

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CÂMPUS CURITIBA  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETROTÉCNICA  
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

JULIA BLANK STINGLIN  
LEONARDO FERRAZ FARIA  
REBECCA FERNANDES RIBEIRO

**APLICAÇÃO DE FILTROS ESTOCÁSTICOS NA ESTIMAÇÃO DO  
ELETROCARDIOGRAMA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA  
2018

JULIA BLANK STINGLIN  
LEONARDO FERRAZ FARIA  
REBECCA FERNANDES RIBEIRO

## **APLICAÇÃO DE FILTROS ESTOCÁSTICOS NA ESTIMAÇÃO DO ELETROCARDIOGRAMA**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação do curso de Engenharia de Controle e Automação do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), como requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Victor Baptista Frencl

Coorientador: Prof. Dr. Rafael Fontes Souto

CURITIBA

2018

Julia Blank Stinglin  
Leonardo Ferraz Faria  
Rebecca Fernandes Ribeiro

## Aplicação de filtros estocásticos na estimação do eletrocardiograma

Este Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação foi julgado e aprovado como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro de Controle e Automação, do curso de Engenharia de Controle e Automação do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Curitiba, 19 de novembro de 2018.

---

Prof. Paulo Sérgio Walenia, Eng.  
Coordenador de Curso  
Engenharia de Controle e Automação

---

Prof. Marcelo de Oliveira Rosa, Dr.  
Responsável pelos Trabalhos de Conclusão de Curso  
de Engenharia de Controle e Automação do DAELT

### ORIENTAÇÃO

---

Victor Baptista Frencl, Dr.  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Orientador

---

Rafael Fontes Souto, Dr.  
Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia de Brasília  
Co-Orientador

### BANCA EXAMINADORA

---

Victor Baptista Frencl, Dr.  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Cristiano Marcos Agulhari, Dr.  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

---

Rafael Fontes Souto, Dr.  
Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia de Brasília  
Co-Orientador

## **AGRADECIMENTOS**

Concluir uma engenharia em uma universidade federal é uma grande conquista, fruto de muito esforço e dedicação. A conquista não é apenas daqueles que estudam, mas também dos que estão nos “bastidores” dessa jornada. Aqueles que fornecem toda a base estrutural, emocional e financeira.

Somos gratos a nossa família por todo o apoio. Compreensão pelos momentos ausentes, paciência nas horas em que a faculdade nos exigiu ao extremo, cuidado e preocupação. Aos nossos namorados(as) e amigos, obrigado pelo carinho e atenção, principalmente quando achávamos que nada daria certo. Aos que não estão mais conosco, mas deixaram um grande legado, fica o nosso agradecimento por terem ajudado a moldar nosso caráter e terem nos inspirados.

Nosso muito obrigado também ao nosso orientador, Professor Victor Frencl, e nosso coorientador, Professor Rafael Souto, pelos ensinamentos e motivação. Por terem abraçado nossa ideia e tê-la feito evoluir, propondo desafios e adicionando conhecimentos.

Por fim, agradecemos aos professores participantes da banca, Professora Mariana Furucho e Professor Cristiano Agulhari, pela disponibilidade, opiniões, apontamentos e observações que só nos ajudaram a evoluir nosso trabalho.

Assim, agradecemos a todos que estiverem conosco durante esse período, participando direta ou indiretamente na construção desse trabalho.

## RESUMO

Faria, Leonardo Ferraz e Ribeiro, Rebecca Fernandes e Stinglin, Julia Blank. Aplicação de Filtros Estocásticos na Estimação do Eletrocardiograma. 2018. 114f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

O presente trabalho tem como objetivo introduzir os conceitos fundamentais referentes à modelagem matemática e à filtragem estocástica, aplicados na estimação do eletrocardiograma. Foram apresentadas definições importantes do sistema cardiovascular para possibilitar a compreensão do seu funcionamento. Por fim, realizou-se um estudo a respeito do filtro de Kalman e do filtro IMM. O objetivo foi a redução de ruídos indesejados no eletrocardiograma, a partir de um modelo matemático, realizando um comparativo entre essas duas ferramentas. Os resultados apresentados foram satisfatórios e abrem possibilidades para a continuidade da pesquisa.

**Palavras-chave: Eletrocardiograma, Filtragem Estocástica, Filtro de Kalman, Filtro IMM, Modelagem Matemática.**

## **ABSTRACT**

Faria, Leonardo Ferraz and Ribeiro, Rebecca Fernandes and Stinglin, Julia Blank. Application of Stochastic Filters in the Estimation of the Electrocardiogram. 2018. 114p. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

The present work has the main objective to introduce the fundamental concepts regarding mathematical modeling and stochastic filtering, applied to the estimation of the electrocardiogram. Important definitions of the cardiovascular system were presented to allow an understanding of its functioning. Finally, a study was carried out about the Kalman filter and the IMM filter. The objective was to reduce unwanted noise in the electrocardiogram based on a mathematical model, performing a comparison between these two tools. The results presented were satisfactory and opened possibilities for the continuity of this research.

**Keywords: Electrocardiogram, Stochastic Filtering, Kalman Filter, IMM filter, Mathematical Modeling.**

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Desenho esquemático de como funciona o filtro.....	12
Figura 2 – Sinal de eletrocardiograma durante 10 intervalos. ....	14
Figura 3 – Diagrama esquemático do arranjo dos componentes do sistema circulatório.....	20
Figura 4 – Estrutura do Coração e Fluxo Sanguíneo no Órgão .....	21
Figura 5 – Fibras cardíacas e o seu caráter “sincicial” .....	22
Figura 6 – Comparação entre o potencial de ação nervoso (a) e o cardíaco (b).....	24
Figura 7 – Fibras condutoras e excitatórias do coração.....	25
Figura 8 – Comparação do potencial de ação entre o nodo sinusal e a fibra muscular ventricular.....	26
Figura 9 – Transmissão do impulso cardíaco com os tempos de aparecimento em cada parte do órgão, em frações de segundo.....	28
Figura 10 – Inervação simpática e parassimpática do coração.....	29
Figura 11 – Eventos do ciclo cardíaco durante o funcionamento no lado esquerdo do coração .....	31
Figura 12 – Exemplo de onda típica que pode ser vista no eletrocardiograma.....	34
Figura 13 – Vetor médio de ventrículos parcialmente despolarizados .....	35
Figura 14 – Posição dos eletrodos para as derivações dos membros de acordo com o triângulo de Einthoven.....	36
Figura 15 – Ângulos de orientação de todas as derivações dos membros. ....	38
Figura 16 – Posicionamento dos eletrodos positivos das derivações precordiais e o plano horizontal.....	39
Figura 17 – As doze derivações do eletrocardiograma. ....	40
Figura 18 – Elementos gerais do eletrocardiograma padrão.....	42
Figura 19 – Modelo matemático desenvolvido para o intervalo PR.....	45
Figura 20 – Modelo matemático desenvolvido para o Complexo QRS. ....	46
Figura 21 – Modelo matemático desenvolvido para o Segmento ST e Onda T. ....	48
Figura 22 – Modelo matemático desenvolvido para um ciclo completo referente a primeira derivação.....	49
Figura 23 – Diagrama simplificado da estimação de estados .....	54
Figura 24 – Curva da distribuição normal.....	59

Figura 25 – Exemplo de um processo estocástico representando a temperatura medida em uma cidade. ....	61
Figura 26 – Princípio de funcionamento básico do filtro IMM .....	73
Figura 27 – Visualização do funcionamento do filtro IMM .....	75
Figura 28 – Ciclo completo referente às derivações I e II de um ECG, respectivamente. ....	82
Figura 29 – Visualização do sinal referente à derivação I – rec9. ....	83
Figura 30 – Visualização do sinal referente à derivação II modificada – 16272m. ....	84
Figura 31 – Visualização do sinal referente à derivação II modificada – 801m. ....	84
Figura 32 – Visualização do sinal referente à derivação I modificada – s00221rem. ....	86
Figura 33 – Representação visual da função cicloECG. ....	88
Figura 34 – Representação visual da função splitECG. ....	89
Figura 35 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação I – rec9. ....	92
Figura 36 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação I – rec9, detalhada. ....	92
Figura 37 – Aplicação do filtro IMM referente à derivação I – rec9. ....	93
Figura 38 – Aplicação do filtro IMM clássico referente à derivação I – rec9. ....	93
Figura 39 – Curva de probabilidades chaveadas durante a aplicação do filtro IMM referente a derivação I – rec9. ....	94
Figura 40 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação II modificada – 16272m .....	95
Figura 41 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação II modificada – 16272m em $t = 18 s$ . ....	96
Figura 42 – Aplicação do filtro IMM clássico referente à derivação II modificada – 16272m .....	96
Figura 43 – Aplicação do filtro IMM clássico referente à derivação II modificada – 16272m em $t = 18 s$ . ....	97
Figura 44 – Curvas de probabilidades chaveadas durante a aplicação do filtro IMM clássico referente à derivação II modificada – 16272m. ....	98
Figura 45 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação II modificada – 801m. ....	99
Figura 46 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação II modificada – 801m, detalhada. ....	99
Figura 47 – Aplicação do filtro IMM referente à derivação II modificada – 801m. ....	100

Figura 48 – Aplicação do filtro IMM referente à derivação II modificada – 801m, detalhada.....	101
Figura 49 – Curvas de probabilidade chaveadas durante a aplicação do filtro IMM referente à derivação II modificada – 801m. ....	102
Figura 50 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação I modificada – s00221rem. ....	103
Figura 51 – Aplicação do filtro IMM referente à derivação I modificada – s00221rem. ....	104
Figura 52 – Curvas de probabilidades chaveadas durante a aplicação do filtro IMM referente à derivação I modificada – s00221rem. ....	105

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pontos iniciais para retas do complexo QRS. ....	46
Tabela 2 – Guia de notações. ....	63
Tabela 3 – Equivalência entre os estados e medidas da estimativa estática e dinâmica. ....	67
Tabela 4 – Equivalência entre as matrizes de covariância da estimativa estática e dinâmica. ....	68
Tabela 5 – Índices utilizados para as matrizes de covariância de ruídos. ....	90
Tabela 6 – Erro quadrático médio calculado para aplicação de filtros referente à derivação I – rec9. ....	94
Tabela 7 – Erro quadrático médio calculado para aplicação de filtros referente à derivação II modificada – 16272m. ....	98
Tabela 8 – Erro quadrático médio calculado para aplicação de filtros referente à derivação II modificada – 801m. ....	102
Tabela 9 – Erro quadrático médio calculado para aplicação de filtros referente à derivação I modificada – s00221rem. ....	105

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1	TEMA.....	13
1.1.1	Delimitação do Tema.....	14
1.2	PROBLEMAS E PREMISSAS.....	15
1.3	OBJETIVOS .....	16
1.3.1	Objetivo Geral.....	16
1.3.2	Objetivos Específicos .....	16
1.4	JUSTIFICATIVA .....	16
1.5	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	17
1.6	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	18
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS DA FISIOLOGIA DO CORAÇÃO HUMANO .....</b>	<b>19</b>
2.1	VISÃO GERAL DO SISTEMA CARDIOVASCULAR .....	19
2.2	FISIOLOGIA CARDÍACA .....	20
2.2.1	Potencial de Ação Cardíaco.....	23
2.2.2	Fibras Excitatórias e de Condução .....	25
2.2.3	Atuação do Sistema Nervoso Central na Atividade Cardíaca.....	28
2.2.4	Ciclo Cardíaco .....	30
2.3	O ELETROCARDIOGRAMA.....	33
2.3.1	Características Gerais da Leitura do Eletrocardiograma .....	33
2.3.2	As Derivações e o Caráter Vetorial do Eletrocardiograma .....	34
<b>3</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA .....</b>	<b>41</b>
3.1	INTERVALO PR .....	43
3.2	COMPLEXO QRS .....	45
3.3	SEGMENTO ST, ONDA T E SEGMENTO ENTRE CICLOS.....	47
3.4	MODELO MATEMÁTICO EM ESPAÇOS DE ESTADOS.....	50
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTOS DE FILTRAGEM ESTOCÁSTICA.....</b>	<b>53</b>
4.1	DEFINIÇÕES IMPORTANTES .....	53
4.2	O FILTRO DE KALMAN .....	54
4.2.1	Histórico sobre o Filtro de Kalman .....	54
4.2.2	Funcionamento do Filtro de Kalman .....	56
4.2.3	Conceitos fundamentais da probabilidade .....	57
4.2.4	Processo Estocástico .....	60
4.2.5	O filtro de Kalman na estimação de sistemas dinâmicos lineares.....	62
4.2.5.1	Demonstração matemática da obtenção das equações de estimação estáticas .....	64
4.3	O FILTRO IMM.....	71
4.3.1	O filtro IMM na estimação de sistemas dinâmicos lineares .....	74
<b>5</b>	<b>ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS .....</b>	<b>80</b>
5.1	DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS .....	80
5.2	SINAIS SELECIONADOS .....	81
5.2.1	Sinal 1: Derivação I de paciente saudável .....	82

5.2.2	Sinal 2: Derivação II de paciente saudável .....	83
5.2.3	Sinal 3: Derivação II de paciente não saudável. ....	84
5.2.4	Sinal 4: Derivação I de paciente não saudável. ....	85
5.3	APLICAÇÃO DE FILTROS ESTOCÁSTICOS .....	86
5.4	ANÁLISE DE RESULTADOS.....	91
5.4.1	Sinal 1: Derivação I de paciente saudável .....	91
5.4.2	Sinal 2: Derivação II de paciente saudável .....	94
5.4.3	Sinal 3: Derivação II de paciente não saudável .....	98
5.4.4	Sinal 4: Derivação I de paciente não saudável .....	102
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>106</b>
	<b>REFÊRENCIAS.....</b>	<b>109</b>
	<b>APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE SEPARAÇÃO DOS CICLOS DO ECG .....</b>	<b>112</b>
	<b>APÊNDICE B – IMPLEMENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE SEPARAÇÃO DOS SEGMENTOS DO ECG .....</b>	<b>114</b>

## 1 INTRODUÇÃO

De acordo com Etten (2005), ruído pode ser definido como um sinal agregado ao sinal de interesse. Este ruído pode ser involuntariamente adicionado ao sinal desejado, por fatores externos ou internos ao sistema (máquinas, sinais biológicos, etc), fatores que muitas vezes não podem ser identificados, e que acabam interferindo e/ou perturbando o sinal desejado, o que causa distorções e até mesmo modificação nessa informação (sinal) de interesse.

Tendo em mente esse conceito de ruído é possível compreender melhor o que são filtros. Um filtro pode ser descrito, de forma simples, como algo que impede, ou atenua, a passagem de alguma coisa indesejada. O filtro de café, por exemplo, permite a passagem do líquido – uma analogia para o sinal (informação) dentro do campo da engenharia – e retém o sólido, que no contexto da engenharia seria o ruído, o sinal indesejado.

Conceituando de outra maneira, Farhang-Boroujeny (1998) define filtro como um dispositivo ou sistema que, tendo em vista algumas regras específicas, executa uma verificação e uma organização dos elementos de entrada, resultando em elementos de saída com características desejadas, como ilustra a Figura 1. Por exemplo, tendo em vista uma determinada frequência, o filtro retém sinais que estão acima ou abaixo dessa frequência.

**Figura 1 – Desenho esquemático de como funciona o filtro.**



**Fonte: os autores.**

## 1.1 TEMA

Basicamente a eletricidade biológica inata é a responsável pelo funcionamento do coração. Assim, o eletrocardiograma (ECG) é um exame que avalia essa atividade elétrica através de eletrodos sensíveis que são colocados em pontos específicos do corpo humano (braços, pernas e tórax). É uma ferramenta importante para a área médica, pela facilidade em entendê-la e utilizá-la, e também pela quantidade de anomalias que pode identificar, como infarto do miocárdio em evolução, arritmias, disritmias, entupimento de veias, entre outras. Essas alterações no quadro clínico são identificadas através de distúrbios no padrão elétrico considerado “normal” (THALER, 2013).

A eletrocardiografia, ou eletrocardiograma, surgiu graças a um conjunto de pesquisadores que se dedicaram à eletrofisiologia (estudo das propriedades elétricas das células vivas), objetivando o desenvolvimento de uma ferramenta capaz de mostrar o comportamento dessas células, e assim auxiliar em diagnósticos médicos (GILFFONI, TORRES, 2010).

Segundo Gilffoni e Torres (2010), Willem Einthoven se destacou dentre esses pesquisadores, pois desenvolveu um galvanômetro de corda que permitiu um apontamento do comportamento das células cardíacas, assim Einthoven pode ser considerado o pai do eletrocardiograma. Além disso, foi em 1902 que esse pesquisador inventou o eletrocardiógrafo. Sucessor de Einthoven, Thomas Lewis foi o professor de Frank Wilson, responsável pelo registro de potenciais elétricos em qualquer parte do corpo, iniciando os estudos das derivações unipolares que permitiram, após algum tempo, a padronização do sistema em 12 derivações.

É possível perceber que o ECG, ao longo dos anos, tornou-se vital e obrigatório dentro da área médica, identificando anomalias do coração que podem ser fatais. Tendo em vista a necessidade de um diagnóstico correto e preciso, a possível existência de ruídos afetando o ECG pode atrapalhar ou até mesmo modificar a identificação desses quadros clínicos. Com essa premissa em mente, surge uma aplicação dos filtros dentro da cardiologia: a retirada do conteúdo indesejável do sinal obtido torna-se uma necessidade no processo de análise.

Processos que facilitam os diagnósticos e se aproximam cada vez mais da automação dos procedimentos tornam-se determinantes. Na medicina, a agilidade

adquirida – sempre aliada à perfeição do diagnóstico – resulta em vidas humanas salvas.

### 1.1.1 Delimitação do Tema

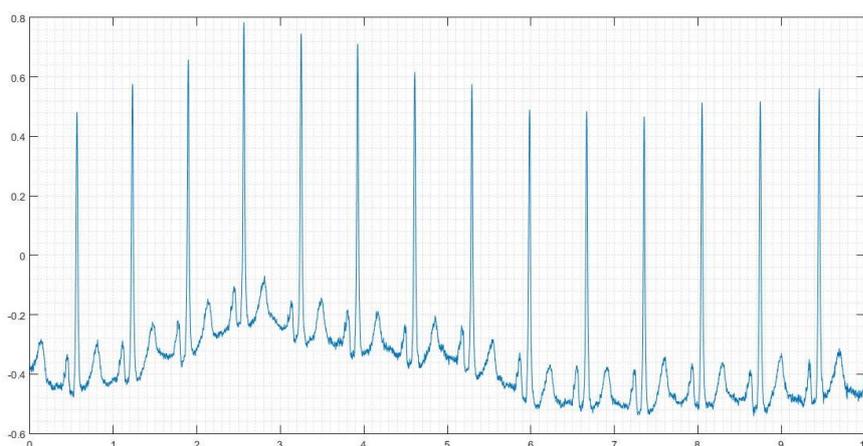
Segundo Thaler (2013), doenças como arritmia, isquemia e infarto, além de outras, podem ser determinadas a partir da avaliação do ECG. Tais diagnósticos baseiam-se na avaliação visual das características do sinal, como a amplitude da atividade elétrica registrada, a sua duração e a configuração do sinal no decorrer do tempo.

A agilidade do diagnóstico é alcançada a partir do estudo aprofundado das características do sinal que compõem sinais de ECG e da análise dos sinais medidos. Neste cenário, estimar sinais menos ruidosos e até mesmo detectar cardiopatias com o auxílio de algoritmos, passam a ser objetivos de grande interesse.

Alguns sinais de ECG estão disponíveis em bancos de dados dedicados, como o *PhysioBank*. Esse acervo contém mais de 90.000 gravações de sinais fisiológicos digitalizados, organizados em mais de 80 bases de dados, disponíveis sob o domínio público.

Utilizando uma amostra do banco de dados citado, pode-se, por exemplo, analisar um sinal emitido pela atividade elétrica do coração.

**Figura 2 – Sinal de eletrocardiograma durante 10 intervalos.**



**Fonte: *PhysioBank*.**

A Figura 2 ilustra um dos problemas na leitura de um eletrocardiograma: de acordo com Mneimneh, Yaz, e Johnson (2006), a linha de base flutuante é um dos artefatos de ruído que afetam sinais de ECG. Para pacientes saudáveis esse erro é

causado pelo movimento ou respiração do paciente, podendo introduzir medições enganosas dos recursos do sinal.

A afirmação de Thaler (2013) define que entre cada onda ou complexo há uma linha reta horizontal, uma referência que os conectam. Porém, ao analisar a Figura 2, é visível que essa referência sofre um abaulamento, dificultando a análise da onda, e, possivelmente, o diagnóstico do paciente.

A partir desses argumentos é possível definir o objetivo do trabalho: determinar, a partir de fundamentos matemáticos, uma forma de obter melhores resultados na execução da leitura dos sinais elétricos enviados pelo coração, utilizando filtragem estocástica, em especial, o filtro de Kalman e o filtro IMM, para a remoção do ruído.

## 1.2 PROBLEMAS E PREMISSAS

Apesar da existência de diversos modelos de filtros, o modelo descrito por Rudolf Emil Kalman em 1960 se mostra como uma solução computacional eficiente que pode até estimar modelos de natureza desconhecida (WELCH; BISHOP, 1997). Para a sua utilização, os autores Welch e Bishop (1997) definem algumas hipóteses a serem preenchidas: o sistema a ser estudado deve possuir comportamento linear, com dinâmica conhecida, e ser afetado por ruído do tipo branco gaussiano.

O filtro de Kalman foi, nas últimas décadas, expandido, criando alternativas viáveis em casos não lineares: seja com o filtro de Kalman estendido – quando se utiliza de um processo de linearização baseado na média e covariância (WELCH; BISHOP, 1997) – ou com o filtro de Kalman Unscented, que se faz através do uso da distribuição de probabilidade, fenômeno estatístico, para se aproximar da função desejada (JULIER; UHLMANN, 2004, p.405), ele se torna viável em casos mais complexos.

Além da aproximação não linear, pode-se notar que a onda do eletrocardiograma pode ser abordada por uma aproximação linear por partes. Essa afirmação se dá a partir da publicação de Mneimneh, Yaz, e Johnson (2006) que, ao necessitar de uma função de referência para medir o erro do sinal de saída, gera uma simulação do sinal de ECG a partir de uma função linear por partes, em que as características do sinal são representadas por triângulos suavizados com o uso de filtros digitais.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 Objetivo Geral

Esse trabalho tem por objetivo:

Aplicar a filtragem estocástica na estimação do sinal obtido por um eletrocardiograma, a fim de melhorar a precisão na sua leitura.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Para se atingir o objetivo definido foram determinados alguns objetivos específicos:

- Estudar e compreender a fisiologia do coração humano;
- Elaborar uma modelagem matemática para o sinal do ECG;
- Pesquisar os fundamentos teóricos de filtros estocásticos;
- Simular filtros estocásticos com base na modelagem matemática;
- Comparar o desempenho das simulações dos filtros;
- Identificar a melhor filtragem para o eletrocardiograma e compará-la com o eletrocardiograma sem filtro.

## 1.4 JUSTIFICATIVA

As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte no Brasil (IBGE, 2014, p. 47). A pesquisa nacional de saúde realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2014) revela que aproximadamente 6,1 milhões de brasileiros foram diagnosticados com alguma doença cardíaca e, mesmo com a redução da mortalidade, as doenças do coração ainda geram os maiores custos em internações hospitalares. Em 2012, essas doenças foram responsáveis por 17,5 milhões de mortes ao redor do mundo, quase um terço do total de mortes (Organização Mundial da Saúde, 2016).

Considerando que a filtragem estocástica é uma importante ferramenta matemática e vêm ganhando cada vez mais espaço na área de engenharia, contribuindo para avanços tecnológicos, compreendê-la e aplicá-la é essencial para futuros engenheiros.

O propósito em se aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo da graduação em Engenharia de Controle e Automação para se comparar diferentes métodos de filtragem estocástica em eletrocardiogramas, é obter ECGs com o menor nível de ruído possível, beneficiando médicos e pacientes. Assim, com um menor número de distorções, a leitura do ECG pode ser mais clara, rápida e específica, obtendo um diagnóstico mais correto e podendo, muitas vezes, salvar vidas.

Em suma, a finalidade desse trabalho de conclusão de curso é o estudo dos diferentes modelos de filtragem, com o objetivo de determinar a utilidade desses filtros e conseqüentemente a melhora na leitura de um sinal ECG.

## 1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a execução deste trabalho os procedimentos metodológicos utilizados ficaram divididos em três grandes frentes. Tendo em vista que a onda do ECG geralmente é desconhecida pelos estudantes de engenharia, a frente inicialmente acordada foi a pesquisa acerca dos aspectos medicinais que permitem a construção da onda gerada pelo coração humano. Para tal, profissionais da área médica, biomédica e engenharia biomédica foram consultados, e as referências (THALER, 2013; KOEPPEN; STANTON, 2009; GUYTON; HALL, 2006) foram utilizadas.

A segunda frente tratou da pesquisa a respeito da filtragem estocástica, mais especificamente do filtro de Kalman e suas derivações, aplicada no contexto do ECG. A pesquisa foi dada pelo estudo bibliográfico a partir das referências (WELCH, 1997; MNEIMNEH, 2006; JULIER, 2004).

Amostras de bancos de dados foram apresentadas durante os estudos bibliográficos citados acima. Essas amostras estão disponíveis sob domínio público. Com as amostras disponíveis, a terceira frente constituiu-se da implementação dos filtros no software MATLAB, permitindo o estudo matemático do comportamento do ECG.

A avaliação da implementação dos filtros selecionados foi realizada inicialmente a partir de inspeção visual. O procedimento de análise é bastante subjetivo devido à complexidade das características fisiológicas do sinal avaliado, mas essa análise se faz necessária para prevenir a distorção do diagnóstico do sinal filtrado.

Posteriormente, o cálculo do erro quadrático médio (EQM) foi utilizado para avaliação da implementação dos filtros, auxiliando na comparação de filtros aplicados.

## 1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

1. Introdução: Histórico do eletrocardiograma, delimitação do tema abordado, objetivos do trabalho e metodologia aplicada;
2. Fundamentos da fisiologia do coração humano: Teoria necessária para a compreensão do funcionamento de um coração humano saudável e da leitura de um ECG, de forma a reconhecer o sinal estudado;
3. Modelagem matemática: Aplicação dos conceitos fundamentados de forma a realizar os objetivos descritos anteriormente;
4. Fundamentos da filtragem estocástica: Apresentação dos conceitos da filtragem estocástica voltados ao presente trabalho;
5. Análise e interpretação de resultados: Comparação entre as respostas obtidas, definição dos melhores resultados;
6. Conclusão: Apresentação das dificuldades encontradas na obtenção dos resultados, sugestão de trabalhos futuros e possíveis melhorias.

## 2 FUNDAMENTOS DA FISIOLOGIA DO CORAÇÃO HUMANO

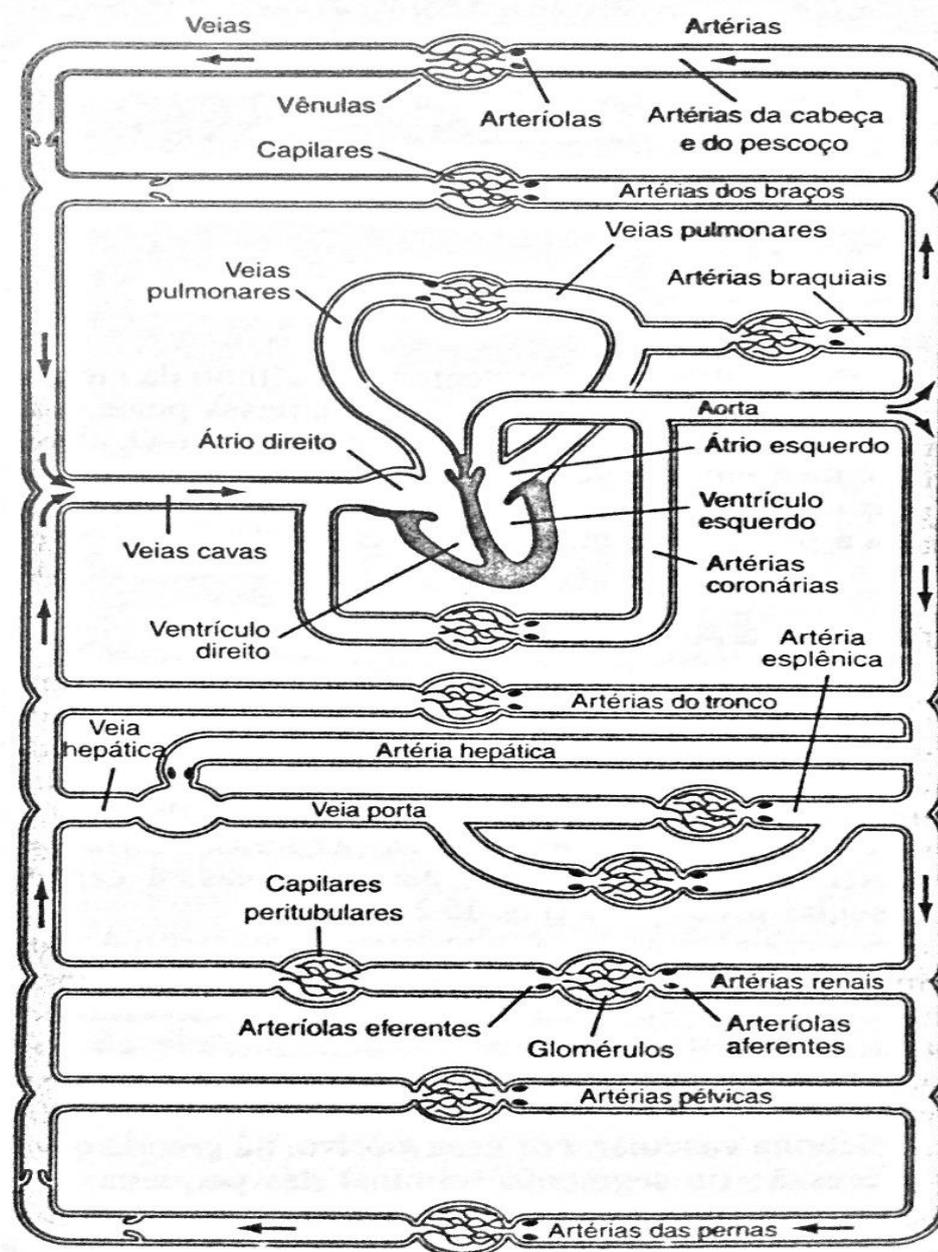
### 2.1 VISÃO GERAL DO SISTEMA CARDIOVASCULAR

O sistema cardiovascular, também chamado de sistema circulatório, participa ativamente de múltiplos processos realizados pelo corpo humano. Koeppen e Stanton (2009, p. 289) citam que, além da distribuição de substâncias essenciais e remoção de subprodutos metabólicos, esse sistema participa também em mecanismos homeostáticos, como a regulação da temperatura corporal, manutenção do balanço de fluídos e ajuste do fornecimento de oxigênio e nutrientes.

Seus componentes podem ser descritos como uma bomba (o coração), uma série de tubos, coletores e distribuidores (vasos sanguíneos) e uma extensa rede de vasos finos (capilares), que permitem o transporte rápido entre os tecidos e os canais vasculares. Os vasos sanguíneos presentes em todo o corpo são cheios por um fluido heterogêneo (sangue), essencial para os processos de transporte realizados pelo sistema (KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 289).

A Figura 3 mostra os componentes do sistema circulatório na forma de um diagrama simplificado: o coração é dividido em suas cavidades, átrios e ventrículos; vasos sanguíneos são expandidos em artérias e arteríolas, veias e vênulas. As arteríolas são definidas por Koeppen e Stanton (2009, p. 289) como vasos de resistência, válvulas que reduzem a pressão do fluxo sanguíneo e o tornam contínuo, condição ideal para a entrada de sangue nos capilares e troca de substâncias nos tecidos corporais. As vênulas são descritas por Guyton e Hall (2006, p. 161) como coletores de sangue dos capilares que vão se aglutinando até formarem as veias; além dos capilares, que contém sua subcategoria de glomérulos – um tipo específico de capilar nefrítico responsável por parte da filtração do sangue nos rins (GUYTON; HALL, 2006, p. 309).

Figura 3 – Diagrama esquemático do arranjo dos componentes do sistema circulatório.



Fonte: KOEPPEN; STANTON, 2009, p.290.

