

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DA MATEMÁTICA

WHENDELLY LORENA LEITE ALVES

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES COM
APLICAÇÃO EM SISTEMAS TAKAGI- SUGENO FUZZY**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

WHENDELLY LORENA LEITE ALVES

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES COM
APLICAÇÃO EM SISTEMAS TAKAGI- SUGENO FUZZY**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento Acadêmico da Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Licenciado em Matemática.”

Orientador: Profa. Dra. Michele Cristina
Valentino

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Michele Cristina Valentino
(orientadora)

Profa. Dra. Glaucia Maria Bressan

Prof. Dr. Douglas Azevedo Sant'Anna

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

Aos meus pais: Pontos de equilíbrio, estáveis, por toda minha vida.

AGRADECIMENTOS

Pela graça incalculável e incondicional da qual sou presenteada todos os dias, agradeço ao criador da vida e dono do meu coração.

Pela dedicação e amor, sou grata a meus pais, Marcos Alves e Andréia Alves Leite Alves, instrumentos de Deus para guiar meu caminho com zelo e sabedoria.

Por todo auxílio, incentivo, pelas correções e carinho, sou grata a minha orientadora, Michele Cristina Valentino.

Pelo crescimento, ensinamentos e oportunidades sou grata a esta universidade.

Por me capacitarem a chegar onde me encontro agora e por compartilhar seus valiosos conhecimentos, pessoais e profissionais, sou grata a todos os meus mestres, desde a infância.

A minha avó Odila Pardim Leite e minha tia Celina Alves Leite, meus sinceros agradecimentos por todo amparo.

Por toda afabiliade e respeito, sou grata a Ricardo Garbelotti Barsotti.

"Na verdade poderíamos dizer que a quantidade de equações que possuem soluções explícitas é praticamente nula, se comparada àquelas que não têm soluções, por mais liberais que sejamos quanto às operações aceitáveis. A importância do estudo de tais equações está no que podemos aprender delas e na utilização que delas fazemos para analisar as demais" (BARROS; BASSANEZI, 2006).

RESUMO

ALVES, Whendelly Lorena Leite. ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES COM APLICAÇÃO EM SISTEMAS TAKAGI- SUGENO FUZZY. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico da Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

Neste trabalho são estudadas algumas teorias que permitem analisar o comportamento assintótico das soluções de sistemas não lineares, sem conhecê-las. Mais precisamente, foram apresentados o método direto de Lyapunov, o princípio de invariância de LaSalle e sua extensão. A eficiência desses resultados foi comprovada através de suas aplicações na análise da solução de alguns modelos biológicos. Ainda, foi feita uma aplicação para sistemas Takagui-Sugeno (T-S) fuzzy, a qual possibilita analisar o comportamento assintótico das soluções apenas verificando a factibilidade de algumas desigualdades matriciais lineares (LMIs), as quais são resolvidas com o auxílio do MATLAB.

Palavras-chave: Sistemas Não Lineares, Estabilidade no Sentido de Lyapunov, Princípio de Invariância, Extensão do Princípio de Invariância, Modelagem T-S Fuzzy, Sistemas Biológicos.

ABSTRACT

ALVES, Whendelly Lorena Leite. STABILITY ANALYSIS OF NONLINEAR SYSTEMS WITH APPLICATION IN SYSTEMS TAKAGI- SUGENO FUZZY. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico da Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

This study aims to analyze results of the asymptotic behavior of nonlinear systems solutions, without knowing them. Lyapunov's direct method and LaSalle's invariance principle, and its extensions, were showed. The efficiency of the results was proven by its use in the analysis of some biological models solutions. Still, an application was made to Takagui-Sugeno systems (T-S) fuzzy, which makes possible the analysis of the asymptotic behavior of the solution checking the feasibility of some linear matrix inequalities (LMI), easily solved using MATLAB.

Keywords: Nonlinear Systems, Stability in the Lyapunov Sense, Invariance Principle, Extension of the Invariance Principle, T-S Fuzzy Modeling, Biological Systems.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----------|--|----|
| FIGURA 1 | – Ponto de Equilíbrio Estável | 16 |
| FIGURA 2 | – Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável | 17 |
| FIGURA 3 | – Ponto de Equilíbrio Instável | 17 |
| FIGURA 4 | – Interpretação geométrica: Princípio de Invariância de LaSalle | 22 |
| FIGURA 5 | – Interpretação geométrica: Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle | 23 |
| FIGURA 6 | – Solução de (15) com condição inicial $S_0 = 0$ e $I_0 = 0.5$ | 28 |
| FIGURA 7 | – Função V pelo tempo t , com condição inicial $S_0 = 0$ e $I_0 = 0.5$ | 29 |
| FIGURA 8 | – Solução de (15) com condição inicial $S_0 = 5$ e $I_0 = -1$ | 29 |
| FIGURA 9 | – Solução de (15) com condição inicial $S_0 = 0.1$ e $I_0 = 1$ | 30 |
| FIGURA 10 | – Função V pelo tempo t , com condição inicial $S_0 = 0$ e $I_0 = 0.5$ | 31 |
| FIGURA 11 | – Solução do modelo (43) com condição inicial $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 1.5$ e parâmetro $r = 0.1$ | 32 |
| FIGURA 12 | – Diagrama Esquemático de Sistema de Inferência | 37 |
| FIGURA 13 | – Soluções do modelo SIS com as condições iniciais $y(0) = (0, -2) \in \Omega_\ell$ e $y(0) = (2, 1) \in \Omega_\ell$ | 42 |
| FIGURA 14 | – Função V sobre a solução do modelo SIS com condição inicial $y(0) =$ $(0, -2) \in \Omega_\ell$ | 42 |
| FIGURA 15 | – Função V sobre a solução do modelo SIS com condição inicial $y(0) =$ $(2, 1) \in \Omega_\ell$ | 43 |

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R} Conjunto dos números reais

\mathbb{R}^n Conjunto de todas as n -úplias ordenadas de números reais

\dot{y} Derivada de y em relação ao tempo t

$\frac{d^n y}{dt^n}$ Derivada de ordem n de y em relação a t

y^* Ponto de equilíbrio

$y(t_0)$ Condição inicial para o sistema não linear

V Função candidata de Lyapunov

$B[y^*, r]$ Bola centrada no ponto de equilíbrio e raio r

β Taxa de remoção da doença

Δ Taxa de recrutamento dos suscetíveis

α Taxa de infecção

ϕ População que morre devido à doença

μ Taxa de mortalidade por causas naturais

ϕ Taxa de mortalidade referente a doença

Ω_ℓ Conjunto de nível P da função V

$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ Derivadas parciais de f_i em relação a cada variável y_j

$N(t)$ O número total da população de indivíduos nos modelos epidemiológicos em cada instante de tempo

$R(t)$ O número total da população removida nos modelos epidemiológicos em cada instante de tempo

$S(t)$ O número total da população suscetível a doença nos modelos epidemiológicos em cada instante de tempo

$I(t)$ O número total da população infectada nos modelos epidemiológicos em cada instante de tempo

C^1 Classe das funções contínuas com derivadas de primeira ordem contínuas

$A(y^*)$ Área de atração do ponto de equilíbrio

ω -limite Conjunto omega-limite \mathbb{R} Conjunto dos números reais

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 10 |
| 1.1 | ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO | 12 |
| 2 | SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM E ESTABILIDADE | 13 |
| 2.1 | SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM | 13 |
| 2.2 | ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LYAPUNOV | 17 |
| 2.3 | PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA DE LASALLE | 20 |
| 2.4 | EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA DE LASALLE | 22 |
| 2.5 | ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE ALGUNS MODELOS BIOLÓGICOS | 23 |
| 2.5.1 | Análise de estabilidade do modelo SIS | 25 |
| 2.5.2 | Análise de estabilidade do modelo SIR | 28 |
| 2.5.3 | Análise do Comportamento assintótico de um modelo simples de propagação de doença | 31 |
| 3 | MODELAGEM E ESTABILIDADE DE SISTEMA TAKAGI-SUGENO FUZZY | 34 |
| 3.1 | FUNDAMENTOS FUZZY | 34 |
| 3.2 | MODELAGEM TAKAGI-SUGENO FUZZY (MÉTODO DE TANIGUCHI) | 38 |
| 3.3 | ESTABILIDADE DE SISTEMAS TAKAGI-SUGENO FUZZY | 39 |
| 3.4 | ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE MODELO MODELO SIS USANDO A MODELAGEM T-S FUZZY | 40 |
| 4 | CONCLUSÃO | 44 |
| | REFERÊNCIAS | 45 |
| | Anexo A – CÓDIGOS DO MATLAB | 47 |

1 INTRODUÇÃO

A teoria de equações diferenciais é objeto de estudo de muitos pesquisadores devido aos seus aspectos puramente matemáticos e suas inúmeras aplicações. Essa área surgiu no século XVII com o início dos estudos de cálculo realizado pelos matemáticos Issac Newton e Gottfried W. Leibniz (CARVALHO, 2007). Desde então, vários cientistas se dedicaram ao estudo de métodos para resolver essas equações, como por exemplo, Euler, que utilizou séries de potência para resolvê-las, entre outros. Com o passar dos anos a teoria de equações diferenciais foi sendo aplicada a outras áreas do conhecimento humano, como na engenharia, biologia, medicina, setor financeiro, etc. Esta teoria possui três ramos principais: os métodos exatos, que se propõem a obter todas as soluções de uma dada equação, os métodos numéricos, que são indicados para obter com precisão coerente soluções particulares de uma dada equação e os métodos qualitativos, que são usados para investigar propriedades das soluções sem necessariamente encontrá-las (DIACU, 2004).

Em 1892, Lyapunov propôs dois métodos para analisar a estabilidade de sistemas não lineares (LYAPUNOV, 1892). O primeiro método, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através do seu modelo linearizado, mais precisamente, através dos autovalores das matrizes obtidas na linearização. O segundo método, também conhecido como método direto de Lyapunov, é capaz de analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio a partir do próprio modelo matemático, sem determinar suas soluções. Essa análise é feita através da verificação da derivada de uma função auxiliar, também conhecida como função de Lyapunov, a qual deve ser definida positiva. Esses resultados foram utilizados com sucesso na análise qualitativa de modelos de dinâmicas populacionais e no controle de pragas na agricultura (DOERING; LOPES, 2014; FELTRIN, 2002).

Uma extensão do resultado de Lyapunov, conhecida como princípio de invariância de LaSalle, foi apresentada em LaSalle (1960). Esse resultado foi usado para estimar a área de atração dos pontos de equilíbrio e também para garantir a estabilidade assintótica das soluções de alguns modelos, os quais não tiveram sucesso em suas análises usando os Teoremas de Lyapunov. O princípio de invariância baseia-se na existência de uma função do tipo Lyapunov para

analisar o comportamento assintótico das soluções do sistema. Uma propriedade chave dessa função é a não positividade de sua derivada ao longo das soluções. Encontrar tal função satisfazendo todas as suposições do resultado pode ser difícil para muitos sistemas dinâmicos. Por isso, uma extensão do princípio de invariância, a qual permite que a derivada da função auxiliar, que desempenha o mesmo papel que a função de Lyapunov, assumam valores positivos em alguns conjuntos foi proposta para sistemas contínuos em Rodrigues H. (2002), para sistemas chaveados em Valentino et al. (2012) e foram aplicados com sucesso em problemas de sincronização em Rodrigues et al. (2000).

Em Faria et al. (2010), cada sistema não linear foi representado por um modelo T-S fuzzy e então, obtiveram uma aplicação dos resultados acima, a qual permite analisar o comportamento assintótico da solução do sistema não lineares apenas verificando a factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares ("Linear Matrix Inequalities"(LMIs)). A modelagem T-S fuzzy consiste na representação de um sistema não linear como uma combinação fuzzy de sistemas lineares (modelos locais), que descrevem o comportamento do sistema não linear em diferentes pontos do espaço de estados. Dependendo da escolha dos modelos locais e dos parâmetros da combinação fuzzy (conhecidos como funções de pertinência), o modelo pode fornecer uma representação aproximada como em Teixeira e Zak (1999) ou exata do sistema não linear como em Wang (1997), Tanaka e Wang (2001).

