UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ADÃO REGIS PEREIRA

TEOREMA DE TALES: ANÁLISE DE SUA APRESENTAÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS E PROPOSIÇÃO DE ATIVIDADES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2014

ADÃO REGIS PEREIRA

TEOREMA DE TALES: ANÁLISE DE SUA APRESENTAÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS E PROPOSIÇÃO DE ATIVIDADES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientadora: Neusa Nogas Tocha, Dra.

CURITIBA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P436 Pereira, Adão Regis
Teorema de Tales : análise de sua apresentação nos livros didáticos e proposição de atividades / Adão Regis Pereira. –2014.
51 f. : il. ; 30 cm

Orientadora: Neusa Nogas Tocha.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2014.
Bibliografia: f. 50.

1. Tales, ca.634-ca.546 A.C. 2. Demonstração automática de teoremas. 3. Geometria – Estudo e ensino. 4. Livros didáticos. 5. Semelhança (Geometria). 6. Software educacional. 7. Matemática – Dissertações. I. Tocha, Neusa Nogas, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca Central da UTFPR, Campus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 11

"Teorema de Tales: Análise de sua apresentação nos livros didáticos e proposição de atividades"

por

Adão Regis Pereira

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 06 de março de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

Profa. Neusa Nogas Tocha, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Profa.Elisangela de Campos, Dra.
(UFPR)

Prof. André Fabiano Steklain Lisbôa, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

RESUMO

PEREIRA, Adão Regis. TEOREMA DE TALES: ANÁLISE DE SUA APRESENTAÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS E PROPOSIÇÃO DE ATIVIDADES. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Nesse trabalho identificamos os objetivos e as orientações nos Parâmetros Curriculares Nacionais, do terceiro e quarto ciclos, sobre o estudo da Geometria. Pesquisamos sobre a Biografia de Tales de Mileto, onde fazemos um relato, da região e história, da época em que ele viveu, contamos alguns de seus feitos, e enumeramos os teoremas cujas demonstrações lhe são atribuídas. Analisamos seis livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, que integram o Plano Nacional do Livro Didático 2014, observamos a forma como a Geometria é trabalhada, e quais as demonstrações e atividades apresentadas em relação ao Teorema de Tales. Usamos e recomendamos o *software* Geogebra para o estudo da Geometria. Propomos atividades diversificadas, para serem utilizadas em sala de aula, quando o Teorema de Tales for trabalhado. Sugerimos uma demonstração para o Teorema de Tales, onde utilizamos a definição de área do triângulo, e as propriedades do paralelogramo.

Palavras-chave: Teorema de Tales, Livros didáticos, GeoGebra, Proporcionalidade, Semelhança.

ABSTRACT

PEREIRA, Adão Regis. THALES' THEOREM: ANALYSIS OF YOUR PRESENTATION IN TEXTBOOKS AND PROPOSITION ACTIVITIES. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

In this work we identify the goals and guidelines the National Curriculum Guidelines, the third and fourth cycles, on the study of geometry. We searched on the Biography of Thales of Miletus, where we do a story, and history of the region, the era in which he lived, we count some of their deeds, and enumerate the theorems whose statements are allocated. We analyzed six textbooks in 9th grade of elementary school, comprising the National Plan of Didactic Book 2014, observed how the geometry is crafted, and what activities and statements made with respect to the Thales' Theorem. We use and recommend the Geogebra *software* for the study of geometry. We propose diversified activities for use in the classroom when the Thales' Theorem is working. We suggest a demonstration of Thales' Theorem, where we use the definition of the triangle area, and properties of the parallelogram.

Keywords: Thales' Theorem, Textbooks, GeoGebra, Proportionality, Similarity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

- // - paralelismo entre retas e/ou entre segmentos de reta.
- AB - segmento de reta.
- $\overline{AB}$ - medida do segmento de reta AB.
- R$ - reais.
- $\triangle$ - triângulo.
- $\mathbb{N}$ - conjunto dos números naturais.
- $\in$ - pertence.
- $\notin$ - não pertence.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com este trabalho buscamos atender ao regimento do PROFMAT, cuja orientação é que *o Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula*. Neste sentido escolhemos analisar as demonstrações apresentadas, as atividades propostas e os recursos didáticos utilizados para a abordagem do **Teorema de Tales**, em seis livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental. Os seis livros analisados fazem parte das coleções previamente selecionados pelo Ministério da Educação (MEC), e que integram o Plano Nacional do Livro Didático 2014 (PNLD2014). Também examinamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental, onde queremos verificar nesse período da escolaridade, quais as orientações legais sobre: demonstrações de teoremas; recursos didáticos aconselhados; conteúdos sugeridos; a contextualização dos conteúdos. Pesquisamos com este trabalho sobre a Biografia de Tales de Mileto, onde buscamos identificar algumas de suas atividades e as áreas do conhecimento de seu maior interesse. Propomos uma abordagem do Teorema de Tales, que busque despertar o interesse e a curiosidade dos alunos pelo conteúdo trabalhado, com a apresentação de atividades e demonstrações que utilizam o *software* de geometria dinâmica, GeoGebra.

Precisamos mostrar que a geometria não vem pronta, que sua evolução acompanha a história da humanidade, que suas afirmações podem ser verificadas experimentalmente e, também ser demonstradas de várias maneiras.

1.1 MOTIVAÇÃO

A apresentação do Teorema de Tales nos livros didáticos da educação básica é pouco criativa. Os alunos são limitados a mera reprodução de conceitos. A História da Matemática não é utilizada, como mais um fator de motivação e contextualização. Os alunos não constroem e não verificam as propriedades, apenas são conduzidos a repetir alguns modelos de exercícios, que seguem o mesmo padrão em várias coleções. Alguns fatores como professores sem habilitação, ou que atendem a uma grande carga horária semanal ou trabalho em várias escolas, também contribuem para a manutenção e agravamento desse quadro.

Outro fato, é que, em vários livros didáticos, o conteúdo de Geometria é apresentado geralmente no final do livro, ou seja sempre que falta tempo para cumprir o planejamento anual, parte deste conteúdo é excluído. Este fato acarreta, muitas vezes, na ausência da geometria do currículo escolar do aluno. O professor segue a sequência definida pelo livro, muitas vezes não conseguindo chegar ao seu final e o aluno é encaminhado para a série seguinte sem ter visto, ou sem ter aprofundado nenhum conteúdo importante de geometria. Em muitos casos as demonstrações são relegadas a um segundo plano, ou omitidas. Por estes motivos se faz necessário examinar a introdução e as demonstrações apresentadas nos livros e o processo ensino aprendizagem, em particular da Geometria. Precisamos introduzir no Ensino Fundamental um pouco do formalismo das demonstrações, para que ao chegar no Ensino Médio os alunos entendam com mais naturalidade os Axiomas, Teoremas, etc. Atualmente os livros didáticos são repetitivos, apresentam um modelo de exemplo e logo em seguida uma lista de atividades similares ao exemplo dado, e com relação ao Teorema de Tales as atividades propostas seguem o modelo apresentado na Figura 1.

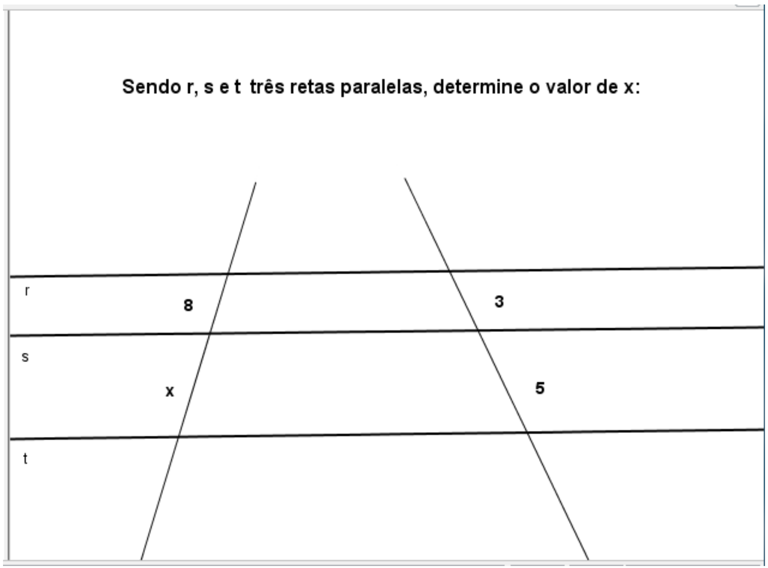

Figura 1: Modelo de exercício dos livros didáticos

Devemos apresentar outras formas para a abordagem do ensino da Matemática, fazendo uso de demonstrações e utilizando-se do raciocínio lógico. Temos que aproveitar o fato de que os estudantes atualmente tem grande facilidade de, em pouco tempo, dominar e entender os mais recentes lançamentos de celulares, *tablets, smartphones*, etc. Este rápido domínio das novas tecnologias pelos estudantes, favorece aos professores a utilização, em suas aulas, de *softwares* livres, como o Geogebra, sendo mais uma ferramenta de motivação e auxilio na questão do ensino aprendizagem.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é analisar como esta sendo apresentado o Teorema de Tales, em alguns livros didáticos do PNLD 2014. E também produzir material de apoio para professores e estudantes. No material de apoio faremos uso do Geogebra, como motivador para a compreensão das propriedades e demonstrações.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Buscar nos PCNs de Matemática, do terceiro e quarto ciclos, as orientações e objetivos, definidos pelo MEC, para o ensino aprendizagem dos conteúdos de Geometria.
- Pesquisar sobre a Biografia de Tales de Mileto, e quais suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática.
- Analisar como esta sendo apresentado o Teorema de Tales, para as séries finais do ensino fundamental, nas seguintes coleções didáticas de Matemática: Projeto Araribá, Projeto Velear, Matemática Teoria e Contexto, Matemática Ideias e Desafios, Projeto Teláris e Vontade de Saber Matemática.
- Apresentar uma demonstração para este Teorema, utilizando conhecimentos básicos, como área de um triângulo e as propriedades do paralelogramo.
- Criar atividades e exercícios, utilizando o GeoGebra, para auxiliar na verificação de propriedades e demonstração do Teorema.
- Oferecer atividades que dependem apenas de recursos básicos, como lápis, papel, régua e calculadora, para momentos e locais onde não é possível a utilização dos recursos tecnológicos.

2 DESENVOLVIMENTO

Neste capítulo, estudamos os PCNs da Matemática, onde buscamos identificar os objetivos e as diretrizes apontadas pelo MEC para o estudo da geometria nas séries finais do ensino fundamental (quarto ciclo). Investigamos a História da Matemática na época de Tales de Mileto, identificamos alguns teoremas cujos relatos afirmam que ele realizou suas primeiras demonstrações. Analisamos algumas obras do PNLD 2014, para verificarmos como esta sendo apresentado o Teorema de Tales, comparamos suas demonstrações e atividades. Na sequência, propomos algumas atividades que possam ser desenvolvidas em sala de aula pelos professores, com ou sem o Geogebra. E também sugerimos uma demonstração do Teorema de Tales.

2.1 A GEOMETRIA NOS PCNS

Os PCNs foram elaborados pela Secretaria de Educação Fundamental do MEC, a partir de 1997. Surgem como uma proposta de reorientação curricular, e para serem utilizados como uma referência nacional para o Ensino Fundamental. De acordo com (MEC, 1998), nos PCNs da Matemática do terceiro e quarto ciclos (6º ao 9º anos), os conteúdos selecionados estão organizados em quatro blocos de conhecimentos:

- Números e Operações (Aritmética e Álgebra);
- Espaço e Forma (Geometria);
- Grandezas e Medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria);
- Tratamento da Informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade);

O item Espaço e Forma caracteriza-se pelos seguintes temas: a valorização dos conceitos geométricos; o trabalho com situações problema; as construções geométricas com régua, compasso, esquadro e transferidor; a importância das transformações geométricas (isometrias e homotetias); e a congruência e semelhança de figuras. Nesse bloco, citamos alguns dos conteúdos propostos para o quarto ciclo:

- divisão de segmentos em partes proporcionais;
- construção de retas paralelas, perpendiculares e transversais com régua, compasso e esquadro;
- desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas;
- verificações experimentais e aplicações do Teorema de Tales;
- verificações experimentais, aplicações e demonstração do Teorema de Pitágoras;

Os PCNs orientam para valorização e a importância do ensino da Geometria, priorizando a resolução de problemas e o desenvolvimento de princípios fundamentais, como proporcionalidade, semelhança, etc. Destacam também, o uso progressivo da argumentação, para que os alunos assumam a atitude de tentar justificar os resultados encontrados. Esse desenvolvimento da argumentação, como sendo o início de uma trajetória, que os levará ao reconhecimento da importância das demonstrações em Matemática, entendendo provas de alguns teoremas, de acordo com (MEC, 1998). Além disso, nos PCNs temos o indicativo para a utilização da História da Matemática, como auxiliar na compreensão de conceitos e resolução de problemas. Outro aspecto que merece destaque é a recomendação do uso de recursos tecnológicos, como calculadoras, computadores, etc, durante todo o ensino fundamental.

2.2 UM POUCO DE HISTÓRIA

Sabemos que os relatos da História da Matemática, do período em que viveu Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente), são fragmentados e incompletos e que foram escritos e contados por outros, séculos depois de sua existência. De acordo com (BONGIOVANNI, 2007) a primeira referência que temos sobre Tales de Mileto, é dada pelo filósofo Proclus (420-485 d.C) no seu livro *Comentário sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides*.

Segundo (GARBI, 2011), quando a Grécia começou a sair da chamada Idade Negra, nas ilhas do mar Egeu e no litoral da Província Anatólia (onde hoje situa-se a Turquia), estabeleceram-se várias colônias em que se falava um mesmo dialeto grego, denominado jônio. Aproximadamente em 900 a.C., as colônias mais importantes eram Mileto, Éfoso e Cólofon, no litoral, e Tênedo, Lesbos, Quios e Samos, nas respestivas ilhas do mar Egeu. Esse grupo de colônias passou a ser chamado **Jonia** .

O mar Egeu é um braço do mar Mediterrâneo, localizado entre a Grécia e a Turquia. Essa região era propícia ao desenvolvimento da navegação marítima, o seu grande número de ilhas permitia navegar sempre a vista de terra.

Na cidade portuária de Náucratis, onde o rio Nilo deságua no mar Egeu, estabeleceu-se um intenso comercio entre egípcios e jônios, em meados do século VII a.C.. De acordo com (GARBI, 2011), esse contato com uma civilização muito mais adiantada, tornou possível que os jônios aprendessem os conhecimentos básicos de Geometria, Aritmética e Astronomia. Esses conhecimentos absorvidos pelos jônios, haviam se acumulado ao longo de vários séculos no Egito, e também na Mesopotâmia. Este fato foi fundamental para o nascimento da Ciência e da Filosofia grega.

