

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EVERSON LUIZ RICORDI

**O MODELO LOGÍSTICO DE VERHULST SUJEITO A INCERTEZAS
NA CONDIÇÃO INICIAL**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2016

EVERSON LUIZ RICORDI

**O MODELO LOGÍSTICO DE VERHULST SUJEITO A INCERTEZAS
NA CONDIÇÃO INICIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito para aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Fabio Antonio Dorini, Dr.

CURITIBA

2016

TERMO DE APROVAÇÃO

“O Modelo Logístico de Verhulst Sujeito a Incertezas na Condição Inicial”

por

“**Everson Luiz Ricordi**”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 15h do dia 09 de dezembro de 2016 na sala LIMAT como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O(a) aluno(a) foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho aprovado.

<hr/> <p>Prof. Dr. Fábio Antônio Dorini (Presidente - UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Profa. Dra. Nara Bobko (Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Patrícia Sánez Pacheco (Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)</p>	<hr/> <p>Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke (Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</p>
<hr/> <p>Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha (Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</p>	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

RESUMO

RICORDI, Everson Luiz. O MODELO LOGÍSTICO DE VERHULST SUJEITO A INCERTEZAS NA CONDIÇÃO INICIAL. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

Este trabalho analisa a equação logística sujeita a incertezas na condição inicial. As funções de densidade de probabilidade da densidade populacional e do seu ponto de inflexão são calculadas utilizando a função de distribuição da população inicial, considerada/modelada neste trabalho como uma variável aleatória. Funções de densidade de probabilidade, momentos estatísticos e intervalos de confiança da densidade populacional e do seu ponto de inflexão são obtidos analiticamente para o caso em que a população inicial é uniformemente distribuída. Por fim, são realizados testes computacionais para ilustrar os principais resultados.

Palavras-chave: Equação logística, função de densidade de probabilidade, variável aleatória

ABSTRACT

RICORDI, Everson Luiz. THE VERHULST LOGISTIC MODEL SUBJECT TO UNCERTAINTIES IN THE INITIAL CONDITION. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016.

This work analyzes the logistic equation subject to uncertainties in the initial condition. The probability functions density of the population density and its inflection point are calculated using the distribution function of the initial population, considered/modelled in this work as a random variable. Probability density functions, statistical moments and confidence intervals of the population density and its inflection point are obtained analytically for the case where the initial population is uniformly distributed. Finally, computational tests are performed to illustrate the main results.

Keywords: logistic equation, probability density function, random variable

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
2	O MODELO LOGÍSTICO	7
3	CÁLCULO DA FDP DE $N(t)$ e t^*	10
3.1	CÁLCULO DA FDP DA DENSIDADE POPULACIONAL	10
3.2	CÁLCULO DA FDP DO PONTO DE INFLEXÃO	14
4	CASO N_0 UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	18
4.1	FDP, MOMENTOS ESTATÍSTICOS E INTERVALO DE CONFIANÇA DE $N(t)$	19
4.2	FDP, MÉDIA E INTERVALO DE CONFIANÇA DE t^*	21
4.3	FDP EXATA, MÉDIA E INTERVALO DE CONFIANÇA DE t_T	22
5	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	24
6	APLICAÇÃO: PROPAGAÇÃO DE UMA NOVA TECNOLOGIA NA ESPANHA	37
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
	REFERÊNCIAS	41
	Anexo A – PROGRAMAS UTILIZADOS	42

1 INTRODUÇÃO

O modelo logístico de Verhulst foi introduzido para descrever o crescimento populacional, de espécies ou indivíduos em um dado sistema, considerando um termo de auto limitação (associado a restrição de recursos) que corrige o crescimento ilimitado do modelo Malthusiano (KOT, 2001). A equação logística clássica (ou de Verhulst) é dada pelo problema de valor inicial (PVI) não linear seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= aN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad t > 0, \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

em que $N(t)$ denota a densidade populacional no instante t , $a > 0$ é a taxa de crescimento intrínscico, $N_0 > 0$ é a densidade populacional em $t = 0$ e $K > 0$ é a capacidade suporte do meio.

O modelo dado em (1.1) visa fornecer uma previsão da quantidade de indivíduos num determinado instante de tempo. Como pode-se observar, essa previsão depende de informações sobre a densidade populacional inicial, N_0 . Tais informações são, de modo geral, imprecisas, obtidas muitas vezes por processos empíricos, e devido a isto é importante considerá-las como incertos (CORTES et al., 2015; KEGAN; WEST, 2005; DORINI et al., 2016).

Visando levar em consideração esta característica incerta de N_0 , este é modelado, neste trabalho, como uma variável aleatória. Em vista disso, busca-se compreender os diversos efeitos gerados por esta hipótese sobre $N(t)$, $t > 0$. O objetivo principal é obter e analisar a distribuição de probabilidade da população $N(t)$, $t > 0$ fixo, e de seu ponto de inflexão, t^* , considerando-se N_0 uma variável aleatória real e absolutamente contínua, e supondo conhecida a sua função de densidade de probabilidade (fdp). Para tal, $N(t)$ e t^* são consideradas como funções da variável aleatória N_0 .

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 é apresentado, baseando-se em (CRAMER, 2002), um breve histórico do modelo logístico de Verhulst. No Capítulo 3, as fdp's de $N(t)$, $t > 0$ fixo, e t^* são fornecidas a partir da fdp da densidade populacional inicial, N_0 . No capítulo 4, são apresentados analiticamente os principais momentos estatísticos e inter-

valos de confiança de $N(t)$, $t > 0$ fixo, e t^* para o caso em que N_0 é uniformemente distribuída. No Capítulo 5, uma aplicação bastante elementar sobre a propagação de uma nova tecnologia na Espanha é apresentada. Por fim, no Capítulo 6 são realizados testes computacionais, utilizando o programa MATLAB (MathWorks, Inc.), comparando os resultados analíticos obtidos com os fornecidos utilizado-se simulações de Monte Carlo (FISHMAN, 1996).

2 O MODELO LOGÍSTICO

Malthus (1798) afirma em seu livro “*An Essay on the Principle of Population*” que a população cresce segundo uma progressão geométrica enquanto a produção de alimentos cresce segundo uma progressão aritmética. O problema proposto por Malthus sugere que considerando a população como uma função do tempo, a taxa de crescimento da população num determinado instante t é proporcional à quantidade de indivíduos neste mesmo instante, o que torna a equação diferencial seguinte razoável:

$$\frac{d}{dt}N(t) = aN(t), \quad (2.1)$$

em que $N(t)$ denota a quantidade de indivíduos no tempo t e $a > 0$ denota a constante de proporcionalidade. Pode-se verificar facilmente que a solução geral da equação (2.1) é dada por

$$N(t) = c e^{at}, \quad (2.2)$$

em que c é uma constante. Supondo a população inicial $N(0) = N_0 > 0$ conhecida, obtém-se

$$N(t) = N_0 e^{at}. \quad (2.3)$$

O modelo dado em (2.3), conhecido como modelo malthusiano ou exponencial, fornecerá, então, a população de uma determinada espécie em qualquer tempo. A Figura 2.1 ilustra a solução (2.3) para $N_0 = 10$ e $a = 0.2$.

Entretanto, o astrônomo e estatístico belga Alphonse Quetelet estava convencido que o crescimento indefinido do modelo malthusiano conduziria à valores impossíveis e experimentou vários ajustes no modelo passando o problema à Pierre Verhulst (CRAMER, 2002).

Em 1838, levando em consideração as possíveis limitações que a população está inserida, como, por exemplo, disponibilidade de espaço e alimento, ele propôs em seu modelo um

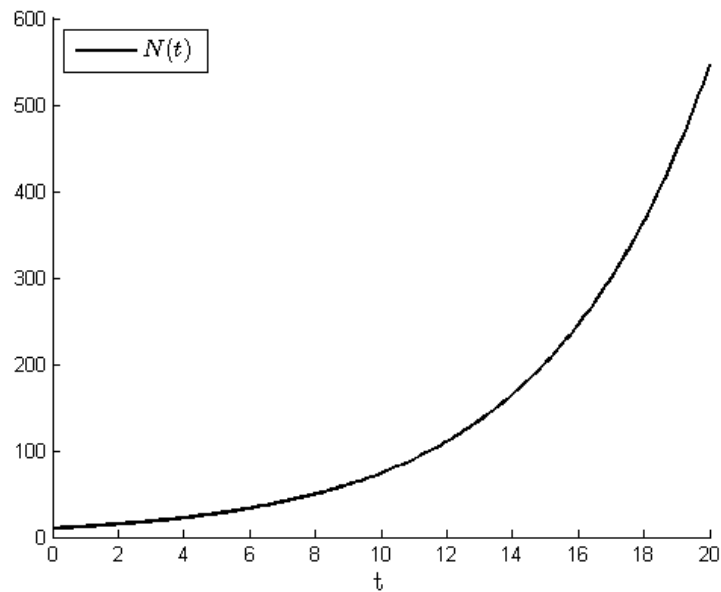


Figura 2.1: Ilustração da solução dada em (2.3); $N_0 = 10$, $a = 0.2$, $t \in [0, 20]$.

fator que corrige o crescimento indefinido de (2.3). Tal modelo ficou definido por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= aN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \\ N(0) &= N_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que $N(t)$ é a quantidade de indivíduos no tempo t , a representa a taxa de crescimento intrínseca (taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador) e K é a capacidade suporte do meio, ou seja, a quantidade máxima de indivíduos que o ambiente suporta devido as limitações do *habitat*.

A solução de (2.4) é dada por (KOT, 2001)

$$N(t) = \frac{KN_0}{Ke^{-at} + N_0(1 - e^{-at})}. \quad (2.5)$$

Verhulst referia-se à esta como crescimento logístico e por isso (2.5) passou a ser chamada de *função ou equação logística*. A Figura 2.2 ilustra a solução (2.5) para $N_0 = 10$, $a = 0.2$ e $K = 50$.

A função logística tem sido empregada para modelar vários tipos de problemas nas mais diversas áreas como, por exemplo, economia (RAMOS, 2012), biologia (CORTES et al., 2015) e medicina (ZHOU K. LIU, 2004).

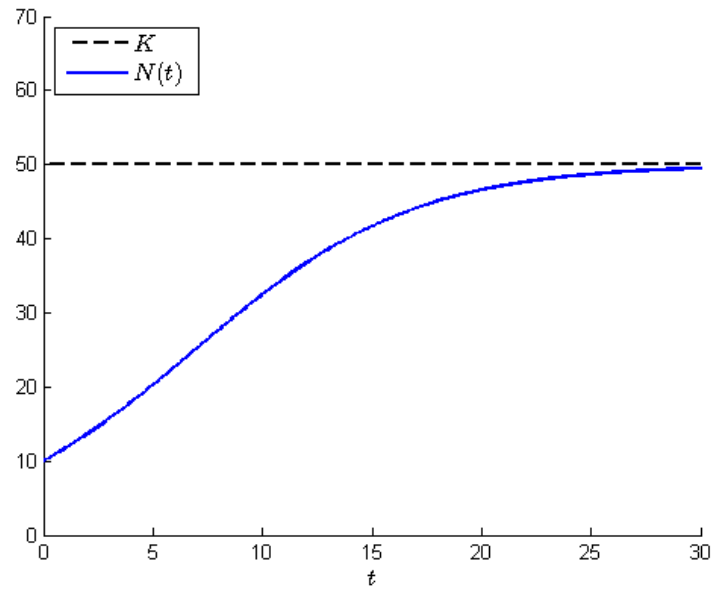


Figura 2.2: Ilustração da solução dada em (2.5); $N_0 = 10$, $a = 0.2$, $K = 50$ e $t \in [0, 30]$.

3 CÁLCULO DA FDP DE $N(t)$ e t^*

3.1 CÁLCULO DA FDP DA DENSIDADE POPULACIONAL

Nesta seção a fdp de $N(t)$, para $t > 0$ fixo, será calculada usando a fdp da densidade populacional inicial, f_{N_0} , supondo os parâmetros a e K positivos.

Para iniciar, considere a função $N(t; N_0)$ dada em (2.5), solução do PVI (1.1), como função da variável $N_0 \in [0, +\infty)$. As afirmações seguintes sobre $N(t; N_0)$, para $t > 0$ fixo,

$$N(t; 0) = 0, \quad (3.1)$$

$$\lim_{N_0 \rightarrow +\infty} N(t; N_0) = \frac{K}{1 - e^{-at}}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial N_0} N(t; N_0) = \frac{K^2 e^{-at}}{[Ke^{-at} + N_0(1 - e^{-at})]^2} > 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial N_0^2} N(t; N_0) = \frac{-2K^2 e^{-at}(1 - e^{-at})}{[Ke^{-at} + N_0(1 - e^{-at})]^3} < 0, \quad (3.4)$$

são ilustradas na Figura 3.1. A função $N(t; N_0)$ é, deste modo, contínua, estritamente crescente, côncava para baixo e limitada na variável N_0 .

Pode-se, assim, definir a bijeção

$$G : [0, +\infty) \rightarrow \left[0, \frac{K}{1 - e^{-at}}\right) \quad (3.5)$$

$$N_0 \mapsto G(N_0) = N(t; N_0),$$

cujas inversa também é contínua e crescente, dada por

$$G^{-1}(q) = \frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})}, \quad q \in \left[0, \frac{K}{1 - e^{-at}}\right). \quad (3.6)$$

Considere, agora, N_0 uma variável aleatória real absolutamente contínua no espaço de probabilidade $(\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P})$, em que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a σ -álgebra de Borel sobre a reta real e \mathcal{P} é uma medida de probabilidade (PAPOULIS, 1984). Considere, também, que N_0 é não-negativa

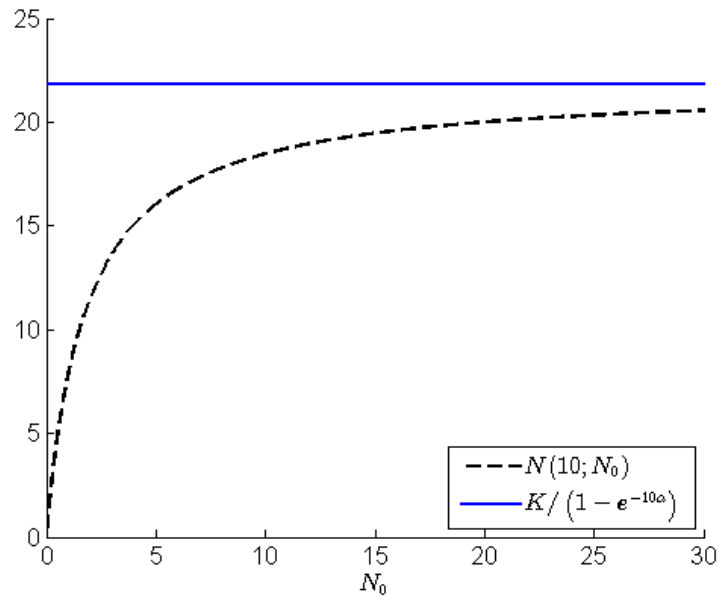


Figura 3.1: Ilustração de $N(10; N_0)$; $a = 0.25$, $K = 20$ e $t = 10$.

com probabilidade 1, isto é, $\mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; N_0(\omega) \geq 0\}) = \mathcal{P}(N_0 \geq 0) = 1$.

Segue de (3.5)–(3.6) que, para cada realização $N_0(\omega)$ da variável aleatória N_0 e para $q \in [0, K/(1 - e^{-at})]$,

$$N(t; N_0(\omega)) = G(N_0(\omega)) \leq q \text{ se, e somente se, } N_0(\omega) \leq G^{-1}(q).$$

Assim, a função de distribuição cumulativa de $N(t)$, $t > 0$ fixo é dada por

$$\begin{aligned} F_N(q; t) &= \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; N(t; N_0(\omega)) \leq q\}) = \\ &= \mathcal{P}\left(\left\{\omega \in \Omega; \frac{KN_0(\omega)}{Ke^{-at} + N_0(\omega)(1 - e^{-at})} \leq q\right\}\right) = \\ &= \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; G(N_0(\omega)) \leq q\}) = \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; N_0(\omega) \leq G^{-1}(q)\}) = \\ &= F_{N_0}(G^{-1}(q)), \end{aligned} \tag{3.7}$$

em que $q \in [0, K/(1 - e^{-at})]$ e F_{N_0} é a função de distribuição cumulativa de N_0 .

Portanto,

$$F_N(q; t) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq K/(1 - e^{-at}), \\ F_{N_0}\left(\frac{Kqe^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})}\right), & \text{se } 0 < q < K/(1 - e^{-at}), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.8}$$

A derivada de (3.8) com relação à q fornece a fdp de $N(t)$ para $t > 0$ fixo,

$$f_N(q;t) = f_{N_0} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right) \frac{K^2 e^{-at}}{[K - q(1 - e^{-at})]^2} \mathbf{1}_{(0,\beta)}(q), \quad (3.9)$$

em que $\beta = K/(1 - e^{-at})$ e a função $\mathbf{1}_{(c,d)}$ é definida como: $\mathbf{1}_{(c,d)}(x) = 1$, se $x \in (c,d)$ e $\mathbf{1}_{(c,d)}(x) = 0$, se $x \notin (c,d)$.

