UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

IZABEL CRISTINA FAGUNDES

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2015

IZABEL CRISTINA FAGUNDES

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Licenciada em Matemática" – Área de Concentração: Licenciatura em Matemática.

Orientador: Vinicius Araujo Peralta

CORNÉLIO PROCÓPIO

2015

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

____

Vinicius Araujo Peralta
(oientador)

____

Douglas Azevedo Sant Anna

____

Thiago Pinguello De Andrade

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

À minha mãe, Sirlei por acreditar em mim, sempre incondicionalmente, mesmo quando ninguém acreditava.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, quando algumas vezes, sentindo-me desacreditada e perdida nos meus objetivos, ideais ou minha pessoa, me fez vivenciar a delicia de me formar.

Ao professor Vinicius, pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço também a todos os meus professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus amigos e colegas de curso, pelo incentivo, colaboração e amizade.

Aos meus avos, Santiago e Sebastiana pelo amor e carinho que sempre tiveram por mim e por serem minha maior motivação e inspiração.

Ao meu companheiro, Juninho por estar comigo nessa caminha mesmo com todas as dificuldades.

Especialmente agradeço a minha mãe que, com muito amor e apoio, não mediu esforços para que eu chegasse até essa etapa de minha vida.

É melhor pescar a sabedoria do que as pérolas. (Jó 28,18)

RESUMO

FAGUNDES, Izabel Cristina. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015.

Neste trabalho de conclusão de curso estudamos conceitos de sistemas de equações diferencias ordinárias lineares de primeira ordem e, a partir da compreensão desses conceitos, abordamos a estabilidade desses sistemas. Apresentamos teoremas que garantem tanto a existência e unicidade de soluções quanto os principais fatos sobre a estrutura das soluções de um sistema linear homogêneo. Exibimos soluções de sistemas lineares de E.D.O homogêneos com coeficientes constantes e fizemos a generalização das soluções por exponencial de matriz. Mostramos como obter soluções para sistemas lineares de E.D.O não homogêneos. E por fim, fizemos a classificação de quando uma solução é estável, assintoticamente estável ou instável de acordo com o tipo de autovalor.

Palavras-chave: Sistemas lineares, Soluções de Sistemas Lineares, Equações Diferenciais Ordinárias

ABSTRACT

FAGUNDES, Izabel Cristina. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS OF FIRST ORDER. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2015.

In this course conclusion work we study concepts of first order linear ordinary differencial equations systems and from the understanding of these concepts, we approach the stability of these systems. We present theorems that guarantee both the existence anduniqueness of solutions as the main facts about the structure of homogeneous linear system solutions. Exhibit linear ODE systems solutions homogeneous with constant coefficients and made the generalization of solutions by exponential matrix. We show how to get solutions for non homogeneous linear ODE systems. Finally, we made a classification of how much a solution is stable, asymptotically stable or unstable according to the kind of eigenvalue.

Keywords: linear systems, Linear Systems Solutions, Ordinary Differential Equations

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No estudo de circuitos elétricos, sistema mecânicos, espécies em competição ou em áreas como física, biologia, economia e engenharia, há uma gama de problemas que podem ser descritos como um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O) cuja soluções descrevem esses fenômenos e no qual é interessante saber o comportamento do mesmo no decorrer de sua evolução, o que consiste em suma no estudo de sua estabilidade. Visa-se assim, obter informações sobre o comportamento qualitativo de soluções para esses problemas.

O objetivo deste trabalho é estudar, conceituar, sistemas de E.D.O e fazer uma análise qualitativa de suas soluções. Para isso, realizamos um estudo sobre as soluções e os métodos de sua obtenção tanto nos casos homogêneos como nos não homogêneos. Esse estudo contribuirá para a complementação curricular relacionado ao estudo de equações diferenciais, além de permitir que futuramente haja um aprofundamento em sistemas dinâmicos e na teoria de semigrupos para equações diferenciais parciais.

Inicialmente definimos alguns conceitos preliminares como matriz de funções, autovalores, autovetores, série e sequência, que serão necessários para a obtenção de soluções.

Em seguida, definimos sistemas de equações diferenciais ordinárias, os teoremas necessários para estruturar as soluções e estudar seu comportamento. A partir disso, procuramos um método para obter essas soluções para o caso homogêneo e o não homogêneo. Terminamos esse capitulo com a caracterização da formato geral das soluções de um problema de valor inicial.

E por fim, fizemos o estudo qualitativo das soluções de sistemas de E.D.O, classificando as soluções em estável, assintoticamente estável ou instável de acordo com os autovalores. Com a breve apresentação do que se refere a este trabalho segue o desenvolvimento do mesmo.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, serão apresentados conceitos sobre matrizes, autovalores e autovetores que serão utilizados ao longo deste texto. Alguns destes serão retomados com alguma frequência no desenvolvimento de novos conceitos e outros serão aprofundados. Para tanto, serão pressuposto o conceito de matriz, seus tipos especiais como matriz nula, identidade e diagonal e suas operações e propriedades básicas, tal como o cálculo de determinante.

2.1 MATRIZ DE FUNÇÕES

No decorrer deste trabalho será necessário considerar matrizes cujas entradas são funções de uma variável real t, como por exemplo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

A matriz $\mathbf{A}(t)$ é dita contínua em $t = t_0$, em um intervalo $\alpha < t < \beta$, se todos os seus elementos $a_{ij} :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ forem funções reais contínuas em t_0. Se $\mathbf{A}(t)$ for contínua em todos os pontos do intervalo, então ela é contínua no intervalo.

$\mathbf{A}(t)$ é diferenciável se todas suas entradas são funções diferenciáveis e sua derivada $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ é definida por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}(t) = \left(\frac{da_{ij}}{dt}(t)\right)_{m\times n}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

ou seja, cada entrada de $\frac{d\mathbf{A}}{dt}(t)$ é a derivada da entrada correspondente de $\mathbf{A}(t)$. Do mesmo modo, a integral de uma matriz de funções é definida por

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Utilizaremos as seguintes propriedades do cálculo elementar que também são válidas funções matriciais

1. $\frac{d}{dt}(\mathbf{C}\mathbf{A}(t)) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt}(t)$, onde $\mathbf{C}$ é uma matriz constante;

2. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}(t) + \frac{d\mathbf{B}}{dt}(t)$;

3. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{B}}{dt}(t) + \frac{d\mathbf{A}}{dt}(t)\mathbf{B}(t)$

2.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES

No desenvolvimento deste trabalho será necessário utilizarmos conceitos de autovalores e autovetores para obtermos as soluções de sistemas lineares homogêneos com coeficientes contantes.

Uma **transformação linear** T é uma função que preserva as operações de espaços vetoriais, isto é, $T : U \to V$ satisfaz

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2),$$

para todo $u_1, u_2 \in U$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ onde U, V são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $U = V$, isto é, o domínio e contradomínio são iguais a transformação T é dita **operador linear**. Além disso se U, V tem dim n e m então a toda transformação linear está associada uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ veja em [3], pág.94.

Dessa maneira, seja $T : V \to V$ um operador linear, um **autovalor** de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$, consequentemente, todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de **autovetor** de T associado a λ.

Decorre disso, que dado $\mathbf{A}_{n\times n}$ uma matriz. Diz-se que um número $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de $\mathbf{A}_{n\times n}$ se existe um vetor *não nulo* $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{A}\xi = \lambda\xi. \tag{3}$$

O vetor ξ é chamado **autovetor** correspondente ao autovalor λ de $\mathbf{A}_{n\times n}$.

Pela linearidade das matrizes a equação (3) pode ser reescrita como

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi = \mathbf{0} \tag{4}$$

onde

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem n. Denotando

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

vemos que a equação (4) equivale a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)\xi_1 & + & a_{12}\xi_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\xi_n & = & 0 \\ a_{21}\xi_1 & + & (a_{22}-\lambda)\xi_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\xi_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{n1}\xi_1 & + & a_{n2}\xi_2 & + & \cdots & + & (a_{nn}-\lambda)\xi_n & = & 0. \end{array} \right. \tag{5}$$

Note que, $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$ é uma solução para sistema (5), no entanto, investigaremos a existência de solução não trivial.

Para isso, supomos que o determinante da matriz dos coeficientes **A** é zero, pois, assim o sistema terá mais de uma solução. Logo, o sistema (4) tem soluções não nulas se, e somente se, o λ satisfaz a equação

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{6}$$

O **polinômio característico de A** da equação (6) é dado por

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

logo,

$$P_{\mathbf{A}}(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \dots (x-\lambda_t)^{r_t}$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{C}$ e $r_i \leq 1$. Note que se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

então

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 2(trA)\lambda + \det A.$$

Exemplo 1. *Para encontrar os autovalores e autovetores da matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

os autovalores λ e os autovetores ξ devem satisfazer a equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$, isto é,

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Logo, $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$ e substituindo os autovalores encontrados na equação (7) é possível encontrar os autovetores associados.

Para $\lambda = 2$,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, cada linha desta equação vetorial leva à condição $3\xi_1 - \xi_2 = 0$, então o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$ é

$$\mathbf{x}^{(1)} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

onde k é constante. Observamos então que qualquer múltiplo não nulo do vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ é também autovetor associado ao mesmo $\lambda_1 = 2$.

Substituindo $\lambda_2 = 4$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a condição resultante é $\xi_1 = \xi_2$. Logo, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$

é

$$\mathbf{x}^{(2)} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 SÉRIE E SEQUÊNCIAS

Nessa seção serão expostos os conceitos de série, sequência e uma noção básica de quando esta é convergente. Essas noções serão necessárias para compreender mais a diante o conceito de exponencial de matrizes.

Definição 1. *Uma* ***sequência*** *de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, denominado o n-ésimo termo da sequência. Esta será representada por (x_n) para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n.*

Definição 2. *Uma* ***série*** *é uma soma*

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

com um número infinito de parcelas. Dada um sequência $(a_n) \in \mathbb{R}$, a partir dela formamos uma nova sequência (s_n), a qual

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Os números s_n são chamados somas parciais da série $\sum a_n$. A parcela é a_n denominada termo geral da série.

A série $\sum a_n$ é dita **convergente** se existir o limite

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

e mais,

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

será chamado soma da série. Caso, $\lim s_n$ não exista, diremos que $\sum a_n$ é uma série **divergente**. Uma série $\sum a_n$ diz-se *absolutamente convergente* quando $\sum |a_n|$ converge.

Os testes de convergência são ferramentas que utilizamos para identificar se a série converge ou não. Utilizaremos, a seguir, um deles para exemplificar a convergência do série dada.

Teorema 1 (Teste de d'Alembert)**.** *Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma constante c tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c < 1$ para todo n suficientemente grande (em particular, se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$) então a série $\sum a_n$ será absolutamente convergente.*

Demonstração: Veja em [6], Corolário 1, pág. 42.

O exponencial pode ser descrito na forma de uma série convergente conhecida como série de potências, definida como

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots . \tag{9}$$

De fato,

$$s = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{(k+1)}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{(k+1)}k!}{(k+1)!x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x}{k+1} \right| = 0.$$

Logo, como $s = 0 < 1$ pelo Teste de d'Alembert a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ é absolutamente convergente e, consequentemente, convergente, veja em [6], pág. 41.

As funções cos e sen podem ser descritas como as, respectivas, séries

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1},$$

onde cada série converge para todo número real θ.

Considerando $x = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, na série de potências

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

onde mostra-se que converge para todo número real ou complexo. Obtemos,

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \frac{i^7\theta^7}{7!} + \cdots \tag{10}$$

Como, $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \ldots$ Então, a série (10) é reescrita como

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{i^7\theta^7}{7!} + \cdots\right). \tag{11}$$

Consequentemente, (11) torna-se

$$\mathbf{e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta},$$

esse último resultado é conhecido como **fórmula de Euler**.

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Ao modelarmos um problema de circuitos elétricos, ou um sistema massa-mola, ou até mesmo de um pêndulo em um plano sobre a ação gravitacional podemos recair num Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias ou numa equação diferencial ordinária (E.D.O) que, por sua vez, sempre pode ser transformada num sistema de E.D.O.

Nessa seção faremos um estudo sobre teoremas referentes aos principais resultados sobre as soluções de sistema de E.D.O. Para em seguida, exibirmos um método de encontrar essas soluções, quando for conveniente e/ou necessário. Isso porque há casos em que encontrar essas soluções é inviável, aí então é feito um estudo qualitativo do comportamento dessas soluções. Veremos estudos qualitativos das soluções de sistema de E.D.O no capitulo 4.