Tales viveu na cidade jônia de Mileto, tinha grande interesse por Filosofia, Astronomia e Matemática, mas sua atividade habitual era o comércio. Do seu interesse pela Astronomia, surguiu a lenda de que ele previu um famoso eclipse solar, ocorrido em 28 de maio de 585 a.C.. Outro fato (ou lenda) importante, foi quando protagonizou um dos episódios marcantes da História da Geometria, calculou a altura da pirâmide de Quéops: medindo o comprimento da sombra do monumento e de um bastão, que colocara verticalmente na areia, comparando as medidas de triângulos semelhantes.

Segundo (BOYER; MERZBACH, 2012), Tales foi saudado como o primeiro matemático verdadeiro, o primeiro dos Sete Sábios, e os relatos ou lendas dizem que ele demonstrou os seguintes Teoremas:

- Um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto.
- Um círculo é bissectado por um diâmetro.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes.

Não existem documentos que provem a evidência desses fatos, mas (BOYER; MERZBACH, 2012) comenta que Eudemo de Rodes (320 a.C.), discípulo de Aristóteles, escreveu uma história da matemática. Essa história e o original de seu resumo perderam-se, mas o filósofo neoplatônico Proclo (410-485) retirou informações do sumário de uma cópia do resumo, e incorporou no seu Commentary on the First Book of Euclid‘s Elements (Comentário sobre o primeiro livro de Os Elementos de Euclides), mil anos depois do tempo de Tales. É das referências de Proclo, principalmente, que vem a nomeação de Tales como o primeiro matemático, que baseado em Eudemo atribui a Tales os teoremas mencionados anteriormente.

Segundo (MLODINOW, 2010), a descoberta de que a Matemática não serve apenas para calcular o volume de entulho ou o valor dos impostos, é creditada a Tales. E que Tales preparou o caminho para as grandes descobertas dos pitagóricos, dando os primeiros passos para a sistematização da Geometria, e foi o primeiro a fazer demonstrações de teoremas geométricos, que mais tarde foram utilizados por Euclides nos seus Elementos. Este comerciante grego que virou filósofo, buscou conhecimentos sobre a ciência e a matemática da Astronomia em suas viagens à Babilônia, e no Egito mostrou como calcular a altura de uma pirâmide. O autor (MLODINOW, 2010) também afirma que:

> Tales também passou longos períodos de tempo no Egito. Os egipcios tinham a capacidade de construir as pirâmides, mas não tinham o discernimento necessário para medir a sua altura. Tales buscou explicações teóricas para os fatos descobertos empiricamente pelos egipcios. Com tal compreensão, Tales foi capaz de deduzir técnicas geométricas, uma da outra, e de roubar a solução de um problema a partir de outro, pois tinha extraído o princípio abastrato da aplicação prática particular. Ele deixou os egípcios impressionados quando lhes mostrou como eles poderiam medir a altura da pirâmide empregando um conhecimento das propriedades de triângulos semelhantes.

Para a pesquisadora Tatiana Roque, o fato dos mesopotâmicos e egípcios realizarem cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, não significa afirmar que possuíssem uma geometria. O surgimento da palavra "geometria" estava ligado à agrimensura, pois pode ser traduzida como "medida da terra". A autora (ROQUE, 2012), também adverte sobre as interpretações das narrativas convencionais da História da Matemática, onde seus autores partem do princípio que a Matemática é um saber único, onde os mesopotâmicos e os egípcios deram grandes contribuições, mas que ela se originou com os gregos. Esta autora comenta que:

> Nas práticas de medida, os problemas geométricos são transformados em problemas numéricos. A escolha de uma unidade de medida basta para converter um comprimento, uma área ou um volume em um número. Sem dúvida os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como outros povos antigos. Não há, contudo, uma documentação confiável que possa estabelecer a transição da matemática mesopotâmica e egípcia para a grega. Essa é, na verdade, uma etapa da construção do mito de que existiria uma matemática geral da humanidade. A escassez de fontes que permitiriam unir as diferentes práticas dessas disciplinas na Antiguidade nos força a optar pela presença de várias manifestações matemáticas.

O que buscamos com essa pesquisa, não é apenas uma abordagem motivadora. Sabemos o quanto a motivação é necessária, principalmente para os professores das séries finais do ensino fundamental, que precisam saber os fatos históricos da Matemática e assim, terem condições de incentivar seus alunos. Mas procuramos também, com o uso da história, a obtenção de mais uma ferramenta de apoio à construção de conhecimentos matemáticos.

Na história da época de Tales, encontramos na astronomia, na filosofia e no comercio os principais veículos de trocas de conhecimentos entre diferentes culturas. Para acumular esses conhecimentos foram necessárias muitas viagens para a Babilônia e Egito, e que Tales viveu numa região privilegiada geograficamente para a navegação. Verificamos que serviam como instrumentos de comparação de medidas, um bastão e as sombras de objetos.

2.3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste trabalho identificamos as coleções analizadas, do PNLD 2014, na mesma ordem em que elas aparecem no guia de livros didáticos conforme (BRASIL, 2013), com a seguinte notação:

A $\rightarrow$ Matemática Idéias e Desafios, (MORI; ONAGA, 2012)

B $\rightarrow$ Matemática Teoria e Contexto, (CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2012)

C $\rightarrow$ Projeto Araribá, (LEONARDO, 2010)

D $\rightarrow$ Projeto Teláris, (DANTE, 2012)

E $\rightarrow$ Projeto Velear, (BIGODE, 2012)

F $\rightarrow$ Vontade de Saber Matemática, (SOUZA; PATARO, 2012)

Observamos a avaliação destas coleções, realizadas segundo (BRASIL, 2013), respectivamente, com relação a *Geometria, Metodologia de ensino e aprendizagem, e Contextualização*. Na geometria analizamos como os conteúdos são trabalhados, quais os recursos utilizados, e como a validação das propriedades é indicada. Com relação às metodologias, observamos como são abordados os conteúdos da obra, como se desenvolve a argumentação, quais os recursos didáticos utilizados e os tipos de atividades apresentadas. No tópico contextualização, identificamos como ela é apresentada na coleção, e como é tratada a história da Matemática. A seguir apresentamos os tópicos observados em cada coleção:

1. Coleção **A**

   - *Geometria*: Articula figuras geométricas planas com figuras espaciais; realiza boa conexão com a álgebra (produtos notáveis); destina pouco espaço para investigações e vericações de propriedades pelo aluno; as construções com régua e compasso são utilizadas apresentando poucas justificativas; as simetrias e isometrias estão bem definidas, mas pouco articuladas entre si.

- *Metodologias*: Os conteúdos são baseados em situações problema, porém, a ação ativa do aluno não é favorecida porque a solução é apresentada de imediato; existe grande incentivo a interação entre alunos; tem poucas situações de argumentação; o único recurso tecnológico sugerido é a calculadora, que é usado de forma adequada.
- *Contextualização*: Principalmente em estatística e probabilidade apresenta situações relacionadas com as práticas sociais, porém, não existe incentivo para a reflexão; a história da matemática é apenas ilustrativa e sem referências bibliográficas.

2. Coleção **B**

- *Geometria*: O trabalho com os conteúdos geométricos é satisfatório; conceitos são aprofundados, com a articulação do conteúdo novo com o já abordado; trabalha noções de perspectiva; apresenta predomínio de validações experimentais dos fatos geométricos mais significativos.
- *Metodologias*: Os conteúdos são apresentados em breves esplanações, com exemplos, seguidos de atividades; os processos de argumentação são trabalhados de forma satisfatória; na maioria das atividades, os alunos são chamados para discutir os processos e os resultados; a calculadora esta presente mas, com poucos trabalhos interessantes com esse instrumento.
- *Contextualização*: Em geral, as situações apresentadas envolvem temas do cotidiano, como a sustentabilidade socioambiental, no entanto são poucas orientações para o professor aprofundar o assunto; a história da matemática é apresentada com ênfase na apresentação de curiosidades.

3. Coleção **C**

- *Geometria*: Na abordagem da geometria utiliza-se de dobraduras, instrumentos de desenho, papel quadriculado, etc; apresenta proposições geométricas através de diálogos com boas argumentações; contém atividades que levam o aluno a experimentar diferentes formas de validação.
- *Metodologias*: Os conteúdos são apresentados através de esplanações e exemplos; o aluno limita-se a resolver problemas de aplicação do que foi ensinado; algumas vezes a apresentação não favorece o processo da argumentação; a interação entre os alunos é estimulada; apresenta atividades diversificadas; entre os recursos didáticos destacam-se os instrumentos de desenho, a calculadora e leituras complementares.
- *Contextualização*: Oferece bons exemplos de contextualização, e em alguns deles apresenta contribuições para a formação do cidadão; a história da matemática

restringe-se ao relato de fatos ocorridos no passado.

4. Coleção **D**

   - *Geometria*: O trabalho com os conceitos geométricos é feito de forma gradativa, observando propriedades e imagens gráficas, culminando com demonstrações de alguns fatos; as figuras geométricas planas estão bem definidas, entretanto, o mesmo não acontece com as figuras geométricas espaciais.

   - *Metodologias*: Os conteúdos são explicados e sistematizados com exemplos, seguidos de exercícios; na maioria das vezes a sistematização é apressada, e o estudante não é estimulado, de forma desejável, a ser um agente do processo de aprendizagem; a argumentação é desenvolvida em algumas atividades; articula-se o conteúdo novo com o já abordado; tem aplicações variadas que evidenciam a relevancia do assunto estudado; apresenta uso apropriado de alguns recursos didáticos e incentiva leituras complementares;

   - *Contextualização*: Frequentemente os conteúdos são contextualizados com as práticas sociais, fazendo reflexões sobre questões economicas e sociais do país; a história da matemática é significativa na coleção, apesar de muitas vezes ter caráter apenas informativo.

5. Coleção **E**

   - *Geometria*: A apresentação dos conteúdos busca articulação com o cotidiano, explora o uso de materiais concretos e incentiva algumas validações experimentais; a coleção utiliza recursos como dobraduras, mosaicos e recortes; a definição de figuras congruentes é apoiada nas transformações geométricas,

   - *Metodologias*: Os conteúdos são abordados pela proposição de uma situação, e através da análise das possíveis alternativas para resolução, busca-se a sistematização das idéias; muitas atividades desafiadoras são utilizadas, com diferentes estratégias de resolução; variados recursos didáticos são estimulados e a calculadora é utilizada de forma oportuna.

   - *Contextualização*: A contextualização dos conhecimentos é significativa, principalmente com as práticas sociais e a história da Matemática; mostra articulação entre conteúdos e problemas relacionados ao contexto histórico.

6. Coleção **F**

- *Geometria*: O estudo das figuras geométricas espaciais e dos conceitos de geometria plana é satisfatório, no entanto, existem repetições desnecessárias e poucas articulações entre figuras espaciais e planas; explora propriedades e conceitos de figuras geométricas, através de um software de geometria dinâmica e com materiais concretos;
- *Metodologias*: Os conteúdos são apresentados por esplanação teórica, seguidos de exercícios de aplicação; a calculadora é usada com ênfase na realização de cálculos; em toda a obra existem propostas de atividades com a utilização de software gratuítos; apresenta atividades que articulam conhecimentos prévios e novos; tem poucas atividades que estimulam a investigação.
- *Contextualização*: A coleção apresenta atividades diversificadas, contextualizadas com práticas sociais diversas; os textos da história da Matemática não trazem muitas contribuições para a aprendizagem.

Também pesquisamos no guia de livros didáticos conforme (BRASIL, 2013), a partir de que ano são introduzidos os seguintes conteúdos: área do triângulo, quadriláteros, gráficos, proporcionalidade, semelhança de triângulos e Teorema de Tales. Utilizamos esses conteúdos nas demonstrações e nas atividades que propomos nesse trabalho. Com relação aos dois últimos conteúdos, identificamos no livro do 9º ano do ensino fundamental, a página onde se encontra. Na **Tabela** 1 mostramos essa relação.

Conteúdo \ Coleção	A	B	C	D	E	F
Área do Triângulo	6º	6º	7º	6º	8º	6º
Quadriláteros	6º	8º	8º	8º	6º	8º
Gráficos	7º	7º	6º	7º	6º	7º
Proporcionalidade	7º	7º	7º	7º	7º	7º
Semelhança de Triângulos	9º/p.152	9º/p.16	9º/p.88	9º/p.147	7º	9º/p.139
Teorema de Tales	9º/p.118	9º/p.26	9º/p.92	9º/p.122	9º/p.114	9º/p.126

Tabela 1: Ano em que os conteúdos são introduzidos

Nas seis obras que selecionamos do PNLD 2014, observamos alguns tópicos referentes ao Teorema de Tales, no capítulo ou unidade onde ele esta inserido, da seguinte maneira:

- Introdução: Se o conteúdo é explanado de forma **direta** ou **através de exemplos**.

  Na forma direta, o autor enuncia o Teorema e a seguir apresenta a demonstração. Quando o conteúdo é introduzido através de exemplos, o autor apresenta algumas situações em que o Teorema é utilizado, indicando as conclusões ou solicitando que elas sejam verificadas.

- História da Matemática: Verificamos se ela é **informativa** ou **contextualizada**.

  Consideramos que a História é informativa quando o autor apenas faz o relato de alguns fatos. E consideramos contextualizada, quando o autor descreve e analisa fatos históricos. Por exemplo, como Tales calculou a altura da pirâmide de Quéops.

- Demonstração: Encontramos dois casos: **tipo** 1 para o caso em que supõe todos os segmentos comensuráveis [1], de acordo com (BONGIOVANNI, 2007) essa é a prova incompleta dos pitagóricos, e o **tipo** 2 para o caso em que utiliza-se semelhança de triângulos.

- Atividades: Classificamos em **tradicionais** e **aplicações** .

  As atividades tradicionais tem a forma do exemplo apresentado na figura 1. Algumas aplicações utilizadas são: divisão de um segmento de reta em partes proporcionais, ou em partes iguais; teorema da bissetriz de um ângulo interno em um triângulo.

- Recursos didáticos: selecionamos os seguintes: **instrumentos de desenho** (esquadros e compasso), e utilização de um **software**.

- Verificação experimental: Analisamos se **é utilizada** ou se **não é utilizada**

Essas informações são detalhadas na **Tabela** 2:

[1] Dois segmentos AB e CD são comensuráveis se existem um segmento u e dois inteiros m e n tais que $AB = m.u$ e $CD = n.u$

Teorema de Tales \ Coleção	A	B
Introdução	direta	direta
História da Matemática	informativa	contextualizada
Demonstração do teorema	tipo 1	tipo 2
Atividades	tradicionais e aplicações	tradicionais e aplicações
Recursos didáticos	instrumentos de desenho	instrumentos de desenho
Verificação experimental	é utilizada	não é utilizada

Teorema de Tales \ Coleção	C	D
Introdução	através de exemplos	contextualizada
História da Matemática	contextualizada	informativa
Demonstração do teorema	tipo 2	tipo 1
Atividades	tradicionais e aplicações	tradicionais e aplicações
Recursos didáticos	instrumentos de desenho	instrumentos de desenho
Verificação experimental	não é utilizada	é utilizada

Teorema de Tales \ Coleção	E	F
Introdução	através de exemplos	contextualizada
História da Matemática	contextualizada	contextualizada
Demonstração do teorema	tipo 1	tipo1
Atividades	tradicionais	tradicionais e aplicações
Recursos didáticos	instrumentos de desenho	*software*
Verificação experimental	não é utilizada	não é utilizada

Tabela 2: Tópicos relacionados ao Teorema de Tales

Vamos apresentar as demonstrações do Teorema de Tales que encontramos nos livros didáticos analisados:

- **tipo** 1: Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas transversais, segmentos proporcionais.

