exemplo, se a base for o número natural 2, então não poderemos concluir que certa propriedade é válida para todos os naturais, mas podemos concluir que ela é válida para todo  $n \geq 2$ .

Fossa (2009) afirma ainda que a técnica de demonstração por indução matemática depende da existência de uma sequência numérica, onde demonstramos a propriedade

para o primeiro elemento da sucessão e, em seguida, demonstramos que se um elemento da sequência tem essa propriedade, então o elemento seguinte também satisfaz a ela.

Segundo Hefez (2007, 3), o princípio de Indução Matemática fornece uma das mais poderosas técnicas de demonstração em Matemática: a demonstração por indução. Prova-se esse princípio com o Axioma da Indução e a definição de uma sentença aberta. Transladamos de Hefez (2006) a definição, o axioma e o princípio mencionados.

**Definição 2.3** (Sentença aberta)

*Uma sentença aberta em  $n$  é uma frase de conteúdo matemático onde figura a letra  $n$  como palavra e que se torna uma sentença verdadeira ou falsa quando  $n$  é substituído por um número natural bem determinado.*

**Axioma 2.1** (Axioma de Indução)

*Seja  $S$  um subconjunto de  $\mathbb{N}$  tal que:*

*i)  $0 \in S$ ;*

*ii)  $S$  é fechado com respeito à operação de “somar 1” a seus elementos, ou seja,*

$$\forall n, n \in S \Rightarrow (n + 1) \in S.$$

*Então,  $S = \mathbb{N}$ .*

**Teorema 2.5** (Princípio de Indução Matemática)

*Sejam  $a \in \mathbb{N}$  e  $p(n)$  uma sentença aberta em  $n$ . Suponha que:*

*i)  $p(a)$  é verdade;*

*ii)  $\forall n \geq a, p(n) \Rightarrow p(n + 1)$  é verdade.*

*Então,  $p(n)$  é verdade para todo  $n \geq a$ .*

**Demonstração**

Seja

$$K = \{n \in \mathbb{N}; p(n)\},$$

ou seja,  $K$  é o subconjunto dos elementos de  $\mathbb{N}$  para os quais  $p(n)$  é verdade.

Consideremos o conjunto

$$W = \{m \in \mathbb{N}; (a + m) \in K\},$$

que verifica trivialmente  $(a + W) \subset K$ .

Como, pela condição (i), temos que  $a + 0 = a \in K$ , segue-se que  $0 \in W$ .

Por outro lado, se  $m \in W$ , então  $(a + m) \in K$  e, por (ii), temos que  $(a + m + 1) \in K$ . Logo,  $(m + 1) \in W$ . Assim, pelo Axioma de Indução 2.1, temos que  $W = \mathbb{N}$ . Portanto,

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = (a + \mathbb{N}) \subset K.$$

■

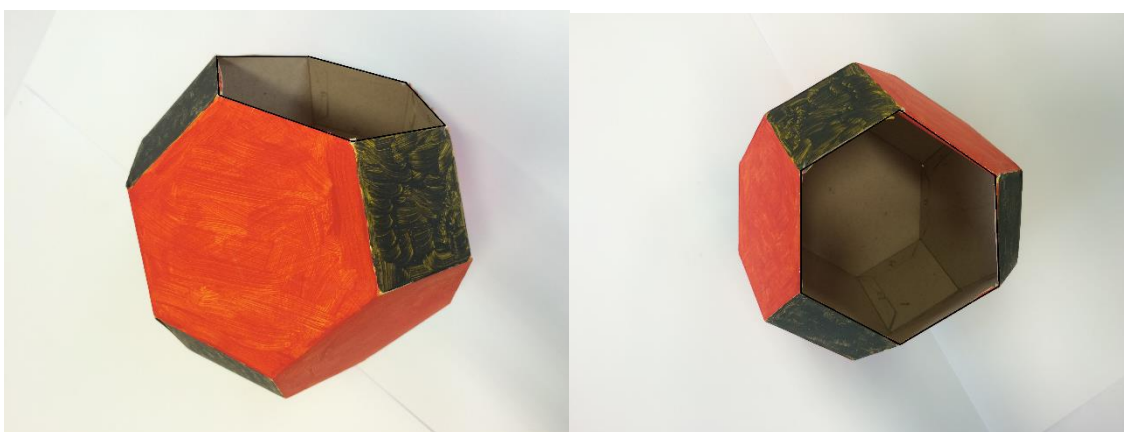
Empregamos, na sequência, o Princípio de Indução Matemática para demonstrar um teorema da Geometria Espacial: a relação de Euler para poliedros convexos. Iniciamos citando algumas definições, segundo Dolce e Pompeo (2013).

**Definição 2.4** (Superfície poliédrica limitada convexa)

*Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:*

- i) dois polígonos não são coplanares;*
- ii) cada lado de polígono não está em mais do que dois polígonos;*
- iii) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única linha poligonal fechada, plana ou reversa, chamada contorno;*
- iv) o plano de cada polígono deixa os demais em um mesmo semiespaço.*

*As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno, como as ilustradas na Figura 23, são denominadas abertas; as que não têm contorno, como as ilustradas na Figura 24, são denominadas fechadas.*



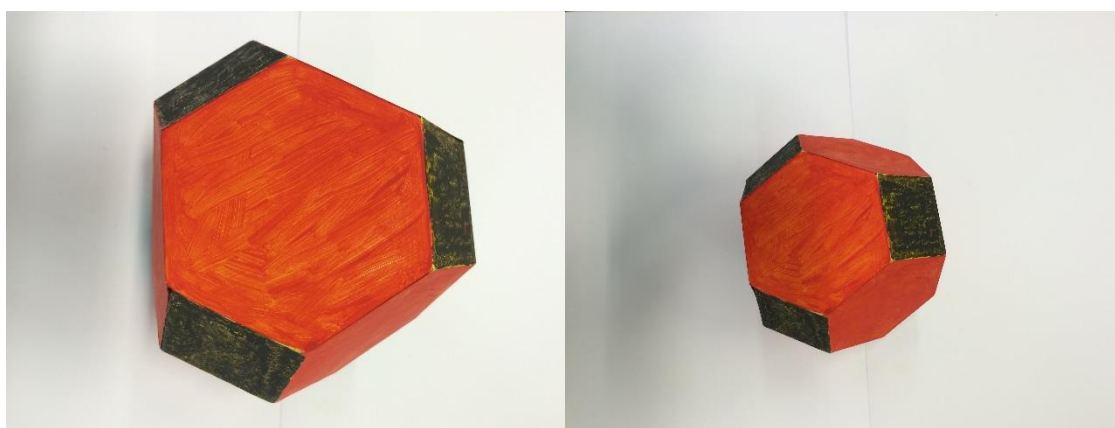
**Figura 23:** Superfície poliédrica limitada convexa aberta.

### **Definição 2.5** (Poliedro convexo)

Consideremos um número finito  $n$  ( $n \geq 4$ ) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

- i) dois polígonos não são coplanares;
- ii) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- iii) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos em um mesmo semiespaço.

Nessas condições, ficam determinados  $n$  semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os demais. A intersecção desses semiespaços é denominada poliedro convexo.



**Figura 24:** Poliedro arquimediano convexo: o octaedro truncado.

### **TEOREMA 2.6** (Relação de Euler para poliedros convexos)

Para todo poliedro convexo vale a relação

$$V - A + F = 2,$$

onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces do poliedro.

O Teorema 2.6 relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Utilizaremos a indução matemática sobre o número de faces para demonstrá-lo.

### **Demonstração**

Provaremos, inicialmente, que para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1, \tag{2.12}$$



sendo  $V_a$  o número de vértices,  $A_a$  o número de arestas e  $F_a$  o número de faces da superfície.

Seja  $F_a = 1$ .

Nesse caso, a superfície poliédrica limitada convexa aberta se reduz a um polígono plano convexo de  $n$  lados. Então,  $V_a = n, A_a = n$  e

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1.$$

Portanto, a igualdade (2.12) está verificada.

Consideremos que a relação (2.12) é válida para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta de  $F'$  faces,  $V'$  vértices e  $A'$  arestas. Ou seja,

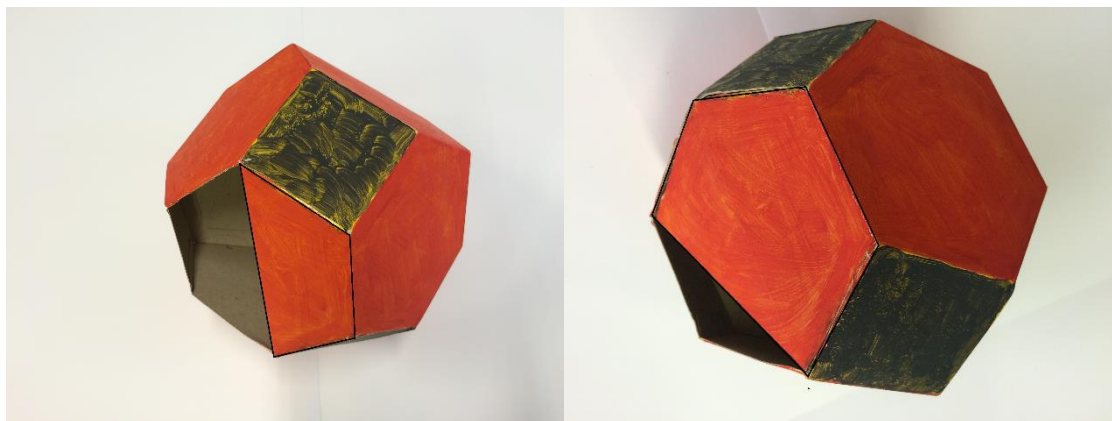
$$V' - A' + F' = 1. \quad (2.13)$$

A igualdade (2.13) é a hipótese de indução. Temos que provar que a relação (2.13) continua válida quando se acrescenta uma face à superfície. Acrescentando-se uma face de  $p$  arestas, sendo que  $q$  destas coincidem com arestas já existentes, de tal maneira a manter um contorno, ou seja, a superfície continua aberta, conforme mostra a Figura 25, obtemos uma nova superfície com  $F_a$  faces,  $V_a$  vértices e  $A_a$  arestas, para a qual:

$$F_a = F' + 1 ;$$

$$A_a = A' + p - q \text{ (} q \text{ arestas coincidem);}$$

$$V_a = V' + p - (q + 1) \text{ (} q + 1 \text{ vértices coincidindo, } q + 1 \text{ arestas coincidindo).}$$



(a)

(b)

**Figura 25:** Acréscimo de uma face à superfície poliédrica limitada convexa aberta: (a) quadrangular; (b) pentagonal.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
V_a - A_a + F_a &= V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + F' + 1 \\
&= V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 \\
&= V' - A' + F'.
\end{aligned}$$

Como  $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$  e  $V' - A' + F' = 1$  (hipótese de indução), então  $V_a - A_a + F_a = 1$ .

Consideremos agora uma superfície poliédrica limitada convexa fechada, como mostra a Figura 24, com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Ao retiramos uma face dessa superfície, obtemos uma superfície poliédrica limitada convexa aberta com  $V_a$  vértices,  $A_a$  arestas e  $F_a$  faces, para a qual vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1, \quad (2.14)$$

sendo

$$V_a = V, \quad (2.15)$$

$$A_a = A, \quad (2.16)$$

e

$$F_a = F - 1. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.15), (2.16) e (2.17) em (2.14), concluimos que

$$V - A + (F - 1) = 1,$$

$$V - A + F = 2.$$

■

### 3 PRINCÍPIOS E TEOREMAS PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Apresentamos neste capítulo as noções intuitivas de área e de volume, assim como alguns princípios e teoremas para o cálculo dos mesmos:

- Princípio de Cavalieri;
- Princípio de Equilíbrio de Arquimedes;
- Teorema de Pick;
- Teorema dos Carpetes.

O critério empregado para selecioná-los foi a facilidade para demonstrar relações e propriedades geométricas com o seu uso, possibilitando a organização/criação de atividades para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.

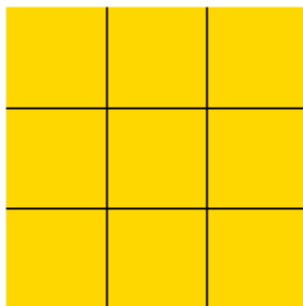
#### 3.1 A noção intuitiva de área

A palavra área provém do latim *area*; substantivo vinculado ao verbo *arere*, estar seco. Em Geometria, é a medida de uma superfície ou a quantidade de espaço bidimensional; é a região do plano delimitada por uma linha poligonal fechada (polígono) ou por uma curva.

Segundo Lima (2013, 8), a área de uma figura plana pode ser determinada comparando-a com um quadrado de lado  $1uc$  (uma unidade de comprimento), chamado *quadrado unitário*. Na comparação, verifica-se quantos quadrados unitários cabem dentro da figura plana da qual se quer a área. As Figuras 26 e 27 ilustram o cálculo da área de um quadrado qualquer comparando-o com o quadrado unitário.



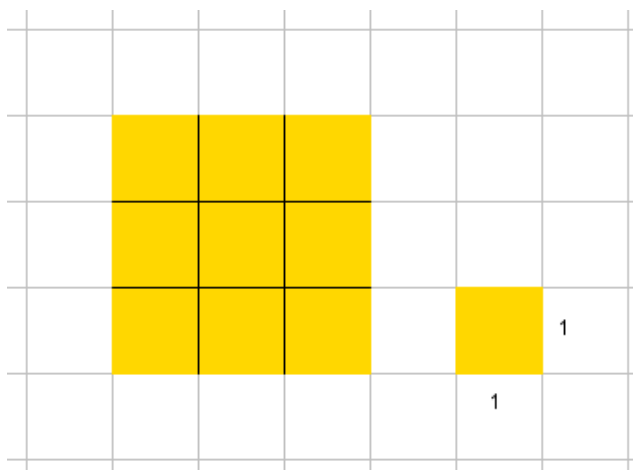
**Figura 26:** Comparação de um quadrado qualquer com o quadrado unitário.



**Figura 27:** Quantidade de vezes que o quadrado unitário cabe no quadrado considerado.

Como é possível colocar o quadrado unitário 9 vezes no quadrado considerado, afirma-se que a área do quadrado considerado é igual a  $9ua$  (nove unidades de área). A unidade de medida de área está vinculada à unidade de medida de comprimento estabelecida para o quadrado unitário.

A figura da qual se quer determinar a área pode ainda ser colocada sobre uma malha quadriculada, onde cada quadrado da malha é o quadrado unitário, como mostra a Figura 28. Assim, comprova-se mais uma vez que a área do quadrado considerado é de  $9ua$ .