Por outro lado, sendo N_0 uma variável aleatória real absolutamente contínua e não negativa, pode-se escrever $D_{N_0} = \{N_0(\omega); \omega \in \Omega\} = (N_1, N_2)$ com $0 \leq N_1 < N_2$, $N_2 = +\infty$, possivelmente. O conjunto D_{N_0} , chamado suporte da variável aleatória N_0 , é o conjunto de todos os possíveis valores que podem ser assumidos pela variável aleatória N_0 com probabilidade não nula, e $\mathcal{P}(D_{N_0}) = \mathcal{P}(N_0(\omega) \in D_{N_0}) = 1$. Assim, a função de distribuição cumulativa de $N(t)$, t fixo, é dada por

$$F_N(q;t) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq N(t, \omega; N_2), \\ F_{N_0} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right), & \text{se } N(t, \omega; N_1) \leq q < N(t, \omega; N_2), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.10)$$

A derivada de F_N em (3.10) com relação à q conduz ao seguinte resultado:

Proposição 3.1. *Seja N_0 uma variável aleatória real absolutamente contínua e não negativa, e $D_{N_0} = (N_1, N_2)$, $0 \leq N_1 < N_2$. Então, a fdp de $N(t)$, $t > 0$ fixo, definida em (1.1) é dada por*

$$f_N(q;t) = f_{N_0} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right) \frac{K^2 e^{-at}}{[K - q(1 - e^{-at})]^2} \mathbf{1}_{(\beta_1, \beta_2)}(q), \quad (3.11)$$

em que $\beta_1 = N(t; N_1)$ e $\beta_2 = N(t; N_2)$.

Observação 3.2. *Já que*

(i) $N(t; N_1) \neq N(t; N_2)$ (para todo $t \geq 0$) sempre que $N_1 \neq N_2$;

(ii) as funções $N(t; N_1)$ e $N(t; N_2)$ são tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t; N_1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t; N_2) = K,$$

isto é, o suporte da função $\mathbf{1}_{(\beta_1, \beta_2)}(q)$ e, portanto, $f_N(q;t)$, tende a zero; e

(iii) a função $f_N(q;t)$ em (3.11) é tal que

$$\int_{N(t; N_1)}^{N(t; N_2)} f_N(q;t) dq = 1 \quad (\text{para todo } t > 0);$$

segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_N(q; t) = \delta(q - K), \quad (3.12)$$

em que $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac.

Com base no resultado da Proposição 3.1, os exemplos seguintes ilustram a fdp de $N(t)$, $t > 0$ fixo, para algumas distribuições de N_0 com suporte positivo.

Exemplo 3.3. *Distribuição Gamma:* $N_0 \sim \Gamma(\rho, \theta)$

$$\begin{aligned} f_{N_0}(N_0) &= \frac{N_0^{\rho-1} e^{-N_0/\theta}}{\theta^\rho \Gamma(\rho)}, \\ f_N(q; t) &= \frac{1}{\theta^\rho \Gamma(\rho)} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q[1 - e^{-at}]} \right)^{\rho-1} \exp\left(\frac{-Kq e^{-at}}{\theta(K - q[1 - e^{-at}])} \right) \frac{K^2 e^{-at}}{(K - q[1 - e^{-at}])^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Exemplo 3.4. *Distribuição Exponencial:* $N_0 \sim \exp(\lambda)$

$$\begin{aligned} f_{N_0}(N_0) &= \lambda e^{-\lambda N_0}, \\ f_N(q; t) &= \lambda \exp\left(\frac{-\lambda Kq e^{-at}}{K - q[1 - e^{-at}]} \right) \frac{K^2 e^{-at}}{(K - q[1 - e^{-at}])^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Exemplo 3.5. *Distribuição Weibull:* $N_0 \sim \text{Wei}(\rho, \lambda)$

$$\begin{aligned} f_{N_0}(N_0) &= \frac{\rho}{\lambda} \left(\frac{N_0}{\lambda} \right)^{\rho-1} e^{-(N_0/\lambda)^\rho}, \\ f_N(q; t) &= \frac{\rho}{\lambda} \left(\frac{Kq e^{-at}}{\lambda(K - q(1 - e^{-at}))} \right)^{\rho-1} \exp\left(\left[\frac{-Kq e^{-at}}{\lambda(K - q(1 - e^{-at}))} \right]^\rho \right) \frac{K^2 e^{-at}}{(K - q[1 - e^{-at}])^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Exemplo 3.6. *Distribuição Lognormal:* $N_0 \sim \text{Logn}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} f_{N_0}(N_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma} N_0} \exp\left(\frac{-(\ln(N_0) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right), \\ f_N(q; t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right)^{-1} \times \\ &\quad \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2} \left[\ln\left(\frac{Kq e^{-at}}{K - q(1 - e^{-at})} \right) - \mu \right]^2 \right) \frac{K^2 e^{-at}}{(K - q[1 - e^{-at}])^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2 CÁLCULO DA FDP DO PONTO DE INFLEXÃO

Nesta seção, a fdp da população inicial N_0 será utilizada para calcular a fdp do ponto de inflexão de $N(t)$, $t^* > 0$, dado por

$$t^* = t^*(N_0) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right), \quad N_0 < K/2. \quad (3.17)$$

O ponto de inflexão é uma importante propriedade que determina o tempo, $t^* > 0$, e a densidade populacional, $N(t^*)$, para o qual a taxa de crescimento é máxima. Ele é obtido impondo-se a condição $d^2N(t)/dt^2 = 0$ no PVI (1.1). Manter uma população em seu ponto de inflexão é muitas vezes crucial em um experimento (KOT, 2001).

As afirmações seguintes sobre $t^*(N_0)$ em (3.17), ilustradas na Figura 3.2 para um caso particular,

$$\lim_{N_0 \rightarrow 0^+} t^*(N_0) = +\infty, \quad (3.18)$$

$$\lim_{N_0 \rightarrow (K/2)^-} t^*(N_0) = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial N_0} t^*(N_0) = -\frac{K}{aN_0[K - N_0]} < 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial N_0^2} t^*(N_0) = \frac{K[K - 2N_0]}{a[N_0(K - N_0)]^2} > 0. \quad (3.21)$$

permitem concluir que $t^*(N_0)$ é uma função contínua, estritamente decrescente, côncava para cima e ilimitada superiormente na variável N_0 .

Pode-se, então, definir a bijeção

$$G^* : (0, K/2) \rightarrow (0, +\infty), \quad (3.22)$$

$$N_0 \mapsto G^*(N_0) = t^*(N_0),$$

cuja inversa também é contínua e decrescente, dada por

$$(G^*)^{-1}(q) = \frac{K}{1 + e^{aq}}, \quad q \in (0, +\infty). \quad (3.23)$$

Considere, agora, o caso em que N_0 é uma variável aleatória absolutamente contínua no intervalo $(0, K/2)$, ou seja, $\mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; 0 < N_0(\omega) < K/2\}) = \mathcal{P}(0 < N_0 < K/2) = 1$. Segue de (3.22)–(3.23) que, para cada realização de $N_0(\omega)$ de N_0 e $q > 0$,

$$t^*(N_0(\omega)) = G^*(N_0(\omega)) \leq q \text{ se, e somente se, } (G^*)^{-1}(q) \geq N_0(\omega).$$

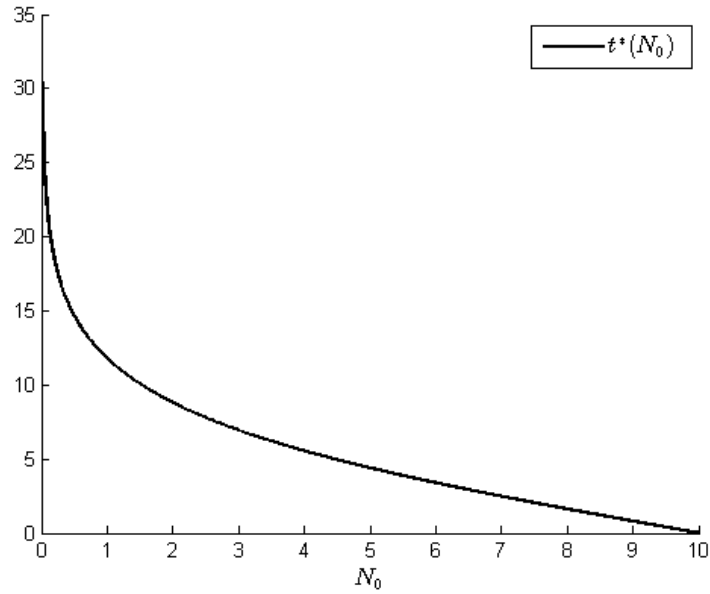


Figura 3.2: Ilustração de t^* ; $a = 0.25$ e $K = 20$.

Portanto, a função de distribuição cumulativa de t^* em (3.17) é dada por

$$\begin{aligned}
 F_{t^*}(q) &= \mathcal{P}(0 < t^* \leq q) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{a} \ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) \leq q\right) = \\
 &= \mathcal{P}(G^*(N_0) \leq q) = \mathcal{P}(N_0 \geq (G^*)^{-1}(q)) = \\
 &= 1 - \mathcal{P}(N_0 \leq (G^*)^{-1}(q)) = 1 - F_{N_0}\left(\frac{K}{1 + e^{aq}}\right), \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

$q \in (0, +\infty)$.

Tomando a derivada de F_{t^*} em (3.24) com relação à q obtém-se a fdp de t^* ,

$$f_{t^*}(q) = \frac{dF_{t^*}}{dq}(q) = \frac{aKe^{aq}}{(1 + e^{aq})^2} f_{N_0}\left(\frac{K}{1 + e^{aq}}\right). \tag{3.25}$$

Entretanto, se $D_{N_0} = (N_1, N_2)$, com $0 \leq N_1 < N_2 \leq K/2$, então a função de distribuição cumulativa de t^* é dada por

$$F_{t^*}(q) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq t^*(N_1), \\ 1 - F_{N_0}\left(\frac{K}{1 + e^{aq}}\right), & \text{se } t^*(N_2) \leq q < t^*(N_1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.26}$$

Logo, a derivada de F_{t^*} em (3.26) com relação à q conduz ao seguinte resultado:

Proposição 3.7. *Seja N_0 uma variável aleatória absolutamente contínua e não negativa, e*

$D_{N_0} = (N_1, N_2)$, $0 \leq N_1 < N_2 \leq K/2$. A fdp de t^* em (3.17), f_{t^*} , é dada por

$$f_{t^*}(q) = \frac{aKe^{aq}}{(1+e^{aq})^2} f_{N_0} \left(\frac{K}{1+e^{aq}} \right) \mathbf{1}_{(\alpha_1, \alpha_2)}(q), \quad (3.27)$$

em que $\alpha_1 = t^*(N_2)$ e $\alpha_2 = t^*(N_1)$.

O resultado da Proposição 3.7 pode ser estendido da seguinte maneira: suponha que deseja-se saber a fdp do tempo $t_T > 0$ para o qual $N(t_T) = T$, $0 < T < K$, T fixo, considerando N_0 uma variável aleatória absolutamente contínua no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < K$. Então, analogamente ao que foi feito nas Seções 3.1 e 3.2, tem-se $t_T = t_T(N_0)$ dado por

$$t_T(N_0) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{T(K - N_0)}{N_0(K - T)} \right), \quad (3.28)$$

obtido igualando-se a solução dada em (2.5) à T , cujas propriedades, ilustradas na Figura 3.3 para um caso particular, são:

$$\lim_{N_0 \rightarrow K^-} t_T(N_0) = -\infty, \quad (3.29)$$

$$\lim_{N_0 \rightarrow 0^+} t_T(N_0) = +\infty, \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dN_0} t_T(N_0) = -\frac{K}{aN_0(K - N_0)} < 0. \quad (3.31)$$

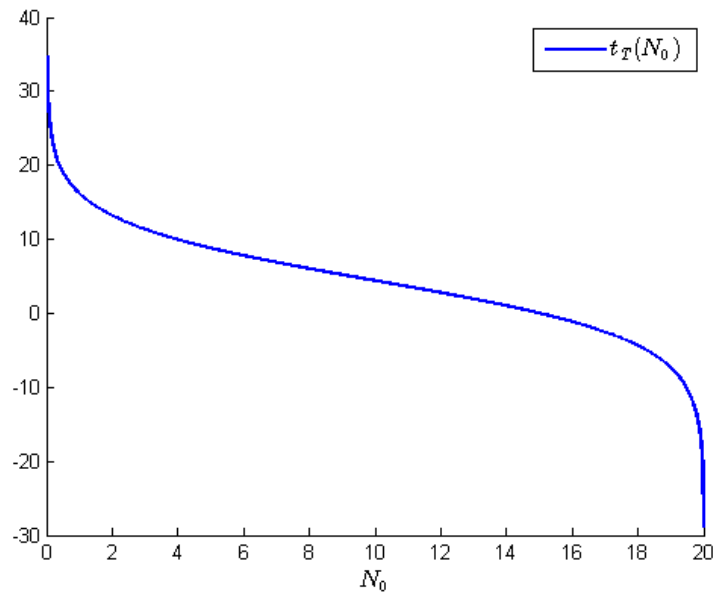


Figura 3.3: Ilustração de t_T ; $a = 0.25$, $K = 20$ e $T = 15$.

Observa-se, assim, que a função $t_T(N_0)$ é decrescente e contínua na variável $N_0 \in$

$(0, K)$. Logo, a função de distribuição cumulativa de t_T é dada por

$$F_{t_T}(q) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \geq t_T(N_1), \\ 1 - F_{N_0} \left(\frac{TK}{T + (K - T)e^{aq}} \right), & \text{se } t_T(N_2) \leq q < t_T(N_1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Portanto, a derivada de F_{t_T} em (3.32) com relação à q assegura o seguinte resultado:

Proposição 3.8. *Seja N_0 uma variável aleatória absolutamente contínua não negativa e $D_{N_0} = [N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < K$. Então a fdp de t_T em (3.28), f_{t_T} , é dada por*

$$f_{t_T}(q) = \frac{TKa(K - T)e^{aq}}{[T + (K - T)e^{aq}]^2} f_{N_0} \left(\frac{TK}{T + (K - T)e^{aq}} \right) \mathbf{1}_{(\gamma_1, \gamma_2)}(q), \quad (3.33)$$

em que $\gamma_1 = t_T(N_2)$ e $\gamma_2 = t_T(N_1)$.

Observação 3.9. *No caso particular em que $0 < N_1 < N_2 < K/2$ e $T = K/2$, algumas contas elementares em (3.33) permitem concluir que $f_{t_T} = f_{t^*}$, f_{t^*} dado em (3.27).*

4 CASO N_0 UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA

Neste capítulo são apresentadas as fdp's exatas de $N(t)$, t^* e t_T , Proposições 3.1, 3.7 e 3.8, respectivamente, seus principais momentos estatísticos e intervalos de confiança, para o caso em que N_0 é uma variável aleatória real absolutamente contínua e uniformemente distribuída em $[N_1, N_2]$, $N_0 \sim U[N_1, N_2]$.

Para iniciar, vale ressaltar algumas observações acerca dos momentos estatísticos de uma variável aleatória (PAPOULIS, 1984; MAGALHAES, 2006).

A esperança matemática, ou média, de uma variável aleatória contínua X , com função densidade de probabilidade f_X , é definida como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} q f_X(q) dq, \quad (4.1)$$

desde que a integral em questão exista. O momento de ordem n , $n \in \mathbb{N}^*$, é definido como

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} q^n f_X(q) dq, \quad (4.2)$$

desde que esta quantidade exista.

Se a esperança matemática de X existe e é finita, isto é, $E[X] = \mu_X \in \mathbb{R}$, define-se o momento central de ordem m como $E[(X - \mu_X)^m]$. A variância de X , uma medida de dispersão de X em torno de sua média, é definida como sendo o momento central de ordem 2, ou seja,

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2] - E[X]^2. \quad (4.3)$$

Se Y é uma função da variável aleatória X , $Y = h(X)$, então a média de Y é dada por

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(q) f_X(q) dq. \quad (4.4)$$

A média resume os possíveis resultados de uma variável aleatória a um simples valor. Diferentemente, um intervalo de confiança fornece um intervalo de possível ocorrência dos resultados (TRIOLA, 2010).

A um intervalo de confiança é associado um nível de confiança, geralmente denotado pela letra grega α , que representa a probabilidade $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, de que o intervalo contenha os resultados da variável aleatória, isto é, $1 - \alpha = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in [x_1, x_2]\}$ (CORTES et al., 2015). Deste modo, conhecida a fdp de X , f_X , pode-se obter os extremos x_1 e x_2 , do intervalo com nível de confiança $1 - \alpha$, da seguinte forma

$$\int_{-\infty}^{x_1} f_X(q) dq = \frac{\alpha}{2} = \int_{x_2}^{+\infty} f_X(q) dq, \quad (4.5)$$

ou, equivalentemente, pelas equações

$$F_X(x_1) = \alpha/2 \quad \text{e} \quad F_X(x_2) = 1 - \alpha/2, \quad (4.6)$$

em que F_X denota a função de distribuição cumulativa de X .

4.1 FDP, MOMENTOS ESTATÍSTICOS E INTERVALO DE CONFIANÇA DE $N(t)$

Seja $N_0 \sim U[N_1, N_2]$ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < +\infty$. Então, segue da Proposição 3.1 que a fdp de $N(t)$, $t > 0$ fixo, é dada por

$$f_N(q; t) = \frac{1}{N_2 - N_1} \frac{K^2 e^{-at}}{[K - q(1 - e^{-at})]^2} \mathbf{1}_{(\beta_1, \beta_2)}(q), \quad (4.7)$$

em que $\beta_1 = N(t; N_1)$ e $\beta_2 = N(t; N_2)$.

O momento de ordem m de $N(t)$, $t > 0$ fixo, $m \in \mathbb{N}^*$, é dada por

$$E[(N(t))^m] = \int_{N_1}^{N_2} [N(t; q)]^m f_{N_0}(q) dq. \quad (4.8)$$

Assim,

$$\begin{aligned} E[(N(t))^m] &= \int_{N_1}^{N_2} \left(\frac{Kq}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right)^m \frac{1}{N_2 - N_1} dq = \\ &= \frac{K^m}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^m} \int_{N_1}^{N_2} \left(1 - \frac{Ke^{-at}}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right)^m dq. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A expressão em (4.9) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E[(N(t))^m] &= \frac{K^m}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^m} \int_{N_1}^{N_2} \left\{ 1 - \frac{1}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \left(\frac{-Ke^{-at}}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right)^i \right\} dq, \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que $\binom{m}{i}$ é o número, ou coeficiente, binomial.

