

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA

GIOVANNA PERAL SALVADEO

**ESTUDO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÃO DO  
PROBLEMA COMBINADO EM UMA INDÚSTRIA MOVELEIRA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

GIOVANNA PERAL SALVADEO

**ESTUDO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÃO DO  
PROBLEMA COMBINADO EM UMA INDÚSTRIA MOVELEIRA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Licenciatura em Matemática”.

Orientadora: Profa. Dra. Glaucia Maria Bressan

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2016**

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Profa. Dra. Glaucia Maria Bressan**  
Orientadora

---

**Profa. Dra. Daniele Costa Silva**

---

**Prof. Dr. André Luís Machado Martinez**

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2016**

Dedico este trabalho a minha mãe, Anabel Aparecida Peral, que me apoiou em todo o meu período acadêmico e, em especial, a meu avô, Caetano Peral Munhoz (*in memoriam*), que foi minha inspiração e motivação.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus e à minha família, em especial minha mãe, Anabel Aparecida Peral, que me apoiou durante toda a minha graduação, tornando isso tudo possível.

A esta Universidade como um todo e aos meus professores, que foram tão importantes para a minha formação.

À banca examinadora, pelas essenciais contribuições que apresentaram para esse trabalho.

À minha orientadora, Glauca Maria Bressan, pelo incentivo, motivação, competência e amizade.

A todos os meus amigos que direta ou indiretamente fizeram parte de tudo isso.

## RESUMO

SALVADEO, Giovanna Peral. ESTUDO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR E APLICAÇÃO DO PROBLEMA COMBINADO EM UMA INDÚSTRIA MOVELEIRA. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

Com a intensificação da tecnologia no século XXI no cenário mundial, bem como um visível crescimento do parque industrial brasileiro, a participação de profissionais qualificados é essencial para o desenvolvimento de projetos científicos e tecnológicos demandados pelas empresas. Devido aos aspectos econômicos e avanços computacionais, as indústrias têm sido estimuladas a tornar seus processos produtivos mais eficientes e competitivos, o que incentiva o crescimento do estudo de modelos de otimização para o controle e planejamento de sistemas produtivos. Este trabalho aborda o estudo de métodos da Pesquisa Operacional, em especial, de Programação Linear, com o objetivo de resolver problemas reais de tomadas de decisões, para a programação da produção de uma indústria moveleira de pequeno porte. O problema é modelado por meio do *Problema Combinado*, o qual acopla dois problemas de otimização: o dimensionamento de lotes e o corte de estoque. A partir do Método Simplex, é possível obter as soluções dos problemas de Programação Linear apresentados, que por sua vez podem auxiliar na tomada de decisão referente à minimização dos custos de produção, de dimensionamento de lotes e de corte de estoque.

**Palavras-chave:** Programação Linear, Método Simplex, Problema Combinado, Planejamento da Produção

## ABSTRACT

SALVADEO, Giovanna Peral. STUDY OF THE LINEAR PROGRAMMING AND OF THE COMBINED PROBLEM APPLICATION IN THE MANUFACTURING. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

With the technology intensification at twenty first century on the world stage, as well as the visible Brazilian industrial park increasing, the qualified professional participation is essential for the development of scientific and technological projects which are demanded by companies. Due to the economic aspects and computational advances, companies have been motivated to make their productions processes more efficient and competitive, what stimulates the study of optimization models for the controlling and planning of productive systems. This work approaches the study of operational research methods, especially of Linear Programming, with the aim of to solve real problems of making decisions, for the production programming of a small manufacturing. The problem is modeled using the *Combined Problem*, which couples two optimization problems: lot sizing and stock cutting. From the Simplex algorithm, it is possible to obtain solutions of the linear programming problems presented, which can help in making decisions about the minimization of production costs, lot sizing and stock cutting.

**Keywords:** Linear Programming, Simplex Method, Combined Problem, Production Planning

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Procedimento de procura da solução ótima .....	21
FIGURA 2	– Conjunto de soluções viáveis do problema de minimização .....	22
FIGURA 3	– Tipo de mesa e cadeira da produção .....	43



## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Quadro Inicial do Simplex no Formato Tabular .....	29
TABELA 2	– Identificação das Matrizes e Variáveis no Formato Simplex Tabular ....	30
TABELA 3	– Quadro Geral do Simplex .....	30
TABELA 4	– Homens/hora por unidade produzida .....	31
TABELA 5	– Representação Matricial para a Solução Ótima .....	34
TABELA 6	– Padrões de Corte: primeiro cenário de produção .....	41
TABELA 7	– Padrões de Corte: segundo cenário de produção .....	44

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>PESQUISA OPERACIONAL E PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL)</b>	<b>15</b>
3.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE UM PPL	15
3.2	PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO GRÁFICA	19
3.3	MÉTODO SIMPLEX	22
3.3.1	O Algoritmo Primal Simplex	28
3.3.2	Método Simplex na Forma Tabular (Tableaux Simplex)	29
3.3.2.1	Exemplo Numérico	31
3.3.3	Outras Situações Referentes às Soluções de um PPL	33
3.4	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	33
<b>4</b>	<b>PROBLEMA COMBINADO</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>ESTUDO DE CASO</b>	<b>40</b>
5.1	PRIMEIRO CENÁRIO DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO	40
5.2	SEGUNDO CENÁRIO DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO	44
5.3	RESULTADOS NUMÉRICOS	48
5.4	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	49
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>50</b>
6.1	PUBLICAÇÕES	52
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>53</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Devido aos avanços tecnológicos e industriais do século XXI, as indústrias de manufatura têm sido estimuladas a tornar seus processos mais eficientes e competitivos, minimizando os custos globais de produção. Isso incentiva o estudo de modelos de otimização para o controle e planejamento de sistemas produtivos, motivando pesquisas acadêmicas (BRESSAN, 2003).

O gerenciamento da produção dentro de uma indústria é responsável pelo planejamento e controle da transformação de matérias-primas em produtos finais. O sistema responsável por esse gerenciamento denomina-se Planejamento e Controle da Produção (PCP) (RUSSOMANO, 2000); (TUBINO, 2007), que coordena as atividades, desde a aquisição de matérias-primas até a entrega dos produtos finais. Desta forma, a Pesquisa Operacional e seus métodos de otimização possuem grande utilidade na solução de problemas, em especial os que envolvem processos produtivos, na tomada de decisões e no gerenciamento de sistemas, selecionando as melhores decisões, dentre todas as possíveis (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Várias indústrias que produzem peças de tamanhos e materiais variados possuem problemas com o desperdício de matéria-prima, o que implica em uma redução de lucro, além de aumentar a produção de resíduos. Surge, então, a necessidade de se resolver um problema de otimização, que consiste em cortar os objetos, respeitando-se estas questões. Desta forma, o objetivo deste trabalho é aplicar o Método Simplex para resolução de problemas reais de tomadas de decisões modelados com o Problema Combinado (GRAMANI, 2001), que, por sua vez, acopla dois problemas de otimização linear: o *dimensionamento de lotes* e o *corte de estoque*. O problema de dimensionamento de lotes consiste em planejar a quantidade dos itens a ser produzida em vários estágios, em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender a demanda e minimizar os custos de produção e de estocagem (ARENALES et al., 2007). O problema de corte de estoque consiste na otimização do processo de corte de placas em peças menores nas quantidades e dimensões demandadas (ARENALES et al., 2007). Por sua vez, o Problema Combinado consiste em decidir a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período do horizonte de planejamento tal que minimize os custos da produção, preparação e estocagem e a quantidade de placas a serem cortadas para compor pro-

duos finais. A partir do Método Simplex, é possível solucionar tal Problema de Programação Linear, obtendo uma solução ótima que auxilie na tomada de decisão.

A partir disso, dados reais são coletados em uma fábrica de móveis de pequeno porte no município de Cornélio Procópio, PR. São, então, abordados 2 tipos de problemas: no primeiro caso, custos e demandas são considerados constantes e, no segundo caso, a variação desses parâmetros no modelo são consideradas ao longo dos períodos de planejamento da produção. Em cada um destes casos, são desenvolvidos dois cenários de programação da produção. Uma Análise de Sensibilidade dos parâmetros e das constantes do modelo matemático também é apresentada para todos os cenários. Para a obtenção da solução ótima, a partir do Método Simplex, foi utilizado apoio computacional do software LINDO (“*Linear Interactive and Discrete Optimizer*”). A aplicação do Método Simplex (BAZARAA et al., 2010) com geração de colunas (GILMORE; GOMORY, 1961) tem sido apresentado, na literatura, como a melhor estratégia para resolver este tipo de problema.

O Método Simplex é um algoritmo desenvolvido por George B. Dantzig em 1947 para resolver problemas numéricos de Programação Linear. O método parte de uma solução básica viável, pertencente a um vértice do sistema de equações que constituem as restrições do problema. A partir dessa solução inicial, o algoritmo identifica novas soluções viáveis de valor igual ou melhor que a concorrente. Assim, o processo encontra novos vértices da envoltória convexa do problema e determina se este vértice é ótimo ou não, ou seja, se a troca de variáveis na base pode ainda melhorar a função objetivo. Mais detalhes são encontrados em Lachtermacher (2009), Maculan e Pereira (1980), Moreira (2007), Lins e Calôba (2006).

Esse trabalho estará organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 descreve a Revisão Bibliográfica, apresentando trabalhos que trazem contribuições nos temas que envolvem Programação Linear e o Problema Combinado. O Capítulo 3 descreve os métodos relacionados à Pesquisa Operacional e à Programação Linear, incluindo o Método Simplex, seu algoritmo e sua forma tabular, para a obtenção da solução ótima, seguido da teoria de Análise de Sensibilidade. O Capítulo 4 caracteriza o Problema Combinado, exibindo o modelo matemático utilizado nesse trabalho. O Capítulo 5 mostra o estudo de caso em dois cenários de programação da produção de uma pequena fábrica de móveis, além da aplicação do Problema Combinado e da obtenção da solução ótima pela aplicação do Método Simplex, com uma Análise de Sensibilidade. O sexto e último capítulo aponta as considerações finais desse trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vários autores na literatura apresentam a importância da Pesquisa Operacional na tomada de decisões e formulam os problemas de corte de estoque, de dimensionamento de lotes e de planejamento da produção como Problemas de Programação Linear.

Bressan (2003) apresenta uma revisão do Método Simplex com geração de colunas e sua aplicação ao Problema Combinado, apresentando sua formulação matemática para uma indústria de móveis, em que placas de madeira são cortadas para a produção dos produtos finais. Algumas propriedades da matriz de restrições foram consideradas a fim de construir uma base esparsa, utilizando para isso, um reordenamento estático das colunas básicas. Resultados numéricos que realiza trocas de colunas da base e verifica a esparsidade, simulando o Método Simplex, são apresentados. A construção da base estática, considerando a esparsidade, leva a bons resultados computacionais.

Alem e Morabito (2013) investigaram um problema combinado em fábricas de móveis de pequeno porte, lidando com as incertezas da produção. Nesse modelo, foram levadas em consideração, restrições como os custos não planejados que uma fábrica pode ter, além de demandas incertas. O objetivo é determinar o impacto que essas incertezas ocasionariam no planejamento de produção. Foram propostas três formulações matemáticas diferentes de otimização: considerando o custo incerto, considerando a demanda incerta e, por fim, considerando ambos incertos simultaneamente. Foi concluído que é possível economizar com tais métodos de otimização, ou seja, tratar de incertezas na pequena fábrica de móveis foi eficiente quando o modelo proposto foi aplicado.

O trabalho de Pileggi et al. (2007) trata do problema de sequenciamento de padrões de corte em um problema de corte de estoque. Esse problema consiste em determinar a sequência em que os padrões são cortados de acordo com a demanda, a fim de minimizar o número máximo de pilhas abertas. No entanto, uma boa solução para o problema de geração de padrões não significa uma boa solução para o problema de sequenciamento de padrões e vice-versa. Logo, tais problemas são tratados separadamente. São então apresentadas três abordagens

heurísticas para resolver os dois problemas de forma integrada (problema de geração de padrões e problema de sequenciamento de padrões), utilizando o caso de corte unidimensional. A primeira abordagem para a solução do problema integrado consistiu em resolver o problema de geração de padrões e, a partir da solução obtida, resolver o problema de sequenciamento. Isso é feito até que a solução obtida satisfaça as tolerâncias impostas. A segunda abordagem trata de um procedimento iterativo, com o objetivo de otimizar o problema de geração de corte, considerando o número máximo de pilhas abertas como uma restrição. A terceira e última abordagem consiste em resolver os problemas de geração e sequenciamento de padrões, utilizando o método simplex com um procedimento de geração de colunas que considera a restrição do número máximo de pilhas abertas. As três abordagens propostas tiveram um bom desempenho, sendo que a primeira foi a que encontrou os melhores resultados e a segunda abordagem a que obteve as piores perdas. Computacionalmente, a segunda abordagem foi a mais rápida, diferentemente da terceira abordagem que foi a mais lenta.