  Consideremos as retas $a//b//c$, que determinam, sobre a transversal r, os segmentos AB e BC, e, sobre a transversal s, os segmentos DE e EF. Seguiremos as seguintes etapas:

  1. Provamos que se $\overline{AB} = \overline{BC}$, então $\overline{DE} = \overline{EF}$.

     Traçamos os segmentos DG e EH, paralelos a reta r. Então, $ABGD$ é um paralelogramo e, portanto $\overline{AB} = \overline{DG}$. Temos também que $BCHE$ é um paralelogramo e, portanto $\overline{BC} = \overline{EH}$. Como consideramos $\overline{AB} = \overline{BC}$ concluímos que $\overline{DG} = \overline{EH}$.

     Temos os ângulos correspondentes: $GDE \equiv HEF$ e $GED \equiv HFE$. Logo os triângulos $\triangle GDE$ e $\triangle HEF$ são congruentes (caso lado, ângulo e ângulo oposto). Portanto, $\overline{DE} = \overline{EF}$.

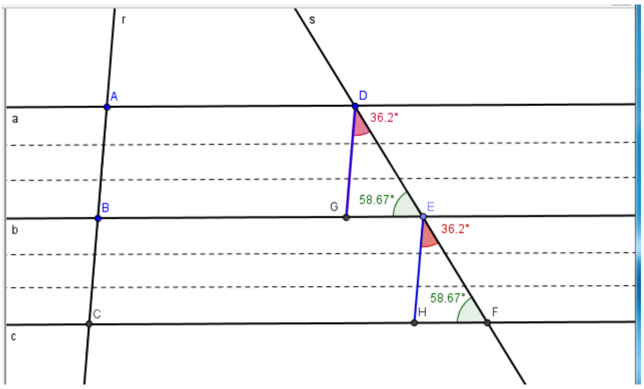

Figura 2: Triângulos congruentes

2. Supomos $\overline{AB} \neq \overline{BC}$, consideramos um segmento de comprimento x. Dividimos o segmento AB em p partes e o segmento BC em q partes, todas de medida x, tal que: $\overline{AB} = p.x$ e $\overline{BC} = q.x$, sendo $p, q \in \mathbb{N}, p \neq q$.

De acordo com a **etapa 1**, podemos concluir que ao traçarmos as paralelas, pelos pontos que dividem AB em p partes, elas determinam em s segmentos de medidas iguais, que indicamos por y, então $\overline{DE} = p.y$. Com um raciocínio análogo, obtemos $\overline{EF} = q.y$.

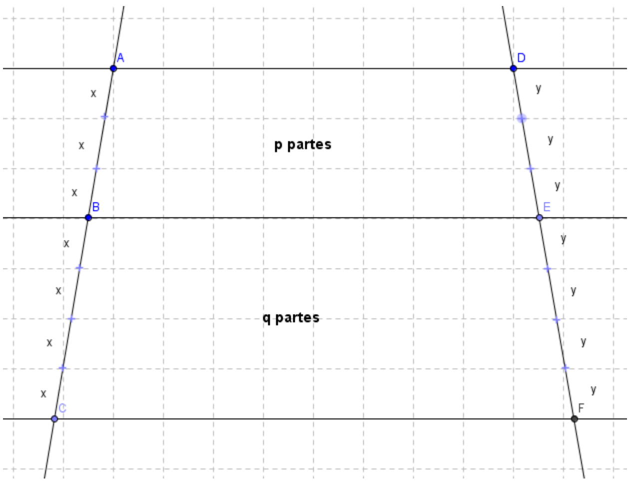

Figura 3: $\overline{AB} = p.x$ **e** $\overline{BC} = q.x$

Segue que: $\overline{AB}/\overline{BC} = p/q = \overline{DE}/\overline{EF}$.

- **tipo** 2: Se três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, então essas paralelas determinam nas transversais segmentos proporcionais.

Consideremos as retas $a//b//c$, que determinam, sobre a transversal r, os segmentos AB e BC, e, sobre a transversal s, os segmentos DE e EF.

Deslocamos a transversal s paralelamente, até que o ponto E coincida com o ponto B, ou seja, realizamos uma translação com a reta s. Assim obtemos os triângulos semelhantes $\triangle ABD$ e $\triangle BCF$.

Segue que: $\overline{AB}/\overline{BC} = \overline{DE}/\overline{EF}$.

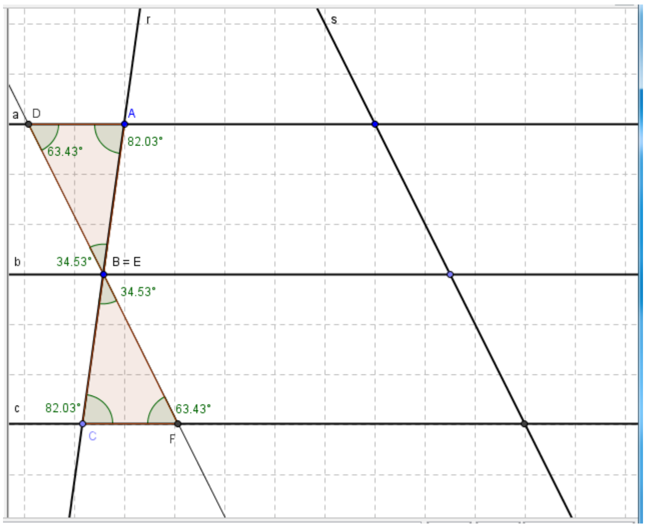

Figura 4: Tipo 2

2.4 GEOGEBRA

De acordo com (ARAUJO, 2008), as escolas públicas, em todo o país, estão recebendo computadores para equiparem seus laboratórios, enquanto uma parcela significativa dos professores ainda não esta preparada para usar essas ferramentas de maneira adequada. E que uma medida apropriada para tornar o computador um instrumento útil, para o processo do ensino aprendizagem da Matemática, é a instalação de algum *software*. No caso do estudo da geometria, uma boa alternativa é o *software* de Geometria Dinâmina GeoGebra. Esse *software* é livre e gratuito, podendo ser instalado com grande facilidade em qualquer computador. Segundo (GIRALDO, 2012), a sua manipulação permite reproduzir na tela do computador, as construções geométricas realizadas com régua e compasso, com uma grande vantagem: o ambiente é dinâmico, ou seja, após a finalização de uma construção, é possível alterar ou mover um de seus elementos, analisando o que ocorre com os demais elementos.

Utilizamos o Geogebra, nesse trabalho, como uma ferramenta auxiliar na realização de atividades e demonstrações, não aprofundamos as instruções para suas construções geométricas, disponibilizamos no Anexo A, os endereços eletrônicos onde os interessados podem fazer acesso/*download* do *software*, apostilas, vídeos, etc.

2.5 ATIVIDADES

Nestas atividades apresentamos algumas maneiras de verificar experimentalmente o Teorema de Tales, com ou sem o Geogebra. Também usamos exemplos contextualizados, onde verificamos a importância do conhecimento matemático, para que sejam melhor compreendidos.

Não é objetivo deste trabalho apresentar atividades que envolvam a contextualização com a História da Matemática.

2.5.1 ATIVIDADE 1

Verificando o Teorema de Tales com o auxílio do Geogebra.

Com esta atividade os alunos devem observar que, se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

1. Construimos no Geogebra, um feixe de três retas paralelas com duas transversais.

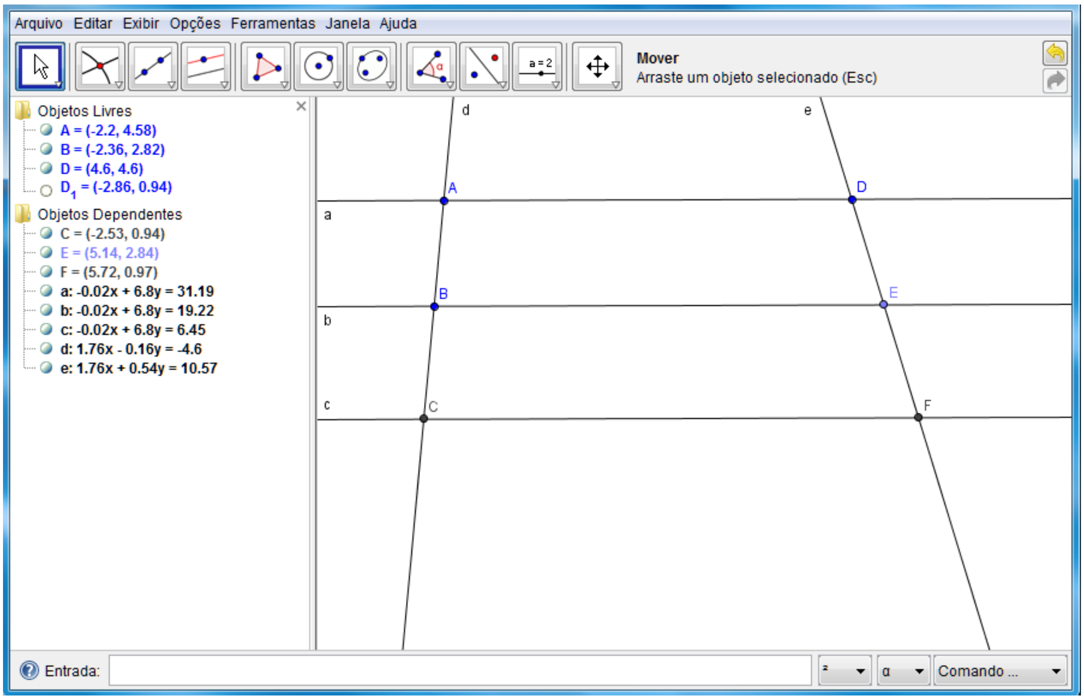

Figura 5: Feixe de três paralelas cortado por duas transversais

Para essa construção seguimos os seguintes passos:

- Com a ferramenta **reta definida por dois pontos**, contruimos, com os pontos A e B, a reta a. Usamos **novo ponto**, determinamos os pontos C e D, sendo que $C, D \notin a$.

- Usamos a ferramenta **reta paralela**, definimos as retas b e c. A reta b contém o ponto C e é paralela a reta a, e a reta c contém o ponto D e é paralela a reta a.

  Formamos assim, um feixe com três retas paralelas. Os próximos passos definem duas retas transversais a esse feixe.

- A seguir com **reta definida por dois pontos**, traçamos a reta transversal d, pelos pontos A e C.

- Com um **novo ponto**, determinamos um ponto $E \in b$, usamos a ferramenta **reta definida por dois pontos**, contruimos a transversal e, pelos pontos B e E, Usamos a ferramenta **interseção de dois objetos**, para determinarmos os pontos F e G, sendo $F = c \cap e$ e $G = c \cap d$.

- Para o ponto D usamos a opção **exibir objeto** e renomeamos os pontos C, G e B, respectivamente para B, C e D.

2. Determinamos as medidas dos seguintes segmentos, na mesma transversal:

- Usamos a ferramenta **segmento definido por dois pontos**.

- Obtemos $\overline{AB} = f$, $\overline{BC} = g$, $\overline{DE} = h$ e $\overline{EF} = i$.

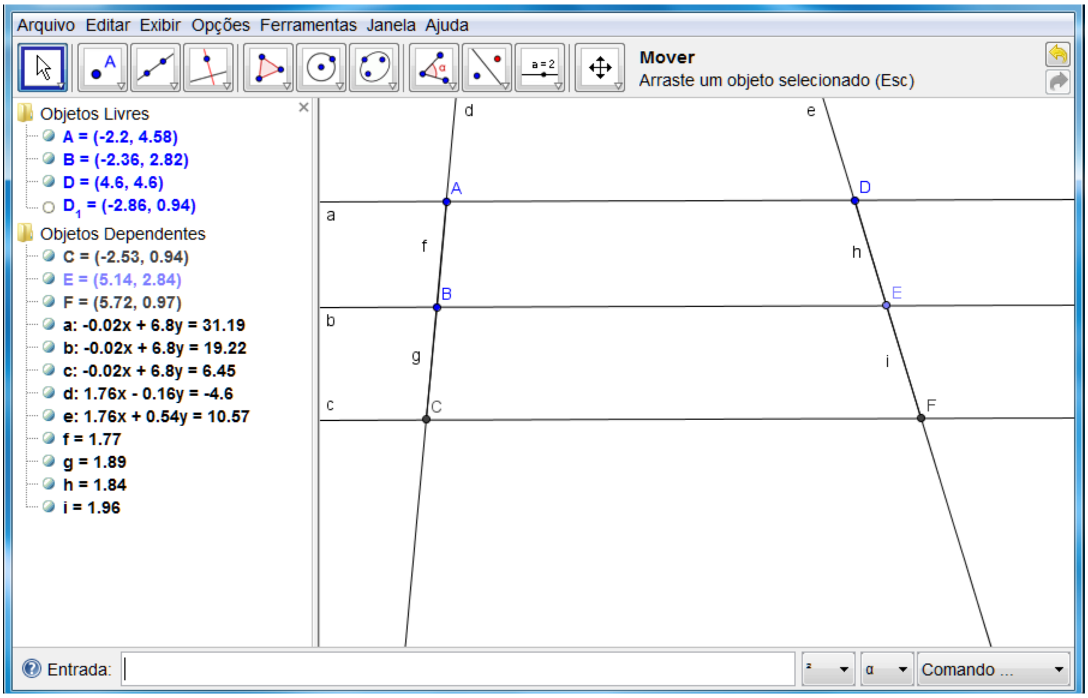

Figura 6: Segmentos f, g, h e i.