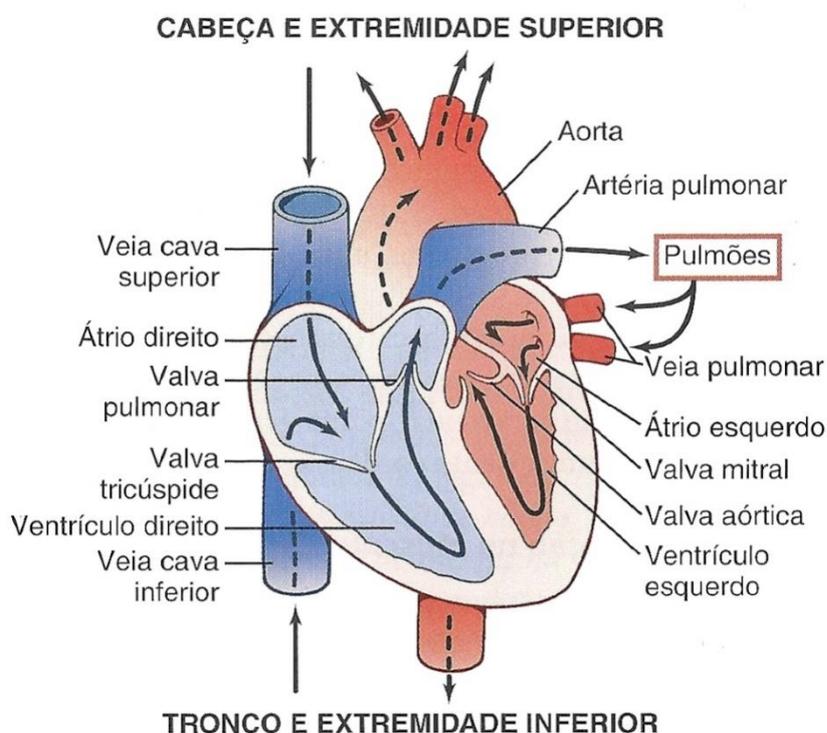
## 2.2 FISIOLÓGIA CARDÍACA

O coração, definido por Guyton e Hall (2006, p. 103), atua de forma semelhante a duas bombas: o lado direito do coração, que bombeia sangue para os pulmões, e o lado esquerdo, que bombeia sangue para os órgãos periféricos do corpo humano. Os dois lados atuam identicamente, com duas câmaras e de forma pulsátil. A câmara superior, chamada de átrio, é responsável por bombear o sangue para o interior da

câmara inferior, o ventrículo, que é responsável por circular o sangue para os vasos sanguíneos.

Dentro das cavidades cardíacas, o fluxo de fluídos é unidirecional. Essa afirmação se deve ao posicionamento do conjunto de valvas<sup>1</sup> nos processos chamados de sístole – a contração ventricular – e diástole – o relaxamento ventricular (KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 289).

**Figura 4 – Estrutura do Coração e Fluxo Sanguíneo no Órgão**



**Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 104.**

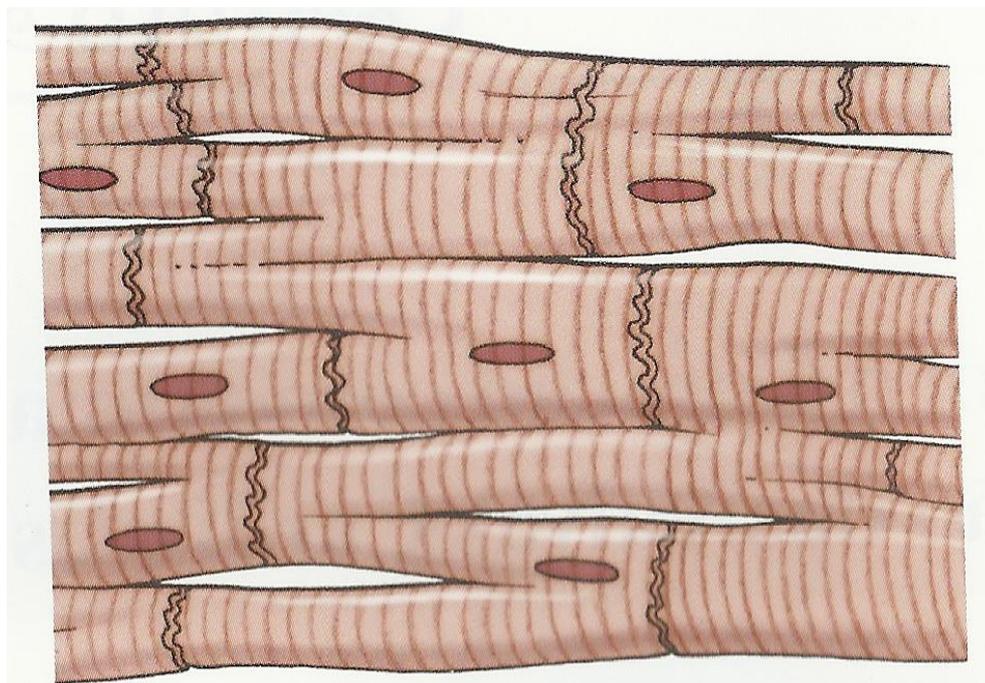
Três tipos musculares compõem o modelo cardíaco: o músculo atrial, o músculo ventricular e as fibras excitatórias e condutoras. Os tipos atrial e ventricular se assemelham aos músculos esqueléticos, mas são capazes de se manter contraídos por muito mais tempo. Já as fibras excitatórias e de condução se contraem fracamente, contudo tem a habilidade de realizar descargas elétricas rítmicas automáticas, podendo também conduzir o sinal elétrico pelo coração, representando

<sup>1</sup> A Federação Internacional das Associações de Anatomistas (FIAA) definiu em sua *Nomina Anatomica* (Nomenclatura Anatômica) que valva descreve as quatro pregas membranosas que bloqueiam o refluxo do sangue no interior do coração, enquanto válvula denomina outras estruturas vasculares, além dos componentes da valva. De acordo com a convenção então, a valva possui válvulas (ARAUJO, 2002).

o sistema excitatório que controla os batimentos rítmicos (GUYTON; HALL, 2006, p. 104).

As fibras musculares presentes no coração se dispõem, segundo Guyton e Hall (2006, p. 103-104), em forma de malha, podendo também ser chamada de treliça. Cruzando as fibras há uma série de regiões escuras, definidas como discos intercalados. Esses discos são membranas celulares, fazendo com que cada fibra existente seja, na verdade, um conjunto de células atreladas entre si, em série e em paralelo. Elas diferem de outros tecidos porque em cada disco as membranas celulares se fundem, formando conexões permeáveis que facilitam a propagação, quase livre, de íons – denominadas junções comunicantes. As células então se encontram tão bem acopladas que, quando uma delas é excitada eletricamente, o potencial se espalha para todas as outras, de acordo com a treliça interconectada. Esse conjunto multinuclear do tecido cardíaco é chamado de sincício, demonstrado na Figura 5.

**Figura 5 – Fibras cardíacas e o seu caráter “sincicial”.**



**Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 104.**

Para melhorar a eficiência do bombeamento cardíaco o coração é composto por dois sincícios: o sincício atrial forma as paredes dos átrios, enquanto o sincício ventricular forma as paredes dos ventrículos. Eles são divididos por um tecido fibroso

de característica normalmente isolante, que evita a transmissão de descargas, mas a conexão se mantém por um sistema especializado de condução, chamado feixe atrioventricular (A-V). Esse arranjo permite que os átrios se contraíam pouco antes, o que permite o enchimento completo dos ventrículos para que eles então expulsem o sangue ao sistema de forma mais eficiente (GUYTON; HALL, 2006).

### 2.2.1 Potencial de Ação Cardíaco

“As células do coração são excitáveis e geram potenciais de ação.” (KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 293). A afirmação dos autores define um processo essencial no funcionamento do coração: são os potenciais de ação que promovem a contração e o ritmo cardíaco, necessários para a manutenção vital.

Koeppen e Stanton (2009, p. 293) explicam que a origem do potencial de ação se dá quimicamente, a partir de transições iônicas no meio celular. A diferença de potencial da célula com o meio extracelular gera variações de permeabilidade da sua membrana. Essa mudança dita a intensidade do movimento dos íons para dentro e fora da célula pela abertura ou fechamento de canais específicos para cada tipo de íon – em especial os íons de sódio ( $\text{Na}^+$ ), potássio ( $\text{K}^+$ ) e cálcio ( $\text{Ca}^{++}$ ). Assim, o conjunto de íons presentes na célula altera constantemente suas propriedades e torna o ciclo contínuo.

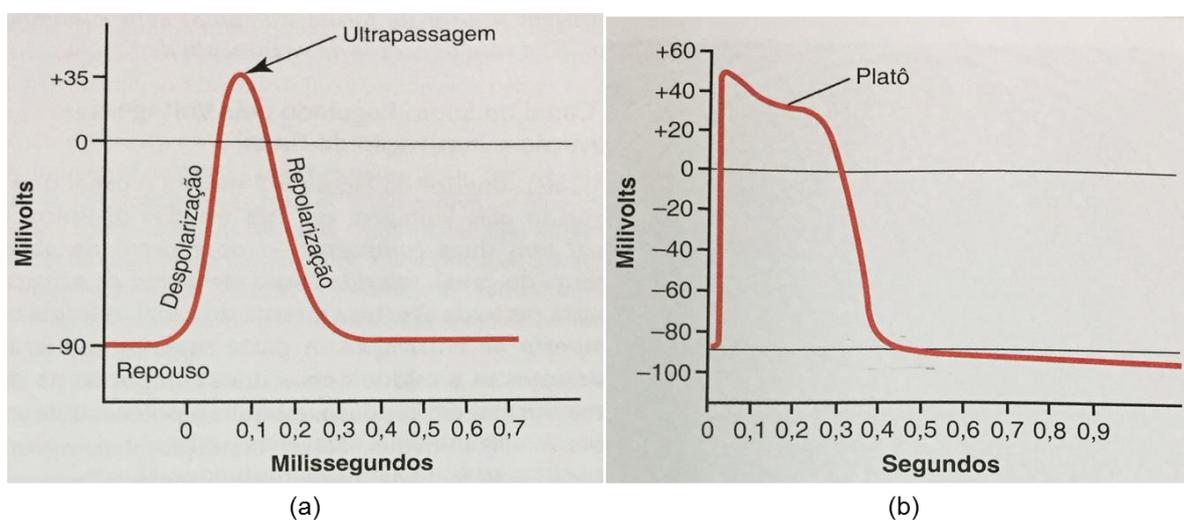
O potencial de ação cardíaco surge a partir do movimento de dois tipos de canais iônicos, de acordo com Guyton e Hall (2006, p. 105): os canais de sódio rápidos – definidos assim pelo período curto e abrupto de abertura, por poucos milésimos de segundo – e os canais de cálcio lentos, chamados também de canais de cálcio-sódio, lentos para abrir, além de se fecharem somente depois de vários décimos de segundo.

Nas células excitáveis, a abertura dos canais de sódio rápidos gera um aumento repentino do potencial intracelular, registrado graficamente nas imagens da Figura 6 como um pico. No coração, esse pico se prolonga devido à entrada de íons de sódio pelos canais de cálcio-sódio, definindo um platô de até 0,3 segundos, período no qual acontece também a contração muscular, relacionada à entrada dos íons de cálcio no processo. O fechamento dos canais de cálcio lentos gera uma alta permeabilidade da membrana para os íons de potássio que, antes presos no meio celular, são expulsos

via canais de potássio, provocando o retorno do potencial celular ao repouso (GUYTON; HALL, 2006, p. 104-105).

É importante saber que todos os tecidos excitáveis do corpo humano apresentam um período em que há incapacidade de resposta a estímulos adicionais durante o potencial de ação. Isso se deve à inatividade dos canais iônicos de sódio enquanto não há o retorno do potencial elétrico da membrana ao seu valor de repouso. Guyton e Hall (2006, p. 70) determinam esse instante como período refratário.

**Figura 6 – Comparação entre o potencial de ação nervoso (a) e o cardíaco (b).**



Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 61,p. 67.

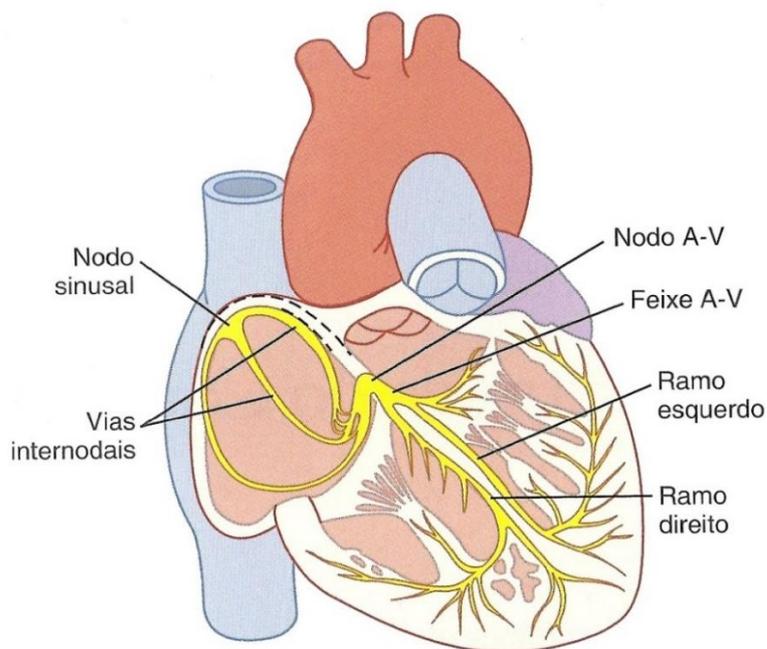
Koeppen e Stanton (2009) complementam o processo de geração do potencial de ação cardíaco, dividindo-o em cinco fases distintas. Sua representação é vista na Figura 6 e comparada com a leitura de outras células excitáveis. Começando pela fase zero, ela se apresenta como uma rápida ascensão do potencial, chamada também de despolarização; em seguida há uma queda de tensão causada pela abertura dos canais de potássio, a fase um, ou repolarização parcial, o que expulsa algumas cargas positivas intracelulares; no coração, a queda se estabiliza parcialmente em um platô, ou fase dois, devido à abertura dos canais de sódio lentos, balanceando a perda de cargas; com o fechamento dos canais de sódio lentos, a abertura dos canais de potássio aumenta rapidamente, gerando a repolarização final, ou fase três; o evento cessa quando o potencial de ação atinge a tensão de repouso, a fase quatro, encerrando o processo.

### 2.2.2 Fibras Excitatórias e de Condução

A sincronia dos movimentos realizados pelo coração se deve à transmissão dos potenciais de ação em frações de tempo ideais para o bombeamento de sangue. Apesar de a condução ser executada por todas as células cardíacas, a existência de um sistema especializado na tarefa possibilita, por exemplo, fazer com que as diferentes porções do ventrículo se contraíam quase que simultaneamente, gerando pressão com eficiência máxima no processo circulatório e compensando a lentidão no processo de difusão no meio celular (GUYTON; HALL, 2006, p. 116).

Todas as fibras excitatórias e de condução podem ser visualizadas na Figura 7. A partir dela, Guyton e Hall (2006, p. 116) descrevem suas funções básicas no processo de transmissão dos potenciais de ação: o nodo sinusal – chamado também de nodo sinoatrial ou nodo S-A – gera o impulso rítmico normal, transmitido pelas vias internodais ao nodo atrioventricular (A-V), que atrasa o impulso antes que ele chegue aos ventrículos via feixe atrioventricular, onde os ramos direito e esquerdo do feixe de fibras de Purkinje levam os sinais elétricos para todo o tecido ventricular.

**Figura 7 – Fibras condutoras e excitatórias do coração**



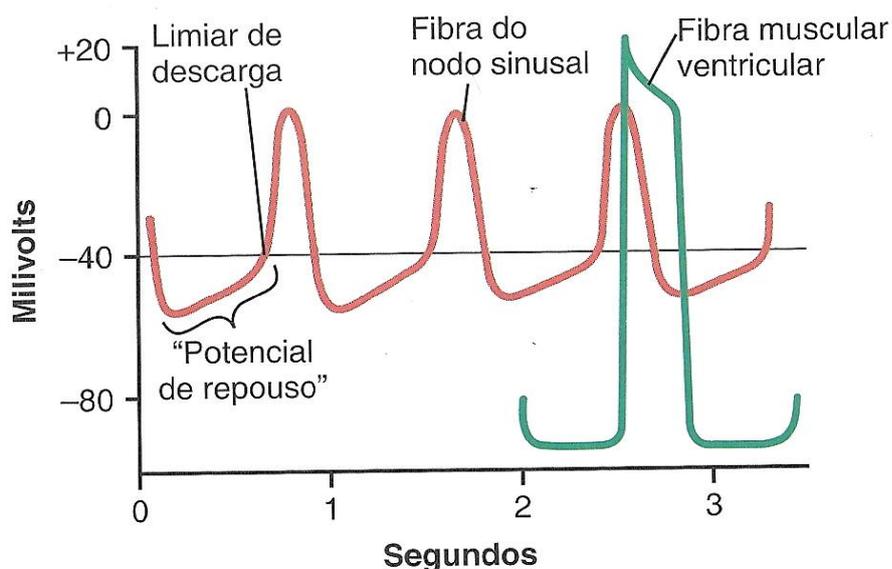
**Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 117.**

O nodo sinoatrial, localizado na parede superior do átrio direito, logo abaixo à abertura da veia cava superior, é conectado diretamente às fibras musculares atriais e, portanto, é responsável pela difusão dos potenciais de ação por toda a musculatura

do átrio. Ele é composto por fibras com capacidade de autoexcitação, sendo também responsável pelo controle, normalmente, da frequência dos batimentos de todo o coração. Nessas células, a permeabilidade natural aos íons de cálcio e sódio é maior, resultando em um potencial de repouso mais positivo que as outras células musculares, além de um aumento de tensão gradual entre dois batimentos cardíacos, um “vazamento” para o meio intracelular. Devido à maior positividade, há um bloqueio da maioria dos canais rápidos de sódio e apenas os canais de cálcio lentos podem deflagrar o potencial de ação ao alcançar o limiar de descarga, ocorrendo de forma mais lenta que nas fibras ventriculares. Portanto, a causa da autoexcitação das fibras especializadas é o “vazamento” dos íons de sódio e cálcio (GUYTON; HALL, 2006, p. 117).

Após a excitação, Guyton e Hall (2006, p. 118) descrevem a continuidade do processo semelhantemente ao ocorrido nas fibras ventriculares: o fechamento dos canais de cálcio-sódio gera um fluxo que expelle íons de potássio pelos seus referentes canais até que haja um excesso de negatividade, logo contrariado pela permeabilidade da membrana às cargas positivas de sódio e cálcio que repetem o processo ciclicamente. Todo o procedimento é graficamente registrado na Figura 8.

**Figura 8 – Comparação do potencial de ação entre o nodo sinusal e a fibra muscular ventricular.**



Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 117.

As vias internodais são responsáveis pela condução do potencial de ação por toda a massa muscular atrial até o nodo A-V. Essa é a afirmação de Guyton e Hall

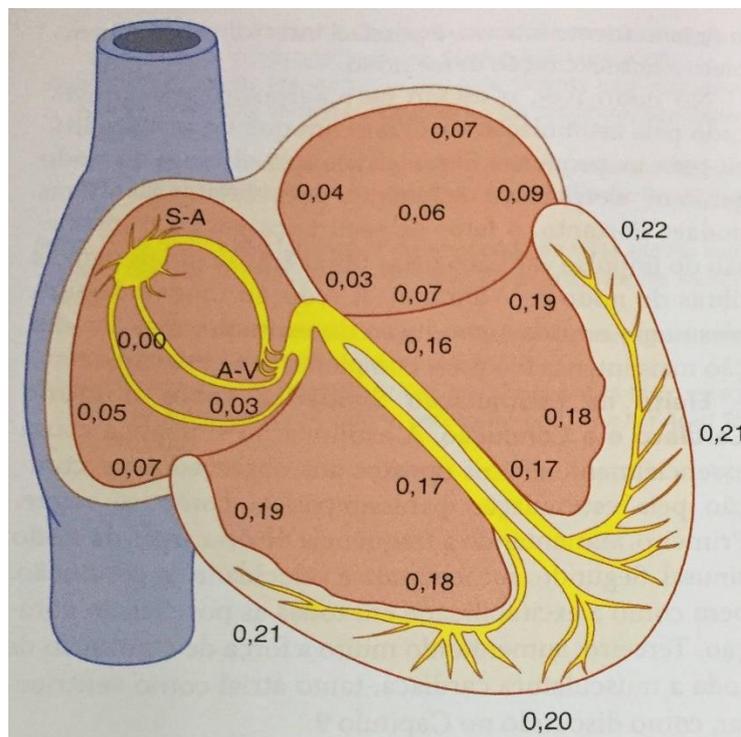
(2006, p. 118), que também propõe que a velocidade do impulso é de quase cinco vezes a do músculo cardíaco comum. São três as vias apresentadas que terminam no nodo atrioventricular – denominadas vias anterior, média e posterior – além de uma banda que cursa até o átrio esquerdo pela parte anterior do conjunto atrial, a banda interatrial anterior. Todas as vias podem ser encontradas na Figura 7, sendo que a banda interatrial anterior é representada por um pontilhado saindo do nodo S-A.

O nodo atrioventricular se encontra na parede posterior do átrio direito, interconectando as vias internodais com o feixe A-V. O atraso no impulso que chega até essa região acontece pela redução de junções comunicantes entre as vias de condução, oferecendo maior resistência para a passagem de íons entre as fibras especializadas (GUYTON; HALL, 2006, p. 119).

A funcionalidade do feixe atrioventricular é como um bloqueio unidirecional para os potenciais de ação. O longo período refratário de algumas de suas células acaba por bloquear certos impulsos em instantes anormais na frequência cardíaca, evitando não somente o retorno de sinais elétricos para o nodo A-V, mas também a entrada do potencial de ação nos ventrículos durante o tempo de enchimento. Em casos normais, essa é a única via de condução entre as duas partes do coração, devido à separação delas por uma barreira fibrosa contínua. A responsabilidade desse feixe pelo sentido único dos impulsos, indo dos átrios para os ventrículos, é justificada porque o transporte inverso do sinal geraria arritmias graves do músculo cardíaco (GUYTON; HALL, 2006, p. 119; KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 307).

Na continuidade do feixe A-V, fibras de condução extremamente rápida se espalham pelos ventrículos. Essas, chamadas por Guyton e Hall (2006, p. 119) de fibras de Purkinje, são as maiores fibras cardíacas e podem atingir velocidades de transporte do potencial de ação até quatro vezes maiores que as vias atriais especializadas, ou 150 vezes mais que as fibras do nodo A-V. Esse fato é justificado pela altíssima permeabilidade das junções comunicantes das fibras desse tipo. Devido também à alta ramificação das fibras por todo o conjunto ventricular, o tempo total de transmissão do potencial de ação pelas fibras de Purkinje é de 0,03 segundos, em média. Pode-se dizer que com esse valor a transmissão elétrica pelos ventrículos é quase imediata.

**Figura 9 – Transmissão do impulso cardíaco com os tempos de aparecimento em cada parte do órgão, em frações de segundo.**



Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 120.

Vale notar que as fibras do nodo A-V e as fibras de Purkinje também tem capacidade de autoexcitação. O que acontece, porém, de acordo com Guyton e Hall (2006, p. 120), é que a frequência normal do nodo sinoatrial é maior que a dos outros elementos – o nodo S-A envia impulsos entre 70 a 80 vezes por minuto, enquanto o nodo atrioventricular tem frequência de 40 a 60 vezes por minuto e as fibras de Purkinje de 15 a 40 vezes por minuto. A cada condução as células dos outros elementos se descarregam, evitando assim que elas se excitam autonomamente.

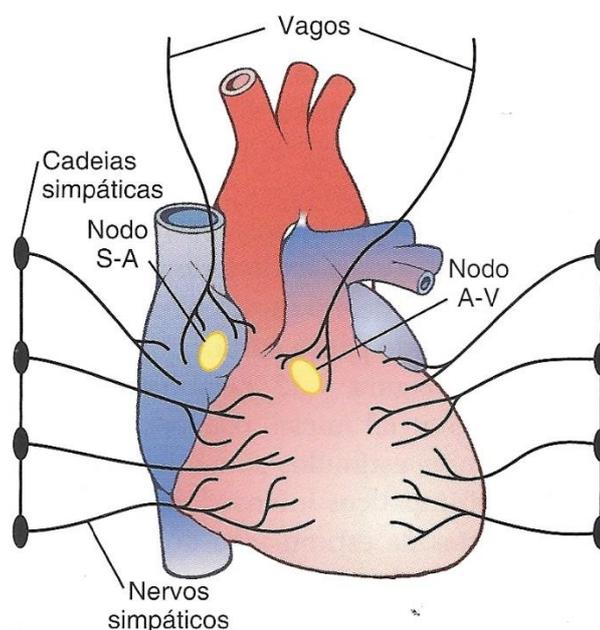
### 2.2.3 Atuação do Sistema Nervoso Central na Atividade Cardíaca

A porção do sistema nervoso central responsável pelo controle da maior parte das funções viscerais do organismo é denominada sistema nervoso autônomo. Essa é a afirmação dos autores Guyton e Hall (2006, p. 748), que prosseguem explicando o funcionamento desse sistema: tanto a partir de sinais sensoriais subconscientes – chamados também de reflexos – quanto diretamente a partir de centros de controle autônomo, estímulos são enviados aos órgãos para o controle das suas atividades.

De acordo com suas características, duas subdivisões podem ser definidas: o sistema nervoso simpático e o sistema nervoso parassimpático. O sistema nervoso simpático tem origem na medula espinhal juntamente com os nervos espinhais, de onde ele se projeta até os tecidos e órgãos estimulados por meio dos nervos simpáticos. Já o sistema nervoso parassimpático surge através dos nervos cranianos, em especial nos nervos vagos, passando então para todas as regiões torácicas e abdominais (GUYTON; HALL, 2006, p. 750).

O funcionamento desses sistemas autônomos é semelhante: a secreção de substâncias transmissoras sinápticas em receptores específicos nas células efectoras gera efeitos como a alteração da permeabilidade da membrana celular ou a alteração de enzimas intracelulares que iniciam processos determinados pela sua natureza específica. Curiosamente, tanto a estimulação simpática quanto a parassimpática causam efeitos excitatórios e inibitórios em diferentes órgãos e, portanto, não podem ser totalmente generalizados. Deve-se considerar que os dois sistemas agem antagonicamente em alguns casos e a maioria dos órgãos é controlada predominantemente por um ou outro sistema (GUYTON; HALL, 2006, p. 750-753).

**Figura 10 – Inervação simpática e parassimpática do coração**



**Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 113.**

A Figura 10 apresenta as inervações autônomas que chegam ao coração. Voltando o foco desse sistema para o do presente trabalho, o coração é excitado pelo estímulo dos nervos simpáticos, podendo, por exemplo, aumentar a frequência

cardíaca em adultos de seu valor normal – cerca de 70 batimentos por minuto (bpm) – até 200 bpm ou 250 bpm em casos raros, além de aumentar também a força de contração cardíaca até o dobro da normal. Já o estímulo parassimpático com sua forte ação inibitória pode até parar os batimentos cardíacos por alguns segundos, mas o coração geralmente volta a bater em seguida num ritmo lento – entre 20 bpm e 40 bpm – enquanto houver o estímulo. Em paralelo, a força de contração miocárdica pode ser reduzida para até 70% do normal.

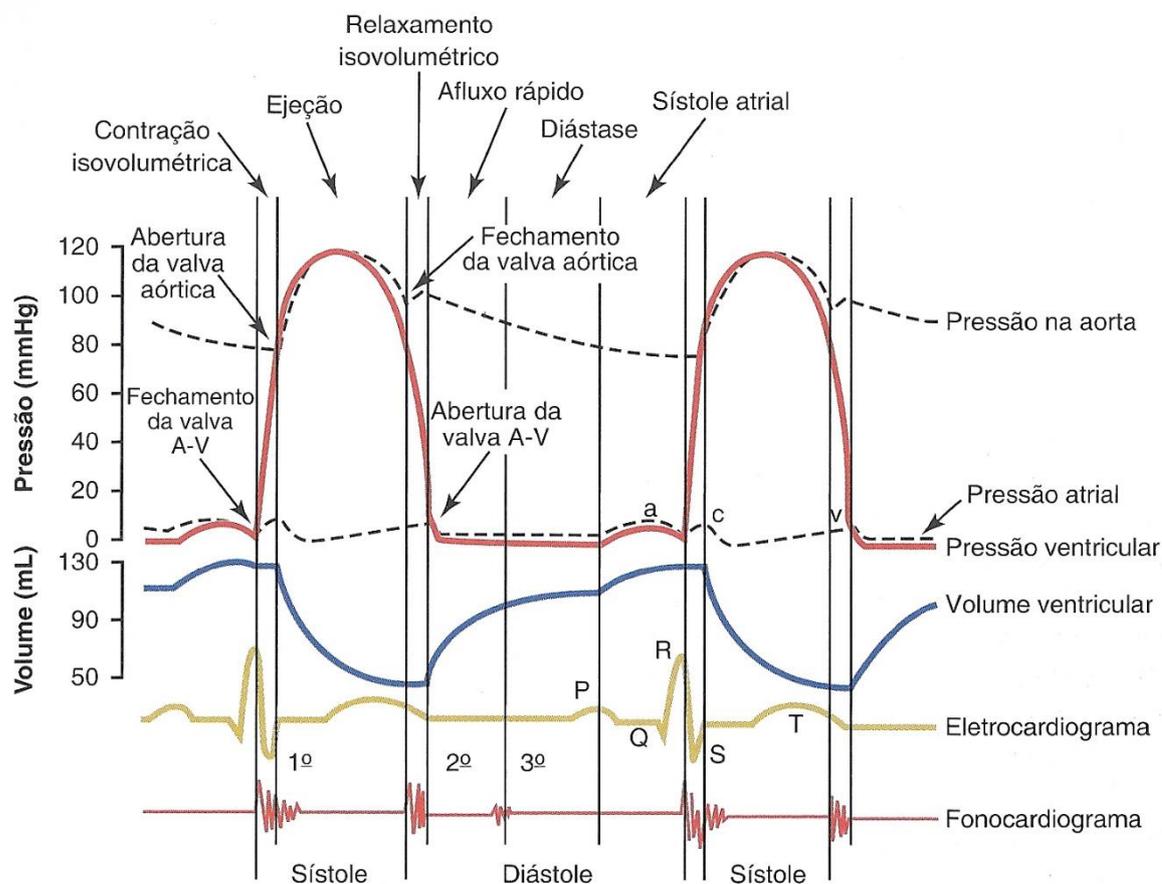
Guyton e Hall (2006, p. 754) resumem então a resposta aos estímulos autônomos no coração:

[...] A estimulação simpática aumenta a eficácia do coração como bomba, da forma que é necessária durante exercício pesado, enquanto a estimulação parassimpática diminui o bombeamento do coração, permitindo que ele descanse entre períodos de atividade exaustiva.

#### 2.2.4 Ciclo Cardíaco

Guyton e Hall (2006, p. 106) definem como ciclo cardíaco os eventos que ocorrem no coração entre um batimento e o início do outro. Inicialmente o processo é dividido em diástole, período no qual há o relaxamento da musculatura cardíaca e o órgão se enche de sangue, seguido pela sístole, o período de contração muscular, onde há a propulsão de sangue pelo sistema vascular. É possível perceber que além dos eventos descritos, vários outros acontecem dentro da função cardíaca, como se vê na Figura 11.

**Figura 11 – Eventos do ciclo cardíaco durante o funcionamento no lado esquerdo do coração**



Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 107.

Na Figura 11 Guyton e Hall (2006, p. 106-107) descrevem algumas das diferentes leituras que podem ser feitas sobre o coração. Todas as ondas são relacionadas ao ciclo cardíaco completo do lado esquerdo do coração saudável, sendo que, as três primeiras legendas à direita da figura, de cima para baixo, identificam as variações de pressão na artéria aorta, no átrio e no ventrículo, respectivamente. A quarta curva introduz as variações de volume no ventrículo durante o ciclo, enquanto a quinta mostra o eletrocardiograma e a sexta um fonocardiograma, que registra os sons produzidos pelo coração – especialmente suas valvas – durante o bombeamento.

É preciso reforçar que a Figura 11 apresenta gráficos para uma melhor compreensão do ciclo cardíaco de acordo com os instrumentos e métodos aplicados. No presente trabalho, o foco posterior será mantido no eletrocardiograma, um método não invasivo de leitura que se utiliza de eletrodos na superfície do corpo do paciente

para análise da variação de tensão no coração durante determinados intervalos de tempo (KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 311). Esse método será definido com maior detalhamento na seção 2.3 do trabalho.

Normalmente, o sangue flui de forma contínua no caminho a partir das grandes veias até os átrios: desse sangue, cerca de 80% flui diretamente até os ventrículos antes mesmo da contração atrial. Os átrios, portanto, se responsabilizam pelo bombeamento aos ventrículos de no máximo 20% do sangue que passa por eles, assumindo a posição de bomba de escorva, termo utilizado por Guyton e Hall (2006, p. 107), cujo significado faz referência aos artefatos que dão início ao processo de explosão em uma arma (MICHAELIS, 2018), de forma análoga a função dos átrios para os ventrículos. É curioso notar também que o coração pode continuar operando sem o funcionamento dos átrios em condições de repouso, devido à capacidade do coração de bombear até 400% a mais de sangue por causa do aumento da sua necessidade em situações como a prática de exercícios físicos.

O período de enchimento dos ventrículos descrito anteriormente, antes da contração atrial, é chamado de período de enchimento rápido ventricular, que corresponde aproximadamente ao primeiro terço da diástole. Nos outros dois terços, ocorre o enchimento também dos átrios e a contração atrial, respectivamente (GUYTON; HALL, 2006, p. 108).

Já na sístole, imediatamente após o início da contração ventricular, o aumento da pressão causa o fechamento passivo das valvas atrioventriculares (mitral e tricúspide) – responsáveis por evitar o refluxo de sangue dos ventrículos para os átrios – mas há um atraso até a abertura das valvas semilunares (aórtica e pulmonar) – responsáveis por conter o refluxo da circulação vascular aos ventrículos – o que gera um período de contração muscular sem esvaziamento da cavidade, denominado contração isovolumétrica ou isométrica (GUYTON; HALL, 2006, p. 108-109).

Com a abertura das valvas semilunares devido à pressão interna dos ventrículos, cerca de 70% do sangue contido dentro dos ventrículos são expulsos no primeiro terço do período de ejeção, determinando assim o período de ejeção rápida e, nos momentos posteriores, o período de ejeção lenta (GUYTON; HALL, 2006, p. 108).

