

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

KELLY RODRIGUES ARAUJO

**O ENSINO DE FRAÇÕES NOS TRABALHOS DOS PROFESSORES DO
PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

KELLY RODRIGUES ARAUJO

**O ENSINO DE FRAÇÕES NOS TRABALHOS DOS PROFESSORES DO
PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientadora: Profa. Me. Maria Lucia de Carvalho Fontanini

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Maria Lucia de Carvalho Fontanini
(Orientador)

Prof. Armando Paulo da Silva

Prof. Cláudia Brunosi Medeiros

ARAUJO, Kelly R. **O ensino de frações nos trabalhos dos professores do Programa de Desenvolvimento Educacional**. 2018. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

Esta pesquisa tem como objetivo geral fazer um mapeamento das produções didáticas relacionadas com frações desenvolvidas pelos professores participantes do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE). Tal objetivo se justifica devido às dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem de frações. Por meio de um levantamento, junto ao banco de dados da SEED (Secretaria de Educação do Estado do Paraná), selecionou-se os trabalhos produzidos no PDE, cujo foco de pesquisa, envolve conteúdo de frações, verificando, as estratégias metodológicas utilizadas, qual o significado de fração enfatizado, se houveram preocupações com domínio de algoritmos ou aprendizagem de conceitos, se envolvem relações do conteúdo de frações com outro conteúdo, com o cotidiano ou outras áreas do conhecimento. Conclui-se que, os professores, autores das produções, buscaram, por meio de várias metodologias de ensino, abordar os conteúdos visando uma melhor aprendizagem para os alunos, se preocupando com o domínio de conceitos, no entanto, há, ainda professores que persistem em abordagens de forma técnica e algoritmizada, apresentando dificuldade em estabelecer relação do cotidiano com as frações. Nota-se, também, nas produções, forte influência das abordagens dadas ao tema pelos livros didáticos.

Palavras-chave: Frações. Ensino e aprendizagem. PDE.

ABSTRACT

ARAUJO, Kelly R. **The teaching of fractions in the work of teachers of the Educational Development Program.** 2018. 38 f. Course Conclusion Monography (Graduation course) – Degree in Mathematics. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

This research has as general objective to do a mapping of didactic productions related to fractions developed by the teachers participating in the Educational Development Program (PDE). This objective is justified by the difficulties encountered in teaching and learning fractions. Through a survey of the SEED (State of Paraná Department of Education) database, the works produced in the PDE were selected, whose research focus involves fractions content, verifying the methodological strategies used, which the meaning of fraction emphasized, if there were preoccupations with domain of algorithms or learning of concepts, if they involve relations of the content of fractions with other content, with the everyday or other areas of knowledge. It is concluded that teachers, authors of productions, have sought, through various teaching methodologies, to approach contents aiming at a better learning for students, worrying about the mastery of concepts, however, there are still teachers who persist in approaches of a technical and algorithmized form, presenting difficulties in establishing daily relation with the fractions. It is also noticed in the productions strong influence of the approaches given to the subject by the didactic books.

Keywords: Teaching and learning. Fractions. PDE.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	06
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	09
2.1	Ensinar ou não ensinar frações, eis a questão.....	09
2.2	Dificuldade no ensino e na aprendizagem de fração.....	12
2.3	Os diferentes significados das frações.....	16
2.4	Algumas orientações para o ensino de frações.....	26
3	METODOLOGIA.....	31
4	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	38
4.1	Análise numérica dos dados coletados.....	38
4.2	Análise das categorias e subcategorias.....	45
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	85
6	REFERÊNCIAS.....	87

1 INTRODUÇÃO

Ao participar do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) a autora desta pesquisa teve a oportunidade de ler alguns artigos sobre os números racionais e lhe chamou a atenção um desses artigos, que tratava das diversas "personalidades" dos números racionais, ou seja, os significados dos números racionais. Ao perceber os diferentes significados que esses poderiam assumir, dentro do estudo da matemática, ficou perplexa, pois nunca havia se dado conta disto. Preparando na sequência um minicurso sobre frações, para a semana acadêmica, a autora percebeu que tudo o que sabia sobre os números fracionários baseava-se apenas sobre um ou dois significados e, que mesmo sabendo da existência deles, ela não os conhecia de verdade, apenas sabia alguns algoritmos. Isto a deixou realmente preocupada em relação a seu pouco conhecimento sobre as frações. Ao realizar o minicurso, junto com sua orientadora, percebeu que os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, também não conheciam esses significados, apenas algoritmos.

Ainda durante o período como bolsista do PIBID, a autora se deparou nas escolas com dúvidas em relação a esses números, que não sabia sanar de forma apropriada. Esses fatos levaram-na, a pensar no tema ensino dos números fracionários para seu trabalho de conclusão de curso (TCC).

O PDE, de acordo com o Documento-Síntese (PARANÁ, 2012), é uma política pública de Estado, com regulamentação por meio da Lei Complementar nº.130, que tem por objetivo melhorar a qualidade da educação básica do estado do Paraná, proporcionando aos professores da rede pública estadual uma oportunidade de Formação Continuada em parceria com universidades e faculdades públicas, reconhecendo: os professores da educação básica produtores de saberes sobre o processo de ensino e aprendizagem e o interior da escola como um espaço de construção coletiva de saberes. Tal Programa funciona em conjunto com a Secretaria de Estado da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior (SETI), Secretaria Estadual de Educação (SEED) e as Instituições de Ensino Superior (IES) públicas do estado do Paraná.

