UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCELO RENAN AUGUSTO FERREIRA

UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH A UMA EQUAÇÃO COM TRÊS PONTOS DE FRONTEIRA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2014

MARCELO RENAN AUGUSTO FERREIRA

UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH A UMA EQUAÇÃO COM TRÊS PONTOS DE FRONTEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à disciplina de Trabalho de Diplomação, do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática - DAMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Machado Martinez

CORNÉLIO PROCÓPIO

2014

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio

Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática
Licenciatura em Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PONTO FIXO DE BANACH A UMA EQUAÇÃO COM TRÊS PONTOS DE FRONTEIRA

por

MARCELO RENAN AUGUSTO FERREIRA

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado em 26 de novembro de 2014 como requisito parcial para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

André Luís Machado Martinez
Prof.(a) Orientador(a)

Cristiane Aparecida Pendeza Martinez
Membro titular

Anderson Paião dos Santos
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso -

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais que são o meu alicerce e que mesmo a distância me apoiaram em todas dificuldades que enfrentei.

Ao Tiago e ao Luan, que em Cornélio Procópio foram a minha família durante 4 anos.

Aos meus colegas de sala por terem aguentado essa caminhada ao meu lado.

Ao professor Dr. André Luís Machado Martinez pela paciência, confiança, ensinamentos que me trouxeram até aqui e por ter sido um excelente professor e orientador.

Ao professor Milton Kist por ter me ajudado, aconselhado e me incentivado a permanecer no curso de Licenciatura.

A todos os funcionários da Universidade Tecnológica Federal do Paraná no qual eu tive oportunidade de conviver no dia-a-dia.

Uma verdade matemática não é simples nem complicada por si mesma.
É uma verdade. (Emile Lemoine)

RESUMO

FERREIRA, Marcelo. UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH A UMA EQUAÇÃO COM TRÊS PONTOS DE FRONTEIRA. 29 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

As equações diferenciais constituem uma classe de problemas na Matemática que envolvem uma pluralidade de conteúdos, dentre eles, destacamos a Teoria de Ponto Fixo, ferramenta essa que utilizaremos para estudar a seguinte equação diferencial não linear de terceira ordem com três pontos de fronteira:

$$u''' + f(t,u,u') = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \alpha u'(\eta) = \lambda.$$

Então explicitaremos lemas e hipóteses que se farão necessários para utilizarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e demonstrar existência de unicidade de solução.

Palavras-chave: Ponto Fixo, Função de Green, Espaços Métricos, Teorema de Banach

ABSTRACT

FERREIRA, Marcelo. AN APLICATION OF BANACH FIXED POINT THEOREM AN EQUATION WITH THREE POINTS BOUNDARY VALUE PROBLEMS. 29 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Matemática do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

The diferencial equations consist in a class of Mathematics problems that involve a plurality of contents, among which the Fixed Point Theory is highlighted, which is a tool used in order to study the following third-order three-point nonhomogeneous boundary value problems:

$$u''' + f(t,u,u') = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \alpha u'(\eta) = \lambda.$$

So it will be explicited lemmas and hypotheses needed to use the Banach Fixed Point Theorem and demonstrate the existence of uniqueness of solution.

Keywords: Fixed Point, Green Function, Metric Spaces, Banach Theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais de terceira ordem com três pontos de fronteira modelam diversos problemas e vem ganhando destaque na área acadêmica, nesse cenário existem diversos trabalhos com essa classe de equações, destacamos (SUN, 2009), (LEGGETT; WILLIAMS, 1979), (ANDERSON, 2003), (GUO et al., 2008) e (YU et al., 2004), considerando os avanços em (SUN, 2009) para a equação:

$$u''' + a(t)f(u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \alpha u'(\eta) = \lambda,$$

que tem como objetivo demonstrar existência de solução para uma equação não homogênea com três pontos de fronteira via Teorema de Krasnoselskii. Equações desse gênero possuem uma variedade de aplicações, consequentemente existe um grande número de trabalhos acadêmicos que envolvem problemas similares, como vemos em (GUO et al., 2008), (SUN, 2005), (MARTINEZ et al., 2013) e (MARTINEZ et al., 2011).

Porém podemos observar a falta de trabalhos que considerem na função f a dependência em relação a derivada da solução, u'. Vamos trabalhar com condições mais gerais para o problema acima. Para isto realizaremos um estudo para a seguinte equação:

$$u''' + f(t,u,u') = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \alpha u'(\eta) = \lambda,$$

onde $\eta \in (0,1), \alpha \in [0, \frac{1}{\eta})$ são constantes e $\lambda \in (0,\infty)$ é um parâmetro. Assim, estamos utilizando as condições de fronteira clássicas, porém ao invés de realizar o estudo com uma função super-linear, o problema foi generalizado para uma função f possivelmente não linear.