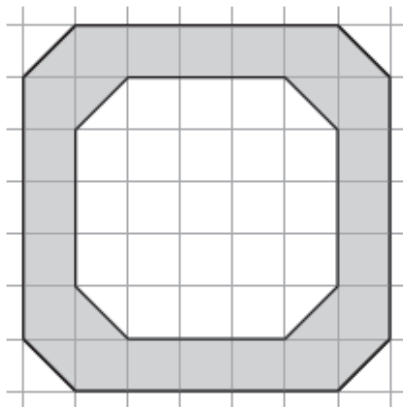


**Figura 28:** Comparação dos quadrados na malha quadriculada.

O cálculo da área de uma figura pela contagem do número de quadrados unitários que a compõem é uma abordagem adequada para a série final do Ensino Fundamental I e para as séries iniciais do Ensino Fundamental II. Essa abordagem deve ser amplamente explorada antes da sistematização das relações para o cálculo da área das principais figuras geométricas planas: quadriláteros, triângulos, polígonos regulares, círculo. A

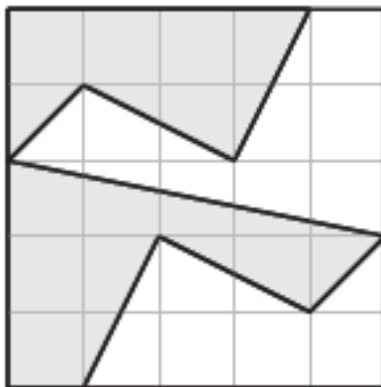
Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP costuma abordar o cálculo da área pela contagem do número de quadrados unitários, principalmente nas provas da primeira fase do Nível 1 (6º e 7º anos do Ensino Fundamental). Mencionamos a seguir alguns exemplos.

**Exemplo 1:** O quadriculado da figura é feito com quadradinhos de  $1\text{cm}$  de lado. Qual é a área da região sombreada?



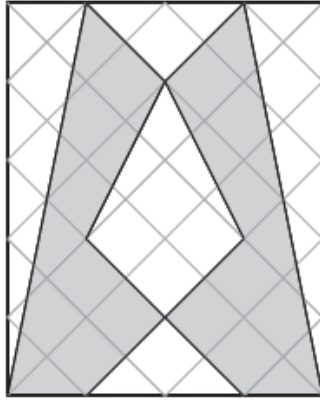
**Figura 29:** Questão 2 da prova da OBMEP, Nível 1, 2009, 1ª fase.

**Exemplo 2:** Na figura, o lado de cada quadradinho mede  $1\text{cm}$ . Qual é a área da região cinza?



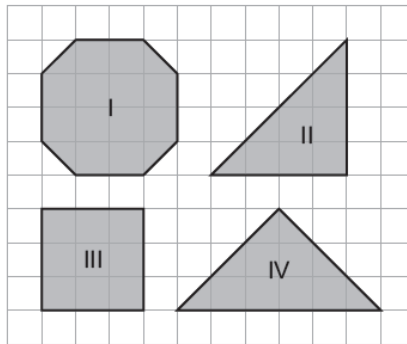
**Figura 30:** Questão 11 da prova da OBMEP, Nível 1, 2011, 1ª fase.

**Exemplo 3:** O retângulo da figura, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede  $4\text{cm}$  de largura por  $5\text{cm}$  de altura. Qual é a área da região cinzenta?



**Figura 31:** Questão 12 da prova da OBMEP, Nível 1, 2012, 1ª fase.

**Exemplo 4:** Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?



**Figura 32:** Questão 10 da prova da OBMEP, Nível 1, 2015, 1ª fase.

### 3.2 O Teorema de Pick para um polígono simples

Outra abordagem para o cálculo da área de um polígono é a contagem dos pontos da malha quadriculada na qual o polígono está inserido. Esta contagem é determinada pelo Teorema de Pick.



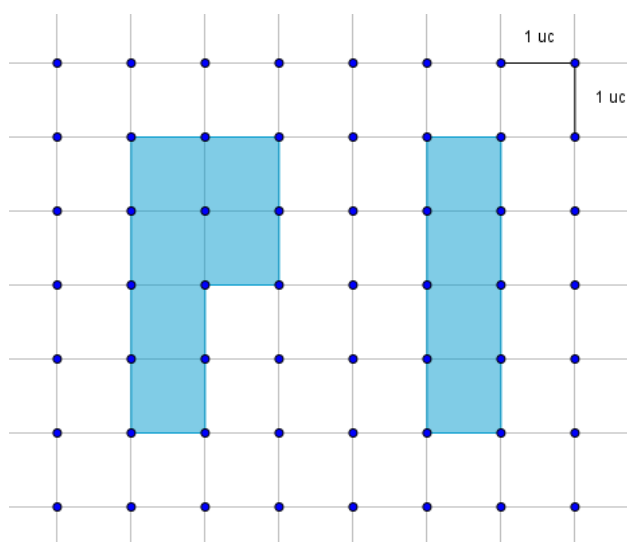
Georg Alexander Pick nasceu em Viena em 1859. Estudando na Universidade de Viena, na qual ingressou em 1875, publicou seu primeiro artigo matemático em 1876, com apenas 17 anos. Graduiu-se em Matemática e Física em 1879. Seu trabalho matemático foi bem extenso, publicando 67 artigos que abordavam diversos assuntos, tais como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculo de Integrais e Geometria. Publicou o teorema que leva seu nome em 1899. Pick foi professor na Universidade de

Leipzig e na Universidade de Praga. Em Praga, integrou a comissão que nomeou Albert Einstein para a cadeira de Física. Faleceu em 1942, com 82 anos de idade, em um campo de concentração nazista (Wikipedia, Math.info).

O Teorema de Pick, ou Fórmula de Pick, é uma relação para calcular a área de um polígono por meio da contagem dos pontos de uma malha quadriculada. A fórmula depende da quantidade de pontos da malha que estão no bordo do polígono e no seu interior. A demonstração do teorema depende da demonstração de outros teoremas, um deles demonstrado no capítulo 2. As demonstrações auxiliares podem ser encontradas em Souza (2013), Tamari (2013), Hermes (2014) e Silva e Micena (2014). Adotamos as definições utilizadas por Souza (2013) e Tamari (2013) e a demonstração usada por Souza (2013). Esta demonstração se baseia na demonstração de Lima (2006, 102).

### **Definição 3.1**

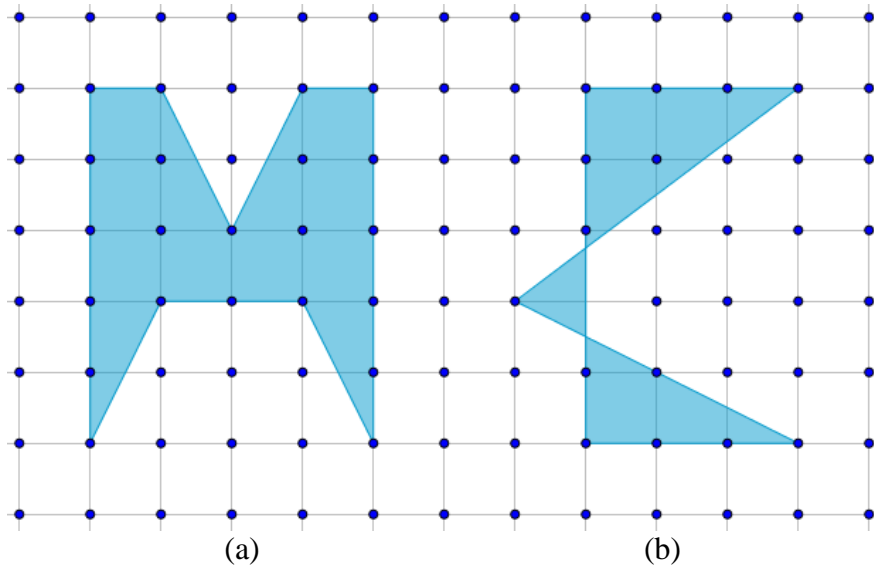
*Os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são números inteiros são chamados de pontos reticulados. Um reticulado é, portanto, um conjunto de tais pontos. Um polígono reticulado é aquele cujos vértices são pontos reticulados, como ilustra a Figura 33.*



**Figura 33:** Polígonos reticulados.

### **Definição 3.2**

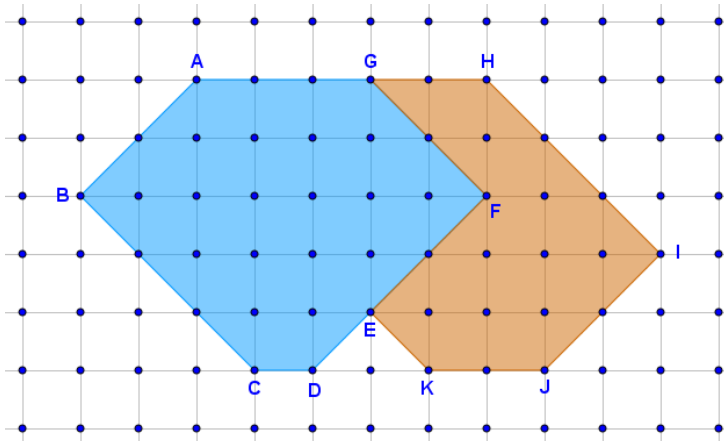
*Polígonos simples são polígonos do reticulado em que a intersecção entre lados não adjacentes é vazia, como mostra a Figura 34.*



**Figura 34:** Polígono reticulado: (a) simples; (b) não simples.

**Definição 3.3**

*Polígonos justapostos são polígonos que possuem vértices comuns e não possuem pontos interiores em comum, como ilustra a Figura 35.*

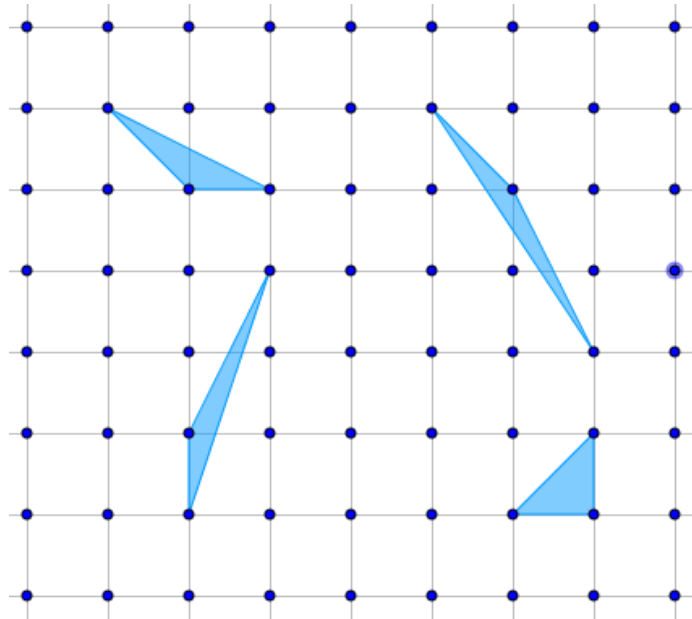


**Figura 35:** Polígonos reticulados justapostos  $ABCDEFGF$  e  $EFGHIJK$ .

**Definição 3.4**

*Triângulo fundamental (ou primitivo) é um triângulo cujos vértices estão no reticulado e nenhum ponto deste está em seu interior ou em seu perímetro, exceto os vértices, como ilustra a Figura 36.*





**Figura 36:** Triângulos reticulados fundamentais.

**TEOREMA 3.1**

*A área de todo triângulo fundamental é  $\frac{1}{2}$ .*

**TEOREMA 3.2**

*Todo polígono de  $n$  lados,  $n \geq 4$ , pode ser decomposto em  $(n - 2)$  triângulos justapostos cujos vértices são vértices do polígono.*

**TEOREMA 3.3**

*A soma  $S$  dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é igual a*

$$S = (n - 2)180^\circ.$$

**TEOREMA 3.4**

*Todo polígono reticulado pode ser decomposto em triângulos fundamentais.*

**TEOREMA 3.5** (Teorema de Pick)

*Sejam  $P$  um polígono reticulado simples,  $B$  o número de pontos do reticulado sobre os lados do polígono, inclusive os vértices, e  $I$  o número de pontos do reticulado internos ao polígono. A área do polígono  $P$  é dada por*

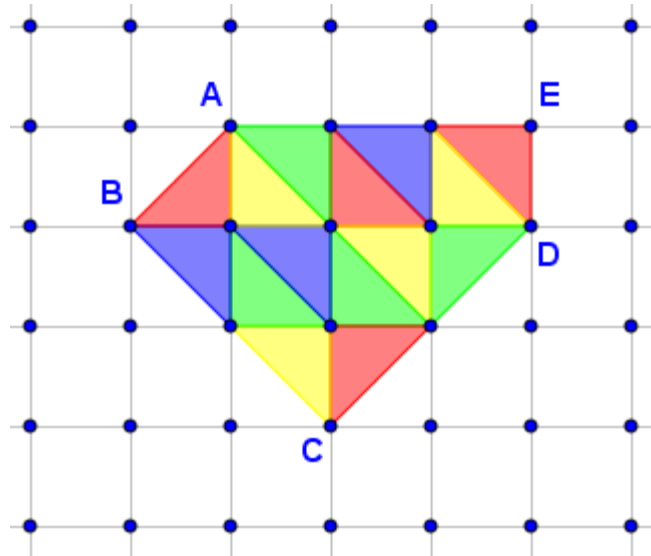
$$A = \frac{B}{2} + I - 1. \tag{3.1}$$

### Demonstração

Sejam  $B$  o número de pontos do reticulado sobre o bordo de um polígono  $P$  simples com  $n$  lados,  $I$  o número de pontos interiores de  $P$  e  $T$  o número de triângulos fundamentais contidos em  $P$ .

A soma dos ângulos internos dos triângulos fundamentais de  $P$ , Figura 37, é dada por

$$180^\circ T. \quad (3.2)$$

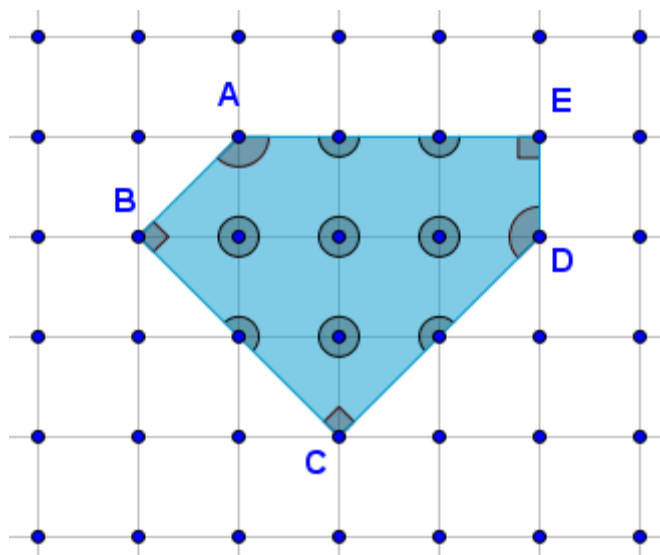


**Figura 37:** Polígono reticulado simples  $ABCDE$  decomposto em triângulos fundamentais.

A soma (3.2) representa todos os ângulos internos a  $P$  em torno dos pontos que estão no bordo e no interior de  $P$ . Contudo, podemos pensar essa soma de outra maneira.

A soma dos ângulos internos  $S_v$  em torno dos vértices  $A, B, C, D$  e  $E$ , Figura 38, é a soma dos ângulos internos de  $P$ . Como  $P$  é decomponível em  $(n - 2)$  triângulos justapostos, temos que essa soma é dada por

$$S_v = (n - 2)180^\circ. \quad (3.3)$$



**Figura 38:** Ângulos em torno dos pontos do polígono reticulado simples  $ABCDE$ .

A soma dos ângulos internos  $S_\ell$  em torno dos pontos que estão nos lados de  $P$ , exceto nos vértices, Figura 38, é dada por

$$S_\ell = (B - n)180^\circ. \quad (3.4)$$

A soma dos ângulos internos  $S_i$  em torno dos pontos que estão no interior de  $P$ , Figura 38, é dada por

$$S_i = 360^\circ I. \quad (3.5)$$

Assim,

$$180^\circ T = S_v + S_\ell + S_i. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.3), (3.4) e (3.5) em (3.6), obtemos:

$$\begin{aligned} 180^\circ T &= (n - 2)180^\circ + (B - n)180^\circ + 360^\circ I; \\ T &= B + 2I - 2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A área do polígono  $P$  é dada por

$$A_P = \frac{1}{2}T, \quad (3.8)$$

uma vez que  $T$  é o número de triângulos fundamentais contidos em  $P$  e  $\frac{1}{2}$  é a área de cada triângulo fundamental (Teorema 3.1).