Devido ao relaxamento repentino do músculo dos ventrículos ao final da sístole, a diferença de pressão vascular e intraventricular aumenta, causando o retrocesso de

parte do sangue aos ventrículos, movimento barrado pelo fechamento das valvas aórtica e pulmonar. Até que as válvulas A-V se abram novamente há uma sustentação do volume enquanto ainda ocorre o relaxamento ventricular, originando o período de relaxamento isovolumétrico ou isométrico. Após a abertura das valvas mitral e tricúspide inicia-se um novo ciclo cardíaco (GUYTON; HALL, 2006, p. 108).

## 2.3 O ELETROCARDIOGRAMA

Quando um potencial de ação passa através do coração, uma corrente elétrica se propaga para os tecidos ao seu redor, até a superfície do corpo. Ao posicionar um par de eletrodos sobre a pele, é possível registrar as variações do potencial elétrico relacionado a essa corrente. Esse registro é o eletrocardiograma (GUYTON; HALL, 2006, p. 123).

Koeppen e Stanton (2009, p. 311) descrevem as várias utilidades da eletrocardiografia para o médico na percepção do quadro do paciente: é possível analisar a orientação anatômica do coração, o tamanho relativo das suas câmaras, os distúrbios do ritmo cardíaco, a extensão e localização dos possíveis danos sofridos pelo órgão, o efeito da alteração da concentração eletrolítica e também a influência de fármacos.

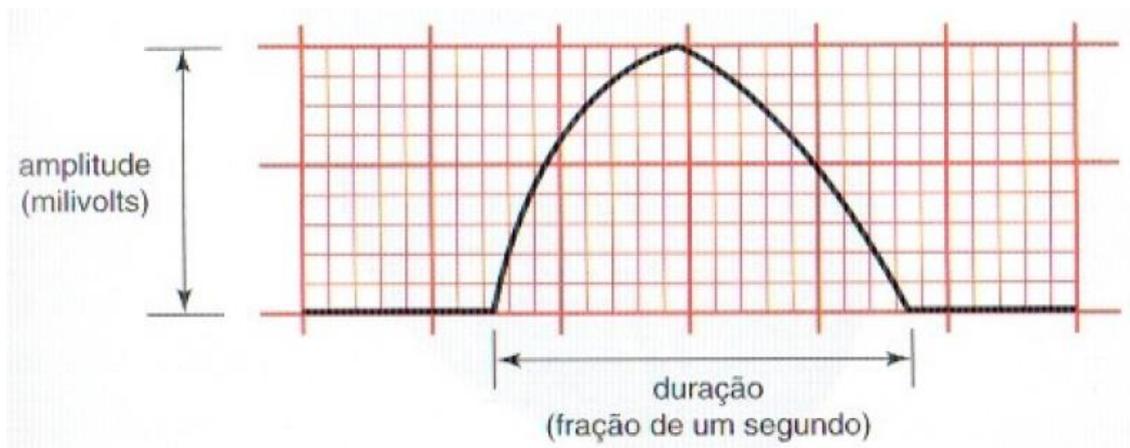
### 2.3.1 Características Gerais da Leitura do Eletrocardiógrafo

Thaler (2013, p. 29) define as três características principais do sinal lido pelo eletrocardiógrafo, semelhantes a qualquer outro tipo de onda:

- Duração, medida em frações de segundos (ms), no eixo horizontal;
- Amplitude, medida em milivolts (mV), no eixo vertical;
- Configuração, um critério subjetivo, referente à forma e ao aspecto de uma onda.

O registro do ECG é padronizado para a sua análise adequada. Na Figura 12 percebe-se que há uma grade quadriculada, com linhas finas a cada milímetro e espessas em intervalos de cinco milímetros. Cada espaço de um milímetro representa 40 milissegundos no eixo horizontal e 0,1 milivolts no eixo vertical (THALER, 2013, p. 29-30).

**Figura 12 – Exemplo de onda típica que pode ser vista no eletrocardiograma**



Fonte: THALER, 2013, p. 29.

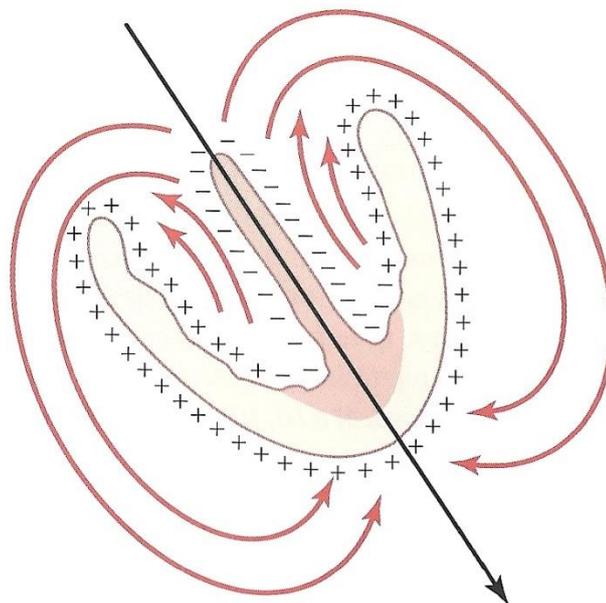
### 2.3.2 As Derivações e o Caráter Vetorial do Eletrocardiograma

A alta complexidade do coração exige uma série de informações para entender seu funcionamento de forma completa. É importante lembrar que ele é um órgão tridimensional e que sua atividade elétrica deve ser compreendida também em três dimensões (THALER, 2013, p. 51).

“Os diversos eventos elétricos que existem no coração em dado momento podem ser representados como um vetor tridimensional.” (KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 311). Essa citação é confirmada por Guyton e Hall (2006, p. 131), que descrevem o vetor instantâneo resultante como uma seta que aponta para a direção do potencial elétrico gerado pelo fluxo de corrente, definida por convenção com sentido voltado para a seção positiva e comprimento proporcional à tensão.

A Figura 13 apresenta um exemplo de vetor resultante durante a despolarização na cavidade ventricular e de parte das paredes endocárdicas nos ventrículos, o qual foi projetado em um plano perpendicular à secção visível, de forma a ser representado em duas dimensões, num dado instante de tempo. As setas elípticas representam o caminho da corrente indo em direção às áreas polarizadas, determinando o vetor instantâneo médio do potencial. Ele é traçado no meio dos ventrículos, com sentido para baixo devido à parte inferior mais positiva, e tamanho proporcional à diferença de potencial.

**Figura 13 – Vetor médio de ventrículos parcialmente despolarizados**



**Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 132.**

No eletrocardiograma, descrever a atividade elétrica no coração é uma tarefa realizada por um conjunto de eletrodos posicionados na superfície do corpo com o objetivo de orientar o conjunto de projeções ortogonais do vetor tridimensional cardíaco. Esse processo simplifica a leitura do ECG, visto que apenas a sua magnitude - a diferença de potencial – é registrada graficamente ao passar do tempo (KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 311).

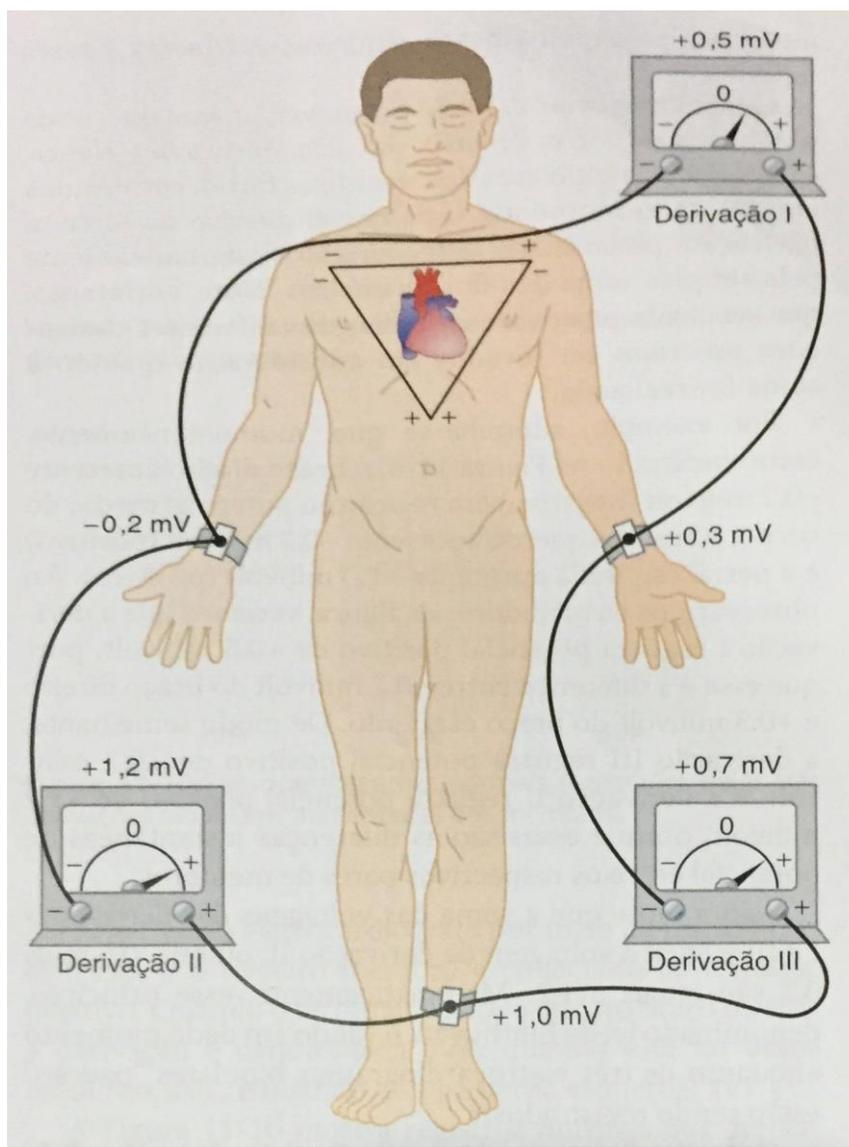
Thaler (2013, p. 51) chama os agrupamentos de eletrodos de derivações, sendo que cada uma tem o objetivo particular de aumentar a sensibilidade da leitura da atividade cardíaca em certas regiões à custa de outras.

São doze as derivações necessárias para que o eletrocardiograma possa extrair as informações necessárias para o diagnóstico do paciente, sendo o posicionamento dos eletrodos na superfície do corpo determinado por convenção, a partir de um protocolo-padrão para a realização do exame, visto que qualquer diferença de localização pode alterar o registro efetuado (THALER, 2013, p. 50).

Segundo Koeppen e Stanton (2009, p. 312), no sistema de derivações, desenvolvido há cerca de um século atrás, o vetor cardíaco resultante tem sua origem definida no meio de um triângulo equilátero – posição equivalente também ao meio do coração – cujos ápices se localizam nos ombros e na região púbica. Essa figura, chamada triângulo de Einthoven, é orientada no plano frontal do corpo humano,

definindo a referência vertical de projeção ortogonal do vetor tridimensional. Thaler (2013, p. 50-51) explica que a partir do plano frontal é possível descrever um modelo de organização dos planos horizontais em ângulos de orientação – chamados também de eixos por Guyton e Hall (2006, p. 132) – a partir da sua sobreposição por um círculo completo.

**Figura 14 – Posição dos eletrodos para as derivações dos membros de acordo com o triângulo de Einthoven**



Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p. 127.

Seguindo a referência do plano vertical no triângulo de Einthoven são apresentadas as seis derivações dos membros. Divididas em derivações padrão e aumentadas, elas são obtidas a partir de três eletrodos – um em cada antebraço e um

no tornozelo, comumente o esquerdo, como mostra a Figura 14. Tais membros são utilizados por conveniência, visto que são simples extensões das posições definidas anteriormente por Einthoven (KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 312).

As derivações-padrão dos membros são definidas por Thaler (2013, p. 52) da seguinte maneira:

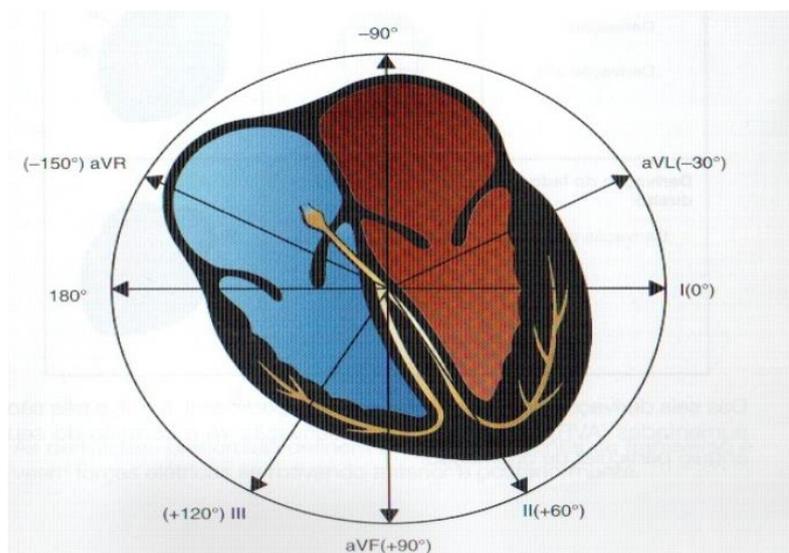
- Derivação I: é gerada tomando o braço direito como negativo e o braço esquerdo como positivo. Portanto, seu ângulo de orientação é  $0^{\circ}$ ;
- Derivação II: é gerada tomando o braço direito como negativo e as pernas como positivas. Portanto, seu ângulo de orientação é  $+60^{\circ}$ ;
- Derivação III: é gerada tomando o braço esquerdo como negativo e as pernas como positivas. Portanto, seu ângulo de orientação é  $+120^{\circ}$ .

As derivações aumentadas são chamadas dessa forma porque o eletrocardiógrafo precisa amplificar o seu traçado para obter um registro adequado. Thaler (2013, p. 52) explica que elas são criadas tomando como referência negativa a média entre dois dos eletrodos nos membros e o eletrodo restante como positivo, sendo nomeadas da forma a seguir:

- Derivação aVL: é gerada tomando o braço esquerdo como positivo e os outros membros negativos. Portanto, seu ângulo de orientação é  $-30^{\circ}$ ;
- Derivação aVR: é gerada tomando o braço direito como positivo e os outros membros negativos. Portanto, seu ângulo de orientação é  $-150^{\circ}$ ;
- Derivação aVF: é gerada tomando as pernas como positivas e os outros membros negativos. Portanto, seu ângulo de orientação é  $+90^{\circ}$ ;

Todas as derivações-padrão podem ser visualizadas na Figura 15.

**Figura 15 – Ângulos de orientação de todas as derivações dos membros.**



**Fonte: THALER, 2013, p. 53.**

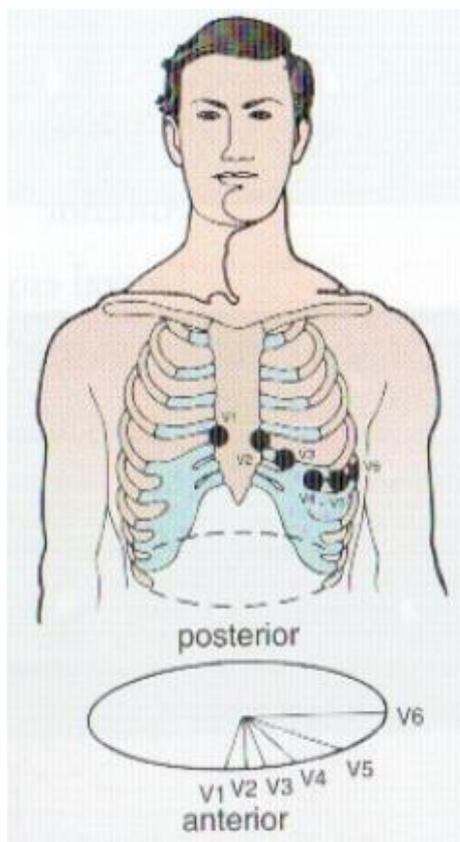
Utilizando-se agora de um plano horizontal, perpendicular ao triângulo de Einthoven, como referência, surgem as derivações precordiais ou torácicas: nelas, seis eletrodos são colocados na superfície do corpo ao redor do coração, sendo que para cada derivação um desses eletrodos é definido como positivo, e em todas elas a referência negativa é dada pelo ponto médio do conjunto de eletrodos nos membros, que se aproxima de um potencial relativo ao ponto central do coração (GUYTON; HALL, 2006, p. 129; KOEPPEN; STANTON, 2009, p. 313; THALER, 2013, p. 55).

Thaler (2013, p. 55) apresenta cada uma das derivações precordiais, de acordo com a localização do eletrodo positivo:

- Derivação V1: o eletrodo é posicionado no quarto espaço intercostal, à direita do osso esterno;
- Derivação V2: o eletrodo é posicionado no quarto espaço intercostal, à esquerda do osso esterno;
- Derivação V3: o eletrodo é posicionado entre as derivações V2 e V4;
- Derivação V4: o eletrodo é posicionado no quinto espaço intercostal, na linha mesoclavicular;
- Derivação V5: o eletrodo é posicionado entre as derivações V4 e V6;
- Derivação V6: o eletrodo é posicionado no quinto espaço intercostal, na linha axilar média.

As derivações torácicas podem ser vistas conforme a Figura 16.

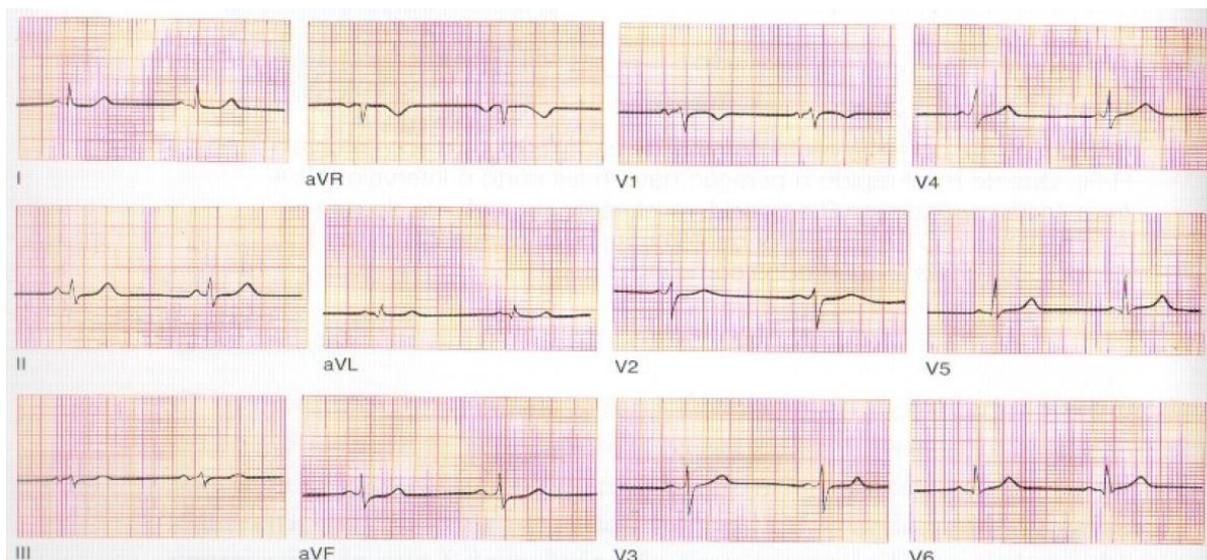
**Figura 16 – Posicionamento dos eletrodos positivos das derivações precordiais e o plano horizontal.**



**Fonte: THALER, 2013, p. 55.**

Com todas as derivações descritas, Thaler (2013) determina quais as regiões do coração mais sensíveis aos agrupamentos das derivações. A parte anterior do coração é mais sensível às derivações V1 e V2 – posicionadas diretamente acima do ventrículo direito – V3 e V4 – posicionadas sobre o septo intraventricular; as derivações sensíveis à lateral esquerda do coração são a V5 e a V6 – posicionadas sobre o ventrículo esquerdo – I e aVL; as derivações II, III e aVF são sensíveis a parte inferior do coração; a derivação aVR não é agrupada. A Figura 17 apresenta brevemente todas as derivações obtidas a partir do ECG.

**Figura 17 – As doze derivações do eletrocardiograma.**



**Fonte: THALER, 2013, p. 48.**

A quantidade de ondas apresentadas e suas diferenças de configuração estendem significativamente o processo de modelagem do sinal ideal, o que foge do escopo do trabalho. Selecionar uma quantidade menor de derivações resulta em um projeto mais direcionado à obtenção de um sinal de saída preciso, que melhore o diagnóstico de doenças sem prejudicar o contexto da análise do profissional capaz.

Os conhecimentos adquiridos neste capítulo formam a base para compreender o funcionamento do coração e a sua representação inicial pelo ECG. O aprofundamento da descrição dos seus componentes será realizado durante a explicação do processo de modelagem dos valores de entrada, junto à construção do raciocínio em busca do modelo ideal.

### 3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Um modelo de um sistema real qualquer deve ser capaz de descrever matematicamente e demonstrar o comportamento deste sistema. A modelagem matemática de sistemas reais pode ser desenvolvida a partir de leis físicas que regem comportamentos previamente conhecidos, unidos a possíveis perturbações (ruídos) identificadas por distúrbios e imprecisões no modelo. O modelo matemático deve apresentar o comportamento do sistema de maneira precisa e deve incluir as perturbações identificadas adequadamente, tendo em vista que o modelo não consegue representar perfeitamente o comportamento do fenômeno em estudo (FRENCL, 2010).

O modelo matemático desenvolvido para este trabalho foi baseado na fisiologia do coração humano, apresentada detalhadamente no Capítulo 2. A partir dos conhecimentos sobre a forma de condução da tensão nas células cardíacas e da obtenção das leituras emitidas pelo coração na superfície do corpo, foi possível compreender como os eventos descritos culminam na produção das ondas e linhas básicas do eletrocardiograma padrão (THALER, 2013, p. 31).

As ondas que aparecem no ECG refletem primariamente a atividade elétrica das células cardíacas, sendo que a atividade das células excitatórias e de condução são pouco vistas em situações normais, pois suas atividades não devem gerar tensões suficientes para serem registradas na superfície do corpo humano (THALER, 2013, p. 29).

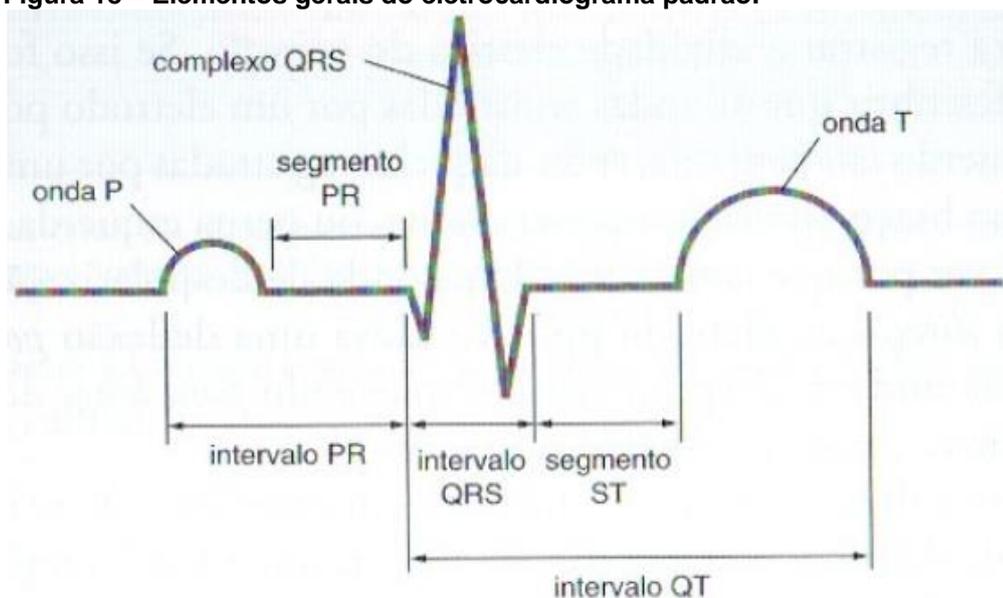
De acordo com Guyton e Hall (2006, p. 123), existem três componentes padrão de qualquer onda registrada no ECG: a onda P, o complexo QRS e a onda T. A onda P é produzida pelos potenciais elétricos gerados quando os átrios se despolarizam, logo antes do início da contração atrial. O complexo QRS é gerado durante a despolarização ventricular antes da sua contração. Sabe-se também que esse complexo pode apresentar três ondas distintas (Q, R e S), mas não sempre. A onda T é criada a partir da repolarização dos ventrículos.

Existem também processos que não são vistos normalmente no eletrocardiograma. Por exemplo, a repolarização atrial acontece junto à leitura do complexo QRS, que encobre o evento nos átrios, visto que o potencial gerado na despolarização ventricular é muito maior devido à sua massa. Além disso, é

importante perceber que apenas os eventos em que há transporte de corrente até a superfície são registrados pelo ECG, o que exclui momentos de polarização ou despolarização completa da musculatura cardíaca (GUYTON; HALL, 2006, p. 125).

Entre cada um dos componentes do eletrocardiograma há um segmento em que não há diferença de potencial registrada nas derivações. Unidos a um dos elementos padrão do ECG, estes se chamam intervalos e são nomeados especificamente. O intervalo PR compreende o início da onda P até o início do complexo QRS. Ele recebe esse nome porque é comum que a onda Q esteja ausente. O intervalo QRS descreve apenas o próprio complexo QRS, sem nenhum segmento agrupado. O intervalo QT engloba o complexo QRS, a onda T e o segmento entre os componentes. A Figura 18 compreende todas as ondas, segmentos e intervalos do ECG (GUYTON; HALL, 2006, p. 125; THALER, 2013, p. 41).

**Figura 18 – Elementos gerais do eletrocardiograma padrão.**



**Fonte: THALER, 2013, p. 43.**

Conforme apresentado no Capítulo 2, as três características gerais do sinal lido pelo eletrocardiógrafo são: duração, medida em milissegundos (ms) no eixo horizontal, amplitude, medida em milivolts (mV) no eixo vertical e configuração, apresentada subjetivamente para cada seção do eletrocardiograma. Para a modelagem matemática desenvolvida neste trabalho, a derivação I do sinal ECG foi selecionada como padrão, visto que esta derivação possui o comportamento bem definido para casos em que o ângulo de orientação é variado.

Buscando simplificar o desenvolvimento do modelo matemático, definiu-se que o sinal ECG seria particionado inicialmente nos seguintes trechos: intervalo PR, complexo QRS, segmento ST, a onda T e segmento entre ciclos. Definiu-se também que o ciclo cardíaco seria representado a partir do início da onda P até o início do próximo ciclo. A modelagem matemática é possível a partir da análise dos parâmetros apresentados por Thaler (2013, p. 60), e na sequência serão apresentados os parâmetros adotados para o modelo matemático particionado desenvolvido, bem como as representações gráficas alcançadas para cada componente do sinal ECG.

### 3.1 INTERVALO PR

O intervalo PR tem duração total de aproximadamente 200 *ms* (THALER, 2013) e é composto pela onda P e o segmento PR, conforme pôde ser observado na Figura 18. Este intervalo representa o início da despolarização atrial até o início da despolarização ventricular. A despolarização atrial é representada pela onda P, em que a diferença de potencial normalmente gerada pelos átrios é caracterizada por baixa amplitude e configuração semelhante à parte positiva de uma cossenoide.

A despolarização atrial pode durar até 80 *ms* e a diferença de potencial máxima alcançada nesta onda chega a 0,25 *mV* (THALER, 2013). O segmento PR por sua vez, indica o tempo em que ocorre a despolarização atrial até o início da despolarização ventricular. Geralmente o segmento é horizontal e ocorre ao longo da linha de base do ECG.

A parametrização da onda P foi desenvolvida adotando-se, como padrão, o intervalo de tempo em que ocorre a amplitude máxima alcançada pela onda e os ângulos final e inicial referentes ao argumento do cosseno, função que representa a configuração da onda. A partir destes parâmetros, é possível definir a onda P como um trecho de uma cossenoide ponderada pela amplitude máxima  $R_p$ , tal função é apresentada, a seguir, como  $x_p(t)$ .

$$x_p(t) = R_p \cos \theta_p(t) \quad (1)$$

Os parâmetros adotados estão definidos a seguir:

$$0 \leq t < 80 \text{ ms}$$

$$R_p = 0,25 \text{ mV}$$

$$\theta_P(t_{inicial}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_P(t_{final}) = \frac{\pi}{2}$$

A onda P é vista no sinal do ECG durante 80 ms, por este motivo, a função  $x_P(t)$  será válida somente para o intervalo  $0 \leq t < 80 \text{ ms}$ . Considerando que o argumento  $\theta_P(t)$  é dado por:

$$\theta_P(t) = \theta_P(t_{inicial}) + \frac{(t - t_{inicial})\pi}{t_{final} - t_{inicial}} \quad (2)$$

O período em que o trecho cossenoidal é apresentado consiste no intervalo  $0 \leq t < 80 \text{ ms}$ , desta forma, tem-se o instante  $t_{inicial} = 0 \text{ ms}$ , definindo o início do período, e o instante  $t_{final} = 79 \text{ ms}$ , delimitando o período. Substituindo os valores  $\theta_P(t_{inicial})$ ,  $t_{inicial}$  e  $t_{final}$  em (2) tem-se:

$$\theta_P(t) = -\frac{\pi}{2} + \frac{t\pi}{79} \quad (3)$$

Por fim, substituindo os valores conhecidos para  $R_P$  e  $\theta_P(t)$  em (1) é possível apresentar a função que descreve a onda P do intervalo PR componente do sinal ECG.

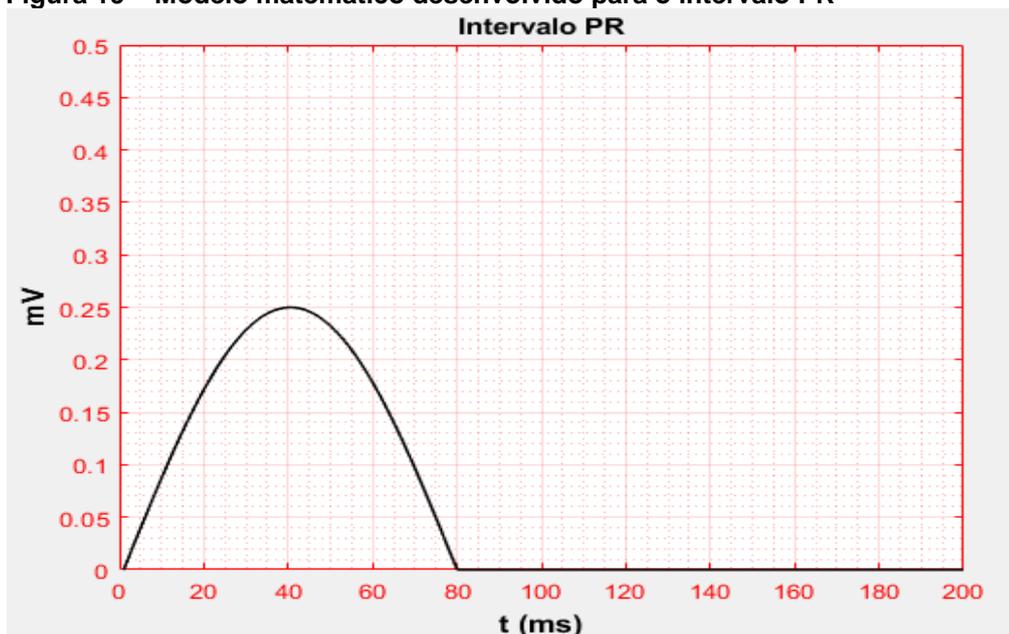
$$x_P(t) = 0,25 \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{t\pi}{79}\right) \quad (4)$$

O segmento PR ocorre durante o intervalo de tempo  $80 \leq t < 200 \text{ ms}$  e é apresentado pela função nula:

$$x_{PR}(t) = 0 \quad (5)$$

A Figura 19 indica a representação gráfica do intervalo PR formado por  $x_P(t)$  e  $x_{PR}(t)$ .

**Figura 19 – Modelo matemático desenvolvido para o intervalo PR**



Fonte: Os autores.

### 3.2 COMPLEXO QRS

O complexo QRS identifica o momento em que há o início da despolarização dos ventrículos, o qual ocorre durante aproximadamente 60 *ms*. A despolarização dos ventrículos é iniciada por uma deflexão negativa de baixa amplitude no septo intraventricular na direção esquerda-direita durante um curto período de 10 *ms* (THALER, 2013). Por apresentar baixa amplitude, diversas vezes esta onda não é visível no ECG. Entretanto, para a modelagem matemática desenvolvida neste trabalho, adotou-se visibilidade da onda Q.

Após a despolarização no septo intraventricular, o restante dos ventrículos é despolarizado. O ventrículo esquerdo em sua composição é mais maciço quando comparado ao ventrículo direito. Por este motivo, sua deflexão domina o complexo QRS. O efeito dominante do ventrículo direito é visto na onda R, tem duração de 20 *ms* e pode alcançar uma amplitude de aproximadamente 1,25 *mV*. A onda S, por sua vez, possui a mesma duração da onda R e é dada como a deflexão encontrada na sequência dessa onda, alcançando cerca do dobro de amplitude negativa quando comparada à onda Q. O complexo QRS é encerrado no início do segmento ST.

O modelo matemático para o complexo QRS desenvolvido neste trabalho assume sua configuração representada por quatro funções de reta, diferenciando-se entre si de acordo com seus pontos máximos e mínimos e seus coeficientes

angulares. Os seguintes pontos iniciais são apresentados para onda Q, onda R, onda S e para a onda final do complexo QRS.