As equações diferenciais não homogêneas, muitas vezes fazem uso da Teoria de Ponto Fixo a qual possui importantes ferramentas para lidar com essa classe de problemas como podemos ver em (SUN, 2009), (SUN, 2005), (MARTINEZ et al., 2011) e (MARTINEZ et al., 2013). Inspirados nesses trabalhos, apresentaremos alguns conceitos prévios de equações diferenciais, cálculo avançado, espaços métricos para estabelecermos um problema de ponto fixo equivalente a equação diferencial a fim analisar propriedades da Função de Green que compõe o operador integral e determinar condições sobre esse operador para demonstrar existência e unicidade de solução via Teorema do Ponto Fixo de Banach.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são descritos os principais conceitos relacionados com este trabalho.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS

2.1.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Como o foco deste trabalho não é realizar um estudo sobre equações diferenciais, mas sim resolver um problema de valor de fronteira, que está inserido nesse assunto, apresentaremos apenas conceitos básicos contidos em (BOYCE et al., 1992) que necessitamos para compreender nosso problema.

Uma equação diferencial é uma equação na qual a incógnita é uma função e se soluciona utilizando as derivadas desta função, assim possuímos variável dependente e independente. As equações diferenciais possuem inúmeras aplicações em problemas de física, como em circuitos elétricos, equações de calor, equações de onda etc. As equações podem ser lineares ou não lineares e podemos separá-las em grau e ordem, no qual grau é o maior expoente que aparece e ordem se refere a derivada da função.

Exemplo 2.1.1 *Considere a equação diferencial:* $y'' + 2x = 0$.

Esta equação é de grau 1 e ordem 2.

Definição 2.1.2 *Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) uma equação na qual a função depende apenas de uma variável, ou seja, na forma:*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)),$$

onde y é variável dependente e x variável independente.

2.1.2 TEOREMA DE ROLLE E TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Aqui serão apresentados o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio, respectivamente, a fim de que possamos mostrar desigualdades entre normas.

Teorema 2.1.3 *Dada uma função contínua f definida num intervalo $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

A demonstração do Teorema de Rolle será omitida pois ele não é utilizado diretamente nesse trabalho.

Teorema 2.1.4 *Dada uma função contínua f definida em um intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Seja

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, logo $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. Vamos considerar $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

Portanto, h é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), além disso:

$$h(a) = 0 \quad e \quad h(b) = 0.$$

Segue do Teorema de Rolle que existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$h'(c) = 0 \Rightarrow g'(c) - f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(c) = f'(c).$$

□

Exemplo 2.1.5 *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ então escolhendo $c = \dfrac{1}{2}$ vale o Teorema do Valor Médio:*

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{1}{2} = \frac{1^2 - 0^2}{1 - 0}.$$

2.1.3 REGRA DE LEIBNIZ

A Regra de Leibniz (Teorema 2.1.6) e sua generalização (Teorema 2.1.7) podem ser encontradas em (LIMA, 1981) e são de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 2.1.6 *Seja $f(x,y)$ uma função com domínio $R = [a,b] \times [c,d]$ e imagem em $\mathbb{R}$. Chamamos $I = [a,b]$ e $J = [c,d]$. Suponha que f e f_x sejam contínuas sobre o retângulo R e seja a função $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$G(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Então, a derivada de G(x) com relação a x é dada por:

$$\int_c^d f_x(x,y)dy \quad com \quad x \in (a,b).$$

Teorema 2.1.7 *Suponha que f e a sua derivada com relação a x são contínuas no retângulo R, e que $h_0(x)$ e $h_1(x)$ são funções de I em J com derivadas de primeira ordem contínuas em I. Se $G(x) = \int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f(x,y)dy$, para todo $x \in I$, então a sua derivada com relação a x é*

$$\int_{h_0(x)}^{h_1(x)} D(f)(x,y)\,dy + D(h_1)(x)f(x,h_1(x)) - D(h_0)(x)f(x,h_0(x)).$$

2.2 ESPAÇOS MÉTRICOS

A fim de que possamos resolver o problema proposto nesse trabalho, devemos compreender o que são Espaços Métricos, Espaços de funções contínuas e Espaços Métricos Completos, e as definições a seguir podem ser encontradas em (LIMA, 1977).

Definição 2.2.1 *Seja X um dado conjunto. Uma métrica em X é qualquer função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes propriedades:*

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Definição 2.2.2 *Um espaço métrico é um par* (M,d)*, onde* M *é um conjunto e* d *é uma métrica em* M.