O PDE, ainda de acordo com o Documento-Síntese (2012), é organizado em três eixos, que são trabalhados no período de 2 (dois) anos, sendo eles: Atividades de Integração Teórico-Práticas, Atividades de Aprofundamento Teórico e Atividades

Didático-Pedagógicas com Utilização de Suporte Tecnológico. Fazem parte das atividades do eixo 1:

- a) A elaboração de um projeto de intervenção pedagógica na escola.
- b) A elaboração de uma produção didático pedagógica que é, uma estratégia metodológica, elaborada pelo professor, para atender os propositivos do seu projeto de intervenção.
- c) Momentos de orientação na IES, nas quais os professores serão orientados por professores destas instituições na elaboração das demais atividades do programa.
- d) A implementação do projeto de intervenção na escola, que deve ocorrer no terceiro semestre do programa.

Na finalização da participação do PDE, os professores participantes, com finalidade avaliativa, devem produzir um Artigo Final com, o resultado de reflexões e construções elaboradas durante toda a sua trajetória no Programa. O Artigo Final tem por objetivo “divulgar e socializar o trabalho desenvolvido pelo Professor PDE, na perspectiva de enfrentamento aos problemas do cotidiano da escola onde está inserido” (PARANÁ, 2012, p. 7). Além deste artigo também é entregue a produção didático pedagógica. Ambos ficam disponíveis no sites da SEED, disponível para que possam contribuir para formação de outros professores.

A presente pesquisa que tem como objetivo geral: fazer um mapeamento dos das produções didáticas relacionados com frações desenvolvidos pelos professores participantes do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE).

Para alcançar o objetivo geral foram delimitados os seguintes objetivos específicos:

- Revisar a literatura sobre o ensino de frações, procurando abordar os seguintes aspectos: sua relevância, principais dificuldades encontradas nos processos de ensino e aprendizagem e orientações metodológicas que embasam o trabalho;
- Proceder uma pesquisa documental junto ao site da SEED de Estado, levantando-se os trabalhos de final de curso do PDE que abordaram ensino de frações no período de 2013, 2014 e 2016, utilizando a metodologia de Análise Textual Discursiva, buscando identificar nos trabalhos: conteúdo relacionado às frações abordado, as estratégias metodológicas utilizadas, quais o significado de fração abordados na proposta apresentada, se o

trabalho revela preocupações com domínio de algoritmos ou aprendizagem de conceitos, se envolve relações do conteúdo de frações com outros conteúdos: matemáticos, de outras áreas do conhecimento ou com situações do cotidiano do aluno.

Além da relevância científica, por ser um assunto que ainda não foi abordado em outras pesquisas, esse trabalho poderá trazer contribuições para à formação da pesquisadora e de outros que tenham a ele acesso. O conteúdo de frações, segundo Pinto e Ribeiro (2013), é um dos mais complexos do ensino fundamental, assim, a fundamentação teórica aqui apresentada, abordando: por que ensinar frações, dificuldades do tema e orientações metodológicas e os diversos significados, podem contribuir para a reflexão sobre o ensino de frações a partir dos referenciais teóricos apresentados, e a análise dos trabalhos dos professores PDE podem trazer elementos para que os professores e futuros professores repensem sua prática e busquem novos caminhos para trabalhar com este conteúdo.

O presente trabalho se encontra assim estruturado: uma breve introdução, na qual são expostos os motivos da escolha do tema de pesquisa, os objetivos gerais e específicos, a justificativa para o trabalho. Na seção 2 são apresentados os referenciais teóricos, abordando os seguintes aspectos: Ensinar ou não ensinar frações eis a questão, Dificuldades no ensino de frações, Os diferentes significados das frações e Orientações metodológicas para o ensino de frações. Na seção 3 é descrito processo utilizado para coletar os dados e são tecidos alguns comentários sobre metodologia da Análise Textual Discursiva, utilizada neste trabalho para analisar os mesmos. Na seção 4, os dados são apresentados e analisados. No seção 5 são apresentadas as considerações finais e na seção 6 as referências.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão apresentados alguns referenciais teóricos a respeito de aspectos relacionados ao ensino de frações. A seleção de tais aspectos está relacionada aos objetivos da pesquisa. Buscou-se, então, na literatura, elementos a respeito do ensino de frações que pudessem servir como balizadores para a análise dos dados coletados. Assim, inicialmente é apresentada uma reflexão sobre a relevância ou não do ensino de frações. Na sequência, discute-se por que esse conteúdo é elencado entre aqueles que os alunos apresentam maior dificuldade. Aprofundando no aspecto destas dificuldades, são abordados, na sequência, os diferentes significados de frações e, por fim, apresentam-se algumas orientações teóricas para a condução do ensino das frações, visando minimizar tais dificuldades.

2.1 Ensinar ou não ensinar frações, eis a questão

Ao se fazer uma lista dos conteúdos nos quais os alunos tem dificuldade é provável que um dos conteúdos que aparecerá será o conteúdo de frações. O ensino de frações é um dos que apresenta maior dificuldade para os alunos, não só na Educação Básica, mas também, no ensino superior (VASCONCELOS, 2015). Os professores dos níveis fundamental e médio, e também, os professores universitários em cursos de nivelamento e pré-cálculo, dedicam parte de suas aulas na retomada deste conteúdo, que sempre parece estar na lista das dificuldades dos alunos. Mas tem sentido este empenho para que o aluno compreenda este conteúdo? Será este conteúdo, relevante para o aluno nos dias de hoje, na era dos computadores e das calculadoras? Por que ensinar frações? Será que assim, como os antigos algoritmos, para tirar raiz quadrada ou proceder o cálculo de logaritmos com tabelas, esse conteúdo não deveria ser abolido dos livros escolares? Alguns autores defendem que sim.