Nos últimos anos, houve um crescente interesse em pesquisas e aplicações de sistemas fuzzy, onde a análise de estabilidade é um dos conceitos mais importantes. Segundo Taniguchi K. Tanaka e Wang (2001), a modelagem T-S fuzzy é um método flexível usado em problemas relacionados a controle e, em muitos casos, permite o uso das LMIs para eliminar restrições ligadas a métodos convencionais e auxiliar na generalização de alguns tipos de problemas. Frequentemente, essa modelagem é empregada em casos nos quais os métodos convencionais falham ou não conseguem encontrar uma solução. A solução de problemas com restrições descritas por LMIs pode ser realizada com softwares de programação, tais como o pacote "LMI control toolbox" do MATLAB¹.

O objetivo neste trabalho é estudar resultados que permitem analisar o comportamento assintótico das soluções de sistemas não lineares de primeira ordem, sem explicitá-las. Mais objetivamente, serão estudados os teoremas de Lyapunov, o princípio de invariância de LaSalle e a extensão do princípio de invariância. Ainda, será feita uma aplicação dos resultados para

¹MATLAB (acrônimo de MATrix LABoratory), que é um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico. O MATLAB integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente fácil de usar, onde problemas e soluções são expressos somente como eles são escritos matematicamente, ao contrário da programação tradicional (BECKER et. al., 2010). Licença 1994 – 2016 The MathWorks, Inc.

sistemas T-S fuzzy, a qual fornecerá uma técnica mais simples de analisar a estabilidade dos modelos não lineares, a qual consiste da verificação da factibilidade de um conjunto de LMIs, as quais podem ser resolvidas com o auxílio do MATLAB. Todos esses resultados serão usados para verificar a estabilidade ou o comportamento assintótico de alguns modelos biológicos.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2, será apresentada a teoria de sistemas de equações diferenciais não lineares necessária aos estudos que se farão neste trabalho e os resultados que garantem a existência e unicidade de sua solução. Também serão apresentados os resultados que fornecem condições suficientes para a análise do comportamento assintótico das soluções dos sistemas, mais precisamente, são estudados os teoremas de Lyapunov, o princípio de invariância de LaSalle e sua extensão. A eficiência dos resultados principais é comprovada com suas aplicações na análise de alguns sistemas biológicos. No capítulo 3, é feito um estudo de sistemas T-S fuzzy e a extensão do teorema de Lyapunov para essa classe de sistemas. O resultado também é aplicado para analisar o comportamento assintótico de um sistema biológico. Finalmente, no Capítulo 4 são apresentadas as conclusões do trabalho, seguindo as referências.

2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM E ESTABILIDADE

Neste capítulo é apresentada a classe de sistemas considerada neste trabalho e os principais resultados existentes na literatura, os quais fornecem condições suficientes para a análise do comportamento assintótico de suas soluções. Ainda, alguns sistemas biológicos são analisados com a teoria apresentada.

2.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Considere uma variável t e y uma função de t . Uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n é uma equação que contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma única variável independente, ou seja,

$$F\left[t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}\right] = 0, \quad (1)$$

em que F é uma função de $n + 1$ variáveis.

Particularmente, tem-se o interesse em estudar apenas as equações diferenciais de primeira ordem, nas quais é possível explicitar \dot{y} como função de y , ou seja

$$\dot{y}(t) = f(y(t)), \quad (2)$$

em que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação definida em cada ponto y de um aberto D de \mathbb{R}^n .

Tomando as coordenadas na base canônica de \mathbb{R}^n e escrevendo $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ e $f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y))$, tem-se que a equação (2) representa um sistema de equações diferenciais escalares:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1(t), \dots, y_n(t)), \end{cases} \quad (3)$$

em que $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}^n$.

O sistema (3) adicionado às condições iniciais:

$$y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t_0) = y_2^0, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = y_n^0, \quad (4)$$

com $t_0 \in I$, sendo I é um intervalo da reta e $y_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0) \in D$, formam um problema de valor inicial. Particularmente, note que (3) inclui as EDO's do tipo:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f(y, \dots, y^{n-1}). \quad (5)$$

Neste caso, a equação (5) pode ser transformada em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Para isso, considera-se as seguintes incógnitas, que são funções deriváveis $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, \dots , $x_n = x_n(t)$, definidas como:

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}.$$

Então, tem-se o sistema de equações diferenciais de primeira ordem dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (6)$$

Exemplo 1 Considere a seguinte equação diferencial de quarta ordem:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} = -\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - y + 1. \quad (7)$$

Fazendo

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{dy}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad e \quad x_4 = \frac{d^3 y}{dt^3},$$

podemos escrever a equação diferencial ordinária como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{d^2 y}{dt^2} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{d^3 y}{dt^3} = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - y + 1 = -x_4 - x_3 - x_2 - x_1 + 1. \end{cases}$$

Definição 1 Uma solução y do sistema (3) em um intervalo I , representa um conjunto de n

funções $y_1(t), \dots, y_n(t)$, tais que:

- $y_1(t), \dots, y_n(t)$ existem para $t \in I$;
- para $t \in I$ os pontos $(y_1(t), \dots, y_n(t)) \in D$;
- $\dot{y}_i = f_i(y_1, \dots, y_n)$ para $t \in I$, $i = 1, \dots, n$.

Definição 2 Seja $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em todo ponto y de um conjunto aberto D do \mathbb{R}^n , para todo $i = 1, \dots, n$. Então, f_i é contínua em D se $\lim_{y \rightarrow y_0} f_i(y) = f_i(y_0)$, $\forall y_0 \in D$. Ainda, f_i é uma função de classe C^1 em D se \dot{f}_i é contínua em todo $y_0 \in D$.

O Teorema 1 a seguir fornece condições suficientes para existência e unicidade da solução do sistema (3).

Teorema 1 Se $f_i(y)$ e as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y)$ são aplicações contínuas de y no aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$ então, dado qualquer ponto $y_0 = y(t_0) \in D$, existe uma única solução do problema de valor inicial (3) - (4), definida num intervalo aberto I centrado em t_0 .

Demonstração 1 Veja em Doering e Lopes (2014).

Observação 1 A condição de que f_i para todo $\forall i = 1, \dots, r$ são funções de classe C_1 , é uma condição suficiente para a existência e a unicidade da solução de (3) - (4).

Corolário 1 Se f tem domínio \mathbb{R}^n e se $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de f tal que $|y(t)|$ é limitado $\forall t \in I$, então $I = \mathbb{R}$.

Definição 3 Um ponto $y^* \in \mathbb{R}^n$ é chamado de **ponto de equilíbrio** do sistema (3) se $f_i(y^*) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

A seguir, apresenta-se a natureza de um ponto de equilíbrio (tipo de estabilidade), isto é, se uma solução qualquer se afasta ou se aproxima do ponto de equilíbrio. Os pontos de equilíbrio são classificados como: ponto de equilíbrio estável, assintoticamente estável e instável. Antes de iniciar a caracterização dos pontos de equilíbrio é necessário definir uma bola no conjunto \mathbb{R}^n .

Definição 4 Seja $y^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio de (3). Dado um número real $r > 0$, a bola fechada de centro a e raio r , denotada por $B[a; r]$, é o conjunto dos pontos de \mathbb{R}^n que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto a , ou seja, $B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, a) \leq r\}$, em que, $d(x, a) = \|x - a\|$ e $\|x - a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$ (LIMA, 2013).

Definição 5 O ponto de equilíbrio y^* é dito um ponto de equilíbrio **estável** do sistema (3) se $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, de modo que para toda condição inicial $y(t_0) \in D$ tal que $\|y(t_0) - y^*\| < \delta$, então $\|y(t) - y^*\| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$.

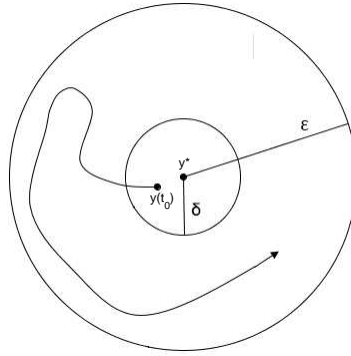


Figura 1: Ponto de Equilíbrio Estável.

Na Figura 1, tem-se a representação geométrica de um ponto de equilíbrio estável, pois dada a bola de raio ε , existe uma bola de raio δ tal que, a solução com condição inicial $y(t_0)$ dentro da bola de raio δ e centro y^* não escapa da bola de raio ε .

Definição 6 Diz-se que y^* é **assintoticamente estável** se é um ponto de equilíbrio estável e se $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*$.

Na Figura 2, tem-se a representação geométrica de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, pois dada a condição inicial $y(t_0)$ dentro da bola de raio δ e centro y^* , a solução não escapa da bola de raio ε e ainda quando $t \rightarrow +\infty$ a solução do sistema tende a ficar cada vez mais próxima do ponto de equilíbrio.

Definição 7 Um ponto de equilíbrio y^* é dito **instável** se é um ponto de equilíbrio que não é estável. Ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ satisfazendo $\|y(t_0) - y^*\| < \delta$, existe algum $t > t_0$ no qual $\|y(t) - y^*\| > \varepsilon$.

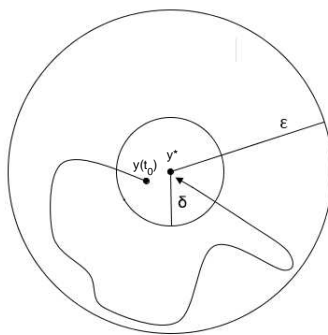


Figura 2: Ponto de Equilíbrio Assintoticamente Estável.

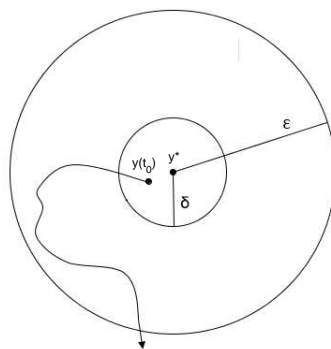


Figura 3: Ponto de Equilíbrio Instável.

Na Figura 3, tem-se a representação geométrica de um ponto de equilíbrio instável, pois dada a condição inicial $y(t_0)$, dentro da bola de raio δ e centro y^* , para algum $t > t_0$ a solução escapa da bola de raio ε .

Na próxima seção serão estudadas condições suficientes para a análise do comportamento assintótico da solução de sistemas não lineares.

2.2 ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LYAPUNOV

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov nasceu em 06 de junho de 1857 em Yaroslavl, Rússia e morreu em 03 de novembro de 1918 em Odessa, também na Rússia. Lyapunov formou-se em Matemática na universidade de São Petesburgo no ano de 1880. Em 1884 Lyapunov defendeu sua Dissertação de Mestrado intitulada "On the stability of ellipsoidal formas of equilibrium of rotative fluids", a qual fala sobre a estabilidade de formas elipsoidais de equilíbrio de fluídos rotativos. Em 1892, Lyapunov defendeu sua Tese de Doutorado intitulada "General

Problem of Stability of Motion", trabalho no qual ele apresentou seu segundo método de estabilidade e então ficou conhecido por sua teoria de estabilidade, por suas contribuições para a física-matemática e teoria de probabilidade (BESSA, 2011).

Antes de enunciar o Teorema de Lyapunov, são necessárias as definições de função semi-definidas positivas e negativas e função radialmente ilimitada.

Definição 8 Considere uma função V definida em um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a valores em \mathbb{R} . A função V é dita definida positiva (definida negativa) em uma vizinhança $B[y^*, r]$ de y^* se satisfaz $V(y^*) = 0$ e $V(y) > 0$ ($V(y) < 0$) em todos os outros pontos de $B[y^*, r]$.