3.1 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS

Como motivação para esse estudo apresentamos a seguinte situação: considere uma massa m pendurada em uma das extremidades de uma mola vertical com comprimento original l. A massa causa um alongamento L da mola para baixo (sentido positivo). Existem duas forças agindo sobre o ponto onde a massa está presa à mola. A força gravitacional ou peso da massa, puxa para baixo e tem módulo igual a mg, onde g é a aceleração da gravidade. Há também uma força, F_m, devido à mola que puxa para cima. Se supusermos que o alongamento L da mola é pequeno, a força da mola fica muito próxima de ser proporcional a L (isso é conhecido como a lei de Hooke). Assim,

$$F_m = -kL, \tag{12}$$

onde k é chamada de constante da mola e o sinal de menos é devido ao fato de que a força da mola puxa para cima. Como a massa está em equilíbrio, então

$$mg - KL = 0. \tag{13}$$

Para um dado peso $W = mg$, pode-se medir L e depois usar (13) para determinar k que tem unidades de força/comprimento

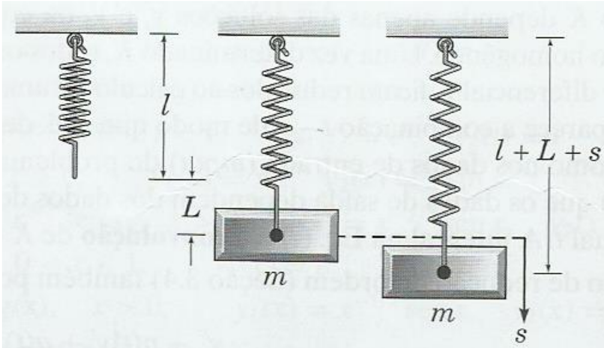

Figura 1: Sistema massa-mola

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2013)

Estudaremos o movimento da massa, seja na presença de uma força externa ou sob um deslocamento inicial. Onde $s(t)$ é o deslocamento da massa a partir de sua posição de equilíbrio no instante t. Assim, $s(t)$ está relacionado às forças que agem sobre a massa pela lei de Newton $F = ma$, logo

$$f(t) = ms''(t) \tag{14}$$

onde $s''(t)$ é a aceleração e $f(t)$ a força total. Assim, para que possamos determinar $f(t)$, existem quatro forças separadas que temos que considerar:

1. Força peso:

$$P = mg \tag{15}$$

   que age sempre para baixo.

2. Força da mola que age sempre para restaurar a mola à sua posição natural:

$$F_m = -k(L+s), \quad L+s > 0 \tag{16}$$

   onde k é a constante elástica da mola.

3. Força de resistência, que pode ser de diversas fontes como do meio onde a massa se movimenta (inclusive o ar), dissipação de energia interna, atrito entre a massa e qualquer guia (se existir). De qualquer forma, supomos que essa força é proporcional à velocidade escalar $s'(t)$, logo :

$$F_d = -\gamma s'(t), \quad \gamma > 0 \tag{17}$$

onde γ é a constante de amortecimento, essa força sempre age no sentido oposto ao sentido de movimento da massa

4. Força externa, que pode ser para cimo ou para baixo dependendo se $F(t)$ é positiva ou negativa. Ela pode ser uma força aplicada diretamente na massa ou devida ao movimento da estrutura onde está presa a mola:

$$F = F(t). \tag{18}$$

Considerando as forças (15), (16). (17) e (18), reescrevemos (14), como

$$\begin{aligned} mg - k(L+s) - \gamma s' + F(t) &= ms'' \quad (19)\\ ms'' - mg + KL + ks + \gamma s' &= F(t) \quad (20)\\ ms'' + \gamma s' + ks &= F(t). \quad (21) \end{aligned}$$

onde m, γ, k são positivas.

Agora, consideremos duas massas, como mostra a Figura (2), que se movem em uma superfície sem atrito sob a influência de forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$ e que são restringidas em seus movimento pelas três molas com constantes k_1, k_2, k_3. Utilizando argumentos análogos aos da situação anterior obtemos as as seguintes coordenadas x_1 e x_2 para as duas massas

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t) \quad (23)\\ m_2 x_2'' &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t), \quad (24) \end{aligned}$$

onde k_1, k_2, k_3 são positivas.

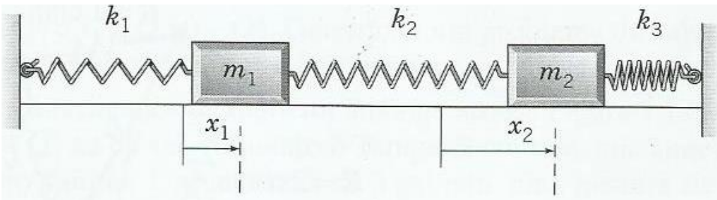

Figura 2: Sistema com duas massas e três molas

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2013)

A partir dessas situações seguem definições necessárias para que possamos compreender e posteriormente resolver esse problema.

Definição 1. *Um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem é a conjunção de duas ou mais equações diferenciais ordinárias com n variáveis dependentes, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, cada uma* *delas função de uma única variável independente, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que podem ser representadas da forma*

$$\begin{cases} x_1'(t) = F_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = F_2(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) = F_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \tag{26}$$

onde $F_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, funções contínuas com suas derivadas parciais contínuas, dada em um intervalo $I : \alpha < t < \beta$.

De maneira geral uma E.D.O arbitrária de ordem n da forma:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{27}$$

pode ser escrita como um sistema de E.D.O, definindo as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por

$$\begin{cases} x_1 &= y, \\ x_2 &= y', \\ \vdots & \\ x_n &= y^{(n-1)}, \end{cases}$$

de onde obtemos

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ \vdots & \\ x_n' &= y^{(n)} \end{cases}$$

note ainda que de (27) temos

$$x_n' = y^{(n)} = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{28}$$

Particularmente uma E.D.O de segundo grau como a equação (21) apresentada na motivação inicial pode ser resolvida através de um sistema de E.D.O. Redefinindo as variáveis como descrito anteriormente, transformaremos a E.D.O resultante da motivação inicial em um sistema de E.D.O, considerando

$$x_1 = s \quad \text{e} \quad x_2 = s'$$

o que implica em

$$x_1' = x_2 \quad \text{e} \quad x_2' = s'',$$

temos

$$F(t) = ms'' + \gamma s' + ks \quad \Longrightarrow \quad x_2' = -x_2\frac{\gamma}{m} - \frac{k}{m}x_1 + \frac{F(t)}{m}.$$

Assim, os sistema massa-mola é da forma

$$\begin{cases} x_1' &= & & x_2 & \\ x_2' &= & -\frac{k}{m}x_1 & -\frac{\gamma}{m}x_2 & +\frac{F(t)}{m} \end{cases}.$$

No caso de uma massa pesando 19,6 kg que é esticada por uma mola 2,45 m, supomos que a massa é deslocada 12 m para o sentido positivo e depois é solta. A massa está em um meio que exerce uma resistência viscosa de 8 kg, quando a massa esta a uma velocidade de 8 m/s.

O movimento do sistema massa-mola é descrito segundo o modelo (21) pela E.D.O de segunda ordem

$$s'' + 0,5s' + 2s = 0. \tag{29}$$

Para escrever (29) como um sistema de E.D.O, definimos

$$\begin{aligned} x_1 &= s, \\ x_2 &= s'. \end{aligned}$$

Assim, $x_1' = x_2$ e $x_2' = s''$. Substituindo em (29), temos

$$x_2' + 0,5x_2 + 2x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2' = -2x_1 - 0,5x_2.$$

Logo, x_1 e x_2 satisfazem o seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' &= & x_2 & \\ x_2' &= & -0,5x_2 & -2x_1. \end{cases}$$

Note que, de (26), temos

$$\begin{aligned} F_1(t,x_1,x_2) &= x_2, \\ F_2(t,x_1,x_2) &= -0,5x_2 - 2x_1. \end{aligned}$$

Definição 2. *Uma* ***solução*** *para o sistema (26) consiste em n funções reais deriváveis* $x_j : I \to \mathbb{R}$ *tais que, para cada* $t \in I$,

$$x_j'(t) = f_j(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

enquanto que a ênupla $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ *dessas funções constitui uma solução da equação* $x' = f(t,x)$ *em I.*

Seja um sistema da forma

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases} \tag{33}$$

Resolvemos a 1º equação isolando x_2, substituímos na 2º equação para obtê-la com apenas x_1,

$$-x_1'' + x_1' + 2x_1 = 0.$$

Que após ser resolvida possibilita a determinação de x_2. Então a solução para esse sistema será

$$\begin{array}{rcrcl} x_1(t) & = & c_1e^{-t} & + & c_2e^{2t} \\ x_2(t) & = & 2c_1e^{-t} & + & \frac{1}{2}c_2e^{2t}. \end{array} \tag{34}$$

O método para calcular a solução de um sistema de E.D.O por substituição de variáveis, em sistemas mais complicados, não é prático ou viável. Então definiremos a seguir métodos são mais genéricos, onde dadas algumas condições nos possibilitam que encontremos as soluções dos sistemas.

Um **problema de valor inicial** (P.V.I) é constituído pelo sistema de equações diferenciais ordinárias (26) e por condições iniciais fornecidas, da forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0 \tag{35}$$

onde t_0 é um valor especificado de t em I e $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ são constantes dadas.

Podemos notar que um Problema de Valor Inicial de um sistema de E.D.O é análogo ao P.V.I de uma E.D.O, então é natural verificarmos outras analogias, como por exemplo a existência e unicidade de soluções para o P.V.I (35) em um intervalo dado.

Teorema 2 (Existência e Unicidade)**.** *Suponha que cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ em (26) e suas derivadas parciais $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$, são contínuas em uma região $\mathscr{R}$ do espaço $tx_1x_2\ldots x_n$ definida por $\alpha < t < \beta$ tal que $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots \alpha_n < x_n < \beta_n$ e suponha que o ponto $(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ está em $\mathscr{R}$. Então, existe um intervalo $|t - t_0| < h$ no qual existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema de equações diferenciais (26) que também satisfaz as condições iniciais (35).*

Demonstração: Veja em [2], pág. 229 , Teorema 7.4.

Faremos agora uma distinção inicial sobre a formas de sistemas, visto que o método de construção de solução a ser empregado muda consideravelmente conforme suas características.

Definição 3. *O sistema (26) é dito **linear** se cada uma das funções $F_1, ..., F_n$ em (26) for uma função linear das variáveis dependentes $x_1, x_2, ..., x_n$. Caso contrário, dizemos que o sistema (26) é **não linear**.*

No caso em que $F_1, \ldots, F_n$ são funções lineares, sejam $p_{ij} : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas, o sistema (26)pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = p_{11}(t)x_1 + ... + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2'(t) = p_{21}(t)x_1 + ... + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x_1'(t) = p_{n1}(t)x_1 + ... + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}, \tag{36}$$

com $i, j = 1, \ldots, n$, reescrevendo o sistema (36) na forma de equação matricial, temos

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t). \tag{37}$$

Seja $x_i(t) : I \to \mathbb{R}$ com $i = 1, \ldots, n$ como componentes de um vetor $\mathbf{x}(t)$; $g_1(t), ..., g_n(t)$ como componentes de um vetor $\mathbf{g}(t)$ e $p_{i,j}(t)$ como entradas de uma matriz $\mathbf{P}(t)_{n\times n}$, o sistema (37) fica da forma

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \ldots & p_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(t) & \ldots & p_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Se $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$ então o sistema é dito **homogêneo**, isto é, se todas as funções $g_1(t), ...g_n(t)$ forem identicamente nulas no intervalo I e consequentemente ter-se-á

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \tag{38}$$

caso contrário, ele será dito **não homogêneo**.

As equações (23) e (24) do sistema de massa-mola múltiplo, por exemplo, podem ser escritas na forma de um sistema não-homogêneo, através da redefinição de variáveis. Considere $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_1', y_4 = x_1'$, então

$$\begin{matrix} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} y_3' = x_1'' \\ y_4' = x_2'' \end{matrix}$$

assim, o sistema resultante será

$$\begin{cases} y_1' &= y_3 \\ y_2' &= y_4 \\ y_3' &= -\frac{(k_1+k_2)}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_1}y_2 + \frac{F_1(t)}{m_1} \\ y_4' &= \frac{k_2}{m_2}y_1 - \frac{(k_2+k_3)}{m_2}y_2 + \frac{F_2(t)}{m_2}, \end{cases}$$

que na forma matricial fica

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F_1(t)}{m_1} \\ \frac{F_2(t)}{m_2} \end{pmatrix}.$$

Agora apresentaremos teoremas que estruturam os resultados sobre as soluções de sistemas lineares homogêneos e em seguida exibiremos métodos para encontrar as soluções dos sistemas lineares.

Teorema 3 (Princípio da Superposição)**.** *Seja $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ soluções do sistema homogêneo (38), em um intervalo I. Então, a combinação linear*

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t), \tag{41}$$

onde os c_1, c_2, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo I.

Demonstração: Note que, ao derivarmos a combinação (41), obtemos

$$[c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t)]' = c_1\mathbf{u}'(t) + c_2\mathbf{v}'(t)$$

e como, por hipótese, $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ são soluções do sistema (38), então

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{u}'(t) + c_2\mathbf{v}'(t) &= c_1\mathbf{P}(t)\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{P}(t)\mathbf{v}(t) \\ &= \mathbf{P}(t)[c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t)]. \end{aligned}$$

Portanto a combinação linear $c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t)$ também é uma solução do sistema (38) no intervalo I.

Definição 4. *Um conjunto de soluções $\mathbf{x}_i : I \to \mathbb{R}$ do sistema é **linearmente dependente** se existem constantes $c_1, \ldots, c_n$, não simultaneamente nulas, tais que*

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}, \tag{44}$$

*para todo $t \in I$. Caso $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ for a única solução para a qual os $c_1, \ldots, c_n$ satisfazem (44), então o conjunto das soluções $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ é dito **linearmente independente.***

Segue, agora, a definição que utilizaremos como ferramenta para saber se as soluções de (38) são ou não L.I.