3. Calculamos a razão entre as medidas dos segmentos, na mesma transversal, de forma correspondente.

    - Colocamos no campo de entrada os seguintes comandos:
    - $R_1 = f/g$ e $R_2 = h/i$

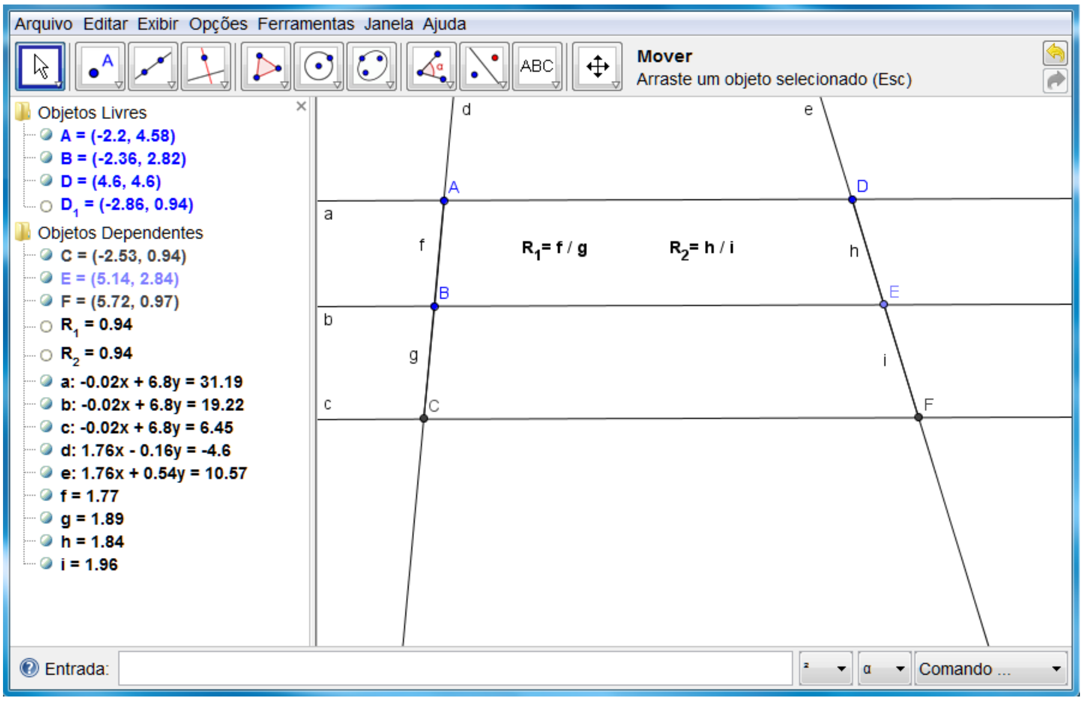

Figura 7: Razões R_1 e R_2

4. Comparamos os valores de R_1 e R_2, e observamos que $R_1 = R_2$.

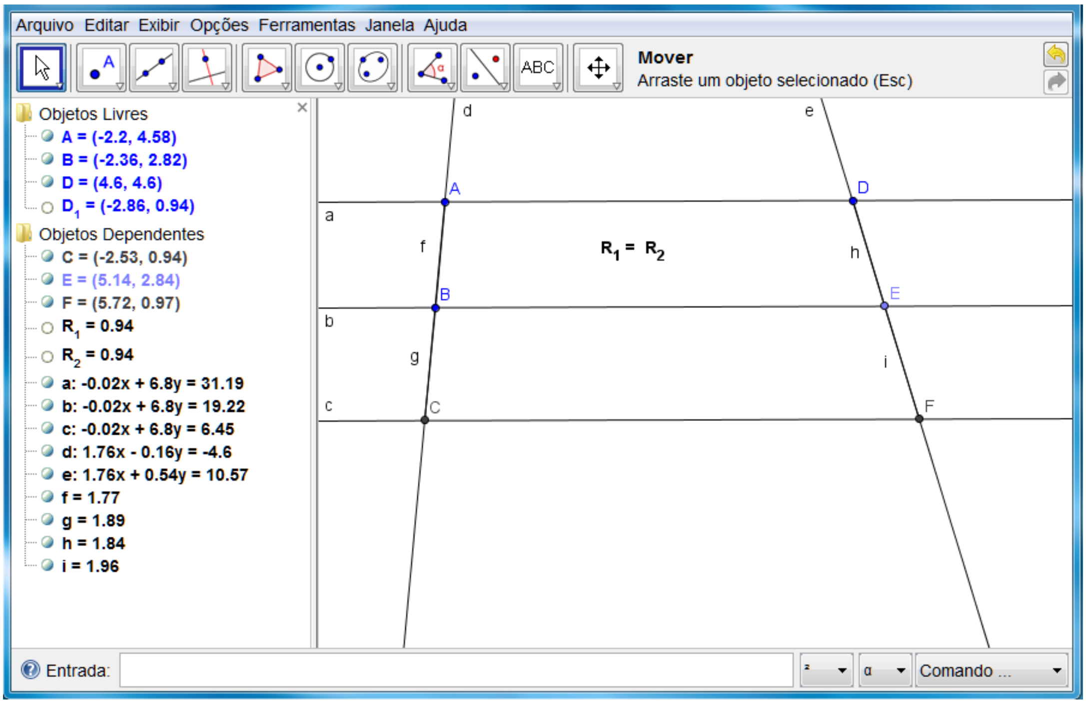

Figura 8: Razões $R_1 = R_2$

5. Podemos mover um objeto de cada vez, aquele que selecionamos. Com a ferramenta **mover**, podemos arrastar as retas a ou d, ou os pontos A, B ou D, e observamos o que ocorre com R_1 e R_2.

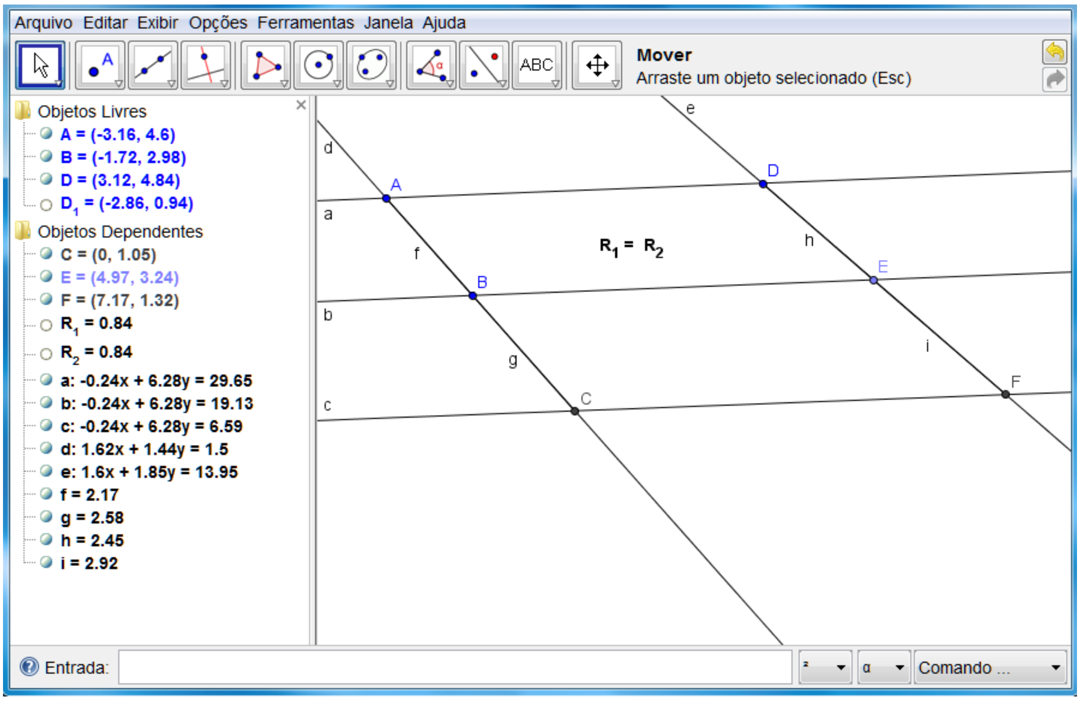

Figura 9: $R_1 = R_2$

6. Verificamos que ao mover as retas a ou d, ou os pontos A, B ou D da figura acima, as razões R_1 e R_2 permanecem iguais, ou seja, validamos experimentalmente o Teorema de Tales.

No passo 2, podemos introduzir algumas variações da atividade, como por exemplo:

- $\overline{AB} = f$, $\overline{AC} = g$, $\overline{DE} = h$ e $\overline{DF} = i$, ou
- $\overline{BC} = f$, $\overline{AC} = g$, $\overline{EF} = h$ e $\overline{DF} = i$.
- Os passos seguintes seguem a mesma sequência descrita acima.

  Podemos desenvolver atividade semelhante com papel quadriculado, esquadros e calculadora. No final, comparamos as diferentes atividades realizadas pelos alunos, e teremos a mesma conclusão.

2.5.2 ATIVIDADE 2

Aplicação do Teorema de Tales num triângulo qualquer.

Com esta atividade os alunos devem concluir que o Teorema de Tales também é válido num triângulo qualquer, onde toda reta paralela a um de seus lados, e que intercepta os outros dois em pontos distintos, divide esses dois lados em segmentos de reta proporcionais.

Desenvolvemos a atividade, no Geogebra, na sequência abaixo:

1. Desenhamos um triângulo qualquer ABC, e uma reta r paralela a um de seus lados e que intercepta os outros dois, em pontos distintos.

   - Com a ferramenta **polígono** desenhamos o $\triangle ABC$.
   - Marcamos, usando um **novo ponto**, $D \in AB$.
   - Traçamos a reta r, que passa por D e é paralela ao lado BC.

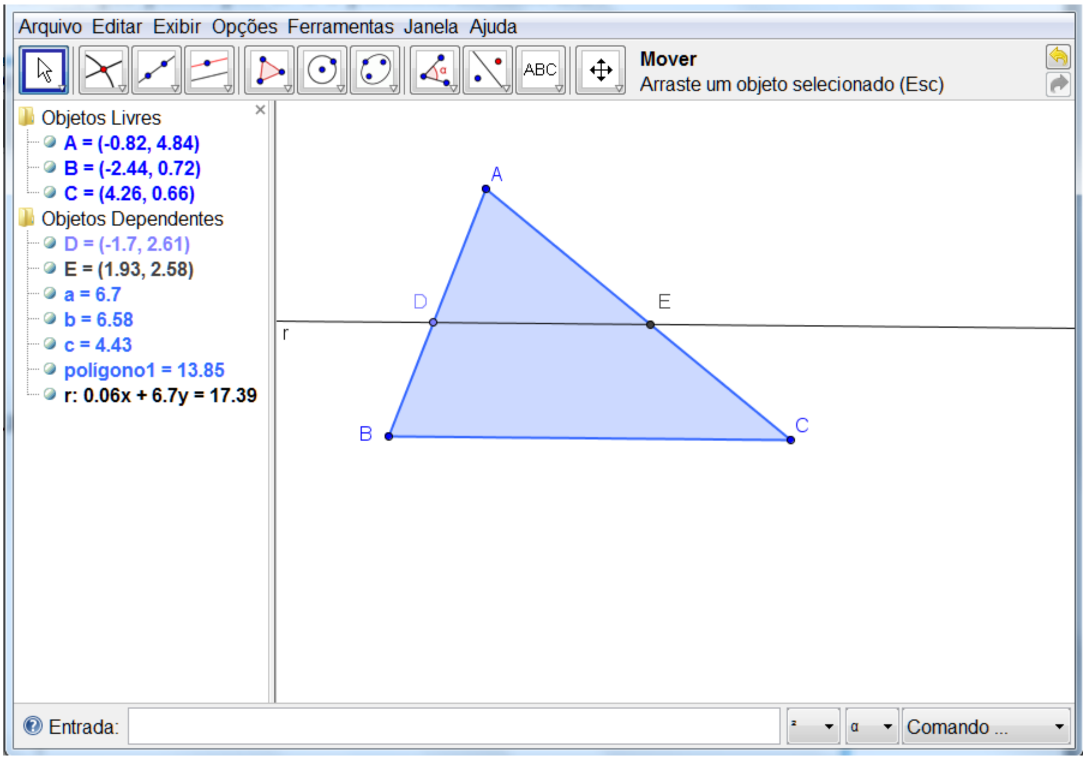

Figura 10: Triângulo $\triangle ABC$

2. Aplicamos **segmento definido por dois pontos** e obtemos $\overline{AD} = d$, $\overline{DB} = e$, $\overline{AE} = f$ e $\overline{EC} = g$.

3. Colocamos no campo de entrada os seguintes comandos: $R_1 = d/e$ e $R_2 = f/g$.

4. Neste momento chamamos a atenção do aluno, com relação ao resultado que aparece no campo algébrico, $R_1 = R_2$.

5. Podemos mover apenas um objeto de cada vez. Movemos os pontos A, B, C ou D, com a ferramenta **mover**. e verificamos que se mantém a igualdade $R_1 = R_2$.

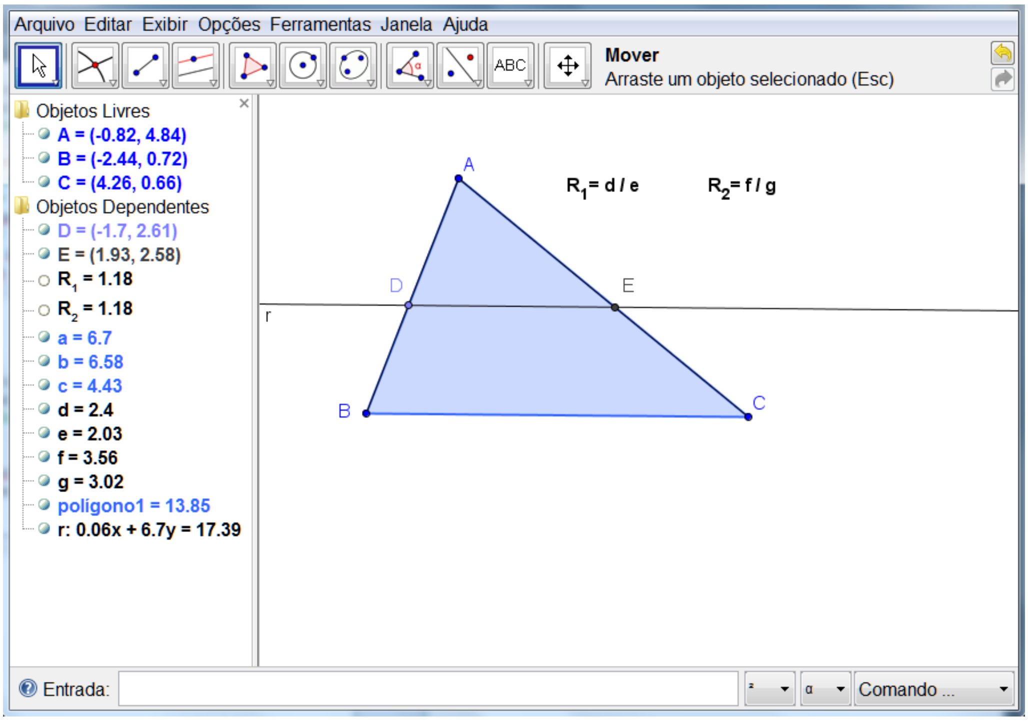

Figura 11: Razões R_1 e R_2

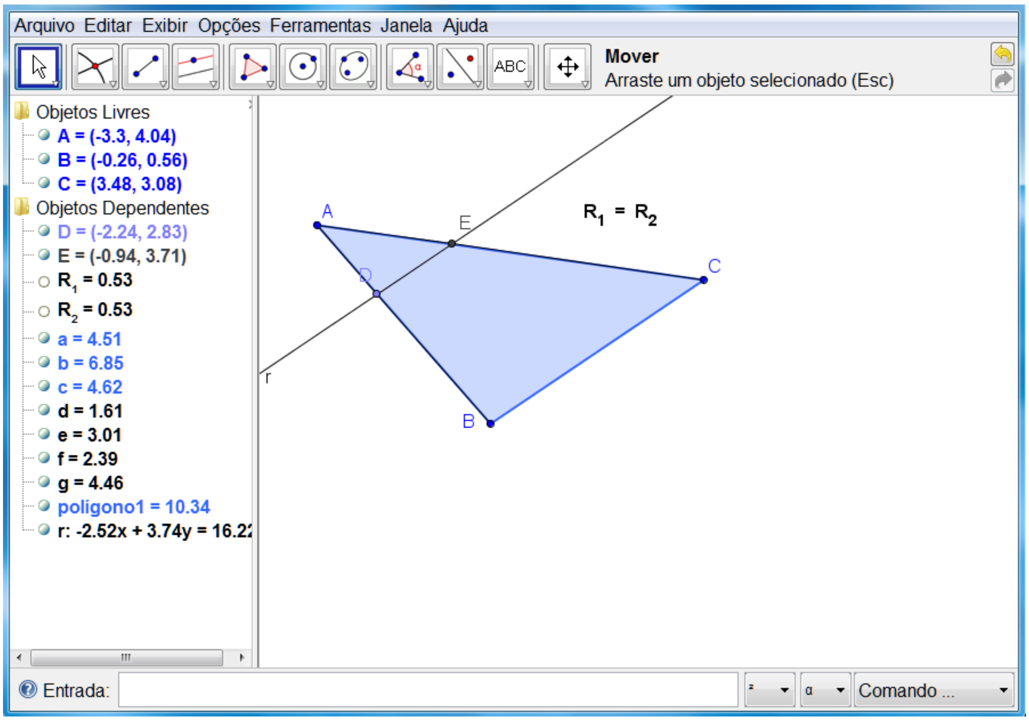

Figura 12: $R_1 = R_2$.