Substituindo (3.7) em (3.8), concluímos que:

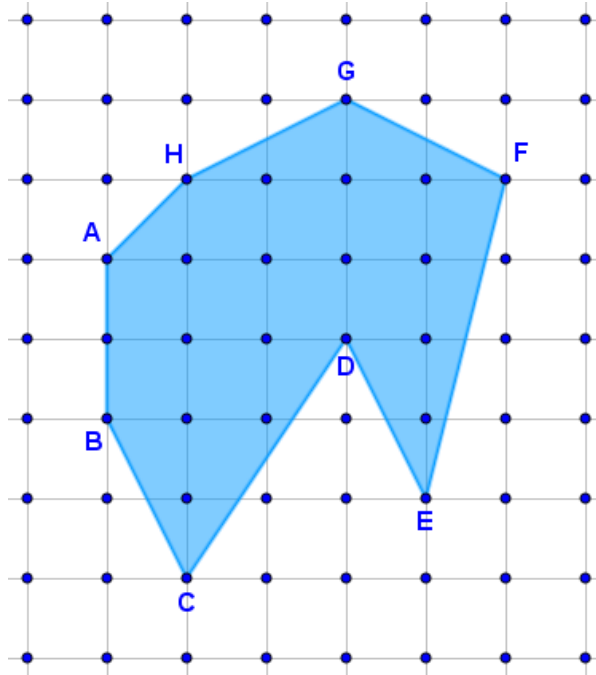
$$A_P = \frac{1}{2}(B + 2I - 2) = \frac{B}{2} + I - 1.$$

■

Vamos ilustrar agora a aplicabilidade do Teorema 3.5 com dois exemplos. Nesses exemplos, os valores obtidos pelo Teorema de Pick são comparados com os resultados obtidos com o emprego das relações para o cálculo de área.

**Exemplo 1**

Calcular a área do polígono  $ABCDEFGH$  ilustrado na Figura 39.



**Figura 39:** Polígono reticulado  $ABCDEFGH$ .

Podemos empregar o Teorema de Pick no cálculo da área do polígono  $ABCDEFGH$  porque o mesmo é um polígono reticulado simples. Nesse polígono, observamos que  $B = 9$  e  $I = 14$ . Aplicando o Teorema 3.5, temos que:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{9}{2} + 14 - 1 = \frac{35}{2} = 17,5ua.$$

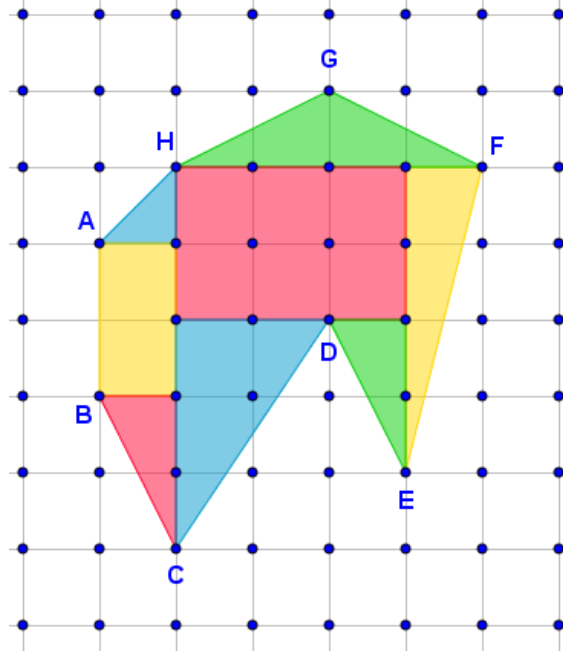
Mas o polígono  $ABCDEFGH$  também pode ser decomposto em triângulos e retângulos, como mostra a Figura 40. A área de um triângulo é dada pela relação

$$A_{\Delta} = \frac{b.h}{2}, \tag{3.9}$$

e a de um retângulo por

$$A = b \cdot h, \quad (3.10)$$

onde  $b$  é a medida base e  $h$  é a medida da altura relativa a essa base.



**Figura 40:** Polígono reticulado  $ABCDEFGH$  decomposto em triângulos e retângulos.

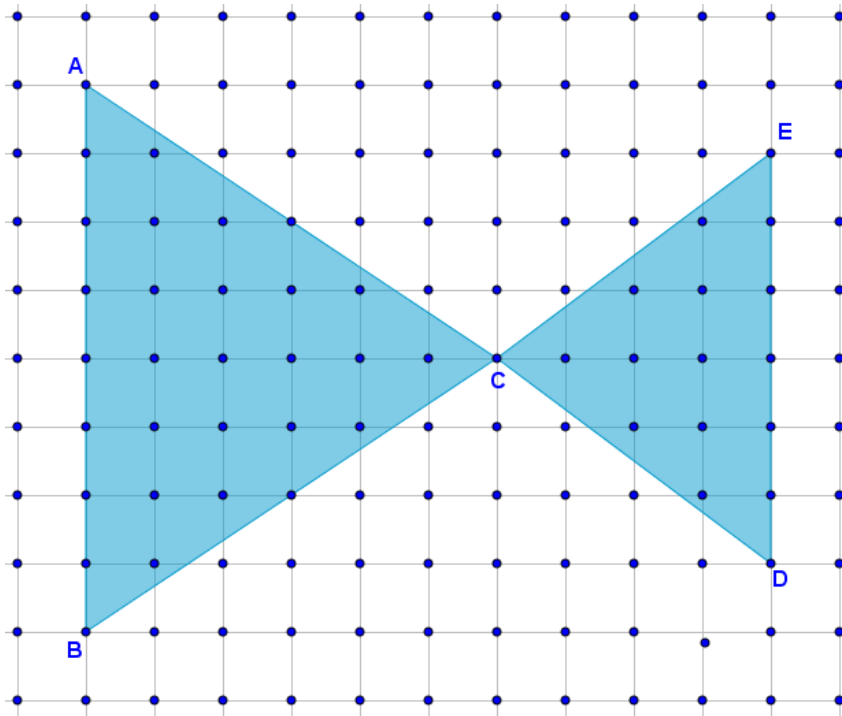
Dessa forma, utilizando as relações (3.9) e (3.10), a área do polígono é dada por:

$$\begin{aligned} A_{ABCDEFGH} &= A_{\Delta FGH} + A_{\Delta EFI} + A_{\Delta DEJ} + A_{\Delta CDM} + A_{\Delta BCM} + A_{\Delta AHK} + A_{HIJL} + A_{ABMK} \\ &= \frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ &= 2 + 2 + 1 + 3 + 1 + \frac{1}{2} + 6 + 2 \\ &= \frac{35}{2} = 17,5ua. \end{aligned}$$

O valor calculado com o emprego das relações (3.9) e (3.10) é o mesmo fornecido pelo Teorema de Pick.

### **Exemplo 2**

Calcular a área do polígono  $ABCDE$  ilustrado na Figura 41.



**Figura 41:** Polígono reticulado  $ABCDE$ .

O polígono  $ABCDE$  é composto por dois triângulos justapostos. Utilizando a relação (3.9), obtemos para a área:

$$A_{ABCD} = \frac{8.6}{2} + \frac{6.4}{2} = 24 + 12 = 36ua.$$

No polígono  $ABCDE$ , verificamos que  $B = 19$  e  $I = 28$ . Aplicando o Teorema 3.5, constatamos que:

$$A_{ABCDE} = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{19}{2} + 28 - 1 = \frac{73}{2} = 36,5ua.$$

Por que o Teorema de Pick falha no cálculo da área do polígono  $ABCDE$ ? Isto ocorre porque o polígono  $ABCDE$  não é um polígono reticulado simples.

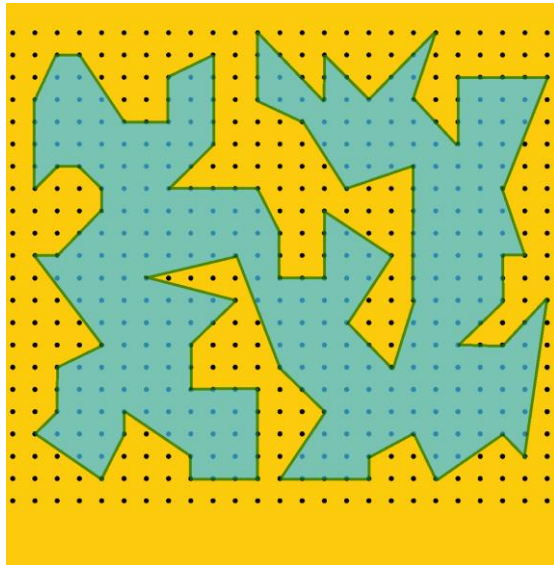
O Teorema de Pick pode ser empregado no cálculo da área de regiões mais complexas, como ilustram as Figuras 42 e 43. Ele também pode ser empregado para calcular a área de um polígono reticulado simples com “buracos”, como na Figura 44, desde que os buracos também sejam polígonos reticulados simples. Algumas aplicações do Teorema de Pick, como uma aproximação para o valor de  $\pi$  e para a área do círculo, assim como a demonstração do Teorema 3.6, estão presentes em Tamari (2013).

**TEOREMA 3.6**

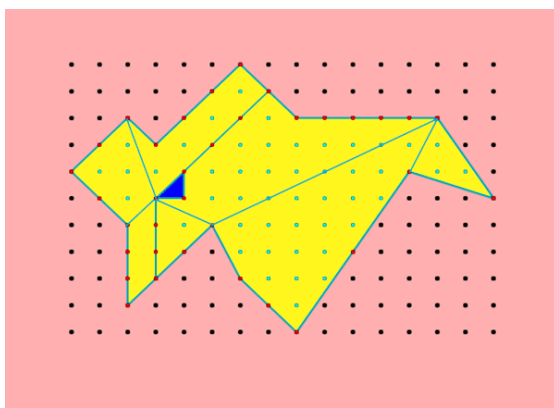
A área de um polígono reticulado simples com  $m \geq 0$  buracos reticulados simples, é dada por

$$A = \frac{B}{2} + I + m - 1,$$

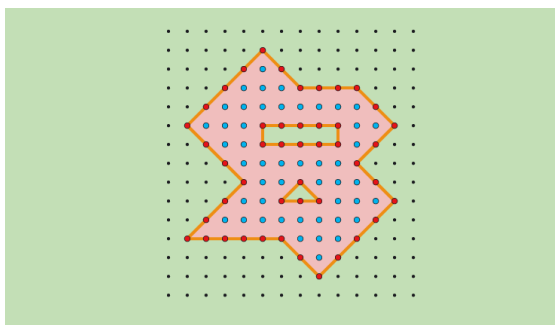
sendo  $B$  o número de pontos sobre o bordo do polígono e  $I$  o número de pontos interiores.



**Figura 42:** Polígono reticulado simples – CMUP (2016).



**Figura 43:** Polígono reticulado simples – CMUP (2016).



**Figura 44:** Polígono reticulado simples com “buracos” – CMUP (2016).

### 3.3 O Teorema dos Carpetes

Teorema dos Carpetes é uma denominação informal para o teorema que estabelece uma relação sobre a intersecção de áreas de figuras planas. Esse teorema permite solucionar problemas mais complexos e, devido a sua simplicidade, pode ser abordado nas aulas de Geometria no Ensino Fundamental. Em Nunes (2014), há uma série de aplicações desse teorema a problemas geométricos. Adaptamos o teorema da citação presente na prova da primeira fase da 17ª Olimpíada Paulista de Matemática.

#### **TEOREMA 3.7** (Teorema dos Carpetes)

*Dois carpetes são colocados em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual à área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual à área da região não coberta por eles.*

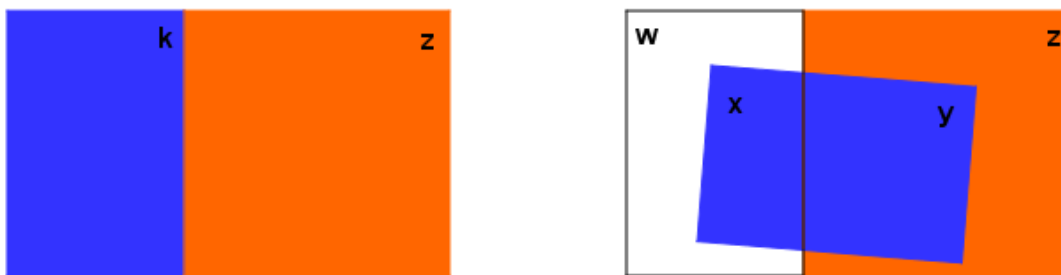
#### **Demonstração**

Sejam  $k$  e  $z$  as áreas dos dois carpetes e

$$A_D = k + z \quad (3.11)$$

a área do dormitório. Dessa forma, os dois carpetes cobrem o chão do dormitório sem intersecções. Ao sobrepor os dois carpetes,  $k$  e  $z$  passam a cobrir uma área comum  $y$ , como mostra a Figura 45.





**Figura 45:** Carpetes que cobrem o dormitório.

Denominando  $x$  a parte de  $k$  não comum a  $z$  e de  $w$  a parte do dormitório sem carpete, temos que

$$k = x + y \tag{3.12}$$

e

$$A_D = x + w + z. \tag{3.13}$$

Substituindo (3.12) em (3.11), temos que

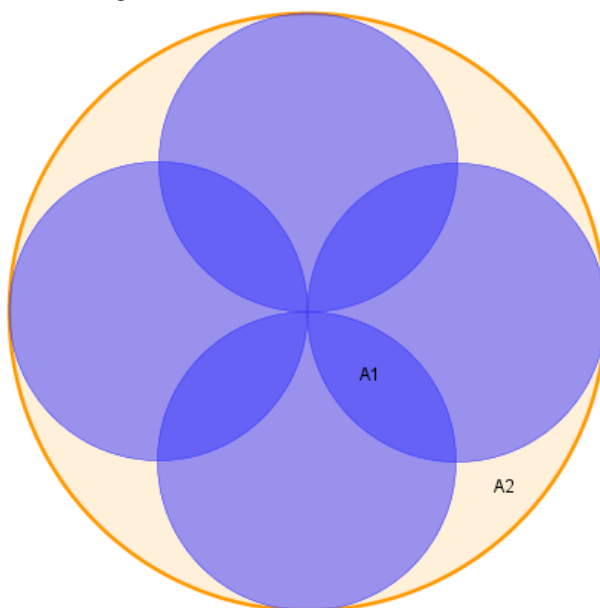
$$A_D = x + y + z. \tag{3.14}$$

Comparando (3.14) e (3.13), concluimos que:

$$y = w.$$

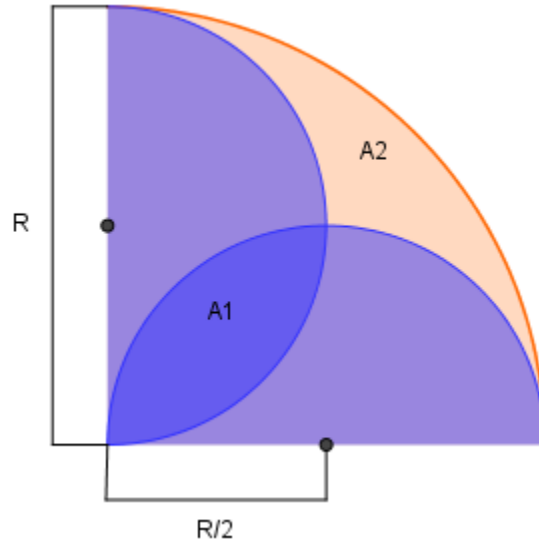
Portanto, a área da intersecção dos carpetes é igual à área sem carpete. ■

Como exemplo de aplicação, empregamos o Teorema dos Carpetes para associar as áreas  $A_1$  e  $A_2$  na rosácea da Figura 46 e assim calcular  $A_2$ .