Definição 5. *Dadas as soluções*

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(2)}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(n)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \tag{45}$$

no intervalo I, o determinante

$$W[\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)] = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \ldots & x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \ldots & x_2^{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \ldots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \tag{46}$$

*é chamado o **wronskiano** das soluções.*

Teorema 4. *Sejam $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ soluções do sistema homogêneo (38) em um intervalo I. Uma condição necessária e suficiente para que o conjunto de soluções seja linearmente independente é que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in I$.*

Demonstração:

Sejam $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ soluções do sistema homogêneo (38) em um intervalo I do tipo

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(2)}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(n)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Inicialmente utilizaremos o fato do $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t_0) \neq 0$ para todo $t_0 \in I$ para mostrar que as soluções são L.I.

Suponha que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0)+c_n\mathbf{x}^{(2)}(t_0)+\cdots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t_0)=\mathbf{0}. \tag{47}$$

mostraremos que $c_1=c_2=\ldots=c_n$.

Note que, se

$$\begin{array}{cccccc} c_1x_1^{(1)}(t_0) & +c_2x_1^{(2)}(t_0) & +\ldots & +c_nx_1^{(n)}(t_0) & = & 0\\ c_1x_2^{(1)}(t_0) & +c_2x_2^{(2)}(t_0) & +\ldots & +c_nx_2^{(n)}(t_0) & = & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_1x_n^{(1)}(t_0) & +c_2x_n^{(2)}(t_0) & +\ldots & +c_nx_n^{(n)}(t_0) & = & 0 \end{array}$$

então,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t_0) & x_1^{(2)}(t_0) & \ldots & x_1^{(n)}(t_0)\\ x_2^{(1)}(t_0) & x_2^{(2)}(t_0) & \ldots & x_2^{(n)}(t_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n^{(1)}(t_0) & x_n^{(2)}(t_0) & \ldots & x_n^{(n)}(t_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Porém como $W[\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\cdots,\mathbf{x}^{(n)}](t_0)\neq 0$ para todo $t_0\in I$ e o sistema é homogêneo, então existe uma uma única solução para o sistema (47). Logo a solução para este sistema é $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$. Portanto as soluções são L.I

Agora utilizaremos a contra positiva de que se as soluções são L.I então $W[\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\cdots,\mathbf{x}^{(n)}](t_0)\neq 0$ para algum $t_0\in I$ então $\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\cdots,\mathbf{x}^{(n)}$ é L.D em I.

Suponha que $W[\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\cdots,\mathbf{x}^{(n)}](t_0)=0$ para algum $t_0\in I$. Logo,

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t_0) & \ldots & x_1^{(n)}(t_0)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n^{(1)}(t_0) & \ldots & x_n^{(n)}(t_0)\end{vmatrix}$$

então existe $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)\neq 0\in\mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{x}(t_0)\mathbf{c}=0\in\mathbf{R}^n$, logo

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0)+\ldots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t_0)=\mathbf{0}. \tag{48}$$

Definindo $\mathbf{x}(t)=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\ldots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, com $t\in I$. Note que,

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{x}(t_0)=0\end{cases}$$

é um P.V.I com $\mathbf{z}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ como solução. No entanto, temos que (48) também é solução do

P.V.I. Logo, segue do T.E.U que

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) = 0$$

para todo $t \in I$ em que $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Logo $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ é L.D em I.

Teorema 5. *Se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ formam um conjunto de soluções linearmente independente de (38) em $\alpha < t < \beta$, então cada solução $\mathbf{x}(t) = \phi(t)$,do sistema (38) pode ser expressa de maneira única como combinação linear de $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$,*

$$\phi(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t). \tag{49}$$

Demonstração: Sejam $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma solução para (38) e $t_0 \in I$. Definindo $\xi = \phi(t_0) \in \mathbf{R}^n$. Logo ϕ e solução para o P.V.I

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) & = & \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) & = & \xi. \end{cases}$$

Como $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ são soluções L.I, em particular, existe $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ tal que

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t_0) & \ldots & x_1^{(n)}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t_0) & \ldots & x_n^{(n)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Definindo $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$ com $t \in I$. Segue que $\mathbf{x}(t)$ é solução para o referido P.V.I, donde $\mathbf{x}(t) = \phi(t)$, pelo T.E.U. Observando os teoremas 3 e 5 é possível notar que o primeiro afirma que todas as soluções do sistema (38) podem ser escritas da forma (49), enquanto o segundo diz que todas as expressões do tipo (49), são soluções do sistema (38). Com base nisso, apresentamos a seguinte definição,

Definição 6 (Conjunto Fundamental de Soluções)**.** *Qualquer conjunto $\mathbf{x}^{(1)}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t)$ de n soluções linearmente independentes do sistema homogêneo (38) em um intervalo I é chamado um* ***conjunto fundamental de soluções*** *neste intervalo.*

Definição 7 (Solução Geral - Sistema Homogêneo)**.** *Seja $\mathbf{x}^{(1)}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t)$ um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (38) em um intervalo I. Define-se a* ***solução geral*** *do sistema no intervalo como*

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t),$$

onde os c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são constantes arbitrárias.

Após conhecermos quem são as soluções $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ é necessário saber se estas são linearmente dependentes, pois com isso poderemos definir a solução geral desse sistema. Para isso é necessário as soluções satisfaçam o critério do teorema a seguir.

Teorema 6. *Se as funções $\mathbf{x}^{(1)}(t),\ldots,\mathbf{x}^{(n)}(t)$ são soluções do sistema (38) para todo $t\in I$, então $W[\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}](t)$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.*

Demonstração: Sem perda de generalidade consideremos o caso 2×2 (Para casos mais gerais veja em [5] Teorema 7.2 pág.269). Sejam $\mathbf{x}^{(1)}(t),\mathbf{x}^{(2)}(t)$ soluções do sistema homogêneo (38), para todo $t\in I$, e considere o wronskiano dessas soluções, isto é

$$W[\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}](t)=\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix}=x_1^{(1)}x_2^{(2)}-x_1^{(2)}x_2^{(1)}.$$

Note que,

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[x_1^{(1)}x_2^{(2)}-x_1^{(2)}x_2^{(1)}\right] &(50)\\ &= \left[\frac{d}{dt}x_1^{(1)}\right]x_2^{(2)}+x_1^{(1)}\left[\frac{d}{dt}x_2^{(2)}\right]-\left[\frac{d}{dt}x_1^{(2)}\right]x_2^{(1)}-x_1^{(2)}\left[\frac{d}{dt}x_2^{(1)}\right]. &(51)\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$, onde

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Assim, para

$$\mathbf{x}^{(1)}(t)=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1^{(1)} &= p_{11}x_1^{(1)}-p_{12}x_2^{(1)} &(53)\\ \frac{d}{dt}x_2^{(1)} &= p_{21}x_1^{(1)}-p_{22}x_2^{(1)} &(54)\end{aligned}$$

e para

$$\mathbf{x}^{(2)}(t)=\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1^{(2)} &= p_{11}x_1^{(2)}-p_{12}x_2^{(2)} &(56)\\ \frac{d}{dt}x_2^{(2)} &= p_{21}x_1^{(2)}-p_{22}x_2^{(2)}. &(57)\end{aligned}$$

Substituindo (53), (54), (56) e (57) em (51), obtemos

$$\begin{aligned}
W' = {} & \left(p_{11}x_1^{(1)} + p_{12}x_2^{(1)}\right)x_2^{(2)} + \left(p_{21}x_1^{(2)} + p_{22}x_2^{(2)}\right)x_1^{(1)} - \left(p_{11}x_1^{(2)} + p_{12}x_2^{(2)}\right)x_2^{(1)} - \left(p_{21}x_1^{(1)} + p_{22}x_2^{(1)}\right)x_1^{(2)} \\
= {} & p_{11}x_1^{(1)}x_2^{(2)} + p_{22}x_2^{(2)}x_1^{(1)} - p_{11}x_1^{(2)}x_2^{(1)} - p_{22}x_2^{(1)}x_1^{(2)} \\
= {} & (p_{11} + p_{22})\left(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}\right) \\
= {} & (p_{11} + p_{22})W.
\end{aligned}$$

Obtemos W resolvendo

$$\begin{aligned}
W' &= (p_{11} + p_{22})W \\
\frac{W'}{W} &= (p_{11} + p_{22}) \\
\frac{d}{dt}[\ln|W|] &= (p_{11} + p_{22}) \\
\ln|W| &= \int (p_{11} + p_{22})\,dt + c_1 \\
W &= ce^{\int (p_{11} + p_{22})dt}.
\end{aligned}$$

Como $e^{\int (p_{11}+p_{22})dt} \neq 0$, então $W = 0$ se, e somente se $c = 0$. Portanto $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}]$ ou é nulo ou nuca se anula no intervalo I.

Com base no Teorema 6, temos que o wronskiano é suficiente para determinar a partir de um ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ formam um conjunto fundamental ou não.

O teorema seguinte nos garantirá que dado um conjunto de soluções em um intervalo I sempre existe um conjunto fundamental mostrando quem ao menos será esse conjunto.

Teorema 7. *Sejam*

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

e além disso, suponha que $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *são soluções do sistema (38) satisfazendo as condições iniciais*

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)}$$

respectivamente, onde t_0 *é um ponto qualquer no intervalo* $\alpha < t < \beta$*, então* $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$

forma um conjunto fundamental de soluções para o sistema (38).

Demonstração: Note que, a existência e unicidade das soluções $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ são garantidas pelo Teorema 2. Calculando o wronskiano dessas soluções quanto $t = t_0$, obtemos

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema 4, $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ são linearmente independentes e pela definição 6 formam um conjunto fundamental de soluções.

3.2 SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Nesta seção serão estudados os métodos para encontrar as soluções de sistemas do tipo,

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

em que $\mathbf{P}(t) \equiv \mathbf{A}$, não depende de t. Neste caso, dizemos que esse sistema tem os coeficientes, isto é,

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{61}$$

onde $\mathbf{A}_{n\times n}$ tem entradas reais constantes.

Iniciaremos o estudo da solução de um sistema a partir do caso unidimensional, ou seja, para $n = 1$, que consiste de uma E.D.O de primeira ordem-

$$x'(t) = ax(t),$$

com $a \in \mathbb{R}$ constante. Nesse caso, temos que a solução da E.D.O é da forma

$$x(t) = ce^{at}, \quad t, c \in \mathbb{R}$$

pois,

$$\begin{aligned}
x'(t) &= ax(t) \\
\frac{x'(t)}{x(t)} &= a \\
\frac{d}{dt}[\ln|x(t)|] &= a \\
\ln|x(t)| &= at + c_1 \\
x(t) &= ce^{at} \quad t, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Com base na forma da solução obtida investigaremos a existência de soluções para o sistema (61) de ordem n, supondo que ela seja da forma

$$\mathbf{x}(t) = \xi e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{63}$$

onde

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

onde $\xi_i \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, com $i = 1, \ldots, n$ e o expoente $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ devem ser determinados.

Derivando (63) e substituindo na equação (61), encontramos

$$\xi \lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A} \xi e^{\lambda t}.$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e em particular, $I \subset \mathbb{R}$ então

$$\mathbf{A}\xi = \xi\lambda$$

$$\mathbf{A}\xi - \xi\lambda = 0$$

note que $\xi\lambda = \lambda I \xi$ assim

$$\mathbf{A}\xi - \lambda I \xi = 0$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\xi = 0 \tag{64}$$

onde $\mathbf{I}_{n \times n}$ é a matriz identidade. Assim $\mathbf{x}(t) = \xi e^{\lambda t}$ é uma solução de (61) se λ for um autovalor e ξ e for um autovetor associado a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

Neste trabalho estudaremos as soluções dos sistema 2×2 pois dentre outras coisas, nos permite visualizar o plano $x_1 x_2$ o qual utilizaremos para fazer o estudo das soluções. Para encontrarmos os autovalores de $\mathbf{A}$, é necessário calcularmos

$$det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \tag{65}$$

isto é, se

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} && (66)\\
&= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21} && (67)\\
&= \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} && (68)\\
&= \lambda^2-(tr\mathbf{A})\lambda+\det\mathbf{A}, && (69)
\end{aligned}$$

onde $tr\mathbf{A}=a_{11}+a_{22}$ e $\det\mathbf{A}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Note que,

1. Se $\det\mathbf{A}=0$, de (69) concluímos que existe pelo menos um autovalor nulo.

2. Se $\det\mathbf{A}<0$, de (69) então existe $\lambda_1>0$ e $\lambda_2<0$.

3. Se $\det\mathbf{A}>0$ e $tr\mathbf{A}=0$,de (69) então λ_1 e $\overline{\lambda_1}$ são autovalores imaginários puros.

4. Se $\det\mathbf{A}>0$ e $tr^2\mathbf{A}<4(\det\mathbf{A})$,de (69) então λ_1 e $\overline{\lambda_1}$ são autovalores em pares complexos conjugados.

Esses casos estão enquadrados em três seções posteriores

1. Autovalores reais e distintos.

2. Autovalores reais e repetidos.

3. Autovalores em pares complexos conjugados.

No que se segue faremos o estudo das soluções em cada um dos três casos anteriores.