Viana (2008) defende a ideia de que as frações devem ser retiradas do conteúdo escolar. O autor compara as frações a vampiros, “algo inventado e temido”, construções históricas que mudam de acordo com a época e o lugar, e que é dado como importante, devido a uma característica cultural. Permanecem nos currículos, não por fazer falta na prática, mas sim pela consideração que o

desconhecimento do conceito de fração seria uma forma de ignorância do ponto de vista matemático. Assim, segundo esse mesmo autor, as frações permanecem no currículo, justificadas como uma das formas de representar os números racionais. No entanto, contra argumenta ele que desde que a fração apareceu na história, não houve a necessidade de associá-la a um número racional e elas não podem ser consideradas como pré-requisitos para compreender probabilidades, razões ou proporções. O autor esclarece seu argumento exemplificando que efetuar a soma de duas frações $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$, estaria errado do ponto de vista da soma de frações, no entanto, se for considerada uma situação na qual se quer representar o total de partidas ganhas em um jogo, ela faria todo o sentido.

Outro autor, Rodogoff (apud SANTOS, 2005), refere-se ao estudo das frações, em sala de aula, sendo sem importância e servindo apenas a outras Matemáticas, já que o conhecimento de frações não é algo natural.

Em contraponto às opiniões desses autores, vários outros defendem o ensino de frações. Entre os argumentos encontrados em defesa do ensino das frações, encontram-se: os de caráter utilitário, os de caráter intimista e, também, àqueles ligados ao desenvolvimento cognitivo.

Os argumentos de caráter utilitário são aqueles que defendem o ensino de frações pela sua utilidade no dia a dia. Moutinho (2005), está entre os autores que utilizam deste tipo de argumento para defender o ensino de frações, que faz referência à presença das frações, tanto na linguagem falada, quanto na escrita, sendo estas usadas para expressar quantidades e medidas: na música, na biologia, na química, na culinária, engenharia, entre outras. Ainda considerando os aspectos utilitários encontra-se Vasconcelos (2015), que destaca o uso das frações na representação de relações proporcionais para o uso no dia a dia e na atuação de algumas áreas profissionais.

Os argumentos de caráter intimista são caracterizados como aqueles que o ensino de frações é valorizado por razões ligadas puramente ao aprendizado da matemática pela matemática, ou seja, defendem fração como um conteúdo importante para a aprendizagem de outros conteúdos matemáticos. Dentre estes temos:

Bertoni (2008) que considera que a representação fracionária pode ser uma forma de auxílio para a introdução a representação decimal, além de, também, servir

como um recurso para uma melhor compreensão: dos números racionais, das proporções, frações algébricas e probabilidade.

Fernandes e Leite (2015) reconhecem a importância da aprendizagem das frações para o estudo dos conceitos acima, e destacam a relação das frações com a aprendizagem da geometria e da estatística.

Para Moutinho (2005) as frações, também, têm sua importância no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos, como por exemplo, as equações e cálculos algébricos.

Vasconcelos (2015) corrobora essa ideia afirmando que a aprendizagem de frações auxilia no desenvolvimento numérico, ampliando o significado numérico, pois permite representar quantidade, que não pode ser mais representada apenas por números inteiros. Ultrapassando a preocupação do ensino das frações, simplesmente pelas suas relações com o conhecimento matemático. Este autor, ainda, destaca o papel das frações na compreensão de outros conceitos científicos, como velocidade (distância percorrida por unidade de tempo); densidade (massa por volume); temperatura (energia em massa); bem como em outras perspectivas, que necessitam de mais do que os números inteiros para sua representação.

Nesta mesma linha, Delgado (2009) defende o ensino de frações afirmando que: a representação decimal dos racionais não é suficiente ou adequada para dar significado a muitas situações, dentro e fora da matemática, assim há a necessidade da existência da representação fracionária.

Na defesa do ensino de frações existem autores que defendem os argumentos ligados ao desenvolvimento cognitivo, que destacam as contribuições da aprendizagem de frações para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Pinto e Ribeiro (2013) consideram o estudo desses números como um dos mais difíceis e importantes do currículo do ensino básico, por eles serem uma alavanca para o desenvolvimento cognitivo considerado como necessários para uma melhor aprendizagem na matemática pura.

Moutinho (2005) faz referência à importância das frações para o desenvolvimento mental e cognitivo dos alunos. Segundo este autor, para a compreensão desses números é necessário o entendimento de algumas das premissas mais importantes da matemática, que é fazer relações. O autor esclarece que esta capacidade é necessária, pois para a aprendizagem do número fracionário é preciso que o aluno estabeleça relações entre o numerador e o denominador.

Para Santos (2005), a aprendizagem de frações auxilia no desenvolvimento intelectual. O autor se refere ao trabalho com as frações como sendo “uma oportunidade privilegiada para alavancar e expandir estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual” (SANTOS, 2005, p. 21).

Segundo Vasconcelos (2015) aprender corretamente os conceitos de frações acarretará um melhor desenvolvimento em outros conceitos matemáticos, até em níveis mais avançados de ensino.

Nunes (1997 apud VASCONCELOS, 2015) também destaca a importância da aprendizagem de representações, como as de frações, pois, os símbolos são capazes de ampliar e estruturar o raciocínio.