**Figura 46:** Rosácea de quatro pétalas.

Mostremos inicialmente que a área  $A_1$  da pétala da rosácea é igual à área  $A_2$  compreendida entre a metade do semicírculo de raio  $R$  e os semicírculos de raio  $\frac{R}{2}$ , Figura 47.



**Figura 47:** Figuras equivalentes:  $A_1 = A_2$ .

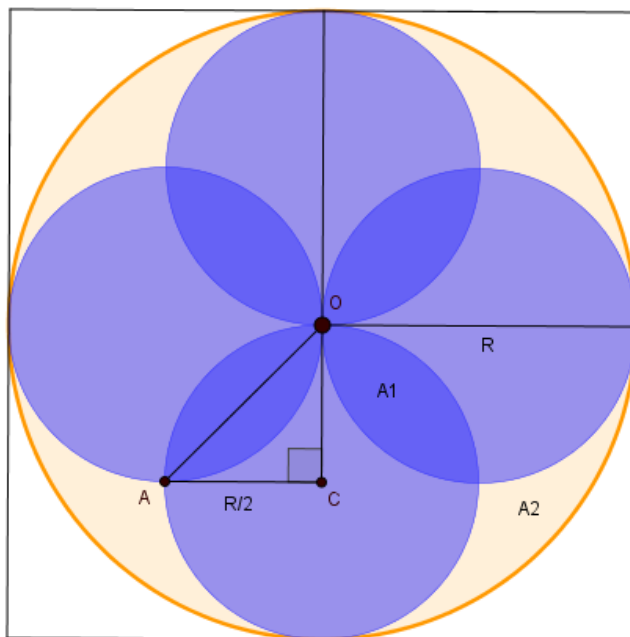
$$\text{Área do semicírculo de raio } \frac{R}{2}: \frac{1}{2} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{8}.$$

$$\text{Metade da área do semicírculo de raio } R: \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Como  $2 \frac{\pi R^2}{8} = \frac{\pi R^2}{4}$ , temos que a área dos dois semicírculos de raio  $\frac{R}{2}$  é igual à metade da área do semicírculo de raio  $R$ . Logo, pelo Teorema dos Carpetes, a área da intersecção dos dois semicírculos de raio  $\frac{R}{2}$ , a pétala de área  $A_1$ , é igual à área da metade do semicírculo de raio  $R$  não coberta pelos semicírculos de raio  $\frac{R}{2}$ , a região de área  $A_2$ . Portanto,

$$A_1 = A_2.$$

Assim, para determinar  $A_2$  basta calcular  $A_1$ . E a área da pétala corresponde a duas vezes a área do segmento circular  $AO$  de centro  $C$ , ilustrado na Figura 48.



**Figura 48:** Área da pétala da rosácea.

$$A_2 = A_1 = 2A_{AO} = 2(A_{ACO} - A_{\Delta ACO})$$

$$A_2 = 2 \left[ \frac{1}{4} \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{R}{2} \frac{R}{2} \right]$$

$$A_2 = 2 \left( \frac{\pi R^2}{16} - \frac{R^2}{8} \right)$$

$$A_2 = \frac{\pi - 2}{8} R^2$$

### 3.4 O Princípio de Cavalieri para áreas

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano nascido na cidade de Milão, foi discípulo de Galileu Galilei (1564-1642) e, por indicação deste, ocupou a cátedra de Matemática da Universidade de Bolonha.

Cavalieri é lembrado pela obra que, segundo Boyer e Merzbach (2012), é uma das mais influentes do início do período moderno: “Geometria indivisibilibus continuorum”, publicado em 1635. Cavalieri foi estimulado pelos estudos de Johannes Kepler (1571-1630) e encorajado por Galileu a desenvolver o pensamento de infinitésimos. Este trabalho torna-o precursor do Cálculo Integral.

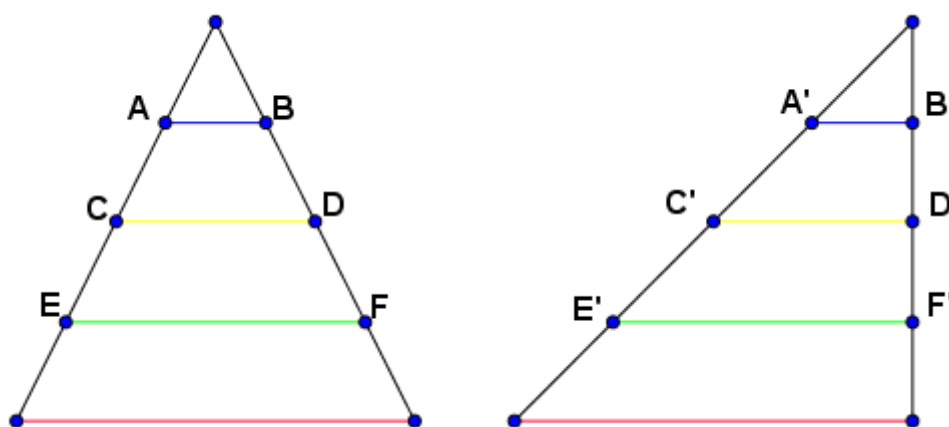
Cavalieri enunciou um princípio que estabelece que a área pode ser pensada como um composto de segmentos ou “indivisíveis”. O princípio pode ser utilizado para o cálculo da área de algumas regiões simples, particularmente discos e regiões elípticas. Mencionamos a seguir o Princípio de Cavalieri no plano conforme Lula (2013) e Garavello (2013), respectivamente.

**Princípio 3.1** (Cavalieri para áreas)

*Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*

*Sejam A e B duas figuras geométricas planas de bases e alturas congruentes. Se toda secção paralela às bases determina em A e B segmentos congruentes, então A e B são equivalentes.*

A Figura 49 ilustra o emprego do Princípio de Cavalieri no cálculo da área de figuras planas de bases e alturas congruentes.



**Figura 49:** Figuras equivalentes pelo Princípio de Cavalieri:  $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$ ,  
 $\overline{EF} \equiv \overline{E'F'}$ .

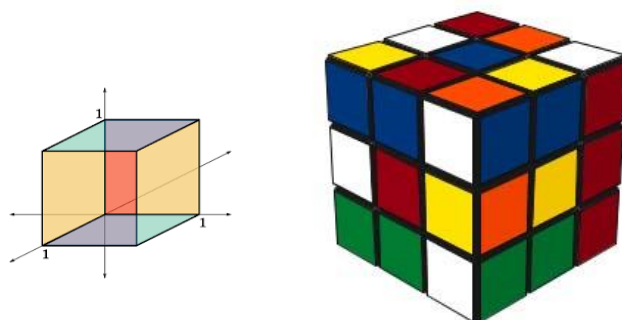
### 3.5 A noção intuitiva de volume

A palavra volume provém do latim *volumen*, rolo ou coisa enrolada; substantivo ligado ao verbo *volvere*, virar, voltar. Em tempos idos, os livros eram escritos em rolos de papiro ou couro, como ilustra a Figura 50. Quem lia um capítulo ou trecho ia desenrolando o que estava lendo e o enrolando de novo para ler o próximo.



**Figura 50:** Livro primitivo – Oscar Brisola (2016).

Em Geometria, volume é a quantidade de espaço tridimensional ocupada por um sólido ou figura espacial. O volume de um sólido tridimensional pode ser determinado comparando-o com um cubo de aresta  $1uc$  (uma unidade de comprimento), chamado *cubo unitário*. Na comparação, verifica-se quantos cubos unitários cabem dentro da figura espacial da qual se quer o volume. A Figura 51 ilustra o cálculo do volume de um cubo qualquer comparando-o com o cubo unitário.

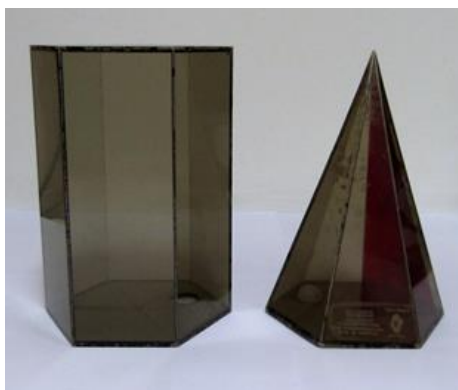


**Figura 51:** Comparação de um cubo qualquer com o cubo unitário.

Além da comparação com o cubo unitário, o volume de um sólido pode ser determinado através de outras duas comparações:

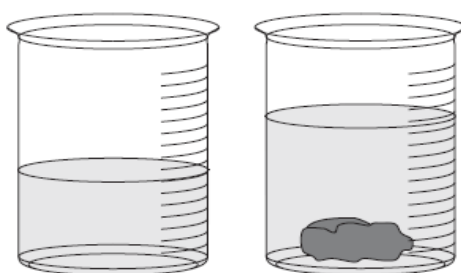
- ① a capacidade, ou volume líquido;
- ② a quantidade de água deslocada na imersão.

Na primeira estratégia, devemos comparar a capacidade do sólido com a de outro sólido. Por exemplo, comparemos um prisma e uma pirâmide hexagonais “ocos” de bases e alturas congruentes, ilustrados na Figura 52. Se enchermos a pirâmide de água e despejarmos essa água no prisma, verificaremos que são necessárias três pirâmides cheias para encher completamente o prisma, ou seja, o volume do prisma corresponde a três vezes o volume da pirâmide de mesma base e mesma altura.



**Figura 52:** Prisma e pirâmide hexagonais de bases e alturas congruentes.

A segunda estratégia consiste, segundo Lima (2013, 22), em mergulhar completamente o sólido do qual se quer calcular o volume em um recipiente graduado contendo água. Segundo o Princípio de Arquimedes, a quantidade de água deslocada na imersão corresponde ao volume do sólido. Assim, calcular o volume do sólido equivale a calcular o volume de água deslocado, como mostra a Figura 53.



**Figura 53:** Imersão do sólido em um recipiente graduado contendo água.

**Princípio 3.2** (Princípio de Arquimedes)

*Todo corpo mergulhado em um fluido (líquido ou gás) sofre, por parte do fluido, uma força vertical para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.*

Para corpos totalmente imersos, o volume de fluido deslocado é igual ao volume do corpo.

As três estratégias de comparação discutidas anteriormente não são suficientes para calcularmos o volume de um sólido qualquer.

### **3.6 O Princípio de Cavalieri para volumes**

Cavalieri estabeleceu para volumes um princípio similar àquele para o cálculo de áreas. Mencionamos a seguir o Princípio de Cavalieri no espaço conforme Lula (2013), Lima (2006) e uma versão independente, respectivamente.

#### **Definição 3.5** (Sólidos equivalentes)

*Dois sólidos geométricos são equivalentes quando têm o mesmo volume.*

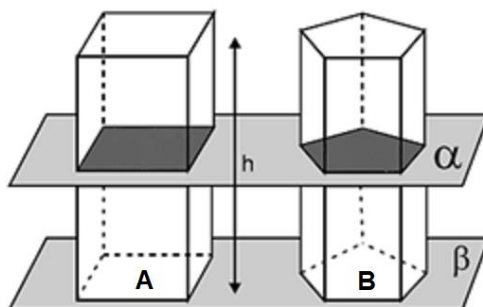
#### **Princípio 3.3** (Cavalieri para volumes)

*Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.*

*Sejam  $A$  e  $B$  dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona  $A$  e  $B$  segundo figuras planas com áreas iguais, então  $\text{vol}(A)=\text{vol}(B)$ .*

*Sejam  $A$  e  $B$  dois sólidos de bases equivalentes e alturas congruentes. Se todo plano paralelo ao plano que contém as bases de  $A$  e  $B$  determina secções equivalentes em  $A$  e  $B$ , então  $A$  e  $B$  são equivalentes.*

As Figuras 54 e 55 ilustram a última versão. Na Figura 54,  $A$  é a medida da área da base do prisma quadrangular e  $B$ , a medida da área do prisma pentagonal.



**Figura 54:**  $A = B$ ,  $\alpha \parallel \beta$ : sólidos equivalentes.



**Figura 55:** Sólidos equivalentes – O Baricentro da Mente (2016).

O Princípio de Cavalieri pode ser empregado para determinar o volume do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera. Ao empregá-lo, devemos comparar o sólido com outro do qual sabemos calcular o volume. Para Lima (2006), utilizar o Princípio de Cavalieri permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às relações clássicas de volume. Segundo Lula (2013) e Partelini (2010), a demonstração rigorosa do Princípio de Cavalieri não é acessível aos estudantes do Ensino Médio. Assim, ele deve ser apresentado na forma de postulado, ressaltando-se a necessidade de demonstrar a equivalência das secções.

Demonstramos a seguir o volume da esfera e do toro empregando o Princípio de Arquimedes.

### 3.6.1 O volume da esfera

#### **Definição 3.6** (Anticlépsidra)

*Anticlépsidra é o sólido delimitado por um cilindro equilátero de raio  $r$  do qual foram retirados dois cones circulares retos de raio  $r$  e altura  $r$  (clépsidra), como mostra a Figura 56.*





**Figura 56:** Anticlepsidra e um dos cones da clépsidra.

**Teorema 3.8** (Volume da esfera)

*O volume da esfera de raio  $r$  é igual a  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .*

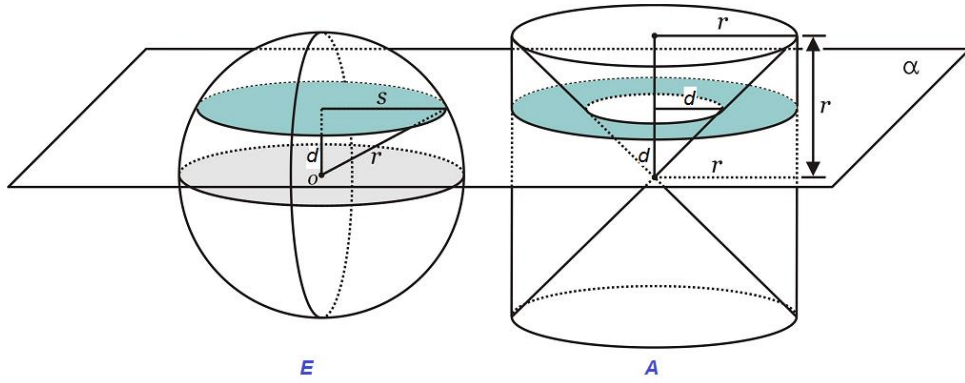
**Demonstração**

Sejam a esfera  $E$  de raio  $r$  e a anticlepsidra  $A$  de raio  $r$ , como mostra a Figura 57.