6. Verificamos que ao mover os pontos da figura acima, as razões R_1 e R_2 permanecem iguais, ou seja, validamos experimentalmente o Teorema de Tales.

No passo 2, podemos introduzir algumas variações da atividade, como por exemplo:

- $\overline{AD} = d, \overline{AB} = e, \overline{AE} = f$ e $\overline{AC} = g$, ou
- $\overline{AB} = d, \overline{AD} = e, \overline{AC} = f$ e $\overline{AE} = g$.
- Os passos seguintes seguem a mesma sequência descrita acima.

Podemos desenvolver atividade semelhante com papel quadriculado, esquadros e calculadora. No final, comparamos as diferentes atividades realizadas pelos alunos, e teremos a mesma conclusão.

2.5.3 ATIVIDADE 3

Microeconomia: restrição orçamentária.

Nessa atividade utilizamos a razão entre o preço e a quantidade de dois produtos da mesma espécie, para verificarmos qual deles é o mais vantajoso para o consumidor. Depois utilizamos o Geogebra, para representar graficamente a atividade, e também para determinar qual deve ser o preço que torna os produtos equivalentes.

De acordo com (MEC, 1998) precisamos mostrar que situações relacionadas com os direitos do consumidor, também precisam da Matemática para serem melhor compreendidas. Determinarmos e analisarmos a razão entre preço e quantidade, não é o suficiente. Devemos verificar se há necessidade de adquirirmos uma grande quantidade do produto, e se o seu prazo de validade está próximo do vencimento. Assim, os alunos podem desenvolver estratégias para identificarem as propagandas enganosas.

Num mini mercado, temos como opções para os consumidores duas alternativas para o achocolatado em pó:

- $Produto_1$: cada unidade custa R$4,80 e contém $400g$ de achocolatado;
- $Produto_2$: cada unidade custa R$2,25 e contém $180g$ de achocolatado;

Relativamente, qual das alternativas é a mais vantajoso para o consumidor?

Desenvolvemos essa atividade comparando duas razões, R_1 e R_2:

$$R_1 = \frac{preço_1}{quantidade_1} \qquad e \qquad R_2 = \frac{preço_2}{quantidade_2} \tag{1}$$

Com a calculadora obtemos os seguintes resultados:

$$R_1 = \frac{4,8}{400} = 0,012 \qquad e \qquad R_2 = \frac{2,25}{180} = 0,0125 \tag{2}$$

Como $R_1 < R_2$, então o $Produto_1$ é, relativamente mais vantajoso para o consumidor.

Representação gráfica da atividade.

Utilizamos o Geogebra para representar graficamente a situação, e para encontrar os preços dos produtos que tornam $R_1 = R_2$. Inicialmente, colocamos as quantidades dos produtos na escala 1 : 100, dessa forma 400 correspondem a 4 e 180, a $1,8$. Logo após, no Geogebra, adotamos os seguintes passos:

1. Introduzimos no campo de entrada os seguintes comandos:
   - $(0,0)$, renomeamos esse ponto para O (origem).
   - inserimos:$(0,4.8)$, $(0,4)$, $(2.25,0)$ e $(1.8,0)$ e obtemos, respectivamente, os pontos A, B, C e D.
2. Assinalamos desta forma, no eixo y, os pontos A e B, que correspondem, respectivamente, ao preço e a quantidade do $Produto_1$. E no eixo x, os pontos C e D, que representam, respectivamente, o preço e a quantidade do $Produto_2$.
3. Com a ferramenta **segmento definido por dois pontos** , determinamos: $a = \overline{OA}$; $b = \overline{OB}$; $c = \overline{OC}$ e $d = \overline{OD}$.
4. Insirimos no campo de entrada os seguintes comandos:
   - $R_1 = a/b$
   - $R_2 = c/d$
5. Traçamos a reta e pelos pontos A e C, e a reta f pelos pontos B e D.
6. Verificamos que $R_1 < R_2$, então o $Produto_1$ é, relativamente mais vantajoso para o consumidor.
7. Com a ferramenta **ângulo** determinamos os ângulos que as retas e e f formam com o eixo x, e verificamos que elas não são paralelas.

   Determinamos agora, o preço de um dos produtos que o torna equivalente ao preço do outro.
8. Movemos o ponto C, sobre o eixo x, até igualarmos as razões.
9. Observamos que $e//f$. As retas formam com o eixo x ângulos iguais.

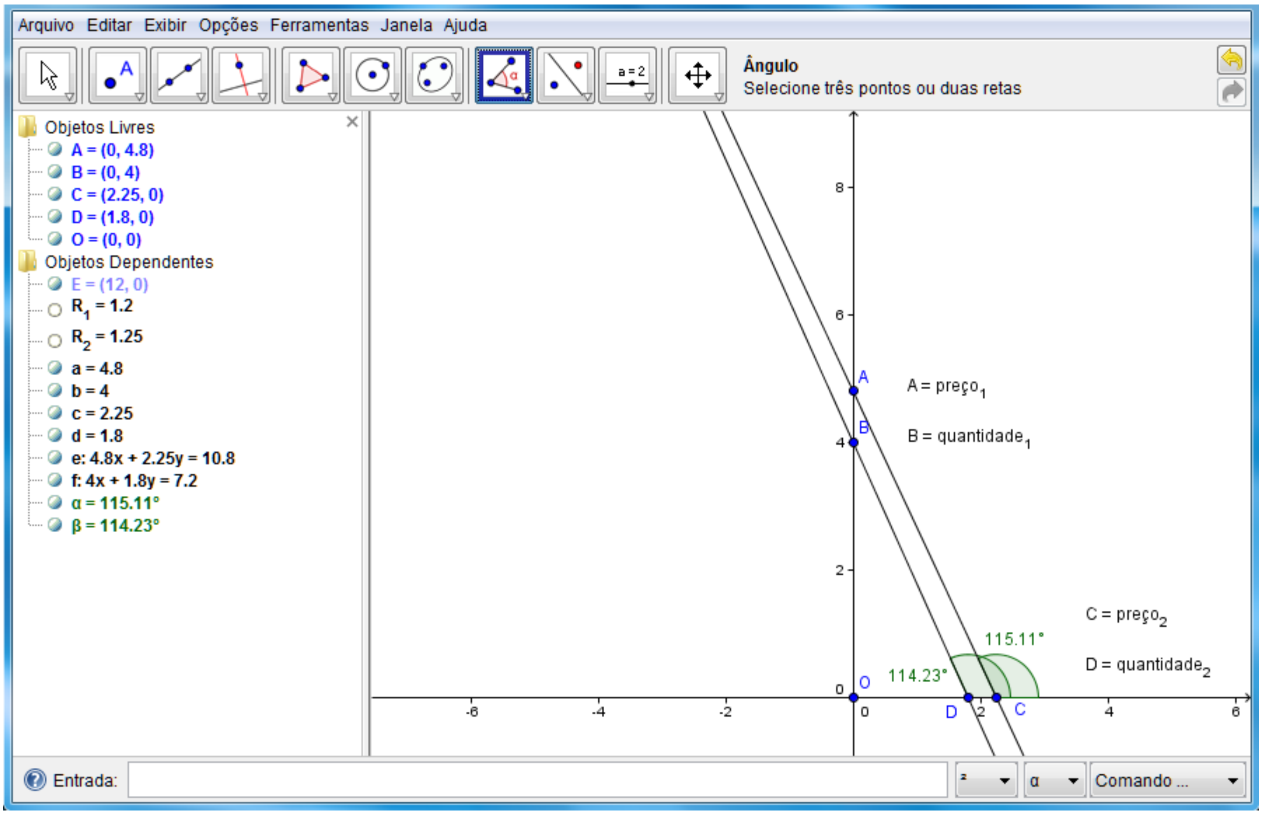

Figura 13: Gráfico do problema

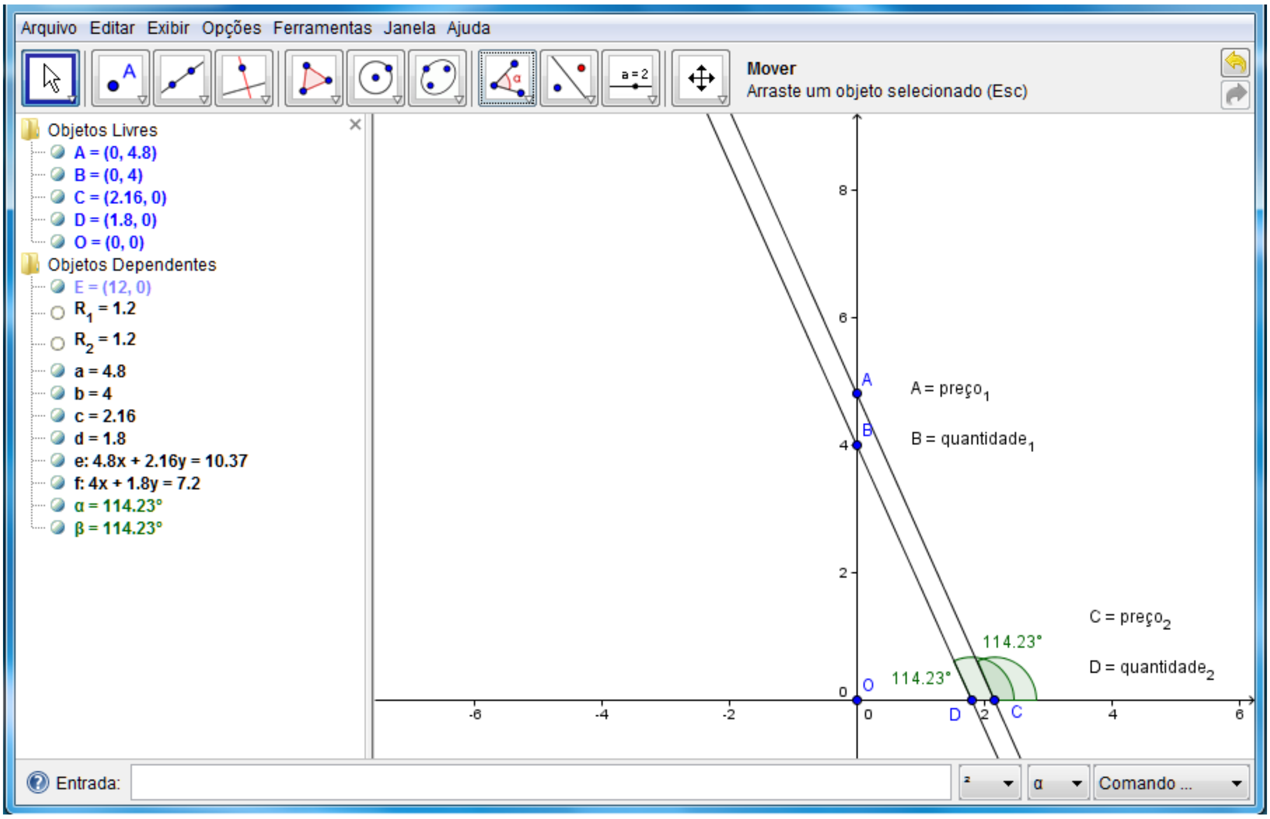

Figura 14: $Produto_2 = R\$2,16$

10. Percebemos que a igualdade entre as razões ocorre quando $C = (2.16, 0)$ e $Produto_2 = R\$2,16$. Então, esse deveria ser o preço do $Produto_2$ para ser equivalente ao preço do $Produto_1$.