Definição 9 Considere uma função $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, em que $D \subseteq \mathbb{R}^n$. A função V é dita semi-definida positiva (semi-definida negativa) em $B[y^*, r]$ se $V(y^*) = 0$ e $V(y) \geq 0$ ($V(y) \leq 0$) em todos os outros pontos de $B[y^*, r]$.

Definição 10 Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Diz-se que V é radialmente ilimitada se $|V(y)| \rightarrow +\infty$ quando $\|y\| \rightarrow +\infty$.

Agora, serão apresentados critérios suficientes que determinam se um ponto de equilíbrio é estável ou assintoticamente estável, sem conhecer a solução exata ou numérica do sistema. Para isso, será considerada a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $D \subseteq \mathbb{R}^n$, um ponto de equilíbrio $y^* \in D$ de (3) e $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança W de y^* , com $W \subset D$. Diz-se que V é uma **Função de Lyapunov Local** de f em y^* se:

1. $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 ;
2. $V(y)$ é positiva definida, para todo $y \in W$;
3. $\dot{V}(y) \leq 0$, com $y \in W$.

Observação 2 Uma função V é dita **Função de Lyapunov Local Estrita** de f em y^* quando vale a desigualdade estrita em 3, ou seja, $\dot{V}(y) < 0$, para todo $y \in W$.

Teorema 2 (Teorema de Lyapunov- Parte 1) Seja y^* um ponto de equilíbrio da função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Lyapunov de f na vizinhança W de y^* , com $W \subset D$, então y^* é um ponto de equilíbrio estável de f .

Demonstração 2 *Seja y^* um ponto de equilíbrio de f e suponha que exista uma função de Lyapunov $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ para f em y^* , mais precisamente, uma função contínua na vizinhança W de y^* em \mathbb{R}^n satisfazendo: $V(y^*) = 0$, $V(y) > 0$ para cada $y \in W - \{y^*\}$ e $V \circ y : I \rightarrow \mathbb{R}$ sendo uma função não-crescente para qualquer solução $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $\dot{y} = f(y)$ tal que $y(t) \in W$ para cada $t \in I$. O objetivo é demonstrar que o ponto de equilíbrio y^* é estável, ou seja, para qualquer vizinhança U de y^* em \mathbb{R}^n , existe uma vizinhança W_0 de y^* com $W_0 \subseteq U$ tal que $y(t) \in U$, para quaisquer $y(t_0) \in W_0$ e $t > 0$.*

Seja, U uma vizinhança qualquer de y^ em \mathbb{R}^n , e escolha $\delta > 0$ tal que $B(y^*, \delta) \subseteq U \cap W$. Como V é contínua e a esfera $\{x \in \mathbb{R}^n : \|y - y^*\| = \delta\} \subseteq W$ é compacta, tem-se*

$$\alpha = \min_{\|y - y^*\| = \delta} V(y) > 0, \quad (9)$$

uma vez que $V(y) > 0$ para $x \in W - \{y^\}$. Novamente pela continuidade de V , o conjunto $W_0 = \{y \in B(y^*, \delta) : V(y) < \alpha\}$ é aberto e ainda, como $V(y^*) = 0$, W_0 é uma vizinhança de y^* que satisfaz $W_0 \subseteq U \cap W$. Resta provar que $y(t) \in U$, para quaisquer $y(t_0) \in W_0$ e $t > 0$. Dado qualquer $y(t_0) \in W_0$, suponha, para obter uma contradição, que existe um tempo $\bar{t} > t_0$ tal que $y(\bar{t}) \notin U$. Em particular, neste mesmo \bar{t} segue que $y(\bar{t}) \notin B(y^*, \delta)$ e, portanto, como $y(t_0) \in W_0 \subseteq B(y^*, \delta) \subseteq U \cap W$, deve existir em algum instante $t^* < \bar{t}$ tal que a solução deve passar uma primeira vez pela esfera de centro y^* e raio δ , ou seja, $|y(t^*) - y^*| = \delta$. Como, $V(y(t_0)) < \alpha \leq V(y(t^*))$, então contradiz a hipótese de que a função V não cresce ao longo de $y(t)$. Portanto, $y(t) \in U$, para quaisquer $y(t_0) \in W_0$ e $t > 0$. Portanto y^* é um ponto de equilíbrio estável (DOERING; LOPES, 2014).*

Resumindo, se $V(y)$ é localmente positiva definida em torno de y^* e $\dot{V}(y)$ é localmente semi-definida negativa em torno de y^* , então y^* é ponto de equilíbrio estável.

Teorema 3 (Teorema de Lyapunov- Parte 2) *Seja y^* um ponto de equilíbrio da função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Lyapunov estrita de f na vizinhança W de y^* , então y^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de f .*

Demonstração 3 *Veja em Doering e Lopes (2014).*

Resumindo, se $V(y)$ é localmente definida positiva em torno de y^* e $\dot{V}(y)$ é localmente negativa em torno de y^* , então y^* é ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável.

Observação 3 *Se nos Teoremas 2 e 3, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ e ainda V é uma função radialmente ilimitada, então os resultados serão globais ao invés de locais.*

Os teoremas de Lyapunov fornecem informações locais e globais para a estabilidade e estabilidade assintótica, porém não fornece nenhuma estimativa da região de atração do ponto de equilíbrio, ou seja, onde escolher a condição inicial de forma que a solução seja atraída para o ponto de equilíbrio ou permaneça próxima dele. Ainda, há casos em que \dot{V} não será definida negativa, fazendo com que o Teorema 2 possa garantir somente a estabilidade e não a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio, mesmo sabendo que ela ocorre. Por isso, na próxima subseção será enunciado o princípio de Invariância de LaSalle, o qual é capaz de garantir a estabilidade assintótica de pontos de equilíbrios de alguns modelos e ainda fornece uma estimativa da região de atração desses pontos.

2.3 PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA DE LASALLE

O Princípio de Invariância de LaSalle é uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais. LaSalle demonstrou este resultado para equações diferenciais autônomas definidas em espaços de dimensão finita (LASALLE, 1960). Posteriormente, este resultado foi estendido para diversas outras classes de equações. Segundo Coimbra et al. (2014), o Princípio de Invariância de LaSalle estuda o comportamento assintótico das soluções de um sistema sem a necessidade de conhecer explicitamente as soluções das equações diferenciais. Para isto, é utilizada uma função escalar auxiliar, muitas vezes denominada função de Lyapunov.

Seguem algumas definições e resultados, os quais são necessários para entender a demonstração do resultado principal dessa seção (DOERING; LOPES, 2014).

Definição 11 *A área de atração $A(y^*)$ de um ponto de equilíbrio y^* assintoticamente estável, é o conjunto de todas as condições iniciais que fazem a solução $y(t)$ tender ao ponto de equilíbrio y^* , quanto $t \rightarrow +\infty$.*

Definição 12 *Diz-se que o conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é invariante com relação à (3) se, para todo $x_0 \in C$, $y(t) \in C$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 13 *Um ponto p pertence ao conjunto w -limite de y_0 , $\omega(y_0)$, se existir um sequência $t_n \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$, tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y(t_n) = p$.*

Proposição 1 *O conjunto $\omega(y_0)$ é fechado e invariante. Mais ainda, se a solução é limitada, então é atraída para $\omega(y_0)$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(y(t), \omega(y_0)) = 0$, onde $\text{dist}(y(t), \omega(y_0)) = \inf_{p \in \omega(y_0)} \|y(t) - p\|$.*

Demonstração 4 *Veja em Doering e Lopes (2014).*

O próximo teorema enuncia e prova o resultado principal dessa seção.

Teorema 4 (Princípio de Invariância) *Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Omega_C = \{y \in \mathbb{R}^n : V(y) < C\}$ onde C é um número real positivo. Suponha que V seja contínua e de classe C^1 em Ω_C e ainda $\dot{V}(y) = \nabla V(y) \cdot f(y) \leq 0$ no interior de Ω_C . Considere o subconjunto $E = \{y \in \Omega_C : \dot{V}(y) = 0\} \subset \Omega_C$ e seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então, toda solução iniciando em Ω_C converge para B quando $t \rightarrow +\infty$.*

Demonstração 5 *Seja $y(t)$ uma solução de (3) - (4) com $y_0 \in \Omega_c$, ou seja, $V(y(t_0)) < c$. Suponha que $\exists t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $y(t_1) \notin \Omega_c$, ou ainda, $V(y(t_1)) > c$. Mas, pela continuidade de V , existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ satisfazendo $V(y(\bar{t})) = c$. Então, V cresce dentro de Ω_c , o que é um absurdo. Portanto, $y(t) \in \Omega_c, \forall t \in \mathbb{R}$.*

Considere ainda, $w \in \omega$ -limite, então existe uma sequência $\{t_n\}$, satisfazendo $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ tal que $y(t_n) \rightarrow w$. Pela continuidade da V

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(y(t_n)) = V(w). \quad (10)$$

Ainda, como V é não crescente em Ω_c , então existe $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(y(t)) = L. \quad (11)$$

Assim, pela unicidade do limite, de (10) e (11) tem-se que $V(w) = L$. Portanto, $V(w) = L$ e $\dot{V}(w) = \nabla V(w) \cdot f(w) = 0$, para todo $w \in \omega$ -limite. Então, ω -limite $\subset E = \{y \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(y) = 0\}$. Portanto, a solução é atraída para um conjunto invariante em E .

Observação 4 *Se $f(0) = 0$ e $E = \{0\}$, então a origem será um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

Na próxima seção é apresentada a extensão do princípio de invariância de LaSalle, a qual é capaz de analisar o comportamento assintótico da solução mesmo quando a derivada da função auxiliar V , que desempenha o mesmo papel que a função de Lyapunov, assume valores positivos em alguns conjuntos.

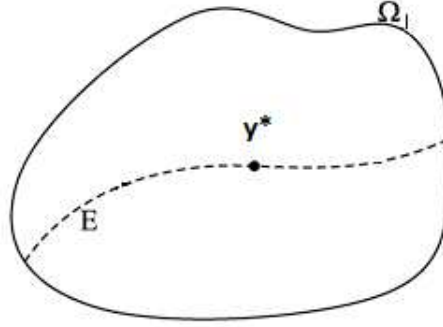


Figura 4: Interpretação geométrica: Princípio de Invariância de LaSalle (RODRIGUES H., 2002).

2.4 EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA DE LASALLE

A extensão do princípio de invariância requer condições menos restritivas do que aquelas exigidas no resultado de LaSalle e isso possibilita o tratamento de problemas mais gerais. Basicamente, esse novo resultado permite que a derivada da função auxiliar V assumam valores positivos em um conjunto limitado.

Segue o resultado principal dessa seção e sua demonstração, o qual foi mostrado pela primeira vez em Rodrigues et al. (2000).

Teorema 5 *Seja $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante tal que $\Omega_L = \{y \in \mathbb{R}^n : V(y) \leq L\}$ seja limitado. Seja $C = \{y \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(y) > 0\}$ e admita que $\sup_{y \in C} V(y) = \ell < L$. Defina $\bar{\Omega}_\ell = \{y \in \Omega_L : V(y) \leq \ell\}$ e $E = \{y \in \Omega_L : V(y) = 0\} \cap \Omega_L$. Seja B um conjunto invariante de (3) contido em E . Então, toda solução de (3) com $y(t_0) \in \Omega_L$ converge para o conjunto invariante B quando $t \rightarrow +\infty$. Além disso, se $y(t_0) \in \bar{\Omega}_\ell$, então $y(t) \in \bar{\Omega}_\ell$ para todo $t \geq 0$ e ainda converge para o maior conjunto invariante de (3) contido em $\bar{\Omega}_\ell$.*

Demonstração 6 *Suponha que $y(t_0) \in \Omega_L$ e $y(t_0) \notin \bar{\Omega}_\ell$. Seja $y(t)$ a solução de (3) com condição inicial $y_0 = y(t_0)$. Seja $[0, t_+)$ o máximo intervalo de existência da solução enquanto ela permanece em Ω_L . Admita inicialmente que a solução $y(t)$ permaneça fora de $\bar{\Omega}_\ell$ para todo $t \in [0, t_+)$. Como $C \subset \bar{\Omega}_\ell$, então $V(y(t))$ é não crescente e conseqüentemente $V(y(t)) \leq V(y(t_0)) < L$, então pelo Corolário 1 tem-se que $t_+ = +\infty$ e que o ω -limite de $y(t)$ está contido no conjunto $\{y \in \Omega_L : V(y) \leq V(y(t_0))\}$, o qual é subconjunto de Ω_L . Como $V(y(t))$ é não crescente e inferiormente limitada, então $V(y(t)) \rightarrow v \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow +\infty$. Uma vez que $\omega(y_0)$ é invari-*

ante de (3), então $V \equiv v$ em $\omega(y_0)$ e portanto $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(y_0)$. Portanto, $\omega(y_0) \subset \Omega_L - C$. Logo, conclui-se que $y(t) \rightarrow \omega(y_0) \subset B$, quando $t \rightarrow +\infty$.