Exemplo 2.2.3 *O conjunto dos Números Reais é um Espaço Métrico munido da métrica* $d(x,y) = |x-y|$ *com* $x,y \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.4 *Seja um conjunto* M *tal que* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *é definida da seguinte forma:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad x = y \\ 1, & se \quad x \neq y \end{cases}$$

Vefifica-se que d *é uma métrica em* M*, chamada de métrica zero-um.*

Sabendo o que são espaços métricos, é necessário ter a ideia do que são bola e esfera, conceitos que serão utilizados nesse trabalho.

Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, definimos:

Definição 2.2.5 *A bola aberta de centro* a *e raio* r *é o conjunto, denotado por* $B(a;r)$*, dos pontos de* M *cuja distância ao ponto* a *é menor do que* r*, ou seja,*

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

Definição 2.2.6 *A bola fechada de centro* a *e raio* r *é o conjunto, denotado por* $B[a;r]$*, formado pelos pontos de* M *que estão a uma distância menor ou igual a* r *do ponto* a*, ou seja,*

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

Definição 2.2.7 *A esfera de centro* a *e raio* r *é o conjunto, denotado por* $S(a;r)$*, formado pelos pontos de* M *que estão a uma distância igual a* r *do ponto* a*, ou seja,*

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Note que $B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r)$ *(reunião disjunta).*

Exemplo 2.2.8 *Se* M *está munido da métrica zero-um, então para todo* $a \in M$*, tem-se* $B(a;r) = B[a;r] = M$ *se* $r > 1$ *e* $B(a;r) = B[a;r] = \{a\}$ *se* $r < 1$*. Por outro lado* $B(a;1) = \{a\}$ *e* $B[a;1] = M$*. Consequentemente,* $S(a;r) = \phi$ *se* r *diferente* 1*, enquanto* $S(a;1) = M - \{a\}$.

Ainda na classe de espaços métricos, existem os espaços vetoriais normados.

Definição 2.2.9 *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz:*

- $\|x\| \geq 0$*;*
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$*, para todo $x \in X$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;*
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemplo 2.2.10 *Sabemos que o conjunto $\mathbb{R}^n$, munido das operações usuais de soma e produto por escalar, é um espaço vetorial de dimensão n. As expressões abaixo definem normas equivalentes em $\mathbb{R}^n$: se $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2},$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}.$$

Definição 2.2.11 *Seja $C[a,b] = \{f \,|\, f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ o espaço de funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 2.2.12 *Temos as seguintes normas sobre $C[a,b]$*

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b f(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0,$$
$$\|f\|_\infty = max|f(x)|, \quad x \in [a,b].$$

Definição 2.2.13 *Seja $E = C^1[a,b] = \{f \,|\, f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ o espaço das funções continuamente diferenciáveis.*

Exemplo 2.2.14 *Temos as seguintes normas sobre E:*

$$\|f\|_E = max\left\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right\},$$

$$\|f\|_{E,1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Assim como no Cálculo de uma, duas ou mais variáveis, possuímos em espaços métricos a definição de sequências, limite e continuidade, explicitaremos apenas as mais importantes que serão utilizados no decorrer desse trabalho.

2.2.1 SEQUÊNCIAS, LIMITE E CONTINUIDADE EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 2.2.15 *Uma sequência num espaço métrico (X,d) é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to X$. O valor que a sequência x assume em $n \in \mathbb{N}$ termo será indicado por x_n.*

Definição 2.2.16 *Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico (X,d). Dizemos que $a \in X$ é o limite da sequência (x_n) quando para todo $\varepsilon > 0$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n,a) < \varepsilon$. Então diremos que a sequência (x_n) converge para a e denotaremos por $\lim x_n = a$.*

Exemplo 2.2.17 *Dada a sequência de números reais $x_n = \frac{1}{n}$, temos $\lim x_n = 0$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ e vemos que:*

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Definição 2.2.18 *Uma sequência (x_n) num espaço métrico (M,d) chama-se uma sequência de Cauchy quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon$.*

Definição 2.2.19 *Diz-se que o espaço métrico (M,d) é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Proposição 2.2.20 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico (M,d) então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Se tomarmos $m,n > n_0$ teremos:

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,a) + d(x_n,a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

Proposição 2.2.21 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja x_n uma sequência de Cauchy no espaço métrico (M,d). Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m,x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_{0+1}}, x_{n_{0+2}}, ...\}$ é limitado e tem diâmetro ≤ 1. Segue que

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_{n_{0+1}}, x_{n_{0+2}}, ...\}$$

é limitado. □

Definição 2.2.22 *Um ponto a diz-se aderente a conjunto X de um espaço métrico (M,d) quando para todo $\varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \cap X \neq 0$.*

Definição 2.2.23 *O fecho (ou aderência) de um conjunto X num espaço métrico (M,d) é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos de M que são aderentes a X.*