**Figura 57:** Esfera  $E$  e anticlepsidra  $A$ , ambas de raio  $r$ .

Seja ainda  $\alpha$  um plano paralelo às bases de  $E$  e  $A$ , que secciona ambos a uma altura  $d$ ,  $d < r$ , dos centros, como ilustra a Figura 58.



**Figura 58:** Secções paralelas às bases da esfera  $E$  e da anticlépsidra  $A$ , ambas de raio  $r$ .

Na esfera  $E$ , o plano  $\alpha$  determina um círculo de raio  $s$ . Como

$$r^2 = d^2 + s^2 \Rightarrow s^2 = r^2 - d^2,$$

a área da secção é dada por

$$A_{\text{secção}} = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2). \quad (3.15)$$

Na anticlépsidra  $A$ , o plano  $\alpha$  determina uma coroa circular de raio externo  $r$  e raio interno  $d$ . Logo, a área da secção é

$$A_{\text{secção}} = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2). \quad (3.16)$$

As áreas (3.15) e (3.16) das secções são iguais independentemente da medida  $d$ , desde que  $\alpha$  seja paralelo às bases de  $E$  e de  $A$ . Dessa forma, pelo Princípio de Cavalieri, podemos concluir que  $E$  e  $A$  são equivalentes. Assim:

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}};$$

$$V_{\text{esfera}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r;$$

$$V_{\text{esfera}} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3;$$

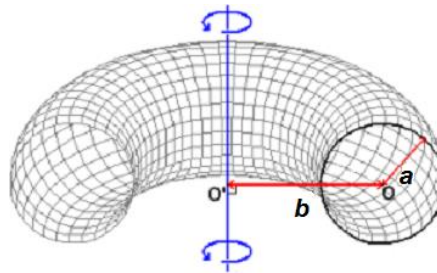
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

■

### 3.6.2 O volume do toro

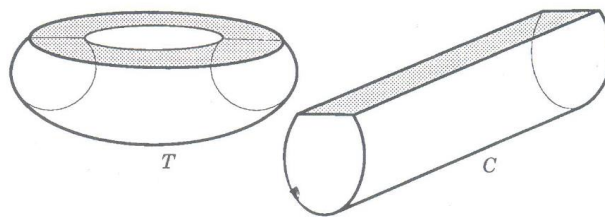
#### **Definição 3.7** (Toro)

O sólido gerado pela rotação de um círculo de raio  $a$  em torno de um eixo vertical situado no plano do círculo, a uma distância  $b > a$  do seu centro, Figura 59, denomina-se toro.



**Figura 59:** Toro (ou toróide).

Podemos determinar o volume do toro usando o Princípio de Cavalieri. Para tanto, devemos compará-lo com um sólido do qual sabemos calcular o volume, garantindo que secções paralelas ao plano das bases sejam equivalentes. Usaremos, na comparação, um cilindro circular reto horizontal cuja base é um círculo de raio  $a$  e cuja altura mede  $2\pi b$ , como ilustra a Figura 60.



**Figura 60:** Secção no toro e no cilindro circular reto horizontal de bases congruentes – Lima (2006).

#### **Teorema 3.9** (Volume do toro)

O volume do toro de raios externo  $(b + a)$  e interno  $(b - a)$  é  $2\pi^2 a^2 b$ .

#### **Demonstração**

Sejam o toro  $T$  de raios externo e interno  $(b + a)$  e  $(b - a)$ , respectivamente, e o cilindro circular reto horizontal  $C$  de raio  $a$  e altura  $2\pi b$ . Seja ainda  $\beta$  um plano paralelo

às bases de  $T$  e  $C$ , que secciona ambos a uma altura  $z$ ,  $z < a$ , dos centros dos círculos que definem os dois sólidos.

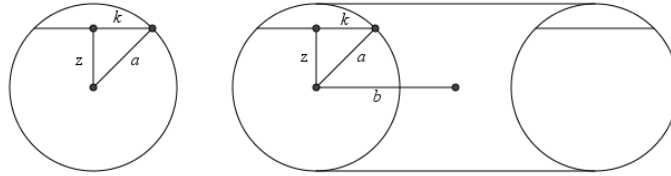
No toro  $T$ , o plano  $\beta$  determina uma coroa circular de raio externo

$$R = b + k = b + \sqrt{a^2 - z^2}$$

e raio interno

$$r = b - k = b - \sqrt{a^2 - z^2},$$

como na Figura 61.



**Figura 61:** Secção no toro.

Assim:

$$A_{\text{secção } T} = \pi R^2 - \pi r^2;$$

$$A_{\text{secção } T} = \pi(b + \sqrt{a^2 - z^2})^2 - \pi(b - \sqrt{a^2 - z^2})^2;$$

$$A_{\text{secção } T} = \pi(b^2 + 2b\sqrt{a^2 - z^2} + a^2 - z^2 - b^2 + 2b\sqrt{a^2 - z^2} - a^2 + z^2);$$

$$A_{\text{secção } T} = 4\pi b\sqrt{a^2 - z^2}. \quad (3.17)$$

No cilindro  $C$ , o plano  $\beta$  determina um retângulo de base  $2\sqrt{a^2 - z^2}$  e altura  $2\pi b$ .

Logo:

$$A_{\text{secção } C} = 2\sqrt{a^2 - z^2} \cdot 2\pi b;$$

$$A_{\text{secção } C} = 4\pi b\sqrt{a^2 - z^2}. \quad (3.18)$$

As áreas (3.17) e (3.18) das secções são iguais independentemente da medida  $z$ , desde que  $\beta$  seja paralelo às bases de  $T$  e de  $C$ . Assim, pelo Princípio de Cavalieri, podemos afirmar que  $T$  e  $C$  são equivalentes. Dessa forma:

$$V_{\text{toro}} = V_{\text{cilindro}};$$

$$V_{\text{toro}} = A_{\text{base}} \cdot h;$$

$$V_{\text{toro}} = \pi a^2 \cdot 2\pi b;$$

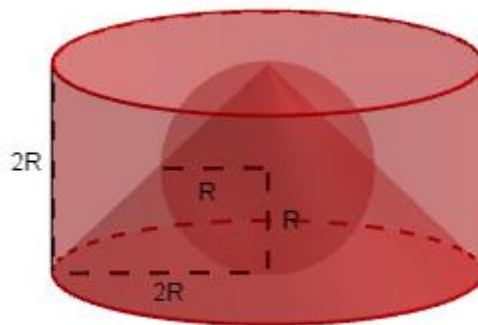
$$V_{\text{toro}} = 2\pi^2 a^2 b.$$

■

### 3.7 O Princípio de Equilíbrio de Arquimedes

Segundo Garbi (2010), Arquimedes nasceu em 287 a.C. na cidade italiana de Siracusa. Considerado o maior gênio da antiguidade, fez grandes feitos nos campos da Matemática e da Física. Entre suas contribuições à Física estão as bases da hidrostática e da estática, tendo descoberto as leis do empuxo e da alavanca. Segundo Boyer e Merzbach (2012), Arquimedes foi morto na Segunda Guerra Púnica por um soldado romano, apesar das ordens do general Marcelo para que a sua vida fosse poupada, pois o geômetra inventara muitas máquinas de guerra para conservar o inimigo à distância, assim seria de grande interesse mantê-lo vivo.

Na obra *O Método*, Arquimedes descreve um método mecânico para investigar questões matemáticas. Uma dessas questões diz respeito à esfera. Empregando a lei da alavanca, descrita em sua obra *Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas*, Arquimedes relacionou uma esfera de raio  $R$  com um cone reto de raio  $2R$  e altura  $2R$  e com um cilindro reto de raio  $2R$  e altura  $2R$ , ilustrados na Figura 62.



**Figura 62:** Sólidos no Princípio de Equilíbrio de Arquimedes.

Sendo  $V_e$  o volume da esfera,  $V_o$  o volume do cone e  $V_i$  o volume do cilindro, Arquimedes estabeleceu que

$$\frac{V_e + V_o}{V_i} = \frac{1}{2}, \quad (3.19)$$

isto é,

$$V_e = \frac{V_i}{2} - V_o. \quad (3.20)$$

Empregando as relações para o cálculo do volume do cilindro e do cone em (3.20), constatamos que:

$$V_e = \frac{\pi(2R)^2 \cdot 2R}{2} - \frac{1}{3}\pi(2R)^2 \cdot 2R;$$

$$V_e = 4\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3;$$

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

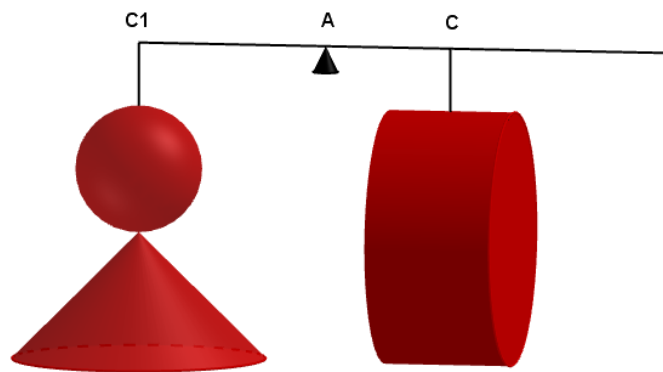
A relação (3.20) pode ser escrita como

$$V_e + V_o = \frac{V_i}{2},$$

ou

$$V_i = 2(V_e + V_o),$$

e estabelece como a esfera, o cone e o cilindro se equilibram segundo Arquimedes. A Figura 63 mostra esse equilíbrio. A demonstração da relação (3.19) pode ser encontrada em Aaboe (2013).



**Figura 63:** O Princípio de Equilíbrio de Arquimedes.

## 4 ATIVIDADES

Neste capítulo organizamos atividades lúdico-didáticas que abordam alguns dos teoremas e princípios discutidos no capítulo 3.

As atividades são apresentadas na ordem abaixo.

- I. Manipulativas
  - Base média do trapézio
  - Teorema de Pitágoras
  - Teorema de Pitágoras – Tangram
  - Princípio de Cavalieri – Volume da Esfera
- II. Teorema dos Carpetes
- III. Teorema de Pick - Geoplano

### 4.1 Manipulativas

#### 4.1.1 Base média do trapézio

**Nível/Ano:** Ensino Fundamental/6º.

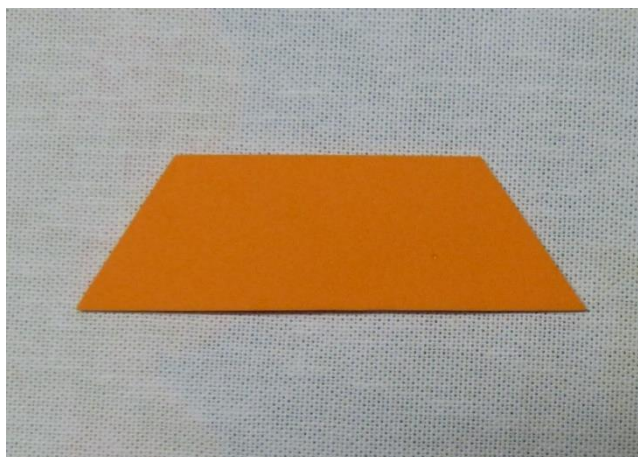
**Conteúdo:** cálculo da área do trapézio.

**Materiais:** EVA, tesoura, régua, lápis, borracha.

#### **Encaminhamento Metodológico**

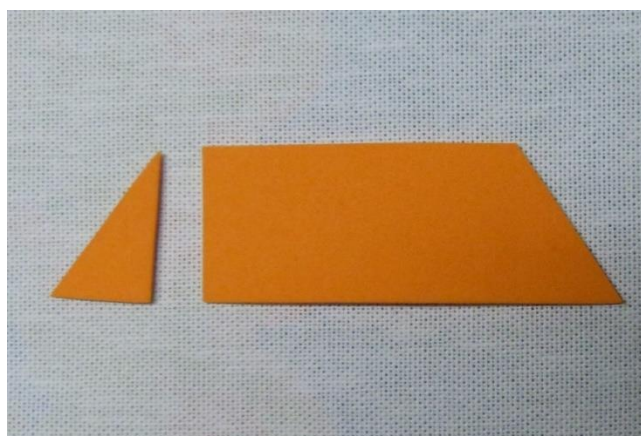
Quando calculamos a área do trapézio, estamos transformando-o em um retângulo. Esse retângulo tem altura igual à do trapézio e a sua base é a base média do trapézio. Assim, essa atividade tem como objetivo identificar o retângulo que tem a mesma área do trapézio, empregando o EVA como material manipulativo.

Iniciamos a atividade analisando um caso particular: o trapézio isósceles, Figura 64. Após definir trapézio isósceles, cada estudante deve confeccioná-lo em EVA e seguir o procedimento descrito a seguir.



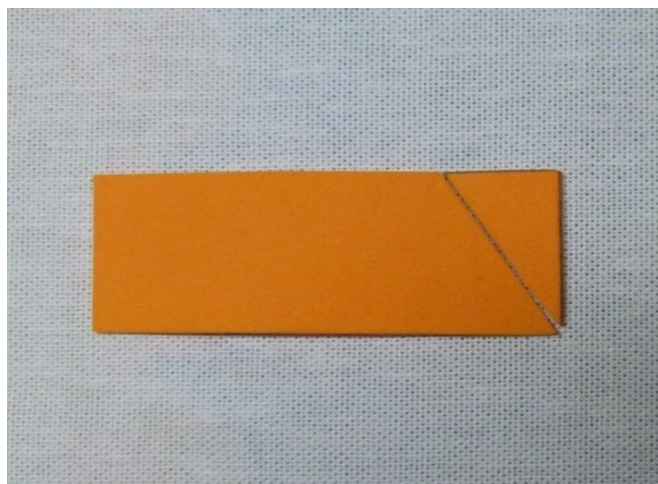
**Figura 64:** Trapézio isósceles.

Para transformar o trapézio isósceles em um retângulo é necessário dividi-lo em duas figuras: um trapézio retângulo e um triângulo retângulo, como podemos ver na Figura 65. O triângulo retângulo é obtido seccionando-se o trapézio por um vértice da base menor perpendicularmente à base maior. Ajustando esse triângulo sobre o outro lado do par de lados não paralelos, obtemos um retângulo, como mostra a Figura 66. Isto é possível porque a hipotenusa do triângulo retângulo é congruente aos lados não paralelos do trapézio isósceles e um dos catetos tem a medida da altura do trapézio. Dessa forma, utilizamos todo o trapézio para compor o retângulo, o que evidencia a equivalência das figuras, ou seja, a igualdade de áreas.



**Figura 65:** Trapézio isósceles decomposto em um trapézio e em um triângulo, ambos retângulos.



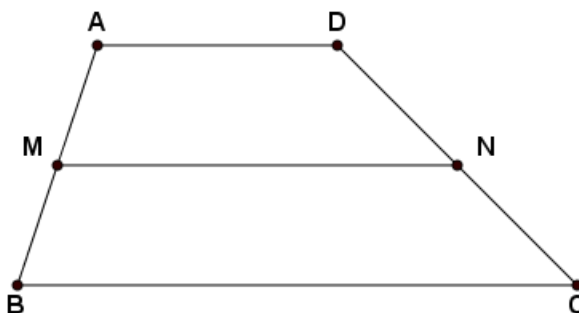


**Figura 66:** Retângulo obtido pela decomposição do trapézio isósceles.

Logo, para calcular a área do trapézio basta calcular a área do retângulo.