3.2.1 AUTOVALORES REAIS DISTINTOS

No caso em que a raiz do polinômio característico de existam autovetores reais distintos $\xi^{(1)},\xi^{(2)}$ associados aos autovalores λ_1,λ_2, respectivamente, e que $\xi^{(1)},\xi^{(2)}$ forem L.I, as soluções correspondentes do sistema de ordem 2×2,

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{71}$$

serão da forma

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi^{(2)}e^{\lambda_2 t}. \tag{72}$$

Pelo Teorema 4 ao calcularmos o wronskiano das soluções encontradas e mostrarmos que ele é não nulo para todo $t \in I$ temos um conjunto L.I de soluções e pela Definição 6 elas formam um conjunto fundamental para o referido sistema. Assim, calculando o wronskiano dessas soluções:

$$\begin{aligned} W[\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}] &= \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} & \xi_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} \\ \xi_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} & \xi_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{73}$$

Analisando o último determinante de (73), podemos concluir que tanto o exponencial nunca será nulo quanto o determinante com os autovetores $\xi^{(1)},\xi^{(2)}$ pois, eles são linearmente independentes. Consequentemente, $W[\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}](t) \neq 0$ com $t \in I$ e $\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental.

Então pela Definição 7 solução geral da Equação (71) é

$$\mathbf{x}(t) = c_1\xi^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{\lambda_2 t}. \tag{74}$$

Exemplo 1. *Encontrar a solução do sistema para o caso em que*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

ou seja, considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \tag{75}$$

buscando determinar os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes, obtendo assim, o *sistema*

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

como não queremos a solução trivial do sistema (76), temos que

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)+3 \tag{77}$$

$$= \lambda^2 - 1 = 0 \tag{78}$$

As raízes do polinômio característico de (78) são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, que são os autovalores da matriz de coeficientes em (75).
Para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, $\xi_1 = \xi_2$ e o autovetor $\xi^{(1)}$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, para $\lambda = -1$ temos que $\xi_2 = 3\xi_1$ e o autovetor $\xi^{(2)}$ associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Qualquer k múltiplo do autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ também são autovetores, porém iremos considerar o $k = 1$ nos próximos casos.
Por fim, as soluções do sistema (75) são

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \quad e \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t},$$

Note que

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & 3e^{-t} \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

isto é, o wronskiano dessas soluções nunca se anula. Portanto, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto *fundamental de soluções e a solução geral é dada por*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.\end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são contantes arbitrárias.

3.2.2 AUTOVALORES REAIS REPETIDOS

Analisando novamente o sistema com coeficientes constantes (71), no caso em que a matriz $\mathbf{A}$ tem autovalores repetidos, pode não haver 2 autovetores linearmente independente associados a esse autovalor.

Note que, supondo que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ é uma raiz de multiplicidade 2 resultante da raiz do polinômio $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ de grau 2, só há duas opções: ou existem 2 ou existem menos do que 2 vetores linearmente independente associados ao autovalor λ. No primeiro caso, não fará diferença que $\lambda_1 = \lambda_2$, visto que ainda haverá um conjunto fundamental de soluções para o sistema (71) da forma $\xi^{\lambda t}$.

No entanto, quando houver menos do que 2 soluções do sistema (71) da forma $\xi^{\lambda t}$ associadas a esse autovalor, será preciso encontrar outras soluções de forma diferente para que se possa construir a solução geral (74).

Então por analogia aos resultados para E.D.O de ordem n procuraremos outras soluções envolvendo produtos de funções polinomiais e exponenciais. Diferentemente de uma única E.D.O de segunda ordem, em um sistema de E.D.O 2×2 que possui um autovalor λ repetido o termo da forma $\eta e^{\lambda t}$ não será um múltiplo da primeira solução $\xi e^{\lambda t}$. Então considerando o caso em que existe um autovalor duplo e um único autovetor associado independente ξ. Temos que uma solução é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi e^{\lambda t},$$

onde ξ satisfaz

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}. \tag{81}$$

Supondo que a segunda solução seja da forma

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t} \tag{82}$$

onde

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

para verificarmos essa solução a substituímos no sistema (71) obtendo

$$\lambda\xi te^{\lambda t} + (\xi + \lambda\eta)e^{\lambda t} = \mathbf{A}(\xi te^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t}).$$

Note que igualando os coeficientes de $te^{\lambda t}$ e $e^{\lambda t}$, temos

$$\begin{array}{rl} \lambda\xi = \mathbf{A}\xi & \quad \xi + \lambda\eta = A\eta \\ \mathbf{0} = \mathbf{A}\xi - \lambda\xi & \quad \xi = \mathbf{A}\eta - \lambda\eta \end{array}$$

encontrando assim as condições

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi = \mathbf{0} \tag{83}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\eta = \xi \tag{84}$$

em que η deve satisfazer o sistema não homogêneo (84).

Embora $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, é possível resolver a equação (84) para η. O vetor η é dito **autovalor generalizado** associado ao autovalor λ.

Exemplo 1. *Note que utilizando o processo já conhecido no sistema*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{86}$$

Sabemos que $p(\lambda) = det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ *logo* $\lambda = 1$ *é um autovalor de multiplicidade* 2 *que tem um único autovetor correspondente linearmente independente* $\xi_1 = 2\xi_2$*. E a solução para o sistema (86) é*

$$\mathbf{x}^{(1)} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t,$$

como não existe uma segunda solução da forma $\mathbf{x} = \xi e^{\lambda t}$*, utilizaremos (82) para encontrar uma segunda solução e formarmos um conjunto fundamental de soluções.*

Ao resolvermos o sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\eta = \xi$*, nos deparamos com a seguinte matriz aumentada*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

onde $\eta_1 = 1 + 2\eta_2$, então a candidata a segunda solução é da forma

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \ .$$

Note que, o segundo termo da solução $\mathbf{y}(t)$ é múltiplo da solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, o que torna o conjunto $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{y}(t)\}$ L.D, suprimindo esse termo obtemos

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right].$$

Ao calcularmos o wronskiano obtemos $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}] = -e^{2t}$ e, portanto, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (86). E a solução geral é

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right]. \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são contantes arbitrárias.

Analisaremos agora o caso em que o polinômio característico tem raízes complexas .

3.2.3 AUTOVALORES EM PARES COMPLEXOS CONJUGADOS

Para finalizar essa discussão sobre soluções vamos considerar o caso em que o polinômio característico (65) apresenta autovalores em pares complexos conjugados.

Supondo que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ sejam os autovalores da matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ do sistema (61), com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}^*$ e $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ sejam os respectivos autovetores associados λ_1, λ_2.

Temos que, λ_1 e $\xi^{(1)}$ satisfazem

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0} \tag{88}$$

e assim o conjugado de (88), é

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda}_1\mathbf{I})\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}$$

onde $\mathbf{A}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$. Como

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \lambda_2 \\ \bar{\xi}^{(1)} &= \xi^{(2)}, \end{aligned}$$

concluímos que $\overline{\mathbf{x}^{(1)}}(t) = \mathbf{x}^{(2)}(t)$, pois

$$\overline{\mathbf{x}^{(1)}}(t) = \bar{\xi}^{(1)} e^{\bar{\lambda}_1 t} = \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t} = \mathbf{x}^{(2)}(t).$$

Como as soluções do sistema (61) são complexas conjugadas é possível encontrar duas soluções reais de (61) correspondentes aos autovalores λ_1 e λ_2 tomando as partes real e imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}(t)$. Com efeito, seja $\xi = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix},$$

assim, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{(\alpha + i\beta)t} \\ \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{\alpha t} e^{i\beta t} \\ \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \text{sen}\, \beta t). \end{aligned}$$

Separando a parte real da imaginária,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a} \cos \beta t - \mathbf{b} \text{sen}\, \beta t) + i e^{\alpha t}(\mathbf{a} \text{sen}\, \beta t - \mathbf{b} \text{sen}\, \beta t).$$

Considerando $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, têm-se

$$\mathbf{u}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a} \cos \beta t - \mathbf{b} \text{sen}\, \beta t)\ , \tag{91}$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{a} \text{sen}\, \beta t + \mathbf{b} \cos \beta t)\ . \tag{92}$$

Inicialmente mostraremos que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são soluções do sistema (61). Note que

$$\begin{aligned} \mathbf{Au} + i\mathbf{Av} &= \mathbf{A}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{Ax} \\ &= \mathbf{A}\xi e^{\lambda t} \\ &= \lambda \xi e^{\lambda t} \\ &= (\alpha + i\beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ &= (\alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v}) + i(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \mathbf{Au} & = & \alpha \mathbf{u} & - & \beta \mathbf{v} \\ \mathbf{Av} & = & \alpha \mathbf{v} & + & \beta \mathbf{u} \end{array} \right. . \tag{95}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'(t) &= (\alpha\mathbf{a}-\beta\mathbf{b})e^{\alpha t}\cos(\beta t)-(\beta\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b})e^{\alpha t}\text{sen }(\beta t)\\
&= \mathbf{Aa}e^{\alpha t}\cos(\beta t)-\mathbf{Ab}e^{\alpha t}\text{sen }(\beta t)\\
&= \mathbf{A}[\mathbf{a}e^{\alpha t}\cos(\beta t)-\mathbf{b}e^{\alpha t}\text{sen }(\beta t)]\\
&= \mathbf{Au}(t)
\end{aligned}$$

e, de maneira análoga,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}'(t) &= (\alpha\mathbf{a}-\beta\mathbf{b})e^{\alpha t}\text{sen }(\beta t)+(\beta\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b})e^{\alpha t}\cos(\beta t)\\
&= \mathbf{Aa}e^{\alpha t}\text{sen }(\beta t)+\mathbf{Ab}e^{\alpha t}\cos(\beta t)\\
&= \mathbf{A}[\mathbf{a}e^{\alpha t}\text{sen }(\beta t)+\mathbf{b}e^{\alpha t}\cos(\beta t)]\\
&= \mathbf{Av}(t).
\end{aligned}$$

Logo $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são soluções de (61). Consideremos agora

$$J=\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} \\ \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} \end{pmatrix},$$

note que $detJ \neq 0$, pois $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são L.I, logo

$$\begin{aligned}
0 &\neq \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} \\ \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_1+ib_1 & a_1-ib_1 \\ a_2+ib_2 & a_2-ib_2 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{99}$$

Verificaremos agora, através do wronskiano que $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções reais para o sistema (61). De fato,

$$\begin{aligned} W[\mathbf{u}(t),\mathbf{v}(t)] &= \begin{vmatrix} e^{\alpha t}(a_1\cos\beta t - b_1\text{sen }\beta t) & e^{\alpha t}(a_1\text{sen }\beta t + b_1\cos\beta t) \\ \\ e^{\alpha t}(a_2\cos\beta t - b_2\text{sen }\beta t) & e^{\alpha t}(a_1\text{sen }\beta t + b_1\cos\beta t) \end{vmatrix} \\ &= e^{\alpha t}\begin{vmatrix} (a_1\cos\beta t - b_1\text{sen }\beta t) & (a_1\text{sen }\beta t + b_1\cos\beta t) \\ \\ (a_2\cos\beta t - b_2\text{sen }\beta t) & (a_1\text{sen }\beta t + b_1\cos\beta t) \end{vmatrix} \\ &= e^{\alpha t}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos\beta t & \text{sen }\beta t \\ -\text{sen }\beta t & \cos\beta t \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= e^{\alpha t}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{101}$$

Como $e^{\alpha t} \neq 0$ para todo $t \in I$ e por (99) o determinante também é não nulo. Logo $W[\mathbf{u}(t),\mathbf{v}(t)] \neq 0$, consequentemente $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são L.I formando um conjunto fundamental de soluções reais e a solução geral é da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) \\ &= c_1[e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\text{sen }\beta t)] + c_2[e^{\alpha t}(\mathbf{a}\text{sen }\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)]. \end{aligned}$$

Exemplo 1. *Agora, a partir do que mostramos vamos encontrar o conjunto fundamental de soluções reais do sistema*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{103}$$

Para isso determinaremos um autovalor e o autovetor associado da matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$*, obtendo assim,*

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+2i)t}$$

onde

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} -2sen\ (2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ sen\ (2t) \end{pmatrix} e^{-t},$$

calculando o wronskiano de $\mathbf{u}(t)$ *e* $\mathbf{v}(t)$ *, temos que*

$$W[\mathbf{u},\mathbf{v}](t) = \begin{vmatrix} -2\sin(2t) & 2\cos(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{vmatrix} = -2e^{-2t} \neq 0$$

logo, $\mathbf{u}(t)$ *e* $\mathbf{v}(t)$ *formam um conjunto fundamental de soluções reais que procurávamos.*

3.3 MATRIZES FUNDAMENTAIS

Nessa seção estudaremos as matrizes fundamentais relacionadas ao P.V.I do sistema (38) com condições iniciais do tipo (35) para caracterizar as soluções encontradas nas seções anteriores e assim procurarmos generalizar sua forma.

Definição 1. *Sejam*

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

um conjunto fundamental de n vetores solução do sistema homogêneo (38) em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$*,. A matriz*

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \ldots & x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \ldots & x_2^{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \ldots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \tag{104}$$

é chamada uma ***matriz fundamental*** *do sistema no intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*.*

Note que, uma matriz fundamental é invertível, visto que suas colunas são vetores linearmente independentes.

Assim, podemos escrever a solução geral

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

do sistema homogêneo (38), em termos de $\Psi(t)$,

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{c}, \tag{105}$$

onde

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

é um vetor constante com componentes arbitrárias . Se tivermos um problema de valor inicial da forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}^0, \end{cases} \tag{106}$$

onde t_0 é um ponto dado em $I \subset \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}^0$ é um vetor constante, basta escolher o vetor $\mathbf{c}$ de forma que ele satisfaça a condição inicial anterior. Isto é,

$$\Psi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0. \tag{107}$$

Logo, como $\Psi(t_0)$ é invertível,

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0. \tag{108}$$

Assim, substituindo (108) em (105) temos

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0, \tag{109}$$

segue então, que esta última equação é a solução do P.V.I (106).