Exemplo 2.2.24 *Todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Além disso, os pontos de fronteira ∂X também são aderentes a X. Por exemplo, se $X = [0,1)$ em $\mathbb{R}$, então 1 é aderente a X.*

Definição 2.2.25 *Seja X um subconjunto do espaço métrico (M,d), $a \in \overline{X}$ um ponto aderente a X e $f : X \to N$ um aplicação definida em X e tomando valores num espaço métrico (N,d'). Diz-se que um ponto $b \in N$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $b = \lim_{x\to a} f(x)$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado é possível obter $\delta > 0$ para $x \in X$, $d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x),b) < \varepsilon$.*

Definição 2.2.26 *Sejam (M,d) e (N,d') espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.*

Exemplo 2.2.27 *Seja $I = (a,b)$ um intervalo aberto da reta. Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é monótona limitada, então existem sempre os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to b} f(x)$. Suponhamos f não decrescente e mostremos, por exemplo, que existe $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Basta tomar, nesse caso, $L = sup\{f(x); a < x < b\}$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, podemos obter $x_0 = b - \delta$ em (a,b) tal que $L - \varepsilon < f(x_0) < L$. Segue-se da monotocidade de f que $b - \delta < x < b \Rightarrow L - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon$ ou $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Logo $\lim_{x\to b} f(x) = L$.*

Definição 2.2.28 *Sejam (M,d) e (N,d') espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Exemplo 2.2.29 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & se \quad x < 0 \\ 1, & se \quad x > 0 \end{cases},$$

a função f é contínua, mas não é uniformemente contínua pois há pontos x, $-x$ tão próximos um do outro quanto se queira, com $|f(x) - f(-x)| < 2$.

Definição 2.2.30 *Sejam (X,d) e $(Y,d^{'})$ espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita Lipschitz contínua se existir uma constante L tal que:*

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld'(x,y) \text{ para quaisquer } x, y \in X.$$

Observação 2.2.31 *Se $0 < L < 1$ então a função é chamada de contração.*

Teorema 2.2.32 *Toda aplicação Lipschitziana $f : M \rightarrow N$ é uniformemente contínua.*

Demonstração: Temos por definição que $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Então dado $\varepsilon > 0$ basta escolhermos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$ pois quando $d(x,y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y) < L.\delta = \varepsilon$. □

2.3 CONCEITOS DE PONTO FIXO

Um teorema de ponto fixo é essencialmente um resultado que estabelece condições para que exista um elemento c do domínio de um operador P, tal que $P(c) = c$. Esses tipos de teoremas permitem aplicações como provas de existência de solucões de equações diferenciais, existência de raízes de equações etc. O Teorema de Contração de Banach, ferramenta que será utilizada no trabalho, foi proposto por Stefan Banach em 1922 é também conhecido como o princípio de contração. Esse teorema pode ser utilizado em cálculo numérico para provar a existência e unicidade de soluções de equações de diversos tipos. As definições e o teorema apresentados nessa seção podem ser encontrados com maiores detalhes em (AGARWAL et al., 2001).

Definição 2.3.1 *Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui ponto fixo se existe $c \in X$ tal que $f(c) = c$.*

2.3.1 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Teorema 2.3.2 *Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $F : X \to X$ uma contração com constante Lipschitziana L. Então, F tem um único ponto fixo $u \in X$. Além disso para todo $x \in X$ temos*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = u$$

com

$$d(F^n(x),u) \le \frac{L^n}{1-L} d(x,F(x)).$$

Demonstração: Para provar a existência de ponto fixo, fixe $x \in X$. Assim mostraremos que $\{F^n(x)\}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, observemos que para $n \in \{0,1,2,...\}$

$$d(F^n(x),F^{n+1}(x)) \le Ld(F^{n-1}(x),F^n(x)) \le ... \le L^n d(x,F(x))$$

Deste modo para $m > n$, onde $n \in \{0,1,2,...\}$,

$$\begin{aligned} d(F^n(x),F^m(x)) &\le d(F^n(x),F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x),F^{n+2}(x)) \\ &+ ... + d(F^{m-1}(x),F^m(x)) \\ &\le L^n d(x,F(x)) + ... + L^{m-1} d(x,F(x)) \\ &\le L^n d(x,F(x))[1+L+L^2+...] \\ &= \frac{L^n}{1-L} d(x,F(x)), \end{aligned}$$

ou seja para $m > n \in \{0,1,2,...\}$,

$$d(F^n(x),F^m(x)) \le \frac{L^n}{1-L} d(x,F(x)). \tag{1}$$

Agora como X é completo, existe $u \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = u$. Além disso, a continuidade de F implica que

$$u = \lim_{n\to\infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} F(F^n(x)) = F(u).$$

Portanto u é um ponto fixo de F. Finalmente fazendo $m \to \infty$ em (1) obtemos

$$d(F^n(x),u) \le \frac{L^n}{1-L} d(x,F(x)).$$

Agora mostraremos a unicidade do ponto fixo. Para isso suponha que existam

$u, v \in X$ tais que $u = F(u)$ e $v = F(v)$. Então,

$$d(u,v) = d(F(u),F(v)) \leq Ld(u,v),$$

com $0 < L < 1$, pois F é contração, logo $u = v$.