Tem-se, então,

$$E[(N(t))^m] = \frac{K^m}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^m} \int_{N_1}^{N_2} \left\{ 1 - \frac{1}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right\} dq + \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \int_{N_1}^{N_2} \left(\frac{-Ke^{-at}}{Ke^{-at} + q(1 - e^{-at})} \right)^i dq. \quad (4.11)$$

Uma mudança de variáveis elementar nas integrais em (4.11) nos permite obter o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Seja $N_0 \sim U[N_1, N_2]$ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < +\infty$. Então, o m -ésimo momento de $N(t)$, $t > 0$ fixo, é dado por*

$$E[(N(t))^m] = \frac{K^m}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^{m+1}} \left\{ (N_2 - N_1)(1 - e^{-at}) - Ke^{-at} \ln \left(\frac{Ke^{-at} + N_2(1 - e^{-at})}{Ke^{-at} + N_1(1 - e^{-at})} \right) + \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \frac{(-Ke^{-at})^i}{i-1} [(Ke^{-at} + N_1(1 - e^{-at}))^{1-i} - (Ke^{-at} + N_2(1 - e^{-at}))^{1-i}] \right\}. \quad (4.12)$$

Observação 4.2. *A média de $N(t)$, $t > 0$ fixo, obtida considerando-se $m = 1$ na expressão (4.12), é dada por*

$$E[N(t)] = \frac{K}{1 - e^{-at}} - \frac{K^2 e^{-at}}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^2} \ln \left(\frac{Ke^{-at} + N_2(1 - e^{-at})}{Ke^{-at} + N_1(1 - e^{-at})} \right). \quad (4.13)$$

Observação 4.3. *Tomando $m = 2$ em (4.12) e considerando o resultado obtido em (4.13), segue que a variância de $N(t)$, $t > 0$ fixo, é dada por*

$$\text{Var}[N(t)] = \frac{(K^2 e^{-at})^2}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})^3} \left[\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{(N_2 - N_1)(1 - e^{-at})} \left[\ln \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \right]^2 \right], \quad (4.14)$$

em que $\eta_1 = Ke^{-at} + N_1(1 - e^{-at})$ e $\eta_2 = Ke^{-at} + N_2(1 - e^{-at})$.

Agora, seja $\beta \in (0, 1)$ e considere a seguinte igualdade

$$\int_{-\infty}^x f_N(q; t) dq = \beta, \quad (4.15)$$

ou, equivalentemente,

$$F_N(x; t) = F_{N_0} \left(\frac{Kx e^{-at}}{K - x(1 - e^{-at})} \right) = \beta, \quad (4.16)$$

em que F_N e F_{N_0} são as funções de distribuição cumulativa de $N(t)$, $t > 0$ fixo, e N_0 , respectivamente.

Obtém-se, então, a seguinte equação na variável x

$$\frac{1}{N_2 - N_1} \left\{ \frac{Kxe^{-at}}{K - x(1 - e^{-at})} - N_1 \right\} = \beta, \quad (4.17)$$

cuja solução é dada por

$$x = \frac{K[\beta(N_2 - N_1) + N_1]}{Ke^{-at} + [\beta(N_2 - N_1) + N_1](1 - e^{-at})}. \quad (4.18)$$

Assim, tomando $\beta_1 = \alpha/2$ e $\beta_2 = 1 - \alpha/2$, tem-se que o intervalo de confiança $[q_1, q_2]$ de $N(t)$, para um t fixo, a um nível de $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança, é dado por

$$\left[\frac{K \left[\frac{\alpha}{2}(N_2 - N_1) + N_1 \right]}{Ke^{-at} + \left[\frac{\alpha}{2}(N_2 - N_1) + N_1 \right](1 - e^{-at})}, \frac{K \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(N_2 - N_1) + N_1 \right]}{Ke^{-at} + \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(N_2 - N_1) + N_1 \right](1 - e^{-at})} \right]. \quad (4.19)$$

4.2 FDP, MÉDIA E INTERVALO DE CONFIANÇA DE t^*

Seja $N_0 \sim U[N_1, N_2]$ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < K/2$. Segue da Proposição 3.7 que a fdp de t^* em (3.17) é dada por

$$f_{t^*}(q) = \frac{1}{N_2 - N_1} \frac{aKe^{aq}}{(1 + e^{aq})^2} \mathbf{1}_{(\alpha_1, \alpha_2)}(q), \quad (4.20)$$

em que $\alpha_1 = t^*(N_2)$ e $\alpha_2 = t^*(N_1)$.

Portanto, a média de t^* é dada por

$$E[t^*] = \int_{N_1}^{N_2} t^*(q) f_{N_0}(q) dq. \quad (4.21)$$

Logo,

$$E[t^*] = \int_{N_1}^{N_2} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{q} - 1 \right) \frac{1}{N_2 - N_1} dq = \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \int_{N_1}^{N_2} \ln \left(\frac{K}{q} - 1 \right) dq. \quad (4.22)$$

Utilizando o método de integração por partes em (4.22) com $u = \ln(K/q - 1)$ e $dv = dq$, segue que média de t^* em (3.17) é dada por

$$E[t^*] = \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \left[N_2 \ln \left(\frac{K}{N_2} - 1 \right) - N_1 \ln \left(\frac{K}{N_1} - 1 \right) - K \ln \left(\frac{K - N_2}{K - N_1} \right) \right]. \quad (4.23)$$

Agora, seja $\beta \in (0, 1)$ e considere a seguinte igualdade

$$\int_{-\infty}^x f_{t^*}(q) dq = \beta. \quad (4.24)$$

Tem-se, então,

$$F_{t^*}(x) = 1 - F_{N_0} \left(\frac{K}{1 + e^{ax}} \right) = \beta, \quad (4.25)$$

e, conseqüentemente,

$$1 - \frac{\frac{K}{1 + e^{ax}} - N_1}{N_2 - N_1} = \beta, \quad (4.26)$$

cuja solução é dada por

$$x = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{(1 - \beta)(N_2 - N_1) + N_1} - 1 \right). \quad (4.27)$$

Assim, tem-se que o intervalo $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança $[t_1, t_2]$ de t^* em (3.17) é dado por

$$\left[\frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(N_2 - N_1) + N_1} - 1 \right), \frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{\frac{\alpha}{2}(N_2 - N_1) + N_1} - 1 \right) \right]. \quad (4.28)$$

4.3 FDP EXATA, MÉDIA E INTERVALO DE CONFIANÇA DE t_T

Novamente, seja $N_0 \sim U[N_1, N_2]$ uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[N_1, N_2]$, $0 < N_1 < N_2 < K$. Segue da Proposição 3.8 que a fdp de t_T em (3.28) é dada por

$$f_{t_T}(q) = \frac{1}{N_2 - N_1} \frac{TKa(K - T)e^{aq}}{[T + (K - T)e^{aq}]^2} \mathbf{1}_{(\gamma_1, \gamma_2)}(q), \quad (4.29)$$

em que $\gamma_1 = t_T(N_2)$ e $\gamma_2 = t_T(N_1)$.

A média de t_T é dada, então, por

$$E[t_T] = \int_{N_1}^{N_2} t_T(q) f_{N_0}(q) dq. \quad (4.30)$$

Assim,

$$E[t_T] = \int_{N_1}^{N_2} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{T(K - q)}{q(K - T)} \right) \frac{1}{N_2 - N_1} dq = \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \int_{N_1}^{N_2} \ln \left(\frac{T(K - q)}{q(K - T)} \right) dq. \quad (4.31)$$

Realizando uma integração por partes em (4.31), fazendo $u = \ln(T(K - q)/q(K - T))$ e $dv = dq$, obtém-se

$$E[t_T] = \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \left[q \ln \left(\frac{T(K - q)}{q(K - T)} \right) \Big|_{N_1}^{N_2} + K \int_{N_1}^{N_2} \frac{1}{K - q} dq \right]. \quad (4.32)$$

Calculando (4.32) nos limites de integração, tem-se que a média exata de t_T em (3.28) é dada por

$$E[t_T] = \frac{1}{a(N_2 - N_1)} \left[N_2 \ln \left(\frac{T(K - N_2)}{N_2(K - T)} \right) - N_1 \ln \left(\frac{T(K - N_1)}{N_1(K - T)} \right) + K \ln \left(\frac{K - N_1}{K - N_2} \right) \right]. \quad (4.33)$$

Tomando $\beta \in (0, 1)$ e fazendo

$$\int_{-\infty}^x f_{t_T}(q) dq = \beta, \quad (4.34)$$

tem-se

$$F_{t_T}(x) = 1 - F_{N_0} \left(\frac{TK}{T + (K - T)e^{ax}} \right) = \beta. \quad (4.35)$$

Logo, obtém-se a equação

$$1 - \frac{\frac{TK}{T + (K - T)e^{ax}} - N_1}{N_2 - N_1} = \beta, \quad (4.36)$$

cujas solução é dada por

$$x = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{K - T} \frac{TK}{[(1 - \beta)(N_2 - N_1) + N_1]} - T \right). \quad (4.37)$$

Deste modo, o intervalo $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança, $[t_{T1}, t_{T2}]$, de t_T em (3.28) é dado por

$$\left[\frac{1}{a} \ln \left(\frac{T}{K - T} \left(\frac{K}{\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(N_2 - N_1) + N_1 \right]} - 1 \right) \right), \right. \\ \left. \frac{1}{a} \ln \left(\frac{K}{K - T} \left(\frac{K}{\left[\frac{\alpha}{2}(N_2 - N_1) + N_1 \right]} - 1 \right) \right) \right]. \quad (4.38)$$

5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados testes computacionais a fim de validar e/ou ilustrar os principais resultados teóricos deste trabalho e como, ao se considerar incertezas na condição inicial, estas se propagam em $N(t)$, t^* e t_T .

Para tanto, foram conduzidos experimentos utilizando o software MATLAB (MathWorks, Inc.). Em alguns casos, os resultados teóricos principais foram confrontados com aproximações numéricas obtidas aplicando-se o método de Monte Carlo, que consiste, basicamente, na aproximação numérica de resultados de problemas estocásticos usando a geração de variáveis aleatórias (FISHMAN, 1996; CASTELO, 2016).

Inicialmente, a título de ilustração, o resultado analítico da fdp de $N(t)$ obtido na Proposição 3.1 foi comparado com aproximações utilizando-se o método Monte Carlo com 1 000 000 de realizações. As Figuras 5.1 e 5.3 ilustram as fdp's de $N(t)$ para diferentes valores de t com $N_0 \sim \exp(1/10)$, exponencialmente distribuída, conforme Exemplo 3.3, e N_0 com uma distribuição normal truncada com suporte $[0, K]$, respectivamente. Em ambos os casos considerou-se $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$. No caso N_0 normal truncada, tomou-se $\delta_{N_0} = 0.2$ (*coeficiente de variação de Pearson* de N_0 , ou seja, $\delta_{N_0} = E[N_0] / \sqrt{\text{Var}[N_0]}$, que é uma medida de dispersão que descreve a quantidade de variabilidade relativa à média). É possível observar que a curva da fdp de $N(t)$ sofre uma alteração maior no caso exponencial em instantes de tempo diferentes do que no caso normal truncada. Entretanto, em ambos os casos, a densidade de $N(t)$ tende a ficar concentrada em torno da média conforme o tempo evolui, conforme relatado na Observação 3.2.

Na Figura 5.2(a) está ilustrada a média de $N(t)$ para o caso exponencial do parágrafo anterior. Neste caso foi utilizado o resultado da Proposição 3.1 para a obtenção de $E[N(t)]$ via integração numérica (regra de quadratura dos trapézios). Em comparação estão a média obtida usando simulações de Monte Carlo, com 50 000 de realizações de N_0 , e a solução determinística do PVI (1.1) tomando como condição inicial a média de N_0 , $E[N_0]$. Tal solução determinística, $N(t; E[N_0])$, é referida neste trabalho como *solução simplificada*. Faz-se, então,

uma observação relevante: a acentuada discrepância entre o resultado da solução simplificada e o modelado por uma variável aleatória (exponencialmente distribuída, neste caso). A Figura 5.2(b) ilustra a comparação da variância de $N(t)$, $\text{Var}[N(t)]$, obtida via integração numérica (regra dos trapézios), com a variância obtida usando o método de Monte Carlo. Percebe-se, também, que os resultados teóricos concordam com as simulações de Monte Carlo.

As Figuras 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 também ilustram a comparação da média da solução do PVI (1.1), $E[N(t;N_0)]$, com a *solução simplificada* para $N_0 \sim U[N_1, N_2]$, uniformemente distribuída, e para as distribuições apresentadas nos Exemplos 3.3, 3.5 e 3.6, Gamma, Weibull e Lognormal, respectivamente, todas com $E[N_0] = 10$ e δ_{N_0} assumindo valores (a) 0.2 e (b) 0.4. Convém observar que os parâmetros de tais distribuições foram calibrados de modo que atendam estas condições (ver contas nos Códigos MATLAB 9, 10, 11 e 12, no Anexo A.). Percebe-se, assim, que para uma variação $\delta_{N_0} = 0.2$ a diferença entre $E[N(t;N_0)]$ e $N(t;E[N_0])$ é pouco relevante, enquanto que para $\delta_{N_0} = 0.4$, dados mais espalhados em torno da média, tal diferença torna-se uma pouco mais significativa. Nas mesmas figuras são ilustradas as respectivas variâncias e fdp's, para alguns valores de t , de $N(t)$.

Os resultados teóricos obtidos no Capítulo 4, fdp, média e intervalo de confiança de $N(t)$, t^* e t_T , para o caso em que $N_0 \sim U[N_1, N_2]$, uniformemente distribuída, estão ilustrados nas Figuras 5.8, 5.9 e 5.10, respectivamente. Neste caso, considerou-se $a = 0.2$, $K = 100$, $T = K/4$, $E[N_0] = 10$ e δ_{N_0} assumindo os valores (a) 0.2 e (b) 0.4. Para isso, os extremos do intervalo, N_1 e N_2 , também foram calibrados (ver contas nos Códigos MATLAB 13, 14 e 15 no Anexo A). Devemos observar que, mesmo com o aumento da dispersão de N_0 , os resultados analíticos para os intervalos de confiança de $N(t)$, t^* e t_T demonstram-se satisfatórios. Observa-se, ainda, que a variância de $N(t)$ e as fdp's de t^* e t_T estão de acordo com as simulações de Monte Carlo. A média de t^* , $E[t^*]$, obtida assumindo $\delta_{N_0} = 0.2$, calculada utilizando a expressão (4.23), é aproximadamente 11.089, e para $\delta_{N_0} = 0.4$ é 11.457. O ponto de inflexão na versão simplificada é 10.986, tomando como condição inicial a média de N_0 . A média de t_T , $E[t_T]$, com $\delta_{N_0} = 0.2$, é 5.595 (aproximadamente), enquanto que para $\delta_{N_0} = 0.4$, é 5.964, cujos valores foram obtidos utilizando-se a expressão (4.33). O tempo t_T para o qual $N(t_T) = K/4$, na versão simplificada é 5.493.

Na Figura 5.11 estão comparadas as fdp's de $N(t)$ para N_0 com distribuições uniforme, Gamma, Weibull e Lognormal, com suporte no intervalo $(0, +\infty)$, $a = 0.2$, $K = 100$, $t = 10$, $E[N_0] = 10$ e com o coeficiente de variação δ_{N_0} assumindo os valores (a) 0.1, (b) 0.2, (c) 0.3 e (d) 0.4. Observa-se que apesar das curvas das fdp's de $N(t;N_0)$ relativas às distribuições Weibull, Lognormal e Gamma estarem relativamente próximas, há uma diferença significativa

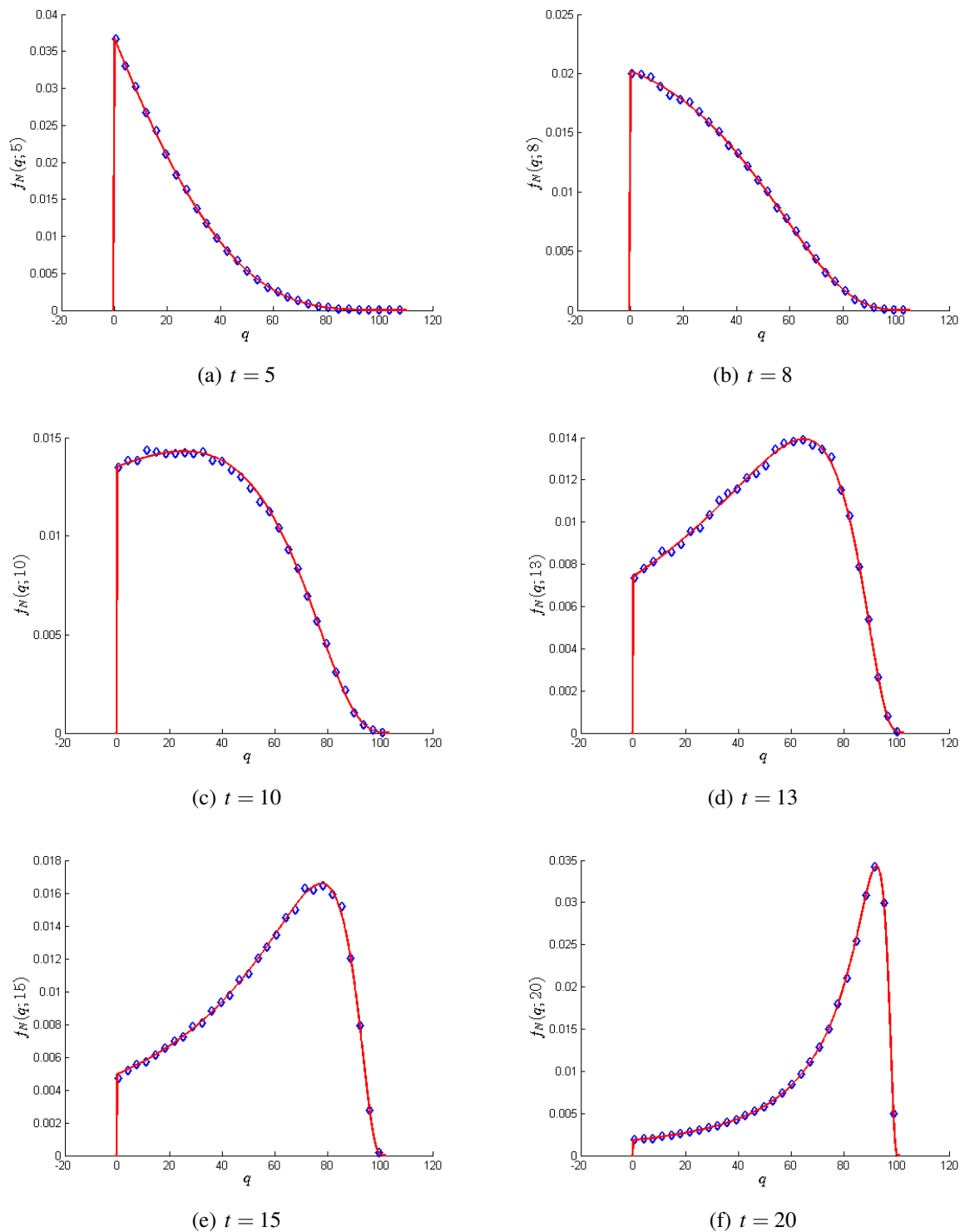


Figura 5.1: Ilustração da fdp de $N(t)$ com $N_0 \sim \exp(1/10)$, exponencialmente distribuída, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$: $f_N(q; t)$ dada em (3.14) (linha sólida vermelha) e aproximada pelo método de Monte Carlo (losangos azuis).

entre elas. Deste modo, percebe-se que a natureza da variável aleatória N_0 , ou melhor, sua distribuição, afeta significativamente a densidade populacional.