Pode-se perceber, que entre os pesquisadores em Educação Matemática, existem argumentos pró e contra o ensino das frações. O conteúdo faz parte da recém aprovada base curricular em matemática, não cabendo ao professor decidir se abordará ou não o conteúdo, mas tal discussão é pertinente, pois refletir o por que se ensina algo, pode contribuir para a abordagem a ser dada ao conteúdo, ajudando a definir quais aspectos devem ser trabalhados ou ensinados, quais interconexões devem ser feitas e qual a abordagem metodológica deverá ser utilizada.

Após se refletir sobre o porquê se ensinar o conteúdo é relevante para o ensino que se considere a complexidade do conceito a ser abordado. Por que tantos alunos chegam às universidades sem compreender frações? Neste sentido serão expostas, a seguir, algumas das causas das dificuldades dos alunos com o ensino de frações.

2.2 Dificuldade no ensino e na aprendizagem de fração

De acordo com Vasconcelos (2015), alunos do ensino fundamental e médio apresentam dificuldades na aprendizagem de frações, sendo que se estendem até o ensino superior. Isto causa prejuízo tanto a nível profissional, quanto em assuntos cotidianos que necessitam da matemática.

Vários são os aspectos que contribuem para as dificuldades dos alunos em aprenderem frações, dentre eles podem ser destacados:

- a) O conceito dos números fracionários não é tão presente na vida do aluno quanto o conceito de números naturais.

Os números naturais estão presentes na vida dos alunos mesmo antes deles entrarem na escola: no ambiente familiar, nas placas dos carros, nos números das casas. E as operações com estes números fazem parte da prática quase cotidiana da população. Já com os números fracionários não é assim. Além dos números $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ usados em receitas ou em algumas medidas de ferramentas, eles quase não são citados. Nas operações do dia a dia, as pessoas usam mais operações dos números racionais representados como decimais e não como frações (BRASIL, 1998). Assim, essa falta de contato, no ambiente extraescolar, pode contribuir para que os alunos tenham mais dificuldades na aprendizagem de frações do que com números naturais.

- b) A aprendizagem dos números naturais é um obstáculo para a aprendizagem com números fracionários.

Os alunos não conseguem ao olhar a fração e enxergá-la como a representação de um número (PATRONO, 2011). Lapa (2013) corrobora com esta ideia e argumenta: os alunos não conseguem entender que o numerador e denominador representam um único número ou uma única quantidade. Eles não conseguem deixar de visualizar os termos de uma determinada fração de modo separado. Dessa forma, muitas vezes, para resolver uma questão de fração, aplicam ao numerador ou denominador conceitos ligados aos números naturais. Tal transposição gera vários erros e dificuldades (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011 apud VASCONCELOS, 2015).

Santos (2005) exemplifica uma situação em que se verifica este problema, citando um trabalho de Mack (1993 apud SANTOS, 2005), na qual os alunos, ao resolverem uma questão sobre ordenação de frações, respondem que $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{1}{4}$, justificando que 3 é menor que 4.

Essa falta de compreensão, também, explica erros em operações com frações, como por exemplo, quando o aluno escreve que: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{6}$. Neste caso, o aluno somou numerador com numerador e denominador com denominador, ou seja,

ele somente enxergou os números naturais envolvidos e somou os de posição, para ele, correspondentes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) apontam ainda outros conhecimentos sobre os naturais que são obstáculos para a aprendizagem de frações: ao se multiplicar 2 números naturais, o resultado é sempre maior que os dois números envolvidos, isto no entanto, não ocorre com as frações. Basta observar o resultado da operação $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$; no que se refere à relação de ordem, nos números naturais cada número tem um sucessor, no entanto, nos racionais não é assim.

Monteiro e Pinto (2007 apud PONTE; QUARESMA, 2014) acrescentam, também, que alguns alunos costumam confundir $\frac{1}{2}$ com 1,2 revelando dificuldades no sistema de numeração decimal.

- c) As frações em si são complexas, devido aos seus diferentes significados e, também, as complexidade de conceitos diretamente a eles associados:

Nas frações um mesmo símbolo possui diversos significados. Conforme colocam Behr, Lesh, Post, Silver (1983), Gravemeijer (1997), Nunes (2003), Ohlsson (1991), Streefland (1997), Vergnaud (1983), a fração possui uma natureza multifacetada, que possui diversos significados, dependendo do contexto matemático:

“(i) um número em uma reta numérica (um inteiro e dois terços); (ii) um operador (um terço de 12 bolinhas de gude); (iii) um quociente derivado de uma divisão (duas barras de chocolate repartidas entre três crianças); e (iv) uma relação parte-todo (uma fatia de pizza dividida em 12 fatias) (BEHR; LESH; POST; SILVER, 1993, GRAVEMEIJER, 1997, NUNES, 2003, OHLSSON, 1991, STREEFLAND, 1997, VERGNAUD, 1983 apud MAGINA; BEZERRA; SPINILLO, 2009, p. 413)”.

Além disso, “a fração está fortemente associada a outros conceitos igualmente complexos: divisão, probabilidade, porcentagem, razão e proporção” (MAGINA; BEZERRA; SPINILLO, 2009, p. 413).

Outro conceito, de difícil compreensão para os alunos, associado a compreensão da fração é o de equivalência. Compreender este conceito é importante para à compreensão, por exemplo, das operações entre frações. Lapa

(2013) considera a compreensão deste conceito como uma das barreiras existentes na aprendizagem de frações, pois os alunos não conseguem compreender que frações como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, são variadas formas de representar um mesmo número.

- d) A abordagem dada trazida pelos livros e a forma de trabalhar do professor, colaboram para tal dificuldade.