Admita agora que $y_0 \in \bar{\Omega}_\ell$, ou seja, $V(y_0) \leq \ell$. Suponha, por absurdo, que existe $t^* > 0$ tal que $V(y(t^*)) > \ell$. Então, existe \bar{t} , tal que $V(y(\bar{t})) = \ell$ e $V(y(t)) > \ell$ para todo $t \in (\bar{t}, t^*]$, o que contradiz o fato de que $\dot{V} \leq 0$ fora de $\bar{\Omega}_\ell$. Portanto, $y(t) \in \bar{\Omega}_\ell$ para todo $t \geq 0$ e a solução aproxima-se do $\omega(y_0)$ quanto $t \rightarrow +\infty$, que é invariante e está contido em $\bar{\Omega}_\ell$. Portanto, a solução se aproxima do maior conjunto invariante contido em $\Omega(y_0)$ quando $t \rightarrow +\infty$.

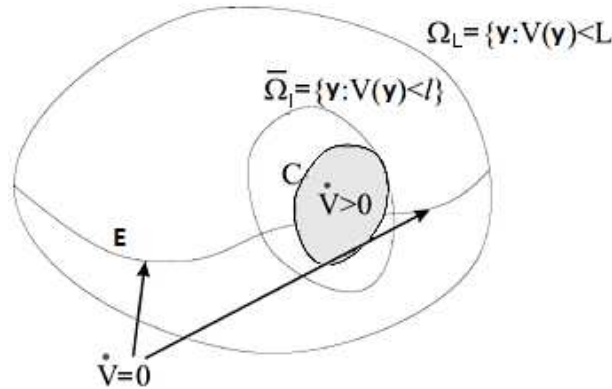


Figura 5: Interpretação geométrica: Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle (RODRIGUES H., 2002).

Na próxima seção serão feitas análises de estabilidade de alguns sistemas biológicos, os quais são muito usados para descrever crescimento de doenças, usando os teoremas de Lyapunov, o princípio de invariância de LaSalle ou a extensão como em Luiz (2012), Cecconello et al. (2012).

2.5 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE ALGUNS MODELOS BIOLÓGICOS

A grande parte dos modelos matemáticos que descrevem dinâmicas de doenças de transmissão direta são representados por um sistema de equações diferenciais. A importância de se estudar esses modelos está relacionado ao fato de se prever o comportamento de epidemias, agentes bacterianos e antecipadamente, adotar prevenções para que a doença não se alastre e saia completamente do controle, evitando maiores consequências. Hamer, em uma publicação em 1906, postulou que o desenvolvimento de uma epidemia depende de alguns fatores fundamentais como, o número de suscetíveis, de infecciosos e o encontro entre suscetível e infeccioso. Tal encontro é denotado por SI , em que S significa a quantidade de indivíduos

suscetíveis a doença e I significa a quantidade de indivíduos infectados pela doença. Em 1927, W. O. Kermack e A. G. McKendric propuseram um modelo epidemiológico para estudar a disseminação de uma doença em uma população, no qual consideraram uma nova classe de indivíduos, os removidos (R), que são os indivíduos que foram infectados e em seguida foram removidos da classe dos infectados devido à imunização ou morte. O fluxo desse modelo, conhecido como modelo SIR, é considerado da seguinte forma:

$$S \rightarrow I \rightarrow R.$$

Logo, a população fixa em cada instante de tempo é $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$, em que as variações são dadas por

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I, \end{cases} \quad (13)$$

em que α é a taxa de infecção da doença e β é a taxa de remoção, ou seja, é a taxa que determina a quantidade de indivíduos que deixam a classe dos infecciosos para entrar na classe dos removidos. Para modelar esse sistema, os autores fixaram algumas hipóteses, onde a primeira delas é considerar que cada indivíduo da população deve ter a probabilidade igual a todos os outros indivíduos de contrair a doença. Portanto, um indivíduo infectado quando entra em contato é capaz de transmitir aos outros αN por unidade de tempo. O número dos que deixam a classe dos suscetíveis é dado por αSI . A segunda e terceira hipóteses consideram a população, que deixou a classe dos suscetíveis, como o número de entrada na classe de infectados e que uma fração dos infecciosos βI deixam a classe dos infecciosos e entram na classe dos removidos.

O modelo SIS é deduzido do modelo SIR acrescentando apenas a ideia de que os indivíduos se recuperam sem imunidade a doença, ou seja, são considerados suscetíveis novamente assim que se recuperam. Esse novo fluxo pode ser considerado da forma

$$S \rightarrow I \rightarrow S.$$

Removendo então do modelo SIR, a equação da população que representa a população recuperada e adicionando os removidos da população infectada na população suscetível, tem-se

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = f_1(S, I) = \Delta - \alpha SI - \mu S + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = f_2(S, I) = \alpha SI - (\beta + \mu + \phi) I \end{cases}, \quad (15)$$

em que os termos $-\mu S$ e Δ adicionados na classe dos suscetíveis significam os indivíduos que morrem por causas naturais, sendo α a taxa de mortalidade, e os indivíduos que entram na classe do suscetíveis por nascimento e imigração, respectivamente. Os termos $-\mu I$ e ϕI adicionados na classe dos infectados significam a população que morre por causas naturais e a população que morre devido à doença, sendo ϕ a taxa de mortalidade da doença, respectivamente.

Considerando as condições iniciais

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0,$$

na próxima subseção será estudada a existência e unicidade da solução de (15) e ainda analisada a estabilidade de seus pontos de equilíbrios via Teoremas de Lyapunov.

2.5.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO MODELO SIS

O sistema (15) é composto por funções polinomiais, então todas as derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em todo \mathbb{R}^2 e, portanto, são funções de classe C_1 . Assim, tem-se que a condição suficiente para a existência e a unicidade da solução do sistema é satisfeita.

Os pontos de equilíbrio do sistema (15), $P_1^* = (S_1, I_1)$ e $P_2^* = (S_2, I_2)$, podem ser encontrados calculando

$$f_1(P_1^*) = \Delta - \alpha S I - \mu S + \beta I = 0 \quad (17)$$

$$f_2(P_2^*) = I(\alpha S - \beta - \mu - \phi) = 0. \quad (18)$$

De (18), obtem-se que: (a) $I = 0$ ou (b) $S = \frac{\beta + \mu + \phi}{\alpha}$. Substituindo (a) em (17), tem-se

$$\Delta - \alpha S_0 - \mu S + \beta 0 = 0, \quad \text{então } S = \frac{\Delta}{\mu}.$$

Substituindo (b) em (17)

$$\begin{aligned} \Delta - \alpha I \left(\frac{\beta + \mu + \phi}{\alpha} \right) + \beta I &= \mu \left(\frac{\beta + \mu + \phi}{\alpha} \right), \\ I(\mu + \phi) &= \frac{\alpha \Delta - \mu \beta - \mu^2 - \mu \phi}{\alpha}, \\ I &= \frac{\alpha \Delta - \mu(\beta + \mu + \phi)}{\alpha(\mu + \phi)}. \end{aligned}$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são dados por:

$$P_1^* = (S_1, I_1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0 \right),$$

$$P_2^* = (S_2, I_2) = \left(\frac{\beta + \mu + \phi}{\alpha}, \frac{\alpha\Delta - \mu(\beta + \mu + \phi)}{\alpha(\mu + \phi)} \right).$$

Considerando $R_0 = \frac{\alpha\Delta}{\alpha(\beta + \mu + \phi)}$, então P_2^* pode ser reescrito como:

$$P_2^* = (S_2, I_2) = \left(\frac{S_1}{R_0}, \frac{\mu(\beta + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha(\mu + \phi)} \right).$$

Como $N(t) = S(t) + I(t)$ de (15), segue que:

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \Delta - \alpha SI - \mu S + \beta I + \alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I \\ &= \Delta - \mu S - \mu I - \phi I \\ &= \Delta - \mu(S + I) - \phi I \\ &= \Delta - \mu N - \phi I. \end{aligned} \tag{23}$$

Na ausência da doença, ou seja, quando $I = 0$ na equação (23) obtém-se que

$$\dot{N} = \Delta - \mu N. \tag{25}$$

Utilizando o método do fator integrante para resolver (25), tem-se

$$\frac{d}{dt}[N(t)u(t)] = u(t)\Delta, \text{ com } \frac{du}{dt} = \mu u(t). \tag{27}$$

Portanto,

$$N(t) = \frac{\Delta}{\mu} + ce^{-\mu t}. \tag{29}$$

Pode-se notar de (29) que N converge para $\frac{\Delta}{\mu}$ quando $t \rightarrow +\infty$. Então, a estabilidade será verificada na região

$$\Omega = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}^2 : S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{\Delta}{\mu} \right\}.$$

Para analisar o ponto de equilíbrio $P_1^* = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0 \right)$ na região Ω , considera-se a função $V : \{(S, I) \in \Omega : S > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V(S, I) = \frac{1}{2} [(S - S_1) + I]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} I.$$

Assim, V é definida positiva e de classe C^1 no interior de Ω e

$$\begin{aligned} V(S_1, I_1) &= \frac{1}{2} [(S_1 - S_1) + I_1]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} I_1 \\ &= \frac{1}{2} [0]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainda, a derivada de V em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [(S - S_1) + I] \frac{d(S + I)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{dI}{dt} \\ &= [(S - S_1) + I] [\Delta - \mu(S + I) - \phi I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} [\alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I]. \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \mu S_1$, obtém-se:

$$\dot{V} = -\mu(S - S_1)^2 - (\mu + \phi)I^2 - (\phi + 2\mu) \left(\frac{(\beta + \mu + \phi)}{\alpha} - S_1 \right) I.$$

Reescrevendo \dot{V} em função de R_0 , segue que:

$$\dot{V} = -\mu(S - S_1)^2 - (\mu + \phi)I^2 - \frac{(\phi + 2\mu)(\beta + \mu + \phi)}{\alpha} (1 - R_0)I.$$

Portanto, \dot{V} é definida negativa quando $R_0 \leq 1$ e pelo Teorema 3 pode-se assegurar que P_1^* é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável.

Para o ponto de equilíbrio $P_2^* = (S_2, I_2) = \left(\frac{S_1}{R_0}, \frac{\mu(\beta + \mu + \phi)(R_0 - 1)}{\alpha(\mu + \phi)} \right)$ na região Ω , considere-se a função de Lyapunov $V : \{(S, I) \in \Omega : S, I > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V(S, I) = \frac{1}{2} [(S - S_2) + (I - I_2)]^2 + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \left(I - I_2 - I_2 \ln \frac{I}{I_2} \right).$$

Então, V é de classe C_1 no interior de Ω , $V(S_2, I_2) = 0$ e ainda, a derivada de V em relação a t é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [(S - S_2) + (I - I_2)] \frac{d(S + I)}{dt} + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{(I - I_2)}{I} \frac{dI}{dt} \\ &= [(S - S_2) + (I - I_2)] [\Delta - \mu(S + I) - \phi I] + \frac{(\phi + 2\mu)}{\alpha} \frac{(I - I_2)}{I} [\alpha SI - (\beta + \mu + \phi)I]. \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta = \mu(S_2 + I_2) + \phi I_2$ e $\alpha S_2 = (\beta + \phi + \mu)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [(S - S_2) + (I - I_2)] \{ -\mu[S - S_2] + (I - I_2) - \phi(I - I_2) \} + (\phi + 2\mu)(S - S_2)(I - I_2) \\ &= -\mu(S - S_2)^2 - (\mu + \phi)(I - I_2)^2. \end{aligned}$$

Deste modo, \dot{V} é definida negativa e pelo Teorema 2, o ponto de equilíbrio P_2^* é localmente assintoticamente estável.