Poldi e Arenales (2009) abordam o problema de corte de estoque multiperíodo, que pertence ao problema de planejamento e programação da produção que têm um estágio de produção caracterizado pelo corte de peças. Logo, a partir da demanda, é possível antecipar ou não a produção de itens e utilizar objetos em um período que não foram utilizados no anterior. O objetivo do trabalho é propor um modelo de otimização linear inteira de grande porte, aplicando-se o Método Simplex. Esse modelo multiperíodo pode ser uma ferramenta que fornece ao tomador de decisões uma ampla visão do problema, auxiliando na tomada de decisão. Utilizando o Método Simplex com geração de colunas, foram realizados experimentos computacionais que mostraram ganhos efetivos usando o modelo de corte de estoque multiperíodo, quando comparado com a solução lote-por-lote. Desenvolveram então dois procedimentos de arredondamento da solução do problema multiperíodo, adaptados e baseados nas heurísticas de arredondamento propostas para problemas de corte com único período (POLDI, 2003).

O trabalho de Danwé et al. (2012) trata sobre a perda de matéria prima na indústria moveleira. Por meio do estudo de vários métodos de corte e os diferentes produtos finais, foi formulado um problema de otimização de corte com base em um modelo de forma real de madeira. Para isso, foi preciso o auxílio da geometria analítica para o estudo da madeira em toras e estratégias para corte e suas classificações. Assim, para solucionar esse problema, foi criado um pacote chamado “corte otimizador” (em tradução livre). Esse pacote tem como objetivo determinar o número de cortes de um tipo para a otimização. Foi criado então um algoritmo para otimizar o corte do tronco, levando a uma possível solução para o aumento da produção material, da produtividade e da qualidade de cortes, independentemente do tipo de madeira.

No trabalho de Wongprakornkul e Charnsethikul (2007), a integração do problema de corte de estoque unidimensional foi formulada como um problema de otimização em grande escala. Foi utilizada a técnica de geração de colunas através do método direto e heurístico. Assim, foram desenvolvidas três abordagens para a resolução de um conjunto de problemas. A primeira abordagem utiliza a técnica de geração de colunas para gerar padrões apropriados através do método direto. A segunda abordagem utiliza o método heurístico ao invés do método direto. A terceira abordagem utiliza a técnica de geração de colunas e a decomposição híbrida para gerar padrões e planos de corte simultaneamente. Logo após, os padrões são resolvidos pelo método heurístico. Os resultados indicaram que a abordagem baseada na técnica de geração de colunas com o método heurístico (abordagem 2) é o mais eficiente para resolver o modelo integrado de corte de estoque unidimensional. Porém, todas as abordagens podem ser utilizadas como alternativas para a resolução desses problemas.

A partir da revisão bibliográfica, foi possível perceber que Problemas de Programação Linear que abordam planejamentos de produção, são temas muito abordados na literatura, assim como heurísticas para a resolução dos problemas modelados por Programação Linear. O Método Simplex, por sua vez, é um algoritmo bastante aplicado, além de fornecer os melhores resultados para o Problema Combinado.

### 3 PESQUISA OPERACIONAL E PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL)

A Pesquisa Operacional pode ser definida como uma ciência que possibilita, através de métodos matemáticos e estatísticos, resolver problemas de forma quantitativa e auxiliar na tomada das melhores decisões. O componente científico está relacionado à modelagem matemática de problemas de decisão, determinando os objetivos e as restrições sob as quais se deve operar (ARENALES et al., 2007). Desta forma, a Pesquisa Operacional e seus métodos de otimização possuem grande utilidade na solução de problemas, em especial os que envolvem processos produtivos, na tomada de decisões e no gerenciamento de sistemas, selecionando as melhores decisões, dentre todas as possíveis (GOLDBARG; LUNA, 2005).

#### 3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DE UM PPL

Os principais modelos de Pesquisa Operacional são denominados Programação Matemática, uma das mais importantes variedades dos modelos quantitativos que apresenta uma grande utilidade na solução (exata) de problemas de otimização. Na Programação Matemática, as técnicas de solução se agrupam em algumas subáreas como a Programação Linear. Para a abordagem de problemas formulados como um Problema de Programação Linear é necessário, primeiramente, a formulação matemática do problema e, após a descrição do modelo matemático, utilizar um método para obter uma solução. Em seus modelos matemáticos, as variáveis envolvidas - que são valores a serem encontrados - no processo de modelagem, são contínuas e apresentam comportamento linear. O principal objetivo da Programação Linear é maximizar o que é de interesse (lucro, vendas, receitas) ou minimizar o que é necessário (custos, perdas, recursos), o que é representado por uma *função objetivo*. Algumas limitações e condições do problema em estudo também devem ser consideradas, de forma que represente de fato o fenômeno em estudo.

Tendo em vista que em um problema real há limitações de tempo, consumo, materiais, mão de obra, dentre outros, é preciso expressá-las matematicamente por meio de equações e inequações lineares. Estas são chamadas de *restrições* do problema e contribuem para que a



resposta final seja o mais fiel possível à realidade. Inerente aos problemas de programação linear, está a condição de que todas as variáveis de decisão pertencem ao primeiro quadrante, ou seja, menores ou iguais a zero. Esta condição é chamada de *condição de não-negatividade*. Além dessas condições, é necessário que o problema tenha algumas características, descritas a seguir (LACHTERMACHER, 2009).

- Proporcionalidade: o valor da função objetivo é diretamente proporcional ao valor de cada variável de decisão.
- Aditividade: considera as variáveis de decisão do modelo independentes, não permitindo que haja interdependência entre elas.
- Divisibilidade: qualquer variável de decisão pode assumir qualquer valor fracionário.
- Certeza ou Determinismo: assume que todos os parâmetros do modelo são constantes e conhecidos.

Um modelo matemático é uma representação simplificada da realidade, pois este modelo deve ser representativo, mas não infactível, para que os métodos de resolução possam ser aplicados e eficientemente implementados computacionalmente (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Se existem  $n$  valores quantitativos a serem determinados, ou seja,  $n$  decisões a serem tomadas, associa-se uma variável a cada uma delas, chamada de *variável de decisão*. Desta forma, as variáveis de decisão são representadas por  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  e, ao aplicar um método de solução, os valores dessas variáveis são determinados.

Depois de identificar as equações do Problema de Programação Linear, é necessário formulá-lo. Deve-se levar em consideração se pretende-se minimizar ou maximizar a função objetivo, determinando também cada restrição, relacionando com as variáveis de decisão. De forma geral, um Problema de Programação Linear é formulado como as equações (3.1) a (3.3) (GOLDBARG; LUNA, 2005).

$$\min \text{ ou } \max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \quad (3.1)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & \quad [sinal] \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & \quad [sinal] \quad b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n & \quad [sinal] \quad b_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

(...)

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & \quad [sinal] \quad b_m \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n & \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Onde,

- i.  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são as variáveis de decisão;
- ii.  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  são os coeficientes (números reais) da função objetivo;
- iii.  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$  são as constantes (números reais) de cada uma das restrições;
- iv.  $a_{ij}$  são os coeficientes (números reais) das restrições;
- v. o símbolo  $[sinal]$  indica que a restrição pode ser uma equação ou uma inequação ( $\geq$ ,  $\leq$ ).

Ou seja, a equação (3.1) representa a função objetivo, as equações (3.2) representam o conjunto das restrições e a equação (3.3) representa a condição de não-negatividade.

Uma formulação equivalente para um Problema de Programação Linear, chamada de *forma padrão*, é muito utilizada para a aplicação dos métodos de resolução. Desta forma, todas as restrições são transformadas em igualdades pela inserção de outras variáveis (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Logo, sendo todas as variáveis envolvidas  $x_j$  e constantes  $b_m$  maiores ou iguais a zero, um Problema de Programação Linear pode ser reescrito na *forma padrão* a partir das seguintes operações elementares:

*Operação 1:* mudança no critério de otimização, ou seja, transformação da maximização de uma função  $f(x)$  em minimização ou vice-versa. Assim,

$$\begin{aligned} \max z(x) & \text{ corresponde a } \min (-z(x)) \\ \min z(x) & \text{ corresponde a } \max (-z(x)) \end{aligned}$$

*Operação 2:* transformação de uma variável livre, isto é, uma variável que assume valores reais em uma variável não negativa. A variável livre  $x_n$  é substituída por duas variáveis

auxiliares  $x_{1n}$  e  $x_{2n}$ , ambas maiores ou iguais a zero, mas a soma das duas é igual à variável original. Assim,

$$x_n = x_{1n} - x_{2n}$$

*Operação 3:* transformação das inequações em equações.

Para o caso da transformação de menor ou igual ( $\leq$ ) em igualdade, uma variável chamada *variável de folga* é somada, sendo capaz de completar a desigualdade, tornando-a igualdade. Por exemplo, introduzindo uma variável de folga  $x_{n+1} \geq 0$  em uma restrição representada por

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq b ,$$

obtemos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1} = b$$

Para o caso da transformação de maior ou igual ( $\geq$ ) em igualdade, uma *variável de folga* é subtraída, tornando-a igualdade. Por exemplo, introduzindo uma variável de folga  $x_{n+1} \geq 0$  em uma restrição representada por

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq b ,$$

obtemos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - x_{n+1} = b$$

Deste modo, se tivermos um problema de maximização com restrições de desigualdade do tipo “menor ou igual”, a qual denominamos de *forma canônica*, este pode ser escrito na forma padrão como

$$\begin{aligned}
\max \quad & Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} \\
\text{sujeito a} \quad & \\
& a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
& (\dots) \\
& a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
& x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \geq 0
\end{aligned}$$

em que  $x_1, \dots, x_n$  são as variáveis de decisão e  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  são variáveis de folga.

Da mesma forma, um problema de minimização com restrições de desigualdade do tipo “maior ou igual”, a qual também denominamos *forma canônica*, pode ser escrito na forma padrão como

$$\begin{aligned}
\min \quad & Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} \\
\text{sujeito a} \quad & \\
& a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\
& (\dots) \\
& a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \\
& x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \geq 0
\end{aligned}$$

em que  $x_1, \dots, x_n$  são as variáveis de decisão e  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  são variáveis de folga.

Conforme então o problema for modelado, é possível reescrevê-lo na *forma padrão* e aplicar os métodos de resolução.

### 3.2 PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO GRÁFICA

Quando o Problema de Programação Linear envolve apenas duas variáveis de decisão, é possível encontrar a solução ótima graficamente. Para exemplificar, considere o PPL (LACH-TERMACHER, 2009):

$$\max \quad Z = 5x_1 + 2x_2$$

*s.r.:*

$$x_1 \leq 3 \quad (3.4)$$

$$x_2 \leq 4 \quad (3.5)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad (3.6)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (3.7)$$

Primeiramente, é preciso estabelecer os dois eixos para representar as quantidades de  $x_1$  e  $x_2$ . A seguir, deve-se encontrar o conjunto de soluções viáveis do problema. Para isso, pode-se utilizar a representação gráfica imposta por cada uma das restrições. Assim, as restrições (3.4), (3.5) e (3.7) são representadas de forma imediata.

Para a restrição (3.6), deve-se utilizar o conceito de representação de uma reta em  $R^2$ . Nesse exemplo, considerando  $x_1$  como a variável independente e  $x_2$  como a variável dependente, tem-se a equação da reta  $x_2 = ax_1 + b$ , onde  $a$  é o coeficiente angular da reta e  $b$  é o coeficiente linear. Como tal restrição é uma inequação do tipo menor ou igual, todos os pontos abaixo e sobre a reta satisfazem a restrição. Logo:

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$2x_2 \leq 9 - x_1$$

$$x_2 \leq \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_1$$

Um procedimento que, apesar de não muito eficiente, pode ser usado de forma simples, consiste em atribuir valores a  $Z$ , tornando a função objetivo uma equação de uma reta. Assim, por um processo de tentativa e erro, pode-se chegar ao valor ótimo, verificando a existência de pontos da reta que fazem parte do conjunto de soluções viáveis. Então, encontrando o maior valor de  $Z$  possível, obtém-se o valor máximo para a função objetivo sob esse conjunto de restrições. Nesse exemplo de PPL, o valor de  $Z$  é igual a 21, em uma solução ótima de  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 3$ .