$\square$

3 METODOLOGIA

Nesse capítulo mostraremos o processo que deve ser realizado para encontrar a solução do problema estudado. Consideraremos a seguinte equação diferencial não homogênea de terceira ordem com as seguintes condições de fronteira:

$$u''' + f(t,u,u') = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{2}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \alpha u'(\eta) = \lambda, \tag{3}$$

onde $\eta \in (0,1), \alpha \in [0, \frac{1}{\eta})$ são constantes e $\lambda \in (0,\infty)$ é um parâmetro.

3.1 RESULTADOS PRELIMINARES

O texto que apresentaremos nesta seção é original e consequentemente a parte mais importante desse trabalho, para isso nos basearemos os avanços em (SUN, 2009) e contruíremos lemas para o estudo de solução da equação (2) com as condições de fronteira (3) e algumas propriedades da Função de Green que serão utilizada no decorrer do trabalho.

Lema 3.1.1 *Seja $x \in C[0,1]$. Então a única solução do problema de valor de fronteira:*

$$u''' + f(t,x,x') = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{4}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \alpha u'(\eta) = \lambda, \tag{5}$$

é dada por

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x,x')ds + \frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)} \int_0^1 G_1(\eta,s) f(s,x,x')ds + \frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta)} \tag{6}$$

onde G é a Função de Green dada por:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2t - t^2 - s)s, & s \le t \\ \frac{1}{2}(1-s)t^2, & t \le s \end{cases} \tag{7}$$

e

$$G_1(t,s) = \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \begin{cases} (1-t)s, & s \leq t \\ (1-s)t, & t \leq s \end{cases}. \tag{8}$$

Demonstração: Primeiramente mostraremos que $u(t)$ é solução, para isso basta derivarmos a função três vezes:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x,x')ds + \frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^1 G_1(\eta,s)f(s,x,x')ds + \frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta)},$$

para facilitar a demonstração iremos considerar:

$$I = \frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^1 G_1(\eta,s)f(s,x,x')ds + \frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta)}$$

então, utilizando G_1 tem-se:

$$u'(t) = \int_0^t (1-t)sf(s,x,x')ds + \int_t^1 (1-s)tf(s,x,x')ds + I'$$

utilizando o Teorema 2.1.7

$$u''(t) = \int_0^t -sf(s,x,x')ds + (1-t)tf(t,x,x') + \int_t^1 (1-s)f(s,x,x')ds - f(t,x,x') + I''$$

agora pelo Teorema 2.1.6 e notando que $I''' = 0$ tem-se:

$$u'''(t) = -tf(t,x,x') + (1-t)f(t,x,x') - (1-t)f(t,x,x') - (1-t)f(t,x,x')$$

$$= -f(t,x,x').$$

Agora provemos que $u(t)$ é a única solução, para isso podemos supor que $u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s,x,x')ds + At^2 + Bt + C.$

Pelas condições de fronteira (5), tem-se B = C = 0 e

$$A = \frac{1}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^1 (1-s)f(s,x,x')ds - \frac{\alpha}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^\eta (\eta-s)f(s,x,x')ds$$

$$+\frac{\lambda}{(1-\alpha\eta)}$$

Então o problema de valor de fronteira (4) e (5) possuem única solução

$$u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s,x,x')ds + \frac{t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^1 (1-s)f(s,x,x')ds -$$

$$-\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x,x')ds+\frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2f(s,x,x')ds+\frac{t^2}{2}\int_0^1(1-s)f(s,x,x')ds+$$

$$+\frac{\alpha\eta t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^1(1-s)f(s,x,x')ds-\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x,x')ds+$$

$$+\frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t(-t^2+2st-s^2)f(s,x,x')ds+\frac{1}{2}\int_0^t(1-s)t^2f(s,x,x')ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^1(1-s)t^2f(s,x,x')ds+\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^\eta(1-s)\eta f(s,x,x')ds+$$

$$+\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta}\int_\eta^1(1-s)\eta f(s,x,x')ds-\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x,x')ds+$$

$$+\frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t(2t-t^2-s)sf(s,x,x')ds+\frac{1}{2}\int_t^1(1-s)t^2f(s,x,x')ds$$

$$+\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\left(\int_0^\eta(1-\eta)sf(s,x,x')ds+\int_\eta^1\eta(1-s)f(s,x,x')ds\right)+\frac{\eta t^2}{2(1-\alpha\eta)}+$$

$$=\int_0^1G(t,s)f(s,x,x')ds+\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^1G_1(\eta,s)f(s,x,x')ds+\frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta}.$$

A demonstração está completa. □

No lema demonstrado, ressalta-se que não foi trabalhado a solução da equação 2 e sim um problema equivalente.