Nesse contexto, Mack (1993 apud SANTOS, 2005), afirma que o fato dos alunos não conseguirem relacionar os conceitos de divisão e de fração, utilizados fora da escola com as representações simbólicas que aprende dentro da mesma, se dá pela maneira como esse conteúdo é introduzido.

Dessa forma as barreiras na aprendizagem não se originam apenas da maneira como os alunos desenvolvem suas concepções a respeito das frações, mas, também, tem como fonte o professor (BEZERRA et al., 2002; MERLINI, 2005; MOUTINHO, 2005, NUNES et al., 2005; SANTOS, 2005, apud CAMPOS; MAGINA, 2008).

Para Justulin (2016), as dificuldades apresentadas na compreensão do conceito de fração pelos alunos estão relacionadas à forma como ele é abordado, muitas vezes, tem-se como único foco: operações e técnicas, impedindo, assim, o aluno de entender o conteúdo e desenvolver o seu raciocínio.

Esta ideia, também, é compartilhada por Campos e Magina (2008), que afirmam que muitos professores persistem em trabalhar somente os algoritmos e procedimentos. Santos (2005) corrobora essa ideia, na sua pesquisa com professores polivalentes e especialistas, ele concluiu que a preferência dos professores é, apenas, utilizar-se de procedimentos e algoritmos em salas de aulas, sem se preocuparem com os aspectos conceituais. Tal abordagem leva, muitas vezes, o aluno a ser um mero reprodutor do conhecimento. O aluno parece que entendeu um determinado conteúdo, mas, apenas, está reproduzindo o que já viu, sem conseguir refletir sobre ou utilizar-se desses mesmos conceitos em outro contexto.

Nunes e Bryant (1997) fazem uma reflexão sobre esse falso entendimento dos alunos no ensino de frações:

“Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba” (NUNES; BRYANT, 1997 apud CAMPOS; MAGINA, 2008, p. 26).

De acordo com Huinker e Sharp, Garofalo e Adams (2002 apud PINTO; RIBEIRO, 2013), a apresentação de algoritmos, antes mesmo de entender o conceito, sem se estabelecer uma relação entre eles, acarreta uma desconexão entre: o que o aluno aprende na escola e a sua realidade.

Santos (2005) destaca que os professores alvos de sua pesquisa, no momento da elaboração de problemas referentes aos números fracionários, apresentaram concepções que “carregam fortes marcas daquela construída enquanto aluno da Educação Básica. Concepções estas com raízes tão profundas que é provável que permaneçam engessadas em suas mentes” (SANTOS, 2005, p. 189).

Percebe-se assim que os professores ensinam como aprenderam, usando métodos, ressaltando significados e conceitos sem refletirem sobre os mesmos, somente levados pela experiência que tiveram na aprendizagem dos mesmos como alunos.

Outras pesquisas ainda apontam a dificuldade que os próprios professores tem de compreender o conceito de fração. Cardoso e Mamede (2015) destacam a dificuldade de alguns professores em apresentar um conceito dos números fracionários de forma correta, ou seja, eles ainda não conseguem, dominar plenamente o conceito de fração e suas propriedades.

Menegazzi (2013), em um trabalho realizado com estudantes do quarto semestre do curso de Pedagogia, com o objetivo de verificar qual era o conhecimento relacionado aos números fracionários desses futuros professores, percebeu que eles possuem certo conhecimento em apenas um dos significados dos números fracionários, porém, em outros, apresentaram grandes dificuldades.

Percebe-se então que os diversos significados das frações são um obstáculo não só para os alunos, mas, também, para os professores que ensinam frações. Mas, quais são estes significados? Ter clareza sobre este aspecto é um ponto de fundamental importância ao se discutir o ensino de frações, por isso, têm-se, uma seção que será dedicada a este assunto.

2.3 Os diferentes significados das frações

A ideia de que os números racionais assumem diferentes significados, foi iniciado, segundo Bertoni (2008), por Kieren (1976). Ele estabeleceu a seguinte classificação: quociente; medida (incluindo o modelo parte-todo); razão e operador.

Em 1983 Behr retomou o assunto separando, no entanto, o significado de medida do significado parte-todo (CARDOSO; MAMEDE, 2015). A partir destes trabalhos iniciais vários outros autores retomaram o tema dos diferentes significados de frações.

Os Quadros de 1 a 7 apresentam algumas das classificações dos diferentes significados de frações, por diferentes autores. Para facilitar a comparação entre eles, em cada quadro é apresentado um significado, acompanhada da explicação dada pelo autor do texto para este significado, bem como um exemplo deste significado, dado pelo mesmo autor.

(continua)

SIGNIFICADO MEDIDA		
Autor	Explicação	Exemplos
Lapa (2013)	A fração representa a relação entre duas quantidades de natureza distintas, mas que podem ser reunidas para formar um todo.	<p>“Para fazer limonada, misturamos suco de limão com água na proporção de 2 para 9. Quantos litros de suco de limão e de água serão necessários para fazer 5,5 litros de limonada?” (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009 apud LAPA, 2013, p. 37).</p> <p>Lapa (2013) também considera os casos de probabilidade como sendo um caso do uso do significado de fração, e medida e a razão em alguns casos também.</p>

(conclusão)