Agora precisamos transformar um trapézio qualquer em um retângulo. Para isso utilizaremos uma propriedade particular do trapézio: a sua base média.

Dado um trapézio qualquer, como o da Figura 67, marquemos os pontos médios dos lados não paralelos. A base média do trapézio é o segmento que tem por extremos esses pontos.

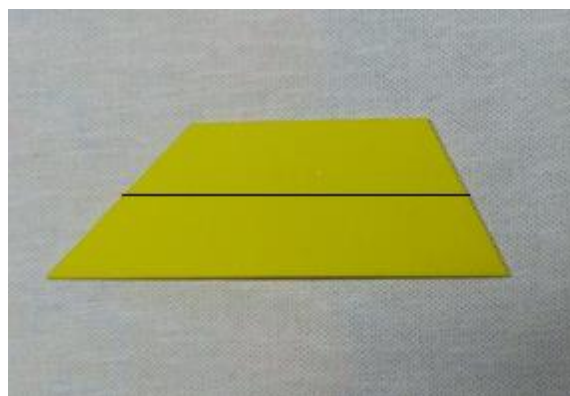


**Figura 67:** Trapézio escaleno e a base média  $\overline{MN}$ .

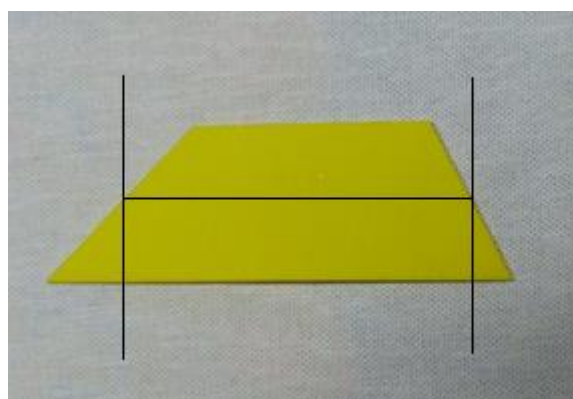
Cada estudante deve confeccionar em EVA um trapézio qualquer e seguir o procedimento descrito.

No trapézio em EVA, tracemos a base média, como ilustra a Figura 68. Em seguida, tracemos dois segmentos perpendiculares às bases do trapézio passando pelos pontos médios dos lados não paralelos, como mostra a Figura 69. Cada um dos triângulos retângulos definidos pelas perpendiculares devem ser retirados do trapézio, como na

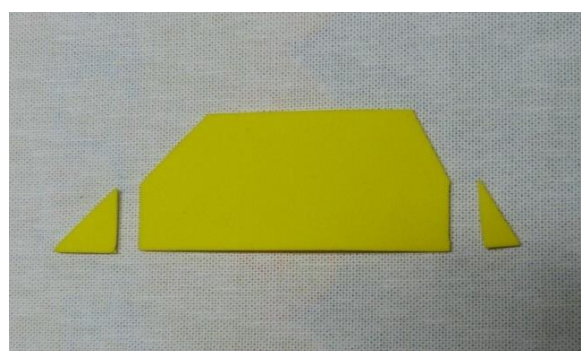
Figura 70, e ajustados à parte superior de cada um dos lados não paralelos dos quais foram cortados. Isto é possível porque a hipotenusa desses triângulos retângulos mede a metade da medida de cada um dos lados não paralelos e um dos catetos mede a metade da altura do trapézio. Formamos assim um retângulo que tem por altura a altura do trapézio e, por base, a base média do trapézio, como observamos na Figura 71.



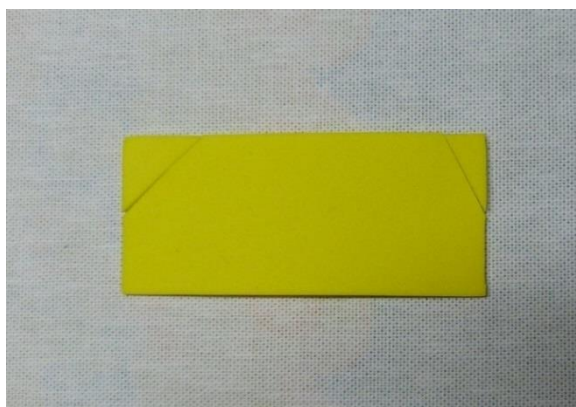
**Figura 68:** Trapézio escaleno com a base média em destaque.



**Figura 69:** Segmentos perpendiculares à base média do trapézio.



**Figura 70:** Decomposição do trapézio escaleno.



**Figura 71:** Retângulo equivalente ao trapézio escaleno.

Dessa forma, concluímos que a área do trapézio é dada pelo produto da base média pela medida da altura.

#### **4.1.2 Teorema de Pitágoras**

##### **ATIVIDADE 1**

**Nível/Ano:** Ensino Fundamental/9º.

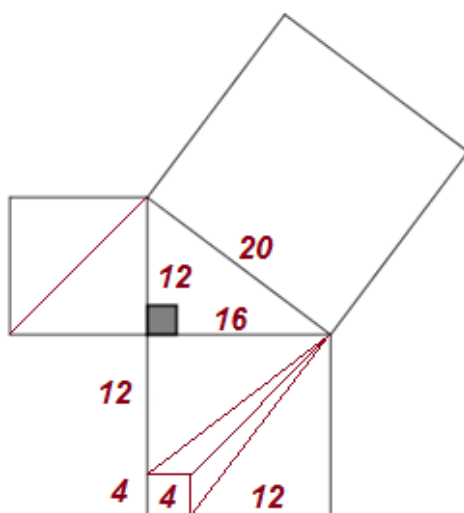
**Conteúdo:** Teorema de Pitágoras, figuras geométricas planas equivalentes.

**Materiais:** papel cartão colorido, tesoura, régua, lápis, borracha.

##### **Encaminhamento Metodológico**

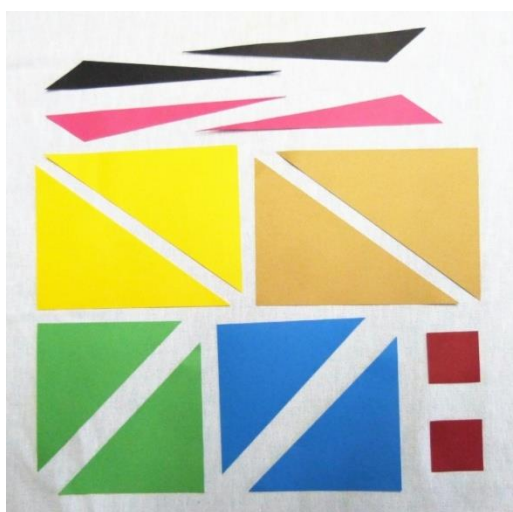
Nesta atividade, provaremos o Teorema de Pitágoras decompondo os quadrados construídos sobre os catetos e compondo com essas partes o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Os estudantes devem confeccionar em papel cartão colorido as seguintes figuras geométricas: um triângulo retângulo de lados  $12\text{cm}$ ,  $16\text{cm}$  e  $20\text{cm}$ ; quadrados de lados  $12\text{cm}$ ,  $16\text{cm}$  e  $20\text{cm}$ . O quadrado de lado  $12\text{cm}$  deve ser decomposto em dois triângulos retângulos cujas hipotenusas medem a diagonal do quadrado. O quadrado de lado  $16\text{cm}$  deve ser decomposto em dois triângulos retângulos, dois triângulos obtusângulos e um quadrado, como na Figura 72.



**Figura 72:** Decomposição dos quadrados construídos sobre os catetos.

As sete peças oriundas da decomposição dos dois quadrados devem ser confeccionadas mais uma vez, como mostra a Figura 73.



**Figura 73:** Duplicação das figuras obtidas na decomposição dos dois quadrados.

Uma vez duplicadas as figuras, os estudantes devem compor, utilizando as sete peças, o quadrado de lado  $20\text{cm}$ . A Figura 74 ilustra a equivalência de áreas, ou seja, o quadrado construído sobre a hipotenusa equivale à soma dos quadrados construídos sobre os catetos:

$$20^2 = 12^2 + 16^2.$$



**Figura 74:** Equivalência de figuras para provar o Teorema de Pitágoras.

## **ATIVIDADE 2 - Tangram**

**Nível/Ano:** Ensino Fundamental/9º.

**Conteúdo:** Teorema de Pitágoras, figuras geométricas planas equivalentes.

**Materiais:** Tangram.

### **Encaminhamento Metodológico**

O objetivo da atividade é apresentar uma prova do Teorema de Pitágoras com o auxílio do Tangram.

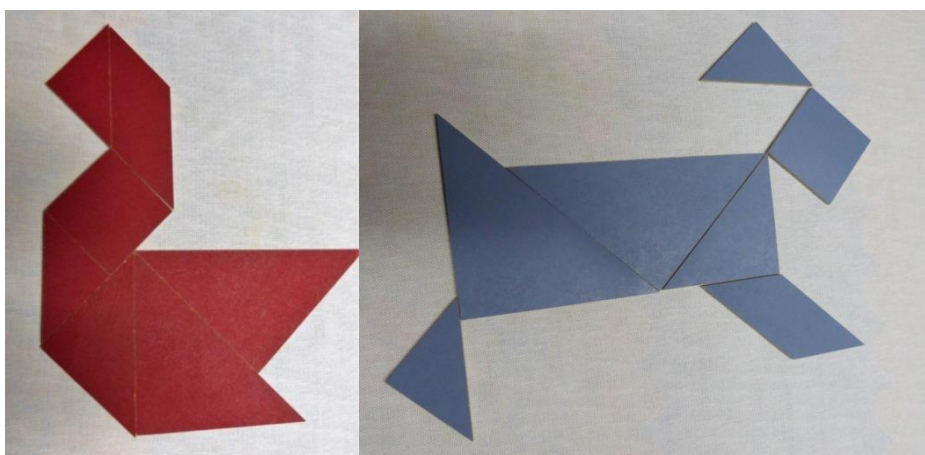
Iniciamos a atividade apresentando aos estudantes o Tangram quadrangular, um quadrado decomposto em 7 polígonos: 5 triângulos retângulos, um paralelogramo e um quadrado, como ilustra a Figura 75.



**Figura 75:** O Tangram quadrangular.

Apresentado o Tangram, propomos agora alguns desafios aos estudantes:

- 1º. usando as sete peças do Tangram, construir um cisne, um cachorro, um peixe e um coelho, como nas Figuras 76 e 77. Após a construção, os estudantes devem concluir que a área dessas quatro figuras é igual à área do quadrado original;

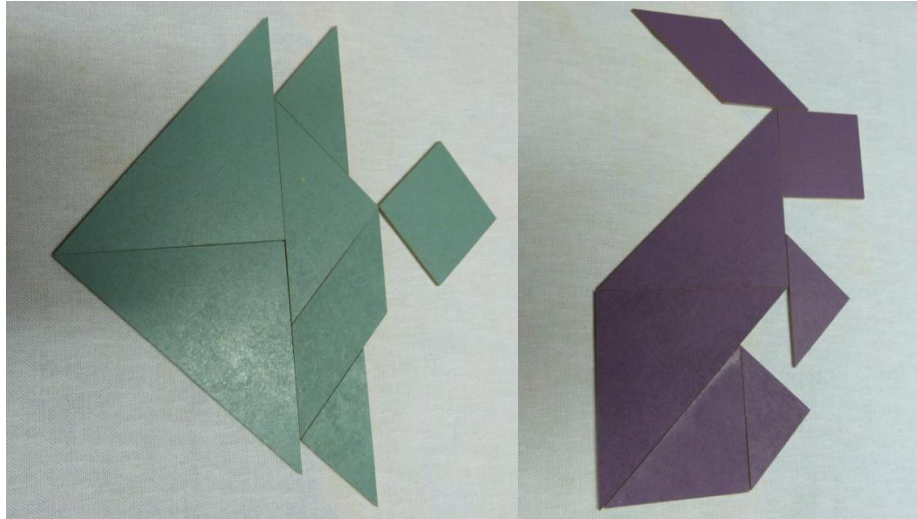


**(a)**

**(b)**

**Figura 76:** Tangram: (a) Cisne; (b) Cachorro.





(a)

(b)

**Figura 77:** Tangram: (a) Peixe; (b) Coelho.

2°. utilizando as peças de dois jogos de Tangram, construir três quadrados que tem por lado as medidas dos lados de um triângulo retângulo, como na Figura 78. Após a construção, os estudantes devem concluir a equivalência das figuras, isto é, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.



**Figura 78:** Quadrados construídos com o Tangram sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles.

### 4.1.3 Princípio de Cavalieri – Volume da Esfera

**Nível/Ano:** Ensino Médio/2º.

**Conteúdo:** Volume da esfera.

**Materiais:** cone, cilindro e esfera em acrílico, água.

#### Encaminhamento Metodológico

Nesta atividade, vamos comprovar o volume da esfera. Para tal, utilizaremos a noção de capacidade, ou seja, se dois sólidos armazenam a mesma quantidade de um determinado líquido, água por exemplo, então esses dois sólidos têm o mesmo volume.

Para a atividade, precisaremos de três sólidos ocios em acrílico, como ilustra a Figura 79:

- um cone reto de raio  $r$  e altura  $r$ .
- um cilindro reto de raio  $r$  e altura  $2r$  (cilindro equilátero);
- uma esfera de raio  $r$ .



**Figura 79:** Esfera, cilindro equilátero e cone em acrílico.

Queremos mostrar que a esfera de raio  $r$  é equivalente à anticlépsidra (cilindro equilátero do qual são retirados dois cones) de raio  $r$ .

Iniciamos enchendo o cilindro equilátero de água. Em seguida, despejamos a água do cilindro no cone até enchê-lo. Descartamos essa água e enchemos o cone novamente. Despejamos agora a água que restou no cilindro na esfera.

Os estudantes devem observar que a esfera fica completamente cheia e concluir que:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone};$$

$$V_{esfera} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r;$$



$$V_{esfera} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3;$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

## 4.2 Teorema dos Carpetes

**Nível/Ano:** Ensino Fundamental/7º, 8º, 9º.

**Conteúdo:** cálculo de áreas, figuras geométricas planas equivalentes.

**Materiais:** listas de exercícios com figuras coloridas.

### Encaminhamento Metodológico

O objetivo desta atividade é estabelecer uma estratégia para calcular a área da intersecção de duas figuras planas internas a uma terceira e a área da região não coberta pelas figuras internas.

Iniciamos a atividade apresentando o Teorema dos Carpetes.

*Colocamos dois carpetes em um dormitório. Se a soma das áreas dos carpetes é igual à área do dormitório, então a área da intersecção dos carpetes é igual à área da região não coberta por eles.*

Após um momento de discussão, os estudantes devem fazer um esboço (ou construir em EVA ou papel colorido) do que estabelece o teorema, como na Figura 80, e concluir que  $y = w$ , isto é, dadas duas figuras geométricas planas internas a uma terceira, se a soma das áreas das figuras internas é igual à área da figura externa, então, ao sobrepormos as figuras internas, a área da intersecção será igual à área da figura externa não coberta pelas figuras internas.



**Figura 80:** Teorema dos Carpetes.

Em seguida, propomos aos estudantes exercícios de aplicação do Teorema dos Carpetes.