Através dos lemas anteriores, a equação (2) com condições de fronteira (3) possui solução $u=u(t)$ se, e somente se, u for ponto fixo do operador T definido da seguinte forma:

$$Tu(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,u,u')ds+\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^1G_1(\eta,s)f(s,u,u')ds+\frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta)}.$$

A seguir apresentamos propriedades das funções G e G_1 que compõe o operador T.

Lema 3.1.2 *Para todo* $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ *temos:*

$$0\le G_1(t,s)\le(1-s)s$$

Demonstração: *Pela equação (8) quando $s \leq t$:*

$$0 \leq (1-t)s \leq (1-s)s$$

e quando $t \leq s$

$$0 \leq (1-s)t \leq (1-s)s$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 3.1.3 *Para todo $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, temos:*

$$G(t,s) \leq G_1(1,s) = \frac{1}{2}(1-s)s$$

Demonstração: *Se $s \leq t$ segue de (7):*

$$G(t,s) = \frac{1}{2}(2t-t^2-s)s = \frac{1}{2}[1-s-(1-t)^2]s \leq \frac{1}{2}(1-s)s = G(1,s)$$

e se $t \leq s$,

$$G(t,s) = \frac{1}{2}(1-s)t^2 = \frac{1}{2}(t^2-st^2) \leq \frac{1}{2}(s-s^2) = G(1,s)$$

□

Proposição 3.1.4 *Se $u \in E = C^1[a,b]$, então Tu satusfaz $Tu(0) = 0$, além disso $\|(Tu)'\|_\infty \geq \|Tu\|_E$*

Demonstração: De fato, seja $a \in [0,1]$ tem-se pelo Teorema do Valor Médio que:

$$(Tu)'(c) = \frac{(Tu)(a)-(Tu)(0)}{a-0} = \frac{(Tu)(a)}{a}$$

$$\Rightarrow |(Tu)(a)| \leq |(Tu)'(c)|.$$

□

3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Para garantir a solução de (2), consideraremos a seguintes hipóteses:

$(H1)$ Existem constantes positivas A, B e β tais que:

- $\max\limits_{(s,v_1,v_2)\in[0,1]\times[-\beta,\beta]\times[-\beta,\beta]} \{|f(s,v_1,v_2)|\} \leq \dfrac{\beta(1-\alpha\eta)6B}{1+\alpha(1-\eta)}$

- $\lambda \leq A\beta(1-\alpha\eta)$

- $A+B \leq 1$

$(H2)$ $|f(s,u,u')-f(s,v,v')| \leq A.\max\{(u(s)-v(s)),(u'(s)-v'(s))\}$

$(H3)$ $\dfrac{1}{8}+\dfrac{\alpha t\eta(-\eta+1)}{2(1-\alpha\eta)} \leq \dfrac{1}{A}$

Lema 3.2.1 *Suponha que* $(H1)$ *ocorra. Então* T *aplica* $\overline{\Omega}$ *em* $\overline{\Omega}$ *onde* $\Omega = \{u \in E; \|u\|_E \leq \beta\}$.