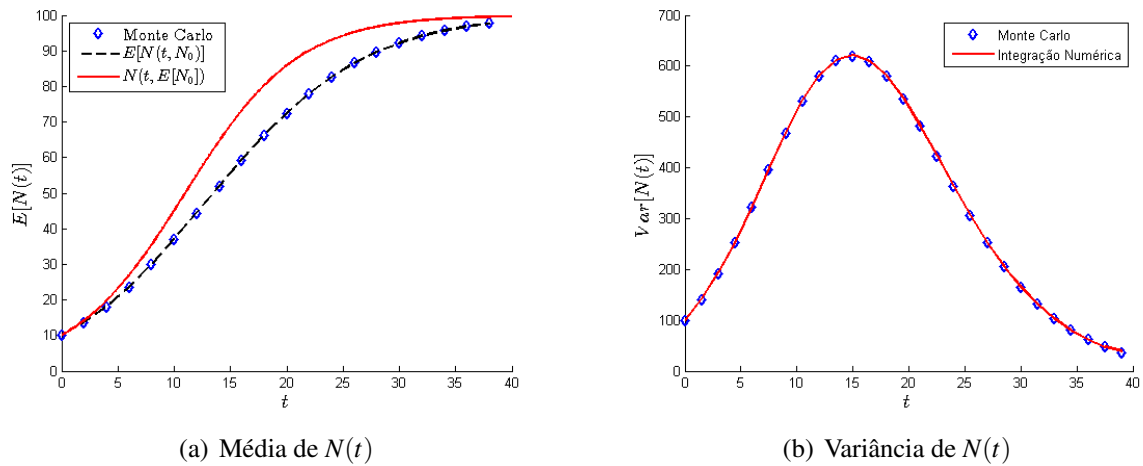


Figura 5.2: Ilustrações da média e variância de $N(t)$ com $N_0 \sim \exp(1/10)$, exponencialmente distribuída, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$: (a) $E[N(t; N_0)]$ (linha tracejada preta), $E[N(t; N_0)]$ aproximada por Monte Carlo (losangos azuis), e solução simplificada, $N(t; E[N_0])$ (linha sólida vermelha); (b) $\text{Var}[N(t)]$ (linha sólida vermelha) e aproximada pelo método de Monte Carlo (losangos azuis).

Apenas para fins de ilustração, na Figura 5.12 estão comparadas as fdp's de $N(t)$ para N_0 com distribuições truncadas Uniforme, Normal, Weibull e Lognormal, com suporte no intervalo $[0, K/2]$, $K = 100$, $a = 0.2$, $t = 10$, $E[N_0] = 10$ e com o coeficiente de variação δ_{N_0} assumindo os valores (a) 0.1, (b) 0.2, (c) 0.3 e (d) 0.4.

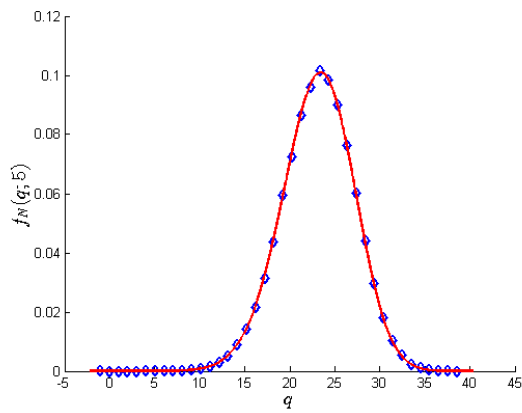
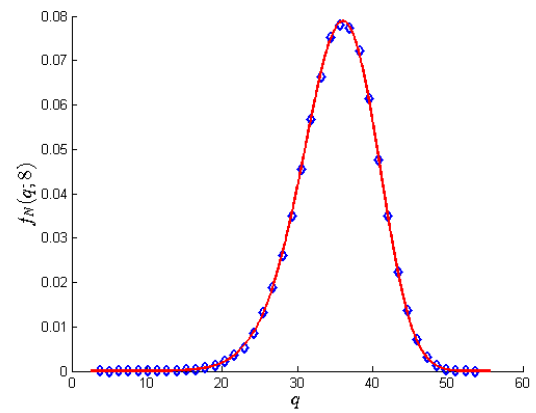
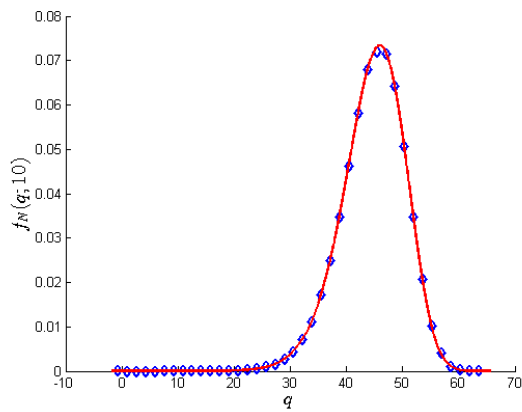
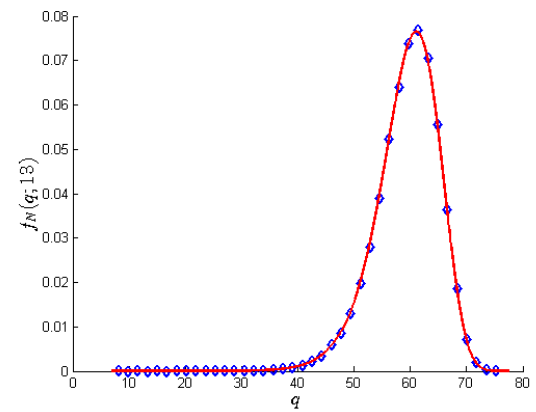
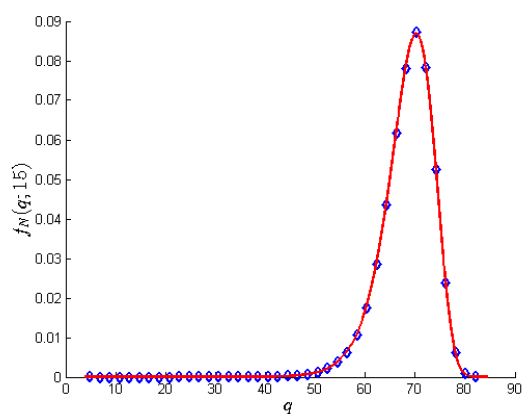
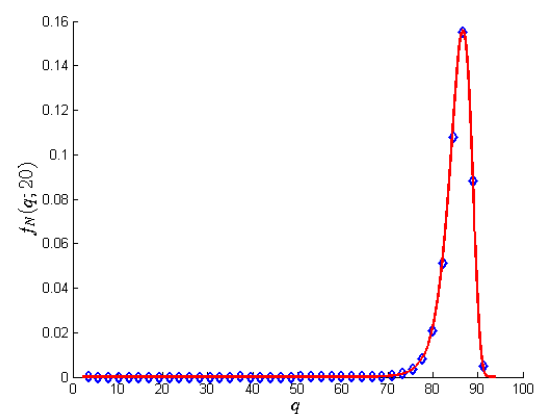
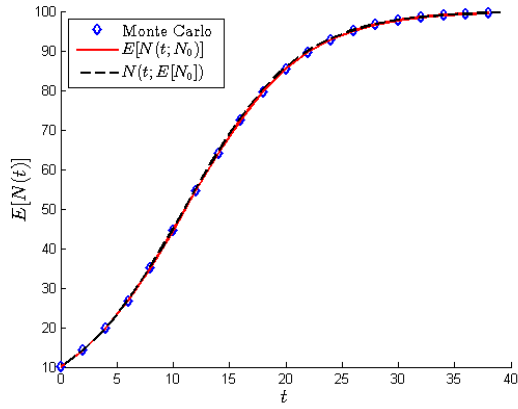
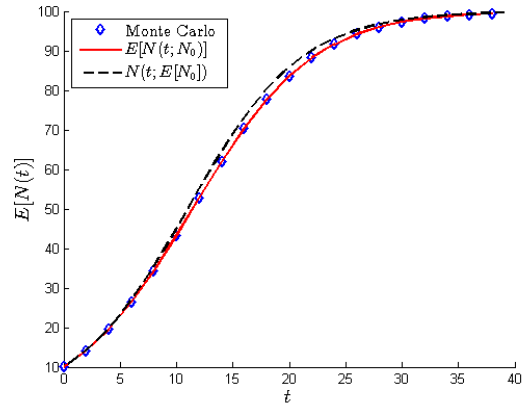
(a) $t = 5$ (b) $t = 8$ (c) $t = 10$ (d) $t = 13$ (e) $t = 15$ (f) $t = 20$

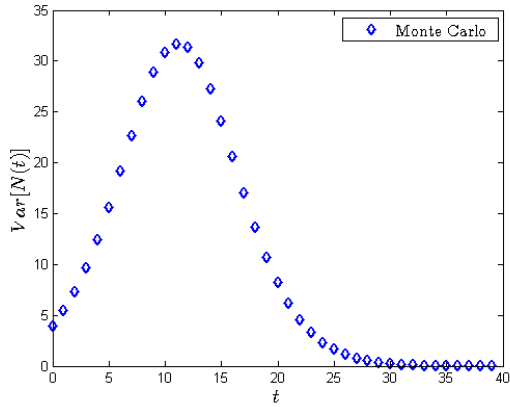
Figura 5.3: Ilustração da fdp de $N(t)$ com N_0 normal truncada no intervalo $[0, K]$, $E[N_0] = 10$, $\delta_{N_0} = 0.2$, $a = 0.2$ e $K = 100$: $f_N(q; t)$ dada em (3.11) (linha sólida vermelha) e aproximada pelo método de Monte Carlo (losangos azuis).



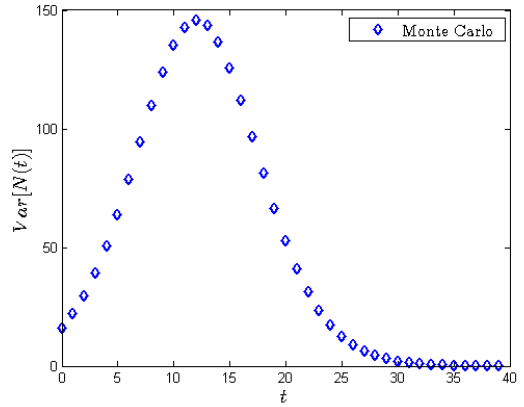
(a) Média de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$



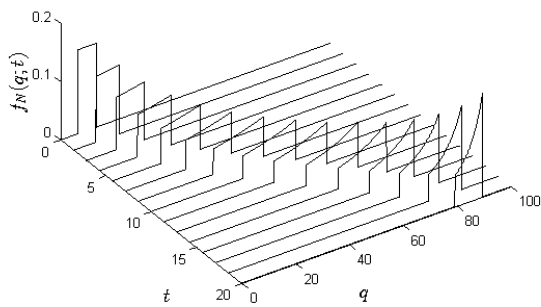
(b) Média de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$



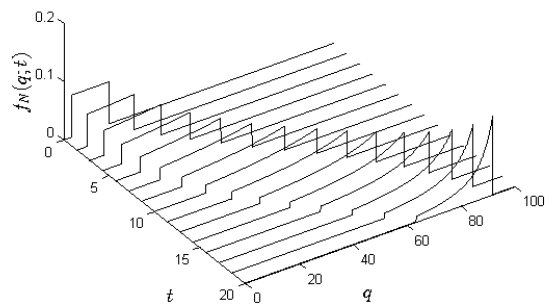
(c) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$



(d) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$



(e) Fdp de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$



(f) Fdp de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$

Figura 5.4: Ilustrações de $E[N(t)]$, $\text{Var}[N(t)]$ e $f_N(q;t)$; N_0 uniformemente distribuída, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$.

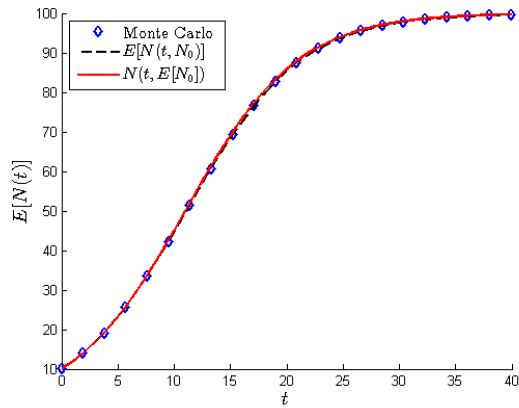
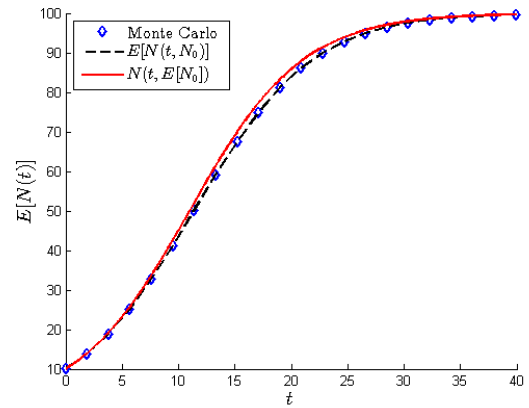
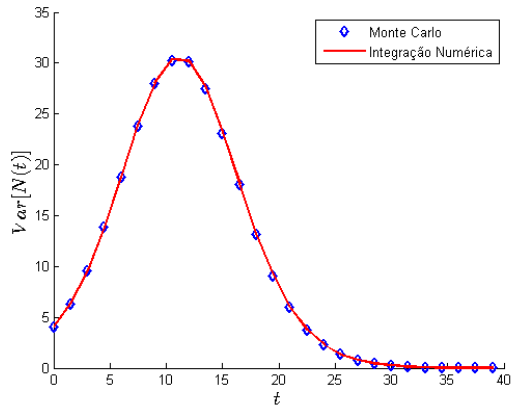
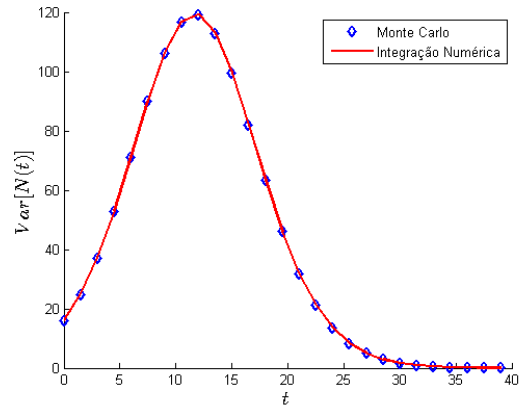
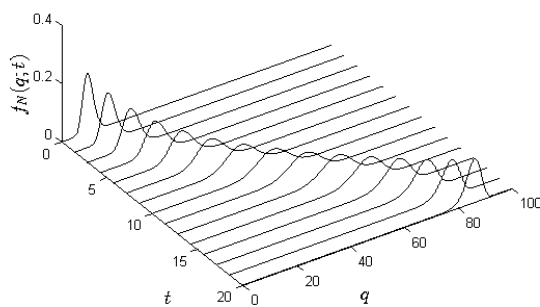
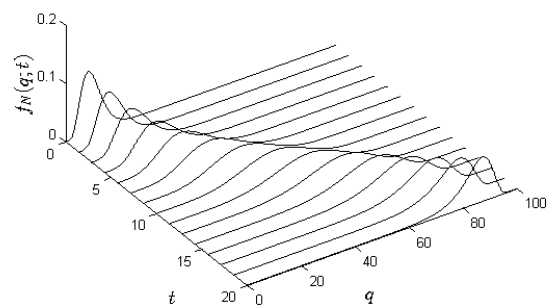
(a) Média de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (b) Média de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$ (c) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (d) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$ (e) Fdp de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (f) Fdp de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$

Figura 5.5: Ilustrações de $E[N(t)]$, $\text{Var}[N(t)]$ e $f_N(q;t)$; N_0 com distribuição Gamma, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$.