Para um problema de minimização, o mesmo procedimento pode ser utilizado. Consi-

derando então o seguinte problema de programação linear:

$$\min \quad Z = 7x_1 + 9x_2$$

s.r.:

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 5$$

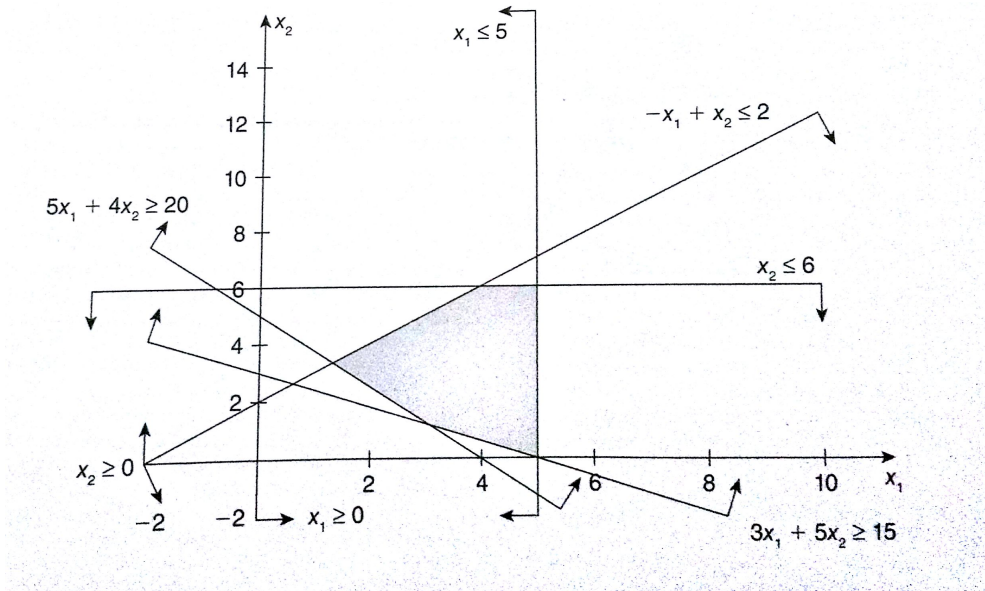
$$x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$

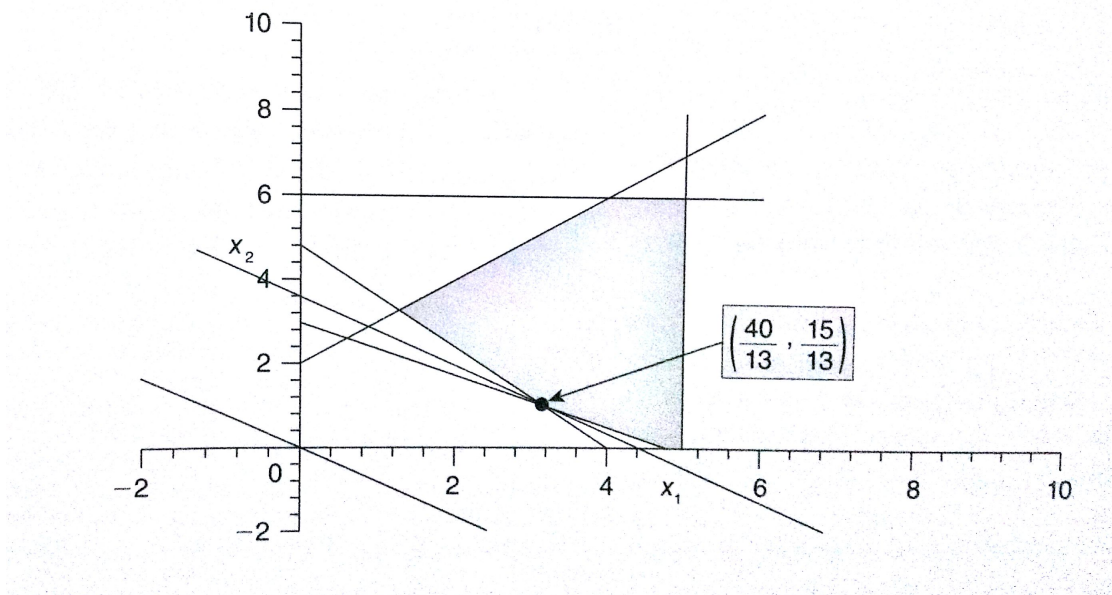
$$5x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

De forma análoga ao problema anterior, deve-se encontrar o conjunto de soluções viáveis a partir do conjunto de restrições. Esse procedimento pode ser visto na Figura 1. Utilizando agora o procedimento de tentativa e erro, é possível chegar à solução mínima (Figura 2), já que é um problema de minimização da função objetivo.



**Figura 1: Procedimento de procura da solução ótima**



**Figura 2: Conjunto de soluções viáveis do problema de minimização**

Logo, a solução ótima para esse PPL que visa minimizar a função objetivo, sujeito às restrições dadas, é o ponto  $\left(\frac{40}{13}, \frac{15}{13}\right)$ , representado no plano cartesiano.

### 3.3 MÉTODO SIMPLEX

O Método Simplex, aplicado para fornecer a solução dos Problemas de Programação Linear, pode ser utilizado para solucionar problemas reais de dimensionamento de lotes e de corte de estoque (ARENALES et al., 2007). Em linhas gerais, o Método Simplex, desenvolvido em 1947 pelo matemático norte-americano George B. Dantzig, consiste em um procedimento numérico iterativo, que exerce uma sequência de passos repetidamente, até que se alcance a melhor solução do problema, chamada de *solução ótima*. O procedimento parte de uma solução básica viável, pertencente a um vértice, do sistema de equações que constituem as restrições do problema. A partir dessa solução inicial, o algoritmo identifica novas soluções viáveis de valor igual ou melhor que a corrente. Assim, o processo encontra novos vértices da envoltória convexa do problema e determina se este vértice é ótimo ou não, ou seja, se a troca de variáveis na base pode ainda melhorar a função objetivo. Pode ser visto com mais detalhes em Lachtermacher (2009), Maculan e Pereira (1980), Moreira (2007), Lins e Calôba (2006).

Antes do desenvolvimento do algoritmo do Método Simplex, é necessário apresentar alguns teoremas (GOLDBARG; LUNA, 2005) a respeito das soluções de um Problema de Programação Linear. Para isso, temos que um *conjunto convexo* é um conjunto de pontos em que todos os segmentos de reta que unem dois de seus pontos são internos ao conjunto, isto

é, todos os pontos de cada segmento também pertencem ao conjunto original (LACHTERMA-CHER, 2009).

**Teorema 3.3.1** *O conjunto  $C$  das soluções viáveis de um modelo de programação linear é um conjunto convexo.*

**Demonstração:**

Seja  $C$  o conjunto formado pelos pontos  $x$  tais que:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Se  $C$  é convexo, então, para qualquer conjunto composto por dois pontos distintos  $x_1$ ,  $x_2$  pertencentes a  $C$ , a combinação linear convexa desses pontos também pertence a  $C$ , o que é equivalente a dizer que:

$$x_1, x_2 \in C \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Sejam duas soluções viáveis de  $C$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , tais que  $x_1 \neq x_2$ , então:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= b & Ax_2 &= b \\ & \text{e} & & \\ x_1 &\geq 0 & x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

e seja:

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \\ 0 &\leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} Ax &= A[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] = \\ &= \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 = \\ &= \alpha b + (1 - \alpha)b = b \end{aligned}$$

e  $x \geq 0$ , uma vez que:

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$



e

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

■

**Teorema 3.3.2** *Toda solução básica viável do sistema  $Ax = b$  é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja, um extremo do conjunto  $C$ .*

**Demonstração:**

Seja  $C$  o conjunto formado pelos pontos  $x$  tais que:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Seja, ainda, uma solução viável qualquer  $x$ , de dimensão  $n$ , na qual, sem perda de generalidade, as variáveis básicas são as  $m$  primeiras:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com todos os componentes } x_i \geq 0.$$

Suponhamos, por absurdo, que  $x$  seja um ponto extremo do conjunto convexo  $C$ , definido anteriormente. Então  $x$  pode ser obtido por uma combinação convexa de outros dois pontos distintos desse mesmo conjunto. Chamamos de  $y$  e  $z$  esses dois pontos, temos:

$$\begin{aligned} x &= \alpha y + (1 - \alpha)z \\ 0 &\leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

Como  $y$  e  $z$  pertencem ao conjunto  $C$ , as seguintes relações de pertinência são válidas:

$$\begin{aligned} Ay &= b & Az &= b \\ \text{e} \\ y &\geq 0 & z &\geq 0 \end{aligned}$$

A relação  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ , colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha y_1 + (1 - \alpha)z_1 \\x_2 &= \alpha y_2 + (1 - \alpha)z_2 \\&\vdots \\x_m &= \alpha y_m + (1 - \alpha)z_m \\0 &= \alpha y_{m+1} + (1 - \alpha)z_{m+1} \\&\vdots \\0 &= \alpha y_n + (1 - \alpha)z_n\end{aligned}$$

Devido às relações  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$  as últimas  $(n - m)$  relações do conjunto acima descrito só podem ser satisfeitas em um dos seguintes casos:

1.  $0 < \alpha < 1$  e  $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$ , para  $i = 1, \dots, n - m$ .

Neste caso teríamos  $x = y = z$ , pois tanto  $y$  quanto  $z$  são soluções básicas do sistema em análise, calculados com as mesmas variáveis básicas.

2.  $\alpha = 0$  e  $z_{m+i} = 0$ , para  $i = 1, \dots, n - m$ .

Por raciocínio análogo ao caso anterior, deduzimos que  $x = z$ . Além disso, como  $\alpha = 0$ , segue que  $x = y = z$ .

3.  $\alpha = 1$  e  $y_{m+i} = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n - m$ .

Por razões análogas, conclui-se que  $x = y = z$ .

Desta forma, demonstra-se que não existem soluções viáveis  $y$  e  $z$ , distintas da solução básica  $x$  que satisfaçam a relação  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ . Por contradição com a hipótese inicial, demonstra-se, então, que  $x$  é um ponto extremo do conjunto convexo  $C$ .



**Teorema 3.3.3** *Um ponto  $x$  é extremo em um conjunto de soluções viáveis de um Problema de Programação Linear se, e somente se,  $x \geq 0$  for uma solução básica do sistema de equações lineares  $Ax = b$ .*

A demonstração encontra-se em Hillier e Lieberman (2006).

### Teorema 3.3.4

1. *Se uma função objetivo possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo  $C$  do Teorema 3.2.1.*
2. *Se a função objetivo assume o máximo ou o mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.*

A demonstração encontra-se em Hillier e Lieberman (2006).

O Método Simplex, em sua forma geral, é descrito matematicamente a seguir (BRESAN, 2003).

Considere o problema primal de otimização linear na forma padrão (BAZARAA et al., 2010):

$$\begin{aligned} \min f(x) &= c^T x \\ \text{s.a: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e, sem perda de generalidade, assuma que  $\text{posto}(A) = m$

A solução geral do sistema em  $Ax = b$  pode ser descrita considerando uma partição nas colunas de  $A$ :

$$A = (B, N)$$

tal que  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , formada por  $m$  colunas da matriz  $A$ , seja não singular. A partição equivalente é feita no vetor das variáveis:

$$x = (x_B, x_N),$$

onde  $x_B$  é chamado *vetor de variáveis básicas* e  $x_N$  *vetor de variáveis não básicas*. Assim,

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Dada uma escolha qualquer para  $x_N$ , tem-se  $x_B$  bem determinado, de modo que o sistema está verificado.

**Definição 3.3.5** A solução particular  $x$  obtida por  $x_B^0 = B^{-1}b, x_N^0 = 0$  é chamada solução básica. Se  $x_B^0 = B^{-1}b \geq 0$ , então a solução básica é primal factível.

Considere também a partição nos coeficientes do gradiente da função objetivo  $c$ :

$$c^T = (c_B, c_N)^T.$$

**Definição 3.3.6** O vetor  $y \in \mathbb{R}^m$ , dado por

$$y^T = c_B^T B^{-1}$$

é definido como vetor das variáveis duais ou vetor multiplicador simplex. Se

$$c_j - y^T a_j \geq 0,$$

para  $j = 1, \dots, n$  então  $y$  é uma solução básica dual factível, e diz-se que a partição é dual factível, onde  $a_j$  representa a coluna  $j$  da matriz de restrições  $A$ .

**Definição 3.3.7** Denomina-se estratégia simplex a seguinte perturbação da solução básica: escolha  $k \in N$ , onde  $N$  é o conjunto de índices de variáveis não básicas, tal que  $c_k - y^T a_k < 0$ ; faça  $x_k = \varepsilon \geq 0, x_j = 0, \forall j \in N - k$ .

A estratégia simplex produz uma nova solução dada por

$$\begin{cases} x_B = x_B^0 + \varepsilon d_B \\ x_N = \varepsilon e_k \end{cases}$$

e o valor da função objetivo dado por:

$$f(x) = f(x^0) + (c_k - y^T a_k) \varepsilon$$

onde  $d_B = -B^{-1}a_k$  e  $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m-n}$  com 1 na  $k$ -ésima componente.

A direção  $d \in \mathbb{R}^n$ , dada por  $d = (d_B, d_N)^T = (d_B, e_k)^T$ , define uma perturbação da solução básica e é chamada *direção simplex*. Se a solução básica for não-degenerada, isto é,  $x_B^0 > 0$ , então  $d$  é uma direção factível. Note ainda que o produto escalar entre  $d$  e o gradiente da função objetivo é  $c^T d = c_k - y^T a_k < 0$ . Portanto  $d$  é uma direção de descida.

Da estratégia simplex, pode-se determinar o maior valor de  $\varepsilon$ , impondo  $x_B \geq 0$ :

$$\varepsilon^0 = \min \left\{ -\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} \mid d_{B_e} < 0, i = 1, \dots, m \right\}$$

onde  $x_{B_e}^0$  é a e-ésima componente de  $x_B^0$ , que sai da base.