No entanto, para resolver o problema de valor inicial também é possível utilizar a equação (107). A seguir verificaremos que a matriz fundamental Ψ satisfaz o sistema (38).

Note que, como $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} x_1'^{(1)} & \dots & x_1'^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'^{(1)} & \dots & x_n'^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}x_1^{(1)} + \ldots + p_{1n}x_n^{(1)} & \dots & p_{11}x_1^{(n)} + \ldots + p_{1n}x_n^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}x_1^{(1)} + \ldots + p_{nn}x_n^{(1)} & \dots & p_{n1}x_1^{(n)} + \ldots + p_{nn}x_n^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Psi' = \mathbf{P}(t)\Psi. \tag{111}$$

Exemplo 1. *Considerando o sistema*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{112}$$

e suas soluções

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

temos que a matriz fundamental para o referido sistema será

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Um caso particular da matriz fundamental é a chamada **matriz principal**, cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ dados pelo Teorema 7 e que será representada por Φ. Além do sistema (38), esse vetores satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)},$$

onde $\mathbf{e}^{(j)}$ e um vetor unitário, com a j-ésima posição igual a 1 e com todas as outras componentes nulas. Logo, $\Phi(t)$ tem a propriedade

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \tag{113}$$

Observando a matriz (113), é trivial que a $\Phi^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$. Logo, segue da equação (109), que

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}^0. \tag{114}$$

Quando um fenômeno físico for começar em vários estados iniciais diferentes isso corresponderá a um sistema de equações diferenciais que deverá ser resolvido repetidamente sujeito a condições iniciais diferentes. Nessa situação depois de ter determinado a matriz Φ é possível encontrar as soluções para cada conjunto de condições iniciais a partir da equação (114). [1]

Sendo assim, vamos encontrar a matriz principal que satisfaça $\Phi(0) = \mathbf{I}$, utilizando a partir da matriz fundamental

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Encontraremos os valores de $\mathbf{c}$, utilizando a equação (107). Isto é,

$$\Psi(0)\mathbf{c} = \mathbf{I}$$

Isso implica em duas condições,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = -\frac{1}{2}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 3c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

Por, (109)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^t & -\frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^t & -\frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Note que, com a matriz principal encontrada anteriormente é possível resolver o seguinte P.V.I

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De (107) é possível definir novamente o vetor $\mathbf{c}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 3c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{7}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = -\frac{3}{2}$$

Assim a solução do referido P.V.I é

$$\mathbf{x}(t) = \ \tfrac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \ - \ \tfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3.3.1 GENERALIZANDO AS SOLUÇÕES E O P.V.I

Após conhecermos o processo que obtém as soluções do sistema homogêneo (46) utilizando autovalores e autovetores buscaremos a forma genérica de sua representação.

Dessa forma, a partir dos conceitos relativos à matriz fundamental e da série (9) da seção 2.3, definiremos o exponencial de uma matriz. Como foi mostrado no início da seção 3.2, um sistema unidimensional recai em uma E.D.O de primeira ordem a qual sabemos que e da forma

$$\begin{cases} x'(t) = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{121}$$

onde a é constante. Sua solução será

$$x = x_0 e^{at}. \tag{122}$$

Agora, buscaremos representar genericamente a solução de um sistema. Para isso, consideremos o P.V.I referente ao sistema de ordem n abaixo,

$$\begin{cases} \mathbf{x}' & = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x} & = \mathbf{x}^0 \end{cases} \tag{123}$$

com $\mathbf{A}_{n\times n}$ uma matriz constante.

Observe que a solução de (123) pode ser escrita na forma $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}^0$, onde $\Phi(0) = \mathbf{I}$ e como o formato do P.V.I da E.D.O (121) é análogo ao P.V.I do sistema (123), então estenderemos o formato da solução (122) para a solução do sistema (123).

Para analisarmos a possibilidade de estender o formato da solução partiremos do fato que a função exponencial escalar e^{at} também é representada pela série de potências

$$e^{at} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}, \tag{124}$$

que converge para todo t. Substituindo o escalar a pela matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ na série (124), vemos que

$$\mathbf{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}+\cdots. \tag{125}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Note que, cada termo da série (125) é uma matriz $n\times n$. Onde cada elemento dessa soma de matrizes converge para todo t quando $n\to\infty$. (ver [4], pag.64-66.) Então, a soma da série (125) define uma nova matriz de ordem n, que é denotada por $e^{\mathbf{A}t}$, isto é,

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}. \tag{126}$$

De (1), ao diferenciarmos cada termo da série (126), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[e^{\mathbf{A}t}] &= \mathbf{I}'+(\mathbf{A}t)'+\left(\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}\right)'+\left(\frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!}\right)'+\cdots+\left(\frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}\right)'+\cdots\\
&= \mathbf{0}+(\mathbf{A})+\left(\frac{2\mathbf{A}^2t}{1.2}\right)+\left(\frac{3\mathbf{A}^3t^2}{1.2.3}\right)+\cdots+\left(\frac{n\mathbf{A}^n t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1).n}\right)+\cdots\\
&= \mathbf{A}\left[\mathbf{I}+(\mathbf{A}t)+\left(\frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!}\right)+\left(\frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}\right)+\cdots\right]\\
&= \mathbf{A}\left[\mathbf{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}\right]\\
&= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.
\end{aligned}$$

Portanto, $e^{\mathbf{A}t}$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}[e^{\mathbf{A}t}]=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}.$$

Além disso, tomando $t=0$, $e^{\mathbf{A}t}$ resulta em

$$e^{\mathbf{A}t}|_{t=0}=\mathbf{I}.$$

Por outro lado, a matriz principal Φ satisfaz o mesmo P.V.I que a $e^{\mathbf{A}t}$, isto é,

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi'=\mathbf{A}\Phi\\ \Phi(0)=\mathbf{I}\end{array}\right..$$

Do Teorema 2, referente à unicidade de solução, concluímos que

$$e^{\mathbf{A}t}=\Phi.$$

Logo, a solução do P.V.I (123) pode ser escrita da forma

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}^0,$$

que é análoga à solução (122) do P.V.I (121).

Concluímos assim, que o formato da solução de um P.V.I de um sistema em $\mathbb{R}^n$ mantém-se semelhante ao formato da solução de uma E.D.O em $\mathbb{R}$. Isto é, a dimensão finita a qual o P.V.I está definido não influencia no fato de que ele pode ser resolvido de forma geral por uma exponencial da matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ dos coeficientes.

3.4 SISTEMAS LINEARES NÃO HOMOGÊNEOS

Até o momento obtivemos as soluções para os sistemas homogêneos com coeficientes contantes. Agora obteremos as soluções de sistemas não homogêneo.

Dado o sistema não homogenêneo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t), \tag{128}$$

onde $\mathbf{P}(t), \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ são contínuas para todo $t \in I$ e cujo sistema homogêneo associado é

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}. \tag{129}$$

Note que, sendo $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ duas soluções do sistema não homogêneo (128) e considerando

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{X}_1) &= \mathbf{X}_1'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{X}_1) &= \mathbf{g}(t) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{X}_2) &= \mathbf{X}_2'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{X}_2) &= \mathbf{g}(t). \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda da primeira, temos

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_1)(t) - \mathbf{H}(\mathbf{X}_2)(t) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t) = \mathbf{0}. \tag{130}$$

Por outro lado,

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_1)(t) - \mathbf{H}(\mathbf{X}_2)(t) = \mathbf{H}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)(t) \tag{131}$$

De (130) e (131), segue que

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)(t) = \mathbf{0}. \tag{132}$$

Portanto $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ é solução do sistema (129) e além disso, pode ser expresso como combinação linear das soluções de um conjunto fundamental, visto que, todas as soluções do sistema (129) podem ser expressas dessa maneira segundo o Teorema 5. Ou seja,

$$\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t). \tag{133}$$

Considerando $\mathbf{X}_1 = \Phi(t)$ como solução geral do sistema (128) e $\mathbf{X}_2 = \mathbf{y}_p(t)$ uma solução particular do referido sistema, obtemos de (133)

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \mathbf{y}_p(t) &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) && (134)\\ \Phi(t) &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{y}_p(t). && (135) \end{aligned}$$

Note que, $\mathbf{y}_h(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ é a solução geral do sistema (129), assim

$$\Phi(t) = \mathbf{y}_h(t) + \mathbf{y}_p(t).$$

A partir do conhecimento do formato da solução geral (135) do sistema não homogêneo (128), a seção seguinte procura o método para obter a solução particular $\mathbf{y}_p(t)$.

3.4.1 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

Nesta seção discutiremos um método para obtenção solução para sistemas de E.D.O não homogêneos.

Dada $\Psi(t)$ a matriz fundamental para o sistema homogêneo associado (129) utilizaremos o método de variação de parâmetros para construir uma solução particular $\mathbf{y}_p(t)$, e assim, a solução geral do sistema (128).

Dessa forma, considere $\Psi(t)\mathbf{c}$ a solução geral do sistema homogêneo (129), buscaremos uma solução do sistema linear não homogêneo (128) substituindo-se o vetor $\mathbf{c}$ por uma função vetorial $\mathbf{u}(t)$.

Suponha que a solução de (128) é da forma

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t), \tag{137}$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é um vetor a ser determinado. Substituindo (137) em (128), obtemos

$$\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t). \tag{138}$$

De (111) $\Psi'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)$, logo a equação (138) fica reduzida a

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t).$$

Note que, existe $\Psi^{-1}(t)$, pois $\Psi(t)$ é invertível em qualquer intervalo onde $\mathbf{P}(t)$ é contínua. Assim, temos

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(t)\Psi(t)\mathbf{u}'(t) &= \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t) && (139) \\ \mathbf{u}'(t) &= \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t) && (140) \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{u}(t)$ é qualquer vetor que satisfaz a equação (140), a menos de um vetor constante $\mathbf{c}$, $\mathbf{u}(t)$, ou seja,

$$\mathbf{u}(t) = \int \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t)dt + \mathbf{c} \tag{142}$$

onde a constante $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é arbitrária. Substituindo (142) em (137) temos que a solução geral do sistema (128) poderá ser definida como

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\int \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t)dt + \Psi(t)\mathbf{c}. \tag{143}$$

Dessa forma, é possível encontrarmos a solução de um P.V.I, para isso considere a condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \tag{144}$$

Escolhendo convenientemente o limite inferior na integração da equação (143) como o ponto inicial t_0, encontramos a solução do P.V.I constituído pelo sistema (128) e o dado inicial (144). Assim a solução geral (143) é reescrita da forma

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds, \tag{145}$$

Note que, com $t = t_0$ o termo da integral na equação (145) é zero, logo, a condição inicial (144) também será satisfeita se escolhermos

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0. \tag{146}$$

Portanto,

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)ds, \tag{147}$$

é a solução do P.V.I para todo $t \in I$.

Exemplo 1. *Utilizando o método de variação dos parâmetros encontraremos a solução geral* *do sistema*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} \quad + \quad \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \quad = \quad \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{g}(t). \tag{148}$$

cuja matriz fundamental é representada por

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{149}$$

Como a solução de (148) é dada por $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$*, com* $\mathbf{u}(t)$ *satisfazendo* $\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$*, isto é,*

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}. \tag{150}$$

Resolvendo (150), obtemos

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \frac{3}{2} - \frac{t}{2}e^{-t} \\ u_2'(t) &= \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{3}{2}t + \frac{t}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} + c_1, \\ u_2(t) &= \frac{t}{2}e^t - \frac{1}{2}e^t - \frac{t}{4}e^{2t} + c_2, \end{aligned}$$

concluímos assim, que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Psi(t)\mathbf{u}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^t - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja, encontramos a solução geral de (148).

4 ESTABILIDADE DE SISTEMAS

Nessa seção descreveremos sobre o comportamento de soluções, para isso faremos um estudo das trajetórias de suas curvas em sua vizinhança. E exemplificaremos analisando qualitativamente exemplos de sistemas lineares homogêneos.

Para se obter uma compreensão qualitativa do comportamento das soluções calculamos o campo de direções dessas soluções, que pode ser construído calculando-se as funções **f** (aqui representando as $\mathbf{f}_i$ de um sistema de E.D.O) em cada ponto de uma malha retangular e desenhando um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função **f** naquele ponto. O plano x_1x_2 é chamado de **plano de fase** e para termos uma ideia do comportamento global da totalidade das soluções do sistema com diferentes condições iniciais esboçamos uma amostra representativa de curvas-soluções, ou trajetórias, para um sistema dado. O plano de fase pode ser chamado de **retrato de fase**.

Consideremos no caso 2×2 um sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = & F(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} & = & G(x_1, x_2) \end{cases} \tag{154}$$

onde $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são contínuas com derivadas parciais contínuas em algum domínio D do plano x_1x_2. Se x_1^0, x_2^0 é um ponto desse domínio então pelo Teorema (2) existe uma única solução $x_1 = \phi(t), x_2 = \psi(t)$ do sistema (154) que satisfaz as condições iniciais

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0. \tag{155}$$

Faremos agora a distinção entre dois tipos de sistemas pois, a análise qualitativa que realizaremos, a partir de agora, é útil apenas para os sistemas do tipo **autônomo**, que são quando as funções F, G não dependem da variável independente t, mas apenas das variáveis dependentes x_1 e x_2. Por outro lado, se um ou mais elementos da matriz dos coeficientes forem uma função da variável independente t, o sistema é dito **não autônomo**.