Levando em consideração os parâmetros $\Delta = 1$, $\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\beta = 1$ e $\phi = 0.5$, tem-se que $R_0 = 0.5 \leq 1$. Portanto, escolhendo $(S_0, I_0) = (0.1, 0.5)$ a solução numérica (Figura 6) confirma que o ponto de equilíbrio P_1^* é assintoticamente estável. Pode-se observar na Figura 7 que a função V decresce sobre a solução do sistema e converge para zero.

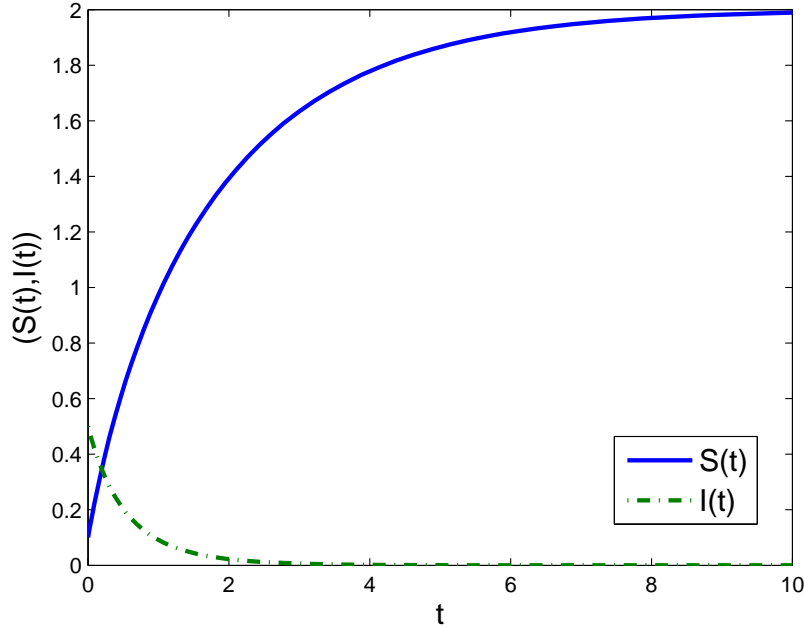


Figura 6: Solução de (15) com condição inicial $S_0 = 0.1$ e $I_0 = 0.5$ e parâmetros $\Delta = 1$, $\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\beta = 1$ e $\phi = 0.5$.

Como os teoremas de Lyapunov não dão informações da área de atração, pode ocorrer de ser escolhida uma certa condição inicial que torne a solução instável, como pode ser verificado na Figura 8.

Agora, escolhendo parâmetros de forma que $R_0 > 1$, ou seja, $\Delta = 1$, $\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\beta = 1$ e $\phi = 0.5$, tem-se que o ponto de equilíbrio $P_2^* = (4, 1)$ será assintoticamente estável (veja Figura 9).

Na próxima seção será apresentado o estudo qualitativo do modelo epidemiológico SIR.

2.5.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DO MODELO SIR

Agora, considera-se a equação (13) sem incluir a população dos removidos, ou seja

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI, & S(0) = S_0 \geq 0, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I, & I(0) = I_0 \geq 0. \end{cases} \quad (35)$$

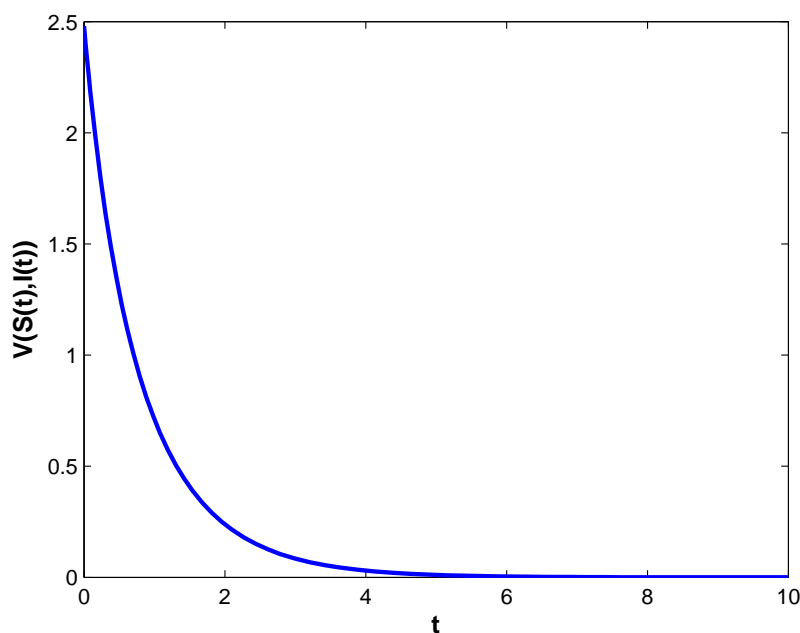


Figura 7: Função V pelo tempo t com condição inicial $S_0 = 0.1$ e $I_0 = 0.5$ e parâmetros $\Delta = 1$, $\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\beta = 1$ e $\phi = 0.5$.

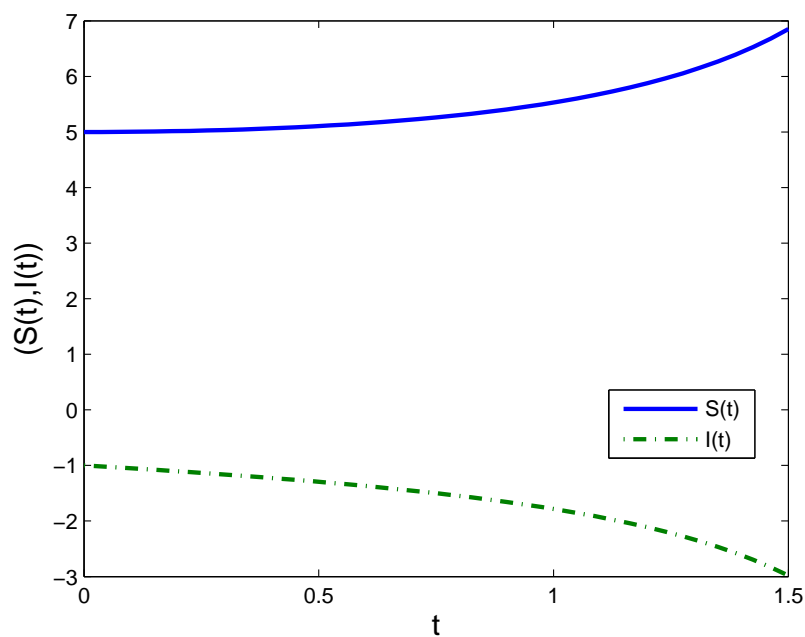


Figura 8: Solução de (15) com condição inicial $S_0 = 5$ e $I_0 = -1$ e parâmetros $\Delta = 1$, $\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\beta = 1$ e $\phi = 0.5$.

As funções que definem as equações do modelo *SIR* possuem derivadas parciais contínuas, pois tratam-se de funções polinomiais, portanto são de classe C^1 . Desta forma, a condição suficiente para a existência e unicidade da solução é satisfeita.

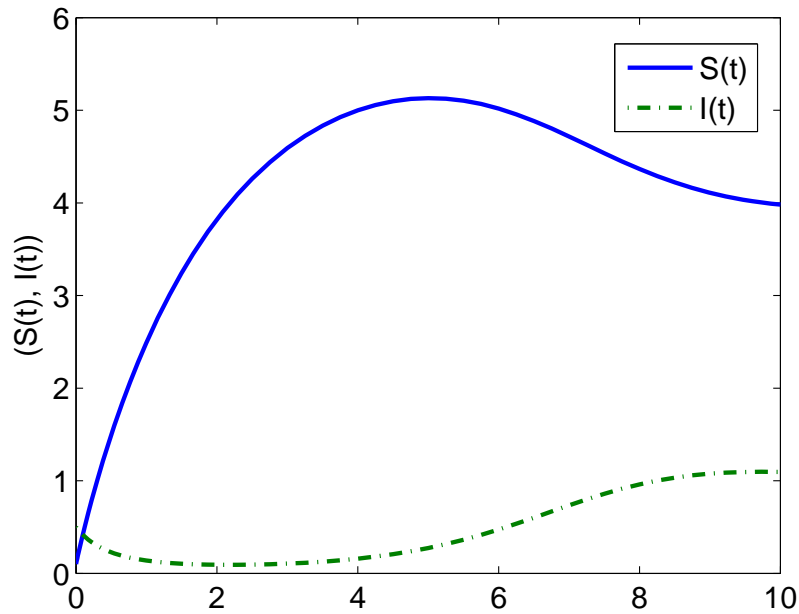


Figura 9: Solução de (15) com condição inicial $S_0 = 0.1$ e $I_0 = 0.5$ e parâmetros $\Delta = 3$, $\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\beta = 1$ e $\phi = 0.5$.

O ponto de equilíbrio de (35), $P_3^* = (S_3, I_3)$, pode ser encontrado calculando

$$-\alpha SI = 0 \quad (37)$$

$$\alpha SI - \beta I = 0. \quad (38)$$

Substituindo (37) em (38), obtém-se que (a) $I = 0$. Substituindo (a) em (37) e em (38) tem-se que S pode assumir qualquer valor. Portanto, os pontos de equilíbrio do sistema (35) são dados por $P_3^* = (S_3, I_3) = (S, 0)$.

Considera-se agora uma função $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$V(S, I) = \left(S - \frac{\beta}{\alpha}\right) + I.$$

Na região $A = \{(S, I) \in \mathbb{R}^2 : I \geq 0 \text{ e } S \geq \frac{\beta}{\alpha}\}$, a função V é definida positiva.

Considere ainda a região

$$\Omega_N = \{(S, I) \in A : V(S, I) < N\}.$$

A função V é contínua e de classe C^1 em Ω_N . Ainda, sua derivada ao longo da solução de (35) é dada por

$$\dot{V}(S, I) = \dot{S} + \dot{I} = (-\alpha SI) + (\alpha SI - \beta I) = -\beta I \leq 0, \quad \forall (S, I) \in \Omega_N. \quad (40)$$

Assim, do Teorema 2 pode-se garantir que o ponto de equilíbrio $(\frac{\beta}{\alpha}, 0)$ do sistema (35) é estável. Mas, pelo Princípio de Invariância de LaSalle pode-se garantir que a solução vai ser atraída para o conjunto

$$E = \{(S, I) \in \Omega_N : \dot{V}(S, I) = 0\} = \{(S, I) \in \Omega_N : I = 0\} \quad (42)$$

quando $(S_0, I_0) \in \Omega_N$. Portanto, pelo Teorema 4, pode-se garantir que os pontos de equilíbrios são assintoticamente estáveis.

Considerando a condição inicial $(S_0, I_0) = (0.1, 0.5)$ e parâmetros $\alpha = 0.5$ $\beta = 1$, na Figura 10 é comprovada que a solução é atraída para um ponto de equilíbrio.