**Tabela 1 – Pontos iniciais para retas do complexo QRS.**

Onda	$t_0(ms)$	$V_0(mV)$
Q	200	0
R	210	-0,1
S	230	1,25
Final do Complexo (FC)	250	-0,2

Fonte: Os autores.

Considerando a equação fundamental da reta em (6):

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (6)$$

e os coeficientes angulares calculados a partir da inclinação de cada reta, foi possível modelar matematicamente o complexo QRS a partir das funções, apresentadas a seguir, em seus respectivos intervalos:

$$x_Q(t) = 2 - 20t \quad \text{para } 200 \leq t < 210 \text{ ms}; \quad (7)$$

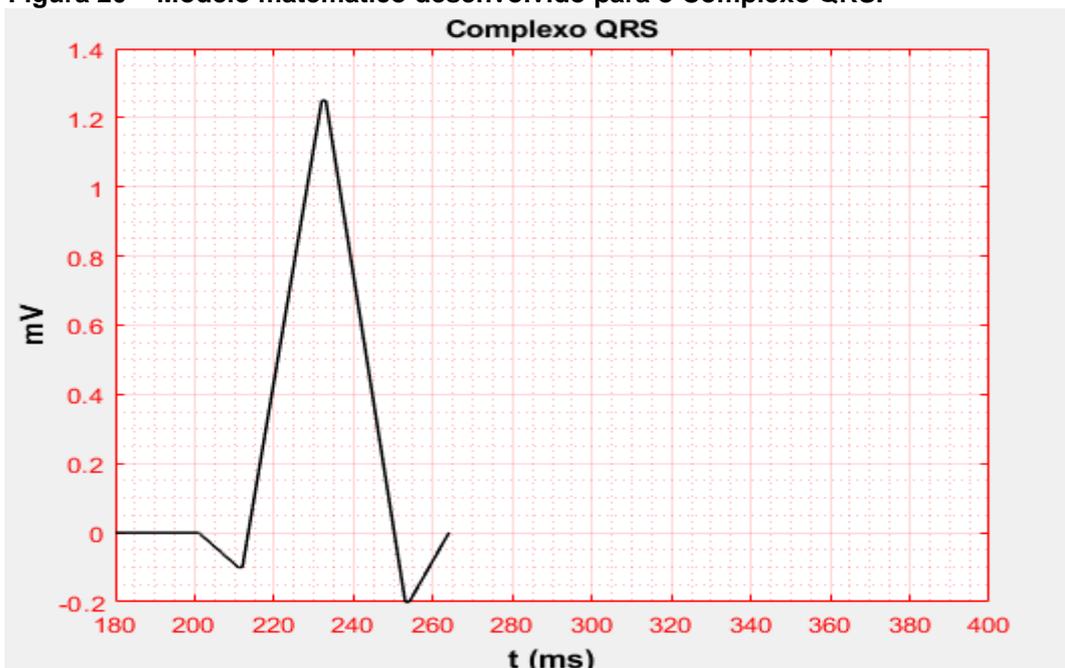
$$x_R(t) = 67,5t - 14,2 \quad \text{para } 210 \leq t < 230 \text{ ms}; \quad (8)$$

$$x_S(t) = 17,9 - 72,5t \quad \text{para } 230 \leq t < 250 \text{ ms}; \quad (9)$$

$$x_{FC}(t) = 20t - 5,2 \quad \text{para } 250 \leq t < 260 \text{ ms}. \quad (10)$$

A Figura 20 representa graficamente cada uma das retas do complexo QRS.

**Figura 20 – Modelo matemático desenvolvido para o Complexo QRS.**



Fonte: Os autores.

### 3.3 SEGMENTO ST, ONDA T E SEGMENTO ENTRE CICLOS

Após a despolarização dos ventrículos, inicia-se a repolarização ventricular, com o período de duração total de  $340\text{ ms}$ , representado pelo segmento ST e a onda T. O segmento ST é, geralmente, horizontal e indica o tempo final da despolarização ventricular, estendendo-se até o início da repolarização ventricular, com aproximadamente  $80\text{ ms}$ . A onda T, por sua vez, representa a própria repolarização ventricular. A repolarização ventricular exige grande energia celular para acontecer. Esta é reconhecida durante um período de  $160\text{ ms}$  e por uma configuração semelhante à onda P, porém com uma amplitude que pode atingir de  $1/3$  a  $2/3$  da amplitude da onda R.

A modelagem matemática desenvolvida para este período é muito semelhante à onda P e ao segmento PR. O segmento ST, assim como o segmento PR, não apresenta diferença de potencial no sinal do ECG. O intervalo de tempo para o segmento ST é dado em  $260 \leq t < 340\text{ ms}$  e é apresentado pela função nula:

$$x_{ST}(t) = 0 \quad (11)$$

A construção da onda T, de forma semelhante à onda P, também foi dada a partir de um trecho de uma cossenoide. Os parâmetros adotados como padrão foram: intervalo de tempo em que a onda ocorre, amplitude máxima alcançada pela onda e ângulos final e inicial referentes ao argumento do cosseno. Desta forma, a onda T é apresentada por:

$$x_T(t) = R_T \cos \theta_T(t) \quad (12)$$

Os seguintes valores foram assumidos:

$$R_T = 0,45\text{ mV}$$

$$\theta_T(t_{inicial}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_T(t_{final}) = \frac{\pi}{2}$$

O intervalo de tempo em que a onda T é visualizada no sinal de ECG é  $340 \leq t < 500\text{ ms}$ , desta forma, tem-se o instante  $t_{inicial} = 340\text{ ms}$  definindo o início do período e o instante  $t_{final} = 519\text{ ms}$  delimitando o período. Assim, em (13) é possível representar o argumento do cosseno, seguindo a mesma estrutura apresentada em (2).

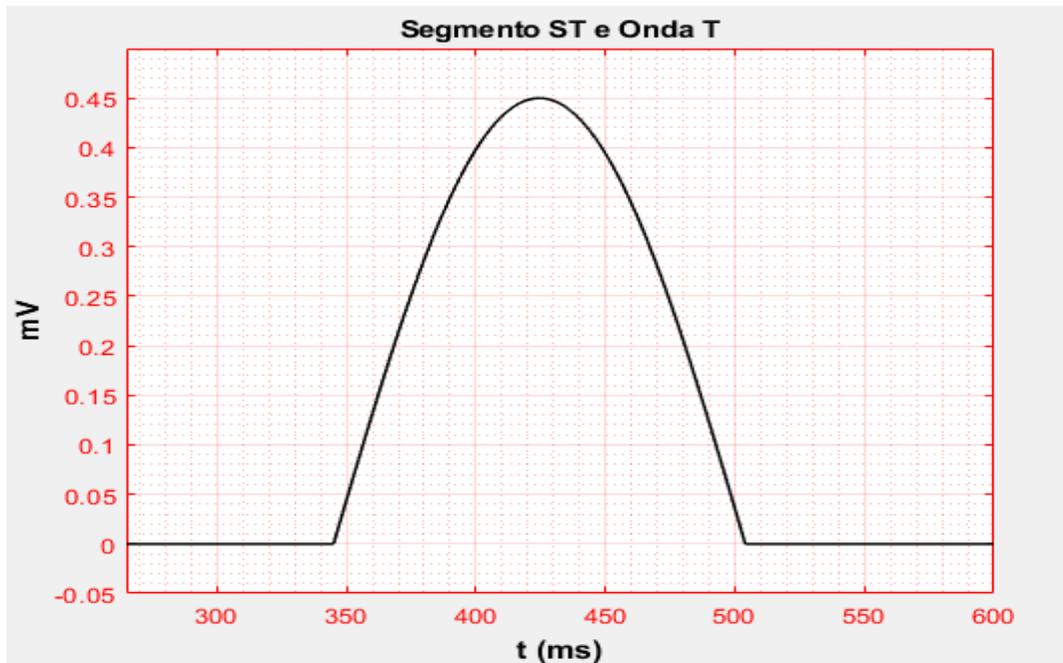
$$\theta_T(t) = -\frac{\pi}{2} + \frac{(t - 340)\pi}{159} \quad (13)$$

Por fim, substituindo os valores conhecidos para  $R_T$  e  $\theta_T(t)$  em (12), é possível apresentar a função que descreve a onda T.

$$x_T(t) = 0,45 \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(t - 340)\pi}{159}\right) \quad (14)$$

Após a onda T existe um segmento de duração de 100 ms e amplitude nula que ocorre entre os ciclos de um sinal ECG. Este segmento é definido por:  $x_{EC}(t) = 0$  para  $500 \leq t < 600$  ms. A Figura 21 apresenta graficamente o modelo matemático elaborado para este período.

**Figura 21 – Modelo matemático desenvolvido para o Segmento ST e Onda T.**



Fonte: Os autores.

Finalmente, as equações que modelam o sinal do ECG por completo são elencadas em (15)–(23) considerando o período de tempo em que são reconhecidas.

$$x_P(t) = 0,25 \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{t\pi}{79}\right) \quad \text{para } 0 \leq t < 80 \text{ ms}; \quad (15)$$

$$x_{PR}(t) = 0 \quad \text{para } 80 \leq t < 200 \text{ ms}; \quad (16)$$

$$x_Q(t) = 2 - 20t \quad \text{para } 200 \leq t < 210 \text{ ms}; \quad (17)$$

$$x_R(t) = 67,5t - 14,2 \quad \text{para } 210 \leq t < 230 \text{ ms}; \quad (18)$$

$$x_S(t) = 17,9 - 72,5t \quad \text{para } 230 \leq t < 250 \text{ ms}; \quad (19)$$

$$x_{FC}(t) = 20t - 5,2 \quad \text{para } 250 \leq t < 260 \text{ ms}; \quad (20)$$

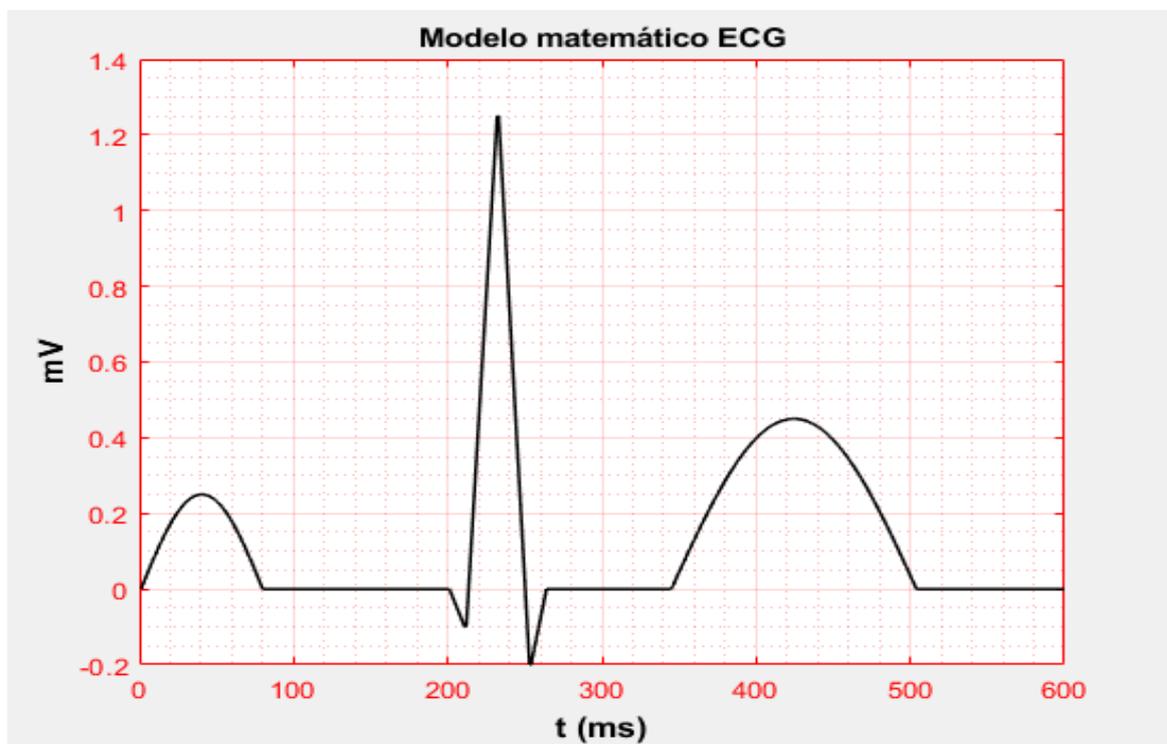
$$x_{ST}(t) = 0 \quad \text{para } 260 \leq t < 340 \text{ ms}; \quad (21)$$

$$x_T(t) = 0,45 \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(t-340)\pi}{159}\right) \quad \text{para } 340 \leq t < 500 \text{ ms}; \quad (22)$$

$$x_{EC}(t) = 0 \quad \text{para } 500 \leq t < 600 \text{ ms}. \quad (23)$$

A Figura 22 apresenta graficamente o modelo matemático completo para todo o sinal ECG.

**Figura 22 – Modelo matemático desenvolvido para um ciclo completo referente a primeira derivação.**



Fonte: Os autores.

Vale ressaltar que, apesar de o modelo matemático desenvolvido descrever o sinal ECG em termos bastante conhecidos da engenharia (variação de tensão no tempo) e de ser parametrizado de acordo com a fisiologia do coração humano, o modelo não é capaz de descrever, a princípio, o fenômeno cardíaco por completo. A fisiologia do coração humano é um fenômeno de um sistema real de grande complexidade, portanto, deve-se considerar que o modelo matemático desenvolvido é uma aproximação para a abordagem do sinal ECG na derivação I.

### 3.4 MODELO MATEMÁTICO EM ESPAÇOS DE ESTADOS

A modelagem matemática desenvolvida e demonstrada no início deste capítulo pode ser representada em espaço de estados. A representação de um sistema físico em espaço de estados é de grande importância sob o ponto de vista do modelo dinâmico do sistema, que é utilizado nas equações dos filtros estocásticos.

Equações contínuas são representadas no espaço de estados considerando sistemas MIMO (*Multiple Input and Multiple Output*), que apresentam entradas ( $u_r$ ), saídas ( $y_m(t)$ ) e estados ( $x_n$ ), sendo estas apresentadas por (24) e (25).

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \quad (24)$$

$$y_m(t) = g_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \quad (25)$$

Vetorialmente, o sistema pode ser descrito completamente por:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (26)$$

$$\vec{y}(t) = \vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (27)$$

A partir da forma genérica apresentada para a representação em espaço de estados e do modelo matemático desenvolvido na seção anterior, é possível representar o modelo matemático para o sinal ECG em espaço de estados.

O modelo matemático é composto por nove equações, entretanto, pode ser resumido a três funções genéricas, sendo estas:

$$x_1(t) = 0 \quad (28)$$

$$x_2(t) = at + b \quad (29)$$

$$x_3(t) = R \cos\left(\theta(t_{inicial}) + \frac{(t - t_{inicial})\pi}{t_{final} - t_{inicial}}\right) \quad (30)$$

A representação em espaço de estados para uma função como  $x_1(t) = 0$  é nula.

A representação em espaço de estados para uma função que representa uma reta, como  $x_2(t) = at + b$  é dada a partir de suas derivadas primeira e segunda.

Sabe-se que o vetor de estado é composto pelas variáveis de estado capazes de descrever o sistema. O sistema real do sinal ECG é descrito a partir das funções que descrevem a diferença de potencial encontrada em diversos instantes de tempo.

Visto que o sistema é descrito por um único sinal, escrito por duas variáveis, foi necessário forçar derivadas para a representação em espaço de estados, sendo assim para a função que representa uma reta genérica  $x_2(t) = at + b$  tem-se as derivadas primeira e segunda, respectivamente:

$$\dot{x}_2(t) = a \quad (31)$$

$$\ddot{x}_2(t) = 0 \quad (32)$$

Sabendo que a variável de interesse é a tensão dada por  $x_2(t)$ , foi possível definir a equação de saída do sistema, sendo assim o espaço de estados para retas do tipo  $x_2(t) = at + b$  é completamente definido e representado pelas matrizes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

De forma semelhante, a função  $x_3(t)$  em representação de espaço de estados é construída a partir de duas derivadas:

$$\dot{x}_3(t) = -R \left( \sin \left( \theta(t_{inicial}) + \frac{(t - t_{inicial})\pi}{t_{final} - t_{inicial}} \right) \right) \left( \frac{\pi}{t_{final} - t_{inicial}} \right) \quad (34)$$

$$\ddot{x}_3(t) = -R \left( \cos \left( \theta(t_{inicial}) + \frac{(t - t_{inicial})\pi}{t_{final} - t_{inicial}} \right) \right) \left( \left( \frac{\pi}{t_{final} - t_{inicial}} \right)^2 \right) \quad (35)$$

Sabendo que a variável de interesse é a tensão dada por  $x_3(t)$ , foi possível definir a equação de saída do sistema. Sendo assim, tem-se o espaço de estados completamente definido e representado matricialmente a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ - \left( \left( \frac{\pi}{t_{final} - t_{inicial}} \right)^2 \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}$$

A partir destas representações em espaço de estados genéricas foi possível chegar a representação para cada uma das partes que compõem o sinal do ECG, apresentadas na sequência para cada intervalo de tempo.

Para  $0 \leq t < 80 \text{ ms}$  e  $x_p(t) = 0,25 \cos \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{t\pi}{79} \right)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P(t) \\ \ddot{x}_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\pi}{79}\right)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P(t) \\ \dot{x}_P(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_P(t) \\ \dot{x}_P(t) \end{bmatrix}$$

Para  $200 \leq t < 210 \text{ ms}$  e  $x_Q(t) = 2 - 20t$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_Q(t) \\ \ddot{x}_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_Q(t) \\ \dot{x}_Q(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_Q(t) \\ \dot{x}_Q(t) \end{bmatrix}$$

Para  $210 \leq t < 230 \text{ ms}$  e  $x_R(t) = 67,5t - 14,2$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R(t) \\ \ddot{x}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ \dot{x}_R(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_R(t) \\ \dot{x}_R(t) \end{bmatrix}$$

Para  $230 \leq t < 250 \text{ ms}$  e  $x_S(t) = 17,9 - 72,5t$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_S(t) \\ \ddot{x}_S(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S(t) \\ \dot{x}_S(t) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_S(t) \\ \dot{x}_S(t) \end{bmatrix}$$

Para  $250 \leq t < 260 \text{ ms}$  e  $x_{FC}(t) = 20t - 5,2$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{FC}(t) \\ \ddot{x}_{FC}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{FC}(t) \\ \dot{x}_{FC}(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{FC}(t) \\ \dot{x}_{FC}(t) \end{bmatrix}$$

Para  $340 \leq t < 500 \text{ ms}$  e  $x_T(t) = 0,45 \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(t-340)\pi}{159}\right)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_T(t) \\ \ddot{x}_T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\pi}{159}\right)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T(t) \\ \dot{x}_T(t) \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_T(t) \\ \dot{x}_T(t) \end{bmatrix}$$

## 4 FUNDAMENTOS DE FILTRAGEM ESTOCÁSTICA

### 4.1 DEFINIÇÕES IMPORTANTES

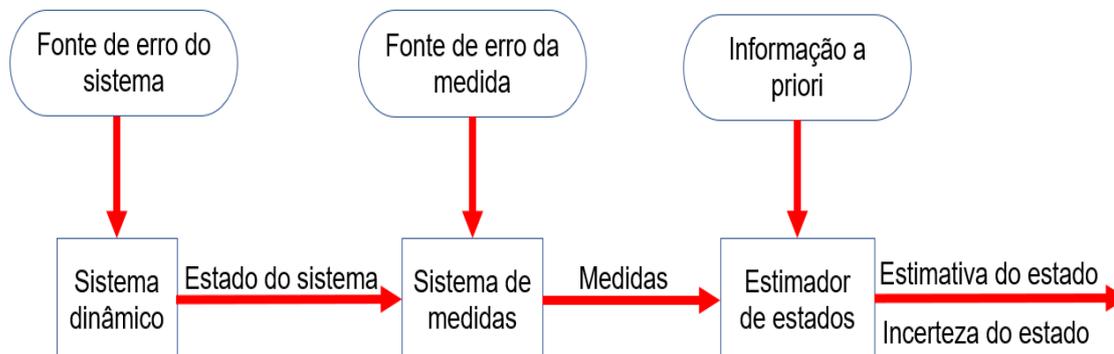
Antes de caracterizar o filtro de Kalman e o filtro IMM teórica e matematicamente, é importante ter conhecimento a respeito de alguns termos e definições. Desse modo, Li, Kirubarajan e Shalom (2001) definem:

- a) Estimação: processo de compreender, deduzir o valor de uma quantidade de interesse a partir de observações indiretas, incertas e imprecisas. Muitas são as finalidades da estimação, como exemplos, podem-se citar:
  - Determinação da velocidade e da posição de uma aeronave em um sistema de controle de tráfego.
  - Identificação do sistema: determinação de parâmetros do modelo para prever o estado de um sistema físico.
  - Comunicação: determinação dos aspectos de uma mensagem a partir de uma observação do sinal.
  - Processamento de sinal ou imagem: definição de parâmetros de um sinal ou de uma imagem.
- b) Decisão: é a melhor escolha possível, dentro de um espaço de possibilidades discretas ou contínuas.
- c) Filtragem: processo de estimação do estado de um sistema. Este filtra o sinal, buscando eliminar o ruído indesejado, com o objetivo de obter a melhor estimativa.
- d) Estimador ótimo: seu objetivo é elaborar uma estimativa da variável de interesse através de um processamento de observações, otimizando um determinado parâmetro no processo. O filtro de Kalman, por exemplo, minimiza o erro quadrático médio dos parâmetros estimados.
- e) Estado de um sistema dinâmico: menor número de variáveis tal que o conhecimento destas em  $t = t_0$  juntamente com o conhecimento da entrada do sistema para  $t = t_0$ , determina o comportamento do sistema para qualquer tempo  $t \geq t_0$ .

Em suma, a estimativa é um meio para se obter e aprimorar as informações a respeito de um sistema com base em medições deste mesmo sistema. Tendo como pilar as medidas obtidas, é possível potencializar o conhecimento a respeito de um

determinado parâmetro, um sinal, ou até mesmo um estado. O processo de estimação de estados é ilustrado de forma resumida na Figura 23.

**Figura 23 – Diagrama simplificado da estimação de estados**



**Fonte: Os autores.**

Observando a Figura 23, nota-se que as medidas são essenciais para as estimativas, e são afetadas pela fonte de erro. Para realizar a estimação, é preciso conhecer a evolução temporal do estado, o modelo da medição, fatores aleatórios/estocásticos (distúrbios, ruídos) e a informação *a priori* do estado.

Muitos são os exemplos do uso da estimação de estados, podendo citar: rastreamento e determinação da trajetória, detecção de falhas, processamento de sinal e de imagem, engenharia biomédica, controle de atitude etc. (LI, KIRUBARAJAN e SHALOM, 2001).

Segundo Li, Kirubarajan e Shalom (2001) o processo aleatório, seja estacionário ou não, é o objeto da estimação. Através de equações diferenciais lineares (equação de estado do sistema) é possível modelar o sistema, que por sua vez possui ruídos e distúrbios intrínsecos. O filtro de Kalman é, então, utilizado com o objetivo de minimizar o erro quadrático médio entre a estimativa e o valor real.

## 4.2 O FILTRO DE KALMAN

### 4.2.1 Histórico sobre o Filtro de Kalman

Na década de 1800, Carl Friedrich Gauss desenvolveu uma técnica de otimização matemática que tem por objetivo encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados. A otimização se dá através da minimização da soma dos

quadrados das diferenças entre o valor estimado do estado e os dados observados, sendo tais diferenças denominadas resíduos. Desta forma, maximiza-se o grau de ajuste do modelo aos dados observados. Esse método ficou conhecido como método dos mínimos quadrados (MMQ) e, apesar do crédito de desenvolvimento das bases fundamentais dessa ferramenta ser de Carl Friedrich Gauss, foi Adrien-Marie Legendre o primeiro a publicar o método em 1806 – Gauss publicou suas conclusões apenas em 1809. No entanto, deve-se atentar às seguintes restrições ao utilizar este método:

- O erro deve ter distribuição normal e independente (independência entre termos de diferentes instantes de tempo);
- O modelo deve possuir parâmetros lineares.

Segundo Sorenson (1985) foi o conceito gaussiano de estimação por mínimos quadrados que forneceu a base para diversas teorias e técnicas de estimativas, dentre elas, o filtro de Kalman, filtragem considerada importante e frequentemente aplicada em diversos problemas na engenharia em que haja a necessidade da estimação de grandezas físicas.

Uma das mais importantes aplicações do filtro de Kalman ocorreu durante a corrida armamentista. Concorrendo com a União Soviética, os Estados Unidos lançaram em 1961 o Projeto Apollo da NASA que pretendia levar o homem à lua dentro de dez anos. Para isso, era preciso estimar a trajetória das espaçonaves. Stanley Schmidt, chefe de pesquisas em análise dinâmica da NASA na época, acreditou que o filtro de Kalman seria a solução para esse problema, quando Rudolf Kalman apresentou seu trabalho no Centro de Pesquisa Ames (GONÇALVES e ZATTONI, 2017).

Assim Schmidt e sua equipe simularam diversas trajetórias e perceberam que o filtro de Kalman conseguia estimar todas de forma precisa. No entanto, por essas trajetórias não possuírem comportamento linear, foi desenvolvido, na época, um novo tipo de filtro de Kalman, atualmente conhecido como filtro de Kalman estendido, capaz de realizar estimativas de estado de sistemas não lineares – uma restrição que vinha desde a base inicial do modelo do método dos mínimos quadrados. Assim sendo, o filtro de Kalman foi essencial para o desenvolvimento deste campo da engenharia aeroespacial (GONÇALVES e ZATTONI, 2017).

A filtragem de Kalman utiliza medidas linearmente relacionadas ao estado – que estão sujeitas a ruídos – para estimar o estado momentâneo do sistema dinâmico linear, que também possui ruído branco gaussiano, ou seja, é um modelo matemático que descreve um sistema dinâmico (caracterizado por estados que mudam ao longo do tempo), podendo este ser linear ou não linear. Assim, o filtro de Kalman é considerado um estimador ótimo recursivo, pois novas medidas são processadas instantaneamente.

Resumidamente, o filtro de Kalman pode ser utilizado sempre que houver uma incerteza a respeito de um sistema dinâmico e deseja-se saber qual será o comportamento do sistema em seguida. Além disso, uma das vantagens desse filtro é o fato de não precisar de nenhuma informação além da informação a respeito do estado anterior – isto faz com que o filtro, em problemas como o ECG (mudanças bruscas de comportamento), possa fornecer resultados eficientes.

O filtro de Kalman tem um papel importante, sendo utilizado em aplicações industriais e governamentais. Alguns exemplos são sistemas de rastreamento de vídeo e laser, navegação por satélite, controle de radar e de incêndios e estimativa de trajetória de mísseis balísticos (CHUI e CHEN, 1987).

#### 4.2.2 Funcionamento do Filtro de Kalman

De acordo com Chui e Chen (1987), o filtro de Kalman é um estimador de estados ótimo aplicado a sistemas dinâmicos que possuem perturbações (os ruídos) aleatórias.

O filtro de Kalman foca em mapear as propriedades físicas dos objetos de estudo e dos sensores, em parâmetros matemáticos descrevendo as incertezas do problema como um todo (LI, KIRUBARAJAN e SHALOM, 2001). Tomando como exemplo o rastreamento de alvos, o estado possui informações referentes à velocidade e posição do alvo e eventualmente pode ter informações adicionais, como velocidade angular. O estado também possui informações de observações (radares de vigilância) que costumam ser bastante ruidosas. Assim, é necessário o filtro de Kalman para a estimativa recursiva do estado do alvo, para se obter, por fim, o comportamento do movimento realizado por ele (FRENCL, 2010).

Bishop e Welch (1997) definiram o filtro de Kalman matematicamente como um conjunto de equações que fornecem uma solução computacional eficiente do MMQ. Essa ferramenta suporta estimações dos estados no passado, presente e futuro o que a torna ainda mais importante e usual.

O filtro de Kalman é uma ferramenta de extrema importância para estimar valores, quando esse valor mensurado contém erros, incertezas ou variações aleatórias. Através de um processo matemático iterativo, o qual utiliza um conjunto de equações, juntamente com dados de entrada recebidos pelo sistema, estima a grandeza desejada. No caso deste trabalho, deseja-se estimar o potencial elétrico em células cardíacas medido em um exame de ECG.

#### 4.2.3 Conceitos fundamentais da probabilidade

Para se compreender melhor as deduções matemáticas ligadas ao filtro de Kalman e ao filtro IMM, faz-se necessário revisar alguns conceitos de probabilidade, tendo como referencia o livro “Estatística básica” de Bussab e Morettin (2013), estas definições são listadas e explicadas, a seguir.

- Variável aleatória: função que associa cada ponto do espaço amostral (conjunto de todos os resultados possíveis gerados por experimentos) a um número real, ou seja,  $X(\zeta): S \rightarrow S_X$ , em que  $X$  é uma variável aleatória,  $\zeta$  é o resultado do experimento,  $S$  o espaço amostral e  $S_X$  é um subconjunto dos números reais, onde se encontra o valor  $x$  associado à variável aleatória.
- Função distribuição acumulada: função que é definida como a probabilidade do evento  $\{\zeta: X(\zeta) \leq x\}$ , ou seja:

$$F_X(x) = P(X \leq x), -\infty < x < \infty \quad (43)$$

- Função densidade de probabilidade: é a derivada da função distribuição acumulada, como mostra a expressão em (44)

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (44)$$

- Valor esperado: em uma distribuição de probabilidade, a média ponderada dos valores possíveis que uma variável aleatória pode ter, considerando os pesos dados por suas respectivas probabilidades teóricas, é denominada valor

esperado. Uma variável aleatória pode assumir muitos ou até mesmo infinitos valores, em que cada um desses valores possui uma probabilidade de ocorrer. Assim, o valor esperado resume todas essas informações em apenas um valor numérico. É uma medida de tendência central, um valor para o qual os resultados tenderão. A notação para o valor esperado de uma variável aleatória  $X$  é  $E[X]$ .

- Variância: representa a dispersão dos possíveis valores da variável aleatória  $X$  em relação ao seu valor esperado, como mostra a expressão em (45):

$$Var [X] = \sigma_x^2 = E[(X - E[X])^2] \quad (45)$$

- Covariância entre duas variáveis aleatórias: define uma relação probabilística entre essas variáveis. Se estas tiverem comportamentos semelhantes, a covariância é positiva. Caso contrário, com comportamentos opostos, porém ainda correlacionados, a covariância é negativa. Por fim, se a covariância for igual a zero, as variáveis aleatórias são independentes. Considerando duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , a covariância entre elas é dada pela seguinte expressão:

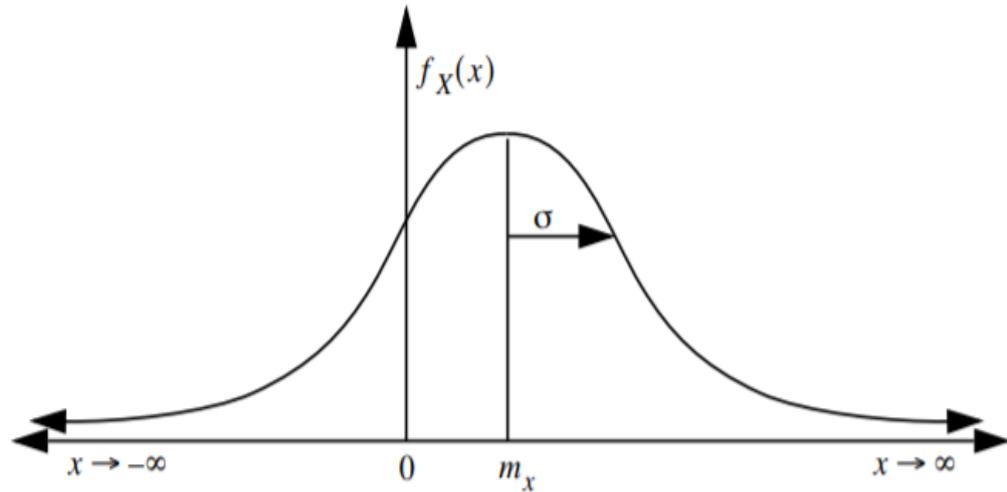
$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (46)$$

- Distribuição normal ou gaussiana: é uma função densidade de probabilidade dada pela expressão (47) e demonstrada pelo gráfico da Figura 24.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (47)$$

em que  $\mu$  é o valor esperado e  $\sigma$  é o desvio-padrão. Pela equação (47), nota-se que essa função é definida pela sua média e sua variância. Assim, uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal é representada como  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Figura 24 – Curva da distribuição normal



Fonte: WELCH; BISHOP, 1997, p. 12

- Teorema de Bayes: descreve a probabilidade de um evento, baseado em informações a respeito de outro evento já ocorrido. Por exemplo, analisando a equação (48), tem-se a probabilidade inicial  $P(A)$ , dado que o evento  $B$ , ocorreu (ou a suposição de que  $B$  irá ocorrer) é possível obter a probabilidade  $P(A|B)$  – *posteriori*, assim ocorre à atualização da probabilidade  $P(A)$ . É um teorema decorrente da lei da probabilidade total.

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j) P(A_j)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)} \quad (48)$$

Para o caso misto – onde se tem variáveis discretas e contínuas, o teorema de Bayes é dado pela expressão (49).

$$P(B_i|A, x) = \frac{P(A|B_i, x)P(B_i|x)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j, x) P(B_j|x)} \quad (49)$$

Esta breve revisão foi necessária pelo fato de, no filtro de Kalman, os ruídos aditivos que compõem o modelo estocástico do sistema serem considerados, por hipótese, processos estocásticos com distribuição gaussiana.