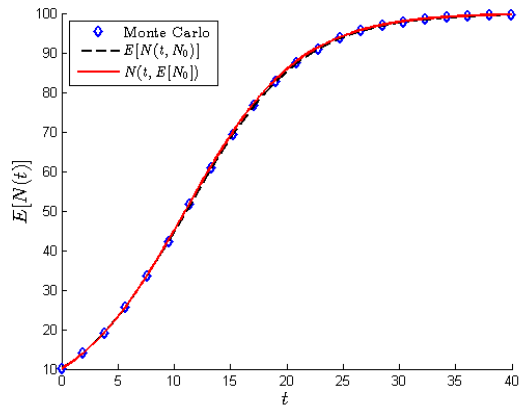
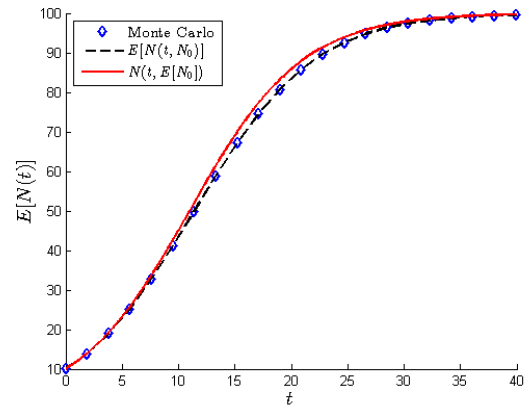
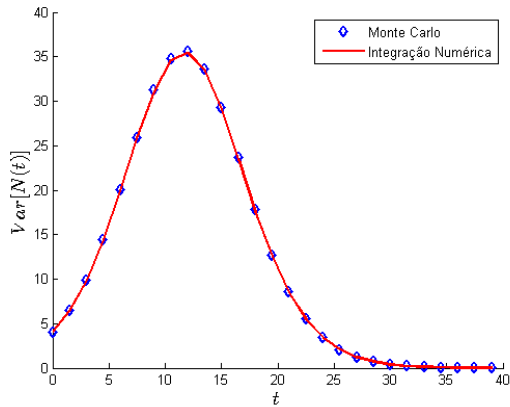
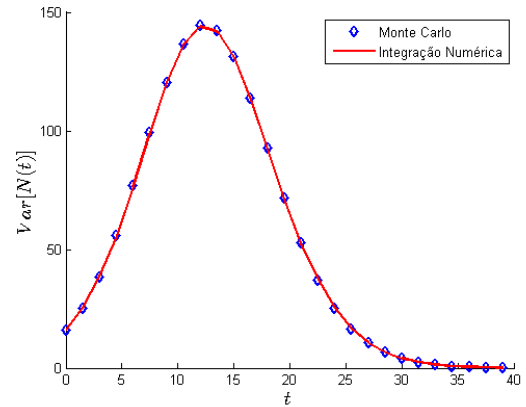
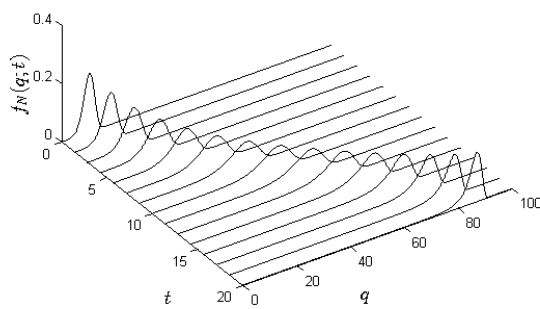
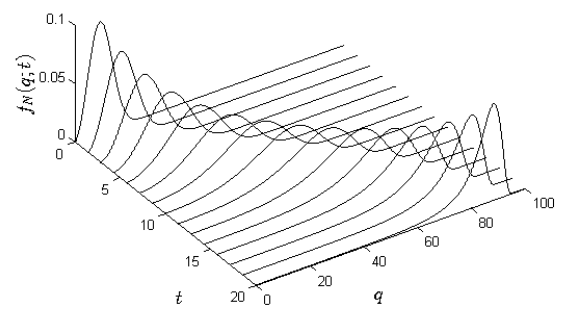
(a) Média de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (b) Média de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$ (c) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (d) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$ (e) Fdp de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (f) Fdp de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$

Figura 5.6: Ilustrações de $E[N(t)]$, $\text{Var}[N(t)]$ e $f_N(q; t)$; N_0 com distribuição Weibull, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$.

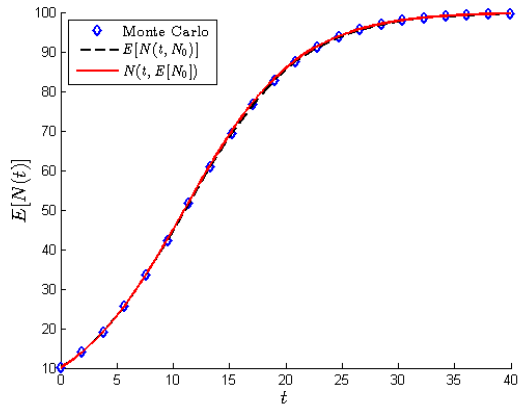
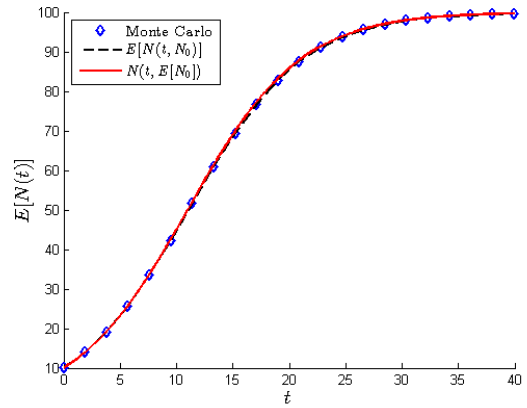
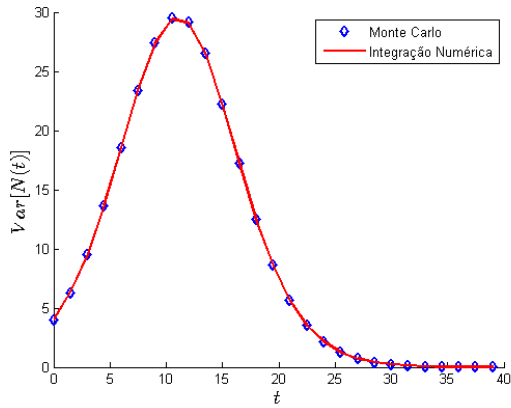
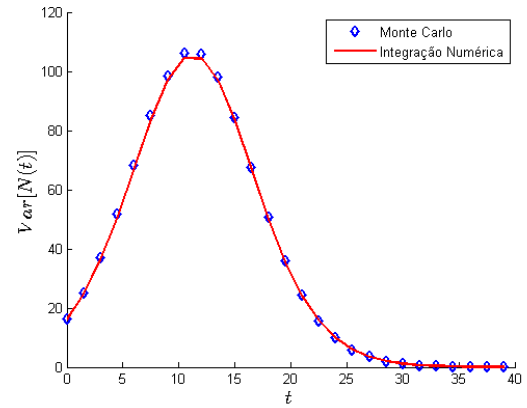
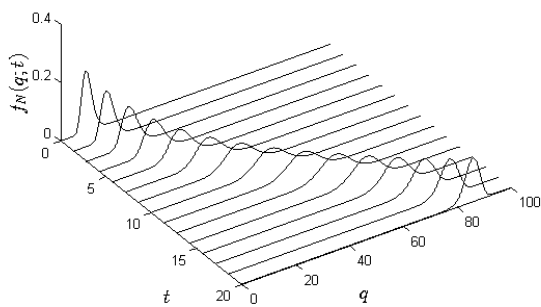
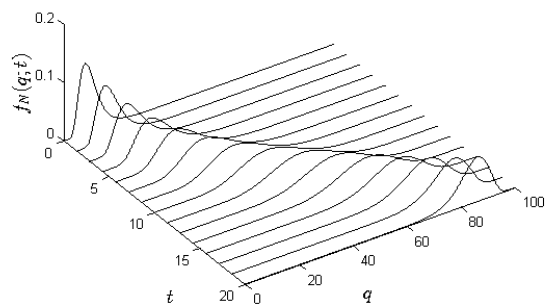
(a) Média de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (b) Média de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$ (c) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (d) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$ (e) Fdp de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (f) Fdp de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$

Figura 5.7: Ilustrações de $E[N(t)]$, $\text{Var}[N(t)]$ e $f_N(q;t)$; N_0 com distribuição Lognormal, $N_0 \sim \text{Logn}(\mu, \sigma^2)$, $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$ e $K = 100$.

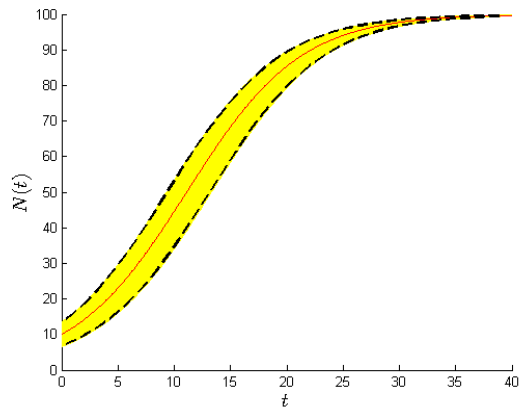
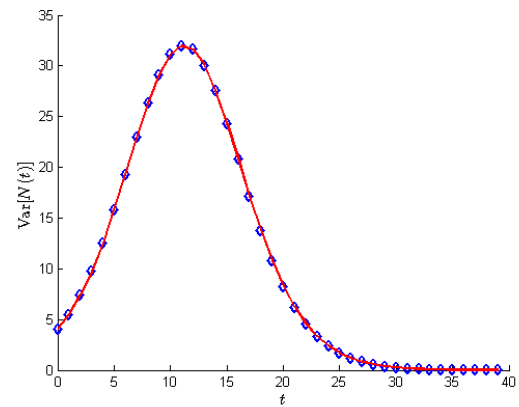
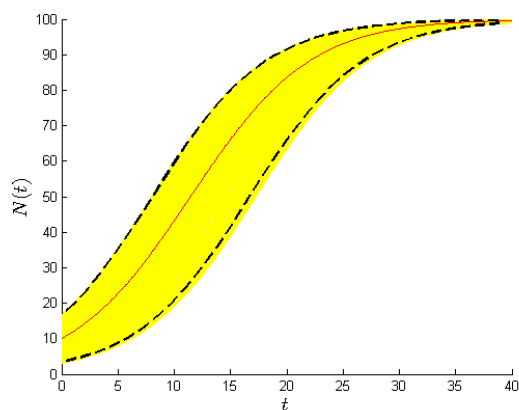
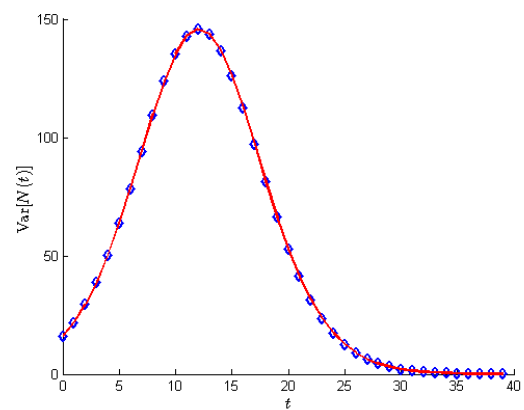
(a) Intervalo de confiança 95% de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$.(b) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.2$ (c) Intervalo de confiança 95% de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$ (d) Variância de $N(t)$; $\delta_{N_0} = 0.4$

Figura 5.8: Ilustração do intervalo de confiança e variância de $N(t)$, N_0 uniformemente distribuída, (a)–(b) $N_0 \sim U[6.536, 13.464]$, (c)–(d) $N_0 \sim U[3.072, 16.928]$; $a = 0.2$ e $K = 100$: (a)–(c) Intervalo de confiança 95% de $N(t)$ (linhas tracejadas pretas); realizações de Monte Carlo (faixa amarela); $E[N(t; N_0)]$ (linha vermelha); (b)–(d) $\text{Var}[N(t)]$ (linha vermelha); e aproximação de $\text{Var}[N(t)]$ por Monte Carlo (losangos azuis) .

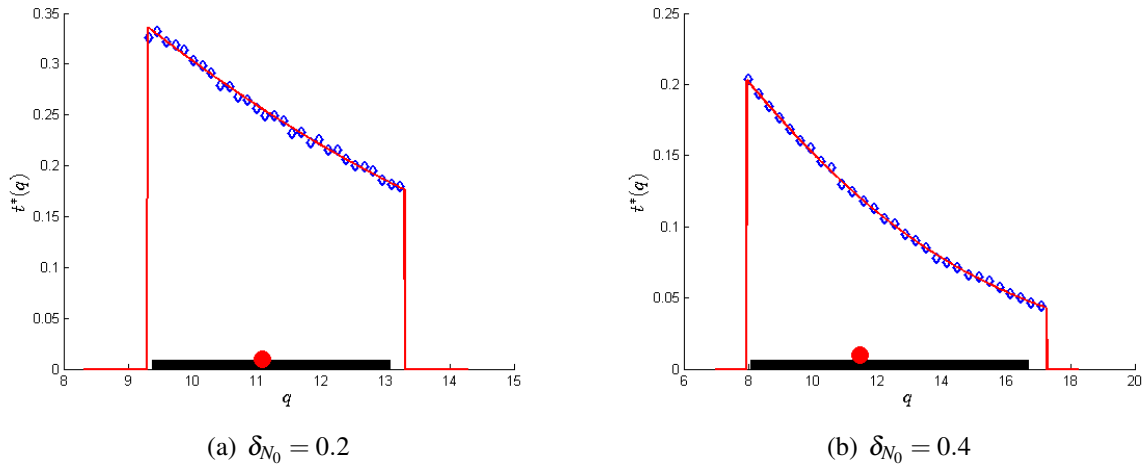


Figura 5.9: Ilustração da fdp de t^* (linha sólida vermelha) em comparação à simulações de Monte Carlo (losangos azuis); intervalo de confiança 95% (linha espessa preta); e $E[t^*]$ (círculo vermelho); $a = 0.2$, $K = 100$; (a) $N_0 \sim U[6.536, 13.464]$; (b) $N_0 \sim U[3.072, 16.928]$.

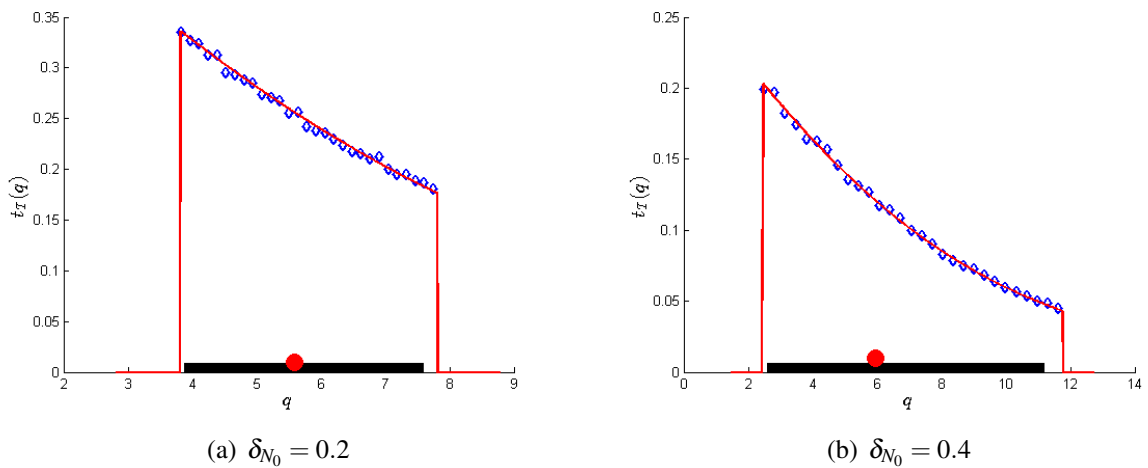


Figura 5.10: Ilustração da fdp de t_T (linha sólida vermelha) em comparação à simulações de Monte Carlo (losangos azuis); intervalo de confiança 95% (linha espessa preta); e $E[t_T]$ (círculo vermelho); $a = 0.2$, $K = 100$ e $T = K/4$; (a) $N_0 \sim U[6.536, 13.464]$; (b) $N_0 \sim U[3.072, 16.928]$.