SIGNIFICADO MEDIDA		
Autor	Explicação	Exemplos
Menegazzi (2013)	A fração expressa a comparação entre duas medidas. Sendo que há necessidade de estabelecer um componente único de comparação, sendo essa, a unidade de medida	<p>“Quantos palmos tem o comprimento da mesa? Quantos passos tem a largura do meu quarto?”</p> <p>“Temos 6 latas de tinta para pintar um quilômetro das linhas existentes no meio da estrada. Quantos quilômetros de estrada podem ser pintados com 27 latas de tinta?”</p>
Nunes (2003 apud NUNES; MAGINA; CAMPOS, 2006).	Expressa relações intensivas. A fração é utilizada como uma medida que indica a relação de uma variável com outra. Este é o caso, por exemplo, da probabilidade.	“Fizemos uma rifa na escola. Foram impressos 150 bilhetes. Minha avó comprou 20 bilhetes. Qual a sua chance de ganhar o prêmio?”
Lessa (2009)	Neste caso a fração está associada a um ponto da reta numérica e indica a medida do segmento com extremidades: neste ponto e no ponto zero (considerado origem da reta numérica).	“Marque o número $\frac{3}{4}$ na reta numérica”

Quadro 1- Uso de frações com o significado medida**Fonte: Autores**

SIGNIFICADO NÚMERO		
Autor	Explicação	Exemplo
Lapa (2013)	Nesse significado a fração é um número possível de ser representado em uma reta numérica. Não necessita de um determinado contexto para lhe dar um significado. Sendo reconhecido como apenas um único número, apesar de ser representado com a sobreposição de dois números naturais. Neste caso, a fração pode ser transformada em um número decimal.	“Calcular uma potência de uma fração e identificar seu resultado na reta numérica dada”
Nunes (2003 apud NUNES; MAGINA; CAMPOS, 2006).	As frações podem indicar simplesmente números racionais, sem se referirem a quantidades específicas.	Exemplo: “Represente o número $\frac{1}{2}$ na forma decimal”

Quadro 2- Uso de frações com o significado número

Fonte: Autores

(continua)

SIGNIFICADO OPERADOR OU OPERADOR MULTIPLICATIVO		
Autor	Explicação	Exemplo
Lapa (2013)	Está relacionado à transformação, podendo reduzir ou aumentar uma determinada quantidade ou número. Em quantidades discretas podendo reduzir ou ampliar um número e em quantidades contínuas passa a ter o significado de multiplicador ou divisor. Segue a mesma ideia de um valor escalar que é aplicado a uma dada quantidade.	“Encontrar quanto mede $\frac{2}{3}$ de $37^{\circ}40'$ ”

(conclusão)

SIGNIFICADO OPERADOR OU OPERADOR MULTIPLICATIVO		
Autor	Explicação	Exemplo
Brocardo (2010 apud CANELAS, 2016)	Estabelece uma ação transformadora em um número, tanto de um conjunto discreto quanto contínuo.	“ $\frac{3}{4}$ representa os 9 chocolates de 12 chocolates e, em relação ao contínuo, os $\frac{3}{4}$ representam a escala usada para reduzir uma dada figura”
Menegazzi (2013)	Atua como um agente transformador, que modifica um determinado estado após agir sobre ele.	“Tenho 12 bombons e dei $\frac{2}{3}$ para Renata. Quantos bombons dei para Renata?”
Nunes, (2003 apud NUNES; MAGINA; CAMPOS, 2006).	As frações são analisadas como sendo operador escalar aplicado a uma quantidade.	“ $\frac{3}{4}$ de um conjunto de balas”
PCN (BRASIL,1998)	“Quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica”	“Que número devo multiplicar por 5 para obter 2?”
Lessa (2009)	Tem papel transformador, modificando a situação.	“Numa classe de 36 estudantes, $\frac{3}{4}$ dos estudantes são meninas. Quantas meninas há na classe?”

Quadro 3: Uso de frações com o significado operador multiplicativo

Fonte: Autores

(continua)

SIGNIFICADO PARTE-TODO		
Autor	Explicação	Exemplo
Lapa (2013)	Nesse significado existe um todo que é dividido em uma determinada quantidade de partes iguais, ocorrendo então uma relação entre o número de partes divididas e o todo, podendo assim ser representada como $\frac{1}{n}$ cada parte dividida.	Analisar quanto representa as partes pintadas de uma figura dada.

(continua)

SIGNIFICADO PARTE TODO		
Autor	Explicação	Exemplo
Brocardo (2010 apud CANELAS, 2016)	Neste significado a fração estabelece uma relação entre um todo e suas partes, onde o denominador indicará a quantidade em que o denominador foi particionado, enquanto o numerador indicará a quantidade de partes escolhidas, sendo o todo contínuo ou discreto.	“Para o todo contínuo, $\frac{1}{4}$ representa a parte sombreada de um chocolate que foi dividido em 4 partes iguais; para o todo discreto $\frac{1}{4}$ representa a parte de bolas pretas do conjunto de todas as bolas”
Menegazzi (2013)	Neste significado a fração relaciona-se a um todo (contínuo ou discreto) dividido em partes iguais.	“Para um todo discreto temos: se tomarmos um total de 15 bombons de uma caixa, da qual João comeu 3, Lúcio comeu 8 e Paulo 4. Nesse caso João comeu $\frac{3}{15}$ da caixa de bombons, o Lúcio $\frac{8}{15}$ e Paulo $\frac{4}{15}$, Temos então a caixa de bombons como um todo, dividido em 3 partes; para um todo contínuo temos: figuras que podem ser facilmente divididas em partes iguais, onde algumas delas são pintadas, representando assim a fração desejada”
Nunes (2003 apud NUNES; MAGINA; CAMPOS, 2006).	Neste significado a ideia presente é aquela da partição de um todo em n partes iguais, sendo que cada uma dela representará $\frac{1}{n}$.	“Uma barra de chocolate foi dividida em quatro partes iguais. João comeu três dessas partes. Que fração representa a parte que João comeu?”
PCN (BRASIL, 1998)	“[...] quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes”	“Tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais”

(conclusão)

SIGNIFICADO PARTE TODO		
Autor	Explicação	Exemplo
Lessa (2009)	A fração está associada a divisão de um todo, sendo que este todo pode ser uma unidade contínua ou discreta.	“Pedro cortou uma pizza em quatro fatias e comeu três. Que fração da pizza representa o que Pedro comeu?”