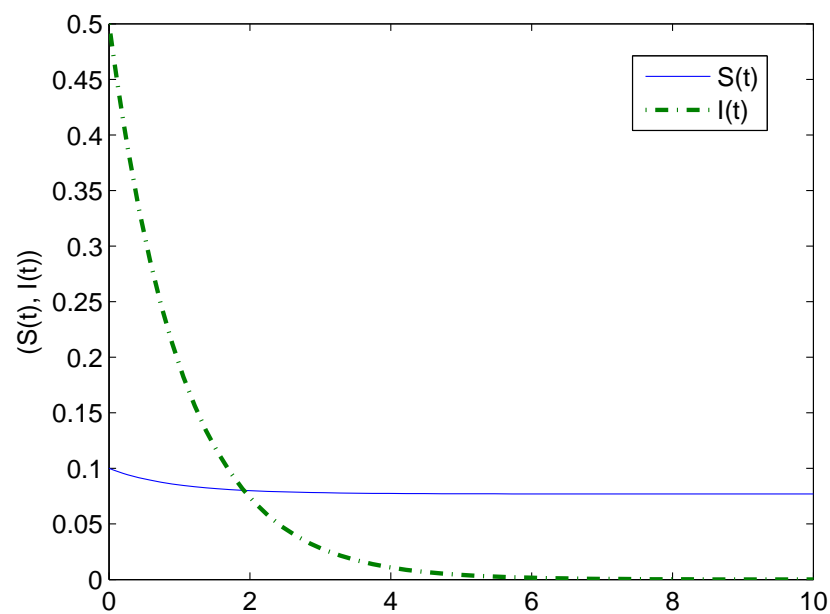


Figura 10: Solução da equação (35) pelo tempo t com condição inicial $S_0 = 0.1$ e $I_0 = 0.5$ e parâmetros $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$.

2.5.3 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE UM MODELO SIMPLES DE PROPAGAÇÃO DE DOENÇA

Nesta subsecção é analisado o comportamento assintótico da solução de um modelo simplificado de propagação de doença com as seguintes hipóteses:

- Uma fração x de determinada população tem uma doença infecciosa. Assim, uma fração $(1 - x)$ não tem a doença.
- A variação de x é proporcional a x e a $(1 - x)$.

Em consequência das hipóteses acima tem-se o seguinte modelo

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \quad (43)$$

em que r é uma constante positiva. Note que, não será considerado que as pessoas infectadas se recuperam da doença.

A função $f(x) = rx(1-x)$ é de classe C^1 e por isso existe e é única a solução de (43). Agora, o interesse é verificar o comportamento assintótico da solução e não estudar a estabilidade de seus pontos de equilíbrio. Para isso, considera-se a função $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x) = \frac{x^2}{2}$. Sua derivada ao longo da solução de (43) é dada por

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = x(rx(1-x)) = rx^2 - rx^3 = x^2r(1-x) > 0, \forall x < 1. \quad (45)$$

Então, $C = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, $L = 1 > \ell = 0.5$ e $E = \{0, 1\}$. Portanto, pelo Teorema 5, toda solução de (43) com $x_0 \in \Omega_L = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$ converge para o conjunto invariante contido em E quando $t \rightarrow +\infty$. Além disso, se $x_0 \in \bar{\Omega}_\ell$, então $x(t) \in \bar{\Omega}_\ell$ para todo $t \geq 0$ e ainda converge para o maior conjunto invariante de (3) contido em $\bar{\Omega}_\ell$.

Escolhendo o parâmetro $r = 0.1$ e a condição inicial $x_0 = 0.5 \in \bar{\Omega}_\ell$, a Figura 11 mostra que a solução não deixa o conjunto $\bar{\Omega}_\ell = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\}$. Considerando agora $x_0 = 1.5 \in \Omega_L$, a Figura 11 mostra que a solução é atraída para $x = 1$ que é um conjunto invariante em $E \setminus \{0, 1\}$.

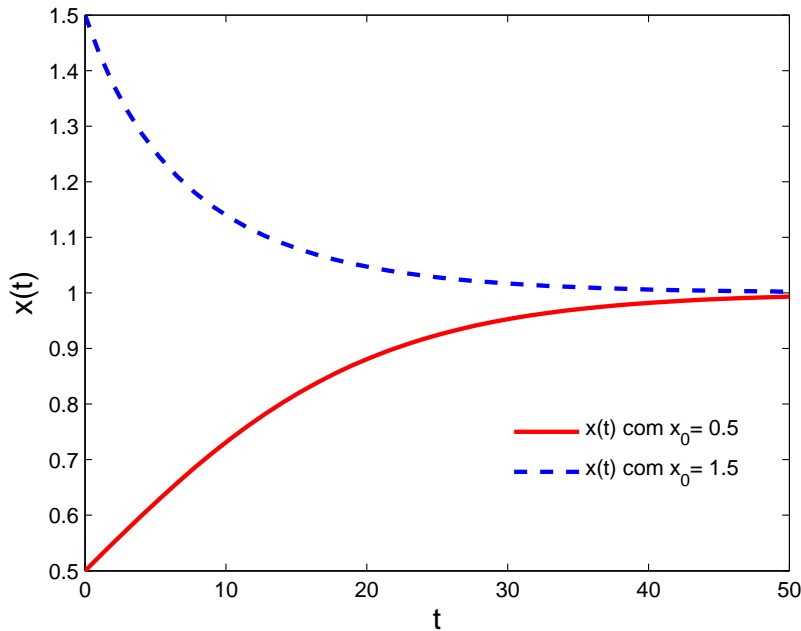


Figura 11: Solução do modelo (43) com condição inicial $x_0 = 0.5$ e $x_0 = 1.5$ e parâmetro $r = 0.1$.

Todos os métodos apresentados no capítulo 2, dependem da escolha de uma função auxiliar satisfazendo algumas propriedades. Porém, encontrar essas funções pode não ser uma tarefa fácil. Por isso, na próxima seção será apresentado o método de Taniguchi, o qual representa exatamente um sistema não linear e então as condições suficientes de estabilidade poderão ser representadas em termos de desigualdades matriciais lineares (TANAKA; WANG, 2001).

3 MODELAGEM E ESTABILIDADE DE SISTEMA TAKAGI-SUGENO FUZZY

Neste capítulo será apresentado o modelo de Taniguchi, o qual representa exatamente um sistema não linear em um certo conjunto. O principal objetivo do uso dessa modelagem é obter condições suficientes de estabilidade em termos de desigualdades matriciais lineares, as quais são resolvidas com o uso do MATLAB.

3.1 FUNDAMENTOS FUZZY

A teoria de Conjuntos Fuzzy foi introduzida em 1965 pelo matemático Lotfi Asker Zadeh, com o objetivo principal de dar tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como, “mais ou menos”, “aproximadamente”, “em torno de”, entre outros (ZADEH, 1965). Grande parte dos problemas do cotidiano não possuem certezas absolutas quanto a alguns aspectos, por exemplo, na decisão de que se uma pessoa do sexo feminino com 1,69 é alta ou é baixa, ou se o número 5 está ou não próximo do número 6. Decisões desse tipo que levaram o surgimento da Teoria de Conjuntos Fuzzy, a qual tem crescido consideravelmente nos últimos séculos, tanto na teoria quanto nas aplicações.

Para formalizar um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que em qualquer conjunto clássico, considerando um conjunto Universo U , um certo elemento pertence ou não ao conjunto. Tal propriedade pode ser caracterizada por uma função característica φ_A , em que A é um subconjunto de U , fazendo o mapeamento dos elementos do conjunto U no conjunto binário $\{0, 1\}$, ou seja:

$$\varphi_A : U \rightarrow \{0, 1\} \text{ dada por } \varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases} \quad (47)$$

Entretanto, em vários casos não é conhecido se o elemento x pertence ou não ao conjunto A . Uma aplicação prática está na decisão de que se os números 2.01 e 7 pertencem ao conjunto A dado por

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x \text{ é próximo de } 2\}.$$

A única informação razoável, neste caso, é que 2.01 está mais próximo de 2 do que do elemento 7. Por esses motivos, Zadeh permitiu um “relaxamento” no conjunto imagem da função característica para então, dar início a formalização matemática dos conceitos de lógica Fuzzy.

Um subconjunto fuzzy A é caracterizado por uma função de pertinência $f_A : U \rightarrow [0, 1]$, também chamada de função característica, a qual caracteriza se alguns elementos são mais membros do conjunto do que outros. O fator de pertinência $f_A(x)$ pode então assumir qualquer valor que esteja entre 0 e 1, sendo que o valor 0 indica que o elemento está excluído do conjunto e o valor 1 representa completa inclusão do elemento no conjunto. Sua representação é um conjunto de pares ordenados da forma:

$$A = (x, f_A(x)), \quad x \in U.$$

Com base nessa concepção de subconjuntos fuzzy, em Zadeh (1965) também foi definida algumas propriedades e operações com conjuntos fuzzy, as quais são apresentadas nas definições seguintes e podem ser encontradas em Barros e Bassanezi (2006).

Definição 14 *A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja a função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{(A \cup B)}(x) = \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \} = f_A(x) \vee f_B(x).$$

Ou seja, a união de A e B é o menor subconjunto fuzzy que contém A e B .

Definição 15 *A intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{(A \cap B)}(x) = \min_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \} = f_A(x) \wedge f_B(x).$$

Ou seja, é o maior subconjunto fuzzy que está contido entre A e B .

Definição 16 *O complemento de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U.$$

Uma observação importante é que esses operadores funcionam exatamente como seus correspondentes da teoria de conjuntos clássica, quando a função característica é dada por (47). Ainda, as operações distributiva, associatividade, comutatividade, transitividade e De Morgan também são satisfeitas para operações com conjuntos Fuzzy (JANG et al., 1997).

Utiliza-se no estudo da lógica matemática tradicional alguns conectivos: "e", "ou", "não" e "implica", para construir regras linguísticas do tipo “se-então”:

$$"Se\ a\ está\ em\ A\ e\ b\ está\ em\ B,\ \text{então}\ c\ está\ em\ C\ \text{ou}\ d\ \text{não}\ está\ em\ D". \quad (49)$$

O valor lógico das sentenças é formado a partir de duas ou mais proposições e obtido por meio de composições de tabelas verdades dos conectivos presentes na sentença. Se em (49) fosse avaliada logicamente por meio dos conectivos, somente poderia assumir valores 0 ou 1, ou seja, considerando que A e B sejam conjuntos, a proposição é verdadeira se for verdade que a pertence a A e também que b pertença a B (tabela verdade para o conectivo \mathbf{e}). Mas, se for admitido que os conjuntos em (49) possam ser fuzzy, deve-se atribuir um valor que indique o quanto a proposição “ a está em A ” é verdadeira, sabendo que o elemento a pode pertencer a A com valores no intervalo $[0, 1]$. Então, a regra “se $a \in A$ e $b \in B$ ” associa uma função de pertinência que mensura o grau de veracidade da implicação.

Um exemplo que se encaixa bem na lógica fuzzy e não na clássica é considerar a implicação “se o tomate está vermelho, então ele está maduro” (JANG et al., 1997). Se na premissa é estabelecido que “o tomate está quase todo vermelho”, então é plausível concluir que “o tomate está quase maduro”, o que não é permitido na lógica clássica. Essa forma de raciocínio aproximado, também conhecido como raciocínio fuzzy, pode ser esquematizada da forma:

- premissa (regra): se x é A , então y é B ($A \rightarrow B$) (a)
- premissa: x é A'
- conclusão: y é B'

sendo que A' é próximo do conjunto A e B' é próximo do conjunto B . Portanto, a regra (a) associa uma função de pertinência $f_{A \rightarrow B}(x, y)$ que mensura o grau de veracidade da implicação.

Uma regra Se-Então, também conhecida como implicação fuzzy, tem a seguinte forma

$$R: \begin{cases} \text{Se } x \text{ é } A \text{ e } z \text{ é } C \\ \text{Então } y \text{ é } B \end{cases},$$

em que R identifica a regra, x, z e y são elementos dos universos X, Z e Y , A, B e C são caracterizados como variáveis linguísticas, ou seja, variáveis cujos valores são nomes de sentenças Zadeh (1965), ao invés de assumirem valores específicos como ocorre com variáveis numéricas. Normalmente, x e z são chamados de precedente e y de conclusão (consequente).