Em suma, o Método Simplex basicamente vai experimentar uma sequência de soluções básicas viáveis, na busca do valor ótimo para a função objetivo.

### 3.3.1 O ALGORITMO PRIMAL SIMPLEX

O Método Simplex, por se tratar de um processo iterativo, pode ser implementado em qualquer linguagem de programação para execução de suas iterações. Desta forma, o algoritmo do Método Primal Simplex é descrito a seguir, para um problema de minimização escrito na forma padrão (BRESSAN, 2003).

#### **fase I**

Encontre uma partição básica primal-factível:  $A = (B, N)$ .

Faça PARE=FALSO, IT=0

(Será FALSO até que a condição de otimalidade seja verificada. IT indica o número da iteração.)

#### **fase II**

Enquanto NÃO PARE faça:

- Determine a solução básica primal factível:  $x_B = B^{-1}b$ .
- Teste de otimalidade:

Determine a solução básica dual:  $y^T = c_B^T B^{-1}$ ;

Encontre  $x_k$  com custo relativo:  $c_k - y^T a_k < 0$ .

Se  $c_k - y^T a_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n - m$ , então a solução na iteração IT é ótima.

PARE=VERDADE.

Senão:

- Determine a direção simplex:  $d_B = -B^{-1}a_k$ , de mudança nos valores das variáveis básicas
- Determine o passo:  $\varepsilon^0 = \min \left\{ -\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} \mid d_{B_e} < 0, i = 1, \dots, m \right\}$ .

Se  $d_B \geq 0$ , o problema não tem solução ótima finita.

PARE=VERDADE.

Senão:

- Atualize a partição básica:  $a_{B_l} \leftrightarrow a_k, IT \leftarrow IT + 1$ .

Fim enquanto.

3.3.2 MÉTODO SIMPLEX NA FORMA TABULAR (TABLEAUX SIMPLEX)

Para facilitar a execução do algoritmo simplex, é utilizado, como recurso, a forma tabular do Método Simplex (Tableaux Simplex). Assim, esse formato tabular é descrito matematicamente a seguir (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Considere um problema de problema de programação linear na forma geral, como a seguir.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_sx_s + 0x_{s+1} + 0x_{s+2} + \dots + 0x_n \\ \text{sujeito a:} \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s + x_{s+1} + 0 + 0 + \dots + 0 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s + 0 + x_{s+2} + 0 + \dots + 0 = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{ms}x_s + 0 + 0 + 0 + \dots + x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Organiza-se um quadro inicial para o início das iterações, de acordo com a Tabela 1.

**Tabela 1: Quadro Inicial do Simplex no Formato Tabular**

		$x_1 \dots\dots\dots x_k \dots\dots\dots x_s$	$x_{s+1} \dots\dots\dots x_{s+r} \dots\dots\dots x_n$	
	$z$	$c_1 \dots\dots\dots c_{1k} \dots\dots\dots c_s$	$c_{s+1} \dots\dots\dots c_{s+r} \dots\dots\dots c_n$	
$x_{s+1}$	$b_1$	$a_{11} \dots\dots\dots a_{1k} \dots\dots\dots a_{1s}$	$1 \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots 0$ $0 \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots 0$	$\bar{b}_s$ $a_{sk}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_{s+r}$	$b_r$	$a_{r1} \dots\dots\dots a_{rk} \dots\dots\dots a_{rs}$	$0 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots 0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_n$	$b_m$	$a_{m1} \dots\dots\dots a_{mk} \dots\dots\dots a_{ms}$	$0 \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots 1$	
	Termo Ind.	Matriz de Restrições ( $m \times m - n$ )	Variáveis de Folga ( $m \times m$ )	

Onde:

- A primeira coluna contém informações sobre a base atual, ou seja, a função objetivo  $z$  e as variáveis  $x_1 \dots x_k \dots x_s$  são a solução básica inicial. As colunas intermediárias contém informações sobre as variáveis  $x_1 \dots x_k \dots x_s$ , e a última coluna contém na primeira linha o valor atual da função objetivo.
- A primeira linha refere-se à função objetivo  $z$ . As demais linhas referem-se às restrições do

problema.

Logo, a configuração matemática associada a esse, está indicada na Tabela 2.

**Tabela 2: Identificação das Matrizes e Variáveis no Formato Simplex Tabular**

	Índice das Variáveis			Área de Cálculos
	Valor da F.O.	Valor de $z_j - c_j$		
Índice das Variáveis Básicas	$\bar{x}_B$	$x_N = B^{-1}R$	$B^{-1}$	
		Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas	

O termo  $z_j - c_j$  pode ser interpretado como o coeficiente de utilidade relativa das variáveis. Já  $\bar{x}_B$  é o vetor de  $m$  componentes formado pelas variáveis associadas aos termos independentes.

Ao longo das iterações do algoritmo, corresponderá à forma canônica da Tabela 3.

**Tabela 3: Quadro Geral do Simplex**

		$x_1 \dots x_k \dots x_s$	$x_{s+1} \dots x_{s+r} \dots x_n$	
	$z$	$z_1 - c_1 \dots z_k - c_k \dots z_s - c_s$	$z_{s+1} - c_{s+1} \dots z_{s+r} - c_{s+r} \dots z_n - c_n$	
$x_{B1}$	$\bar{b}_1$	$y_{11} \dots y_{1k} \dots y_{1s}$	$B^{-1}$	$\frac{\bar{b}_s}{y_{sk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$		
$x_{Br}$	$\bar{b}_r$	$y_{r1} \dots y_{rk} \dots y_{rs}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$		
$x_{Bm}$	$\bar{b}_m$	$y_{m1} \dots y_{mk} \dots y_{ms}$		

Onde:

- A variável  $x_k$  é a que entra na base, melhorando o valor da função objetivo, e a variável  $x_s$  deixa a base ao ter o seu valor numérico esgotado completamente pelo crescimento de  $x_k$ .
- O elemento  $y_{rk}$  é denominado “pivô”.

Desta forma, depois de escrever o problema a ser resolvido na forma padrão, o tableau inicial é estruturado com uma coluna para cada variável e as variáveis básicas iniciais são identificadas, ou seja, aquelas variáveis que constituem uma matriz identidade. Em seguida, estas variáveis são inseridas na coluna referente à base do método. De forma geral, as variáveis correspondentes à base são as variáveis de folga. Esta é uma solução inicial para o problema. De acordo com o algoritmo primal Simplex, o objetivo é buscar a solução ótima, trocando-se as variáveis da base e atualizando a solução.

### 3.3.2.1 EXEMPLO NUMÉRICO

Com o objetivo de facilitar a visualização do Método Simplex na Forma Tabular, um exemplo numérico é desenvolvido nesta seção.

Considere o seguinte problema (LINS; CALÔBA, 2006). Uma manufatura produz mesas e bancos, sendo capaz de vender toda a sua produção no período. O único recurso restrito é a mão de obra, cuja produtividade, juntamente com os lucros, são dados na Tabela 4.

**Tabela 4: Homens/hora por unidade produzida**

Produto	Lucro unitário	Montagem	Acabamento
Mesas	R\$20	3	4
Bancos	R\$24	6	2
Homens/h		60	32

As variáveis de decisão são as quantidades de mesas e bancos a serem produzidos,  $x_1$  e  $x_2$ . A função objetivo é  $Max 20x_1 + 24x_2$ . As restrições são homens por hora disponíveis nos departamentos de montagem e acabamento, respectivamente representados pelas equações:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 60 \text{ (restrição de montagem);}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 32 \text{ (restrição de acabamento).}$$

Escrevendo o problema na forma padrão, tem-se

$$\min -20x_1 - 24x_2$$

$$s.a. \quad 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 60$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 32$$

Com  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$  e sendo  $x_3$  e  $x_4$  variáveis de folga.

O primeiro quadro é montado com os coeficientes das variáveis. A base inicial é constituída pelas variáveis de folga, como segue.

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	cte
	-20	-24	0	0	0
$x_3$	3	6	1	0	60
$x_4$	4	2	0	1	32

**Variável que entra na base:**  $x_2$  (maior valor negativo em módulo: 24).

**Variável que sai da base:**  $x_3$  (pois  $60/6$  é menor que  $32/2$ ).



**Pivô = 6.**

Deve-se escalonar a coluna  $x_2$  dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a  $x_3$  por 6. Obtém-se:

<b>Base</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	cte
	-20	-24	0	0	0
$x_3$	1/2	<b>1</b>	1/6	0	10
$x_4$	4	2	0	1	32

Os outros elementos da coluna do pivô devem ser zerados, ou seja, -24 e 2. Para isso, multiplica-se a linha do pivô por 24 e soma-se com a linha correspondente à função objetivo. Em seguida, multiplica-se a linha do pivô por -2 e soma-se com a linha da variável  $x_4$ .

<b>Base</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	cte
	-8	0	4	0	240
$x_2$	1/2	1	1/6	0	10
$x_4$	<b>3</b>	0	-1/3	1	12

Como ainda há elementos negativos na linha referente à função objetivo, esta ainda não é a solução ótima. Logo,

**Variável que entra na base:**  $x_1$

**Variável que sai da base:**  $x_4$

**Pivô = 3.**

Deve-se escalonar a coluna  $x_1$  dividindo toda a linha do pivô por ele mesmo, ou seja, dividindo a linha correspondente a  $x_4$  por 3. Obtém-se:

<b>Base</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	cte
	-8	0	4	0	240
$x_2$	1/2	1	1/6	0	10
$x_4$	<b>1</b>	0	-1/9	1/3	4

Os outros elementos da coluna do pivô, -8 e 1/2, devem ser nulos. Para isso, multiplica-se a linha do pivô por 8 e soma-se com a linha correspondente à função objetivo. Em seguida, multiplica-se a linha do pivô por -1/2 e soma-se com a linha da variável  $x_2$ . Tem-se:

<b>Base</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	cte
	0	0	28/9	8/3	272
$x_2$	0	1	2/9	-1/6	8
$x_1$	<b>1</b>	0	-1/9	1/3	4

Como não há nenhum coeficiente negativo na linha da função objetivo, a solução ótima foi alcançada. Portanto, o lucro máximo é de 272 reais, produzindo-se para isso, 4 mesas e 8 bancos.

### 3.3.3 OUTRAS SITUAÇÕES REFERENTES ÀS SOLUÇÕES DE UM PPL

Um problema de programação linear pode apresentar outros tipos de solução, ou até mesmo não possuir nenhuma solução. No Método Simplex, estes casos se manifestam em alguns problemas de cálculo descritos a seguir.

- **Problema Ilimitado:**

O problema ilimitado acontece quando a solução pode ser melhorada, mas não há uma restrição que a limite. Graficamente, esse caso se caracteriza por uma região de soluções ilimitada (infinita), a qual torna a solução cada vez melhor, infinitamente. Com o Método Simplex, essa situação é caracterizada pela falta de opção para a variável que deve sair da base, sendo todos os coeficientes negativos.

- **Infinitas Soluções:**

Graficamente, um problema possui infinitas soluções ótimas quando a reta que representa a função objetivo é paralela a uma das retas das restrições e seu ótimo se encontra exatamente sobre essa reta. No Método Simplex, essa situação é caracterizada pela presença de zeros além dos obtidos pelas variáveis básicas.

### 3.4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Essa análise busca verificar os efeitos causados ao Problema de Programação Linear, devido às possíveis variações dos valores dos coeficientes das variáveis, tanto na função objetivo como nas constantes das restrições. Em uma análise de sensibilidade, devemos responder basicamente a três perguntas (LACHTERMACHER, 2009):

- Qual é o efeito de uma mudança em um coeficiente da função objetivo?
- Qual é o efeito de uma mudança em uma constante de uma restrição?
- Qual é o efeito de uma mudança em um coeficiente de uma restrição?

A utilidade dessa prática se dá, por exemplo, no planejamento a longo prazo e nos novos requisitos, visando uma melhoria na formulação do PPL.

Algumas alternativas dessas mudanças são abordadas por Lins (2006), descritas a seguir:

- Alterações no vetor de preços (função objetivo).
- Alterações do lado direito das restrições (RHS).
- Adição de uma nova variável.
- Adição de uma nova restrição.
- Verificação do custo de oportunidade de variáveis.
- Verificação do preço-sombra de restrições (recursos).

Para estudar os desenvolvimentos a seguir, considere a Tabela 5:

**Tabela 5: Representação Matricial para a Solução Ótima**

LINHAS	V.B.	V.N.B.	R.H.S.
<b>Restrições</b>	I	$B^{-1}R$	$B^{-1}b$
<b>F.O.</b>	Vetor Nulo	$c'_R - c'_B B^{-1}R$	$Q(x) - c'_B B^{-1}b$

**Fonte: Lins, 2006**

Onde:

- V.B.* Variáveis Básicas;  
*V.N.B.* Variáveis Não Básicas;  
*R.H.S.* Right Hand Side, termo do lado direito (termo independente);  
*F.O.* Função Objetivo.

A solução para este determinado problema é dado por  $x_B^* = B^{-1}b$ ,  $x_R^* = 0$  e  $Q(x^*) = c + B^T B^{-1}b$ .