Escrevendo o sistema autônomo (154) da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{156}$$

Vemos que um exemplo deste sistema é

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{157}$$

onde $\mathbf{A}_{2\times 2}$ é uma matriz constante. O sistema autônomo (154) tem um campo de direções associado que é independente do tempo. Consequentemente, há uma trajetória passando pelo ponto (x_1^0, x_2^0) no plano de fase. Isto é, todas as soluções que satisfazem uma condição inicial da forma (155) percorrem a mesma trajetória independente do instante t_0 no qual elas estão em (x_1^0, x_2^0).

Os pontos, se existirem, onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ são chamados de **pontos críticos** do sistema autônomo (156). Analogamente, para o sistema (157) os pontos onde $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondem a soluções de equilíbrio (constantes) e também são chamados de pontos críticos.

Definição 1. *Um ponto de crítico $\mathbf{x}^0$ do sistema autônomo (156) é* ***estável*** *se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para toda solução $\mathbf{x}(t) = \phi(t)$ do sistema (154), que satisfaz em $t = 0$,*

$$||\phi(0) - \mathbf{x}^0|| < \delta,$$

existe para todo t positivo e satisfaz

$$||\phi(t) - \mathbf{x}^0|| < \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Um ponto crítico que não é estável, chama-se instável.

Em outras palavras, um ponto crítico $\mathbf{x}^0$ do sistema (156) é dito **estável** se, todas as soluções que comecem "suficientemente próximas" (a uma distância menor do que δ) de $\mathbf{x}^0$ permanecem "próximas" (a uma distância menor que ε) de $\mathbf{x}^0$, para todo $t \geq 0$. Caso contrário, o ponto crítico é dito **instável**, como o ilustrado na figura 3.

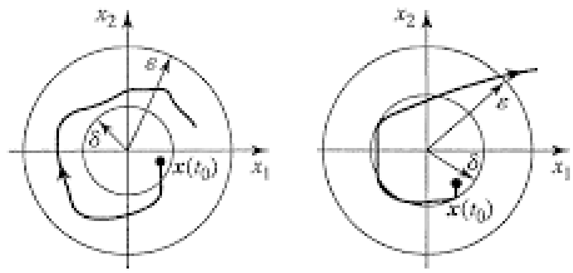

Figura 3: Ponto crítico estável e ponto crítico instável

Definição 2. *Um ponto crítico* $\mathbf{x}^0$ *é* ***assintoticamente estável*** *se ele é estável e se existir* δ_0 *com* $0 < \delta_0 < \delta$*, tal que, se uma solução* $\mathbf{x}(t) = \phi(t)$ *satisfaz*

$$||\phi(0) - \mathbf{x}^0|| < \delta_0,$$

então

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0.$$

Isto é, um ponto crítico $\mathbf{x}^0$ do sistema (156) é dito **assintoticamente estável** se, as trajetórias que começam ”suficientemente próximas” de $\mathbf{x}^0$ não apenas permanecem ”próximas”, mas têm que acabar tendendo a $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$. Que pode ser visto na figura 4

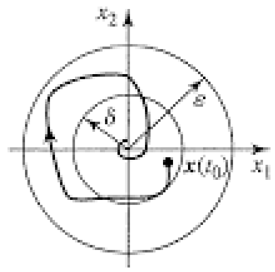

Figura 4: Ponto crítico assintoticamente estável

Para analisar o sistema (157) supomos que $det(\mathbf{A}) \neq 0$, logo o único ponto crítico do desse sistema é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Assim, caracterizaremos o sistema de acordo com o padrão geométrico formado pelas trajetórias de suas soluções. Esses casos são classificados de acordo com a natureza dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

CASO 1. Autovalores reais distintos não nulos com sinais iguais

Considere a solução geral do sistema (157) no caso 2×2 como

$$\mathbf{x}(t) = c_1\xi^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{\lambda_2 t}, \quad \text{com} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{158}$$

1. *Sinais negativos*: O ponto crítico de um campo linear é dito **nó atrator**, ou **poço**, ou **nó estável** quando para o caso em que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ independentemente da condição inicial (não-nula), quando

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x(t)} = \lim_{t\to\infty} c_1\xi^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{\lambda_2 t} = (0,0)$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} \mathbf{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} c_1\xi^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{\lambda_2 t} = \infty$$

isto é, todas as órbitas das soluções vêm desde o infinito até a origem. Suponha que $\xi^{(1)},\xi^{(2)}$ são como o ilustrado na Figura 5 e reescrevendo a solução geral como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_2 t}[c_1\xi^{(1)}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\xi^{(2)}],$$

note que, quando $c_2 \neq 0$ o termo $c_1\xi^{(1)}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$ é desprezível comparado com $c_2\xi^{(2)}$ para t suficientemente grande, já que $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$. Com exceção das soluções que começam exatamente na reta na direção de $\xi^{(1)}$, todas as soluções tenderão ao ponto crítico tangente à reta na direção $\xi^{(2)}$. Se porém, analisarmos quando o t for suficientemente pequeno e $c_1 \neq 0$, observamos que o termo que envolve $\xi^{\lambda_1 t}$ será o dominante da solução.

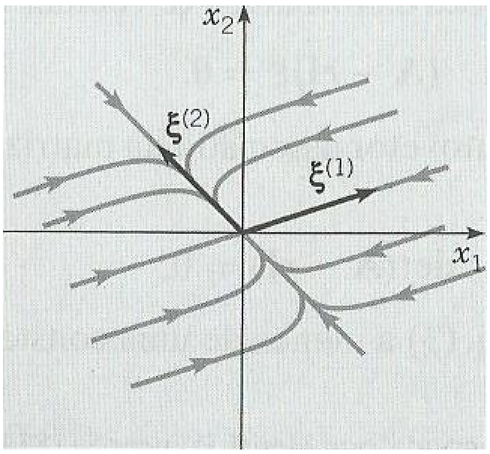

Figura 5: Nó atrator

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2013)

Observando o sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde seus autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$. Podemos perceber o comportamento citado anteriormente em seu campo de direções[1] a seguir,

[1]Os gráficos de campo de direções que ilustram os próximos exemplos forma implementados no Maple 13.

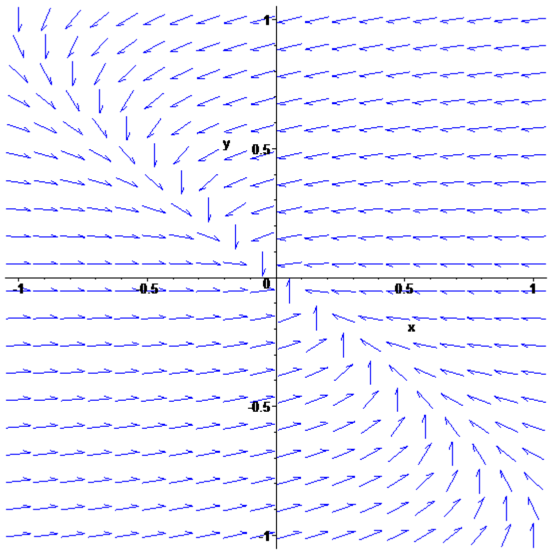

Figura 6: Campo de direções de um nó atrator

Fonte: (Maple 13)

Logo o ponto crítico $(0,0)$ é um nó atrator que é assintoticamente estável.

2. *Sinais positivos*: O ponto crítico é de um campo linear é chamado **nó repulsor**, ou **fonte**, ou **nó instável** quando para o caso em que $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ independentemente da condição inicial (não-nula), a solução comporta-se de maneira análoga a descrição do caso (1) trocando apenas t por $-t$ e, isto é, o sentido do movimento é se afastando do ponto crítico na origem.

Exemplo 1. *O sistema*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$. Tem o ponto crítico $(0,0)$ instável e é chamado de nó repulsor. Analogamente a situação anterior porém, com o sentido oposto seu campo de direções será

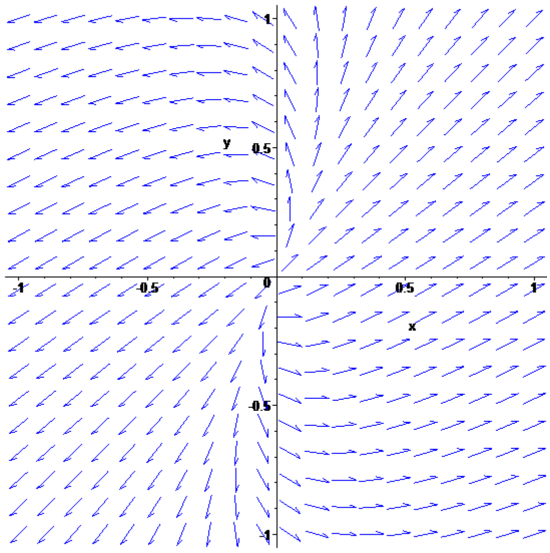

Figura 7: Campo de direções de um nó repulsor

Fonte: (Maple 13)

CASO 1.1 Autovalores Nulos Suponha que $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são como os ilustrado na figura 5 e

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_2 t}[c_1\xi^{(1)}e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\xi^{(2)}],$$

onde $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$. Note que, quando $c_2 \neq 0$ o termo $c_1\xi^{(1)}e^{(0-\lambda_2)t}$ é desprezível comparado com $c_2\xi^{(2)}$ para t suficientemente grande, já que $-\lambda_2 < 0$. Todas as soluções se afastarão da reta na direção $\xi^{(2)}$. Se porém, analisarmos quando o t for suficientemente pequeno e $c_1 \neq 0$, observamos que o termo que envolve $\xi^{\lambda_1 t}$ será o dominante da solução. Ou seja, se o sistema tem um autovalor nulo, então existe uma reta de pontos de equilíbrio.

Exemplo 2. *O sistema*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. Observe que todas as soluções são retas. E que as soluções (paralelos ao autovetor associado a λ_2) se afastam de cada ponto de equilíbrio..

Para o caso em que o autovalor não nulo for negativo as soluções (paralelas ao autovetor associado a λ_2) irão para cada ponto de equilíbrio.

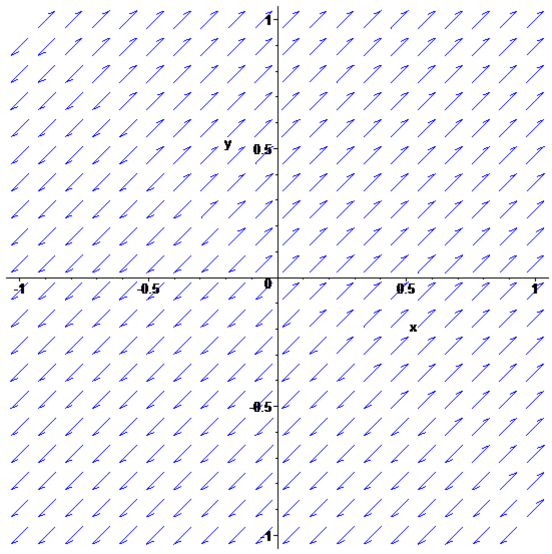

Figura 8: Campo de direções com autovalor nulo

Fonte: (Maple 13)

CASO 2. Autovalores reais distintos não nulos com sinais diferentes

Seja $x(t)$ a solução de (157) da forma (158), suponha que $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ e os autovetores $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ são como o mostrado na Figura 9. Quando a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de $\xi^{(1)}$, $c_2 = 0$. Logo para todo t a solução permanecerá nessa reta e, como $\lambda_1 > 0$, $x(t) \to \pm\infty$ quanto $t \to \infty$. Já se a solução começa em um ponto inicial pertencente à reta na direção de $\xi^{(2)}$, a situação é semelhante, porém $x(t) \to 0$ com $t \to \infty$, visto que $\lambda_2 < 0$. As soluções que começam em outros pontos iniciais tem um comportamento que combina com as retas determinadas pelos autovetores, numa espécie de compensação , em que uma coordenada tende a $\pm\infty$ enquanto a outra tende a 0. Em geral, a curva descrita pela solução parece uma hipérbole e o ponto crítico é chamado de **ponto de sela**.

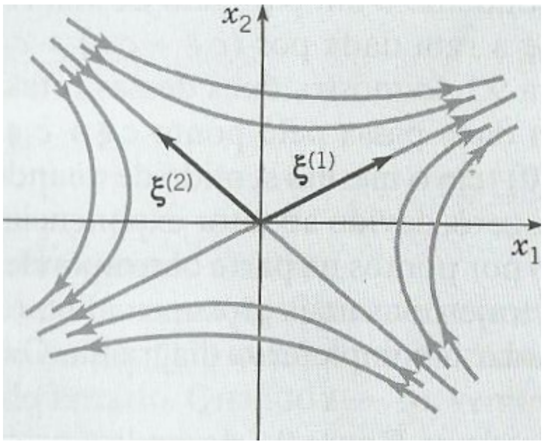

Figura 9: Ponto de sela

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2013)

Exemplo 3. *Note que, o sistema*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

possui autovalores $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = -1$ *e como seus sinais são opostos o ponto crítico* $(0,0)$ *é um ponto de sela que é instável, como mostra a Figura 10.*

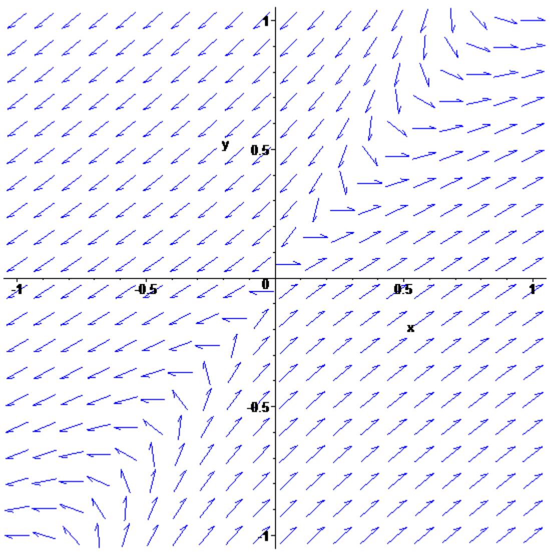

Figura 10: Ponto de sela

Fonte: (Maple 13)

CASO 3. Autovalores Iguais

Supondo que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ há dois subcasos, que depende se o autovalor tem um ou dois autovetores independentes. Consideraremos os autovalores negativos, pois se forem positivos as trajetórias são análogas, porém o movimento é em sentido contrário.