Pensando no exemplo de um carro trafegando em um pista dado em Mozelli (2008), e então relacionar as variáveis “pista molhada”, “curva fechada” e “velocidade”, pode-se surgir as seguintes regras:

- “Se a pista está muito molhada ou a curva é fechada dirija em velocidade baixa”,
- “Se a pista está seca e quanto maior a curva menor deve ser a velocidade”,

ou seja, quanto maior for a pertinência da variável “curva” no conjunto fuzzy “fechada”, maior deverá ser a pertinência da “velocidade” no conjunto fuzzy “baixa”. E ’ pode-se notar, existem várias maneiras das premissas se interagirem com o consequente da regra para então ter a conclusão. Essas configurações são conhecidas como mecanismos de inferência.

O sistema de inferência fuzzy é um sistema que mapeia as entradas advindas de um conjunto de dados resultante de medições ou observações experimentais em saídas precisas. Sua estrutura é baseada em um conjunto de regras fuzzy incluindo quatro componentes básicas principais, como mostra a Figura 12, que são:

1. Um fuzzyficador- que traduz a informação de entrada em conjuntos fuzzy, ou seja, a cada variável de entrada são atribuídos termos linguísticos, os quais são associados a conjuntos fuzzy traduzidos por uma função de pertinência.
2. Base de conhecimento- consiste em um conjunto de regras fuzzy e de uma base de dados. Neste passo estão declarações linguísticas do tipo “se-então”, definidas por especialistas.
3. Método de Inferência- Onde se aplica o raciocínio fuzzy para obter a saída fuzzy.
4. Defuzzificador- Que traduz a saída para um valor numérico.

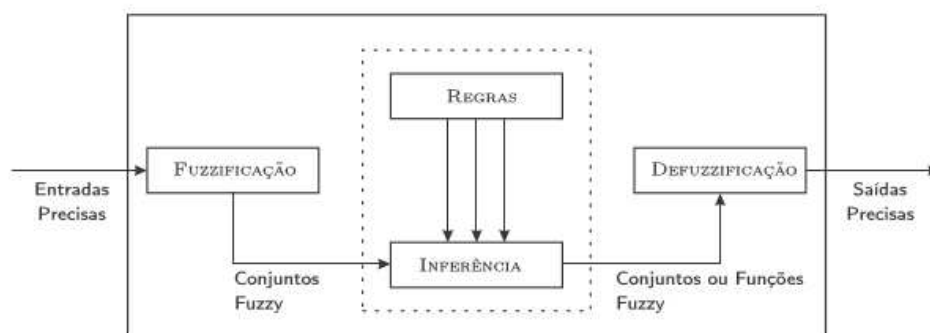


Figura 12: Diagrama Esquemático de Sistema de Inferência (MOZELLI, 2008).

O modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), proposto em Takagui e Sugeno (1985), é um exemplo de sistema de inferência, o qual é capaz de descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não lineares por meio de um conjunto de sistemas dinâmicos lineares. Mais

especificamente, esse método representa um sistema dinâmico ou um controle que associa um conjunto de regras linguísticas no antecedente (“se”) com proposições fuzzy, e no consequente (“então”) são apresentadas expressões funcionais, do tipo, $y = f(x)$, das variáveis linguísticas do antecedente, ao invés de conjuntos fuzzy.

3.2 MODELAGEM TAKAGI-SUGENO FUZZY (MÉTODO DE TANIGUCHI)

O sistema T-S Fuzzy é representado da forma:

Modelo i

Se $z_1(t)$ é M_{1i} ... e $z_p(t)$ é M_{pi} , então $\dot{y}(t)$ é $A_i y(t)$,

em que $i = 1, \dots, r$ e r é o número de regras, M_{ji} é um conjunto fuzzy, $y \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de entrada e $z_1(t), \dots, z_p(t)$, com $p \in I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, são variáveis premissas, as quais podem depender do tempo, das variáveis de entrada ou de variáveis externas.

Dada a entrada $[y(t), z(t)]$ a saída final do sistema fuzzy é dado por:

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i y(t),$$

em que $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$, $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ji}(z_j(t))$.

Para apresentar a modelagem de Taniguchi, considera-se o sistema não linear (3) representado na sua forma matricial

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(z(t)) y_j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (51)$$

em que n denota o número de entradas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, $f_{ij}(z(t))$ são funções de $z(t)$. Para obter a representação exata do sistema (3) no conjunto $Z = \{x \in \mathbb{R}^n / |z_p| \leq d_p\}$, com $d_p \in \mathbb{R}, \in I$, é necessário definir as funções

$$a_{ij1} = \max_Z \{f_{ij}(z(t))\}, \quad a_{ij2} = \min_Z \{f_{ij}(z(t))\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

O número de regras é dado por $r = 2^s$, em que s é o número de não linearidades do sistema. As matrizes dos modelos locais são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{111} & \dots & a_{1n1} \\ \dots & & \dots \\ a_{n11} & \dots & a_{nn1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{111} & \dots & a_{1n1} \\ \dots & & \dots \\ a_{n11} & \dots & a_{nn2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad A_r = \begin{bmatrix} a_{112} & \dots & a_{1n2} \\ \dots & & \dots \\ a_{n12} & \dots & a_{nn2} \end{bmatrix}.$$

Define-se também

$$h_{ij1}(z(t)) = \frac{f_{ij}(z(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \quad h_{ij2}(z(t)) = 1 - h_{ij1}(z(t)),$$

então, as funções de pertinência são dadas por:

$$h_1(z(t)) = h_{111} * \dots * h_{1n1}, \quad h_2(z(t)) = h_{112} * \dots * h_{1n2}, \quad \dots, \quad h_r(z(t)) = h_{112} * \dots * h_{1n2}.$$

Note que, $h_i \geq 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^n h_i = 1$.

Portanto, o sistema não-linear (3) pode ser exatamente representado por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i(x(t)), \quad (57)$$

sobre o conjunto Z .

Na próxima seção, a modelagem de Taniguchi é explorada para obter condições suficientes de estabilidade em termos de LMIs.

3.3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS TAKAGI-SUGENO FUZZY

As seguintes definições, as quais são encontradas em Steinbruch e Winterle (1987), serão necessárias para melhor entender o resultado principal desta seção.

Definição 17 Uma matriz P de ordem n é positiva definida, denotada por $P > 0$, se, e somente se $y^T P y > 0$, $\forall y \neq 0$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Definição 18 A matriz $P = P[a_{ij}]$ de ordem n , é uma matriz simétrica, se os elementos dispostos simetricamente em relação a diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$.

O próximo resultado fornecerá condições suficientes para que o ponto de equilíbrio do sistema seja assintoticamente estável em termos de LMIs. Para isso, será considerada a função de classe C^1 , $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $V(y) = y^T P y$, com P sendo uma matriz simétrica, definida positiva.

Teorema 6 Considere o sistema não linear (3), o qual é representado exatamente por (57) em Z . Se existir uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, satisfazendo as seguintes LMIs:

$$P > 0, \quad (59)$$

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (60)$$

então, a origem do sistema será um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Demonstração 7 Se (59) é satisfeita, então a função $V(y) = y^T P y$ é definida positiva em Z . Ainda, a derivada dessa função ao longo da solução do sistema (57) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \dot{y}^T P y + y^T P \dot{y} = \left(\sum_{i=1}^r h_i A_i y(t) \right)^T P y + y^T P \left(\sum_{k=1}^r h_k(z(t)) A_k y(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i y^T (A_i^T P + P A_i) y. \end{aligned}$$

Se (60) é satisfeita, então V é decrescente em Z . Portanto, pelo Teorema 3 pode-se concluir que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Para mais detalhes veja em Tanaka e Wang (2001).

3.4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE MODELO MODELO SIS USANDO A MODELAGEM T-S FUZZY

Antes de verificar a estabilidade do modelo SIS através do Teorema 6, é necessário obter sua modelagem T-S fuzzy. Para isso, Considera-se o sistema (15) estudado no Capítulo 2, cujo ponto de equilíbrio $P_1^* = (S1, I1) = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0 \right)$ é diferente do ponto $(0, 0)$ quando $\Delta \neq 0$. O resultado de estabilidade via desigualdades matriciais lineares é somente obtido quando o ponto de equilíbrio do sistema é a origem. Por este motivo, será feita uma mudança de variável no sistema (15) para que o novo sistema tenha a origem como ponto de equilíbrio. Desta forma, considere

$$y_1 = S - \frac{\Delta}{\mu} \quad \text{e} \quad y_2 = I.$$

Logo,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \Delta - \alpha \left(y_1 + \frac{\Delta}{\mu} \right) y_2 - \mu \left(y_1 + \frac{\Delta}{\mu} \right) + \beta y_2 \\ \dot{y}_2 = \alpha \left(y_1 + \frac{\Delta}{\mu} \right) y_2 - (\beta + \mu + \phi) y_2, \end{cases} \quad (63)$$

é o novo sistema, cuja a origem é o ponto de equilíbrio. O sistema (63), pode ser escrito na forma matricial, da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - \alpha y_1 \\ \alpha y_2 & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

As não linearidades são dadas por

$$f_{12} = -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - \alpha y_1 \quad \text{e} \quad f_{21} = \alpha y_2.$$

Considerando o conjunto

$$Z = \{y \in \mathbb{R}^2 / -5 \leq y_1 \leq 5 \text{ e } -5 \leq y_2 \leq 5\}$$

obtem-se

$$a_{121} = -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta + 5\alpha, \quad a_{122} = -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - 5\alpha, \quad a_{211} = 5\alpha \text{ e } a_{212} = -5\alpha.$$

Logo, as matrizes dos modelos locais são dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta + 5\alpha \\ 5\alpha & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta + 5\alpha \\ -5\alpha & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - 5\alpha \\ -5\alpha & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - 5\alpha \\ -5\alpha & \frac{\alpha\Delta}{\mu} - (\delta + \mu + \phi) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (68)$$

e as funções de pertinência por:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{121} * h_{211}, \quad h_2 = h_{121} * h_{212}, \\ h_3 &= h_{122} * h_{212}, \quad h_4 = h_{122} * h_{211}, \end{aligned} \quad (70)$$

com

$$\begin{aligned} h_{121} &= \frac{-\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta - \alpha y_1 - \left(-\frac{\alpha\Delta}{\mu} + \beta + 5\alpha\right)}{10\alpha} \text{ e } h_{122} = 1 - h_{121}, \\ h_{211} &= \frac{\alpha y_2 + 5\alpha}{10\alpha} \text{ e } h_{212} = 1 - h_{211}. \end{aligned}$$

Portanto, o modelo não linear (64) pode ser exatamente representado pelo modelo fuzzy (57) com matrizes (68) e funções de pertinência (70) no conjunto Z .

Obtidas as matrizes dos modelos locais na modelagem T-S fuzzy do modelo SIS, o Teorema 6 será utilizado para analisar sua estabilidade. Então, resolvendo as LMIs (59)-(60) com o auxílio do MATLAB (Veja Anexo A) para as matrizes dos modelos locais (68) com os parâmetros $\Delta = 0.1$, $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.1$, $\mu = 0.05$, $\phi = 0.05$, é obtida a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 3.1700 & 0.9265 \\ 0.9265 & 2.4719 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo Teorema 6, a origem do sistema é assintoticamente estável. Na Figura 13 pode-se notar que as soluções com condições iniciais $y(0) = (0, -2) \in \Omega_\ell$ e $y(0) = (2, 1) \in \Omega_\ell$ são atraídas para a origem, com $\ell = 25$. A Figura 14 e 15 plotam a função V sobre as soluções do

sistema. Pode-se notar que, essa função é decrescente e converge para zero, como esperado do resultado.