### **Alterando os Coeficientes da Função Objetivo**

Deve-se dividir em duas diferentes análises: o parâmetro alterado pode ser relativo a uma variável que pertença ou não à sequência básica ótima.

Caso o coeficiente modificado for de uma variável que **não está** na base, uma mudança de base só pode suceder da entrada da própria variável. Para fazer esta verificação, deve-se calcular  $c'_i - c'_B B^{-1}A_{.i}$ , lembrando que  $A_{.i}$  equivale à  $i$ -ésima coluna da matriz  $A$ . Se a solução for menor que zero, a variável  $x_i$  deve entrar na base, pois a linha da função objetivo terá valores

menores que zero, e terá que ser feita uma nova iteração do simplex padrão.

Porém, se o coeficiente modificado corresponder a uma variável que **está** na base, significa que houve uma alteração em  $c_B^T$ . Assim, todos os novos coeficientes da função objetivo deverão ser recalculados:  $c_i - c_B^T B^{-1} A_{.i}$ , exceto para as variáveis básicas.

### Alterando o lado direito das restrições(RHS)

Modificando-se o vetor  $b$ , equivalente ao lado direito das restrições, o vetor final de preços ficará alterado, visto que  $b^* = B^{-1}b$ , no qual  $B$  é a base ótima.

Esta alteração também modificará a função objetivo, na qual é  $Q(x^*) = c_B^T B^{-1}b$ .

Se aparecer um elemento negativo no vetor  $b^*$ , tornar-se-á essencial fazer uma nova iteração pelo método dual-simplex para alterar a base.

Deve-se também substituir o valor de  $b_i$  da restrição  $i$  que se deseja analisar por uma incógnita  $k$  e descobrir o valor de  $k$  que iguala a  $b_i^*$  a zero, o limite para a nova iteração do dual-simplex.

### Alteração em um elemento $A_{ij}$

Um coeficiente equivalente à contribuição unitária de uma variável para o lado esquerdo de uma restrição poderá ser reavaliado, o que acarretará em uma modificação do valor de um elemento  $A_{ij}$ . Lembrando que deve-se verificar se o elemento modificado pertence a uma coluna de variável básica ou não básica.

Caso o elemento pertença a uma coluna de variável **não básica**, o procedimento é análogo ao anterior, recalculando-se os valores de  $c_i^T$ . Porém, se o elemento  $A_{ij}$  modificado estiver em uma coluna de **variável básica**, será essencial recalcular a inversa da base, logo, todo tableaux final estará modificado.

### Introdução de uma Restrição no Problema

Se for necessária a introdução de mais uma restrição, esta tem que ser acrescentada ao problema no tableaux final, introduzindo também as variáveis de folga.

Caso as restrições adicionais sejam em forma de desigualdade, elementos de valor 1 ou -1 surgirão automaticamente nas colunas das variáveis de folga. Assim, o PPL poderá ser colocado na forma canônica, para isto, basta multiplicar por -1 as linhas novas que possuam elementos -1 na coluna das variáveis de folga e fazer operações de maneira que coloque o PPL

na forma canônica. Como todo Problema de Programação Linear, chamado de primal, admite um problema dual, então, o dual-simplex poderá ser utilizado para resolver o problema. A teoria da dualidade pode ser consultada em Lachtermacher (2009).

Se as restrições adicionais serem em forma de igualdade, o problema não conterá mais uma variável de folga e não estará na forma canônica. Portanto, aconselha-se a introdução de uma variável artificial de folga e a solução em duas fases do problema.

### **Inclusão de uma Nova Variável**

Introduzindo uma nova variável no problema, por exemplo um novo processo de manufatura, ou um novo produto a ser fabricado, tem que analisar se o mesmo processo ou produto será utilizado. Para isto, calcula-se o coeficiente no tableaux final da nova variável  $x_i$ :  $c_i^T - c_B^T B^{-1} A_{.i}$ . Se este valor for negativo, será vantajoso colocar um novo produto/processo em funcionamento, e aplica-se o simplex para alcançar a nova base ótima.

#### 4 PROBLEMA COMBINADO

No processo de corte de uma placa em peças menores, para a produção de itens, a perda de material tende a ser cada vez menor se os cortes das peças forem rearranjados de uma forma conveniente na placa. Devido a este fato, há uma pressão econômica para fabricar alguns produtos antecipadamente com o objetivo de minimizar as perdas. Porém, esse estoque pode gerar custos que podem retardar a produção (BRESSAN, 2003).

Diante desse problema de decisão de antecipação ou não na produção de certos produtos finais, surge o Problema Combinado, o qual acopla dois problemas de otimização: o *dimensionamento de lotes* e o *corte de estoque*.

O problema de dimensionamento de lotes consiste em planejar a quantidade dos itens a ser produzida em vários estágios, em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender a demanda e otimizar uma função objetivo, como minimizar os custos de produção e de estocagem (ARENALES et al., 2007). Pode ser classificado como monoestágio, onde os itens são produzidos independentemente, e multiestágio, em que as produções dos itens são dependentes.

O problema de corte de estoque consiste na otimização do processo de corte de placas em peças menores nas quantidades e dimensões demandadas. Define-se padrão de corte como o arranjo das peças dentro de cada placa, isto é, a forma como um objeto (peça) é cortado para a produção de itens demandados. Algumas regras são necessárias para defini-lo, como cortes do tipo guilhotinado (onde cada corte feito sobre uma placa retangular produz dois novos retângulos), limitação de peças (cortes restritos ou irrestritos), número de estágios (é dito ser 2-estágios quando apenas uma mudança no sentido dos cortes guilhotinados é permitida: horizontal/vertical ou vertical/horizontal). Além disso, o problema será bidimensional quando duas dimensões são relevantes para cortagem.

Desta forma, o Problema Combinado consiste em decidir a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período do horizonte de planejamento tal que minimize os custos da produção, preparação e estocagem (dimensionamento de lotes) e a quantidade de pla-

cas a serem cortadas, bem como os padrões de corte, para compor produtos finais (corte de estoque). Em situações reais, a maioria das indústrias aborda esses dois problemas de forma separada. Inicialmente, são determinadas para cada período do horizonte de planejamento, as quantidades de cada produto final (tamanho do lote) a serem produzidas. A partir desta informação, determina-se, para cada período, a quantidade de peças de cada tipo a serem cortadas e os melhores padrões de corte são gerados. Entretanto, tratá-los de forma separada pode elevar os custos globais, principalmente se uma parcela significativa do custo do produto final é formada pelo material a ser cortado (BRESSAN; OLIVEIRA, 2004).

Uma abordagem para o Problema Combinado desconsidera a ocorrência de custos de preparação e relaxa a integralidade das variáveis que representam a quantidade de placas cortadas num certo padrão, o que pressupõe grandes quantidades de demanda. Esta abordagem pode ser aplicada na indústria de móveis, onde placas de madeira devem ser cortadas na produção de itens. Por simplicidade, consideramos que haja apenas um tipo de placa em estoque, suficiente para atender a demanda. O Problema Combinado é formulado, então, considerando-se (GRAMANI, 2001):

*Índices:*

$t=1, \dots, T$  número de períodos.

$p=1, \dots, P$  número de diferentes tipos de peças a serem cortadas.

$j=1, \dots, N$  número de diferentes padrões de corte.

$i=1, \dots, M$  número de diferentes produtos finais demandados.

*Parâmetros:*

$c_{it}$ : custo de produção do produto final  $i$  no período  $t$ .

$h_{it}$ : custo de estocagem do produto final  $i$  no período  $t$ .

$h_{p_{jt}}$ : custo de estocagem da peça tipo  $p$  no padrão  $j$  no período  $t$ .

$d_{it}$ : demanda do produto final  $i$  no período  $t$ .

$r_{pi}$ : número de peças tipo  $p$  necessárias para formar um produto  $i$ .

$v_j$ : tempo gasto para cortar uma placa no padrão de corte  $j$ .

$a_{pj}$ : número de peças tipo  $p$  no padrão  $j$ .

$u_t$ : tempo máximo de operação da serra.

$cp$ : custo da placa a ser cortada.

*Variáveis de decisão:*

$x_{it}$ : quantidade do produto final  $i$  produzido no período  $t$ .

$e_{it}$ : quantidade do produto final  $i$  em estoque no fim do período  $t$ .

$ep_{pt}$ : quantidade da peça tipo  $p$  em estoque no fim do período  $t$ .

$y_{jt}$ : quantidade de placas cortadas usando o padrão  $j$  no período  $t$ .

$$\min \sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{it}x_{it} + h_{it}e_{it}) + \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T c_{pj}y_{jt} + \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T h_{p_{pt}}ep_{pt} \quad (4.1)$$

$$\text{s.a: } x_{it} + e_{i,t-1} - e_{it} = d_{it} \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{pj}y_{jt} + ep_{p,t-1} - ep_{pt} = \sum_{i=1}^M r_{pi}x_{it} \quad \forall t = 1 \dots T \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^N v_j y_{jt} \leq u_t \quad (4.4)$$

$$x_{it}, e_{it}, y_{jt}, ep_{pt} \geq 0 \quad (4.5)$$

As restrições (4.2) se referem às equações de balanço de estoque com relação aos produtos finais, o que garante que a demanda de itens de cada período será atendida. As restrições (4.3) se referem às equações de balanço de estoque com relação às peças, o que asseguram que a demanda de peças será satisfeita. Estas restrições são as que acoplam os problemas de dimensionamento de lotes e de corte de estoque, pois ambas incluem as variáveis  $x_{it}$ , que definem o tamanho dos lotes e  $y_{jt}$ , que definem a quantidade de placas cortadas num certo padrão de corte. As restrições (4.4) se referem à capacidade da serra, o que garante que o tempo gasto no processo de corte das placas nos diversos padrões de corte não ultrapassa a capacidade disponível da serra, ou seja, seu tempo máximo de operação e, por fim, (4.5) representa as condições de não-negatividade.



## 5 ESTUDO DE CASO

A fim de executar o Problema Combinado, foram atribuídos valores aos seus parâmetros provenientes de dados fornecidos por uma indústria moveleira de pequeno porte do município de Cornélio Procópio, para que fosse possível a decisão de dois programas de produção, descritos a seguir. Ambos consideram a produção de dois tipos de produtos finais: mesas e cadeiras. Além disso, em ambos os casos, tem-se que não há estoque no período anterior  $t - 1$ . Considere-se, primeiramente, que os custos e os valores de demanda são constantes ao longo dos períodos de planejamento de produção e, posteriormente, a variação desses custos e demanda. Vale a pena ressaltar que o período máximo de planejamento da produção da fábrica em estudo é de 6 meses, ou seja, 6 períodos de tempo.

### 5.1 PRIMEIRO CENÁRIO DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO

No primeiro cenário de programação da produção, considerando custos e demanda de produtos finais **constantes**, tem-se os seguintes dados:

$t = 6$  períodos de tempo

$p = 3$  tipos de peça

$j = 5$  tipos de padrões de corte da placa

$i = 2$  produtos finais (mesa e cadeira)

Os tipos de peça para composição dos produtos finais são:

*Peça do tipo 1:* tampo da mesa

*Peça do tipo 2:* pés da mesa/cadeira

*Peça do tipo 3:* assento/encosto da cadeira

A variável  $x_{1t}$  representa o produto “mesa”, cujo custo de produção fornecido é  $c_{1t} = \text{R}\$255$  e a demanda é  $d_{1t} = 2$  para  $t = 1, \dots, 6$ . A variável  $x_{2t}$  representa “cadeira”, cujo custo de produção é  $c_{2t} = \text{R}\$80$  e a demanda é  $d_{2t} = 3$  para  $t = 1, \dots, 6$ .

Os demais parâmetros fornecidos pela fábrica são:

$$cp = R\$120,$$

$$u_t = 300 \text{ horas por período},$$

$a_{pj}$  pode ser visto na Tabela 6,

$$r_{11} = 1, r_{21} = 5, r_{32} = 2, r_{22} = 6,$$

$$h_{1t} = 3, h_{2t} = 1,$$

$$hp_{1t} = 0,2, hp_{2t} = 0,3, hp_{3t} = 0,5.$$

As peças a serem cortadas são tampo ( $p = 1$ ), pés ( $p = 2$ ), assento/encosto ( $p = 3$ ). Os padrões de corte exibidos na Tabela 6 são pré-estabelecidos pela fábrica, de acordo com a capacidade dos equipamentos e a mão-de-obra disponíveis.