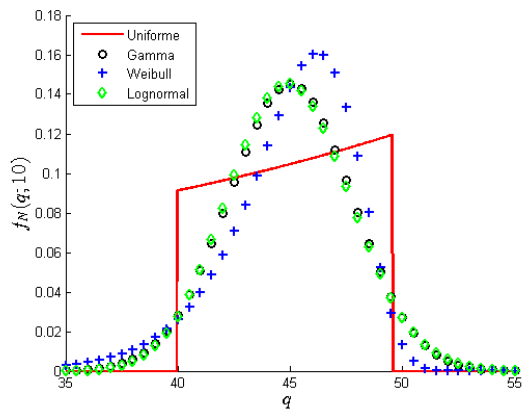
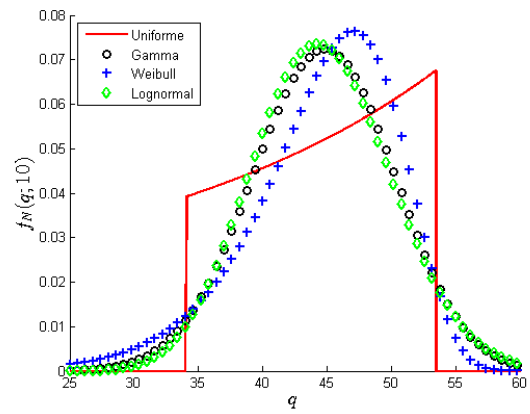
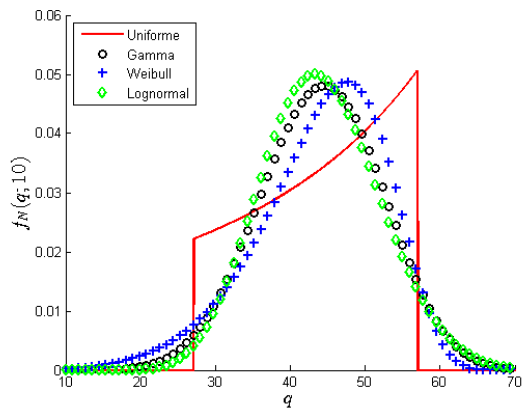
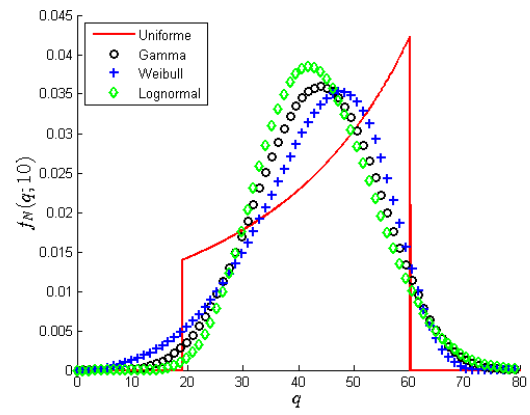
(a) $\delta_{N_0} = 0.1$ (b) $\delta_{N_0} = 0.2$ (c) $\delta_{N_0} = 0.3$ (d) $\delta_{N_0} = 0.4$

Figura 5.11: Ilustrações das pdf's de $N(t)$ para distribuições de N_0 com suporte em $(0, +\infty)$, Uniforme, Gamma, Weibull e Lognormal, e coeficientes de variação, δ_{N_0} , diversos; $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$, $K = 100$ e $t = 10$.

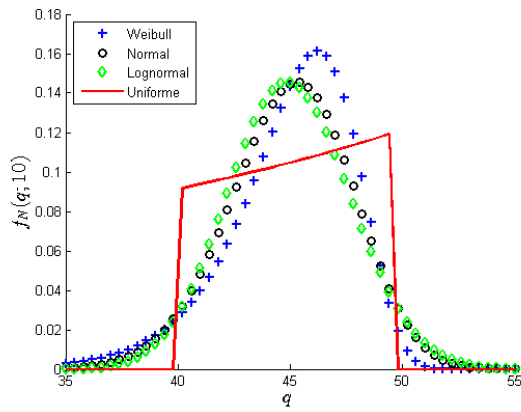
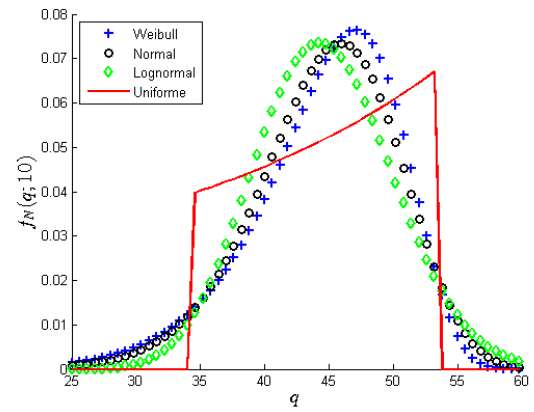
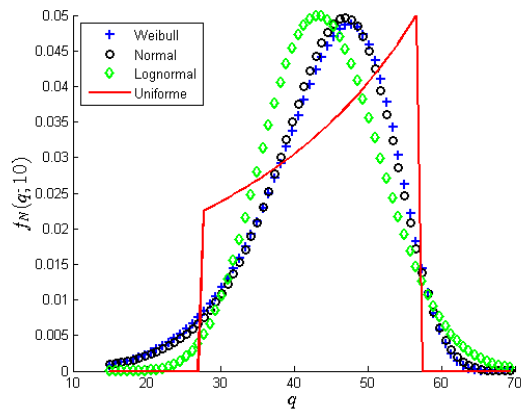
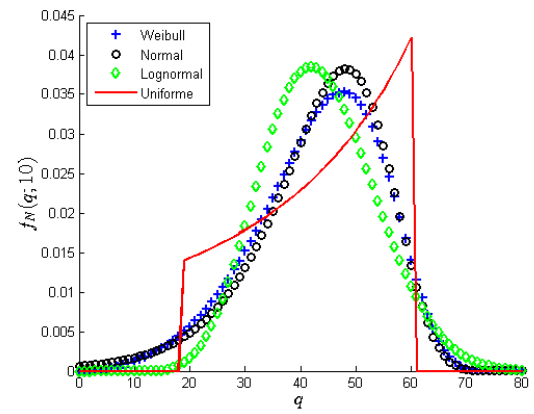
(a) $\delta_{N_0} = 0.1$ (b) $\delta_{N_0} = 0.2$ (c) $\delta_{N_0} = 0.3$ (d) $\delta_{N_0} = 0.4$

Figura 5.12: Ilustrações das pdf's de $N(t)$ para N_0 com distribuições truncadas em $[0, K/2]$ e coeficientes de variação diversos; $E[N_0] = 10$, $a = 0.2$, $K = 100$ e $t = 10$.

6 APLICAÇÃO: PROPAGAÇÃO DE UMA NOVA TECNOLOGIA NA ESPANHA

Neste capítulo é apresentado um exemplo de aplicação do PVI (1.1), utilizado para modelar a propagação de linhas telefônicas móveis na Espanha, considerando-se alguma incerteza, devido a falta de informações, na condição inicial. Tal exemplo foi abordado em Cortes et al. (2015) utilizando um modelo SI (Suscetível-Infetado), considerando incertezas na proporção inicial e na taxa de diminuição de suscetíveis.

Este exemplo trata especificamente da taxa de penetração de usuários de linhas telefônicas móveis, por 100 habitantes, na Espanha durante os anos de 1995 até 2011. Conforme afirma o autor, os dados listados na Tabela 6.1 foram coletados pelo INE (National Statistics Institute of Spain) e atualizados no ano de 2011. O parâmetro a (taxa de crescimento intrínseco) do modelo logístico foi obtido tomando-se a média das taxas de crescimento dos cinco primeiros anos (a partir de 1995), obtendo-se, assim, o valor aproximado $a = 0.7502$. À capacidade suporte, K , foi atribuída o valor $K = 115$ e os tempos t_i , $i = 0, 1, \dots, 16$, correspondem aos anos 1995, 1996, ..., 2011, respectivamente, exatamente como foi assumido por Cortes et al. (2015) em seu artigo. Com o objetivo de obter um modelo probabilístico para as taxas de penetração de linhas móveis na Espanha em um tempo $t > 0$ fixo, a taxa de penetração inicial, N_0 , foi assumida ser uma variável aleatória absolutamente contínua e positiva com média 2.3, ou seja, $D_{N_0} = (0, +\infty)$, suporte de N_0 , e $E[N_0] = 2.3$. É importante ressaltar que esta é a única informação disponível conhecida a respeito de N_0 . Deste modo, baseando-se no *Princípio de Máxima Entropia* (consulte Udwadia (1989) para definição, aprofundamento e aplicações), a função de densidade de probabilidade para N_0 que maximiza a entropia (incerteza) é a exponencial, isto é, $N_0 \sim \exp(1/2.3)$.

Com base nos resultados deste trabalho, foram obtidos a média e o intervalo de 95% de confiança da taxa de penetração, $N(t)$, de usuários de linhas telefônicas móveis na Espanha, ilustrados na Figura 6.1 em comparação com a solução simplificada. Pode-se perceber que os dados observados se incluem dentro do intervalo de confiança e que a solução média, $E[N(t; N_0)]$ possui uma melhor aproximação do conjunto de dados do que a solução simplificada nos anos de 2002 à 2008, enquanto que nos anos iniciais, 1995–1998, elas ficam bem

Tabela 6.1: Taxa de penetração de usuários de linhas telefônicas móveis na Espanha durante os anos 1995-2001. Fonte (CORTES et al., 2015).

ano	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
taxa de penetração (x_i)	2.3	7.5	10.2	16.2	37.3	59.9	72.6	81.9	89.3
ano	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	-
taxa de penetração (x_i)	91.2	99.2	104.4	108.9	109.6	111.4	111.7	113.9	-

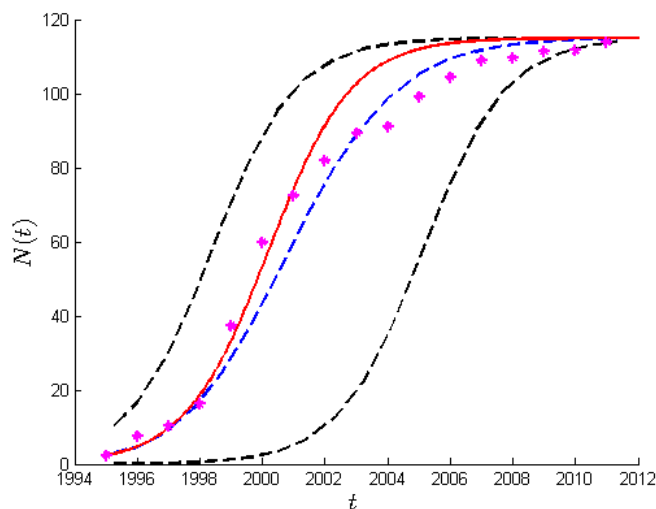


Figura 6.1: Ilustração da média (linha tracejada azul) e do intervalo de 95% de confiança (linhas tracejadas pretas) da taxa de penetração, $N(t)$, de usuários de telefones móveis na Espanha. Dados reais (pontos na cor rosa) e solução simplificada (linha sólida vermelha); $N_0 \sim \exp(1/2.3)$.

ajustadas com o conjunto de dados. A Figura 6.2 ilustra a variância de $N(t)$. É importante observar aqui que o conhecimento de mais informações a respeito de N_0 como, por exemplo, seu coeficiente de variação δ_{N_0} , implicaria em uma redução significativa da região de confiança 95% de $N(t)$, ou seja, menos incerteza.

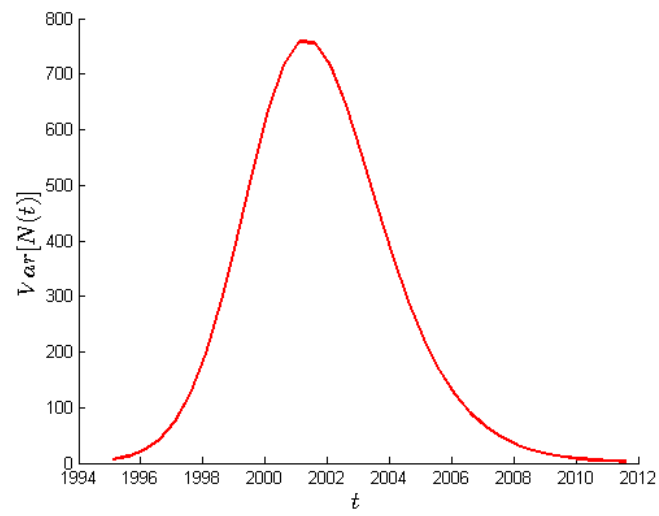


Figura 6.2: Ilustração da variância de taxa de penetração, $N(t)$, de usuários de telefones móveis na Espanha.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um estudo do modelo logístico de Verhulst sujeito a incertezas na condição inicial. Pôde-se perceber como essa consideração afeta a densidade populacional e seu ponto de inflexão, obtendo-se modelos probabilísticos e momentos estatísticos para os mesmos, considerando a densidade populacional inicial, N_0 , como uma variável aleatória. Com os resultados teóricos foi possível realizar experimentos computacionais para averiguar como se dá a propagação de incertezas de tal parâmetro, realizando comparações com simulações de Monte Carlo. Na busca por tais resultados e pela análise desta propagação, conhecimentos obtidos no percurso acadêmico tais como, cálculo, probabilidade, estatística e computação (Matlab) puderam ser aprimorados, além de trazer um enriquecimento com novos conceitos e conteúdos que não fariam parte desta trajetória até então, bem como, processos estocásticos, simulações de Monte Carlo e, também, com uma excelente plataforma para a edição deste trabalho, o LaTeX. Esta experiência foi significativa para o aluno, pois ampliou seus conhecimentos, contribuindo então efetivamente para sua formação.

REFERÊNCIAS

- CASTELO, D. A. **Quantificação de Incertezas e Estimação de Parâmetros em Dinâmica Estrutural: uma introdução a partir de exemplos computacionais**. São Carlos, SP: SB-MAC, 2016.
- CORTES, J. C. et al. Probabilistic solution of random si-type epidemiological models using the random variable transformation technique. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 24, p. 86–97, 2015.
- CRAMER, J. S. The origins of logistic regression. **Tibergen Institute Working Paper**, v. 119, n. 4, p. 1–16, 2002.
- DORINI, F. A.; DORINI, L. B.; CECCONELLO, M. S. On the logistic equation subject to uncertainties in the environmental carrying capacity and initial population density. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 33, p. 160–173, 2016.
- FISHMAN, G. S. **Monte Carlo: concepts, algorithms and applications**. New York: Springer-Verlag, 1996.
- KEGAN, B.; WEST, R. Modeling the simple epidemic with deterministic differential equations and random initial conditions. **Mathematical Biosciences**, v. 195, p. 179–193, 2005.
- KOT, M. **Elements of Mathematical Ecology**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
- MAGALHAES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. São Paulo, SP: Edusp, 2006.
- MALTHUS, T. R. **An Essay on the Principle of Population**. London: J. Johnson, 1798.
- PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**. second. New York: McGraw-Hill, Inc., 1984.
- RAMOS, R. A. Logistic function as a forecasting model: it's application to business and economics. **International Journal of Engineering and Applied Sciences**, v. 2, n. 3, p. 29–36, 2012.
- TRIOLA, M. F. **Elementary Statistics**. Boston, US: Pearson, 2010.
- UDWADIA, F. E. Some results on maximum entropy distributions for parameters known to lie in finite intervals. **Siam Rev.**, v. 31, n. 1, p. 103–109, 1989.
- ZHOU K. LIU, S. T. C. W. X. Cancer classification and prediction using logistic regression with bayesian gene selection. **Journal of Biomedical Informatics**, v. 37, n. 4, p. 249–259, 2004.

ANEXO A – PROGRAMAS UTILIZADOS

Todos os testes computacionais descritos neste trabalho foram desenvolvidos em linguagem Matlab, pelos autores do mesmo.

Código MATLAB 1. [utilizado na geração da Figura 2.1]

```

1 clear all, clc, format long
2 N0 = 10; a = 0.2; t = [0:0.1:20]; Nt = N0.*exp(a.*t);
3 plot(t,Nt,'k-', 'LineWidth', 2);
4 [l] = legend('$N(t)$', 'location', 'northwest');
5 set(l, 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 12); box off
6 xlabel('t', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 12)

```

Código MATLAB 2. [utilizado na geração da Figura 2.2]

```

1 clear all, clc, format long
2 N0 = 10; a = 0.2; K = 50; t = [0:0.1:30];
3 L = K*ones(size(t));
4 Nt = (K.*N0)./(N0 + (K-N0).*exp(-a.*t));
5
6 figure, hold on, axis([0 30 0 70])
7 plot(t,L,'k--', 'LineWidth', 2)
8 plot(t,Nt,'b-', 'LineWidth', 2)
9 [l] = legend('$K$', '$N(t)$', 'location', 'northwest');
10 set(l, 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 12);
11 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 12);

```

Código MATLAB 3. [utilizado na geração da Figura 3.1]

```

1 clear all, clc, format long
2 K = 20; a = 0.25; t = 10; alpha = exp(-a*t);
3 N0 = [0.01:0.005:30];
4 Nt = (K*N0)./(K*alpha + N0*(1-alpha));
5 y = (K/(1-alpha))*ones(size(N0));
6
7 tamFonte = 12; h = figure; hold on
8 plot(N0,Nt,'k--', 'LineWidth', 2)
9 plot(N0,y,'b-', 'LineWidth', 2)
10 xlabel('$N_0$', 'Interpreter', 'LaTeX', 'FontSize', tamFonte)

```

```

11 [1] = legend('$N(10;N_0)$', '$K/\left(1-e^{-10a}\right)$', 'Location', 'SouthEast')
12 set(1,'FontSize', tamFonte, 'Interpreter','LaTeX')
13 set(gca,'FontSize',tamFonte)

```

Código MATLAB 4. [utilizado na geração da Figura 3.2]

```

1 clear all, clc, format long
2 K = 20; a = 0.25; N0 = [0.01:0.005:K/2];
3 t = (1./a).*(log(K./N0 -1));
4
5 tamFonte = 12; h = figure; hold on
6 plot(N0,t,'k-', 'LineWidth', 2)
7 xlabel('$N_0$', 'Interpreter','LaTeX', 'FontSize', tamFonte)
8 [1] = legend('$t^{*}(N_0)$', 'location','NorthEast')
9 set(1,'interpreter','LaTeX','fontsize',tamFonte)

```

Código MATLAB 5. [utilizado na geração da Figura 3.3]

```

1 clear all, clc, format long
2 K = 20; a = 0.25; T = 15; N0 = [0.01:0.005:K];
3 tt = (1./a).*log((T.*(K - N0))./(K-T).*N0));
4
5 tamFonte = 12;
6 h = figure; hold on
7 plot(N0,tt,'b-', 'LineWidth', 2); box off
8 xlabel('$N_0$', 'Interpreter','LaTeX', 'FontSize', tamFonte)
9 [1] = legend('$t_{T}(N_0)$', 'location','NorthEast')
10 set(1,'interpreter','LaTeX','fontsize',tamFonte)