### Exercícios

1. Observe o retângulo  $ABCD$  na Figura 81.

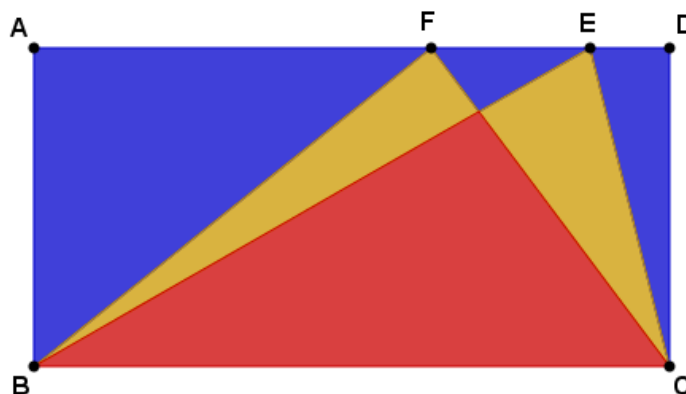
Mostre que a soma das áreas em azul é igual a área em vermelho.



**Figura 81:** Exercício 1 - Teorema dos Carpetes.

### Solução

Dentro do retângulo  $ABCD$ , temos os triângulos  $BEC$  e  $BFC$ , como mostra a Figura 82.



**Figura 82:** Solução do exercício 1 - Teorema dos Carpetes.

Sabemos que a área do retângulo é dada por

$$A_{ABCD} = BC \cdot CD, \quad (4.1)$$

e a áreas dos triângulos por

$$A_{BEC} = \frac{BC \cdot CD}{2} \quad (4.2)$$

e

$$A_{BFC} = \frac{BC \cdot CD}{2}. \quad (4.3)$$

Ao somarmos (4.2) e (4.3), obtemos (4.1), ou seja, a soma das áreas dos dois triângulos é igual à área do retângulo. Assim, podemos afirmar, pelo Teorema dos Carpetes, que a área em vermelho (intersecção dos triângulos) é igual a soma das áreas em azul (região não coberta pelos triângulos).

2. Observe o paralelogramo da Figura 83.

Relacione as áreas da região amarela e das regiões azuis.



**Figura 83:** Exercício 2 - Teorema dos Carpetes.

Solução

Iniciemos denotando o paralelogramo por  $ABCD$  e traçando perpendiculares ao lado  $\overline{BC}$  pelos pontos  $A$  e  $C$ , como ilustra a Figura 84.



**Figura 84:** Solução do exercício 2 - Teorema dos Carpetes.

Dessa forma, há dentro do paralelogramo  $ABCD$  dois triângulos:  $AED$  e  $CFB$ . A área do paralelogramo é dada por

$$A_{ABCD} = BC \cdot CF \quad (4.4)$$

e as áreas dos triângulos por

$$A_{AED} = \frac{AD \cdot AE}{2} \quad (4.5)$$

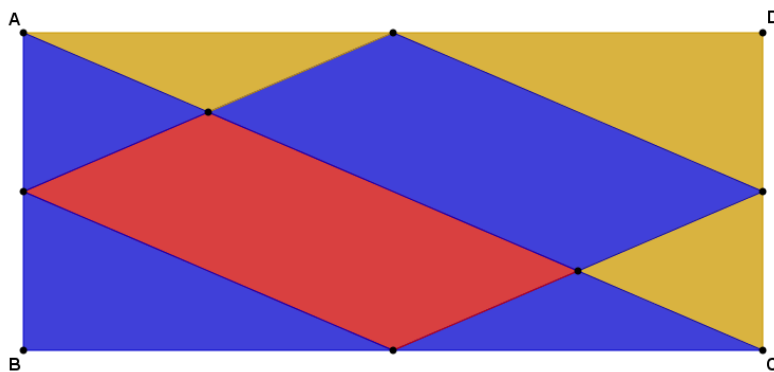
e

$$A_{CFB} = \frac{BC \cdot CF}{2}. \quad (4.6)$$

Como os triângulos são interiores ao paralelogramo, podemos garantir que  $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$  e  $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$ . Portanto, ao somar (4.5) e (4.6), obtemos (4.4), isto é, a soma das áreas dos dois triângulos internos é igual à área do paralelogramo. Utilizando o Teorema dos Carpetes, podemos afirmar que a área em amarelo é igual à soma das áreas em azul.

3. Seja o retângulo  $ABCD$  da Figura 85.

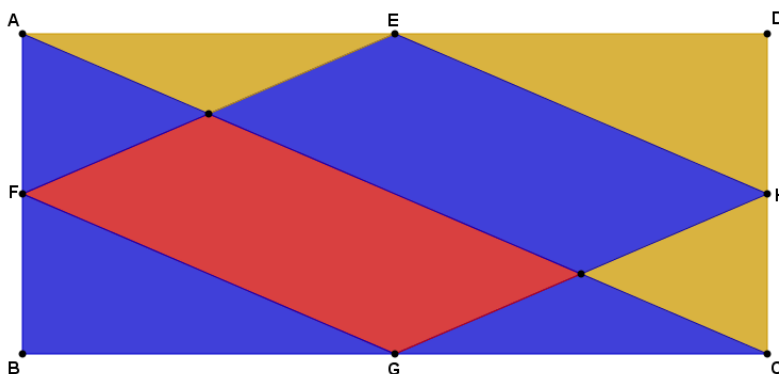
Verifique que a área em vermelho é igual à soma das áreas em amarelo.



**Figura 85:** Exercício 3 -Teorema dos Carpetes.

### Solução

Para verificar a igualdade, vamos evidenciar duas outras figuras internas a esse retângulo: o triângulo  $ABC$  e o losango  $EFGH$ , como na Figura 86.



**Figura 86:** Solução do exercício 3 - Teorema dos Carpetes.

Temos que a área do retângulo é dada por

$$A_{ABCD} = BC \cdot CD, \quad (4.7)$$

a do triângulo por

$$A_{ABC} = \frac{BC \cdot AB}{2} \quad (4.8)$$

e a do losango por

$$A_{EFGH} = \frac{FH \cdot EG}{2}. \quad (4.9)$$

Como os vértices do losango são os pontos médios dos lados do retângulo, verificamos que  $\overline{FH} \equiv \overline{BC}$  e  $\overline{EG} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{CD}$ . Assim, ao somarmos (4.8) e (4.9) obtemos (4.7), ou seja, a soma da área do triângulo com a área do losango é igual à área do retângulo. Então, pelo Teorema dos Carpetes, podemos afirmar que a área da região em vermelho é igual à soma das áreas das regiões em amarelo.

### 4.3 Teorema de Pick – Geoplano

**Nível/Ano:** Ensino Fundamental/7º, 8º, 9º.

**Conteúdo:** cálculo de áreas.

**Materiais:** geoplano quadrangular, barbante colorido ou borrachinhas coloridas.

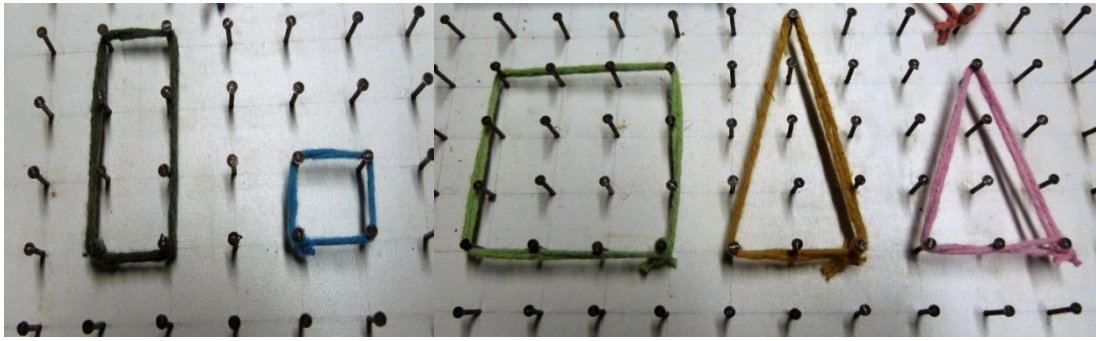
#### **Encaminhamento Metodológico**

O objetivo desta atividade é calcular a área de polígonos utilizando o Teorema de Pick com o auxílio do Geoplano.

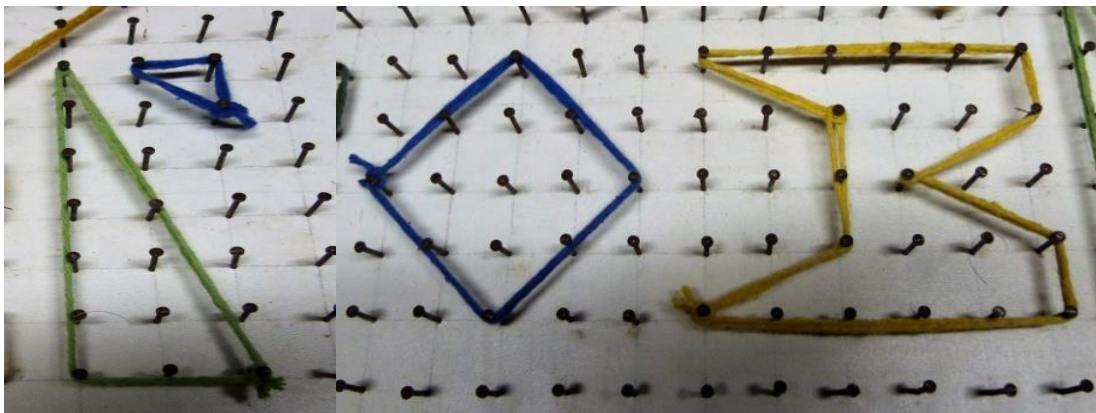
O Geoplano é um recurso didático-pedagógico composto por uma tábua de madeira com pinos ou pregos fixados. Existem diferentes tipos de Geoplanos, tais como o quadrangular e o circular. Utilizamos na atividade o Geoplano quadrangular.

Para empregar o Teorema de Pick, precisamos de uma malha quadriculada. O Geoplano representa essa malha, onde os pregos simbolizam os vértices e demais pontos de fronteira e interiores do polígono.

Começamos a atividade apresentando aos estudantes o Geoplano e depois construindo sobre ele, com barbantes coloridos ou borrachinhas coloridas, alguns polígonos, como nas Figura 87 e 88.



**Figura 87:** Construção de polígonos no Geoplano.



**Figura 88:** Construção de polígonos no Geoplano.

No Geoplano, o quadrado de menor lado construído usando-se quatro pregos como vértices é a unidade de medida de área, o *quadrado unitário*. Uma das formas de calcular a área dos polígonos construídos pelos estudantes no Geoplano é contar a quantidade de quadrados unitários que há no interior de cada polígono. Contudo, essa estratégia se mostra inadequada para alguns polígonos, como por exemplo para aqueles construídos com um número não inteiro de quadrados unitários. Para esses casos, seria possível calcular a área contando o número de pregos que estão no bordo, incluindo os vértices, e no interior do polígono?

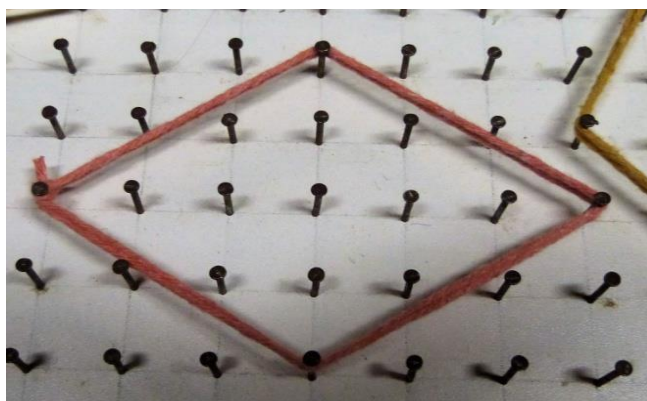
Esse questionamento permite a apresentação do Teorema de Pick.

*A área de um polígono simples em uma malha quadriculada é dada por*

$$A = \frac{B}{2} + I - 1, \quad (4.10)$$

onde  $B$  é a quantidade de pontos na fronteira do polígono e  $I$  é a quantidade de pontos interiores do polígono, desde que os vértices do polígono sejam pontos da malha quadriculada.

Apresentada a relação de Pick, os estudantes devem empregá-la para calcular a área dos polígonos construídos no Geoplano. Nos polígonos onde é possível contar o número de quadrados unitários, os estudantes devem também aplicar a relação de Pick e constatar que ela determina o mesmo número de quadrados unitários observados na contagem. Vamos exemplificar com o losango da Figura 89.



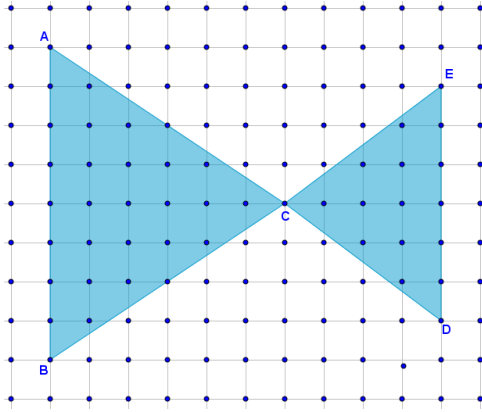
**Figura 89:** Losango no Geoplano.

Podemos calcular a área desse losango de dois modos.

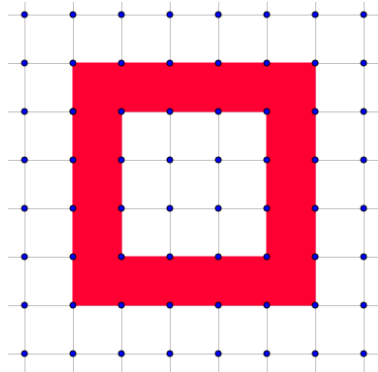
- 1º Contando os quadrados unitários: o losango pode ser decomposto a partir do centro em 4 triângulos retângulos, os quais formam um retângulo com 12 quadrados unitários, isto é, o losango tem 12 unidades de área.
- 2º Calculando pelo Teorema de Pick: utilizando (4.10) temos que

$$A = \frac{4}{2} + 11 - 1 = 12ua.$$

Os estudantes devem ser estimulados a comprovar pelo Teorema de Pick as relações conhecidas para calcular a área de quadriláteros e triângulos. Eles também devem ser confrontados com situações onde o teorema falha, como nos polígonos das Figuras 90 e 91. Nesses casos, eles devem ser capazes de estabelecer uma estratégia alternativa ao Teorema de Pick para calcular a área.



**Figura 90:** Polígono não simples em uma malha quadriculada.



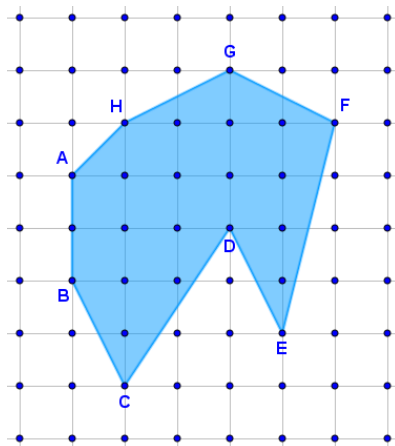
**Figura 91:** Polígono com buraco em uma malha quadriculada.

A atividade é finalizada com a proposição de uma lista de exercícios aplicados.