#### 4.2.4 Processo Estocástico

Um processo estocástico escalar  $\{X_i(\zeta), t \in T, \zeta \in S\}$  pode ser visto como uma família de variáveis aleatórias organizadas pelo conjunto de parâmetros  $T$ . O processo estocástico possui um espaço de estados discreto ou um espaço de estados contínuo, se as variáveis aleatórias ( $X_i$ ) forem discretas ou contínuas, respectivamente. O parâmetro  $T$  também pode ser discreto ( $T = \{1, 2, \dots, n\}$ ) ou contínuo ( $T = [0, 1], T = \{t: t \geq 0\}$ ) (JAZWINSKI, 1970).

Como o comportamento do sistema varia conforme o instante de tempo  $t$ , este pode ser regido por um conjunto de variáveis aleatórias que dependem do tempo  $t$  e da ocorrência de um dos resultados possíveis  $\xi$ , que se encontram dentro do espaço amostral  $S$ . Assim se  $X$  for uma variável aleatória, pode-se denotar como  $X(t_1, \zeta)$  para um instante de tempo  $t = t_1$  qualquer. Mantendo o resultado ( $\zeta$ ) constante e variando o tempo ( $t$ ) tem-se um conjunto de possibilidades denominadas realizações do sistema. A esse aglomerado de realizações dá-se o nome de *ensemble*. (GONÇALVES e ZATTONI, 2017).

De acordo com Farhang-Boroujeny (2013) geralmente o sinal de entrada para um filtro e sua saída desejada são aleatórios, ou seja, *a priori* não são conhecidos. No entanto, estes sinais possuem características estatísticas essenciais para o ajuste dos coeficientes dos filtros. Estes sinais aleatórios são chamados processos estocásticos.

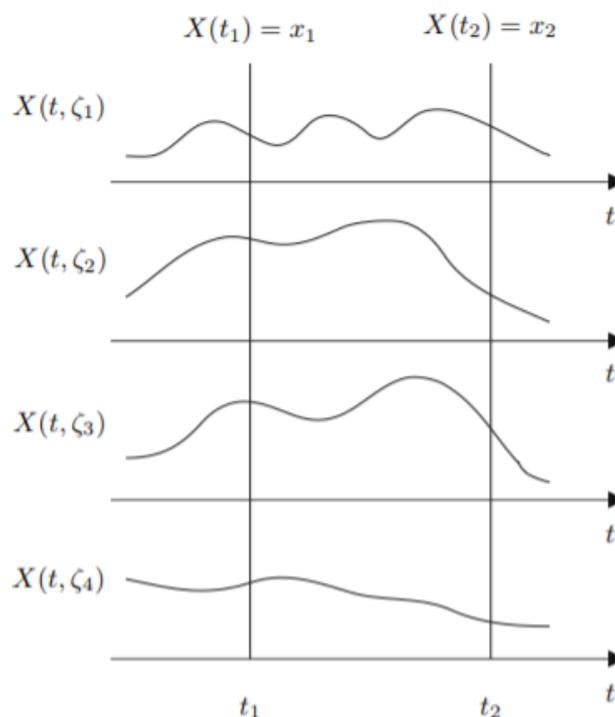
Em suma, um processo estocástico consiste de um conjunto  $T$  não vazio (espaço paramétrico), em que para cada  $t \in T$  existe uma variável aleatória  $X_t$ . Se o espaço de estados for uma sequência finita ou infinita de inteiros, tem-se um processo estocástico discreto. Se o espaço de estados for um intervalo de números reais, tem-se um processo estocástico contínuo.

Considere, por exemplo, o processo de medição de temperatura em uma cidade. Se tomada como referência a temperatura  $X$  nesta cidade às dez horas da noite, essa temperatura  $X$  é uma variável aleatória e a cada dia possui um valor diferente. Quanto maior for a quantidade de amostras, isto é, quanto maior for a quantidade de dias em que se mediu a temperatura da cidade às dez horas, maior será a confiabilidade das estatísticas obtidas a respeito dessa variável. No entanto se for considerada apenas a temperatura  $X$ , não considerando um horário específico, essa variável aleatória será dependente do dia e do horário, pois às três da tarde muito provavelmente a

temperatura será diferente do que foi às sete da manhã. Logo, é necessário armazenar temperaturas diárias para cada valor de  $t$  (cada hora do dia), obtendo assim forma de onda  $X(t_1, \zeta_i)$  em que  $\zeta_i$  indica o dia em que foi feita a medida e  $t_1$  indica a hora do dia (YNOGUTI, 2011).

A forma de onda obtida é considerada uma função amostra do processo estocástico e a coleção de todas as formas de ondas é denominada conjunto do processo estocástico  $X(t)$ . A amplitude das ondas geradas no instante  $t = t_1$  é o valor que a variável aleatória  $X(t_1)$  apresenta em várias tentativas. A Figura 25 apresenta esses conceitos graficamente. Para um processo estocástico, o resultado de cada tentativa é uma forma de onda (uma função amostra) que é uma função de  $t$ . O número de formas de onda em um conjunto pode ser finito ou infinito. No caso do processo estocástico  $X(t)$  (a temperatura de uma cidade por exemplo), o conjunto tem infinitas formas de onda (YNOGUTI, 2011).

**Figura 25 – Exemplo de um processo estocástico representando a temperatura medida em uma cidade.**



Fonte: YNOGUTI, 2011.

As formas de onda (funções amostra) são determinísticas. A aleatoriedade do processo estocástico manifesta-se através da incerteza de qual delas vai ocorrer em

uma dada tentativa. Por exemplo, no experimento de jogar uma moeda quatro vezes em sucessão, existem 16 resultados possíveis, todos conhecidos. A aleatoriedade nesta situação está associada não aos resultados em si, mas à incerteza de qual dos 16 resultados possíveis ocorrerá em uma determinada tentativa (YNOGUTI, 2011).

#### 4.2.5 O filtro de Kalman na estimação de sistemas dinâmicos lineares

As deduções abaixo têm como referência o livro “*Estimation with applications to tracking and navigation*” de Shalom, Li e Kirubarajan (2001).

Considere um sistema dinâmico linear discreto descrito pela equação (50), em que cada termo é retratado pela seguinte equação de estado:

$$\vec{x}(k+1) = F(k)\vec{x}(k) + G(k)\vec{u}(k) + \vec{v}(k) \quad k = 0,1,2,3 \dots \quad (50)$$

- $\vec{x}(k)$ : vetor de estados.
- $\vec{u}(k)$ : vetor de entrada conhecida.
- $\vec{v}(k)$ : processo estocástico do ruído do estado/processo com distribuição gaussiana.

O processo estocástico do ruído do estado possui uma matriz de covariância dada por:

$$Q(k) = E[\vec{v}(k)\vec{v}(k)^T] \quad (51)$$

A equação de medidas ou observações é descrita pela seguinte equação:

$$\vec{z}(k) = H(k)\vec{x}(k) + \vec{w}(k), \quad k = 0,1,2,3 \dots \quad (52)$$

em que  $\vec{w}(k)$  é o processo estocástico do ruído da medida/observação com distribuição gaussiana.

O processo estocástico do ruído da medida possui uma matriz de covariância dada por:

$$R(k) = E[\vec{w}(k)\vec{w}(k)^T] \quad (53)$$

O vetor  $x(0)$  representa o estado inicial sendo uma variável aleatória com distribuição gaussiana e média e covariância conhecidas. As matrizes  $F, G, H, Q$  e  $R$  são conhecidas e podem variar no tempo.

Algumas notações importantes para o melhor entendimento são apresentadas na Tabela 2.

**Tabela 2 – Guia de notações.**

<b>Notações gerais</b>	
$Z^k = \{(i), i \leq k\}$	Conjunto de vetores de medida disponíveis até o instante de tempo $k$ .
$\hat{x}(j k) = E[x(j) Z^k]$	Média condicional; se $j = k$ , é denominada estimativa.
$\tilde{x}(j k) = x(j) - \hat{x}(j k)$	Erro de estimativa.
$P(j k) = E[(x(j) - \hat{x}(j k))(x(j) - \hat{x}(j k))^T   Z^k]$	Matriz de covariância condicional do estado ou matriz de covariância do erro de estimativa.
<b>Notações para valores iniciais</b>	
$\hat{x}(0 0)$	Estimativa inicial do vetor de estados
$P(0 0)$	Matriz de covariância do erro de estimativa inicial.
$Z^0$	Medida/observação inicial

Fonte: Os autores.

Com os conceitos fundamentais de probabilidade vistos na seção 4.2.3, assim como as notações e as equações referentes a sistemas dinâmicos lineares definidos, a seguir será demonstrado o raciocínio matemático para a obtenção das equações do filtro de Kalman, suas relações e seus significados.

1) O cálculo matemático para a estimação:

O objetivo principal é mapear a estimativa condicional atual e a matriz de covariância associada atual nas variáveis correspondentes ao passo seguinte, ou seja,  $\hat{x}(k+1|k+1)$  e  $P(k+1|k+1)$ . Por definição, tem-se:

$$\hat{x}(k|k) = E[\bar{x}(k)|Z^k] \quad (54)$$

Esta é a média condicional do estado no momento  $k$ , dadas as observações até este momento. Sua matriz de covariância é dada por:

$$P(k|k) = E\left[(\bar{x}(k) - \hat{x}(k|k))(\bar{x}(k) - \hat{x}(k|k))^T | Z^k\right] \quad (55)$$

## 2) Equações de estimação estáticas:

As equações de recursão do filtro de Kalman podem ser obtidas a partir de substituições nas equações de estimação estáticas; dadas pelas equações (56) e (57) a seguir:

$$\hat{x} \triangleq E[x|z] = \bar{x} + P_{xz}P_{zz}^{-1}(z - \bar{z}) \quad (56)$$

$$P_{xx|z} \triangleq E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T | z] = P_{xx} - P_{xz}P_{zz}^{-1}P_{zx} \quad (57)$$

sendo que:

$$P_{xx} = cov(\vec{x}) = E[(\vec{x} - \bar{x})(\vec{x} - \bar{x})^T] \quad (58)$$

$$P_{xz} = P_{zx}^T = cov(\vec{x}, \vec{z}) = E[(\vec{x} - \bar{x})(\vec{z} - \bar{z})^T] \quad (59)$$

$$P_{zz} = cov(\vec{z}) = E[(\vec{z} - \bar{z})(\vec{z} - \bar{z})^T] \quad (60)$$

e o valor esperado de  $x$  e o valor esperado de  $z$  são representados, respectivamente, por  $\bar{x}$  e  $\bar{z}$ .

### 4.2.5.1 Demonstração matemática da obtenção das equações de estimação estáticas

As equações que definem as estimativas de estado no tempo  $k + 1$  e sua respectiva covariância são obtidas diretamente a partir das equações (56) e (57).

Inicialmente, considera-se um vetor aleatório  $\vec{y}$  composto por  $\vec{x}$  e  $\vec{z}$ , de modo que esses vetores possuam distribuição gaussiana, assim  $y \sim \mathcal{N}(\bar{y}, P_{yy})$ . Logo:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{z} \end{bmatrix}. \quad (61)$$

A função densidade de probabilidade de  $\vec{y}$  é dada por:

$$f_Y(\vec{y}) = \mathcal{N}(\bar{y}, P_{yy}) = f_{X,Z}(\vec{X}, \vec{Z}) \quad (62)$$

e sua média:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Pode-se escrever a matriz de covariância  $P_{yy}$  da seguinte maneira:

$$P_{yy} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Escrevendo a função densidade de probabilidade condicional de  $x$  dado  $z$ , tem-se:

$$f_X(\vec{x}|\vec{z}) = \frac{f_{X,Z}(\vec{x}, \vec{z})}{f_Z(\vec{z})} = \frac{f_Y(\vec{y})}{f_Z(\vec{z})} \quad (65)$$

$$f_X(\vec{x}|\vec{z}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}|P_{yy}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{y} - \bar{y})^T P_{yy}^{-1}(\vec{y} - \bar{y})\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}|P_{zz}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{z} - \bar{z})^T P_{zz}^{-1}(\vec{z} - \bar{z})\right)} \quad (66)$$

Com o objetivo de simplificar as equações, considera-se:

$$\xi = \vec{x} - \bar{x} \quad (67)$$

$$\zeta = \vec{z} - \bar{z} \quad (68)$$

$$\vec{y} - \bar{y} = \begin{bmatrix} \vec{x} - \bar{x} \\ \vec{z} - \bar{z} \end{bmatrix} \quad (69)$$

O argumento resultante da divisão de exponenciais da equação (66), desconsiderando por ora o fator que multiplica cada uma das exponenciais, pode ser reescrito da seguinte forma, representado pela variável auxiliar  $q$ :

$$q = \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} - \zeta^T P_{zz}^{-1} \zeta \quad (70)$$

$$q = \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xz} \\ T_{zx} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} - \zeta^T P_{zz}^{-1} \zeta \quad (71)$$

em que:

$$P = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$T = P^{-1} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xz} \\ T_{zx} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Assim, existe uma equivalência entre as matrizes das equações (70) e (71). Estas equivalências podem ser traduzidas pelas seguintes relações vindas da teoria de álgebra linear, dadas pelas equações (74)-(76):

$$T_{xx}^{-1} = P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx} \quad (74)$$

$$P_{zz}^{-1} = T_{zz} - T_{zx} T_{xx}^{-1} T_{xz} \quad (75)$$

$$T_{xx}^{-1} T_{xz} = -P_{xz} P_{zz}^{-1} \quad (76)$$

Dessas relações, a equação (71) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$q = \xi^T T_{xx} \xi + \xi^T T_{xz} \zeta + \zeta^T T_{zx} \xi + \zeta^T T_{zz} \zeta - \zeta^T P_{zz}^{-1} \zeta \quad (77)$$

em que:

$$\xi^T T_{xz} \zeta = \xi^T T_{xx} T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta \quad (78)$$

$$\zeta^T T_{zx} \xi = \zeta^T T_{zx}^T T_{xx}^{-1} T_{xx} \xi \quad (79)$$

Substituindo (78) e (79) em (77), somando e subtraindo a parcela  $\zeta^T T_{zx} T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta$  tem-se:

$$q = \xi^T T_{xx} \xi + \xi^T T_{xx} T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta + \zeta^T T_{zx}^T T_{xx}^{-1} T_{xx} \xi + \zeta^T T_{zz} \zeta + \zeta^T T_{zx} T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta - \zeta^T T_{zx} T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta - \zeta^T P_{zz}^{-1} \zeta \quad (80)$$

Devido à identidade (75), os termos  $\zeta^T T_{zz} \zeta$ ,  $-\zeta^T T_{zx} T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta$  e  $-\zeta^T P_{zz}^{-1} \zeta$  se cancelam, resultando em:

$$q = (\xi + T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta)^T T_{xx} (\xi + T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta) \quad (81)$$

Utilizando das relações de  $P$  e  $T$  e das equações (67) e (68), tem-se:

$$\xi + T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta = \vec{x} - \bar{x} - P_{xz} P_{zz}^{-1} (\vec{z} - \bar{z}) \quad (82)$$

É possível simplificar a equação (82) utilizando a equação (56), tendo por fim:

$$\xi + T_{xx}^{-1} T_{xz} \zeta = \vec{x} - \hat{x} \quad (83)$$

Assim, a equação (81) pode ser reescrita como a equação (84) abaixo.

$$q = (\vec{x} - (\bar{x} + P_{xz} P_{zz}^{-1} (\vec{z} - \bar{z})))^T (P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx})^{-1} \quad (84)$$

Pode-se dizer que a média condicional e a matriz de covariância condicional podem ser obtidas diretamente por inspeção da equação (84). Portanto, a média e a covariância condicionais estáticas são dadas pelas equações a seguir.

$$\hat{x} = E[\vec{x}|\vec{z}] = \bar{x} + P_{xz}P_{zz}^{-1}(\vec{z} - \bar{z}) \quad (85)$$

$$P_{xx|z} = cov(\vec{x}|\vec{z}) = P_{xx} - P_{xz}P_{zz}^{-1}P_{zx} \quad (86)$$

$$cov(\vec{x}, \vec{z}) = E[(\vec{x} - \bar{x})(\vec{z} - \bar{z})] \quad (87)$$

1) Equivalências entre a estimativa estática e a estimativa dinâmica:

Para que sejam obtidas as equações do filtro de Kalman, as quantidades serão separadas da seguinte forma:

- Valores esperados *a priori*: análise baseada na disponibilidade da medida até o instante  $k$ .
- Valores esperados *a posteriori*: análise baseada na disponibilidade das medidas até o instante  $k + 1$ .

As Tabelas 3 e 4 mostram as equivalências ao se passar da estimativa estática para a dinâmica.

**Tabela 3 – Equivalência entre os estados e medidas da estimativa estática e dinâmica.**

	Estados e medidas da estimativa estática	Estados e medidas da estimativa dinâmica
Variável a ser estimada no instante $k + 1$	$x$	$x(k + 1)$
Estado previsto	$\bar{x}$	$\bar{x}(k + 1) = \hat{x}(k + 1 k) = E[x(k + 1) Z^k]$
Medida	$z$	$z(k + 1)$
Medida prevista	$\bar{z}$	$\bar{z}(k + 1) = \hat{z}(k + 1 k) = E[z(k + 1) Z^k]$
Estado atualizado	$\hat{x}$	$\hat{x}(k + 1 k + 1) = E[x(k + 1) Z^{k+1}]$

Fonte: Os autores.

Tabela 4 – Equivalência entre as matrizes de covariância da estimativa estática e dinâmica.

	Matrizes de covariância estimativa estática	Matrizes de covariância estimativa dinâmica
Matriz de covariância do estado prevista	$P_{xx}$	$\begin{aligned} \bar{P}(k+1) &= P(k+1 k) \\ &= cov(x(k+1) Z^k) \\ &= cov(\tilde{x}(k+1 k) Z^k) \end{aligned}$
Matriz de covariância da previsão da medida	$P_{zz}$	$\begin{aligned} S(k+1) &= cov(z(k+1) Z^k) \\ &= cov(\tilde{z}(k+1 k) Z^k) \end{aligned}$
Matriz de covariância cruzada entre o estado e medida	$P_{xz}$	$\begin{aligned} &cov(x(k+1), z(k+1) Z^k) \\ &= cov(\tilde{x}(k+1 k), \tilde{z}(k+1 k) Z^k) \end{aligned}$
Matriz de covariância atualizada	$P_{xx z}$	$\begin{aligned} P(k+1) &= P(k+1 k+1) \\ &= cov(x(k+1) Z^{k+1}) \\ &= cov(\tilde{x}(k+1 k+1) Z^{k+1}) \end{aligned}$
Ganho do filtro	$P_{xz} P_{zz}^{-1}$	$\begin{aligned} &W(k+1) \\ &= cov(x(k+1), z(k+1) Z^k) S^{-1}(k+1) \end{aligned}$

Fonte: Os autores.

## 2) Equações de previsão:

As equações de previsão, relacionadas ao vetor de estados  $x(k)$ , estão listadas a seguir:

- Previsão do estado: Sabendo que o ruído do processo é descrito por uma distribuição gaussiana de média nula e aplicando o valor condicional esperado na equação (50), obtém-se:

$$\hat{x}(k+1|k) = F(k)\hat{x}(k|k) + G(k)u(k) \quad (88)$$

- Erro de previsão do estado: Subtraindo a equação (88) da equação (50), tem-se:

$$\tilde{x}(k+1|k) = F(k)\tilde{x}(k|k) + v(k) \quad (89)$$

- Matriz de covariância prevista do erro do estado:

$$P(k+1|k) = E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}(k+1|k)^T|Z^k] \quad (90)$$

aplicando a equação (89) em (90), tem-se:

$$P(k+1|k) = E[(F(k)\tilde{x}(k|k) + v(k))(F(k)\tilde{x}(k|k) + v(k))^T|Z^k] \quad (91)$$

fazendo a distributiva dos termos, obtém-se a equação (92):

$$P(k+1|k) = E[F(k)\tilde{x}(k|k)\tilde{x}(k|k)^T F(k)^T + F(k)\tilde{x}(k|k)v(k)^T + v(k)\tilde{x}(k|k)^T F(k)^T + v(k)v(k)^T|Z^k] \quad (92)$$

desenvolvendo e aplicando as propriedades lineares do valor esperado, encontra-se:

$$P(k+1|k) = F(k) E[\tilde{x}(k|k)\tilde{x}(k|k)^T|Z^k] F(k)^T + F(k) E[\tilde{x}(k|k)|Z^k] E[v(k)^T|Z^k] + E[v(k)|Z^k] E[\tilde{x}(k|k)^T|Z^k] F(k)^T + Q(k) \quad (93)$$

Sabendo que  $E[v(k)|Z^k] = 0$  e dada a equação (55), é possível obter a equação da matriz de covariância prevista (94):

$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F(k)^T + Q(k) \quad (94)$$

- As equações de previsão relacionadas ao vetor de medidas  $z(k)$ , estão listadas a seguir:

- Medida prevista: aplicando o valor condicional esperado na equação (52) no tempo  $k+1$ , obtém-se:

$$\hat{z}(k+1|k) = H(k+1)\hat{x}(k+1|k) \quad (95)$$

- Erro de previsão da medida: Subtraindo a equação (95) da equação (52), obtém-se:

$$\tilde{z}(k+1|k) = H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + w(k+1) \quad (96)$$

- Matriz de covariância da previsão da medida:

$$S(k+1) = E[\tilde{z}(k+1|k)\tilde{z}(k+1|k)^T|Z^k] \quad (97)$$

aplicando a equação (96) em (97), tem-se:

$$S(k+1) = E[(H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + w(k))(H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + w(k))^T | Z^k] \quad (98)$$

fazendo a distributiva dos termos de (98), desenvolvendo e aplicando as propriedades do valor esperado, encontra-se:

$$S(k+1) = H(k+1) E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}(k+1|k)^T | Z^k] H(k+1)^T + E[w(k)w(k)^T | Z^k] \quad (99)$$

tendo definidas as equações (90) e (53) é possível simplificar a expressão (99), tendo assim:

$$S(k+1) = P_{zz} = H(k+1)P(k+1|k)H(k+1)^T + R(k) \quad (100)$$

3) Equações de atualização:

- Relacionadas ao estado:
- Ganho do filtro: A equação (101) é obtida a partir da dedução de estimador estático.

$$W(k+1) = P_{xz} P_{zz}^{-1} \quad (101)$$

Com as equações (63) e (100) obtém-se:

$$W(k+1) = E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{z}(k+1|k)^T | z^k] S(k+1)^{-1} \quad (102)$$

Abrindo o termo  $\tilde{z}(k+1|k)$  de acordo com a equação (96):

$$W(k+1) = E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}(k+1|k)^T H(k+1)^T + \tilde{x}(k+1|k)w(k+1)^T | z^k] S(k+1)^{-1} \quad (103)$$

Mais uma vez fazendo a distributiva dos termos, desenvolvendo e aplicando as propriedades do valor esperado, encontra-se:

$$W(k+1) = E[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}(k+1|k)^T | Z^k] H(k+1)^T S(k+1)^{-1} \quad (104)$$

Utilizando a equação (90) pode-se resumir a equação (104) como segue:

$$W(k+1) = P(k+1|k)H(k+1)^T S(k+1)^{-1} \quad (105)$$

- Atualização do estado:

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}(k+1|k+1) \quad (106)$$

$$\hat{x} = \bar{x} + P_{xz} P_{zz}^{-1} (z - \bar{z}) \quad (107)$$

De acordo com a equação (105) e as equivalências mostradas na Tabela 3, tem-se:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)[z(k+1) - \hat{z}(k+1|k)] \quad (108)$$

➤ Matriz de covariância atualizada do erro do estado:

$$P_{xx|z} \rightarrow P(k+1|k+1) \quad (109)$$

$$P_{xx|z} = P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx} \quad (110)$$

Mais uma vez da relação obtida pela equação (105) e da equivalência dada pela Tabela 4:

$$P_{xx|z} = P(k+1|k) - W(k+1)[P(k+1|k)H(k+1)]^T \quad (111)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - W(k+1)H(k+1)]P(k+1|k) \quad (112)$$

Analisando a equação (105) é possível perceber que o ganho depende da matriz de covariância do erro de previsão e da matriz de covariância da inovação, sendo inversamente proporcional a esta última. Assim, tendo uma alta covariância do erro e uma baixa covariância da inovação, o estado previsto será impreciso e a medida precisa, por fim o ganho será baixo. Isso indica que a previsão do estado está ruim e que a medida é precisa. O oposto, uma baixa covariância do erro e uma alta covariância da inovação gerará um estado previsto preciso e uma medida imprecisa, logo o ganho será alto. Isso indica que a previsão do estado está boa e que a medida é imprecisa.

### 4.3 O FILTRO IMM

Grande parte dos sistemas que existem na natureza pode ser representada matematicamente por mais de um modelo dinâmico, para que possuam uma representação matemática mais completa. Os estados destes sistemas podem ser estimados com maior precisão através da utilização de diferentes filtros, em que cada filtro está relacionado a um modelo dinâmico particular.

O filtro MM (múltiplos modelos) é caracterizado por possuir um conjunto de filtros estocásticos, que formam um banco de filtros, cada um com seu respectivo modelo dinâmico. Este filtro pode ser estático, ou seja, os filtros não se comunicam probabilisticamente entre si ou dinâmico, em que os filtros comunicam-se entre si através de conexões probabilísticas, como os saltos markovianos – transição de um

modelo ( $i$ ) para outro modelo ( $j$ ) determinado a partir de uma probabilidade de transição fixa  $\pi_{ij}$  (LI e JILKOV, 2005).

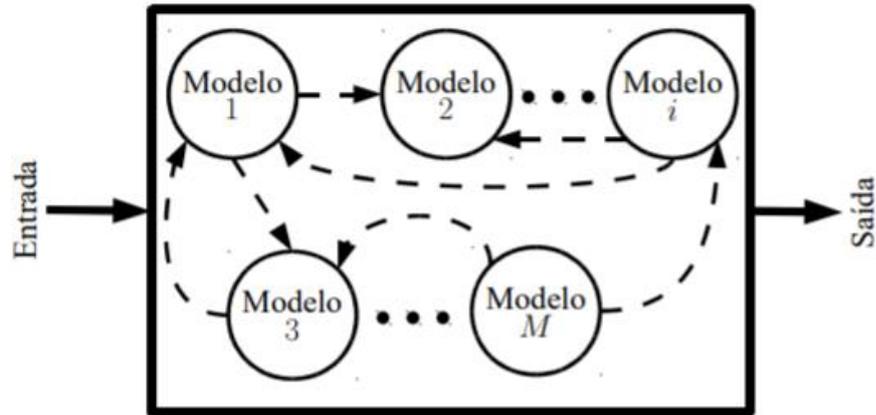
A técnica de modelos múltiplos interagentes (IMM – *Interacting multiple model*) – algoritmo introduzido por HenkBlom (QUEMEL e SANTANA, 2011) – é uma abordagem do filtro MM dinâmico, baseia-se na obtenção de uma estimativa de estados fundamentada nas estimativas de cada um dos filtros que compõem o banco de filtros. Através dessa ferramenta, é possível realizar um chaveamento entre os filtros estocásticos e esse chaveamento é modelado através de saltos markovianos.

De acordo com Quemel e Santana (2011), o filtro IMM é um estimador híbrido subótimo. Híbrido porque se baseia em sistemas que são representados tanto por quantidades contínuas quanto por quantidades discretas. Este filtro é auto-ajustável, com largura de banda variável em operação e através do cruzamento das estimativas, dadas pelos filtros contidos no banco de estimadores, juntamente com a dinâmica chaveada, é capaz de estimar o estado de um sistema.

Para a utilização desse algoritmo, deve-se projetar um conjunto de  $M$  modelos capazes de representar todos os possíveis padrões de comportamento do sistema. Para cada modelo existente neste conjunto existirá um filtro estocástico recursivo baseado neste modelo. Assim, as equações de filtragem de cada filtro são aplicadas em seu modelo referente. A estimativa final do vetor de estados  $\vec{x}_k$  é obtida pela combinação das estimativas dos filtros, estas calculadas em paralelo correspondendo aos diferentes modos do sistema. Assim o sistema é descrito de forma mais completa (FRENCL, 2010).

Portanto, a relação entrada/saída do filtro IMM é dada a partir da interação de  $M$  modelos distintos como ilustra a Figura 26.

Figura 26 – Princípio de funcionamento básico do filtro IMM



Fonte: ASSIS E QUEMEL, 2011

São quatro os passos fundamentais para se obter a estimativa final:

1. Reinicialização: baseia-se em uma associação ponderada das estimativas do instante anterior de cada um dos filtros. Através da mistura destas estimativas a entrada destes filtros para a obtenção da estimativa do próximo instante de tempo é calculada.
2. Aplicação das equações de filtragem: aplicam-se as equações referentes a cada um dos M filtros que compõem o banco de filtros.
3. Atualização da probabilidade dos modelos: para a realização dessa etapa, utiliza-se as informações dos filtros, como a plausibilidade de cada um. Nesta etapa, ocorre a atualização das probabilidades da ocorrência de cada um dos modelos.
4. Cálculo da estimativa: a estimativa global e sua matriz de covariância são obtidas através da associação ponderada das estimativas e suas consequentes covariâncias, resultantes de cada um dos M filtros.

Para a realização destes quatro passos listados acima, a comunicação entre os filtros é fundamental. Esta baseia-se na probabilidade de transição de um modelo  $i$  para um modelo  $j$ , dada pela equação (113).

$$P\left(m_k^{(j)} \mid m_{k-1}^{(i)}\right) = \pi_{ij} \quad (113)$$

As equações (50) e (52) podem ser reescritas para o  $i$ -ésimo modelo  $m^{(i)} \in M = \{m^{(j)}\}_{j=1}^r$ , resultando em:

$$\vec{x}(k+1) = F(k)^{(i)}\vec{x}(k) + G(k)^{(i)}\vec{u}(k) + v(k)^{(i)} \quad (114)$$

$$\vec{z}(k) = H(k)^{(i)}\vec{x}(k) + w(k)^{(i)} \quad (115)$$

em que  $w(k)^{(i)}$  é o processo estocástico do ruído da medida, com distribuição gaussiana que possui uma matriz de covariância  $R_k^{(i)}$  e média  $\bar{w}_k^{(i)}$ , ou seja,  $w(k)^{(i)} \sim \mathcal{N}(\bar{w}_k^{(i)}, R_k^{(i)})$ , e  $v(k)^{(i)}$  é o processo estocástico do ruído do estado com distribuição gaussiana que possui uma matriz de covariância  $Q_k^{(i)}$  e média  $\bar{v}_k^{(i)}$ , assim  $v_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(\bar{v}_k^{(i)}, Q_k^{(i)})$ .

#### 4.3.1 O filtro IMM na estimação de sistemas dinâmicos lineares

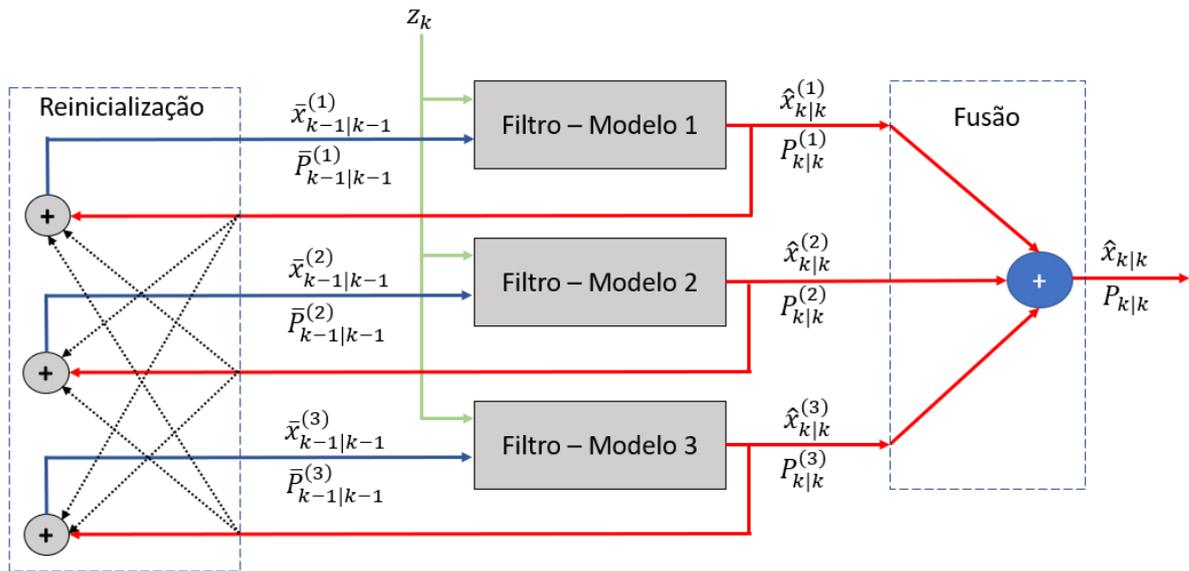
No filtro IMM, a estimativa global, em um instante de tempo  $k$ , é calculada utilizando  $r$  filtros, sendo que cada filtro recebe uma combinação das estimativas do instante anterior – etapa de reinicialização. Através de uma interação dos  $r$  filtros, dada pela mistura de estimativas ( $\bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)}$ ) e pela mistura de probabilidades é obtida a entrada do filtro referente ao modelo  $j$  (LI, KIRUBARAJAN e SHALOM, 2001).

O algoritmo do filtro IMM executa cada um dos filtros uma vez em cada recursão. Cada filtro  $i$  no instante de tempo  $k$  possui sua própria reinicialização definida como  $\bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)}$  e que representa a melhor estatística das informações anteriores. (LI e JILKOV, 2005).