**Tabela 6: Padrões de Corte: primeiro cenário de produção**

Padrão de Corte	Peça tipo 1	Peça tipo 2	Peça tipo 3	Tempo de corte
$j=1$	2	0	0	$v_1=1s$
$j=2$	1	88	0	$v_2=1,2s$
$j=3$	0	0	35	$v_3=1,5s$
$j=4$	0	0	45	$v_4=1,4s$
$j=5$	1	8	15	$v_5=1,5s$

Substituindo-se estes parâmetros nas equações (4.1) a (4.4) do Problema Combinado, o seguinte modelo é obtido. A função objetivo (4.1) se torna:

$$\begin{aligned} \min \quad & 255x_{11} + 3e_{11} + 80x_{21} + 1e_{21} + 120y_{11} + 120y_{21} + 120y_{31} + 120y_{41} + 120y_{51} + 0,2ep_{11} + \\ & 0,3ep_{21} + 0,5ep_{31} + 255x_{12} + 3e_{12} + 80x_{22} + e_{22} + 120y_{12} + 120y_{22} + 120y_{32} + 120y_{42} + 120y_{52} + \\ & 0,2ep_{12} + 0,3ep_{22} + 0,5ep_{32} + 255x_{13} + 3e_{13} + 80x_{23} + 1e_{23} + 120y_{13} + 120y_{23} + 120y_{33} + \\ & 120y_{43} + 120y_{53} + 0,2ep_{13} + 0,3ep_{23} + 0,5ep_{33} + 255x_{14} + 3e_{14} + 80x_{24} + 1e_{24} + 120y_{14} + \\ & 120y_{24} + 120y_{34} + 120y_{44} + 120y_{54} + 0,2ep_{14} + 0,3ep_{24} + 0,5ep_{34} + 255x_{15} + 3e_{15} + 80x_{25} + \\ & 1e_{25} + 120y_{15} + 120y_{25} + 120y_{35} + 120y_{45} + 120y_{55} + 0,2ep_{15} + 0,3ep_{25} + 0,5ep_{35} + 255x_{16} + \\ & 3e_{16} + 80x_{26} + 1e_{26} + 120y_{16} + 120y_{26} + 120y_{36} + 120y_{46} + 120y_{56} + 0,2ep_{16} + 0,3ep_{26} + 0,5ep_{36} \end{aligned}$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.2):

$$1x_{11} - 1e_{11} + 1x_{12} - 1e_{12} + 1x_{13} - 1e_{13} + 1x_{14} - 1e_{14} + 1x_{15} - 1e_{15} + 1x_{16} - 1e_{16} = 12$$

$$1x_{21} - 1e_{21} + 1x_{22} - 1e_{22} + 1x_{23} - 1e_{23} + 1x_{24} - 1e_{24} + 1x_{25} - 1e_{25} + 1x_{26} - 1e_{26} = 18$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.3):

$$\begin{aligned} & 2y_{11} + 89y_{21} + 35y_{31} + 45y_{41} + 24y_{51} - 1ep_{11} - 1ep_{21} - 1ep_{31} + 2y_{12} + 89y_{22} + 35y_{32} + 45y_{42} + \\ & 24y_{52} - 1ep_{12} - 1ep_{22} - 1ep_{32} + 2y_{13} + 89y_{23} + 35y_{33} + 45y_{43} + 24y_{53} - 1ep_{13} - 1ep_{23} - 1ep_{33} + \end{aligned}$$

$$2y_{14} + 89y_{24} + 35y_{34} + 45y_{44} + 24y_{54} - 1ep_{14} - 1ep_{24} - 1ep_{34} + 2y_{15} + 89y_{25} + 35y_{35} + 45y_{45} + 24y_{55} - 1ep_{15} - 1ep_{25} - 1ep_{35} + 2y_{16} + 89y_{26} + 35y_{36} + 45y_{46} + 24y_{56} - 1ep_{16} - 1ep_{26} - 1ep_{36} = 6x_{11} + 8x_{21} + 6x_{12} + 8x_{22} + 6x_{13} + 8x_{23} + 6x_{14} + 8x_{24} + 6x_{15} + 8x_{25} + 6x_{16} + 8x_{26}$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.4):

$$1y_{11} + 1,2y_{21} + 1,5y_{31} + 1,4y_{41} + 1,5y_{51} + 1y_{12} + 1,2y_{22} + 1,5y_{32} + 1,4y_{42} + 1,5y_{52} + 1y_{13} + 1,2y_{23} + 1,5y_{33} + 1,4y_{43} + 1,5y_{53} + 1y_{14} + 1,2y_{24} + 1,5y_{34} + 1,4y_{44} + 1,5y_{54} + 1y_{15} + 1,2y_{25} + 1,5y_{35} + 1,4y_{45} + 1,5y_{55} + 1y_{16} + 1,2y_{26} + 1,5y_{36} + 1,4y_{46} + 1,5y_{56} \leq 1800$$

O segundo planejamento da produção considera que os custos e demandas são **variáveis** ao longo dos períodos de planejamento. Os novos parâmetros fornecidos pela fábrica em estudo são descritos a seguir. Os custos dos produtos finais são:  $c_{11} = c_{12} = c_{13} = 255$ ;  $c_{14} = c_{15} = c_{16} = 267,75$ ;  $c_{21} = c_{22} = c_{23} = 80$ ;  $c_{24} = c_{25} = c_{26} = 84$ . O custo da placa a ser cortada é  $cp = 135,07$ . Os custos de estoque dos produtos finais são  $h_{11} = h_{12} = 3$ ;  $h_{13} = 5$ ;  $h_{14} = h_{15} = h_{16} = 5$ ;  $h_{21} = h_{22} = 1$ ;  $h_{23} = h_{24} = h_{25} = h_{26} = 3$  e os custos de estoque das peças são  $hp_{11} = hp_{12} = 0,2$ ;  $hp_{13} = hp_{14} = hp_{15} = hp_{16} = 0,5$ ;  $hp_{21} = hp_{22} = 0,3$ ;  $hp_{23} = hp_{24} = hp_{25} = hp_{26} = 0,6$ ;  $hp_{31} = hp_{32} = 0,5$ ;  $hp_{33} = hp_{34} = hp_{35} = hp_{36} = 0,8$ . As demandas são  $d_{11} = 2$ ;  $d_{12} = 3$ ;  $d_{13} = 2$ ;  $d_{14} = 4$ ;  $d_{15} = 1$ ;  $d_{16} = 3$ ;  $d_{21} = 3$ ;  $d_{22} = 5$ ;  $d_{23} = 4$ ;  $d_{24} = 6$ ;  $d_{25} = 3$ ;  $d_{26} = 4$ . Estes parâmetros produzem o seguinte Problema de Programação Linear.

$$\begin{aligned} \min \quad & 255x_{11} + 3e_{11} + 80x_{21} + 1e_{21} + 120y_{11} + 120y_{21} + 120y_{31} + 120y_{41} + 120y_{51} + 0,2ep_{11} + \\ & 0,3ep_{21} + 0,5ep_{31} + 255x_{12} + 3e_{12} + 80x_{22} + 1e_{22} + 120y_{12} + 120y_{22} + 120y_{32} + 120y_{42} + 120y_{52} + \\ & 0,2ep_{12} + 0,3ep_{22} + 0,5ep_{32} + 255x_{13} + 5e_{13} + 80x_{23} + 3e_{23} + 120y_{13} + 120y_{23} + 120y_{33} + \\ & 120y_{43} + 120y_{53} + 0,5ep_{13} + 0,6ep_{23} + 0,8ep_{33} + 267,75x_{14} + 5e_{14} + 84x_{24} + 3e_{24} + 120y_{14} + \\ & 120y_{24} + 120y_{34} + 120y_{44} + 120y_{54} + 0,5ep_{14} + 0,6ep_{24} + 0,8ep_{34} + 267,75x_{15} + 5e_{15} + 84x_{25} + \\ & 3e_{25} + 120y_{15} + 120y_{25} + 120y_{35} + 120y_{45} + 120y_{55} + 0,5ep_{15} + 0,6ep_{25} + 0,8ep_{35} + 267,75x_{16} + \\ & 5e_{16} + 84x_{26} + 3e_{26} + 120y_{16} + 120y_{26} + 120y_{36} + 120y_{46} + 120y_{56} + 0,5ep_{16} + 0,6ep_{26} + 0,8ep_{36} \end{aligned}$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.2):

$$1x_{11} - 1e_{11} + 1x_{12} - 1e_{12} + 1x_{13} - 1e_{13} + 1x_{14} - 1e_{14} + 1x_{15} - 1e_{15} + 1x_{16} - 1e_{16} = 15 \quad 1x_{21} - 1e_{21} + 1x_{22} - 1e_{22} + 1x_{23} - 1e_{23} + 1x_{24} - 1e_{24} + 1x_{25} - 1e_{25} + 1x_{26} - 1e_{26} = 25$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.3):

$$\begin{aligned}
&2y_{11} + 89y_{21} + 35y_{31} + 45y_{41} + 24y_{51} - 1ep_{11} - 1ep_{21} - 1ep_{31} + 2y_{12} + 89y_{22} + 35y_{32} + 45y_{42} + \\
&24y_{52} - 1ep_{12} - 1ep_{22} - 1ep_{32} + 2y_{13} + 89y_{23} + 35y_{33} + 45y_{43} + 24y_{53} - 1ep_{13} - 1ep_{23} - 1ep_{33} + \\
&2y_{14} + 89y_{24} + 35y_{34} + 45y_{44} + 24y_{54} - 1ep_{14} - 1ep_{24} - 1ep_{34} + 2y_{15} + 89y_{25} + 35y_{35} + 45y_{45} + \\
&24y_{55} - 1ep_{15} - 1ep_{25} - 1ep_{35} + 2y_{16} + 89y_{26} + 35y_{36} + 45y_{46} + 24y_{56} - 1ep_{16} - 1ep_{26} - 1ep_{36} = \\
&6x_{11} + 8x_{21} + 6x_{12} + 8x_{22} + 6x_{13} + 8x_{23} + 6x_{14} + 8x_{24} + 6x_{15} + 8x_{25} + 6x_{16} + 8x_{26}
\end{aligned}$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.4):

$$\begin{aligned}
&1y_{11} + 1,2y_{21} + 1,5y_{31} + 1,4y_{41} + 1,5y_{51} + 1y_{12} + 1,2y_{22} + 1,5y_{32} + 1,4y_{42} + 1,5y_{52} + 1y_{13} + \\
&1,2y_{23} + 1,5y_{33} + 1,4y_{43} + 1,5y_{53} + 1y_{14} + 1,2y_{24} + 1,5y_{34} + 1,4y_{44} + 1,5y_{54} + 1y_{15} + 1,2y_{25} + \\
&1,5y_{35} + 1,4y_{45} + 1,5y_{55} + 1y_{16} + 1,2y_{26} + 1,5y_{36} + 1,4y_{46} + 1,5y_{56} \leq 1800
\end{aligned}$$

A solução ótima destes dois problemas, após a aplicação do Método Simplex, deve indicar em qual período do horizonte de planejamento e em que quantidade os produtos finais devem ser produzidos, de forma que se obtenha o custo mínimo de corte e de estoque, respeitando-se as restrições de balanço de estoque com relação aos produtos finais e às peças, a restrição de capacidade da serra e as condições de não negatividade.

O tipo de mesa e cadeira (produtos finais) produzidos nesse cenário podem ser ilustrados a partir da figura 3.



**Figura 3: Tipo de mesa e cadeira da produção**

## 5.2 SEGUNDO CENÁRIO DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO

No segundo cenário de programação da produção, considerando custos e demanda de produtos finais **constantes**, tem-se os seguintes dados:

$t = 6$  períodos de tempo

$p = 7$  tipos de peça

$j = 6$  tipos de padrões de corte da placa

$i = 2$  produtos finais (mesa e cadeira)

Os tipos de peça para composição dos produtos finais são:

*Peça do tipo 1:* tampo da mesa

*Peça do tipo 2:* encosto da cadeira

*Peça do tipo 3:* assento da cadeira

*Peça do tipo 4:* apoio da cadeira

*Peça do tipo 5:* pé da cadeira

*Peça do tipo 6:* apoio da mesa

*Peça do tipo 7:* pé da mesa

Neste caso, os novos padrões de corte para a produção de peças são descritos na Tabela 7. Estes, são pré-estabelecidos pela fábrica, de acordo com a capacidade dos equipamentos e a mão-de-obra disponíveis.

**Tabela 7: Padrões de Corte: segundo cenário de produção**

Padrão de Corte	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7	Tempo de corte
$j=1$	0	34	34	0	0	0	0	$v_1=3s$
$j=2$	15	8	7	0	0	0	0	$v_2=2s$
$j=3$	12	12	13	0	0	0	0	$v_3=4s$
$j=4$	0	0	0	8	1	2	0	$v_4=4s$
$j=5$	0	0	0	2	3	4	0	$v_5=3s$
$j=6$	0	0	0	0	0	0	4	$v_6=2s$

Substituindo-se os valores dos parâmetros fornecidos pela fábrica no Problema Combinado, obtém-se o Problema de Programação Linear a seguir. A variável  $x_{1t}$  representa o produto “mesa”, cujo custo de produção fornecido é R\$60 reais e a demanda é 10, e a variável  $x_{2t}$  representa “cadeira”, cujo custo de produção é R\$40 reais e a demanda é 20. Os parâmetros (custo de produção, estoque e tempo de corte) foram alterados, já que foram utilizados dados de outros tipos de madeira e outros padrões de corte. Considera-se também que não há estoque no período anterior  $t - 1$ .