Demonstração: *De fato,*

$$
\begin{aligned}
&\|Tu\|_E \leq \|(Tu)'\|_\infty \\
&\leq |Tu| = \left|\int_0^1 G_1(t,s)f(s,u,u')ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 G_1(\eta,s)f(s,u,u') + \frac{\lambda t}{1-\alpha\eta}\right| \\
&\leq \int_0^1 |G_1(t,s)f(s,u,u')ds| + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |G_1(\eta,s)f(s,u,u')| + \left|\frac{\lambda t}{1-\alpha\eta}\right| \\
&\qquad \textit{Utilizando o (Lema 3.1.3),} \\
&\leq \frac{1-\alpha\eta+\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |(1-s)sf(s,u,u')|ds + \left|\frac{\lambda t}{1-\alpha\eta}\right| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \frac{1+\alpha(-\eta+1)}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |(1-s)s||f(s,u,u')|ds + \left|\frac{\lambda}{1-\alpha\eta}\right| \\
&\leq \max_{(s,v_1,v_2)\in[0,1]\times[-\beta,\beta]\times[-\beta,\beta]} \frac{1+\alpha(-\eta+1)}{1-\alpha\eta}|f(s,v_1,v_2)|\int_0^1 (1-s)s\,ds + \left|\frac{\lambda}{1-\alpha\eta}\right| \\
&\leq \max_{(s,v_1,v_2)\in[0,1]\times[-\beta,\beta]\times[-\beta,\beta]} \frac{1+\alpha(-\eta+1)}{1-\alpha\eta}\frac{|f(s,v_1,v_2)|}{6} + \left|\frac{\lambda}{1-\alpha\eta}\right| \\
&= \frac{1}{1-\alpha\eta}\left[\frac{1+\alpha(1-\eta)}{6}\max|(s,v_1,v_2)| + \lambda\right] \\
&\leq \frac{1}{1-\alpha\eta}\left[\frac{1+\alpha(1-\eta)}{6}\frac{\beta(1-\alpha\eta)6B}{1+\alpha(1-\eta)} + \lambda\right] \\
&\leq \frac{1}{1-\alpha\eta}[\beta(1-\alpha\eta)B + A\beta(1-\alpha\eta)] \\
&\leq \beta A + \beta B \leq \beta
\end{aligned}
$$

□

Agora consideraremos os seguintes exemplos para o lema acima.

Exemplo 3.2.2 *Considerando em (2) e (3),*

$$f(s,u,v) = \frac{1}{2}s + u^2 + v^2,$$

$$\eta = 10^{-1}, \alpha = \frac{1}{3}, \lambda = 0.25.$$

Obtemos

$$u''' + \frac{1}{2}s + u^2 + v^2 = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \frac{1}{3}u'(10^{-1}) = 0,25.$$

Considerando $\beta = \frac{1}{2}$, $A = 0,54$ *e* $B = 0,45$ *então a hipótese* $(H1)$ *é satisfeita.*

De fato,

$$\max_{(s,v_1,v_2)\in[0,1]\times[-\beta,\beta]\times[-\beta,\beta]} \{|f(s,v_1,v_2)|\} \leq \frac{\beta(1-\alpha\eta)6B}{1+\alpha(1-\eta)}$$
$$\max f(s,u,v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq \frac{0.5(1-0,1.0,33)6.0,45}{1+0,33(1-0,1)} = 1,0038$$
$$\lambda \leq A\beta(1-\alpha\eta)$$

$$0,25 < 0,54(0,5-0,1.0,33) = 0,2520$$

$$A + B \leq 1$$

$$0,45 + 0,54 = 0,99 < 1.$$

Exemplo 3.2.3 *Analogamente ao exemplo (3.2.2):*

$$f(s,u,v) = \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}sen(u) + \frac{1}{4}cos(v)$$

$$\eta = \frac{1}{9}, \alpha = \frac{1}{6}, \lambda = 1,4$$

Obtemos

$$u''' + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}sen(u) + \frac{1}{4}cos(v) = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) - \frac{1}{6}u'\left(\frac{1}{4}\right) = 1,4.$$

Considerando $\beta = 2$, $A = 0,75$ *e* $B = 0,2$ *então a hipótese* $(H1)$ *é satisfeita.*

De fato,

$$\max_{(s,v_1,v_2)\in[0,1]\times[-\beta,\beta]\times[-\beta,\beta]} \{|f(s,v_1,v_2)|\} \leq \frac{\beta(1-\alpha\eta)6B}{1+\alpha(1-\eta)}$$

$$\max f(s,u,v) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \leq \frac{2(1-0,16.0,11)6.0,2}{1+0,16(1-0,11)} = 2.0639$$

$$\lambda \leq A\beta(1-\alpha\eta)$$

$$1,4 < 0,75.2(1-0,16.0,11) = 1.4736$$

$$A+B \leq 1$$

$$0,75+0,2 = 0,95 < 1$$

Para entendimento do próximo teorema, iremos considerar a seguinte sequência iterativa:

$$u^{k+1} = T(u^k)$$

$$u^{k+1} = \int_0^1 G(t,s)f(s,u^k(t),u^{k'}(t))ds +$$

$$+\frac{\alpha t^2}{2(1-\alpha\eta)}\int_0^1 G_1(\eta,s)f(s,u^k(t),u^{k'}(t))ds + \frac{\lambda t^2}{2(1-\alpha\eta)} \tag{9}$$

Teorema 3.2.4 *Suponha que $(H1)$, $(H2)$ e $(H3)$ sejam válidas. Então, T possui uma única solução u tal que, $\|u\|_E \leq \beta$. Além disso essa solução é limite da sequência iterativa $u^{k+1} = T(u^k)$.*

Demonstração*: Sejam $u,v \in \Omega$ com $\|u\|_E \leq \beta$ e $\|v\|_E \leq \beta$ então*