```

Código MATLAB 6. [utilizado na geração da Figura 5.1]

```

1 clear all, clc, format long
2 Nrea = 1000000; K = 100; a = 0.2;
3 mu_N0 = 10;
4 N0 = exprnd(mu_N0,1,Nrea); % realizações de N_0
5
6 %% aproximando a pdf de N(t), via histograma
7 t = 20; alpha = exp(-a*t);
8 Nt = (K*N0)./(K*alpha + N0*(1-alpha));
9
10 length_q = 200; [fr,q] = hist(Nt,length_q);
11 dq = q(2)-q(1); pdfN = fr/Nrea/dq; aux=7; hold on
12 plot(q(1:aux:length_q-1)+dq/2,pdfN(1:aux:length_q-1),'bd','LineWidth',1.5)
13
14 %% pdf exata de N(t)
15 aux3 = 1; qq = [q(1)-aux3:0.01:q(length_q)+aux3];
16 aux2 = K-qq*(1-alpha);
17 fN = K*K*alpha*pdf('exp',qq*K*alpha./aux2,mu_N0)./(aux2.^2);

```

```

18 plot(qq,fN,'r','linewidth',2)
19 fts = 14;
20 xlabel('$q$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
21 ylabel('$f_{N}(q;20)$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)

```

Código MATLAB 7. [utilizado na geração da Figura 5.2]

```

1 clear all, clc, format long
2 Nrea = 50000; K = 100; a = 0.2; mu_N0 = 10;
3 N0 = exprnd(mu_N0,1,Nrea);
4
5 %%% momentos de N(t) usando Monte Carlo
6 t = 40; dt = 0.05; tt = [0.01:dt:t]; t_length = length(tt);
7 for i=1:t_length
8     Nt = (K.*N0)./(K.*exp(-a*tt(i)) + N0.*(1-exp(-a*tt(i))));
9     m1(i) = mean(Nt); % média de N(t), t=t(i)
10    mc2(i) = var(Nt); % variância of N(t), t=t(i)
11 end
12 hold on, aux = 40;
13 plot(tt(1:aux:t_length),m1(1:aux:t_length),'bd','linewidth',2)
14
15 %%% momentos de N(t) - método numérico
16 for i=1:length(tt)
17     N2 = K/(1-exp(-a*tt(i)));
18     qq = [0:0.05:N2];
19     I = qq.*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))).^2)...
20     .*pdf('exp',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))),mu_N0);
21     I2 = (qq.^2).*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))).^2)...
22     .*pdf('exp',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))),mu_N0);
23     I3 = trapz(qq,I2);
24     ENt_Mn(i) = trapz(qq,I);
25     II = ENt_Mn(i);
26     VarNt_Mn(i) = I3-(II)^2;
27 end
28 plot(tt(1:aux:t_length),ENt_Mn(1:aux:t_length),'K--','LineWidth',1.5)
29
30 %%% solução simplificada
31 mu_naive_Nt = (K*mu_N0)./(K.*exp(-a*tt) + mu_N0.*(1-exp(-a*tt)));
32
33 aux3 = 1; box off
34 plot(tt(1:aux3:t_length),mu_naive_Nt(1:aux3:t_length),'r','linewidth',1.5)
35 fts = 14;
36 xlabel('$t$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
37 ylabel('$E[N(t)]$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
38 [1] = legend('Monte Carlo', '$E[N(t, N_{0})]$', '$N(t, E[N_{0}])$', 'location','northwest')
39 set(1,'fontsize',12,'interpreter','latex')
40
41 aux4 = 30; figure
42 plot(tt(1:aux4:t_length),mc2(1:aux4:t_length),'bd','linewidth',1.5)
43 hold on, box off
44 plot(tt(1:aux4:t_length),VarNt_Mn(1:aux4:t_length),'r-','linewidth',2)
45 xlabel('$t$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)

```

```

46 ylabel('$Var[N(t)]$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
47 legend('Monte Carlo', 'Integração Numérica')

```

Código MATLAB 8. [utilizado na geração da Figura 5.3]

```

1 clear all, clc, format long
2 Nrea = 1000000; K = 100; a = 0.2;
3 mu_N0 = 10; delta = 0.2;
4 a1 = 0; % extremo inferior do intervalo
5 b = K; % extremo superior do intervalo
6
7 sigma = delta*mu_N0;
8 cd = cdf('norm',b,mu_N0,sigma)-cdf('norm',a1,mu_N0,sigma);
9 N0 = normrnd(mu_N0,sigma,1, Nrea)./cd;
10
11 t = 19; alpha = exp(-a*t);
12 Nt = (K*N0)./(K*alpha + N0*(1-alpha));
13
14 length_q = 200; [fr,q] = hist(Nt,length_q);
15 dq = q(2)-q(1); pdfN = fr/Nrea/dq; aux=5; hold on
16 plot(q(1:aux:length_q-1)+dq/2,pdfN(1:aux:length_q-1),'bd','linewidth',1.5)
17
18 %%% pdf exata de N(t)
19 aux3 = 1; qq = [q(1)-aux3:0.01:q(length_q)+aux3];
20 aux2 = K-qq*(1-alpha);
21 fN = K*K*alpha*pdf('norm',qq*K*alpha./aux2, mu_N0, sigma)./(aux2.^2)./cd;
22 plot(qq,fN,'r','linewidth',2)
23 fts = 14; box off
24 xlabel('$q$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
25 ylabel('$f_{N}(q;19)$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)

```

Código MATLAB 9. [utilizado na geração da Figura 5.4]

```

1 clear all, clc, format long
2 Nrea = 50000; K = 100; a = 0.2;
3 mu = 10; delta = 0.4;
4
5 M=[1 1;-1 1]; H=[2*mu; sqrt(12)*delta*mu];
6 R=M\H; N1=R(1); N2=R(2);
7 N0 = N1 + (N2-N1).*rand(1,Nrea); mu_N0 = mu;
8
9 %%% momentos de N(t) usando Monte Carlo
10 t = 40; dt = 0.05; tt = [0.01:dt:t]; t_length = length(tt);
11 for i=1:t_length
12     Nt = (K.*N0)./(K.*exp(-a*tt(i)) + N0.*(1-exp(-a*tt(i))));
13     m1(i) = mean(Nt); % média de N(t), t=t(i)
14     mc2(i) = var(Nt); % variância of N(t), t=t(i)
15 end
16 aux = 40; hold on
17 plot(tt(1:aux:t_length),m1(1:aux:t_length),'bd','linewidth',1.5)

```

```

18
19 %%%% Solução analítica da média de N(t)
20 EANT = K./(1-exp(-a.*tt)) - (K^2.*exp(-a.*tt))./((N2-N1)...
21     *(1-exp(-a.*tt)).^2).*log((K.*exp(-a.*tt)+N2.*(1-exp(-a.*tt)))...
22     ./ (K.*exp(-a.*tt)+N1.*(1-exp(-a.*tt))));
23 plot(tt(1:aux:t_length),EANT(1:aux:t_length),'r','linewidth',2)
24
25 %%% solução simplificada
26 mu_naive_Nt = (K*mu_N0)./(K.*exp(-a*tt) + mu_N0.*(1-exp(-a*tt)));
27 aux3 = 30;
28 fts = 14; box off
29 xlabel('$t$','interpreter','latex','fontsize',fts)
30 ylabel('$E[N(t)]$','interpreter','latex','fontsize',fts)
31 plot(tt(1:aux3:t_length),mu_naive_Nt(1:aux3:t_length),'k--','linewidth',1.5)
32 [l] = legend('Monte Carlo', '$E[N(t;N_{0})]$', '$N(t;E[N_{0}])$', 'location','northwest')
33 set(l,'interpreter','latex','fontsize',12)
34
35 %%% plot variância por Monte Carlo
36 figure, aux4 = 20;
37 plot(tt(1:aux4:t_length),mc2(1:aux4:t_length),'bd','linewidth',1.5)
38 xlabel('$t$','interpreter','latex','fontsize',fts)
39 ylabel('$Var[N(t)]$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
40 [l] = legend('Monte Carlo','location','northeast')
41 set(l,'interpreter','latex','fontsize',12)

```

Código MATLAB 10. [utilizado na geração da Figura 5.5]

```

1 clear all, clc, format long
2 Nrea = 50000; K = 100; a = 0.2;
3 mu_N0 = 10; delta = 0.4;
4 param1 = 1/delta^2;
5 param2 = (delta^2)*mu_N0;
6 N0 = gamrnd(param1,param2,1,Nrea); % realizações de N_0
7
8 %%% momentos de N(t) usando Monte Carlo
9 t = 40; dt = 0.05; tt = [0.01:dt:t]; t_length = length(tt);
10 for i=1:t_length
11     Nt = (K.*N0)./(K.*exp(-a*tt(i)) + N0.*(1-exp(-a*tt(i))));
12     m1(i) = mean(Nt);
13     mc2(i) = var(Nt);
14 end
15 aux = 38; hold on
16 plot(tt(1:aux:t_length),m1(1:aux:t_length),'bd','linewidth',1.5)
17
18 %%% momentos de N(t) - numérico
19 for i=1:length(tt)
20     N2 = K/(1-exp(-a*tt(i))); N1 = min(N0);
21     Nt1 = K*N1/(N1+(K-N1)*exp(-a*tt(i)));
22     Nt2 = K*N2/(N2+(K-N2)*exp(-a*tt(i)));
23     qq = [0:0.05:N2];
24     I = qq.*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))).^2)...
25     .*pdf('gam',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))),param1,param2);

```



```

26     I2 = (qq.^2).*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i)))).^2)...
27         .*pdf('gam',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i)))),param1,param2);
28     I3 = trapz(qq,I2);
29     ENt_Mn(i) = trapz(qq,I); % média de Nt t=t(i)
30     VarNt_Mn(i) = I3-[ENt_Mn(i)]^2; % variância de Nt t=t(i)
31 end
32 plot(tt(1:aux:t_length),ENt_Mn(1:aux:t_length),'K--','linewidth',1.5)
33
34 %%% solução simplificada
35 mu_naive_Nt = (K*mu_N0)./(K.*exp(-a*tt) + mu_N0.*(1-exp(-a*tt)));
36 aux3 = 1;
37 plot(tt(1:aux3:t_length),mu_naive_Nt(1:aux3:t_length),'r','linewidth',1.5)
38 fts = 14; box off
39 xlabel('$t$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
40 ylabel('$E[N(t)]$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
41 [1] = legend('Monte Carlo', '$E[N(t,N_{0})]$', '$N(t,E[N_{0}])$', 'location','northwest')
42 set(1,'fontsize',12,'interpreter','latex')
43
44 aux4 = 30; figure, hold on
45 plot(tt(1:aux4:t_length),mc2(1:aux4:t_length),'bd','linewidth',1.5)
46 plot(tt(1:aux4:t_length),VarNt_Mn(1:aux4:t_length),'r','linewidth',2)
47 xlabel('$t$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
48 ylabel('$Var[N(t)]$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
49 legend('Monte Carlo', 'Integração Numérica', 'Location', 'NorthEast')

```

Código MATLAB 11. [utilizado na geração da Figura 5.6]

```

1 clear, clc, format long
2 Nrea = 50000; K = 100; a = 0.2;
3 mu_N0 = 10; delta = 0.4;
4 syms x y positive
5 [Sy,Sx] = solve(y*gamma(1+1/x)==mu_N0, ...
6     (y^2)*(gamma(1+2/x)-(gamma(1+1/x))^2)==(mu_N0^2)*(delta^2));
7 param1 = single(Sx);
8 param2 = single(Sy);
9 N0 = wblrnd(param1,param2,1,Nrea); % realizações de N_0
10
11 %%% momentos de N(t) usando Monte Carlo
12 t = 40; dt = 0.05; tt = [0.01:dt:t]; t_length = length(tt);
13 for i=1:t_length
14     Nt = (K.*N0)./(K.*exp(-a*tt(i)) + N0.*(1-exp(-a*tt(i))));
15     m1(i) = mean(Nt); % média de N(t), t=t(i)
16     mc2(i) = var(Nt); % variância of N(t), t=t(i)
17 end
18 aux = 38; hold on
19 plot(tt(1:aux:t_length),m1(1:aux:t_length),'bd','linewidth',1.5)
20
21 %%% momentos de N(t) - numérico
22 for i=1:length(tt)
23     N2=K/(1-exp(-a*tt(i))); N1=min(N0);
24     Nt1=K*N1/(N1+(K-N1)*exp(-a*tt(i)));
25     Nt2=K*N2/(N2+(K-N2)*exp(-a*tt(i)));

```

```

26 qq=[0:0.02:N2];
27 I= qq.*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))).^2)...
28 .*pdf('wbl',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))),param1,param2);
29 I2= (qq.^2).*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))).^2)...
30 .*pdf('wbl',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))),param1,param2);
31 I3 = trapz(qq,I2);
32 ENt_Mn(i)=trapz(qq,I);
33 VarNt_Mn(i) = I3-[ENt_Mn(i)]^2;
34 end
35 plot(tt(1:aux:t_length),ENt_Mn(1:aux:t_length),'K--','linewidth',1.5)
36
37 %% solução simplificada
38 mu_naive_Nt = (K*mu_N0)./(K.*exp(-a*tt) + mu_N0.*(1-exp(-a*tt)));
39 aux3 = 1;
40 plot(tt(1:aux3:t_length),mu_naive_Nt(1:aux3:t_length),'r','linewidth',1.5)
41 fts = 14; box off
42 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
43 ylabel('$E[N(t)]$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
44 [1] = legend('Monte Carlo', '$E[N(t, N_{0})]$', '$N(t, E[N_{0}])$', 'location', 'northwest')
45 set(1, 'fontsize', 11, 'interpreter', 'latex')
46
47 aux4 = 30; figure, hold on
48 plot(tt(1:aux4:t_length),mc2(1:aux4:t_length),'bd','linewidth',1.5)
49 plot(tt(1:aux4:t_length),VarNt_Mn(1:aux4:t_length),'r','linewidth',2)
50 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
51 ylabel('$Var[N(t)]$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
52 legend('Monte Carlo', 'Integração Numérica', 'Location', 'NorthEast')

```

Código MATLAB 12. [utilizado na geração da Figura 5.7]

```

1 clear all, clc, format long
2 Nrea = 50000; K = 100; a = 0.2;
3 mu_N0 = 10; delta = 0.4;
4 syms x y positive
5 [Sx, Sy] = solve(exp(x+y^2/2)==mu_N0, ...
6 (exp(y^2)-1)*exp(2*x+y^2)==mu_N0^2*delta^2);
7 param1 = single(Sx); param2 = single(Sy);
8 N0 = lognrnd(param1,param2,1,Nrea); % realizações de N_0
9
10 %% momentos de N(t) usando Monte Carlo
11 t = 40; dt = 0.05; tt = [0.01:dt:t]; t_length = length(tt);
12 for i=1:t_length
13 Nt = (K.*N0)./(K.*exp(-a*tt(i)) + N0.*(1-exp(-a*tt(i))));
14 m1(i) = mean(Nt); % média de N(t), t=t(i)
15 mc2(i) = var(Nt); % variância of N(t), t=t(i)
16 end
17 aux = 38; hold on
18 plot(tt(1:aux:t_length),m1(1:aux:t_length),'bd','linewidth',1.5)
19
20 %% momentos de N(t) - numérico
21 for i=1:length(tt)
22 N2 = K/(1-exp(-a*tt(i))); qq = [0:0.05:N2];

```

```

23     I = qq.*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))).^2)...
24     .*pdf('logn',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))),param1,param2);
25     II = (qq.^2).*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))).^2)...
26     .*pdf('logn',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))))),param1,param2);
27     ENt_Mn(i) = trapz(qq,I);
28     VarNt_Mn(i) = trapz(qq,II)-[ENt_Mn(i)]^2;
29 end
30 plot(tt(1:aux:t_length),ENt_Mn(1:aux:t_length),'K--','linewidth',1.5)
31
32 %%% solução simplificada
33 mu_naive_Nt = (K*mu_N0)./(K.*exp(-a*tt) + mu_N0.*(1-exp(-a*tt)));
34 aux3 = 1;
35 plot(tt(1:aux3:t_length),mu_naive_Nt(1:aux3:t_length),'r','linewidth',1.5)
36 fts=14; box off
37 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
38 ylabel('$E[N(t)]$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
39 [1] = legend('Monte Carlo', '$E[N(t, N_{0})]$', '$N(t, E[N_{0}])$', 'location', 'northwest')
40 set(1, 'fontsize', 11, 'interpreter', 'latex')
41
42 aux4 = 30;
43 figure, hold on
44 plot(tt(1:aux4:t_length),mc2(1:aux4:t_length),'bd','linewidth',1.5)
45 plot(tt(1:aux4:t_length),VarNt_Mn(1:aux4:t_length),'r','linewidth',2)
46 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
47 ylabel('$Var[N(t)]$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', fts)
48 legend('Monte Carlo', 'Integração Numérica', 'fontsize', fts)

```

Código MATLAB 13. [utilizado na geração da Figura 5.8]

```

1 clear all, clc, format long
2 Nrea = 50000; K = 100; a = 0.2;
3 mu = 10; delta = 0.4;
4 M=[1 1;-1 1]; H=[2*mu; sqrt(12)*delta*mu];
5 R=M\H; N1=R(1); N2=R(2);
6 N0 = N1 + (N2-N1).*rand(1,Nrea);
7 mu_N0 = mu;
8
9 %%% momentos de N(t) usando Monte Carlo
10 t = 40; dt = 0.05; tt = [0.01:dt:t]; t_length = length(tt);
11 for i=1:t_length
12     Nt = (K.*N0)./(K.*exp(-a*tt(i)) + N0.*(1-exp(-a*tt(i))));
13     m1(i) = mean(Nt);
14     mc2(i) = var(Nt);
15 end
16
17 %%% plotando algumas realizações de N(t)
18 aux2 = 50; hold on
19 for j=1:aux2:Nrea
20     Nt_Rea = (K.*N0(j))./(K.*exp(-a*tt) + N0(j).* (1-exp(-a*tt)));
21     plot(tt,Nt_Rea,'y')
22 end
23 plot(tt,m1,'r-')