1. *Dois autovetores linearmente independentes:* A solução geral do sistema (157) continua da forma (158), onde $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ são independentes. Mesmo que a razão $\frac{x_1}{x_2}$ seja independente de t, ela ainda depende de $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ e das constantes arbitrárias c_1, c_2. Assim, qualquer trajetória está contida em retas que contém a origem (veja na Figura 11). Nesse caso, o ponto crítico é dito **nó próprio** ou **ponto estrela**.

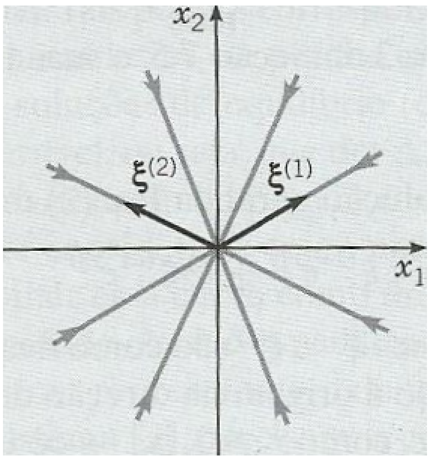

Figura 11: Ponto estrela
Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2013)

O sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

possui apenas um autovalor $\lambda = -1$ porém, ele possui dois autovetores linearmente independentes, por isso o ponto crítico $(0,0)$ é chamado de nó próprio e é assintoticamente estável, como mostra a Figura 12.

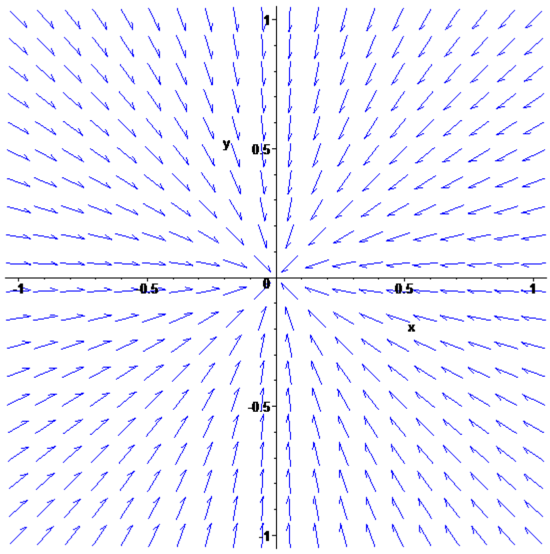

Figura 12: Ponto de estrela

Fonte: (Maple 13)

2. *Um autovetor linearmente independente:* Agora a solução do sistema (157) é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\xi e^{\lambda t} + c_2(\xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t}), \tag{159}$$

onde ξ é o autovetor e η é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Com $t \to \infty$ o termo dominante da solução (159) é $c_2\xi e^{\lambda t}$, em consequência disso, quando $t \to \infty$ todas as trajetórias tendem à origem e são tangentes à reta na direção do autovetor. O que acontece inclusive quando $c_2 = 0$, visto que, nesse caso, a solução $\mathbf{x}(t) = c_1\xi e^{\lambda t}$ pertence a reta. De maneira análoga, quando $t \to -\infty$ o termo $c_2\xi e^{\lambda t}$ permanece sendo dominante, já que cada trajetória é assintótica a uma reta paralela a ξ.

As posições relativas de ξ e η definem a orientação das trajetórias. E para localizá-las reescreveremos a solução (159) na forma

$$\mathbf{x}(t) = [(c_1\xi + c_2\eta) + c_2\xi t]e^{\lambda t} = \mathbf{y}e^{\lambda t}, \tag{160}$$

onde $\mathbf{y} = \mathbf{x}(t) = [(c_1\xi + c_2\eta) + c_2\xi t]$. Dessa forma, a quantidade escalar $e^{\lambda t}$ afeta apenas o tamanho de $\mathbf{x}$, enquanto $\mathbf{y}$ determina a direção e o sentido de $\mathbf{x}$. O que podemos observar na figura a seguir de uma possível situação.

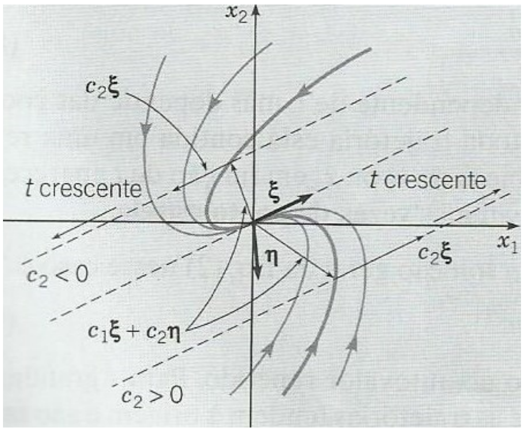

Figura 13: Nó impróprio

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2013)

O sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

possui apenas um autovalor $\lambda = -3$ porém, diferentemente, do exemplo anterior ele gera apenas um autovetor independente, por isso o ponto crítico $(0,0)$ é chamado de nó impróprio e é assintoticamente estável, como mostra a Figura 14.

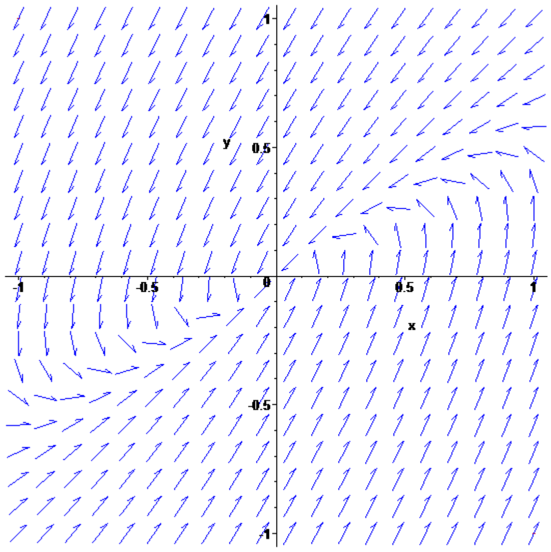

Figura 14: Nó impróprio

Fonte: (Maple 13)

Note que, nos casos dos nós próprios ou impróprios o que definirá se eles serão assintoticamente estável ou instável será o fato de seus autovalores serem negativos ou positivos, respectivamente.

CASO 4. Autovalores Complexos

Suponha que os autovalores são $\alpha \pm i\beta$, onde $\alpha \neq 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Os sistemas com esses autovalores é da forma, a menos de uma mudança de base,

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{161}$$

ou, em forma escalar,

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2, \qquad x_2' = -\beta x_1 + \alpha x_2. \tag{162}$$

Vamos utilizar as coordenadas polares ρ e θ dadas por

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2, \qquad \tan\theta = \frac{x_2}{x_1}. \tag{163}$$

Ao diferenciarmos (163), obtemos

$$\rho\rho' = x_1 x_1' + x_2 x_2', \tag{164}$$

$$(\sec^2\theta)\theta = \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{x_1^2}. \tag{165}$$

Substituindo as equações (162) em (164), temos que

$$\rho' = \alpha\rho,$$

logo,

$$\rho = ce^{\alpha t}, \tag{167}$$

onde c é uma constante. Agora, substituindo as equações (162) em (165) e usando o fato de que $\sec^2\theta = \frac{\rho^2}{x_1^2}$, obtemos

$$\theta' = -\beta,$$

e, portanto

$$\theta = -\beta t + \theta_0, \tag{168}$$

onde θ_0 é o valor de θ quando $t = 0$.

Note que as equações (167) e (168) são equações paramétricas em coordenadas polares das trajetórias do sistema (161). Segue da equação (168) que θ diminui quando t aumenta, pois $\beta > 0$, assim sendo, a sentido da trajetória é no sentido horário. De (167) vemos que quando $t \to \infty$ então $\rho \to 0$ se $\alpha < 0$ e que $\rho \to \infty$ se $\alpha > 0$. Como mostra as figuras (15) e (16) as trajetórias são espirais que se afastam ou tendem a origem dependendo do sinal de α.

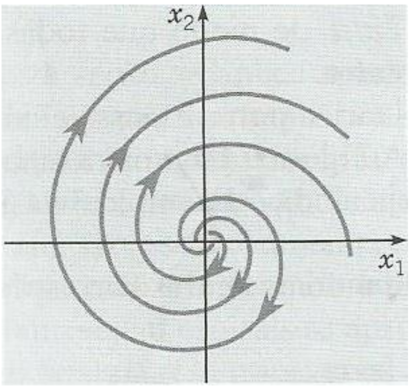

Figura 15: Fonte Espiral

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2013)

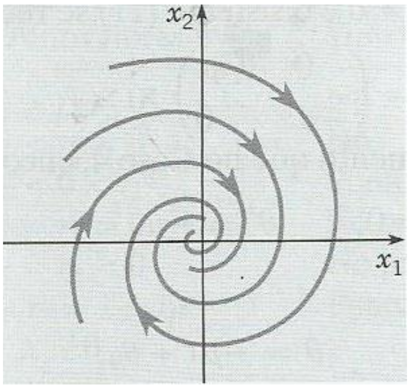

Figura 16: Sorvedouro Espiral

Fonte: (BOYCE; DIPRIMA, 2013)

Nesse caso, os pontos críticos são ditos **pontos espirais**. Os termos utilizados para se referir a pontos espirais cujas trajetórias se afastam ou se aproximam do ponto crítico são, respectivamente, **fonte espiral** e **sorvedouro espiral**.

Para exemplificar utilizaremos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = -1+2i$ e $\lambda_2 = -1-2i$, logo o ponto crítico $(0,0)$ é chamado é um sorvedouro espiral que é assintoticamente estável, como pode ser visto a Figura 17.

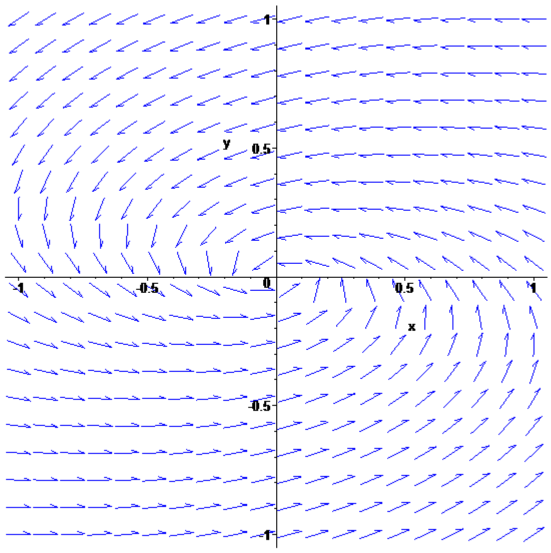

Figura 17: Sorvedouro espiral

Fonte: (Maple 13)

CASO 5. Autovalores Imaginários Puros

No caso em que $\alpha = 0$, os autovalores são $\pm i\beta$ e o sistema (161) fica da forma

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

E analogamente ao Caso 4, obtemos

$$\rho' = 0, \qquad \theta' = -\beta$$

e, portanto,

$$\rho = c, \qquad \theta = -\beta t + \theta_0,$$

onde c e θ_0 são constantes. O ponto crítico é chamado de **centro**. Verificaremos agora, que quando os autovalores são imaginários puros suas trajetórias são elipses[2] centradas na origem.

Dado o sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{169}$$

Proposição 1. *Os autovalores da matriz de coeficientes do sistema (169) são imaginários puros se, e somente se,*

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= 0, & (170) \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &> 0. & (171) \end{aligned}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Vamos mostrar que se os autovalores são imaginários puros então o $Tr = 0$ e o $\det > 0$. Suponha que os autovalores de (169) sejam da forma

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \text{onde} \quad \alpha = 0. \tag{173}$$

Note que, o polinômio característico é dado por $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Logo

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \pm \frac{\sqrt{[-(a_{11} + a_{22})]^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} & (174) \\ &= \frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{-(a_{11} + a_{22})^2 + 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} & (175) \end{aligned}$$

é raiz de $P_A(\lambda)$.

[2]No caso em que a excentricidade for 0 a elipse torna-se uma circunferência.