Parâmetros fornecidos pela fábrica:

$$cp = R\$135,07,$$

$$u_t = 240 \text{ horas por período,}$$

$a_{pj}$  : pode ser visto na Tabela 7,

$$r_{11} = 1, r_{21} = 0, r_{31} = 0, r_{41} = 0, r_{51} = 0, r_{61} = 2, r_{71} = 4, r_{12} = 0, r_{32} = 1, r_{22} = 1, r_{42} = 2, \\ r_{52} = 4, r_{62} = 0, r_{72} = 0, h_{11} = 4, h_{21} = 2, hp_{11} = 0,4, hp_{21} = 0,35, hp_{31} = 0,25, hp_{41} = 0,13, \\ hp + 51 = 0,15, hp_{61} = 0,18, hp_{71} = 0,23.$$

Substituindo-se estes valores nas Equações (4.1) a (4.4) do Problema Combinado, o seguinte modelo de programação linear é obtido. A função objetivo referente à equação (4.1) se torna:

$$\begin{aligned} \min \quad & 60x_{11} + 4e_{11} + 40x_{21} + 2e_{21} + 135,07y_{11} + 5,77y_{21} + 11,89y_{31} + 135,07y_{41} + 135,07y_{51} + \\ & 0,4ep_{11} + 0,35ep_{21} + 0,25ep_{31} + 0,13ep_{41} + 0,15ep_{51} + 0,18ep_{61} + 0,23ep_{71} + 60x_{12} + 4e_{12} + \\ & 40x_{22} + 2e_{22} + 135,07y_{12} + 135,07y_{22} + 135,07y_{32} + 135,07y_{42} + 135,07y_{52} + 135,07y_{62} + \\ & 0,4ep_{12} + 0,35ep_{22} + 0,25ep_{32} + 0,13ep_{42} + 0,15ep_{52} + 0,18ep_{62} + 0,23ep_{72} + 60x_{13} + 4e_{13} + \\ & 40x_{23} + 2e_{23} + 135,07y_{13} + 135,07y_{23} + 135,07y_{33} + 135,07y_{43} + 135,07y_{53} + 135,07y_{63} + \\ & 0,4ep_{13} + 0,35ep_{23} + 0,25ep_{33} + 0,13ep_{43} + 0,15ep_{53} + 0,18ep_{63} + 0,23ep_{73} + 60x_{14} + 4e_{14} + \\ & 40x_{24} + 2e_{24} + 135,07y_{14} + 135,07y_{24} + 135,07y_{34} + 135,07y_{44} + 135,07y_{54} + 135,07y_{64} + \\ & 0,4ep_{14} + 0,35ep_{24} + 0,25ep_{34} + 0,13ep_{44} + 0,15ep_{54} + 0,18ep_{64} + 0,23ep_{74} + 60x_{15} + 4e_{15} + \\ & 40x_{25} + 2e_{25} + 135,07y_{15} + 135,07y_{25} + 135,07y_{35} + 135,07y_{45} + 135,07y_{55} + 135,07y_{65} + \\ & 0,4ep_{15} + 0,35ep_{25} + 0,25ep_{35} + 0,13ep_{45} + 0,15ep_{55} + 0,18ep_{65} + 0,23ep_{75} + 60x_{16} + 4e_{16} + \\ & 40x_{26} + 2e_{26} + 135,07y_{16} + 135,07y_{26} + 135,07y_{36} + 135,07y_{46} + 135,07y_{56} + 135,07y_{66} + \\ & 0,4ep_{16} + 0,35ep_{26} + 0,25ep_{36} + 0,13ep_{46} + 0,15ep_{56} + 0,18ep_{66} + 0,23ep_{76} \end{aligned}$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.2):

$$\begin{aligned} x_{11} - e_{11} + x_{12} - e_{12} + x_{13} - e_{13} + x_{14} - e_{14} + x_{15} - e_{15} + x_{16} - e_{16} &= 60 \\ x_{21} - e_{21} + x_{22} - e_{22} + x_{23} - e_{23} + x_{24} - e_{24} + x_{25} - e_{25} + x_{26} - e_{26} &= 120 \end{aligned}$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.3):

$$\begin{aligned} 68y_{11} + 30y_{21} + 37y_{31} + 11y_{41} + 9y_{51} + 4y_{61} - ep_{11} - ep_{21} - ep_{31} - ep_{41} - ep_{51} - ep_{61} - ep_{71} - \\ 7x_{11} - 8x_{21} + 68y_{12} + 30y_{22} + 37y_{32} + 11y_{42} + 9y_{52} + 4y_{62} - ep_{12} - ep_{22} - ep_{32} - ep_{42} - ep_{52} - \\ ep_{62} - ep_{72} - 7x_{12} - 8x_{22} + 68y_{13} + 30y_{23} + 37y_{33} + 11y_{43} + 9y_{53} + 4y_{63} - ep_{13} - ep_{23} - ep_{33} - \\ ep_{43} - ep_{53} - ep_{63} - ep_{73} - 7x_{13} - 8x_{23} + 68y_{14} + 30y_{24} + 37y_{34} + 11y_{44} + 9y_{54} + 4y_{64} - ep_{14} - \end{aligned}$$

$$ep_{24} - ep_{34} - ep_{44} - ep_{54} - ep_{64} - ep_{74} - 7x_{14} - 8x_{24} + 68y_{15} + 30y_{25} + 37y_{35} + 11y_{45} + 9y_{55} + 4y_{65} - ep_{15} - ep_{25} - ep_{35} - ep_{45} - ep_{55} - ep_{65} - ep_{75} - 7x_{15} - 8x_{25} + 68y_{16} + 30y_{26} + 37y_{36} + 11y_{46} + 9y_{56} + 4y_{66} - ep_{16} - ep_{26} - ep_{36} - ep_{46} - ep_{56} - ep_{66} - ep_{76} - 7x_{16} - 8x_{26} = 0$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.4):

$$3y_{11} + 2y_{21} + 4y_{31} + 4y_{41} + 3y_{51} + 2y_{61} + 3y_{12} + 2y_{22} + 4y_{32} + 4y_{42} + 3y_{52} + 2y_{62} + 3y_{13} + 2y_{23} + 4y_{33} + 4y_{43} + 3y_{53} + 2y_{63} + 3y_{14} + 2y_{24} + 4y_{34} + 4y_{44} + 3y_{54} + 2y_{64} + 3y_{15} + 2y_{25} + 4y_{35} + 4y_{45} + 3y_{55} + 2y_{65} + 3y_{16} + 2y_{26} + 4y_{36} + 4y_{46} + 3y_{56} + 2y_{66} \leq 1440$$

O segundo planejamento da produção considera que os custos e demandas são **variáveis** ao longo dos períodos de planejamento. Os novos parâmetros fornecidos pela fábrica em estudo são descritos a seguir. Os custos dos produtos finais são:  $c_{11} = c_{12} = c_{13} = 60$ ;  $c_{14} = c_{15} = 75$ ;  $c_{16} = 78$ ;  $c_{21} = c_{22} = 40$ ;  $c_{23} = 42$ ;  $c_{24} = c_{25} = 45$ ;  $c_{26} = 50$ . O custo da placa a ser cortada é  $cp = 135,07$ . Os custos de estoque dos produtos finais são  $h_{11} = h_{12} = h_{13} = 4$ ;  $h_{14} = h_{15} = h_{16} = 5$ ;  $h_{21} = h_{22} = 2$ ;  $h_{23} = h_{24} = 3$ ;  $h_{25} = 4$ ;  $h_{26} = 5$  e os custos de estoque das peças são  $hp_{11} = hp_{12} = hp_{13} = 0,4$ ;  $hp_{14} = hp_{15} = hp_{16} = 0,5$ ;  $hp_{21} = hp_{22} = 0,35$ ;  $hp_{23} = 0,4$ ;  $hp_{24} = hp_{25} = 0,5$ ;  $hp_{26} = 0,6$ ;  $hp_{31} = hp_{32} = 0,25$ ;  $hp_{33} = hp_{34} = 0,3$ ;  $hp_{35} = 0,5$ ;  $hp_{36} = 0,7$ ;  $hp_{41} = hp_{42} = 0,13$ ;  $hp_{43} = 0,15$ ;  $hp_{44} = hp_{45} = 0,2$ ;  $hp_{46} = 0,3$ ;  $hp_{51} = hp_{52} = 0,15$ ;  $hp_{53} = 0,2$ ;  $hp_{54} = hp_{55} = 0,3$ ;  $hp_{56} = 0,5$ ;  $hp_{61} = hp_{62} = hp_{63} = 0,18$ ;  $hp_{64} = hp_{65} = hp_{66} = 0,25$ ;  $hp_{71} = hp_{72} = hp_{73} = 0,23$ ;  $hp_{74} = hp_{75} = hp_{76} = 0,3$ . As demandas são  $d_{11} = 10$ ;  $d_{12} = 6$ ;  $d_{13} = 8$ ;  $d_{14} = 14$ ;  $d_{15} = 12$ ;  $d_{16} = 13$ ;  $d_{21} = 20$ ;  $d_{22} = 16$ ;  $d_{23} = 12$ ;  $d_{24} = 24$ ;  $d_{25} = 14$ ;  $d_{26} = 18$ . Obtém-se, então, o seguinte Problema de Programação Linear.

$$\begin{aligned} \min \quad & 60x_{11} + 4e_{11} + 40x_{21} + 2e_{21} + 135,07y_{11} + 135,07y_{21} + 135,07y_{31} + 135,07y_{41} + 135,07y_{51} + \\ & 135,07y_{61} + 0,4ep_{11} + 0,35ep_{21} + 0,25ep_{31} + 0,13ep_{41} + 0,15ep_{51} + 0,18ep_{61} + 0,23ep_{71} + \\ & 60x_{12} + 4e_{12} + 40x_{22} + 2e_{22} + 135,07y_{12} + 135,07y_{22} + 135,07y_{32} + 135,07y_{42} + 135,07y_{52} + \\ & 135,07y_{62} + 0,4ep_{12} + 0,35ep_{22} + 0,25ep_{32} + 0,13ep_{42} + 0,15ep_{52} + 0,18ep_{62} + 0,23ep_{72} + \\ & 60x_{13} + 4e_{13} + 42x_{23} + 3e_{23} + 135,07y_{13} + 135,07y_{23} + 135,07y_{33} + 135,07y_{43} + 135,07y_{53} + \\ & 135,07y_{63} + 0,4ep_{13} + 0,4ep_{23} + 0,3ep_{33} + 0,15ep_{43} + 0,2ep_{53} + 0,18ep_{63} + 0,23ep_{73} + 75x_{14} + \\ & 5e_{14} + 45x_{24} + 3e_{24} + 135,07y_{14} + 135,07y_{24} + 135,07y_{34} + 135,07y_{44} + 135,07y_{54} + 135,07y_{64} + \\ & 0,5ep_{14} + 0,5ep_{24} + 0,3ep_{34} + 0,2ep_{44} + 0,3ep_{54} + 0,25ep_{64} + 0,3ep_{74} + 75x_{15} + 5e_{15} + 45x_{25} + \\ & 4e_{25} + 135,07y_{15} + 135,07y_{25} + 135,07y_{35} + 135,07y_{45} + 135,07y_{55} + 135,07y_{65} + 0,5ep_{15} + \\ & 0,5ep_{25} + 0,5ep_{35} + 0,2ep_{45} + 0,3ep_{55} + 0,25ep_{65} + 0,3ep_{75} + 78x_{16} + 5e_{16} + 50x_{26} + 5e_{26} + \\ & 135,07y_{16} + 135,07y_{26} + 135,07y_{36} + 135,07y_{46} + 135,07y_{56} + 135,07y_{66} + 0,5ep_{16} + 0,6ep_{26} + \end{aligned}$$

$$0,7ep_{36} + 0,3ep_{46} + 0,5ep_{56} + 0,25ep_{66} + 0,3ep_{76}$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.2):

$$x_{11} - e_{11} + x_{12} - e_{12} + x_{13} - e_{13} + x_{14} - e_{14} + x_{15} - e_{15} + x_{16} - e_{16} = 63$$

$$x_{21} - e_{21} + x_{22} - e_{22} + x_{23} - e_{23} + x_{24} - e_{24} + x_{25} - e_{25} + x_{26} - e_{26} = 104$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.3):

$$\begin{aligned} &68y_{11} + 30y_{21} + 37y_{31} + 11y_{41} + 9y_{51} + 4y_{61} - ep_{11} - ep_{21} - ep_{31} - ep_{41} - ep_{51} - ep_{61} - ep_{71} - \\ &7x_{11} - 8x_{21} + 68y_{12} + 30y_{22} + 37y_{32} + 11y_{42} + 9y_{52} + 4y_{62} - ep_{12} - ep_{22} - ep_{32} - ep_{42} - ep_{52} - \\ &ep_{62} - ep_{72} - 7x_{12} - 8x_{22} + 68y_{13} + 30y_{23} + 37y_{33} + 11y_{43} + 9y_{53} + 4y_{63} - ep_{13} - ep_{23} - ep_{33} - \\ &ep_{43} - ep_{53} - ep_{63} - ep_{73} - 7x_{13} - 8x_{23} + 68y_{14} + 30y_{24} + 37y_{34} + 11y_{44} + 9y_{54} + 4y_{64} - ep_{14} - \\ &ep_{24} - ep_{34} - ep_{44} - ep_{54} - ep_{64} - ep_{74} - 7x_{14} - 8x_{24} + 68y_{15} + 30y_{25} + 37y_{35} + 11y_{45} + 9y_{55} + \\ &4y_{65} - ep_{15} - ep_{25} - ep_{35} - ep_{45} - ep_{55} - ep_{65} - ep_{75} - 7x_{15} - 8x_{25} + 68y_{16} + 30y_{26} + 37y_{36} + \\ &11y_{46} + 9y_{56} + 4y_{66} - ep_{16} - ep_{26} - ep_{36} - ep_{46} - ep_{56} - ep_{66} - ep_{76} - 7x_{16} - 8x_{26} = 0 \end{aligned}$$

Conjunto de restrições referente à equação (4.4):

$$\begin{aligned} &3y_{11} + 2y_{21} + 4y_{31} + 4y_{41} + 3y_{51} + 2y_{61} + 3y_{12} + 2y_{22} + 4y_{32} + 4y_{42} + 3y_{52} + 2y_{62} + 3y_{13} + 2y_{23} + \\ &4y_{33} + 4y_{43} + 3y_{53} + 2y_{63} + 3y_{14} + 2y_{24} + 4y_{34} + 4y_{44} + 3y_{54} + 2y_{64} + 3y_{15} + 2y_{25} + 4y_{35} + 4y_{45} + \\ &3y_{55} + 2y_{65} + 3y_{16} + 2y_{26} + 4y_{36} + 4y_{46} + 3y_{56} + 2y_{66} \leq 1440 \end{aligned}$$

Após a aplicação do Método Simplex, a solução ótima indicará em qual período do horizonte de planejamento e em que quantidade os produtos finais devem ser produzidos nesses dois problemas, de forma que se obtenha o custo mínimo, respeitando-se as restrições (4.2) a (4.5) do Problema Combinado.