Quadro 4: Uso de frações com o significado relação parte-todo

Fonte: Autores

(continua)

SIGNIFICADO QUOCIENTE		
Autor	Explicação	Exemplo
Lapa (2013)	O significado da fração está relacionado com a divisão, partilha, sendo que numerador e denominador se referem as duas variáveis distintas, diferindo assim do significado parte-todo em que número e denominador se referem a mesma variável.	“Dada uma quantidade de chocolate, é possível dividi-lo entre n pessoas, em tamanhos iguais, representando essa divisão através de uma fração.
Brocardo (2010 apud CANELAS, 2016)	Neste significado a fração estabelece uma relação entre duas quantidades.	“ $\frac{3}{4}$ é o resultado da divisão de 3 chocolates por 4 crianças, ou seja, é a quantidade de chocolate que cada criança comerá”
Menegazzi (2013)	Nesse significado, a fração é analisada como dois números inteiros sendo divididos. Neste caso, há a ideia de partilha. Dado o tamanho do grupo a ser formado, o quociente será o número de grupos a serem formados.	“Temos assim, a ideia de partilha, de fazer agrupamentos e, conhecido o tamanho do grupo a ser formado, o quociente será o número de grupos a serem formados” Exemplo: “Divisão de 3 unidades entre 7 pessoas.”

(conclusão)

SIGNIFICADO QUOCIENTE		
Autor	Explicação	Exemplo
Nunes (2003 apud NUNES; MAGINA; CAMPOS, 2006).	Este significado é usado para expressar tanto o resultado da divisão quanto a própria divisão.	“A fração, nesse caso, corresponde à divisão (1 dividido por 5) e também ao resultado da divisão (cada criança recebe $\frac{1}{5}$)”
PCN (BRASIL, 1998)	A fração indica quociente de um inteiro por outro ($a:b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$)	“É preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas”

Quadro 5: Uso de frações com o significado quociente

Fonte: Autores

SIGNIFICADO RAZÃO		
Autor	Explicação	Exemplo
Brocardo (2010 apud CANELAS, 2016)	Neste significado a fração estabelece a relação entre duas partes de um todo (razão como parte-parte) e a relação entre duas grandezas	“Exemplo de razão como parte-parte: Para o primeiro aspecto temos que $\frac{3}{4}$ é a razão entre o número de rapazes e o número de raparigas numa turma e lê-se: 3 para 4”. “Exemplo de razão como relação entre duas grandezas: $\frac{3}{4}$ é a razão entre a distância de 3 metros e o tempo de 4 segundos que levou para percorrê-la, dando origem a uma nova grandeza, a velocidade”
PCN (BRASIL, 1998)	A fração indica um índice comparativo entre duas quantidades.	Exemplo: “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes e se conclui que $\frac{2}{3}$ da população da cidade é de imigrantes”

Quadro 6: Uso de frações com o significado razão

Fonte: Autores

SIGNIFICADO COORDENADA LINEAR		
Autor	Explicação	Exemplo
Damico (2007 apud MENEGAZZI, 2013)	Neste caso a fração tem o sentido numérico em uma reta real, sendo que a mesma, nesta reta, pode ser associada a um ponto, em uma relação biunívoca.	Exemplo: localização dos números em uma reta numérica.

Quadro 7: Uso de fração com o significado coordenada linear

Fonte: Autores

Observando os quadros, é possível notar que a classificação dos significados dos números fracionários pelos autores possuem algumas semelhanças e, também, diferenças.

Sobre o significado Medida dado no Quadro 1, percebe-se que para a maioria, com exceção de Lessa (2009), a fração como medida expressa a relação entre duas variáveis. Nunes, Magina e Campos (2006), Lapa (2013), colocam a probabilidade como sendo um exemplo do uso da fração com este significado. Embora Menegazzi (2013) não cite a probabilidade em seus exemplos, pode-se intuir que este autor tem o entendimento de que a probabilidade é um exemplo de fração usado com o significado de medida. Este autor um dos exemplos citados no Quadro 1, para este significado, por este autor, se refere a proporção. A proporção envolve razão, e probabilidade é um tipo de razão.

Sobre a razão, em específico, vale aqui destacar a observação feita por Lapa (2013), colocando que nem sempre razão é uma fração. Ele considera que a razão é uma fração somente no caso em que, embora a natureza das grandezas envolvidas seja distinta, estas podem ser reunidas em um só todo. Ele cita o exemplo da limonada feita na razão de 1 copo de suco para 3 de água. Pode-se expressar esta situação dizendo que no suco de limão tem-se $\frac{1}{4}$ de suco para $\frac{3}{4}$ de água. Neste caso, o autor diz que a razão é uma quantidade intensiva. Já no caso de razões que indiquem, por exemplo, uma escala, esse tipo de consideração não poderia ser feita. Lapa (2013), conclui que caso das escalas, as razões usadas não seriam frações. O autor acrescenta: “embora se escreva $\frac{1}{1000}$, lê-se escala de um para 1000”.