De (173) e (174), obtemos

$$\alpha = \frac{(a_{11}+a_{22})}{2} = 0 \Rightarrow (a_{11}+a_{22}) = 0$$

e também,

$$\begin{aligned} i\beta &= \frac{\sqrt{-1}\sqrt{-(a_{11}+a_{22})^2+4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}}{2} \\ \beta &= \frac{\sqrt{-(a_{11}+a_{22})^2+4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}}{2}, \end{aligned}$$

por outro lado, como $\beta \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} -(a_{11}+a_{22})^2+4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) &> 0 \\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} > \frac{(a_{11}+a_{22})^2}{4} &> 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} > 0$$

($\Leftarrow$) Supondo que $a_{11}+a_{22}=0$ e $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$.
Note que, se λ é autovalor, então

$$0 = \lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Como $a_{11}+a_{22}=0$, temos

$$0 = \lambda^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

isto é,

$$\lambda^2 = -(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}).$$

Portanto,

$$\lambda = \pm i\sqrt{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}$$

e assim, λ é imaginário puro. Portanto, para que os autovalores sejam imaginários puros é necessário e suficiente que $a_{11}+a_{22}=0$ e $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$.

Podemos encontrar as trajetórias do sistema (169) convertendo-se as equações desse sistema em uma única equação.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1+a_{22}x_2}{a_{11}x_1+a_{12}x_2} \tag{179}$$

reescrevendo (179) temos

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + (-a_{11}x_1 - a_{12}x_2)x_2' = 0.$$

Seja $M(x_1,x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ e $N(x_1,x_2) = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2$. Note que,

$$\frac{dM}{dx_2}(x_1,x_2) = a_{22} \quad \text{e} \quad \frac{dN}{dx_1}(x_1,x_2) = -a_{11}.$$

como $a_{11} + a_{22} = 0$ então $a_{22} = -a_{11}$. Portanto (179) é exata.

Integrando $M(x_1,x_2)$ em relação a x_1 temos

$$\int a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \, dx_1 = \frac{a_{21}x_1^2}{2} + a_{22}x_1x_2 + h(x_2) = f(x_1,x_2).$$

Tomando $\frac{df}{dx_2}(x_1,x_2) = N(x_1,x_2)$, obtemos

$$\frac{df}{dx_2}(x_1,x_2) = a_{22}x_1 + h'(x_2) = -a_{11} - a_{12}x_2 \quad \Rightarrow \quad h'(x_2) = -a_{12}x_2.$$

logo, $h(x_2) = -\frac{a_{12}x_2^2}{2}$ e

$$f(x_1,x_2) = a_{21}x_1^2 + 2a_{22}x_1x_2 - a_{12}x_2^2,$$

portanto, a integral de (179) é

$$a_{21}x_1^2 + 2a_{22}x_1x_2 - a_{12}x_2^2 = k \tag{180}$$

onde k é uma constante.

Note que, (180) é a equação da elipse na forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

onde $A = a_{21}$, $B = 2a_{22}$, $C = -a_{12}$ e $F = -k$. A qual é válida a relação $B^2 < 4AC$.

Com efeito, de (171), temos que $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0$, logo

$$a_{11}a_{22} > a_{21}a_{12} \tag{181}$$

$$-4a_{11}a_{22} < -4a_{21}a_{12} \tag{182}$$

e de (170) que $a_{22} = -a_{11}$, logo(182) pode ser reescrita como

$$4a_{22}^2 < -4a_{21}a_{12}$$

$$(2a_{22})^2 < 4a_{21}(-a_{12}).$$

Portanto, as trajetórias são elipses quando os autovalores são imaginários puros.

Para finalizar ilustramos o que foi mostrado algebricamente com o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde os autovalores são $\lambda_1 = 3i$ e $\lambda_2 = -3i$, o que faz com que o o ponto crítico $(0,0)$ seja um centro que é estável, como pode ser visto a Figura 18.

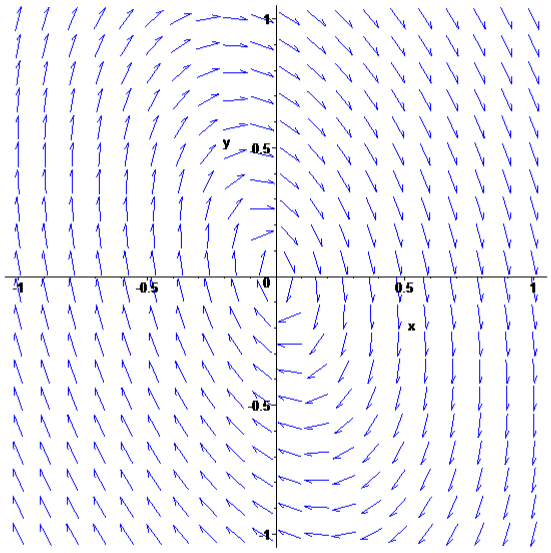

Figura 18: Centro

Fonte: (Maple 13)

Dessa forma, segue um resumo dos conceitos de estabilidade assintótica, estabilidade e instabilidade da solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (157) na tabela (1).

Tabela 1: Propriedades de Estabilidade de Sistemas Lineares $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$

AUTOVALORES	TIPOS DE PONTO CRÍTICO	ESTABILIDADE
Autovalores reais distintos		
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó repulsor ou fonte	Instável
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó atrator ou sorvedouro ou poço	Assintoticamente estável
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Ponto de Sela	Instável
$\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$	Nó repulsor	Instável
$\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$	Nó	Estável
Autovalores reais iguais		
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$		
2 A.L.I	Nó próprio ou ponto estrela	Instável
1 A.L.I	Nó impróprio ou degenerado	Instável
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$		
2 A.L.I	Nó próprio ou ponto estrela	Assintoticamente estável
1 A.L.I	Nó impróprio ou degenerado	Assintoticamente estável
Autovalores Complexos		
$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$	Ponto espiral:	
$\alpha > 0$	Fonte espiral	Instável
$\alpha < 0$	Sorvedouro espiral	Assintoticamente estável
$\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$	Centro	Estável

Note que A.L.I significa autovetor linearmente independente.

Como descrevemos no inicio da seção (3.1) o movimento de um sistema massa-mola com amortecimento e sem força externa é descrito pela E.D.O de segunda ordem

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0, \tag{185}$$

onde m, γ, k são positivos e representam, respectivamente, a massa, a constante de amortecimento e a constate elástica da mola. Note que, tomando $x_1 = s$, $x_2 = s'$, temos que $x_1' = x_2$ e $x_2 = s''$, assim o sistema 2×2 relacionado a E.D.O (185) fica da forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{186}$$

Note que, como foi dito anteriormente $(0,0)$ é solução de equilíbrio para todo sistema da forma $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ e em particular, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, satisfaz o sistema (186), isto é,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, analisaremos a estrutura e a estabilidade do ponto crítico em função dos parâmetros

m, γ, k. Note que, o polinômio característico de (186) é

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0,$$

cujo discriminante é

$$\Delta = \frac{\gamma^2 - 4km}{m^2}.$$

Logo, teremos três opções $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.

1º Se $\Delta > 0$, então

$$\gamma^2 - 4km > 0 \Rightarrow \gamma^2 > 4km.$$

Nesse caso, note que

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$$
$$\lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}$$

onde pela análise de sinais $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Logo o ponto crítico é um nó atrator que é assintoticamente estável.

2º Se $\Delta < 0$, então

$$\gamma^2 - 4km < 0 \Rightarrow \gamma^2 < 4km,$$

e como $\alpha = -\frac{\gamma}{2m} < 0$ logo, o ponto crítico é um sorvedouro espiral que é assintoticamente estável.

Se o amortecimento for muito pequeno, a hipótese de que não há amortecimento pode dar resultados satisfatórios em intervalos de tempo pequeno ou moderados, porque não existir amortecimento é uma situação que dificilmente acontece na prática. Porém, nesse caso $\alpha = 0$, o que tornaria o ponto crítico um centro cujo comportamento é estável.

3º Se $\Delta = 0$, temos

$$\gamma^2 - 4km = 0 \Rightarrow \gamma^2 = 4km,$$

então $\lambda = -\frac{\gamma}{2m}$ e como esse autovalor só gera um autovetor linearmente independente o ponto crítico é um nó impróprio assintoticamente estável.

Portanto, concluímos que nessa situação não há possibilidade de instabilidade, isto é, as solução nunca se afastarão do ponto crítico quando $t \to \infty$.

5 CONCLUSÃO

Iniciamos este trabalho definindo sistemas de E.D.O e, através dos teoremas, apresentamos resultados que diz que dada uma condição inicial ela é única. Então, apresentamos os principais resultados que caracterizam as soluções de sistemas lineares. Dessa forma, utilizamos os autovalores e autovetores para obtermos as soluções para o referido sistema. Além disso, através dos resultados de matrizes fundamentais e exponencial de matriz concluímos que de forma mais geral a solução de um P.V.I pode ser obtida por um exponencial da matriz dos coeficientes do sistema de homogêneo, o que resulta em saber que independente da dimensão (finita) a solução de um P.V.I terá a mesma forma geral. E para finalizar mostramos como obter a solução de um sistema não homogêneo.

A parte onde é mostrado que é possível encontrar soluções reais a partir de soluções complexas; quando exibimos a forma geral da solução de um sistema não homogêneo e, também ao mostrarmos que as trajetórias próximas do ponto crítico de autovalores imaginários puros sempre são elipses foram desenvolvidas de maneira diferente do que entramos nos livros, de maneira a contribuir com a particularidade deste trabalho.

Esse estudo nos mostrou o quão importantes são os conteúdos aprendidos tanto no ensino básico como matriz, determinantes, sistemas de equações lineares, quanto os aprendidos na graduação como autovalores e autovetores, E.D.O. Mostrando que conteúdos que algebricamente ”parecem” ser abstratos, na verdade são utilizados na prática. Assim, consideramos que o objetivo desse trabalho de conhecer maneiras para exibir as soluções dos sistemas de E.D.O e estudar seu campo de direções foi alcançado.

Este trabalho pode resultar em possíveis desdobramentos como estudar estabilidade de forma mais abrangente, controlabilidade e em um nível mais avançado semigrupos.

REFERÊNCIAS

[1] BOYCE, William E; RICHARD, DiPrima C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[2] CODDINGTON, Earl A; CARLSON, Robert. **Linear Ordinary Differential Equations.** Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics – SIAM, 1997.

[3] COELHO, Flávio U; LOURENÇO, Mary L. **Um curso de Álgebra Linear.** 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

[4] DOERING, Claus I; LOPES, Artur O. **Equações diferenciais ordinárias.** 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[5] FIGUEIREDO, Djairo G; NEVES, Aloisio F. **Equações diferenciais Aplicadas.** 2. ed. 3 imp. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[6] LIMA, Elon L. **Análise Real: Funções de Uma Variável.** 11. ed. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[7] SIMMONS, George F; KRANTZ, Steven G. **Equações diferenciais: teoria, técnica e prática.** São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

[8] ZILL, Dennis G; CULLEN, Michel R. **Equações diferenciais.** 3. ed. v. 2. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

ANEXO A – COMANDOS DOS GRÁFICOS NO MAPLE 13

Seguem abaixo o comandos de um dos exemplos que foram utilizados para gerar os campos de direções dos exemplos no capitulo 4 e a explicação de como fazer os outros.

Para construir um gráfico das soluções de um sistema de E.D.O, utilizamos o comando DEplot do pacote DEtools cuja estrura é como no exemplo a seguir

with(DEtools): eq1 := diff(x(t),t)= x(t) +y(t):

eq2 := diff(y(t),t)= x(t)+y(t):

ini1:= x(0)= -1, y(0)= 1:

ini2:= x(0) = 1, y(0) = -1:

DEplot(eq1, eq2, [x(t), y(t)], t=-1..1, [[ini1], [ini2]], linecolor=red, stepsize=0.001, color=blue);

DEplot(equações, variáveis, domínio, condições iniciais, opções) especificamos as equações do sistema entre chaves, as variáveis (funções) dependentes, o domínio (variação de parâmetros), as condições iniciais na forma de lista ([[x(t0) = x0,y(t0) = y0],[x(t1) = x1,y(t1) = y1],···]), depois disso, vem as opções que controlam a apresentação do gráfico (color é a cor do campo de vetores, linecolor é a cor da solução, stepsize é o incremento do parâmetro).

Após fazer cada gráfico é aconselhável utilizar o comando restart para limpar a memória das variáveis anteriores.

O exemplo acima é referente ao sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

, que gera o gráfico

Para gerar os outros exemplos basta trocar os valores dos coeficientes no comando.

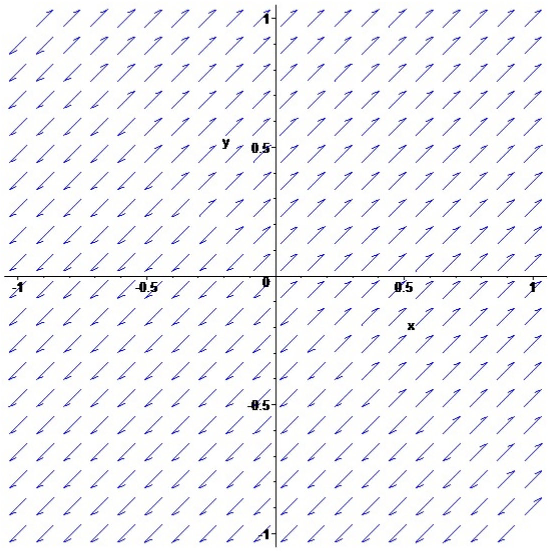

Figura 19: exemplo

Fonte: (Maple 13)