Logo, a etapa de reinicialização depende de três fatores de mistura:

- $\mu_{k-1}^{j|i}$ : mistura de probabilidades.
- $\bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)}$ : mistura de estimativas.
- $\bar{P}_{k-1|k-1}^{(i)}$ : mistura de covariâncias.

Figura 27 – Visualização do funcionamento do filtro IMM



Fonte: Os autores

As demonstrações matemáticas a seguir têm como referência o livro “*Estimation with applications to tracking and navigation*” de Shalom, Li e Kirubarajan (2001) e o artigo “*Survey of Maneuvering Target Tracking. Part V: Multiple-Model Methods*” de Li e Jilkov (2005). As equações referentes a filtragem, atualização de probabilidade (probabilidade *a posteriori*) e estimativa/covariância globais seguem o mesmo raciocínio explicado nas equações do filtro de Kalman.

1) Equações da etapa de reinicialização:

A etapa de reinicialização consiste em uma associação ponderada das estimativas de cada um dos filtros, como ilustra a Figura 27.

- Probabilidade do modo previsto: definida pela equação (116).

$$\mu_{k|k-1}^{(i)} = P(m_k^{(i)} | Z^{k-1}) = \sum_j \pi_{ji} \mu_{k-1}^{(j)} \quad (116)$$

- Mistura de probabilidades: definida pela equação (117)

$$\mu_{k-1}^{j|i} = P(m_{k-1}^{(j)} | m_k^{(i)}, Z^{k-1}) \quad (117)$$

ou seja, é a probabilidade de que o modelo  $j$  estava sendo considerado no instante  $k - 1$  sabendo que no instante atual (instante de tempo  $k$ ) o modelo considerado é o  $i$ .

Utilizando o teorema de Bayes em (49) e a lei da probabilidade total é possível expressar a equação (117) da seguinte forma:

$$\mu_{k-1}^{j|i} = P\left(m_{k-1}^{(j)} \mid m_k^{(i)}, Z^{k-1}\right) = \frac{P\left(m_k^{(i)} \mid m_{k-1}^{(j)}, Z^{k-1}\right) P\left(m_{k-1}^{(j)} \mid Z^{k-1}\right)}{\sum_{j=1}^r P\left(m_k^{(i)} \mid m_{k-1}^{(j)}, Z^{k-1}\right) P\left(m_{k-1}^{(j)} \mid Z^{k-1}\right)} \quad (118)$$

Sabendo que o sistema é markoviano, ou seja, o próximo estado depende apenas do estado atual, independentemente do estado passado, tem-se:

$$P\left(m_k^{(i)} \mid m_{k-1}^{(j)}, Z^{k-1}\right) = P\left(m_k^{(i)} \mid m_{k-1}^{(j)}\right) = \pi_{ji} \quad (119)$$

Portanto:

$$\mu_{k-1}^{j|i} = \frac{\pi_{ji} P\left(m_{k-1}^{(j)} \mid Z^{k-1}\right)}{\sum_{j=1}^n \pi_{ji} P\left(m_{k-1}^{(j)} \mid Z^{k-1}\right)} = \frac{\pi_{ji} \mu_{k-1}^{(j)}}{\sum_{j=1}^n \pi_{ji} \mu_{k-1}^{(j)}} \quad (120)$$

➤ Mistura de estimativas: A mistura de estimativas é determinada pela equação (121)

$$\bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)} = E\left[x_{k-1} \mid Z^{k-1}, m_k^{(i)}\right] \quad (121)$$

utilizando a lei do valor esperado iterado dado por (122),

$$E[Y] = E[E[Y|X]] \quad (122)$$

obtem-se (123):

$$\bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)} = E\left[x_{k-1} \mid Z^{k-1}, m_k^{(i)}\right] = E\left\{E\left[x_{k-1} \mid m_{k-1}^{(j)}, m_k^{(i)}, Z^{k-1}\right] \mid Z^{k-1}, m_k^{(i)}\right\} \quad (123)$$

sabendo que:

$$E[E[Y|X]] = \sum_x E[Y|x] P(X = x) \quad (124)$$

$$E[E[Y|X]|Z] = \sum_x E[Y|x] P(x|Z) \quad (125)$$

assim, utilizando as esperanças iteradas e sabendo que  $x_{k-1}$  é independente de  $m_k^{(i)}$  pode-se expandir a equação como mostra (126):

$$\bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)} = E\left\{E\left[x_{k-1} \mid m_{k-1}^{(j)}, m_k^{(i)}, Z^{k-1}\right] \mid Z^{k-1}, m_k^{(i)}\right\} \quad (126)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^r E \left[ x_{k-1} \middle| m_{k-1}^{(j)}, m_k^{(i)}, Z^{k-1} \right] P \left( m_{k-1}^{(j)}, m_k^{(i)}, Z^{k-1} \middle| Z^{k-1}, m_k^{(i)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^r \hat{x}_{k-1|k-1}^{(j)} P \left\{ m_{k-1}^{(j)} \middle| Z^{k-1}, m_k^{(i)} \right\}
\end{aligned}$$

em que  $X, Y$  e  $Z$  das equações (124) e (125) são dados por:

- $x_{k-1} \equiv Y$
- $m_{k-1}^{(j)}, m_k^{(i)}, Z^{k-1} \equiv X$
- $Z^{k-1}, m_k^{(i)} \equiv Z$

por fim, utilizando a igualdade dada por (118), obtém-se (127):

$$\bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^r \hat{x}_{k-1|k-1}^{(j)} \mu_{k-1}^{j|i} \quad (127)$$

➤ Mistura de covariâncias:

$$\bar{P}_{k-1|k-1}^{(i)} = \sum_j \left[ P_{k-1|k-1}^{(j)} + \left( \bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k-1|k-1}^{(j)} \right) \left( \bar{x}_{k-1|k-1}^{(i)} - \hat{x}_{k-1|k-1}^{(j)} \right)^T \right] \mu_{k-1}^{j|i} \quad (128)$$

2) Equações do filtro:

➤ Estado previsto

$$\hat{x}_{k|k-1}^{(i)} = F_{k-1}^{(i)} \hat{x}_{k-1|k-1}^{(i)} + G_{k-1}^{(i)} \bar{v}_{k-1}^{(i)} \quad (129)$$

➤ Covariância prevista

$$P_{k|k-1}^{(i)} = F_{k-1}^{(i)} P_{k-1|k-1}^{(i)} \left( F_{k-1}^{(i)} \right)^T + G_{k-1}^{(i)} Q_{k-1}^{(i)} \left( G_{k-1}^{(i)} \right)^T \quad (130)$$

➤ Covariância residual prevista

$$S_k^{(i)} = H_k^{(i)} P_{k|k-1}^{(i)} \left( H_k^{(i)} \right)^T + R_k^{(i)} \quad (131)$$

➤ Inovação de medição

$$\tilde{z}_k^{(i)} = z_k - H_k^{(i)} \hat{x}_{k|k-1}^{(i)} - \bar{w}_k^{(i)} \quad (132)$$

- Ganho do filtro

$$K_k^{(i)} = P_{k|k-1}^{(i)} \left( H_k^{(i)} \right)^T \left( S_k^{(i)} \right)^{-1} \quad (133)$$

- Estado atualizado

$$\hat{x}_{k|k}^{(i)} = \hat{x}_{k|k-1}^{(i)} + K_k^{(i)} \tilde{z}_k^{(i)} \quad (134)$$

- Covariância atualizada

$$P_{k|k}^{(i)} = P_{k|k-1}^{(i)} - K_k^{(i)} S_k^{(i)} \left( K_k^{(i)} \right)^T \quad (135)$$

3) Equações da atualização de probabilidade:

- Função de verossimilhança:

$$L_k^{(i)} = p \left[ \tilde{z}_k^{(i)} \mid m_k^{(i)}, Z^{k-1} \right] \quad (136)$$

- Atualização da probabilidade do modelo: é definida pela equação (137)

$$\mu_k^{(i)} = P \left( m_k^{(i)} \mid Z^k \right) = P \left( m_k^{(i)} \mid Z_k, Z^{k-1} \right) \quad (137)$$

Sendo  $m_k^{(j)}$  uma variável discreta e  $Z$  uma variável contínua, utiliza-se a versão mista e híbrida para duas condicionais do teorema de Bayes, dada por (138)

$$P(B_i \mid x, y) = \frac{f_x(x \mid B_i, y) P(B_i \mid y)}{f_x(x \mid y)} \quad (138)$$

Colocando as variáveis do filtro IMM na equação acima, obtém (139)

$$P(m^{(j)} \mid Z_k, Z^{k-1}) = \frac{f_Z(z_k \mid Z^{k-1}, m^{(j)}) P(m^{(j)} \mid Z^{k-1})}{f_Z(z_k \mid Z^{k-1})} \quad (139)$$

Utilizando da lei da probabilidade total, é possível reescrever o denominador da equação acima como segue:

$$f_Z(z_k \mid Z^{k-1}) = \sum_{i=1}^r f_Z(z_k \mid m^{(i)}, Z^{k-1}) P(m^{(i)} \mid Z^{k-1}) \quad (140)$$

$$\mu_k^{(j)} = \frac{f_Z(z_k \mid Z^{k-1}, m_k^{(j)}) \mu_{k-1}^{(j)}}{\sum_{i=1}^r f_Z(z_k \mid Z^{k-1}, m_k^{(i)}) \mu_{k-1}^{(i)}} \quad (141)$$

Nesse caso, o modelo  $m$  depende do tempo  $k$ , assim:

$$L_k^{(i)} = f_Z(z_k | Z^{k-1}, m_k^{(i)}) \quad (142)$$

Por hipótese, a função de verossimilhança é dada por:

$$L_k^{(i)} = \mathcal{N}(0; S_k^{(i)}) \quad (143)$$

Lembrando que  $S_k^{(i)}$  é a matriz de covariância da inovação, assim é possível obter a equação (144)

$$\mu_k^{(i)} = \frac{\mu_{k|k-1}^{(i)} L_k^{(i)}}{\sum_j \mu_{k|k-1}^{(j)} L_k^{(j)}} \quad (144)$$

#### 4) Equações das estimativas/covariâncias globais:

Estas são obtidas através da combinação ponderada das covariâncias e das estimativas resultantes de cada um dos  $M$  filtros. As probabilidades atualizadas ( $W$ ) são utilizadas como “pesos” para estes cálculos.

➤ Estimativa global:

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_i \hat{x}_{k|k}^{(i)} \mu_k^{(i)} \quad (145)$$

➤ Covariância global:

$$P_{k|k} = \sum_i \left[ P_{k|k}^{(i)} + (\hat{x}_{k|k} - \hat{x}_{k|k}^{(i)}) (\hat{x}_{k|k} - \hat{x}_{k|k}^{(i)})^T \right] \mu_k^{(i)} \quad (146)$$

Para a construção desse filtro, é necessária a utilização de uma estrutura bayesiana. Inicia-se com as probabilidades anteriores (*a priori*) de cada modelo estar correto, assim define-se que o sistema está em um modo específico, dessa forma é obtida as probabilidades subsequentes (*a posteriori*).

## 5 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS

A aplicação dos filtros estocásticos apresentados no Capítulo 4 foi realizada em etapas bem definidas. Inicialmente, a discretização dos sistemas que compõem o modelo matemático desenvolvido para o problema foi necessária. Na sequência, a seleção de sinais para filtragem foi realizada, e, por fim, a aplicação dos filtros. Ao final deste capítulo os resultados obtidos para a aplicação dos filtros serão apresentados e analisados.

### 5.1 DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS

O modelo matemático desenvolvido para o sinal de ECG mostrado nas equações (37)–(42) é representado por equações matriciais de espaço de estados a tempo contínuo. Tendo em vista a aplicação dos filtros estocásticos estudados, a discretização dos sistemas que modelam o sinal de ECG foi necessária.

Ogata e Yang (2002) definem a discretização de sistemas conforme é descrito, na sequência de equações apresentadas a seguir. Em (147) e (148) um sistema contínuo genérico é representado em espaço de estados.

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u} \quad (147)$$

$$\vec{y} = C\vec{x} + D\vec{u} \quad (148)$$

A exponencial da matriz A é dada por (149).

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \quad (149)$$

O sistema equivalente discretizado é apresentado em (150) e (151), em que  $T$  representa o tempo de amostragem do sistema.

$$\vec{x}((k + 1)T) = G(T)\vec{x}(kT) + H(T)\vec{u}(kT) \quad (150)$$

$$\vec{y}(kT) = C(T)\vec{x}(kT) + D(T)\vec{u}(kT) \quad (151)$$

Nota-se que as matrizes  $A$  e  $B$  quando discretizadas são representadas pelas matrizes  $G$  e  $H$ , a relação destas matrizes é descrita em (152) e (153). Por fim, considerando que:

$$G(T) = e^{AT} \quad (152)$$

$$H(T) = \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B \quad (153)$$

$$C(T) = C \quad (154)$$

$$D(T) = D \quad (155)$$

É possível discretizar os sistemas contínuos que descrevem o modelo matemático desenvolvido para a derivação I do sinal de eletrocardiograma. Para mais detalhes, os autores recomendam a referência Ogata e Yang (2002).

Neste trabalho, a discretização dos sistemas representados em espaços de estado que modelam o sinal de ECG foi realizada no *software* MATLAB a partir do comando “c2d”. O comando “c2d” é uma função presente no *software* MATLAB que discretiza o sistema dinâmico em tempo contínuo, usando um segurador de ordem zero nas entradas do sistema e um tempo de amostragem definido para cada um dos sinais selecionados.

## 5.2 SINAIS SELECIONADOS

Os sinais utilizados para aplicação dos filtros estocásticos foram previamente selecionados. A seleção foi realizada em quatro bancos de dados disponibilizados pelo *PhysioBank*, com o intuito de apresentar quatro sinais diferentes de eletrocardiograma para a aplicação de filtros estocásticos.

Inicialmente, a seleção de sinais foi focada para sinais referentes à derivação I do sinal de eletrocardiograma. Entretanto, durante a análise de sinais para a aplicação de filtros, notou-se que outro grupo de sinais de eletrocardiograma, referentes à derivação II, apresentava características bastante semelhantes em relação ao grupo de sinais encontrados para a derivação I.

A semelhança de configuração entre a derivação I e II é notória, e é ilustrada na Figura 28.

**Figura 28 – Ciclo completo referente às derivações I e II de um ECG, respectivamente.**



**Fonte: GUYTON; HALL, 2006, p.124.**

A semelhança de configuração pode ser confirmada por uma análise das componentes vetoriais das derivações do sinal do eletrocardiograma. A Figura 15, apresentada no Capítulo 2, mostra que os ângulos de orientação referentes às derivações I e II se encontram dentro do mesmo quadrante. A proximidade dos ângulos de orientação afeta apenas a amplitude do sinal esperado para cada um dos trechos do ECG. Com isso, conclui-se que o modelo matemático desenvolvido neste trabalho para a derivação I pode ser considerado válido para representar a derivação II do sinal do eletrocardiograma.

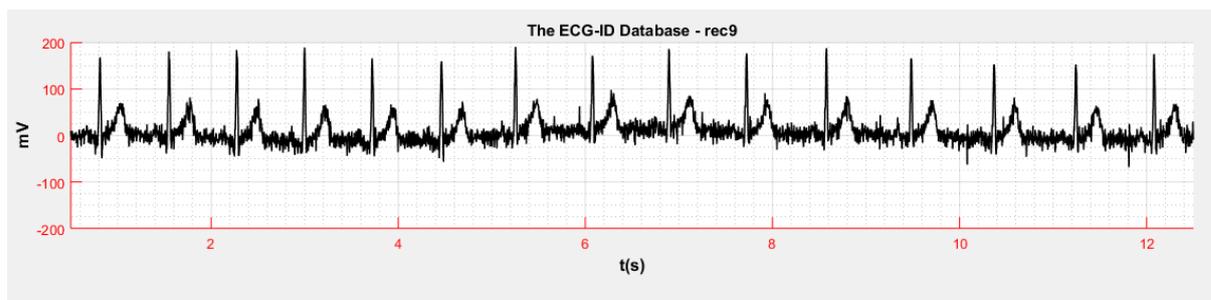
Dois sinais referentes à derivação I foram selecionados para a aplicação dos filtros estocásticos. Tais sinais são apresentados nas Seções 5.2.1 e 5.2.4, e, dois sinais referentes à derivação II foram selecionados para a aplicação dos filtros estocásticos, estes sinais são apresentados nas Seções 5.2.2 e 5.2.3.

#### 5.2.1 Sinal 1: Derivação I de paciente saudável

O primeiro sinal selecionado foi disponibilizado pelo banco de dados “*The ECG-ID Database*” e fornecido por Lugovayana, T.S. (2005). O sinal foi medido em um

paciente do sexo masculino de 25 anos, voluntário de um estudo realizado no intuito de buscar um modelo de identificação de indivíduos por meio da característica do ECG. O sinal selecionado é resultante da derivação I sem pré-processamento e é considerado um sinal saudável. A Figura 29 mostra o sinal coletado.

**Figura 29 – Visualização do sinal referente à derivação I – rec9.**



Fonte: *Physiobank*.

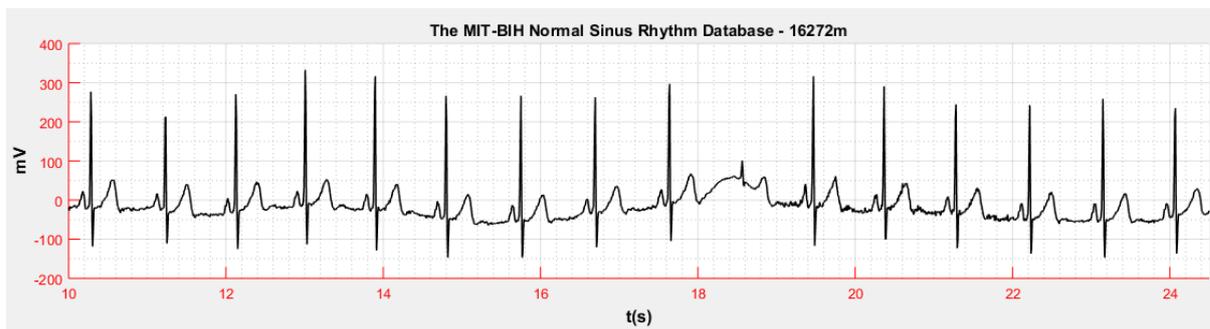
O sinal coletado é bruto e apresenta um ruído que distorce a linha de base em toda a sua extensão. Além disso, a onda P não aparece nos ciclos da amostra. O abaulamento da linha de base acontece devido a um sinal de baixa frequência e pouca amplitude. A frequência de amostragem é de 500 Hz, e a resolução do sinal é de 12 bits. Todas as informações aqui apresentadas para o sinal estão disponíveis no banco de dados *Physiobank*.

### 5.2.2 Sinal 2: Derivação II de paciente saudável

O segundo sinal selecionado foi disponibilizado pelo banco de dados “*The MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database*”. O sinal foi medido em uma paciente do sexo feminino, de 20 anos. O sinal selecionado é resultante da derivação II modificada, e mesmo apresentando um desvio em  $t = 18 s$ , é considerado saudável pelos dados do site.

Conforme apresentado no Capítulo 2, as derivações são formadas a partir da referência do plano vertical do triângulo de Einthoven (ilustrado na Figura 14). A derivação II é gerada tomando o braço direito como negativo e as pernas como positivas. Entretanto, o sinal selecionado no banco de dados foi gerado de forma modificada, tomando o ombro direito como negativo e a virilha como positiva, aproximando os eletrodos dos vértices do triângulo de Einthoven. A Figura 30 apresenta o sinal da derivação II modificada.

**Figura 30 – Visualização do sinal referente à derivação II modificada – 16272m.**



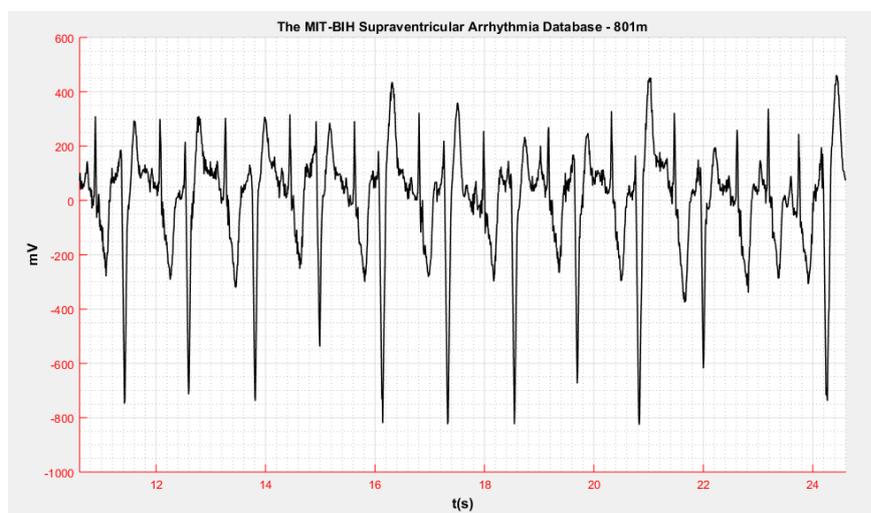
Fonte: *Physiobank*.

Observa-se que em  $t = 18s$  uma variação do complexo QRS é apresentada. A variação pode ter ocorrido no sinal devido a uma arritmia pontual, mas não pode ser considerada uma cardiopatia. O sinal não apresenta arritmias significativas, portanto é considerado saudável. A frequência de amostragem é de 128 Hz, e a resolução do sinal é de 12 bits. Todas as informações apresentadas para o sinal estão disponíveis no banco de dados *Physiobank*.

### 5.2.3 Sinal 3: Derivação II de paciente não saudável.

O terceiro sinal selecionado foi disponibilizado pelo banco de dados “*The MIT-BIH Supraventricular Arrhythmia Database*” e fornecido por Greenwald SD. (1990). O sinal selecionado é resultante da derivação II modificada, e apresenta uma arritmia supraventricular. A Figura 31 mostra o sinal coletado.

**Figura 31 – Visualização do sinal referente à derivação II modificada – 801m.**



Fonte: *Physiobank*.

A arritmia supraventricular é caracterizada pela presença de ritmos ectópicos no sinal do eletrocardiograma. Segundo Thaler (2013), ritmos ectópicos são ritmos anormais originados de outro lugar que não o nodo sinusal.

Conforme visto no Capítulo 2, o nodo sinusal é responsável por gerar o impulso rítmico normal, transmitido pelas vias internodais ao nodo atrioventricular (A-V), que atrasa o impulso antes que ele chegue aos ventrículos via feixe atrioventricular, onde os ramos direito e esquerdo do feixe de fibras de Purkinje levam os sinais elétricos para todo o tecido ventricular.

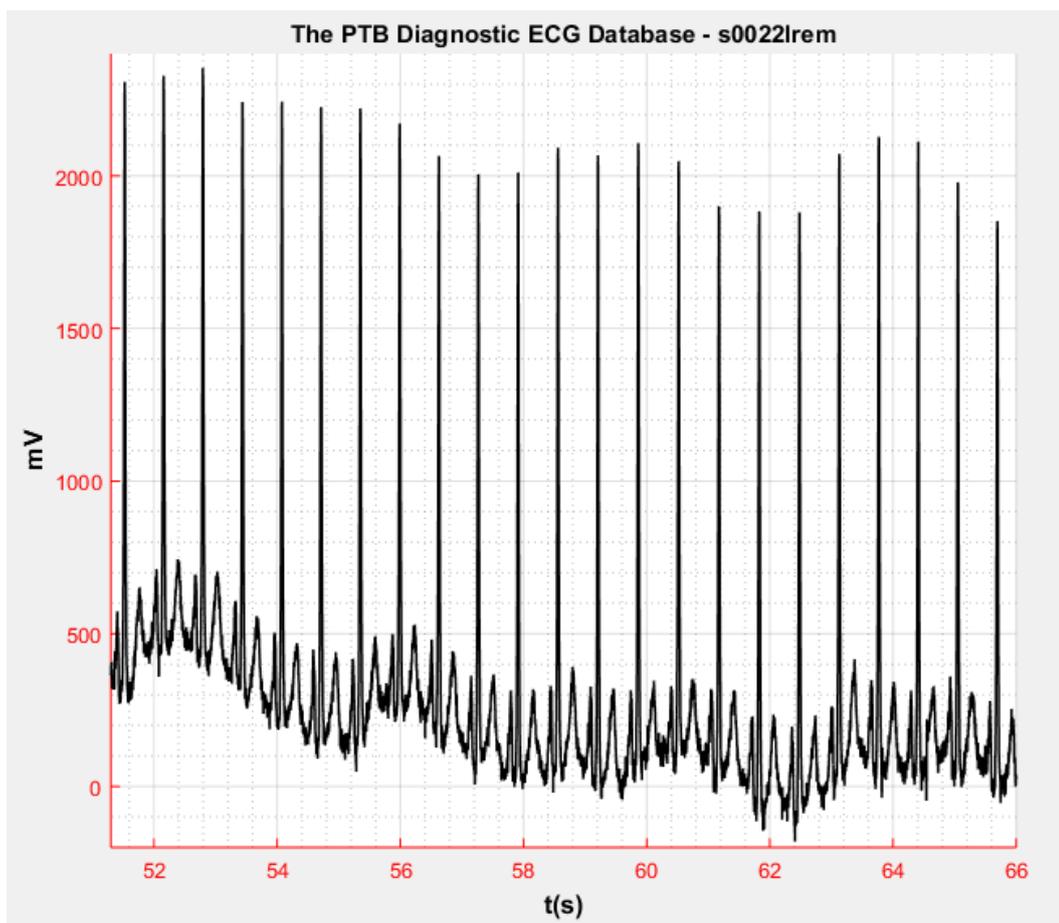
O sinal coletado no banco de dados apresenta batimentos supraventriculares ectópicos, causados por impulsos rítmicos que podem ser originados nos átrios ou na vizinhança do nodo atrioventricular (THALER, 2013). Os batimentos supraventriculares ectópicos causam uma alteração na configuração e na amplitude dos intervalos previstos para um ciclo saudável. As alterações registradas no eletrocardiograma definem um padrão que se repete a cada dois ciclos cardíacos.

A frequência de amostragem deste sinal é de 128 Hz, e a resolução é de 10 bits. Todas as informações aqui apresentadas para o sinal estão disponíveis no banco de dados *Physiobank*.

#### 5.2.4 Sinal 4: Derivação I de paciente não saudável.

O quarto sinal selecionado foi disponibilizado pelo banco de dados “*The PTB Diagnostic ECG Database*” e fornecido por Bousseljot, R., Kreiseler, D., Schnabel, A. (1995). O sinal foi medido em uma paciente do sexo feminino de 62 anos, vítima de um infarto. Os dados selecionados foram coletados seis dias após o acontecimento e dois dias antes de realização de um procedimento de cateterismo.

Figura 32 – Visualização do sinal referente à derivação I modificada – s00221rem.



Fonte: *Physiobank*.

Apesar do infarto sofrido pelo paciente, o sinal da derivação I apresenta uma aparência saudável. Um ruído branco com baixa distorção, cerca de  $3 \mu V_{RMS}$  (de acordo com as propriedades do gravador), pode ser observado e um abaulamento da linha de base com característica senoidal de baixa frequência. A frequência de amostragem é de 1000 Hz, e a resolução do sinal é de 16 bits. Todas as informações apresentadas para o sinal estão disponíveis no banco de dados *Physiobank*.

### 5.3 APLICAÇÃO DE FILTROS ESTOCÁSTICOS

A aplicação dos filtros estocásticos foi iniciada pela escolha de intervalos dos sinais apresentados na Seção 5.2, visando demonstrar resultados representativos à análise das aplicações propostas.

Para este trabalho, quatro filtros de Kalman clássico foram selecionados, sendo que cada um destes filtros utiliza um dos quatro modelos matemáticos apresentados no Capítulo 2. Os filtros foram nomeados de acordo com os modelos pelos quais são constituídos, sendo estes:

Filtro 1 – Modelo onda P:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P(t) \\ \ddot{x}_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\pi}{79}\right)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P(t) \\ \dot{x}_P(t) \end{bmatrix} \quad (156)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_P(t) \\ \dot{x}_P(t) \end{bmatrix}$$

Filtro 2 – Modelo retas (complexo QRS):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R(t) \\ \ddot{x}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ \dot{x}_R(t) \end{bmatrix} \quad (157)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_R(t) \\ \dot{x}_R(t) \end{bmatrix}$$

Filtro 3 – Modelo onda T:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_T(t) \\ \ddot{x}_T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\pi}{159}\right)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T(t) \\ \dot{x}_T(t) \end{bmatrix} \quad (158)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_T(t) \\ \dot{x}_T(t) \end{bmatrix}$$

Filtro 4 – Modelo reta 0 (segmento entre ciclos):

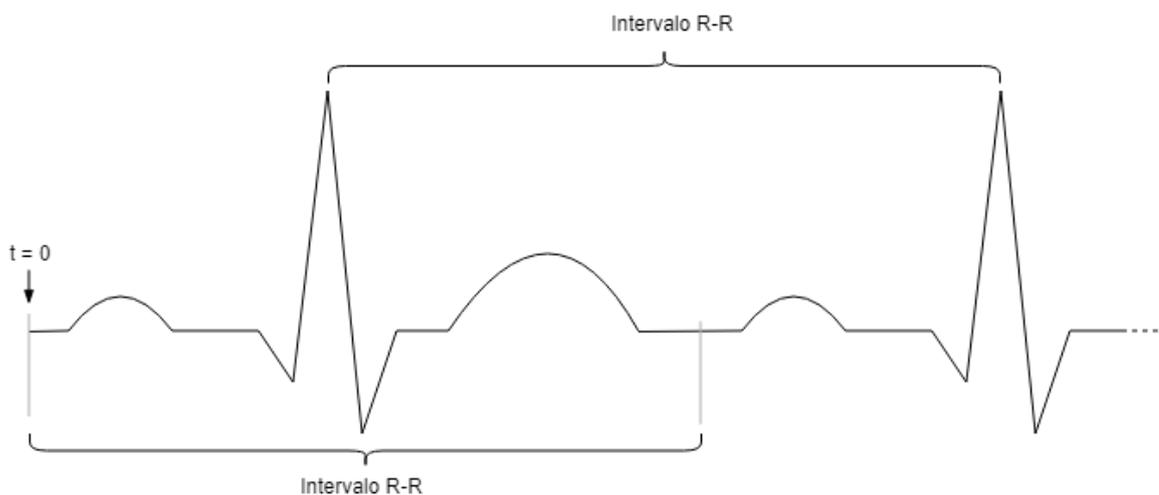
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{R0}(t) \\ \ddot{x}_{R0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{R0}(t) \\ \dot{x}_{R0}(t) \end{bmatrix} \quad (159)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{R0}(t) \\ \dot{x}_{R0}(t) \end{bmatrix}$$

A discretização destes modelos foi realizada para cada um dos sinais selecionados, considerando os respectivos períodos de amostragem dos mesmos. Com os filtros individualmente definidos, a aplicação do filtro IMM é viável, pois conforme apresentado no Capítulo 4 deste trabalho, os filtros que o compõem se comunicam através de conexões probabilísticas, determinando o modelo mais adequado para cada intervalo de amostra.

Na aplicação do filtro de Kalman clássico, fez-se necessário o pré-processamento por meio de duas funções auxiliares, as quais definem qual função deve ser aplicada em cada intervalo do sinal. Inicialmente, os ciclos que compõem cada um dos sinais foram identificados a partir de uma função denominada “cicloECG” (Apêndice A). A Figura 33 ilustra a função “cicloECG”.

**Figura 33 – Representação visual da função cicloECG.**



**Fonte: Os autores.**

A função “cicloECG” estima os intervalos cíclicos individuais completos do sinal de entrada com base no número de amostras do intervalo R-R. O intervalo R-R foi a opção mais viável encontrada para identificação de número de ciclos, pois em cada componente R há um pico de tensão geralmente bastante superior aos demais pontos do sinal padrão do eletrocardiograma. Com a determinação do intervalo R-R, tem-se o período em que ocorre um ciclo ECG completo para o sinal analisado. A partir desse resultado, houve o deslocamento do período selecionado para o início do modelo desenvolvido neste trabalho, tomado como o início da onda P, onde  $t = 0$  s.

As variáveis de entrada definidas para esta função são:

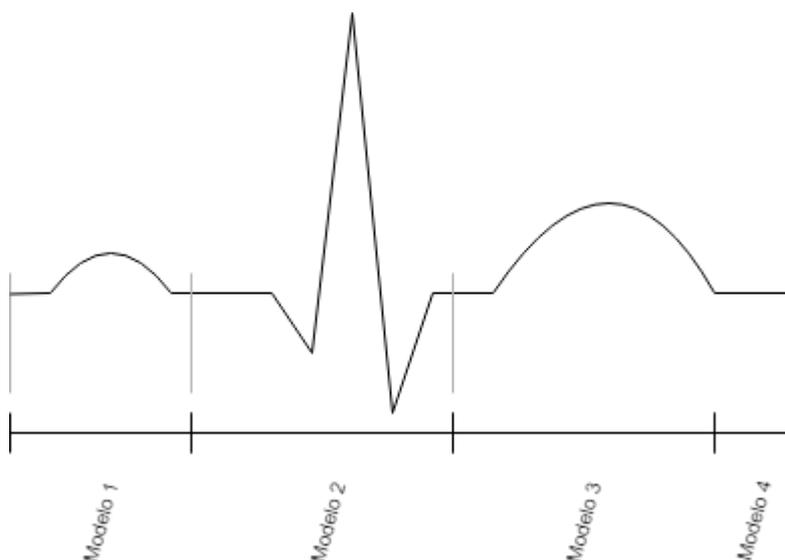
- a) Vetor de amostras do sinal de eletrocardiograma;
- b) Período de amostragem;
- c) Valor de referência para uma tensão encontrada apenas nas amostras pertencentes ao complexo QRS em todos os ciclos do sinal.