**Exercícios**

1. Reproduza cada uma das figuras a seguir no Geoplano e calcule a sua área.

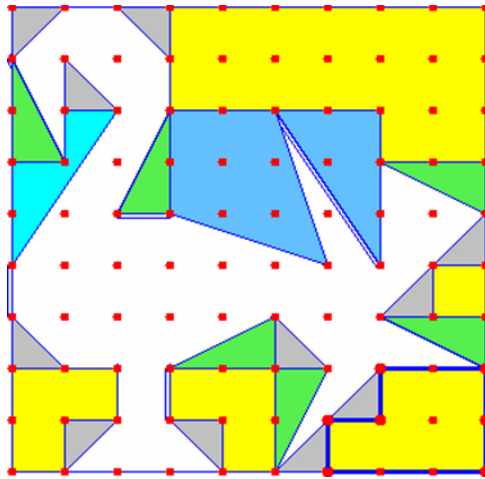
a)



**Figura 92:** Exercício 1a - Teorema de Pick.

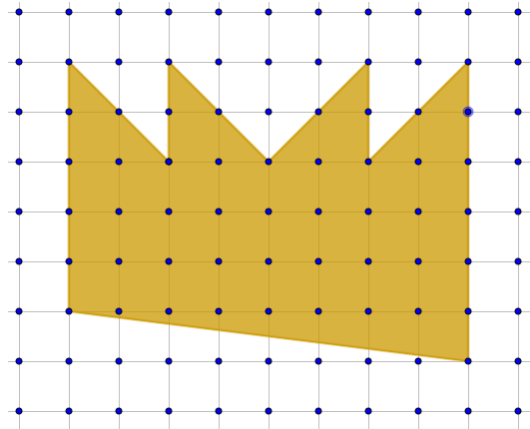


b)



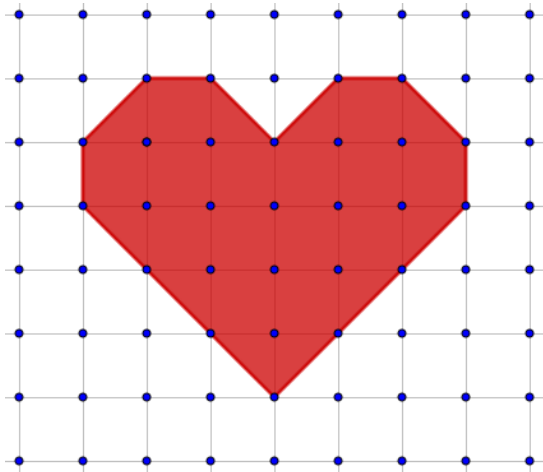
**Figura 93:** Ejercicio 1b - Teorema de Pick – Matemáticas y Contabilidad (2016).

c)



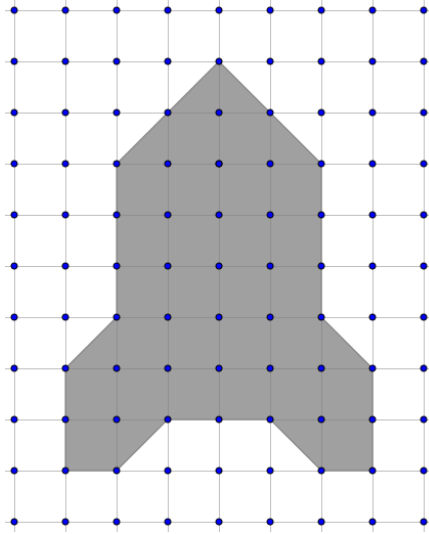
**Figura 94:** Ejercicio 1c - Teorema de Pick.

d)



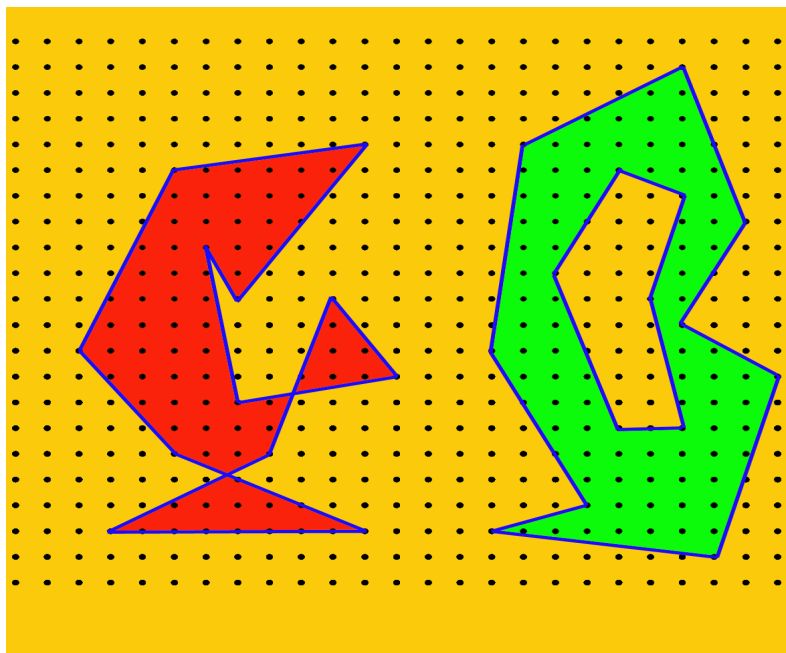
**Figura 95:** Ejercicio 1d - Teorema de Pick.

e)



**Figura 96:** Exercício 1e - Teorema de Pick.

2. Observe os polígonos da Figura 97.



(a)

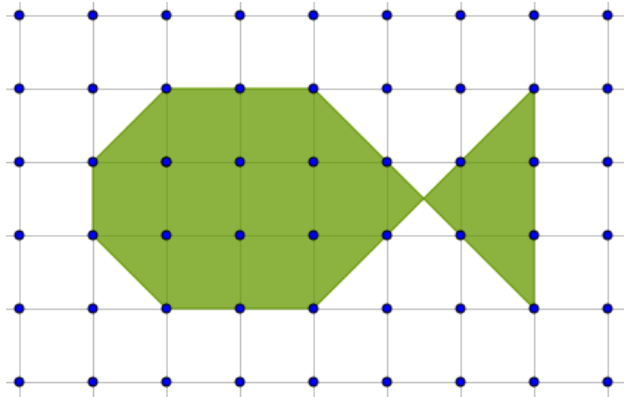
(b)

**Figura 97:** Exercício 2 - Teorema de Pick – CMUP (2016).

- a) Qual é a melhor forma de calcular a área do polígono (a)?
- b) E do polígono (b)?

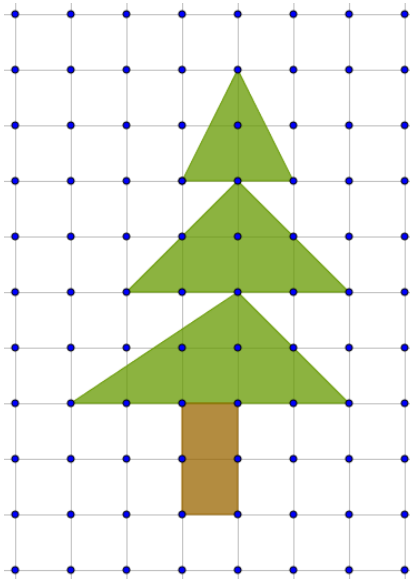
3. A partir das respostas dadas na questão 2, calcule a área das figuras a seguir.

a)



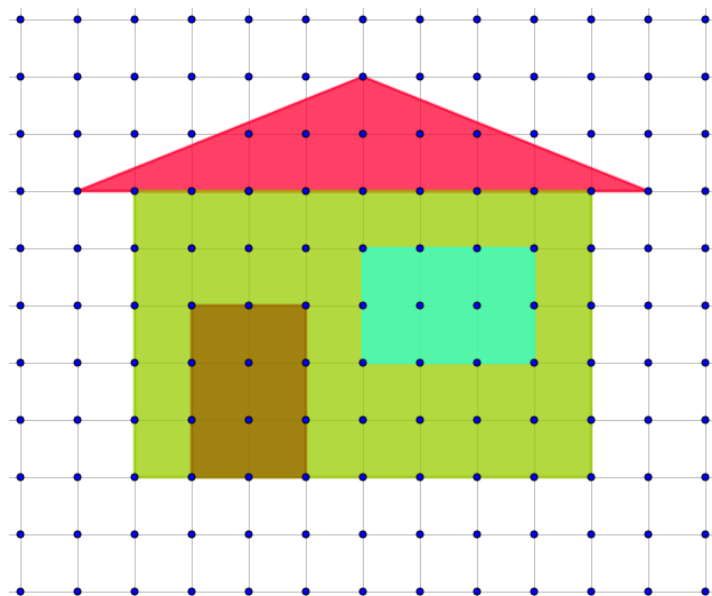
**Figura 98:** Exercício 3a - Teorema de Pick.

b)



**Figura 99:** Exercício 3b - Teorema de Pick.

4. Observe a Figura 100 e responda:



**Figura 100:** Exercício 4 - Teorema de Pick.

- a) Qual é a área do telhado?
- b) Qual é a área da porta?
- c) Qual é a área da janela?
- d) Qual é a área da parede verde?
- e) Qual é a área total da figura?

## 5 CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho as principais técnicas de demonstração em Matemática e as empregamos para demonstrar teoremas da Geometria Euclidiana, plana e espacial. Com isto, objetivamos destacar a importância da demonstração, seja ela formal ou apenas manipulativa, nas aulas de Geometria no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Esperamos também contribuir para o resgate efetivo da Geometria nos Currículos de Matemática da Educação Básica. A Geometria sempre consta no currículo, porém é abordada nos instantes finais do período letivo e geralmente de forma dissociada da Álgebra e da Aritmética.

Concluimos o trabalho organizando algumas atividades para sala de aula. Neste processo, constatamos a ausência de materiais adequados para uma das atividades. Ao elaborarmos a atividade para comprovação do volume da esfera, verificamos que os sólidos em acrílico disponíveis no mercado não possibilitam a execução da atividade proposta. Com esses conjuntos de sólidos, podemos comprovar, por exemplo, o volume da pirâmide e do cone – há prismas e pirâmides, e cilindros e cones, de bases e alturas congruentes, porém não há uma esfera, um cilindro equilátero e um cone reto compatíveis para ilustrarmos a estratégia de cálculo do volume da esfera. Uma solução para isso seria contarmos os fabricantes desses materiais e sugerir a eles modificações.

As principais dificuldades para o autor na execução do trabalho foram o emprego de um aplicativo computacional para Geometria e a escrita do texto. Quanto à primeira, é importante destacarmos o uso de figuras em um texto de Geometria. A ausência de figuras ilustrativas adequadas torna o texto de Geometria de leitura difícil, a exemplo dos Elementos de Euclides. Neste sentido, o autor melhorou suas habilidades no uso do aplicativo Geogebra. Contudo, ainda é preciso aperfeiçoar sua concepção geométrica tridimensional com o Geogebra 3D. Quanto à segunda, o autor tem consciência que precisa exercitar a escrita, principalmente de um texto acadêmico, e que a linguagem, escrita e falada, é a principal ferramenta de trabalho do professor.

Finalmente, é preciso salientar que o trabalho de conclusão de curso revelou as deficiências do autor quanto ao rigor matemático que uma demonstração formal exige. Todavia, como a aprendizagem é um processo contínuo, o autor pode exercitar a arte de demonstrar em suas diversas nuances durante sua vida profissional.



## 6 REFERÊNCIAS

- AABOE, A. **Episódios da história antiga da Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- BASTIAN, I. V. **O Teorema de Pitágoras**. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 2000.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Blücher, 2012.
- BRISOLA, O. **Oscar Brisola**. Disponível em:  
<http://oscarbrisolara.blogspot.com.br/2015/11/livros-primitivos-os-livros-primitivos.html> . Acesso em: out/2016.
- CARMO, M. P. Geometrias Não-Euclidianas. *Matemática Universitária*, v.6, p. 25-48, 1987.
- CMUP - Centro de Matemática Universidade do Porto. Disponível em:  
<http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/>. Acesso em: set/2016.
- DOLCE, O.; POMPEO J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. v. 9, 8. ed. São Paulo: Atual, 2005 - A.
- DOLCE, O.; POMPEO J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. v. 10, 8. ed. São Paulo: Atual, 2005 - B.
- EUCLIDES, **Os elementos**. São Paulo: Editora Unesp, 2009.
- FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- GARAVELLO, G. P. **Cálculo de volumes pelo Princípio de Cavalieri**. Dissertação de Mestrado, UFABC, 2013.
- GARBI, G. G. **A rainha das ciências**. 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- HEFEZ, A. **Indução matemática**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em sala de aula**. Coleção do Professor de Matemática, 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- HERMES, J. D. V. **O Teorema de Pick**. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas. Santa Maria: UFSM, 2015.
- IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar: trigonometria**. v. 3, 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.
- Intef – Instituto Nacional de Tecnologias Educativas de Formación del Profesorado. Disponível em:

<http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm>

Acesso em out/2016.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

LIMA, E. L. **Medida e forma em Geometria**. Coleção do Professor de Matemática, 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Coleção do Professor de Matemática, 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, F. N. **O Estudo sobre o cálculo de áreas e volumes utilizando o Método de Exaustão e o Princípio de Cavalieri**. Dissertação de Mestrado, UFPB, 2013.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean Proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

LULA, K. P. **Aplicações do Princípio de Cavalieri ao cálculo de volumes e áreas**. Dissertação de Mestrado, UFGO, 2013.

LUNKES, A. **Teorema de Pick**. XIX Erematsul, Santa Maria, 2013.

MANFIO, F. **Fundamentos da Geometria**. São Carlos: ICMC-USP, [s.d.].

Matemáticas y Contabilidad. Disponível em:

<http://matematicasycontabilidad-blog.blogspot.com.br/2012/08/area-y-perimetro-de-poligono-pato-en-el.html>. Acesso em: set/2016.

NOTARE, M. R. **Um sistema para aprendizagem de demonstrações dedutivas em Geometria Euclidiana**. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2001.

NUNES, A. L. T. Teorema dos carpetes. *Revista do Professor de Matemática*, v. 86, p. 6–10, 2014.

O Baricentro da mente. Disponível em:

[http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009\\_12\\_01\\_archive.html](http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009_12_01_archive.html).

Acesso em: out/2016.

OLIVEIRA, A. J. F. **Fundamentos da Geometria**. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

PARTERLINI, R. R. Os “Teoremas” de Cavalieri. *Revista do Professor de Matemática*, v. 72, p. 43-47, 2010.

PINHO, J. L. R. **Notas de aula de Geometria Euclidiana**. UFSC, [s.d.].

SANTOS, M. C. **Teorema de Pitágoras: suas diversas demonstrações**. Monografia de curso de Especialização, UFPB, 2011.

SILVA, A. P. **Arquimedes e o volume da esfera**. Monografia de Especialização em Matemática, UFMG, 2005



SILVA, F. S.; MICENA, F. P. Sugestão para aplicação do Teorema de Pick na educação básica. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 3, n. 1, 2014.

SOUZA, C. T.; PETRÓ, C. S.; GESSINGER, R. M. **Um estudo sobre evasão no ensino superior do Brasil nos últimos dez anos**. II Clabes, PUC-RS, 2012.

SOUZA, F. O. **O Teorema de Pick: uma nova abordagem sobre áreas de figuras planas para o Ensino Básico**. Dissertação de Mestrado, UFES, 2013.

TAMARI, M. E. **Teorema de Pick e aplicações**. Dissertação de Mestrado, UFABC, 2013.

VERRI, A. F. G.; GARCIA, S. R. L. **Uma apresentação didática para o Teorema de Pick**. São Paulo: USP, [s.d.].