```

```

24
25 %% Intervalo de Confiança
26 nivel = 95; b = (100-nivel)/200; c = 1-b;
27 x1=(K.*(b.*(N2-N1)+N1))./(K.*exp(-a.*tt)+(b.*(N2-N1)+N1).*(1-exp(-a.*tt)));
28 x2=(K.*(c.*(N2-N1)+N1))./(K.*exp(-a.*tt)+(c.*(N2-N1)+N1).*(1-exp(-a.*tt)));
29 aux = 20;
30 plot(tt(1:aux:t_length),x1(1:aux:t_length),'k--','linewidth',1.5)
31 plot(tt(1:aux:t_length),x2(1:aux:t_length),'k--','linewidth',1.5)
32 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 14)
33 ylabel('$N(t)$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 14)
34
35 aux4 = 20; figure, hold on
36 plot(tt(1:aux4:t_length),mc2(1:aux4:t_length),'bd','linewidth',1.5)
37
38 %% variância analítica de N(t)
39 VarNt = ((K.^2.*exp(-a.*tt)).^2./((N2-N1).*(1-exp(-a.*tt)).^3))...
40     .* (1./(K.*exp(-a.*tt)+N1.*(1-exp(-a.*tt)))- 1./(K.*exp(-a.*tt)+N2...
41     .* (1-exp(-a.*tt)))-(1./((N2-N1).*(1-exp(-a.*tt)))))...
42     .* (log((K.*exp(-a.*tt)+N2.*(1-exp(-a.*tt)))./(K.*exp(-a.*tt)...
43     +N1.*(1-exp(-a.*tt))))).^2);
44 plot(tt(1:aux4:t_length),VarNt(1:aux4:t_length),'r','linewidth',2)
45 box off
46 xlabel('$t$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 12)
47 ylabel('Var[$N(t)$]', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', 12)

```

Código MATLAB 14. [utilizado na geração da Figura 5.9]

```

1 clear, clc, format long
2 Nrea = 1000000; K = 100; a = 0.2;
3 mu = 10; delta = 0.4;
4
5 M = [1 1;-1 1]; H = [2*mu; sqrt(12)*delta*mu];
6 R = M\H; N1 = R(1); N2 = R(2);
7 N0 = N1 + (N2-N1).*rand(1,Nrea);
8
9 %% Monte Carlo
10 tinf = (1./a).*log(K./N0 -1); d = 5/100;
11 t1 = (1/a)*log((K/((1-d/2)*(N2-N1)+N1))-1);
12 t2 = (1/a)*log((K/((d/2)*(N2-N1)+N1))-1);
13 Etnf = (1/(a*(N2-N1)))*(N2*log((K/N2)-1)-N1*log((K/N1)-1)-K*log((K-N2)/(K-N1)));
14
15 I = [t1:0.1:t2]; y = zeros(size(I)); length_q = 200;
16 [fr,q] = hist(tinf,length_q); dq = q(2)-q(1);
17 pdftinf = fr/Nrea/dq; aux=7;
18 plot(q(1:aux:length_q-1)+dq/2,pdftinf(1:aux:length_q-1),'bd','linewidth',1.5)
19 hold on
20 plot(I,y,'k','linewidth',14)
21 plot(Etnf,0.01,'ro','linewidth',8)
22
23 %% Analítica
24 aux3 = 1; qq = [q(1)-aux3:0.01:q(length_q)+aux3];
25 ftinf = (a.*K.*exp(a.*qq))./(1+exp(a.*qq)).^2.*pdf('unif',K./(1+exp(a.*qq)),N1,N2);

```

```

26
27 plot(qq,ftinf,'r','linewidth',2)
28 TamFonte = 14; box off
29 xlabel('$q$', 'interpreter', 'latex','fontsize',TamFonte)
30 ylabel('$t^{(*)}(q)$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', TamFonte)

```

Código MATLAB 15. [utilizado na geração da Figura 5.10]

```

1 clear, clc, format long
2 Nrea = 1000000; K = 100; a = 0.2;
3 mu = 10; delta = 0.4;
4 M=[1 1;-1 1]; H=[2*mu; sqrt(12)*delta*mu];
5 R=M\H; N1=R(1); N2=R(2);
6 N0 = N1 + (N2-N1).*rand(1,Nrea);
7 T = K/4; d = 5/100;
8
9 %%% Monte Carlo
10 tT = (1./a).*log((T.*(K-N0))./(N0.*(K-T)));
11 t1 = (1/a)*log((T/(K-T))*(K/((1-d/2)*(N2-N1)+N1))-1);
12 t2 = (1/a)*log((T/(K-T))*(K/((d/2)*(N2-N1)+N1))-1);
13 EtT = (1/(a*(N2-N1)))*(N2*log((T*(K-N2))/(N2*(K-T)))...
14         -N1*log((T*(K-N1))/(N1*(K-T)))+K*log((K-N1)/(K-N2)));
15 I = [t1:0.1:t2]; y = zeros(size(I));
16
17 length_q = 200; [fr,q] = hist(tT,length_q);
18 dq = q(2)-q(1); pdftT = fr/Nrea/dq; aux = 7;
19 plot(q(1:aux:length_q-1)+dq/2,pdftT(1:aux:length_q-1),'bd','linewidth',1.5)
20 hold on
21 plot(I,y,'k','linewidth',14)
22 plot(EtT,0.01,'ro','linewidth',8)
23
24 %%% Analítica
25 aux3 = 1; qq = [q(1)-aux3:0.01:q(length_q)+aux3];
26 ftT = (T.*K.*a.*(K-T).*exp(a.*qq)).*pdf('unif',(T.*K)./(T+(K-T)...
27         .*exp(a.*qq)),N1,N2)./(T+(K-T).*exp(a.*qq)).^2;
28 plot(qq,ftT,'r','linewidth',2)
29 Tamfonte=14; box off
30 xlabel('$q$', 'interpreter', 'latex','fontsize',Tamfonte)
31 ylabel('$t_{(T)}(q)$', 'interpreter', 'latex', 'fontsize', Tamfonte)

```

Código MATLAB 16. [utilizado na geração da Figura 5.11]

```

1 clear all, clc, format long
2 K = 100; a = 0.2;
3 mu_N0 = 10; delta = 0.4;
4 t = 10; alpha = exp(-a*t);
5
6 %%% uniform
7 M=[1 1;-1 1]; H=[2*mu_N0; sqrt(12)*delta*mu_N0];
8 R=M\H; N1=R(1); N2=R(2);

```

```

9
10 fts = 1.5; auxc = 110;
11 %qq = [35:0.01:55]; % para delta = 0.1
12 %qq = [25:0.01:60]; % para delta = 0.2
13 %qq = [10:0.01:70]; % para delta = 0.3
14 qq = [0:0.01:80]; % para delta = 0.4
15 aux2 = K-qq*(1-alpha);
16 fNU = K*K*alpha*pdf('unif',qq*K*alpha./aux2,N1,N2)./(aux2.^2);
17 plot(qq,fNU,'r','linewidth',fts), hold on
18
19 %%% gamma
20 param1 = 1/delta^2;
21 param2 = delta^2*mu_N0;
22 fNG = K*K*alpha*pdf('gam',qq*K*alpha./aux2, param1, param2)./(aux2.^2);
23 plot(qq(1:auxc:length(qq)),fNG(1:auxc:length(qq)),'ko','linewidth',fts)
24
25 %%% weibull
26 syms x y positive
27 [Sy,Sx] = solve(y*gamma(1+1/x)==mu_N0, (y^2)*(gamma(1+2/x)...
28     -(gamma(1+1/x))^2)==(mu_N0^2)*(delta^2));
29 param1 = single(Sx);
30 param2 = single(Sy);
31 fNW = K*K*alpha*pdf('wbl',qq*K*alpha./aux2, param1, param2)./(aux2.^2);
32 plot(qq(1:auxc:length(qq)),fNW(1:auxc:length(qq)),'b+','linewidth',fts)
33
34 %%% lognormal
35 syms x y positive
36 [Sx, Sy] = solve(exp(x+y^2/2)==mu_N0, (exp(y^2)-1)*exp(2*x+y^2)==mu_N0^2*delta^2);
37 param1 = single(Sx);
38 param2 = single(Sy);
39
40 fNL = K*K*alpha*pdf('logn',qq*K*alpha./aux2, param1, param2)./(aux2.^2);
41 plot(qq(1:auxc:length(qq)),fNL(1:auxc:length(qq)),'gd','linewidth',fts);
42 box off, fts2 = 14;
43 xlabel('$q$', 'interpreter','latex','fontsize',fts2)
44 ylabel('$f_{N}(q;10)$', 'interpreter','latex','fontsize',fts2)
45 legend('Uniforme','Gamma','Weibull','Lognormal','location','northwest')

```

Código MATLAB 17. [utilizado na geração da Figura 5.12]

```

1 clear, clc, format long
2 K = 100; a = 0.2;
3 mu_N0 = 10; delta = 0.4;
4 a1 = 0; % extremo inferior do intervalo
5 b = K/2; % extremo superior do intervalo
6 t = 10; alpha = exp(-a*t);
7 %qq = [35:0.01:55]; % delta = 0.1
8 %qq = [25:0.01:60]; % delta = 0.2
9 %qq = [15:0.01:70]; % delta = 0.3
10 qq = [0:0.01:80]; % delta = 0.4
11
12 %%% Weibull parameters

```

```

13 syms x y positive
14 [Sy,Sx] = solve(y*gamma(1+1/x)==mu_N0, (y^2)*(gamma(1+2/x)...
15     -(gamma(1+1/x))^2)==(mu_N0^2)*(delta^2));
16 l = single(Sx); k = single(Sy);
17 cw = cdf('wbl',b,k,l)-cdf('wbl',a1,k,l);
18
19 %%% Normal parameters
20 mu = mu_N0; s = delta*mu;
21 cg = cdf('norm',b,mu,s)-cdf('norm',a1,mu,s);
22
23 %%% Lognormal parameters
24 syms x y positive
25 [Sx,Sy] = solve(exp(x+y^2/2)==mu_N0, (exp(y^2)-1)*exp(2*x+y^2)==mu_N0^2*delta^2);
26 mlog = single(Sx); slog = single(Sy);
27 cln= cdf('logn',b,mlog,slog)-cdf('logn',a1,mlog,slog);
28
29 %%% uniform parameters
30 M = [1 1;-1 1]; H = [2*mu; sqrt(12)*delta*mu];
31 R = M\H; N1=R(1); N2 = R(2);
32
33 x = (K.*qq.*alpha)./(K-qq.*(1-alpha));
34 y = ((K.^2.*alpha)./((K-qq.*(1-alpha)).^2));
35 fn1 = y.*pdf('wbl',x,l,k)/cw;
36 fn2 = y.*pdf('norm',x,mu,s)/cg;
37 fn3 = y.*pdf('logn',x,mlog,slog)/cln;
38 fn4 = y.*pdf('unif',x,N1,N2);
39
40 w = 1.5; aux = 40; hold on
41 plot(qq(1:aux:length(qq)),fn1(1:aux:length(qq)),'b+', 'linewidth',w) %weibull
42 plot(qq(1:aux:length(qq)),fn2(1:aux:length(qq)),'ko', 'linewidth',w) %normal
43 plot(qq(1:aux:length(qq)),fn3(1:aux:length(qq)),'gd', 'linewidth',w) %lognormal
44 plot(qq(1:aux:length(qq)),fn4(1:aux:length(qq)),'r-', 'linewidth',w) %uniform
45 fts = 14; box off
46 xlabel('$q$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
47 ylabel('$f_{N}(q;10)$', 'interpreter','latex','fontsize',fts)
48 legend('Weibull','Normal','Lognormal','Uniforme','Location','NorthWest')

```

Código MATLAB 18. [utilizado na geração das Figuras 5.4–5.7(e),(f)]

```

1 clear all, clc, format long
2 K = 100; a = 0.2;
3 mu_N0 = 10; delta = 0.2;
4 t_length = 15; tf = 20;
5 t = linspace(0,tf,t_length);
6 alpha = exp(-a*t);
7 dq = 0.01; qq = [0:dq:K];
8
9 distribution = 3; % escolha da distribuição de N0
10
11 switch distribution
12     case 1 %%% uniform parameters
13         M=[1 1;-1 1]; H=[2*mu_N0; sqrt(12)*delta*mu_N0];

```

```

14 R=M\H; N1=R(1); N2=R(2);
15 for ind1 = 1:t_length
16     t1 = t(ind1); aux = K-qq*(1-alpha(ind1));
17     fQ = K*K*alpha(ind1)*pdf('unif',qq*K*alpha(ind1)./aux,N1,N2)./(aux.^2);
18     pdfQ(ind1,:) = fQ;
19 end
20
21 case 2    %%% gamma
22 param1 = 1/delta^2; param2 = delta^2*mu_N0;
23 for ind1 = 1:t_length
24     t1 = t(ind1); aux = K-qq*(1-alpha(ind1));
25     fQ = K*K*alpha(ind1)*pdf('gam',qq*K*alpha(ind1)./aux, param1, param2)./(aux.^2);
26     pdfQ(ind1,:) = fQ;
27 end
28
29 case 3    %%% weibull
30 syms x y positive
31 [Sy,Sx] = solve(y*gamma(1+1/x)==mu_N0, (y^2)*(gamma(1+2/x)...
32     -(gamma(1+1/x))^2)==(mu_N0^2)*(delta^2));
33 param1 = single(Sx); param2 = single(Sy);
34 for ind1 = 1:t_length
35     t1 = t(ind1); aux = K-qq*(1-alpha(ind1));
36     fQ = K*K*alpha(ind1)*pdf('wbl',qq*K*alpha(ind1)./aux, param1, param2)./(aux.^2);
37     pdfQ(ind1,:) = fQ;
38 end
39
40 case 4    %%% lognormal
41 syms x y positive
42 [Sx, Sy] = solve(exp(x+y^2/2)==mu_N0, (exp(y^2)-1)*exp(2*x+y^2)==mu_N0^2*delta^2);
43 param1 = single(Sx); param2 = single(Sy);
44 for ind1 = 1:t_length
45     t1 = t(ind1); aux = K-qq*(1-alpha(ind1));
46     fQ = K*K*alpha(ind1)*pdf('logn',qq*K*alpha(ind1)./aux, param1, param2)./(aux.^2);
47     pdfQ(ind1,:) = fQ;
48 end
49 end
50
51 [T,Q] = meshgrid(t,0:dq:K);
52 plot3(T,Q,pdfQ','k')
53 hold on,
54 xlabel('$t$', 'interpreter','latex','fontsize',14)
55 ylabel('$q$', 'interpreter','latex','fontsize',14)
56 zlabel('$f_{N}(q;t)$', 'interpreter','latex','fontsize',14)
57 view(56,56)

```

Código MATLAB 19. [utilizado na geração das Figuras 6.1–6.2]

```

1 clear all, clc, format long
2 K = 115; mu_N0 = 2.3;
3
4 %%% dados
5 x = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16];

```



```

6 y = [2.3 7.5 10.2 16.2 37.3 59.9 72.6 81.9 89.3...
7     91.2 99.2 104.4 108.9 109.6 111.4 111.7 113.9];
8
9 n = 6;
10 for i = 1:n
11     r(i) = (1/x(i+1))*log(y(i+1)/mu_N0);
12 end
13
14 a = mean(r); c = 5/200; t = length(x); dt = 0.05;
15 tt = [0.1:dt:t]; t_length = length(tt); aux = 18;
16
17 %% momentos e intervalo de confiança de N(t) - método numérico
18 for i = 1:length(tt)
19     N2 = K/(1-exp(-a*tt(i)));
20     qq = [0:0.002:N2];
21     I = qq.*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))).^2)...
22         .*pdf('exp',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))).^2)...,mu_N0);
23     I2 = (qq.^2).*(K.^2.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))).^2)...
24         .*pdf('exp',K.*qq.*exp(-a.*tt(i))./(K-qq.*(1-exp(-a.*tt(i))).^2)...,mu_N0);
25     I3 = trapz(qq,I2);
26     ENt_Mn(i) = trapz(qq,I);
27     II = ENt_Mn(i);
28     VarNt_Mn(i) = I3-(II)^2;
29     x1(i) = (log(1-c)*K)/(log(1-c)*(1-exp(-a*tt(i)))-(1/mu_N0)*K*exp(-a*tt(i)));
30     x2(i) = (log(c)*K)/(log(c)*(1-exp(-a*tt(i)))-(1/mu_N0)*K*exp(-a*tt(i)));
31 end
32 figure
33 hold on
34 plot(tt(1:aux:t_length)+1995,ENt_Mn(1:aux:t_length),'b--','linewidth',2)
35 plot(tt(1:aux:t_length)+1995,x1(1:aux:t_length),'K--','linewidth',1.5)
36 plot(tt(1:aux:t_length)+1995,x2(1:aux:t_length),'K--','linewidth',1.5)
37
38 %% Solução Simplificada
39 mu_naive_Nt = (K*mu_N0)./(K.*exp(-a*tt) + mu_N0.*(1-exp(-a*tt)));
40 aux3 = 1;
41 plot(tt(1:aux3:t_length)+1995,mu_naive_Nt(1:aux3:t_length),'r','linewidth',1.5)
42 plot(x+1995,y,'m*','linewidth',2)
43 box off
44 fts=14;
45 xlabel('$t$','interpreter','latex','fontsize',fts)
46 ylabel('$N(t)$','interpreter','latex','fontsize',fts)
47
48 aux4 = 10;
49 figure
50 plot(tt(1:aux4:t_length)+1995,VarNt_Mn(1:aux4:t_length),'r-','linewidth',2)
51 box off
52 xlabel('$t$','interpreter','latex','fontsize',fts)
53 ylabel('$Var[N(t)]$','interpreter','latex','fontsize',fts)
54 return

```