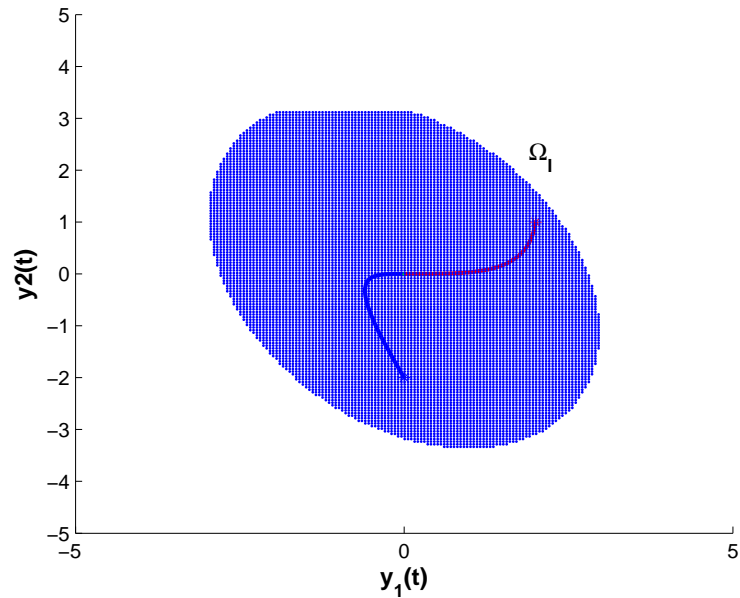


Figura 13: Soluções do modelo SIS com as condições iniciais $y(0) = (0, -2) \in \Omega_\ell$ e $y(0) = (2, 1) \in \Omega_\ell$.

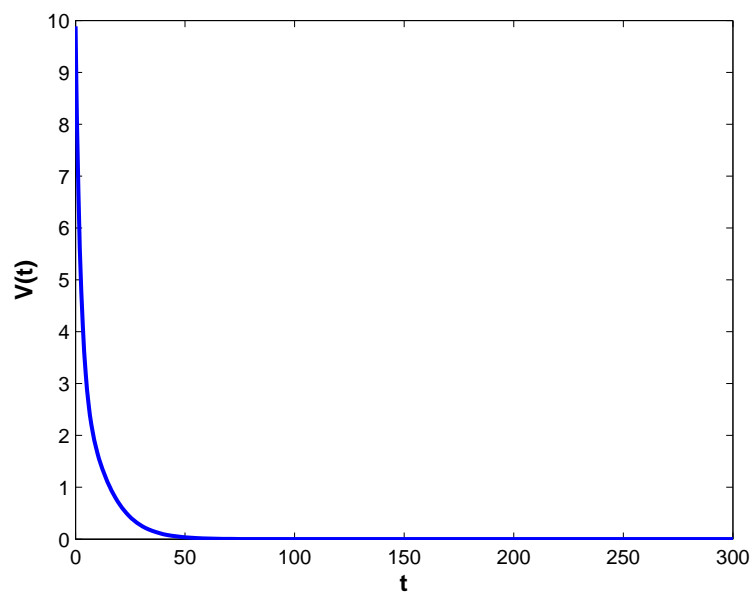


Figura 14: Função V sobre a solução do modelo SIS com condição inicial $y(0) = (0, -2) \in \Omega_\ell$.

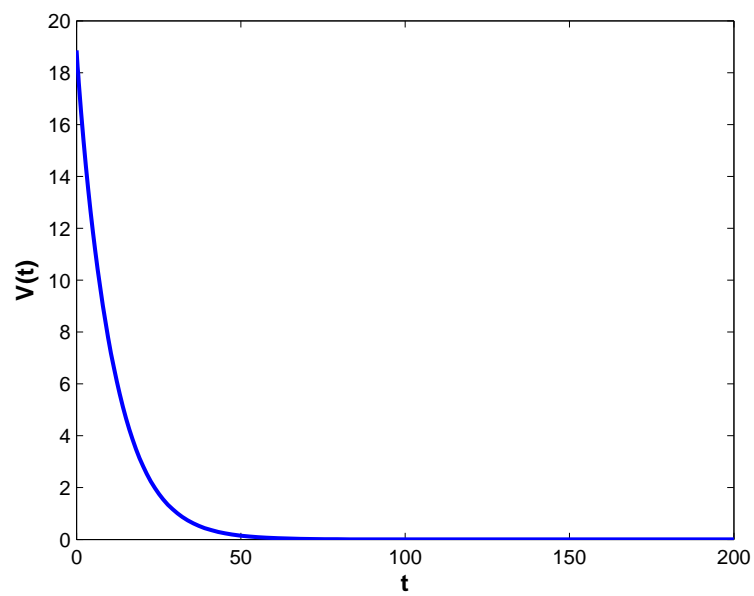


Figura 15: Função V sobre a solução do modelo SIS com condição inicial $y(0) = (2, 1) \in \Omega_\ell$.

4 CONCLUSÃO

No presente trabalho de conclusão de curso, foi considerada uma classe de sistemas não lineares, na qual tem-se a existência e unicidade das soluções, e então, foram apresentados resultados que fornecem condições suficientes para a análise do comportamento assintótico dessas soluções sem conhecer suas formas explícitas. Os primeiros resultados estudados, conhecidos como Teoremas de Lyapunov, dependem da escolha de uma função auxiliar V , também conhecida como função de Lyapunov, a qual deve ser positiva definida e sua derivada ao longo da solução do sistema deve ser não positiva. Encontrar tal função satisfazendo essas propriedades pode não ser possível para alguns modelos e ainda os resultados não apresentam informações da área de atração. Por isso, foi estudado o Princípio de Invariância de LaSalle, o qual é menos conservador com relação as propriedades exigidas sobre a função V e fornece estimativa da área de atração. Ainda, foi estudado a extensão do princípio de invariância, a qual tem como principal vantagem permitir que a derivada da função a ser encontrada V assumam valores positivos em alguns conjuntos. A eficiência desses quatro resultados foi comprovada na análise da solução de alguns modelos biológicos.

Quando o sistema não linear foi representado por um modelo T-S fuzzy, então uma maneira mais simples de garantir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio foi apresentada. Esse novo método permitiu analisar o comportamento da solução apenas verificando a factibilidade de um conjunto de LMIs, que são facilmente resolvidas com o auxílio do MATLAB. Esse resultado é uma aplicação do Teorema de Lyapunov para sistemas T-S fuzzy e ainda não existe na literatura atual a extensão do princípio de invariância para sistemas dessa classe de sistema, mas, este resultado será buscado em trabalhos futuros.

Os resultados parciais desse trabalho foram apresentados na IV Semana Acadêmica da Matemática (ALVES; VALENTINO, 2015b) da UTFPR-CP e no CMAC-Sudeste (ALVES; VALENTINO, 2015a), realizado na cidade de Vitória- ES. Ainda, teve sua aprovação no CNMAC de 2016.

REFERÊNCIAS

ALVES, W. L. L.; VALENTINO, M. C. **Análise de Estabilidade de sistemas não lineares via função comum de Lyapunov Fuzzy**. 2015. Disponível em: <<http://cmac-se-2015.swge.inf.br/submissao-de-trabalhos/>>. Acesso em: 4 de novembro de 2015.

ALVES, W. L. L.; VALENTINO, M. C. **Modelagem Takagi-Sugeno Fuzzy**. 2015. Disponível em: <<http://www.cp.utfpr.edu.br/semanamatematica2015/trabalhos/vf22.pdf>>. Acesso em: 4 de novembro de 2015.

BARROS, L. d.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos em lógica fuzzy e biomatemática**. São Paulo: UNICAMP/IMECC, 2006.

BESSA, G. R. **Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais ordinárias e aplicações: modelo presa-predador e competição entre espécies**. 2011. Disponível em: <<http://acervodigital.unesp.br/handle/unesp/170546>>. Acesso em: 10 de maio de 2015.

CARVALHO, R. M. **A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o Cálculo Contemporâneo**. 2007. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/espec/monografiasPdf/MonografiaRomeu.pdf>>. Acesso em: 4 de novembro de 2015.

CECCONELLO, M. S.; PEREIRA, C. M.; BASSANEZI, R. C. Análise qualitativa da solução fuzzy do modelo epidemiológico SIR. *Biomatemática*, v. 22, n. 1, p. 77–92, 2012.

COIMBRA, W. R.; COSTA, L. F.; AMARAL, F. M. **Uma Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos**. 2014. Disponível em: <<http://www.swge.inf.br/CBA2014/anais/PDF/1569911363.pdf>>. Acesso em: 7 de março de 2016.

DIACU, F. **Introdução a Equações Diferenciais Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

FARIA, F. A.; SILVA, G. N.; OLIVEIRA, V. A. de. **Análise de estabilidade de sistemas fuzzy usando funções de Lyapunov fuzzy**. São Paulo: Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications, 2010. 266-271 p.

FELTRIN, M. R. C. C. Aplicaç ao da função de Lyapunov num problema de controle ótimo de pragas. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 3, n. 2, p. 83–92, 2002.

JANG, J. S. R.; SUN, C. T.; MIZUTANI, E. Neuro-fuzzy and soft computing: a computational approach to learning and machine intelligence. *Systems & Control Letter*, 1997.

LASALLE, J. P. Some extensions of Liapunovs second method. *IRE Trans. Prof. Group on Circuit Theory*, v. 1, n. 1, p. 520–527, 1960.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LUIZ, M. H. R. **Modelos Matemáticos em epidemiologia**. 2012. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94348/luiz_mh_r_m_e_r_c_l_a_p_d_f?sequence=1>. Acesso em: 23 de setembro de 2015.

LYAPUNOV, A. M. **The general problem of the stability of motion**. Russia: Kharkov Mathematical Society, 1892.

MOZELLI, L. A. **Controle fuzzy para sistemas Takagi Sugeno: Condições aprimoradas e aplicações**. 2008. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/doc/90678852/Dissertacao-Mozelli-Final-1>>. Acesso em: 4 de novembro de 2015.

RODRIGUES, H. M.; ALBERTO, L. F. C.; BRETAS, N. G. On the invariance principle. generalizations and applications to synchronism. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 47, n. 5, p. 730–739, 2000.

RODRIGUES H., M. A. L. F. C. B. N. G. Um princípio de invariância uniforme: Robustez com relação a variação de parâmetros. *Revista da Sociedade Brasileira de Automática*, v. 13, n. 1, p. 51–67, 2002.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

TAKAGUI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; WANG, H. **Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach**. New York: John Wiley and Sons, 2001.

TANIGUCHI K. TANAKA, H. O. T.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 9, n. 1, p. 525–537, 2001.

TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.

VALENTINO, M. C. et al. An extension of the invariance principles for dwell-time nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, v. 61, n. 4, p. 580–586, 2012.

WANG, L. **Control of nonlinear systems**. New Orleans: Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, 1997.

ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, p. 338–353, 1965.

ANEXO A – CÓDIGOS DO MATLAB

Código LMIs do modelo SIS

```

delta= .1;
alpha= 0.005;
beta= .1;
mi= 0.05;
phi= 0.05;
A1 = [-mi ((-alpha*delta)/mi)+beta+5*alpha;5*alpha ((alpha*delta)/mi)-(beta+mi+phi)];
A2 = [-mi ((-alpha*delta)/mi)+beta+5*alpha;-5*alpha (alpha*delta)/mi-(beta+mi+phi)];
A3 = [-mi ((-alpha*delta)/mi)+beta-5*alpha;-5*alpha (alpha*delta)/mi-(beta+mi+phi)];
A4 = [-mi ((-alpha*delta)/mi)+beta-5*alpha;5*alpha (alpha*delta)/mi-(beta+mi+phi)];
P=sdpvar(2,2);
Restr= set(P>0)+set(A1'*P+P*A1 < 0)+set(A2'*P+P*A2 < 0)+set(A3'*P+P*A3 < 0)+...
set(A4'*P+P*A4 < 0);
solvesdp(Restr,[]);
[r,d]=checkset(Restr);
if sum(r<0) == 0
disp('Sistema estável')
Pfeasible = double(P);
P = double(P)
else
disp('Problema no resolvido')
end

```