As variáveis de saída desta função são:

- a) Número de amostras: matriz com intervalos individuais por amostra;
- b) Tempo: matriz com intervalos individuais por tempo;
- c) Número médio: intervalos médios para o sinal de entrada.

Há de se considerar que em casos atípicos, como uma descarga arritmica do coração, a função cicloECG perde confiança, pois pode haver a perda de referência dos picos R como os elementos superiores das tensões. Nesse caso, a função deve ser utilizada apenas de forma auxiliar, necessitando uma revisão e possível correção dos intervalos cíclicos individuais. A partir dos resultados obtidos pela função cicloECG, houve uma nova segmentação, agora definida na função “splitECG” (Apêndice B). A Figura 34 ilustra a função “splitECG”.

**Figura 34 – Representação visual da função splitECG.**



**Fonte: Os autores.**

A função “splitECG” divide o sinal de entrada em segmentos, de acordo com os quatro modelos matemáticos que são aplicáveis a cada ciclo de ECG. A divisão é resultado de um conjunto de porcentagens definidas em cada ciclo para a ocorrência dos modelos esperados. Os modelos utilizados foram apresentados nas equações (156) a (159). As variáveis de entrada para esta função são:

- a) Vetor de amostras do sinal de eletrocardiograma;
- b) Número de amostras: matriz com intervalos individuais por amostra;

- c) Porcentagem de sinal esperada para cada trecho do ciclo referente à aplicação do modelo (modelo reta zero, modelo reta, modelo onda P, modelo onda T);

As variáveis de saída para esta função são:

- a) Matriz que relaciona os intervalos de amostra definidos para os trechos do ciclo referente à aplicação do modelo.

Com a aplicação das funções apresentadas para os sinais selecionados a aplicação dos filtros foi viável. A seguir, os parâmetros adotados para a aplicação dos filtros são apresentados.

Os valores iniciais estipulados foram os mesmos para todos os filtros aplicados. A estimativa inicial do vetor de estados é apresentada em (160), em mV. A matriz de covariância do erro de estimativa inicial é apresentada em (161), a medida inicial  $Z^0$  é dada pela medida inicial de cada um dos sinais selecionados e apresentados em 5.2.1 – 5.2.4.

$$\hat{x}(0|0) = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$P(0|0) = 1,5^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (161)$$

As matrizes de covariância do ruído do processo e do ruído da medida foram calibradas de acordo com os índices apresentados na Tabela 5.

**Tabela 5 – Índices utilizados para as matrizes de covariância de ruídos.**

Sinal 1: Derivação I de paciente saudável				
	FILTRO 1 Modelo onda P	FILTRO 2 Modelo reta	FILTRO 3 Modelo onda T	FILTRO 4 Modelo reta 0
$Q_{KF}$	200	20	20	20
$R_{KF}$	2000	200	200	2000
$Q_{IMM}$	20	2	2	1
$R_{IMM}$	200	200	200	2000
Sinal 2: Derivação II de paciente saudável				
	FILTRO 1 Modelo onda P	FILTRO 2 Modelo reta	FILTRO 3 Modelo onda T	FILTRO 4 Modelo reta 0
$Q_{KF}$	1200	10	10	1
$R_{KF}$	500	100	100	2500
$Q_{IMM}$	1500	2	2	2
$R_{IMM}$	500	200	200	2500
Sinal 3: Derivação II de paciente não saudável				

	FILTRO 1 Modelo onda P	FILTRO 2 Modelo reta	FILTRO 3 Modelo onda T	FILTRO 4 Modelo reta 0
$Q_{KF}$	1200	10	10	1
$R_{KF}$	500	100	100	2500
$Q_{IMM}$	1500	2	2	2
$R_{IMM}$	500	200	200	2500
<b>Sinal 4: Derivação I de paciente não saudável</b>				
	FILTRO 1 Modelo onda P	FILTRO 2 Modelo reta	FILTRO 3 Modelo onda T	FILTRO 4 Modelo reta 0
$Q_{KF}$	750	2	2	1
$R_{KF}$	1500	200	200	2500
$Q_{IMM}$	20	2	2	1
$R_{IMM}$	2000	200	200	2500

**Fonte: Os autores.**

A matriz de probabilidades, ou transição dos saltos markovianos, utilizada como estimativa inicial de probabilidades na aplicação do filtro IMM é apresentada em (162).

$$\pi = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,15 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,25 & 0,25 & 0,1 \\ 0,6 & 0,2 & 0,15 & 0,05 \end{bmatrix} \quad (162)$$

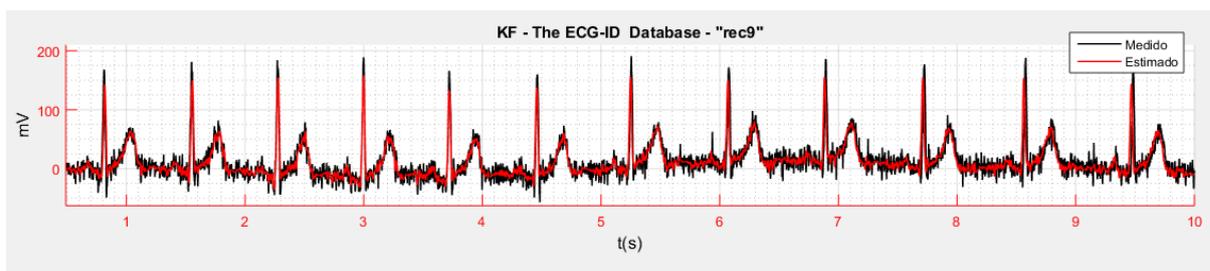
#### 5.4 ANÁLISE DE RESULTADOS

Os resultados obtidos para cada um dos sinais selecionados serão apresentados. A análise dos resultados ocorreu inicialmente por uma inspeção visual e, na sequência, pelo cálculo do EQM para todos os sinais estimados.

##### 5.4.1 Sinal 1: Derivação I de paciente saudável

As figuras a seguir exibem os resultados aplicados ao sinal apresentado na seção 5.2.1 deste trabalho. A aplicação do filtro de Kalman clássico para o sinal é mostrada na Figura 35.

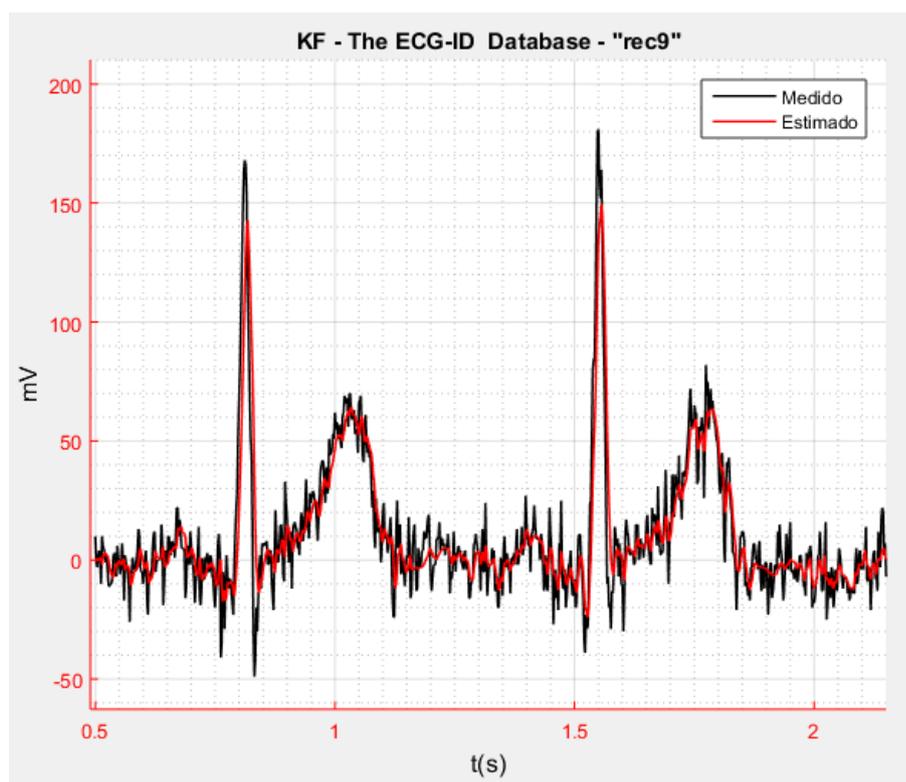
**Figura 35 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação I – rec9.**



Fonte: Os autores.

É possível notar que o filtro estima o sinal removendo parte do ruído presente nas medidas do sinal ECG. Entretanto, nota-se que o sinal estimado se distancia dos valores de pico do sinal real. Na Figura 36 a aplicação do filtro de Kalman clássico é mostrada com detalhes.

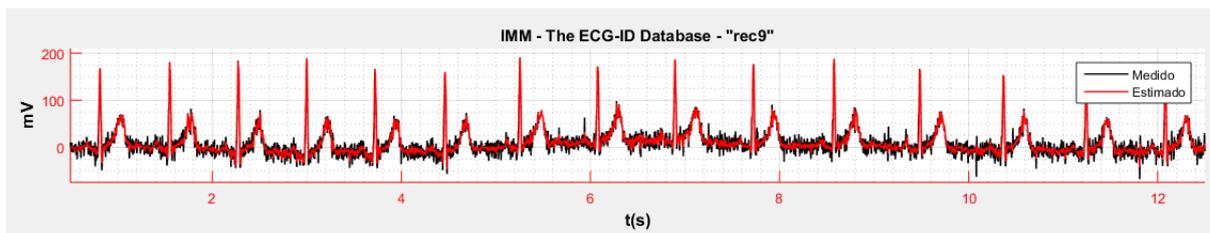
**Figura 36 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação I – rec9, detalhada.**



Fonte: Os autores.

A Figura 37 mostra a aplicação do filtro IMM para o mesmo sinal, com o chaveamento das probabilidades dos modelos que compõem o banco de filtros utilizado para a sua aplicação.

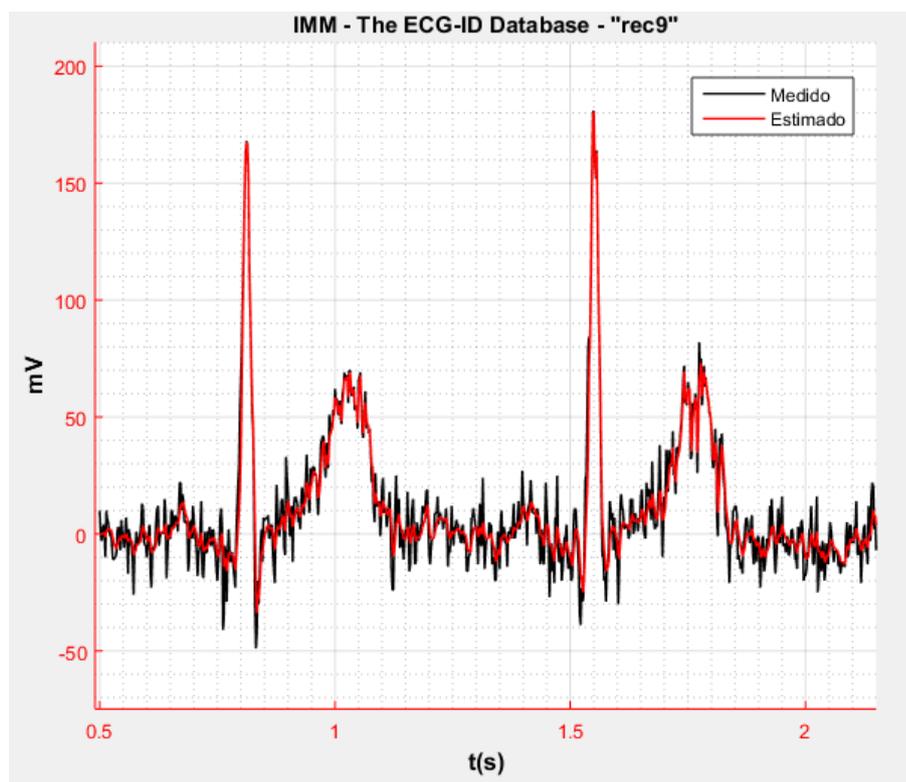
Figura 37 – Aplicação do filtro IMM referente à derivação I – rec9.



Fonte: Os autores.

O sinal estimado com a aplicação do filtro IMM apresenta a atenuação do ruído presente no sinal. É possível perceber com maior clareza na Figura 38 que todas as características de configuração de ondas do sinal de entrada foram preservadas, inclusive os maiores picos de tensão. Este fator é de grande importância para a análise médica destes sinais.

Figura 38 – Aplicação do filtro IMM clássico referente à derivação I – rec9.

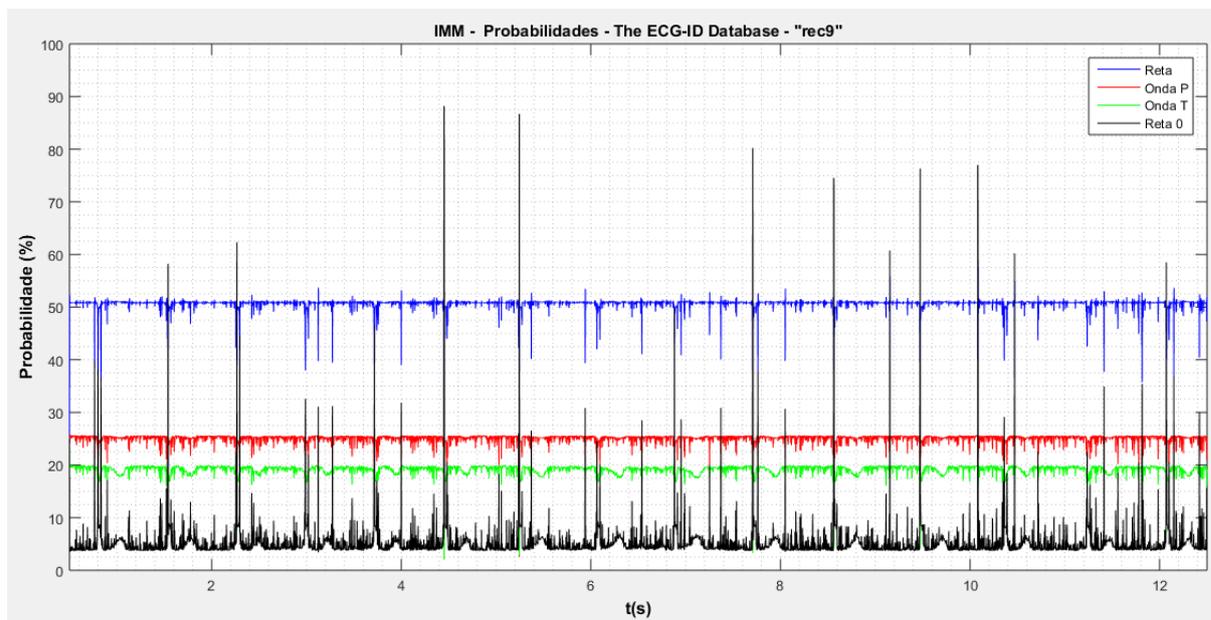


Fonte: Os autores.

O chaveamento ou a troca de filtros, ilustrado na Figura 39, mostra que o filtro IMM estimou o sinal de entrada de forma bastante adequada às características do sinal, sendo capaz de alternar entre filtros quando necessário. O resultado foi obtido somente após a sintonia, do filtro a partir de valores iniciais atribuídos às matrizes de covariância dos ruídos de estado e de medida. Com a inspeção visual, considerando principalmente o desempenho do filtro na configuração das ondas do sinal estimado,

pode-se considerar que o filtro IMM obteve um ótimo desempenho. A Tabela 6 mostra o EQM calculado para cada um dos filtros, confirmando a proximidade do sinal estimado ao sinal real para a aplicação do filtro IMM.

**Figura 39 – Curva de probabilidades chaveadas durante a aplicação do filtro IMM referente a derivação I – rec9**



Fonte: Os autores.

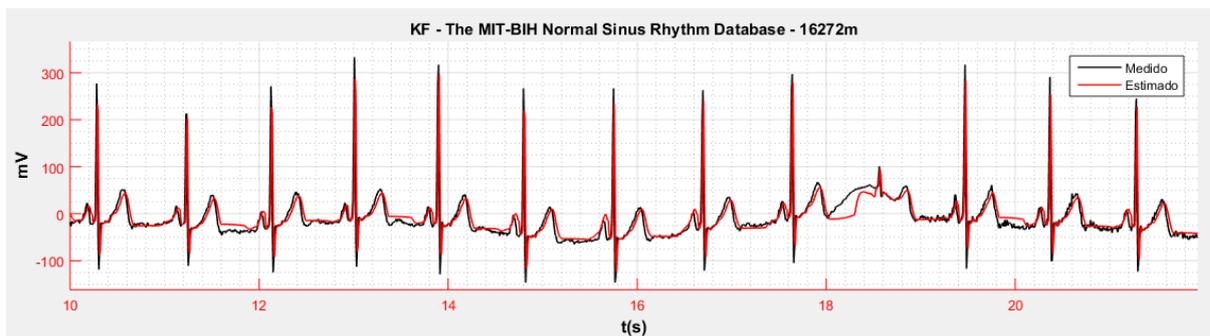
**Tabela 6 – Erro quadrático médio calculado para aplicação de filtros referente à derivação I – rec9.**

EQM	
Filtro de Kalman clássico	Filtro IMM
0,32566	0,08161

Fonte: Os autores.

#### 5.4.2 Sinal 2: Derivação II de paciente saudável

O segundo sinal, apresentado na seção 5.2.2, mostrou resultados interessantes em relação a aplicação dos filtros. Na Figura 40, a aplicação do filtro de Kalman clássico é apresentada.

**Figura 40 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação II modificada – 16272m**

Fonte: Os autores.

O comportamento do filtro acompanhou o modelo matemático e o sinal de entrada por período considerável de tempo. Entretanto, quando uma variação no sinal é apresentada próxima a  $t = 18\text{ s}$ , o filtro de Kalman clássico teve um comportamento diferenciado. A Figura 41 mostra detalhadamente que na região próxima a  $t = 18\text{ s}$  o filtro se distanciou do sinal de entrada, afetando a configuração da onda de forma bastante brusca.

Apesar do sinal ser considerado saudável, o ponto em que o filtro de Kalman clássico estima o sinal pode afetar o diagnóstico, pois a descaracterização do formato de onda pode ocultar configurações que caracterizam quadros de arritmia ou isquemia, por exemplo. Por outro lado, a variação detectada para este ponto do sinal pode ser considerada uma forma de identificação de variações no sinal medido a partir da avaliação do erro obtido na estimativa.

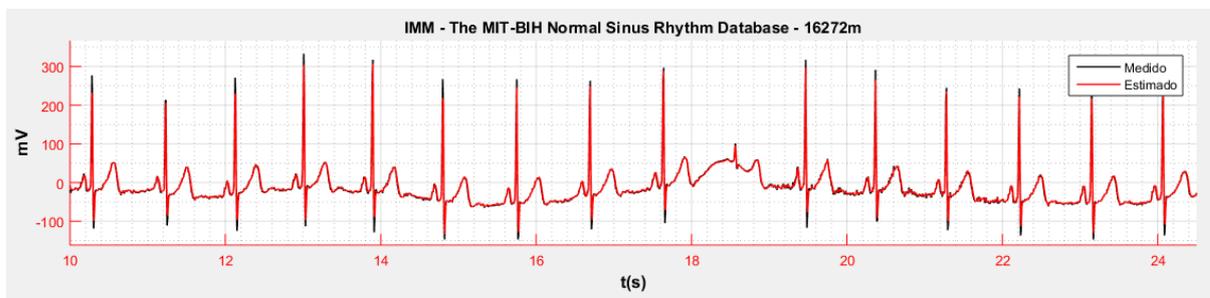
Figura 41 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação II modificada – 16272m em  $t = 18$  s.



Fonte: Os autores.

A estimativa do sinal com o filtro IMM, por sua vez, apresentou resultados muito fiéis à configuração da onda, e, simultaneamente, foi capaz de diminuir o ruído presente no sinal. A Figura 42 apresenta o resultado obtido para aplicação em questão.

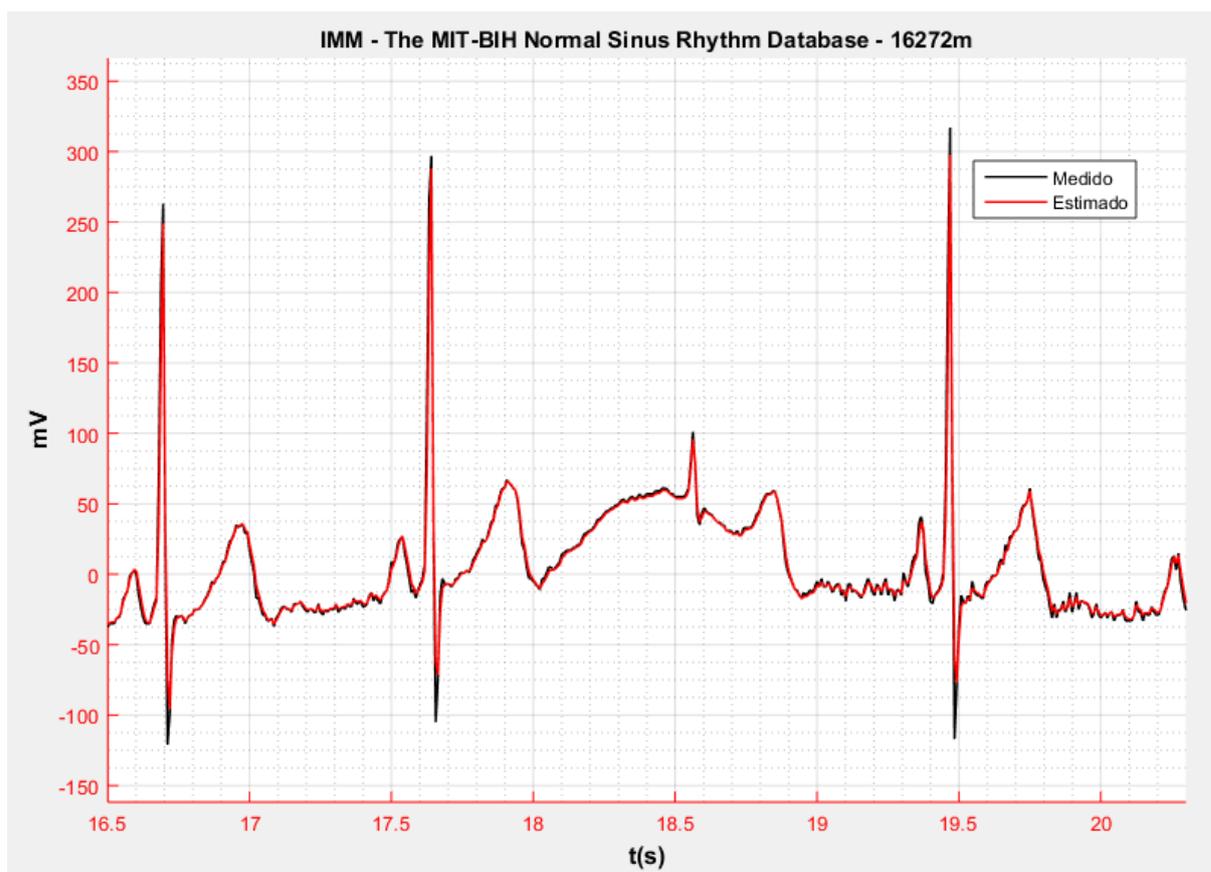
Figura 42 – Aplicação do filtro IMM clássico referente à derivação II modificada – 16272m



Fonte: Os autores.

A diferença entre as estimativas é visível. Nota-se que o filtro IMM tem um comportamento que acompanha as características de formação do sinal real, tal desempenho é devido a sua comunicação com conexões probabilísticas. Na Figura 43, a estimativa do sinal para o sinal na região próxima a  $t = 18\text{ s}$  é apresentada com maior detalhamento.

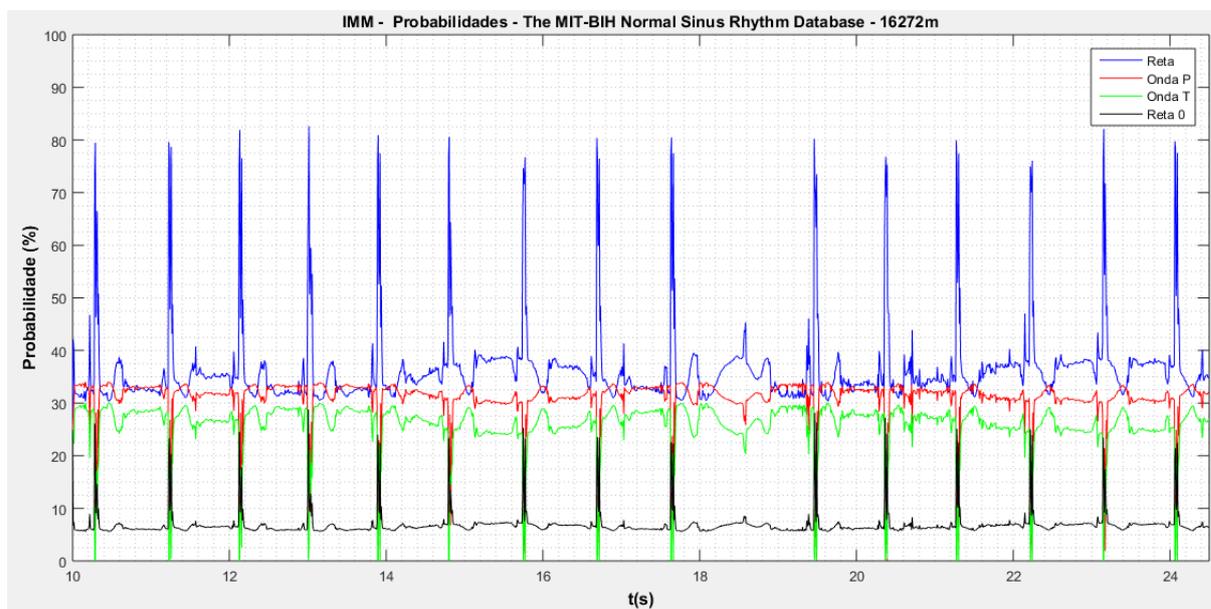
**Figura 43 – Aplicação do filtro IMM clássico referente à derivação II modificada – 16272m em  $t = 18\text{ s}$ .**



Fonte: Os autores.

Na Figura 44 é possível observar o chaveamento entre filtros que ocorre no sinal em  $t = 18\text{ s}$ , momento em que a variação é apresentada no sinal original. O chaveamento ocorre rapidamente, garantido que a estimativa do sinal siga as características do sinal medido. Com isso, o diagnóstico do sinal de eletrocardiograma não é afetado.

**Figura 44 – Curvas de probabilidades chaveadas durante a aplicação do filtro IMM clássico referente à derivação II modificada – 16272m.**



Fonte: Os autores.

A Tabela 7 apresenta os valores do EQM observados para este sinal.

**Tabela 7 – Erro quadrático médio calculado para aplicação de filtros referente à derivação II modificada – 16272m.**

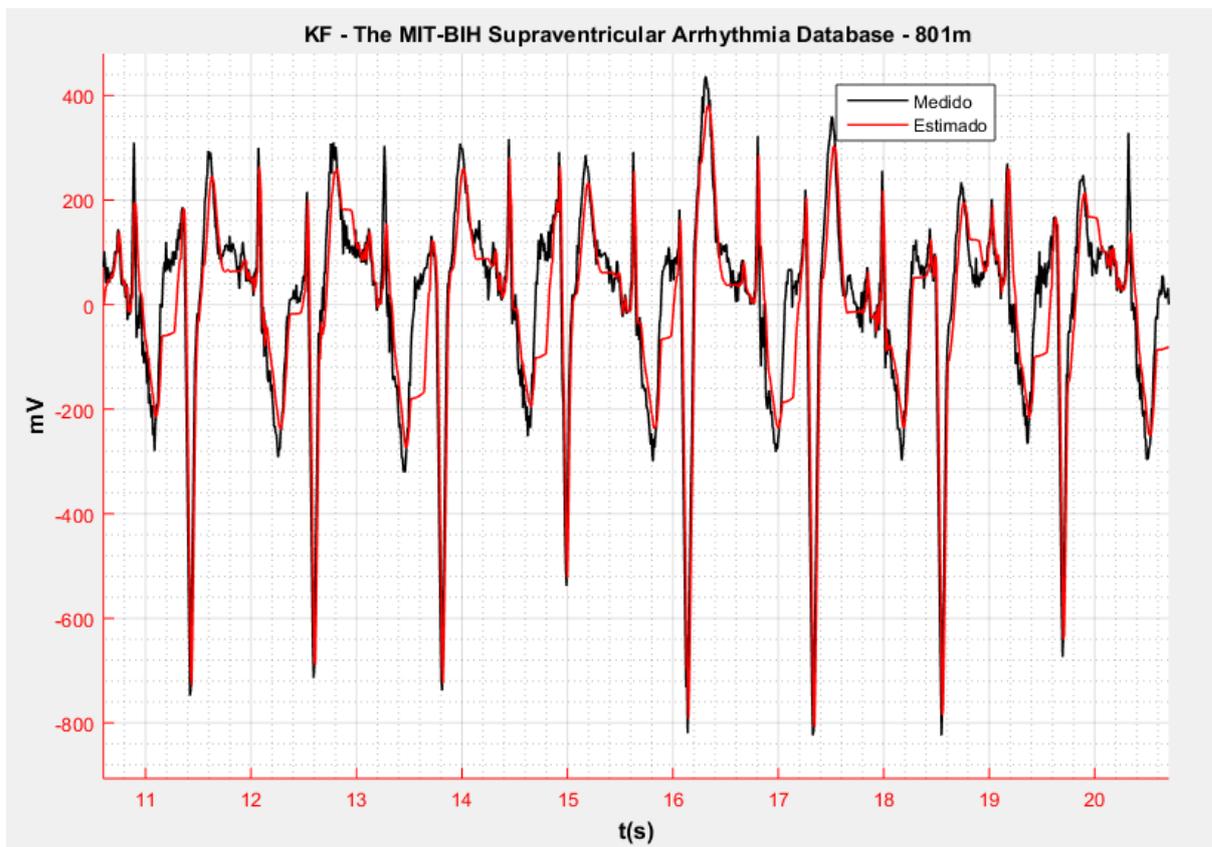
EQM	
Filtro de Kalman clássico	Filtro IMM
5,4245	0,28098

Fonte: Os autores.

#### 5.4.3 Sinal 3: Derivação II de paciente não saudável

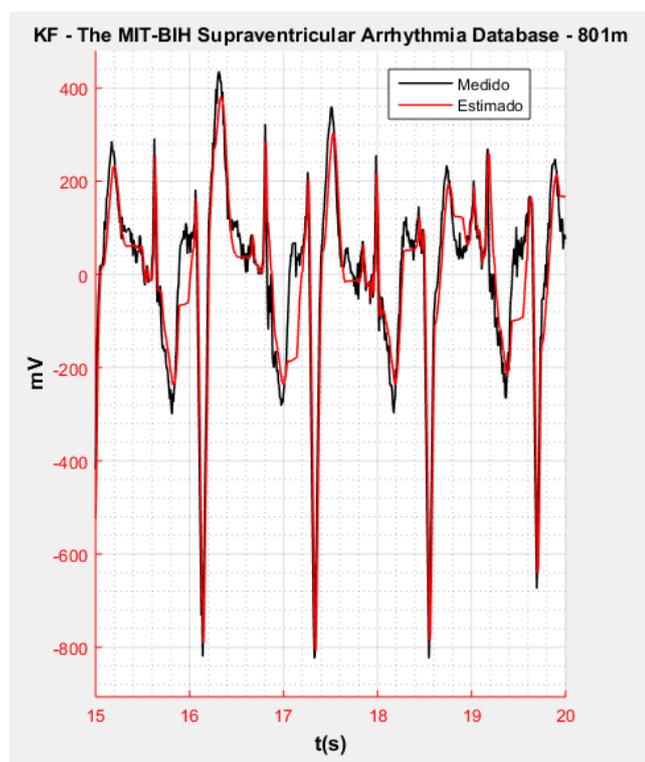
Por não ser saudável, o terceiro sinal – identificado na seção 5.2.3 – apresenta uma configuração bastante distante do esperado para um exame de eletrocardiograma saudável. A estimativa do presente sinal elucida as possibilidades que os resultados deste trabalho oferecem. A Figura 45 mostra o resultado obtido para a aplicação do filtro de Kalman clássico. Nota-se que para este sinal o filtro de Kalman não apresenta um resultado satisfatório pela inspeção visual. Na Figura 46 pontos críticos da estimativa são apresentados.

Figura 45 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação II modificada – 801m.



Fonte: Os autores.