A partir destes resultados, pode-se concluir que a aplicação do Problema Combinado em conjunto com o Método Simplex no estudo da fábrica de móveis é eficiente, uma vez que fornece o custo mínimo, sugerindo a antecipação da produção de alguns itens, proporcionando economia em relação a uma produção que atende a demanda por período.



### 5.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Soluções ótimas foram obtidas a partir da execução dos modelos descritos anteriormente com apoio computacional do software LINDO (“*Linear Interactive and Discrete Optimizer*”), a partir da execução do Método Simplex.

Para o primeiro cenário de produção, considerando custos e demanda de produtos finais **constantes**, a solução ótima obtida apresenta um custo mínimo total de produção de R\$4508,09 para o período  $t=6$ . A solução, então, sugere antecipar a produção de cadeiras  $x_{21} = 18$ , gerando estoque, postergando a produção de mesas,  $x_{13} = 12$ . Assim, a solução ótima proporciona uma economia de R\$805,10, ou seja, 15,2% de lucro, se comparada com o custo de uma produção que atende a demanda por período (sem otimização).

Ainda no primeiro cenário de produção, mas considerando agora a **variação** de custos e demanda, a solução ótima obtida foi de R\$5833,09 para o período  $t = 6$ . A solução sugere a antecipar a produção de cadeiras  $x_{21} = 25$  e postergar a produção de mesas,  $x_{13} = 15$ . Comparando com o custo de uma produção que atende a demanda por período, essa solução ótima proporciona uma economia total de R\$2464,24, ou seja, 29,7%.

Para o segundo cenário de produção, considerando custos e demanda de produtos finais **constantes**, o custo mínimo para o planejamento de  $t=6$  períodos é de R\$11141,13. A solução a produção de cadeiras no terceiro período  $x_{23} = 120$  e a produção de mesas no quinto período  $x_{15} = 60$ . Comparando com o custo de uma produção não otimizada, essa solução ótima proporciona uma economia total de R\$446,16, ou seja, 3,9%.

Considerando a **variação** dos parâmetros de custos e demanda no segundo cenário de produção, a solução ótima obtida foi um custo mínimo de R\$10468,59. A solução sugere a produção de mesas  $x_{12} = 63$  e cadeiras  $x_{22} = 104$ , ambos no segundo período. Essa solução proporciona uma economia total de R\$2164,24, ou seja, 17,13%, se comparado com o custo de uma produção que atende a demanda por período.

Para fins de comparação das soluções, o algoritmo *Branch-and-Bound* foi aplicado nos dois cenários de programação de produção. Esse algoritmo consiste em dividir o problema em subproblemas cada vez menores, até que esses possam ser solucionados utilizando variáveis de decisão inteiras. Para ambos os cenários de produção, considerando também parâmetros constantes e, em seguida, suas variações ao longo dos períodos, as soluções ótimas obtidas foram iguais às soluções obtidas pela aplicação do algoritmo Simplex. Isso mostra que ambos os algoritmos se mostraram eficientes para a solução do PPL, alcançando a solução ótima. A descrição do algoritmo *Branch-and-Bound* pode ser visto em Lachtermacher (2009).

A partir destes resultados, pode-se concluir que a aplicação do Problema Combinado em conjunto com o Método Simplex no estudo da fábrica de móveis é eficiente, uma vez que fornece o custo mínimo, sugerindo a antecipação da produção de alguns itens, proporcionando economia em relação a uma produção que atende a demanda por período.

#### 5.4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Após a execução dos dois cenários de produção, foi feita a Análise de Sensibilidade para alguns dos parâmetros e das constantes dos modelos.

No primeiro estudo de caso, o coeficiente da variável  $x_{21}$  é 80 (custo de produção do item “cadeira” no primeiro período). Se tal custo aumentar em 1 unidade, multiplicando-se pela solução ótima, tem-se que o valor da função objetivo aumentará em R\$1215,00, ou seja, a função objetivo final será R\$4973,09.

No segundo estudo de caso, o valor da função objetivo é R\$9284,272; o coeficiente da variável  $x_{13}$  é 60 e, de acordo com a sensibilidade, este valor pode ser aumentar até 77,9 para que as variáveis básicas permaneçam na base. Como o valor ótimo desta variável é 50, logo a função objetivo final será  $9284,272 + 3895 = \text{R}\$13179,272$ .

A Análise de Sensibilidade é extensiva para todos os coeficientes da função objetivo e para as constantes das restrições.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho apresentou métodos relacionados à Pesquisa Operacional e à Programação Linear, bem como o Método Simplex em sua formulação matemática, algoritmo e forma tabular, seguido do conceito de Análise de Sensibilidade.

Assim, foi feito um estudo de caso em dois cenários de programação da produção - primeiramente considerando custos e demanda constantes e, posteriormente, considerando a variação dos mesmos - do Problema Combinado, que envolve conjuntamente dois importantes problemas de otimização linear: corte de estoque e dimensionamento de lotes. Tratá-los de forma separada pode elevar os custos globais de produção, principalmente se uma parcela significativa do custo do produto final é formada pelo material a ser cortado. Apesar da sua combinação ser ainda pouco explorada na literatura, a constatação de sua relevância em diversas situações o elege como um importante problema a ser pesquisado. O Problema Combinado nesse estudo de caso mostrou-se eficiente, destacando essa importância desse tipo de modelo na área de produção.

Para a obtenção da solução ótima nos dois cenários de produção, o Método Simplex foi aplicado (com o apoio computacional do software LINDO) sabendo que na literatura este método, juntamente com a geração de colunas, é o mais recomendado para a solução do Problema Combinado. Desta forma, foi possível obter soluções para o estudo e fazer uma análise de sensibilidade dos parâmetros em ambos os cenários. A fim de comparar as soluções ótimas, o algoritmo de Branch-and-Bound foi aplicado, e as soluções obtidas foram iguais às obtidas pelo algoritmo Simplex.

As soluções obtidas nesse trabalho proporcionam o menor custo global de produção dos itens e, conseqüentemente, uma redução de sobras de matéria-prima cortada. Considerando que o processo industrial é um dos principais responsáveis pela poluição do meio ambiente, os métodos aplicados contribuem para a redução do descarte de matéria prima, amenizando o impacto ambiental negativo causado por esta atividade industrial.

Esse trabalho tem como perspectivas de continuidade a execução de simulações numéricas

para cenários de produção maiores, considerando uma quantidade maior de produtos finais, por exemplo. Além disso, pretende-se criar uma interface computacional para que o usuário possa obter a solução ótima facilmente, mesmo sem compreender o modelo matemático. Os valores de demanda e a variação dos parâmetros ao longo dos períodos de planejamento também podem ser obtidos por meio de um algoritmo ou modelo matemático que gere estes dados numéricos.

## 6.1 PUBLICAÇÕES

Esse trabalho gerou os artigos relacionados a seguir.

1. *Aplicação do Problema Combinado - Corte de Estoque e Dimensionamento de Lotes - em uma Fábrica de Móveis*. III Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC), 05 a 08 de Setembro de 2015, Vitória, ES.
2. *Aplicação da Programação Linear em uma Fábrica de Móveis*. IV Semana Acadêmica de Matemática da UTFPR-CP, 21 a 25 de Setembro de 2015, Cornélio Procópio, PR.
3. *Problemas de Programação Linear: Modelagem e Solução de Problemas de Corte e Empacotamento*. XX Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR (SICITE), 14 a 16 de Outubro de 2015, Campo Mourão, PR.
4. *Aplicação da Programação Linear em uma Indústria Moveleira: Corte de Estoque e Dimensionamento de Lotes*. Revista Eletrônica Paulista de Matemática - CQD, vol.5, 2015.
5. *Manufacturing Optimization Using Coupled Lot Sizing and Stock Cutting Problems*. 6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity, May 16-20, 2016, São José dos Campos, SP.
6. *O Problema Combinado Aplicado em uma Fábrica de Móveis com Variação de Custos e Demanda na Produção*. XXXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), 05 a 09 de Setembro de 2016, Gramado, RS.
7. *Aplicação do Problema Combinado com Variação de Parâmetros em uma Indústria Moveleira*. V Semana Acadêmica de Matemática da UTFPR-CP, 26 a 30 de Setembro de 2016, Cornélio Procópio, PR.
8. *Problemas de Programação Linear: Modelagem e Solução de problemas de Corte e Dimensionamento de Lotes com Variação de Demandas*. XXI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR (SICITE), 09 a 11 de Novembro de 2016, Francisco Beltrão, PR.

## REFERÊNCIAS

- ALEM, D.; MORABITO, R. **O Problema Combinado de Planejamento da Produção e Corte de Estoque sob Incertezas: aplicação em fábricas de móveis de pequeno porte.** *Gestão & Produção (UFSCAR)*: v.20, p. 111-113, 2013.
- ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional: para cursos de engenharia.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear Programming and Network Flows.** 4. ed. [S.l.]: Wiley, 2010.
- BRESSAN, G. M. **Solução de Sistemas Lineares Esparsos - Aplicação à Programação de Lotes e Cortes.** Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo: ICMC - USP, 2003.
- BRESSAN, G. M.; OLIVEIRA, A. R. L. de. **Reordenamento Eficiente das Colunas Básicas na Programação de Lotes e Cortes.** *Pesquisa Operacional*: 24(2), 323-337, 2004.
- DANWÉ, R.; BINDZIA, I.; MEVA'A, L. **Optimisation of cutting in primary wood transformation industries.** *Journal of Industrial Engineering and Management*: Vol.5, no. 1, p. 115-132, 2012.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. **A linear programming approach to the cutting-stock problem.** *Operations Research*: vol.9, p. 849-859, 1961.
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- GRAMANI, M. C. N. **Solução de Sistemas Lineares Esparsos - Aplicação à Programação de Lotes e Cortes.** Tese de Doutorado: Densys, UNICAMP, 2001.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional.** São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.
- LINS, M. P. E.; CALÔBA, G. M. **Programação Linear: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação de desempenho.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- MACULAN, N.; PEREIRA, M. V. F. **Programação Linear.** São Paulo: Atlas, 1980.
- MOREIRA, D. A. **Pesquisa Operacional: curso introdutório.** São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- PILEGGI, G. C. F.; MORABITO, R.; ARENALES, M. N. **Heurísticas para os problemas de geração e sequenciamento de padrões de corte bidimensionais.** *Pesquisa Operacional*, v.27, no.3, 2007.

POLDI, K. C. **Algumas Extensões do Problema de Corte de Estoque**. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo: ICMC - USP, 2003.

POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. **O Problema de Corte de Estoque Unidimensional Multiperíodo**. Pesquisa Operacional: vol.30, no.1, p. 153-174, 2009.

RUSSOMANO, V. H. **PCP, Planejamento e Controle da Produção**. São Paulo: Pioneira, 2000.

TUBINO, D. F. **Planejamento e Controle da Produção: Teoria e Prática**. São Paulo: Atlas, 2007.

WONGPRAKORNKUL, S.; CHARNSETHIKUL, P. **Optimization Based Heuristic Approaches for Solving an Integrated One-dimensional Cutting Stock-Transportation Problem**. Journal of Mathematics and Statistics: vol.3, p. 142-150, 2007.