11. Da mesma forma, movemos o ponto A, sobre o eixo y, até igualarmos as razões.

12. Verificamos que $e//f$. As retas formam com o eixo x ângulos iguais.

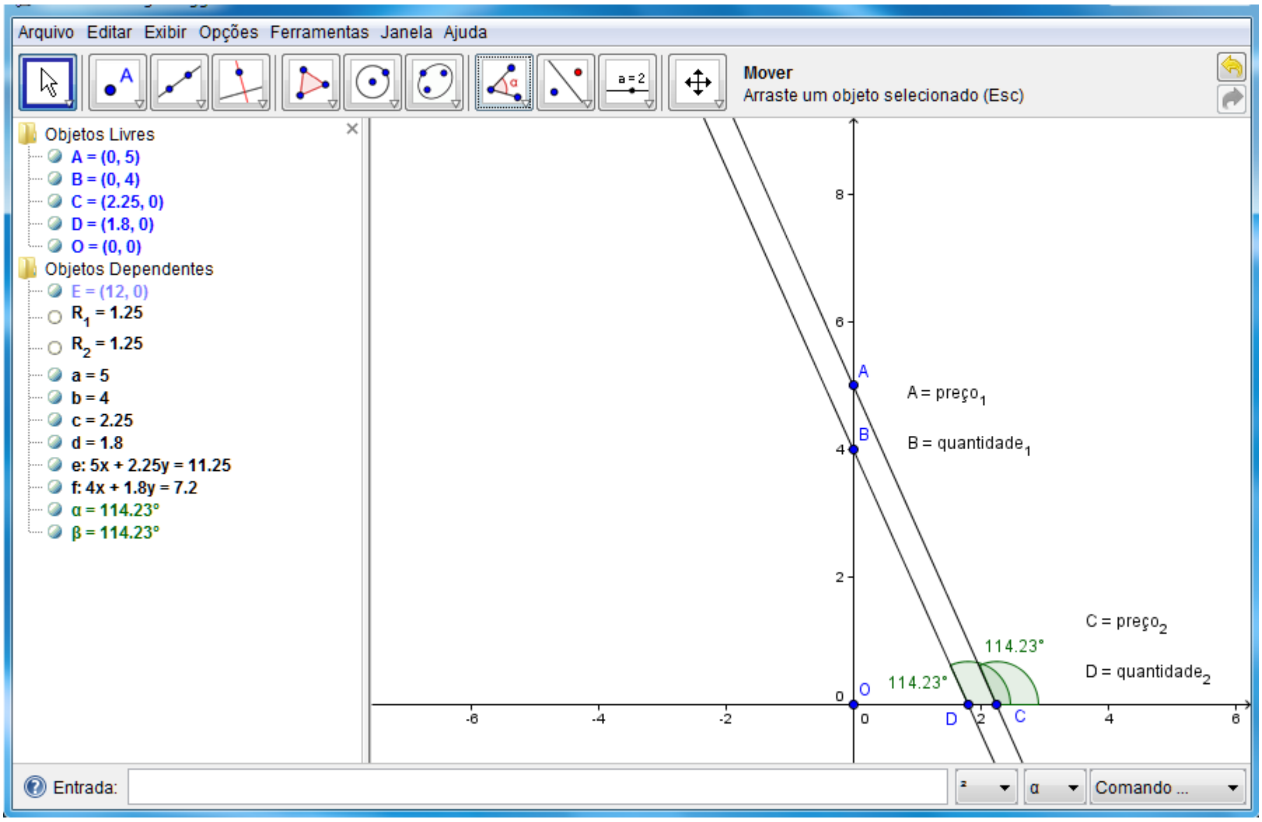

Figura 15: $Produto_1 = R\$5,00$

13. Percebemos que a igualdade entre as razões ocorre quando $A = (5, 0)$ e $Produto_1 = R\$5,00$. Esse, portanto, deveria ser o preço do $Produto_1$ para ser equivalente ao preço do $Produto_2$.

As atividades 4 e 5 referem-se a aplicações do Teorema de Tales, como uma ferramenta auxiliar, para determinar medidas na estrutura de uma casa de madeira. Nessas atividades tratamos das estruturas das paredes laterais e da cobertuta. Utilizamos o Geogebra para a representação dos desenhos dessas estruturas.

Com estas atividades pretendemos mostrar que os conhecimentos matemáticos, estão presentes em várias situações, como por exemplo, em obras, construções, reformas, etc. De acordo com (MEC, 1998), é importante mostrar que o conhecimento matemático não é construído e utilizado apenas por matemáticos, cientistas e engenheiros, mas por todos os grupos socioculturais, que de acordo com suas necessidades, desenvolvem habilidades, como por exemplo, calcular, medir e desenhar. Quando construímos uma casa de madeira, conforme a representação abaixo retirada de (USP, 2013), com a colaboração de mestres de obra, carpinteiros e serventes, também estamos usando os conhecimentos matemáticos.

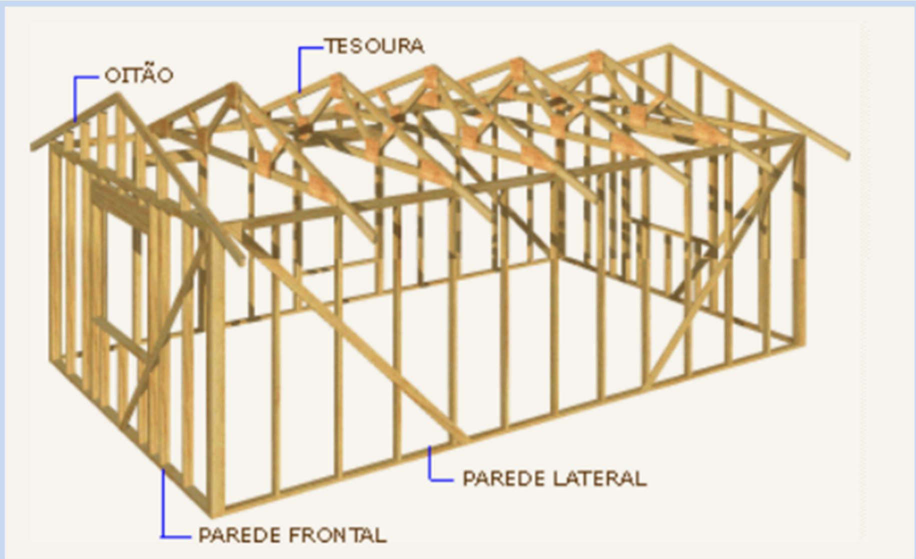

Figura 16: Casa de madeira

2.5.4 ATIVIDADE 4

A estrutura das paredes e seus encaixes.

Numa casa de madeira temos a estrutura das paredes, onde todas as peça de madeira são previamente medidas, cortadas e encaixadas. Essas peças são geralmente chamadas de montantes, barras horizontais e contravento. Os montantes são paralelos entre si e perpendiculares às barras horizontais. O contravento é colocado de forma transversal à estrutura.

Um carpinteiro quer construir a estrutura de uma parede, conforme a figura 17, com as seguintes medidas: o contravento $\overline{AB} = 5m = 500cm$, o montante $\overline{BC} = 3m = 300cm$ e a barra horizontal $\overline{AC} = 4m = 400cm$. Sendo a distância entre dois montantes consecutivos igual a $97cm$ e a espessura de todas as peças igual a $4cm$, a que distância da extremidade do contravento (ponto A), ele deve fazer o corte para o seu primeiro encaixe com o montante(ponto D)? E para o segundo (ponto E)?

Usamos as medidas em centímetros.

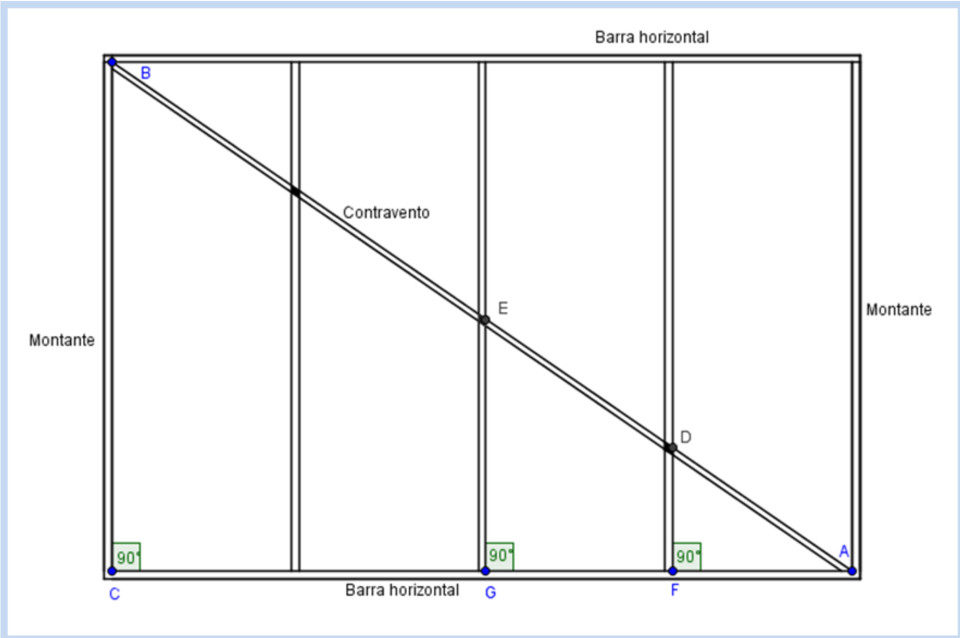

Figura 17: Estrutura da parede lateral

- Queremos calcular a medida do segmento AD , e temos $\overline{AF} = 97cm$. Pelo teorema de Tales segue que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{500} = \frac{97}{400} \tag{3}$$

  Dessa forma determinamos $\overline{AD} = 121,25cm$

- Determinamos a medida do segmento AE, calculando primeiro a medida do segmento AG: $\overline{AG} = 97+4+97 \Rightarrow \overline{AG} = 198cm$

  Do Teorema de Tales, segue que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{500} = \frac{198}{400} \tag{4}$$

  Assim, obtemos $\overline{AE} = 247,5cm$

2.5.5 ATIVIDADE 5

Meia tesoura inglesa.

Essa atividade refere-se a tesoura, que é a estrutura utilizada para sustentar a cobertura. A tesoura é uma estrutura reticulada, em geral triangular e indeformável, formada por uma sucessão de triângulos. Esses triângulos são formados por peças de madeira que se unem nos vértices, chamados de nós. As peças de madeira, no modelo inglesa ou *howe*, são geralmente denominadas por: linhas, montantes, pernas e escoras, conforme apresentamos na figura a seguir:

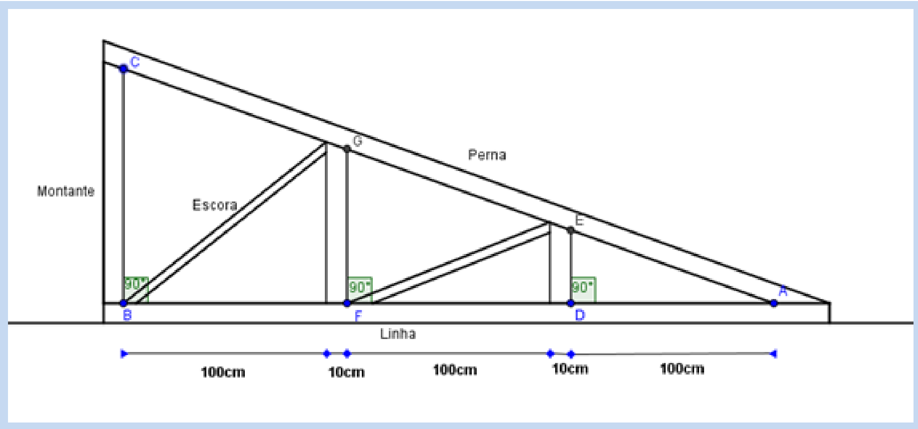

Figura 18: Meia tesoura inglesa

Um mestre de obras precisa construir uma meia tesoura inglesa, e apresenta para seus funcionários o esquema conforme a figura 18. Ele informa que a distância entre os pontos A e C deve ser $\overline{AC} = 340cm$, e pede para que eles determinem as medidas dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AG}$, lembrando que cada montante deve formar ângulo reto com a linha.

- Calculamos a medida do segmento $\overline{AE}$. De acordo com a figura temos, $\overline{AD} = 100cm$ e $\overline{AB} = 100+10+100+10+100 \Rightarrow \overline{AB} = 320cm$. Aplicamos o Teorema de Tales e segue que:
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{100}{320} = \frac{\overline{AE}}{340} \tag{5}$$
Então, obtemos $\overline{AE} = 106,25cm$.

- Determinamos a medida do segmento $\overline{AG}$, calculando primeiro a medida do segmento $\overline{AF}$. Conforme a figura temos: $\overline{AF} = 100+10+100 \Rightarrow \overline{AF} = 210cm$. Usamos o Teorema de Tales, e segue que:
$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{AG}}{340} = \frac{210}{320} \tag{6}$$
Dessa forma, temos: $\overline{AG} = 223,125cm$

2.5.6 ATIVIDADE 6

Uma demonstração do Teorema de Tales usando o Geogebra.

Queremos mostrar que utilizando o Geogebra, as ferramentas necessárias para demonstrar o teorema: paralelismo de retas, propriedades do paralelogramo e semelhança de triângulos; ficam mais evidentes.

Teorema 2.5.1 (Tales)**.** *Se um feixe de três retas paralelas é cortado por duas retas transversais, então as retas paralelas determinam nas transversais segmentos proporcionais.*

Acompanhamos a sequência de passos descritos a seguir:

1. Construimos um feixe de três retas paralelas com duas transversais, de acordo com as instruções do primeiro passo da Atividade 1.