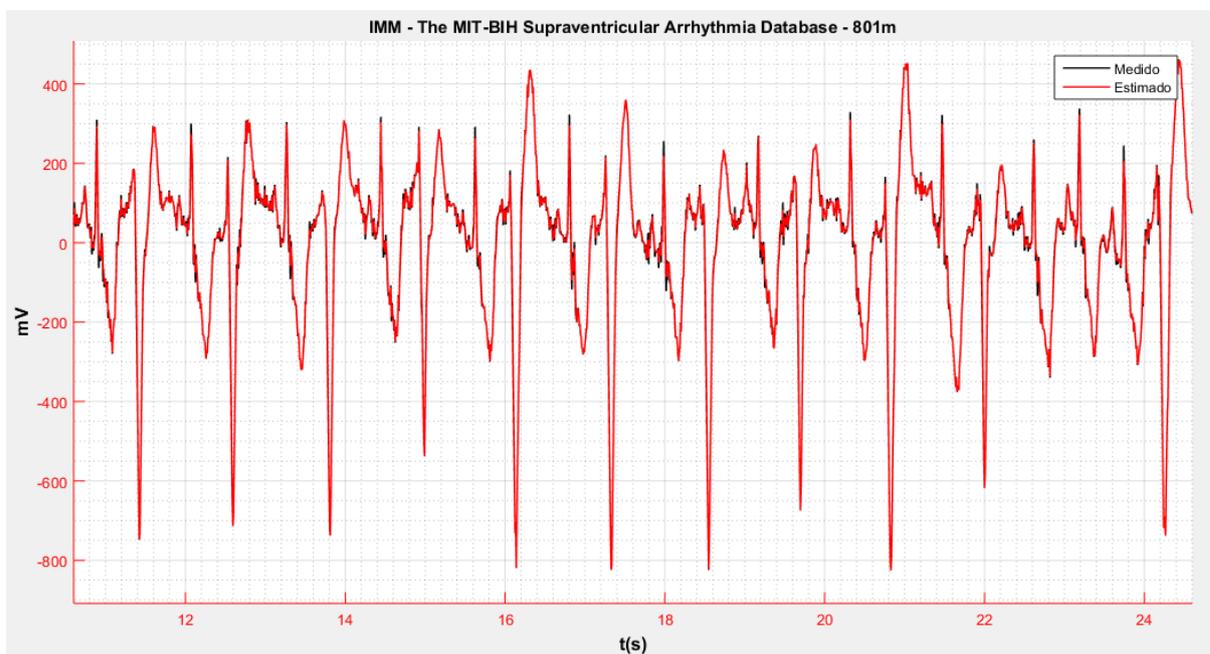
Figura 46 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação II modificada – 801m, detalhada.



Fonte: Os autores.

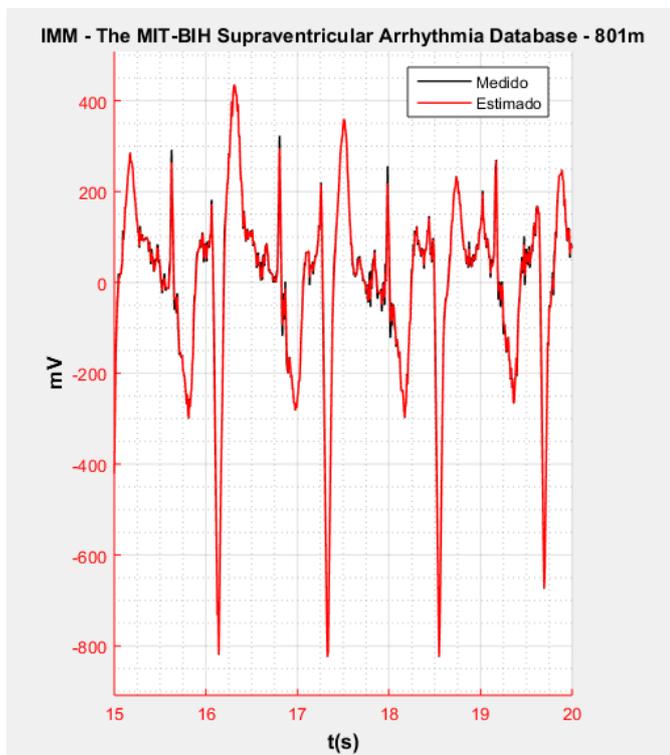
O resultado visual obtido para a aplicação do filtro IMM na Figura 47, por sua vez, é novamente bastante fiel ao sinal de entrada original e é capaz de estimar o sinal mantendo as características de sua formação, possibilitando uma maior precisão do diagnóstico que o sinal fornece aos médicos. Na Figura 48, a aplicação do filtro IMM em uma parte do sinal mostra em detalhes como seu desempenho é visivelmente mais próximo do sinal medido quando comparado à aplicação do filtro clássico de Kalman, já mostrado na Figura 46.

**Figura 47 – Aplicação do filtro IMM referente à derivação II modificada – 801m.**



**Fonte: Os autores.**

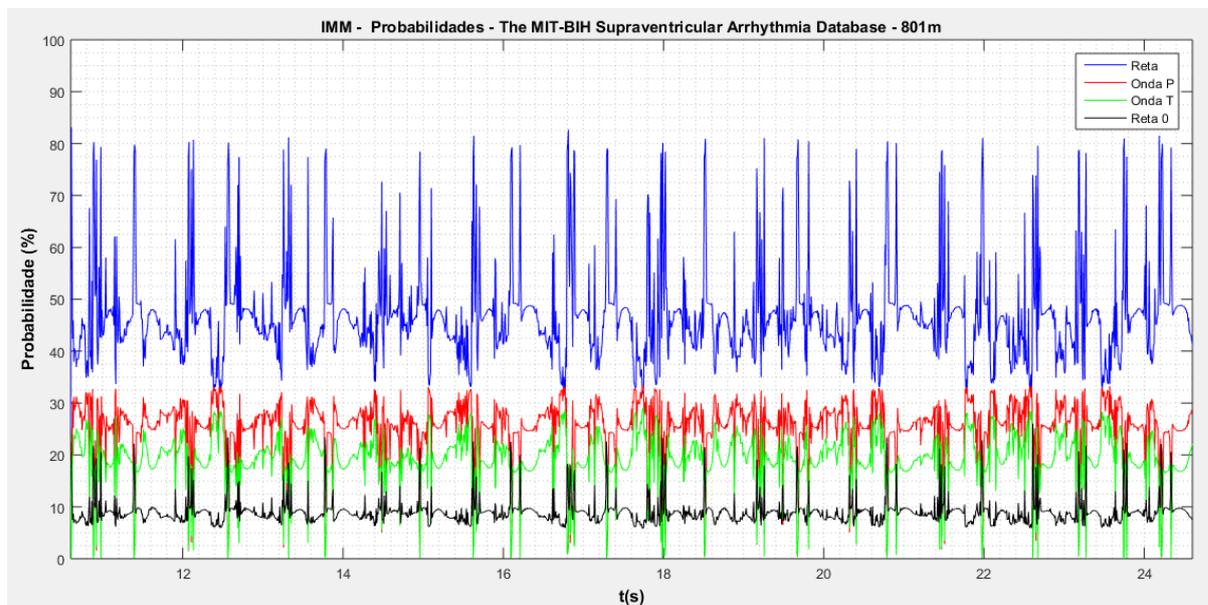
**Figura 48 – Aplicação do filtro IMM referente à derivação II modificada – 801m, detalhada.**



**Fonte: Os autores.**

A Figura 49 mostra as curvas de probabilidade chaveadas para os quatro filtros que compuseram o banco de filtros utilizado para a aplicação do filtro IMM. Os resultados dos gráficos fornecem uma análise interessante quanto às possibilidades que os resultados obtidos para sinais não saudáveis podem oferecer a trabalhos futuros. A partir da quantificação destas curvas, da análise dos erros e da determinação de padrões para sinais não saudáveis, a possibilidade de determinar cardiopatias a partir da aplicação de filtros é bastante considerável.

**Figura 49 – Curvas de probabilidade chaveadas durante a aplicação do filtro IMM referente à derivação II modificada – 801m.**



Fonte: Os autores.

A Tabela 8 mostra a distância entre a estimativa dos sinais e o sinal medido a partir dos filtros IMM e Kalman clássico.

**Tabela 8 – Erro quadrático médio calculado para aplicação de filtros referente à derivação II modificada – 801m.**

EQM	
Filtro de Kalman clássico	Filtro IMM
30,8194	0,73914

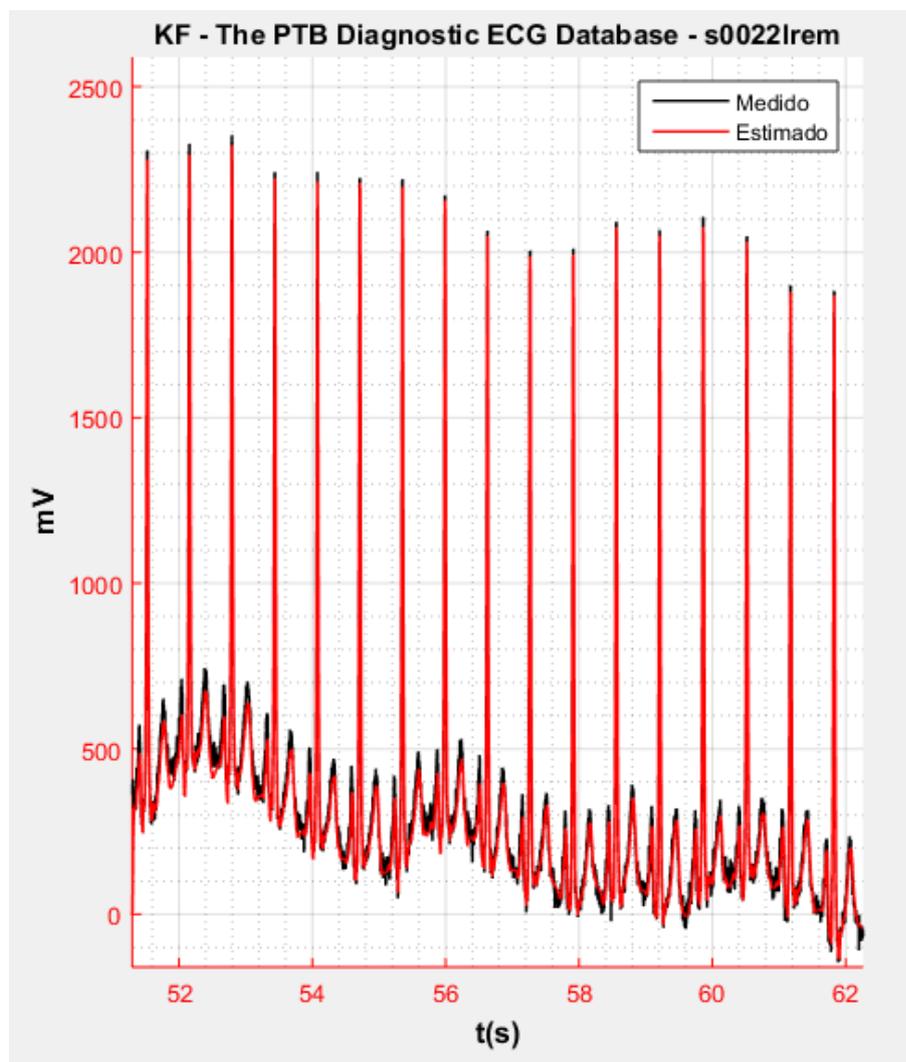
Fonte: Os autores.

Vale ressaltar que todos os resultados foram obtidos após a calibração do filtro a partir de valores iniciais atribuídos às matrizes de covariância de ruído do estado e de medida, adequando-os para obtenção do melhor resultado oferecido por cada filtro.

#### 5.4.4 Sinal 4: Derivação I de paciente não saudável

O último sinal estimado – visto na seção 5.2.4 – apesar de ser obtido de um paciente não saudável, apresenta um comportamento de sinal saudável. A principal característica deste sinal a ser filtrada é o abaulamento em que a linha de base se encontra. O abaulamento pode ser ocasionado por eventuais erros durante a medição. A aplicação do filtro de Kalman clássico para este sinal é apresentada na Figura 50.

Figura 50 – Aplicação do filtro de Kalman clássico referente à derivação I modificada – s00221rem.

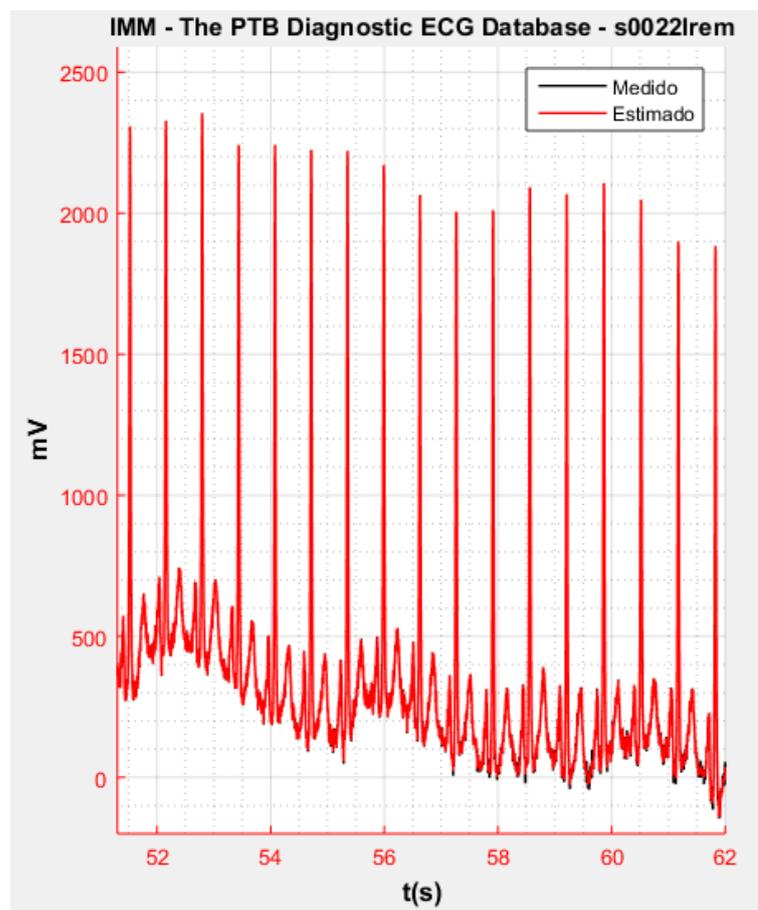


Fonte: Os autores.

Nota-se que o filtro estima o sinal sem que as suas características de configuração sejam perdidas, entretanto, a amplitude do sinal é afetada em alguns pontos. Visualmente, o sinal estimado pelo filtro de Kalman clássico não aparenta ser distante do sinal medido, mas ao analisar o cálculo do EQM (Tabela 9), nota-se que existe uma distância considerável nesta estimativa.

A aplicação do filtro IMM é apresentada na Figura 51.

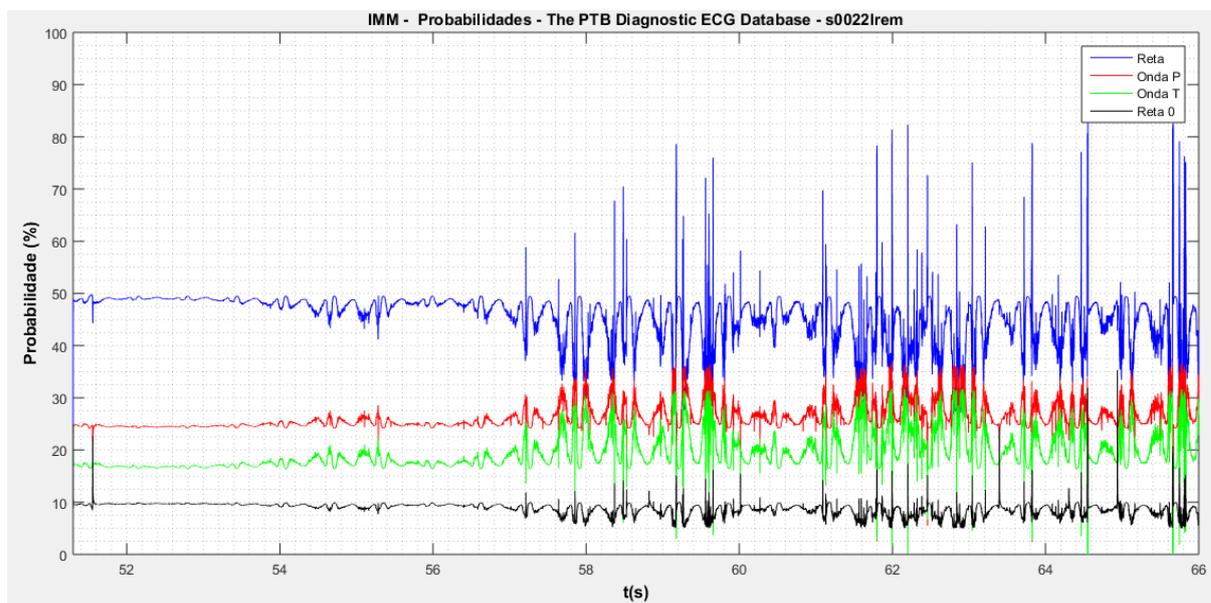
Figura 51 – Aplicação do filtro IMM referente à derivação I modificada – s00221rem.



Fonte: Os autores.

Visualmente, o sinal estimado pelo filtro IMM aparenta ser bastante fiel. Entretanto, na Figura 52 nota-se que o sinal estimado segue o comportamento do sinal de entrada durante um longo período de tempo. O filtro IMM passa a chavear entre seus filtros somente quando a distância que o sinal de entrada se encontra próximo da linha de base 0 mV. Este comportamento é devido ao modelo matemático desenvolvido, que considera o sinal para amplitudes próximas à linha de base 0 mV.

**Figura 52 – Curvas de probabilidades chaveadas durante a aplicação do filtro IMM referente à derivação I modificada – s00221rem.**



Fonte: Os autores.

A Tabela 9 apresenta os valores do EQM calculados para esta aplicação.

**Tabela 9 – Erro quadrático médio calculado para aplicação de filtros referente à derivação I modificada – s00221rem.**

EQM	
Filtro de Kalman clássico	Filtro IMM
35,4861	0,00374

Fonte: Os autores.

A aplicação dos filtros aos quatro sinais selecionados resultou em sinais estimados interessantes para a avaliação dos filtros estudados durante o trabalho. A análise de resultados foi realizada de forma comparativa, buscando destacar os pontos em que os filtros obtiveram melhor desempenho.

A interpretação dos resultados obtidos para os sinais estudados apresentou diferentes possibilidades para a continuidade do presente estudo. O filtro IMM trouxe a atenuação dos ruídos presentes nos sinais selecionados e aproximou a estimativa às características do sinal medido de forma bastante fiel. A estimativa dos sinais obtida com o filtro de Kalman clássico apresentou resultados que podem levar ao desenvolvimento de uma ferramenta de auxílio para o diagnóstico de doenças partindo da análise de erros, por exemplo.

## 6 CONCLUSÃO

Segundo o dicionário Michaelis (2018), o conceito de multidisciplinaridade remete ao estabelecimento de relações entre os diferentes campos da ciência. A realização de um projeto com tal característica se mostrou desafiadora, devido às diferenças na aquisição e na realização do conhecimento das áreas abordadas. A distinção da terminologia, do tipo de resultado desejado e da forma de avaliação dos mesmos, por exemplo, dificulta as interações necessárias para a construção de um projeto com este atributo.

No presente trabalho, alguns momentos exemplificaram, já no início, alguns dos conceitos envolvidos com a multidisciplinaridade: os estudos sobre os eventos fisiológicos relacionados ao coração mostraram a ligação desses acontecimentos com os aprendidos no curso de Engenharia de Controle e Automação – a geração das diferenças de potencial devido às transições iônicas, o fenômeno de condução da eletricidade, entre outros – mesmo que para fins diferentes. Esses conhecimentos contaram com um caráter mais teórico, enquanto a avaliação dos diagnósticos na medicina tornou visível o caráter mais empírico da mesma, a observação.

Os resultados obtidos são decorrentes de uma metodologia intermediária entre as duas frentes de conhecimento interessadas: tanto a análise do erro encontrado quanto a da configuração do sinal estimado não puderam ser individualmente ponderadas. Isso se deve principalmente às propriedades do sinal, que apresenta erros desejáveis para o diagnóstico – uma cardiopatia, por exemplo – e indesejáveis – o ruído, em diferentes formas. Por isso, foram colocadas em teste ondas com características que pudessem apontar as dificuldades dos filtros estocásticos analisados.

O filtro IMM se mostra muito preciso na redução do ruído encontrado nos sinais sem distorcer a onda à ponto de afetar o diagnóstico. A análise dos coeficientes de probabilidade mostra o chaveamento ininterrupto entre os modelos, com fuga do valor probabilístico determinado inicialmente apenas em curtos intervalos de tempo. Há uma relação dessa característica com a amplitude das mudanças de tensão entre cada intervalo de amostra: o filtro necessita de diferenças mais significativas entre as amostras para definir uma confiança maior a um dos modelos. Esse relato é justificado, por exemplo, na análise do intervalo registrado durante o complexo QRS,

trecho de variação de amplitude mais significativa no ciclo. Ali, é possível perceber um aumento da confiança para os modelos das retas. Além disso, dentro das características do filtro, pode ser percebida a tendência de tal para a conformidade com a medida, absorvendo a característica de linha de base flutuante desde o início.

Já o filtro de Kalman clássico em sua abordagem por partes apresenta, em comparação, dificuldade maior na remoção do ruído, mas uma melhor remoção do ruído de linha de base, com alguma distorção da configuração do sinal de entrada. Essa distorção pode beneficiar a geração de diagnósticos automatizados, visto que ela é visualizada principalmente em trechos que fogem da característica do modelo ideal do ECG. Para a realização da filtragem em tempo real, ainda deve ser projetado um algoritmo específico para a finalidade do ECG, que seja capaz de distinguir os diferentes segmentos do sinal e aplicar os modelos matemáticos adequadamente. As funções auxiliares criadas durante a execução do projeto servem como ponto de partida, mas merecem um estudo mais aprofundado, utilizando métodos empregados no mercado para o seu aprimoramento.

Foi possível identificar também a influência do modelo nos resultados obtidos. A análise dos coeficientes de probabilidade dos modelos para o filtro IMM mostra que a construção matemática que dá base ao projeto é simples, porém acertada, tendo em vista que a resposta do experimento é compatível à resposta desejada. A abordagem por partes do trabalho gerou um modelo que se adapta bem aos atributos do ECG, não apenas na derivação a qual ele foi baseado, mas também para a derivação II e o sinal não saudável. Aqui, deve ser feita uma ênfase à simplificação almejada na construção do modelo – feito a partir das características visuais do sinal – que gerou sua adaptabilidade, mas também uma perda significativa das características individuais do sinal de cada derivação.

Em ambos os filtros houve dificuldade no ajuste dos valores de confiança associados aos modelos matemáticos e ao ECG, que tiveram de ser personalizados para cada sinal estudado, buscando o resultado mais preciso de cada filtro em cada caso. Uma possível abordagem futura para esses filtros é a realização de um método que organize a forma de obter esses valores de confiança, por exemplo, a partir de procedimentos estocásticos.

Há também a possibilidade de expansão da metodologia utilizada na análise de resultados, buscando procedimentos estatísticos para desenvolver o entendimento

das partes individuais do trabalho. Por exemplo, a partir da análise da aplicabilidade do modelo em condições controladas por meio de simulações aleatorizadas é possível medir com maior eficiência a representatividade dos modelos matemáticos abordados, para então compará-los com os resultados obtidos a partir dos casos reais.

Outra forma de continuidade do projeto se faz a partir do aprofundamento na análise dos erros encontrados nos sinais estudados e também em outras cardiopatias, como ferramenta de auxílio para o diagnóstico de doenças, podendo dar base a automação do processo, mesmo que de forma parcial.

O presente trabalho obteve resultados positivos ao dar início nos estudos das teorias de controle moderno aplicadas como forma de expansão do núcleo de conhecimento ofertado pelo curso de Engenharia de Controle e Automação na área biomédica. O contexto multidisciplinar do mesmo serve de referencial para a continuidade deste projeto como um todo e também em segmentos menores, focados nas diferentes áreas do conhecimento abordadas.

## REFÊRENCIAS

A. H. Jazwinski, **Stochastic Processes and Filtering Theory**. SanDiego, CA: Academic, 1970.

ARAUJO, Aloir Queiroz de. Valva ou válvula?. **Arquivos Brasileiros de Cardiologia**, São Paulo, v. 79, n. 5, p.550-551, nov. 2002 . Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/abc/v79n5/13006.pdf>>. Acesso em: 10 Mar. 2018.

Bar-Shalom, Y., Li, X. R., and Kirubarajan, T. (2001) **Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms, and Software**. New York: Wiley, 2001.

BOUSSELJOT R, KREISELER D, SCHNABEL, A. **Nutzung der EKG-Signaldatenbank CARDIODAT der PTB über das Internet**. Biomedizinische Technik, Band 40, Ergänzungsband 1, 1995. Disponível em: <<https://physionet.org/physiobank/database/ptbdb/>>. Acesso em: 17 set. 2018.

BUSSAB, Wilton de Oliveira; MORETTIN, Pedro Alberto. **Estatística básica**. 2013

CHUI, C. K.; CHEN, G. **Kalman filtering: with real-time applications**. Berlin: Springer-Verlag; 1987. 191p. (Springer series in information sciences) ISBN 0387183957

ETTEN, W. C. V. **Introduction to Random Signals and Noise**. JOHN WILEY & SONS INC, 2005. ISBN 0470024119.

FARHANG-BOROUJENY, B. **Adaptive Filters: Theory and Applications**. Wiley, 1998.

FRENCL, Victor Baptista. **Técnicas de filtragem utilizando processos com saltos markovianos aplicados ao rastreamento de alvos móveis**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica e Eletrônica ) – Universidade Estadual de Campinas, 2010.

GILFFONI, Rodrigo Tobias; TORRES, Rosália Moraes. Breve história da eletrocardiografia. **Revista Médica de Minas Gerais**, Minas Gerais: Vol.20.2, junho. 2010. Disponível em: <<http://www.rmmg.org/sumario/30>>. Acesso em 22 de setembro de 2017.

GONÇALVES, João Paulo S. ZATTONI, Pedro S. **Estudo e Aplicação de Filtragem Estocástica utilizando o Filtro de Kalman**, 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso Superior de Engenharia de Controle e Automação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

GREENWALD SD. **Improved detection and classification of arrhythmias in noise-corrupted electrocardiograms using contextual information**. Ph.D. thesis, Harvard-MIT Division of Health Sciences and Technology, 1990. Disponível em: <<https://www.physionet.org/physiobank/database/svdb/>>. Acesso em: 17 set. 2018.

GUYTON, Arthur C.; HALL, John E.; **Tratado de fisiologia médica**. 11. ed. Elsevier Brasil, 2006.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – IBGE. **Pesquisa nacional de saúde 2013: percepção do estado de saúde, estilos de vida e doenças crônicas: Brasil, grandes regiões e unidades da federação**. Rio de Janeiro, RJ, 2014.

JULIER, S.J.; UHLMANN, J. K. **Unscented filtering and nonlinear estimation**. Proceedings of the IEEE, v. 92, n. 3, p. 401-422, 2004.

KOEPPE, Bruce M.; STANTON, Bruce A. **Berne e Levy Fisiologia**. 6. ed. Elsevier Health Sciences, 2009.

LUGOVAYA T.S. **Biometric human identification based on electrocardiogram**. Faculty of Computing Technologies and Informatics, Electrotechnical University "LETI", Saint-Petersburg, Russian Federation; June 2005. Disponível em: <<https://physionet.org/physiobank/database/ecgidb/>>. Acesso em: 17 set. 2018

MICHAELIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>>. Acesso em: 20 mar. 2018.

MNEIMNEH, M. A.; YAZ, E. E.; JOHNSON M. T. **An adaptive kalman filter for removing baseline wandering in ECG signals**. Computers in Cardiology, 2006. < Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4511836/>>. Acesso em: 12 set. 2017.

OGATA, K.; YANG, Y. **Modern control engineering**. Prentice hall, 2002.

PHYSIONET. Desenvolvido por GOLDBERGER A. L., AMARAL L. A. N., GLASS L., HAUSDORFF J. M., IVANOV P. C., MARK R. G., MIETUS J. E., MOODY G. B., PENG C. K., STANLEY H. E. **PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components**

**of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals.** Disponível em: <<http://www.physionet.org/>>. Acesso em: 17 set. 2017.

QUEMEL, Pedro H.; SANTANA, Assis. **Filtragem estocástica para sistemas híbridos e suas aplicações em robótica aérea.** 2011

SORENSEN, H. W. (Harold Wayne), 1936- and IEEE **Control systems society Kalman filtering theory and application.** IEEE Press, New York, 1985.

THALER, Malcolm. **ECG essencial - eletrocardiograma na prática diária.** Editora Artmed, 7ª edição 2013.

WELCH, G.; BISHOP, G. **An Introduction To The Kalman Filter.** Chapel Hill, 1997.

WORLD HEALTH ORGANIZATION = ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE. **World Health Statistics 2016: Monitoring Health for the SDGs Sustainable Development Goals.** World Health Organization, 2016.

## APÊNDICE A – IMPLEMENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE SEPARAÇÃO DOS CICLOS DO ECG

```

function [nAmostra, nTempo, nMed] = cicloECG(entrada, T, dispSaida,
V_R_percent)
%-----
% Funcao cicloECG - Estima os intervalos ciclicos individuais completos
% do sinal de entrada com base no número de amostras do intervalo R-R
%
% Variaveis de entrada:
% - entrada: vetor de amostras do sinal de ecg
% - T: período de amostragem
% - dispSaida: dispara a impressão dos resultados na command window,
% sendo:
% - 0: Não imprime
% - 1: Imprime tudo
% - 2: Imprime nAmostras
% - 3: Imprime nTempo
% - V_R_percent: Valor de referência para uma tensão encontrada apenas
% nas amostras pertencentes as ondas R em todos os ciclos
%
% Variavel de saida:
% - nAmostra: matriz com os intervalos individuais por amostra
% (Colunas: nInicial | nFinal | deltaN)
% - nTempo: matriz com os intervalos individuais por tempo
% (Colunas: nInicial | nFinal | deltaN)
% - nMed: intervalos médios para o sinal de entrada (medAmostras,
% medTempo)
%-----

j = 1;
V_R_est = (1-V_R_percent)*max(entrada);

% Índices das amostras maiores que a referência
maior_index = find(entrada>V_R_est);

% Encontra os índices iniciais e finais do ciclo
for i = 1:length(maior_index)
    if(entrada(maior_index(i)-1)<=V_R_est)
        index(j) = maior_index(i);
        j = j+1;
    end
end

% Inicialização das matrizes de intervalos
nAmostra = zeros((length(index)-1),3);
nTempo = zeros((length(index)-1),3);
if(dispSaida~=0)
    disp('Estimativa dos intervalos de ciclo completo do ECG -----')
end
for i = 2:length(index)
    % Define o número de amostras e o intervalo
    nAmostra(i-1,1) = index(i-1)-index(1)+1;
    nAmostra(i-1,2) = index(i)-index(1);
    nAmostra(i-1,3) = nAmostra(i-1,2)-nAmostra(i-1,1);

    nTempo(i-1,1) = T*index(i-1)-T*index(1);
    nTempo(i-1,2) = T*index(i)-T*index(1);
    nTempo(i-1,3) = nTempo(i-1,2)-nTempo(i-1,1);
end

```

```

% Impressão do resultado de acordo com a variável dispSaida
if (dispSaida~=0)
    disp(['- Ciclo(' num2str(i-1) ') :'])
end

if ((dispSaida==1) | (dispSaida==2))
    disp(['Amostras: T0: ' num2str(nAmostra(i-1,1)) ' | TF: '
num2str(nAmostra(i-1,2)) ' | ' char(916) 'T: ' num2str(nAmostra(i-1,3))])
end

if ((dispSaida==1) | (dispSaida==3))
    disp(['Tempo:      T0: ' num2str(nTempo(i-1,1)) 's | TF: '
num2str(nTempo(i-1,2)) 's | ' char(916) 'T: ' num2str(nTempo(i-1,3)) 's' ])
end

nMed = [floor(mean(nAmostra(:,3))) mean(nTempo(:,3))];
if (dispSaida~=0)
    disp('-----')
    disp(['N° de Amostras Médio: ' num2str(nMed(1))])
    disp(['Tempo Médio: ' num2str(nMed(2)) 's'])
    disp('-----')
end

```

## APÊNDICE B – IMPLEMENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE SEPARAÇÃO DOS SEGMENTOS DO ECG

```

function entradaSplited = splitECG(entrada, nAmostra, Psplit)
%-----
% Funcao splitECG - Divide o sinal de entrada com base nos intervalos de
% amostra definidos e na porcentagem relacionada a cada ciclo.
%
% Variaveis de entrada:
% - entrada: vetor de amostras do sinal de ecg
% - nAmostra: vetor de amostras iniciais, finais e delta para cada ciclo
% - Psplit: porcentagem do sinal de cada ciclo referente à aplicação do
% modelo (Onda P | Retas | Onda T | Entre Ciclos). Soma das porcentagens
% = 1.
%
% Variavel de saida:
% - entradaSplited: vetor de entrada dividido numa matriz de células de
% acordo com os dados de entrada:
% - Colunas: Onda P | Retas | Onda T | Entre Ciclos;
% - Linhas: Ciclos individuais;
%-----

entradaSplited = cell(size(nAmostra,1),length(Psplit));
for i = 1:size(nAmostra,1)
    % Divisão da quantidade de amostras no ciclo de acordo com a porcentagem
    Nsplit = floor(Psplit.*(nAmostra(i,3)+1));
    % Ajuste do número de amostras do trecho final do ciclo
    Nsplit(4) = (nAmostra(i,3)+1)-sum(Nsplit(1:3));
    % Separação dos intervalos do ciclo
    inicio = nAmostra(i,1);
    for j = 1:length(Psplit)
        fim = inicio+Nsplit(j)-1;
        entradaSplited{i,j} = entrada(inicio:fim);
        inicio = fim+1;
    end
end
end

```