$\|Tu-Tv\|_E = \|(Tu-Tv)'\|_\infty$

$= \left|\int_0^1 G_1(t,s)[f(s,u,u')-f(s,v,v')]ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 G_1(t,s)[f(s,u,u')-f(s,v,v')]\right|$

$\leq A\max_s\left\{|u(s)-v(s)|,|u'(s)-v'(s)|\right\}\left(\int_0^1 G_1(t,s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 G_1(\eta,s)ds\right)$

$\leq A\max_s\left\{|u(s)-v(s)|,|u'(s)-v'(s)|\right\}\max_t\left(\frac{1}{8}+\frac{\alpha t\eta(-\eta+1)}{2(1-\alpha\eta)}\right)$

Utilizando de $(H3)$

$\leq A\max_s\left\{|u(s)-v(s)|,|u'(s)-v'(s)|\right\}\frac{1}{A}$

$\leq \max_s\left\{|u(s)-v(s)|,|u'(s)-v'(s)|\right\} = \|u-v\|_E$ □

A partir do Teorema 3.2.4 podemos garantir que o problema (2) com as condições de fonteira (3) satisfazendo as hipóteses $(H1)$, $(H2)$ e $(H3)$ possui única solução que pode ser obtida como o limite da sequência iterativa (9).

4 CONCLUSÃO

Nesse trabalho de conclusão de curso foi realizado um estudo englobando diversos conteúdos relacionados a equações diferenciais, embasados em artigos atuais como (MARTINEZ et al., 2011), (MARTINEZ et al., 2013), (YU et al., 2004), (GUO et al., 2008), então houve a necessidade de se explorar conceitos sobre Cálculo Avançado, Espaços Métricos e por fim Teoria de Ponto Fixo, contidos na revisão bibliográfica.

Nosso objetivo de estudo foi uma equação diferencial de 3^a ordem, desde sua apresentação original contida em (SUN, 2009), então baseado nas técnicas de (MARTINEZ et al., 2013), consideramos uma generalização da equação, para assim encontrar um problema equivalente definido por um operador integral, desde a construção da Função de Green utilizada até as condições de convergência para a solução.

A partir deste operador, foi estudado uma técnica clássica para demonstração de existência e unicidade de solução via Teorema do Ponto Fixo de Banach, que mediante hipóteses condicionadas ao problema, permite que a a convergência da solução da equação seja o ponto fixo do operador integral, além disso apresentamos exemplos para (H1).

Dentre os diversos trabalhos sobre equações diferenciais, vale ressaltar a importância desse TCC uma vez que ao cumprir as etapas citadas acima, conseguimos resultados inéditos para uma equação clássica generalizada, para que no período após o trabalho de conclusão de curso possa ser realizado testes numéricos para que o trabalho seja submetido a alguma revista científica.

REFERÊNCIAS

AGARWAL, R. P.; MEEHAN, M.; O'REGAN, D. **Fixed point theory and applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.

ANDERSON, D. R. Green's function for a third-order generalized right focal problem. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 288, n. 1, p. 1–14, 2003.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; HAINES, C. W. **Elementary differential equations and boundary value problems**. [S.l.]: Wiley New York, 1992.

GUO, L.-J.; SUN, J.-P.; ZHAO, Y.-H. Existence of positive solutions for nonlinear third-order three-point boundary value problems. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, Elsevier, v. 68, n. 10, p. 3151–3158, 2008.

LEGGETT, R. W.; WILLIAMS, L. R. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered banach spaces. **Indiana Univ. Math. J.;(United States)**, v. 28, n. 4, 1979.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

LIMA, E. L. Curso de análise, v. 2. **Rio de Janeiro, Brasil: IMPA**, 1981.

MARTINEZ, A. et al. Um estudo de soluções para um problema de segunda ordem com múltiplos pontos de fronteira. **TEMA (São Carlos)**, SciELO Brasil, v. 14, n. 2, p. 255–263, 2013.

MARTINEZ, A. L. et al. A note about positive solutions for an equation of kirchhoff type. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, v. 218, n. 5, p. 2082–2090, 2011.

SUN, Y. Positive solutions of singular third-order three-point boundary value problem. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Elsevier, v. 306, n. 2, p. 589–603, 2005.

SUN, Y. Positive solutions for third-order three-point nonhomogeneous boundary value problems. **Applied Mathematics Letters**, Elsevier, v. 22, n. 1, p. 45–51, 2009.

YU, H.; HAIYAN, L.; LIU, Y. Multiple positive solutions to third-order three-point singular semipositone boundary value problem. **Proceedings Mathematical Sciences**, Springer, v. 114, n. 4, p. 409–422, 2004.