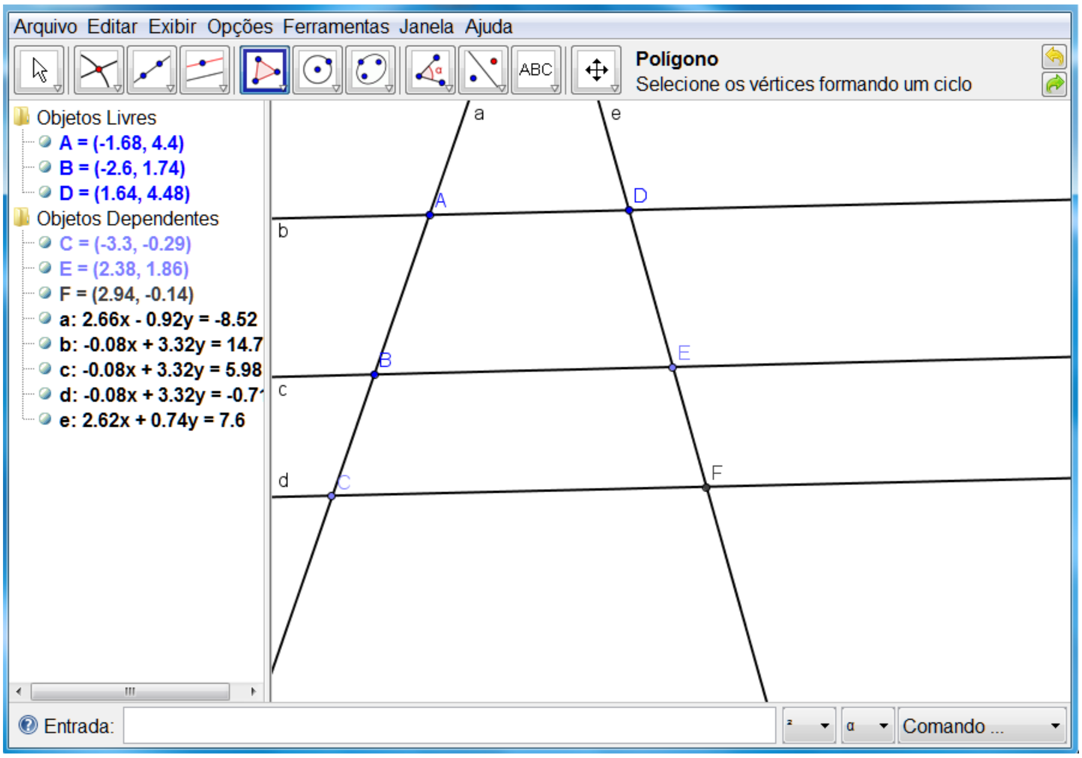

Figura 19: Feixe de paralelas cortado por duas transversais

2. Com a **reta paralela**, traçamos a reta f, que passa pelo ponto B e é paralela a reta e.

3. Assinalamos os pontos G e H, intersecções da reta f com as retas b e d, respectivamente.

4. Usamos o **polígono** e definimos os triângulos $\triangle ABG$ e $\triangle BCH$.

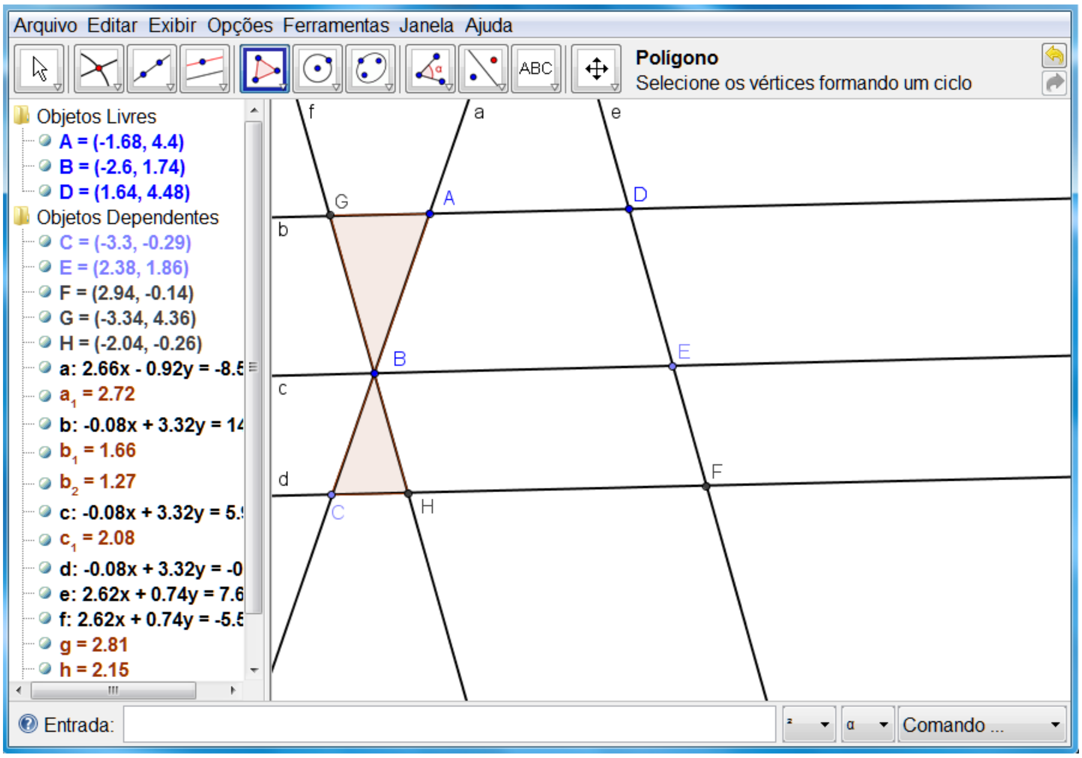

Figura 20: Triângulos $\triangle ABG$ e $\triangle BCH$

5. Empregando a ferramenta **ângulo**, determinamos todos os ângulos internos dos triângulos $\triangle ABG$ e $\triangle BCH$, confirmando assim sua semelhança.

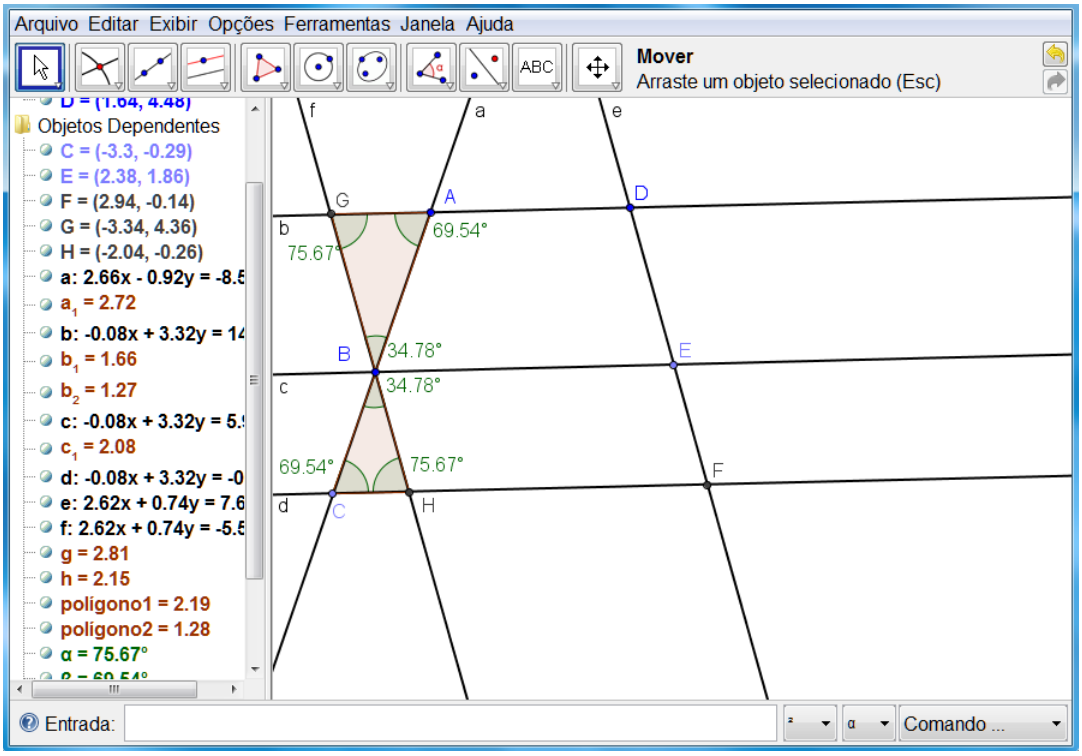

Figura 21: Triângulos semelhantes $\triangle ABG$ e $\triangle BCH$

6. Da semelhança entre os triângulos $\triangle ABG$ e $\triangle BCH$ temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{BH}} \tag{7}$$

7. Temos que:

$$b//c \Rightarrow GD//BE, \tag{8}$$

$$c//d \Rightarrow BE//HF, \tag{9}$$

$$f//e \Rightarrow GB//DE \quad e \quad BH//EF. \tag{10}$$

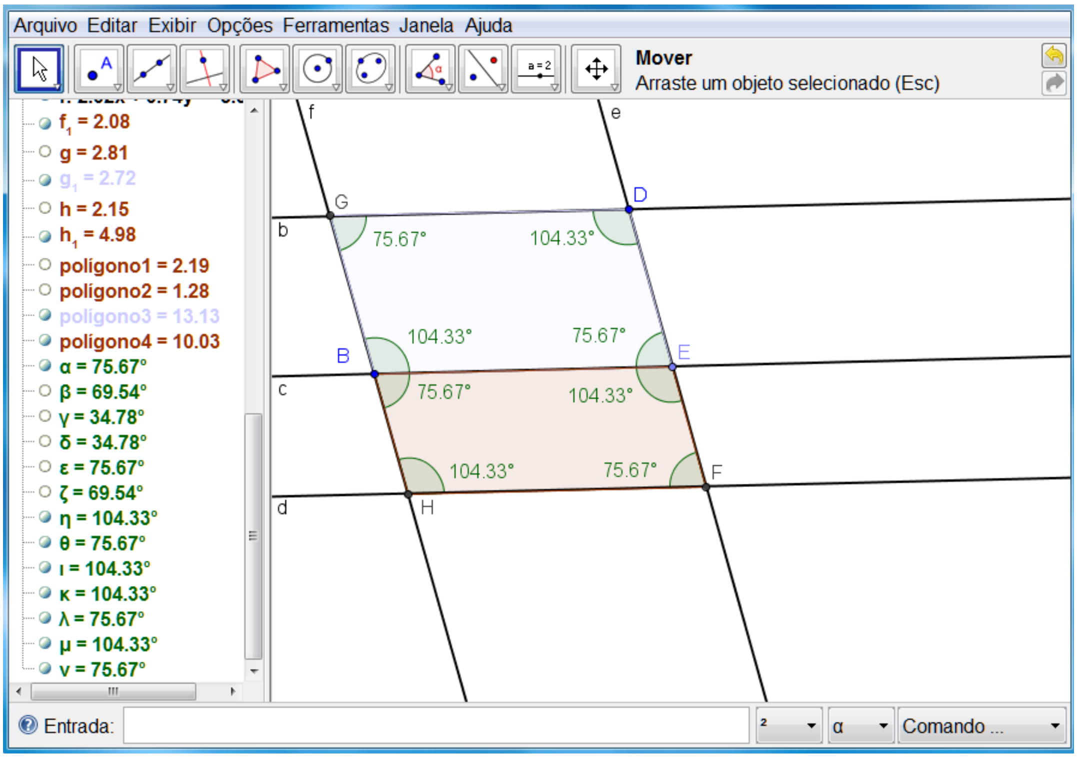

Figura 22: Paralelogramos

De (8), (9) e (10) temos que os quadriláteros $DEBG$ e $EFHB$ são paralelogramos, logo:

$$\overline{DE} = \overline{GB} \;\; e \;\; \overline{EF} = \overline{BH} \tag{11}$$

8. E com as conclusões (7) e (11), segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \tag{12}$$

No passo 2 podemos fazer uma variação desta atividade, trocando o ponto B pelo ponto A, mostrando outra proporção. Os demais passos seguem um raciocínio análogo.

2.5.7 ATIVIDADE 7

Divisão de um segmento em partes congruentes.

Nessas atividades mostramos que podemos dar outros significados aos conteúdos estudados, explorando outros contextos, como questões relacionadas ao desenho geométrico. De acordo com os PCNs, (MEC, 1998), a interpretação equivocada do que é contexto, pode fazer com que muitos conteúdos importantes sejam descartados, por serem julgados sem aplicação imediata.

1. Dado um segmento de reta AB, vamos dividi-lo em cinco partes congruentes. Utilizamos régua, compasso e esquadros.

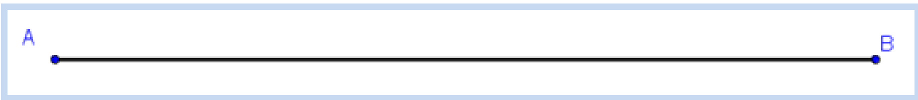

Figura 23: Segmento AB

Realizamos essa tarefa seguindo a seguinte sequência:

- Traçamos pela extremidade A uma semireta r, oblíqua ao segmento AB.
- Tomamos o compasso com uma abertuta u qualquer, marcamos na semireta r, a partir de A, os pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, tais que, $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_4A_5} = u$

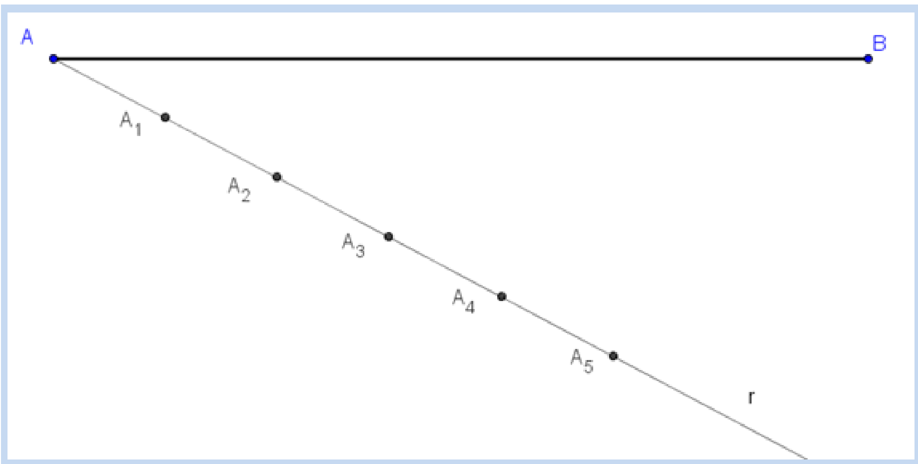

Figura 24: $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_4A_5} = u$

- Traçamos a reta a, pelos pontos A_5 e B.

- Em seguida, com os esquadros, traçamos quatro retas paralelas à reta a, passando pelos pontos A_1,A_2,A_3 e A_4. Assim, determinamos no segmento $\overline{AB}$ os pontos B_1, B_2, B_3 e B_4, que o dividem em cinco partes congruentes.

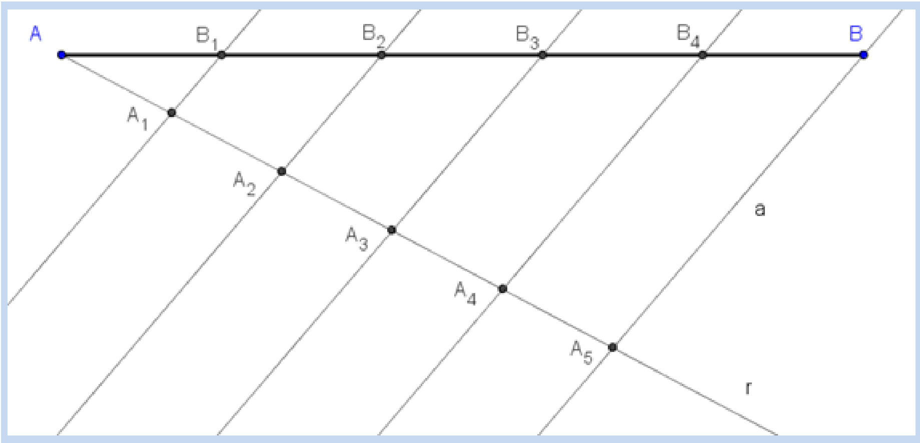

Figura 25: AB **dividido em cinco partes congruentes.**

- Justificamos o resultado aplicando o Teorema de Tales.

2.6 DEMONSTRAÇÃO SUGERIDA

Segundo (BONGIOVANNI, 2007) , a questão da proporcionalidade, entre segmentos determinados por um feixe de retas paralelas e retas transversais, por muitos séculos foi chamada de teorema dos segmentos proporcionais. A partir do final do século XIX, na França, alguns autores passaram a denominar esse resultado de Teorema de Tales. Sendo que, a primeira publicação, onde ocorreu a substituição dessa nomenclatura, foi o livro francês Éléments de Géométrie de Rouche e Comberrouse (reedição de 1883).

Para (BONGIOVANNI, 2007), o Teorema de Tales é um dos teoremas centrais no estudo da geometria plana, e algumas de suas aplicações estão relacionadas com:

- a resolução de problemas práticos envolvendo paralelismo e proporcionalidade;
- a justificativa de definições na trigonometria e na teoria da semelhança de triângulos;
- o estudo das secções de um sólido;
- as propriedades das figuras geométricas em perspectiva;
- a geometria vetorial;
- as representações gráficas das funções lineares e afins;

Vamos apresentar a demonstração do Teorema de Tales pelo método das áreas. Essa demonstração utiliza a definição de área de um triângulo e as propriedades do paralelogramo. Pela avaliação dos livros didáticos do PNLD 2014, esses conteúdos sempre são trabalhados antes do Teorema de Tales, portanto essa demonstração não interfere na atual sequência dos livros didáticos. Apresentamos, então, a demonstração.

Sejam o triângulo $\triangle ABC$ e M um ponto entre A e B. Traçamos pelo ponto M uma reta a paralela ao lado BC, sendo $a \cap AC = \{N\}$. Vamos provar que: $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}$.

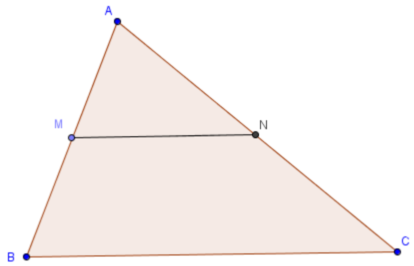

Figura 26: Triângulo $\triangle ABC$ com $MN//BC$

Podemos determinar a área do triângulo $\triangle AMN$ de duas maneiras, $\overline{AM}.\overline{H_1N}/2$ ou $\overline{AN}.\overline{H_2M}/2$.

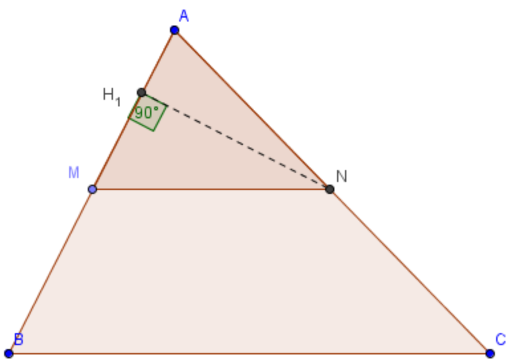

Figura 27: $\overline{AM}.\overline{H_1N}/2$

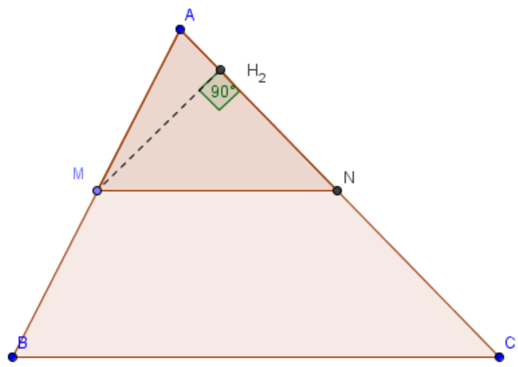

Figura 28: $\overline{AN}.\overline{H_2M}/2$

Temos que:

$$\frac{\overline{AM}.\overline{H_1N}}{2} = \frac{\overline{AN}.\overline{H_2M}}{2} \Rightarrow \overline{AM}.\overline{H_1N} = \overline{AN}.\overline{H_2M} \Rightarrow \frac{\overline{H_1N}}{\overline{H_2M}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} \quad (13)$$

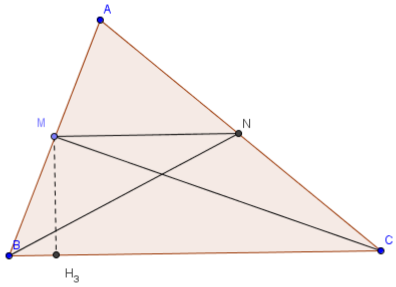

Figura 29: $\triangle BMN$ **e** $\triangle CMN$

Os triângulos $\triangle BMN$ e $\triangle CMN$ tem a mesma base MN e a mesma altura H_3M, então suas áreas são iguais. Sabendo que essas áreas são iguais, podemos determiná-las, respectivamente, em função de $\overline{MB}$ e $\overline{H_1N}$, e em função de $\overline{NC}$ e $\overline{H_2M}$.

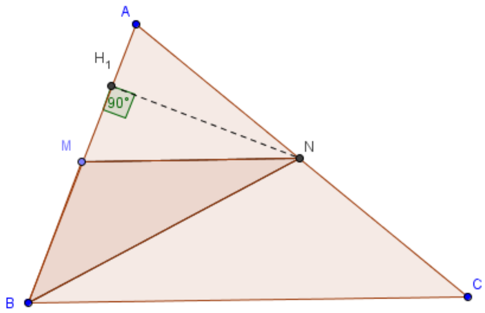

Figura 30: $\triangle BMN$

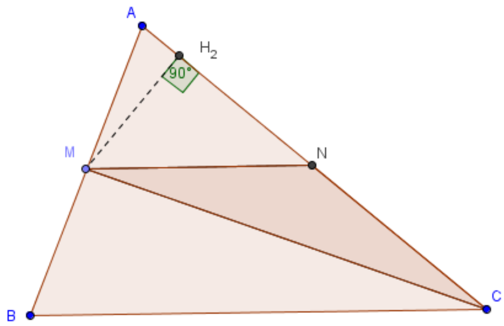

Figura 31: $\triangle CMN$

Segue que:

$$\frac{\overline{MB}.\overline{H_1N}}{2} = \frac{\overline{NC}.\overline{H_2M}}{2} \Rightarrow \overline{MB}.\overline{H_1N} = \overline{NC}.\overline{H_2M} \Rightarrow \frac{\overline{H_1N}}{\overline{H_2M}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{MB}} \tag{14}$$

De (13) e (14) concluímos que:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{MB}} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} \tag{15}$$

Quando as intersecções entre as retas transversais e o feixe de retas paralelas formam um trapézio, podemos construir uma reta paralela a uma das retas transversais e assim, recaímos no caso do triângulo, demonstrado anteriormente.

Sendo um feixe de três retas paralelas (a, c e d) , interceptado por duas retas transversais (b e e), respectivamente nos pontos A,C,D e B,E,F, vamos provar que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EF}}$.

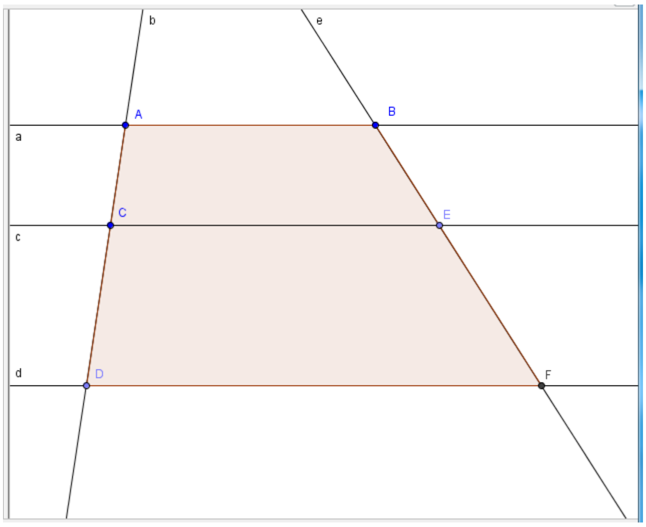

Figura 32: Caso do trapézio

Pelo ponto B construímos a reta f, sendo $f//b$. Obtemos as intersecções: $f \cap c = \{G\}$ e $f \cap d = \{H\}$.

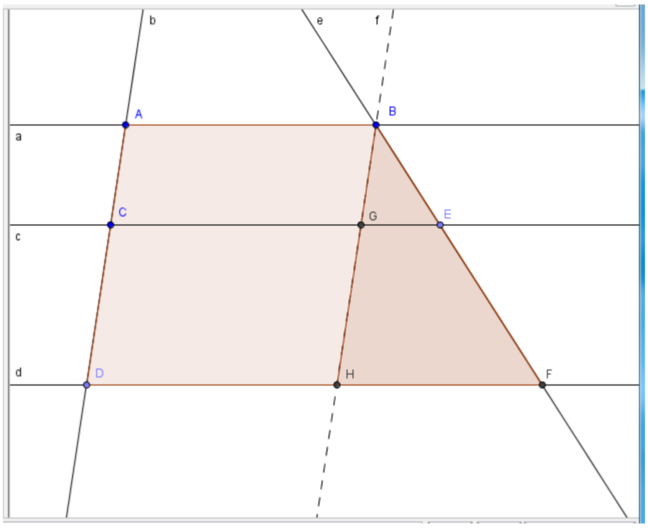

Figura 33: Triângulo $\triangle BHF$

Aplicamos o Teorema de Tales no triângulo $\triangle BHF$, e obtemos:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EF}}. \tag{16}$$

Temos que $a//c//d$ e $b//f$, então os quadriláteros $ABGC$ e $CGHD$ são paralelogramos, e segue que:

$$\overline{BG} = \overline{AC} \;\; e \;\; \overline{GH} = \overline{CD}. \tag{17}$$

Então, de (16) e (17) obtemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EF}}. \tag{18}$$

3 CONCLUSÃO

Com esse trabalho verificamos que os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática foram organizados em quatro blocos de conhecimentos, e que o estudo da Geometria integra o bloco Espaço e Forma. Para o quarto ciclo do ensino fundamental, identificamos a indicação para que sejam tratados alguns conteúdos, como por exemplo:

- construção de retas paralelas e transversais, com instrumentos de desenho;
- desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas;
- verificações experimentais e aplicações do Teorema de Tales;

As orientações para o trabalho do professor, em sala de aula, apontam para a importância das construções geométricas, para a visualização, verificação, e aplicação de propriedades, e também para a necessidade da realização das demonstrações em Matemática. E ainda recomendam a utilização dos recursos tecnológicos no processo de ensino aprendizagem.

Percebemos que na avaliação do guia de livros didáticos, do PNLD 2014, na maioria das seis coleções que escolhemos, o estudo da Geometria é considerado satisfatório, e que existem situações em que os alunos são encorajados a realizarem validações experimentais, dos temas considerados mais significativos. Mas, com relação ao estudo do Teorema de Tales, ocorre exatamente o inverso, a maioria das obras analisadas não incentiva a validação experimental.

Quando estudamos os relatos da História da Matemática, no período em que viveu Tales de Mileto, observamos que em várias situações, para que fosse possível acontecer trocas de conhecimentos entre as diferentes culturas, eram necessárias grandes viagens. E que esses deslocamentos eram realizados em embarcações rudimentares, através do rio Nilo ou pelo mar Egeu. Essas viagens eram motivadas pelo comércio, e também por curiosidades sobre Astronomia, Filosofia ou pela própria Matemática. É necessário que professores e alunos tenham conhecimento desses fatos, para compará-los com a maneira pela qual acontecem hoje as pesquisas, as trocas de informações, etc. Acreditamos que essas comparações podem contribuir para a valorização e reconhecimento dos conhecimentos matemáticos, produzidos e acumulados por diferentes civilizações.

Com relação às demonstrações do Teorema de Tales, verificamos que a preferência na maioria das coleções investigadas, é pela chamada demonstração incompleta dos pitagóricos, onde somente o caso dos segmentos comensuráveis é abordado. As demais coleções utilizam a semelhança de triângulos. Em apenas uma das obras, mesmo já tendo visto a semelhança de triângulos, os autores não a utilizam na demonstração. Vimos que a demonstração que utiliza a semelhança de triângulos é bastante simples e de fácil compreensão, mas normalmente somente é apresentada pelos autores que abordam a semelhança de triângulos antes do Teorema de Tales. E na demonstração mais utilizada, os livros didáticos omitem o caso dos segmentos incomensuráveis. Verificamos dessa forma, que é importante que o professor tenha outra opção, para substituir ou complementar a demonstração do Teorema de Tales.

Recomendamos o uso do GeoGebra, para verificações e demonstrações no ensino da Matemática, e particularmente da Geometria. Nas atividades que propomos, constatamos que utilizar esse *software*, nas construções geométricas, é mais proveitoso do que usar os instrumentos de desenho (régua e compasso). Essa vantagem é porque o ambiente é dinâmico, ou seja, após concluir uma construção podemos mover os objetos livres, e verificar as mudanças que ocorrem nos demais objetos. Dessa forma, transformamos uma construção geométrica em muitos elementos geométricos, onde podemos verificar suas propriedades comuns. Entendemos que é de responsabilidade do professor, estudar, dominar , utilizar e levar ao conhecimento de seus alunos ferramentas como essa.

Entendemos que o Teorema de Tales é um dos teoremas mais importantes da geometria plana, porque é um conteúdo que apresenta muitas aplicações na Matemática da educação básica, como por exemplo:

- na resolução de atividades que envolvem paralelismo e proporcionalidade;
- no estudo da semelhança, principalmente na semelhança de triângulos;
- nas propriedades da base média de um triângulo;
- nas razões trigonométricas;
- na divisão de um segmento em partes congruentes;
- no estudo das secções de um sólido por um plano paralelo a sua base;

Portanto esse teorema apresenta ligações importantes com outros conhecimentos, e desempenha um papel fundamental em muitas demonstrações. Por esses motivos apresentamos uma sugestão para uma demonstração completa do Teorema de Tales, pelo método das áreas, onde não é necessário discutir a natureza dos segmentos (comensuráveis ou incomensuráveis). As definições necessárias para essa demonstração, em todas as coleções do PNLD 2014, são tratadas antes do 9º ano do Ensino Fundamental, logo não é necessário realizar nenhuma alteração na sequência já estabelecida. Além disso, quando utilizamos esse procedimento valorizamos o fato de que existem caminhos alternativos para determinarmos a solução de um mesmo problema matemático.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, L. C. L. de. Geogebra, um bom software livre. **Revista do Professor de Matemática**, v. 67, n. 1, p. 43–47, 2008.

BIGODE, A. J. L. **Projeto Velear, Matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2012.

BONGIOVANNI, V. O teorema de tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2.5, n. 1, p. 94–106, 2007.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2014**. Brasília: MEC/SEB, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/>. Acesso em: 10 de outubro de 2013.

CENTURIóN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática, Teoria e Contexto**. 1. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2012.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2012.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências, Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

GIRALDO, V. Integrando geometria e funções: gráficos dinâmicos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 79, n. 3, p. 39–46, 2012.

LEONARDO, F. M. de. **Projeto Araribá, Matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais (terceiro e quarto ciclos), Matemática**. Brasília: MEC/SEB, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matemática.pdf>. Acesso em: 22 de outubro de 2013.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides, a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço**. 6. ed. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática, Ideias e Desafios**. 17. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2012.

ROQUE, T. **História da Matemática, uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SOUZA, J. R. de; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora FTD, 2012.

USP. **Estrutura de uma casa de madeira**. 2013. Disponível em: <http://www.usp.br/nutau/madeira/paginas/cobertura/tesoura.htm>.

ANEXO A – ENDEREÇOS ELETRÔNICOS

Segue os enderecos eletrônicos para acesso/download do software Geogebra, e de apostilas, vídeos e tutoriais, que podem orientar os interessados em sua utilização:

Geogebra: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/ ;

Instituto Geogebra RJ: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/vtt.html;

Curso de Geogebra: http://www.youtube.com/playlist?list=PL8884F539CF7C4DE3&feature=plcp;