Quanto a Brocardo (2010 apud CANELAS, 2016), o seu significado de medida parece se referir somente a expressão da medida de uma grandeza utilizando outra como unidade de medida. Ele considera que a razão é outro significado da fração, distinto daquele que ele considera o significado medida, como pode-se verificar pelo Quadro 6.

Os PCN (BRASIL, 1998), como, também, pode-se ver no Quadro 6, consideram a razão um significado das frações de forma semelhante a Brocardo (2010 apud CANELAS, 2016). Dos artigos e documentos estudados, somente os PCN e Brocardo mencionam razão como um significado distinto de fração.

A explicação para o significado “medida” apresentando maior discrepância em relação aos demais dados no Quadro 1, seria o de Lessa (2009). Comparando o significado medida dado por Lessa, no Quadro 1, poderia se dizer que ele tem uma aproximação com o significado coordenada linear de autoria de Damico (2007 apud MENEGAZZI, 2013), apresentado no Quadro 7 e também com o significado número de Lapa (2013) e de Nunes, Magina e Campos (2006), presentes no Quadro 2. Inclusive, vendo os exemplos dados pelos autores, notam-se que embora os nomes dados aos significados sejam diferentes, conceitualmente eles são semelhantes.

O significado número apresentado no Quadro 2 é citado por somente dois autores, Lapa (2013) e Nunes, Magina e Campos (2006). Ele se refere ao uso da fração fora de qualquer “situação-contexto”, simplesmente como uma forma de representação de um número racional. É possível estabelecer uma relação entre o significado número, destes autores, e o significado coordenada linear dado por Menegazzi (2013), apresentado no Quadro 7. Ambos se referem à fração como indicador de um número racional. Considera-se, no entanto, que o significado denominado número, por Menegazzi (2013), é mais restrito, pois se refere somente a uma forma de representação dos racionais, que é a reta real.

Quanto aos significados “parte todo”, apresentado no Quadro 4, e operador linear apresentado no Quadro 3, eles são citados por todos os autores. Pode-se, também, observar que há consonância entre os autores tanto na explicação destes significados, quanto nos exemplos utilizados para ilustrá-los.

O significado quociente é apresentado no Quadro 5. Este significado não é mencionado por Lessa (2009). Mas entre os demais autores, pode-se perceber, que as explicações são consonantes.

Neste trabalho, para proceder as análises dos trabalhos de PDE, serão utilizadas as classificações e compreensões dos significados como são colocados por Nunes, Magina e Campos (2006), a saber: medida, número, operador, parte-todo e quociente, cujas explicações são apresentadas nos Quadros 1, 2, 3, 4 e 5 respectivamente. A opção por estes autores é que a sua lista de significados abrange como foi visto pelos comentários, todos os significados expostos pelos diversos autores.

É importante destacar, como coloca Moutinho (2005), que o significado atribuído às frações em um determinado problema ou questão, possuem estreita relação com o contexto em que elas aparecem e mantêm estreita relação com as estratégias utilizadas pelo sujeito para resolver a situação apresentada. Assim, um mesmo problema pode ser resolvido utilizando diferentes significados de fração. Para ilustrar o autor coloca o seguinte exemplo:

“dividir 2 barras de chocolate para 3 pessoas. Esta situação classificaríamos, a priori, como uma situação tipicamente com significado Quociente, pois $(2 : 3 = \frac{2}{3})$ seria uma estratégia adaptada para resolver tal situação. Entretanto, o sujeito poderá recorrer à estratégia de dividir o todo (cada chocolate) em partes iguais (3 pessoas) e apoiando-se na correspondência um-para-um e na dupla contagem, responder a situação de maneira correta, porém utilizando-se de outro significado, o de parte-todo” (MOUTINHO, 2005, p.20).

A discussão sobre os diversos significados de frações é de tal importância que muitos autores as apontam como ponto de partida no planejamento do ensino de frações, como veremos na seção seguinte, onde são apresentadas algumas orientações metodológicas para o ensino de frações.

2.4 Algumas orientações para o ensino de frações

Entre os autores que dão destaque a parte dos significados, encontramos Campos, Magina e Nunes (2006), que sugerem que o ensino de frações seja planejado partindo dos cinco significados: número, parte-todo, medida, quociente, e operador multiplicativo. Os autores afirmam que a aprendizagem de frações, partindo desses cinco significados, se dará com maior êxito.

Brocardo (2010) corrobora essa ideia ao pontuar a importância de propor situações que estejam associadas aos vários significados de frações e operações,

destacando que devem abranger todos os significados, e não se restringir apenas ao sentido parte-todo, o que sempre acontecia.

Os PCN (BRASIL, 1997) sugerem, também, que sejam trabalhados os significados das frações no ensino fundamental, sendo os significados parte todo, quociente e razão trabalhados no segundo ciclo e, nos ciclos posteriores, o significado operador.

Para Lessa (2009), desenvolver a ideia de números fracionários envolve muitas situações que abrangem os diferentes significados deste número. Tais significados não estão desvinculados entre si, “afinal o conhecimento não se dá de forma estanque, e, de certa forma, o fazer matemático é fazer relações” (LESSA, 2009, p. 28). Ainda em outro texto, esta autora destaca que a aprendizagem se dá de maneira gradativa e que está diretamente relacionada ao amadurecimento do conhecimento dos alunos, e desta forma, para a aprendizagem dos números fracionários será necessário que os seus diferentes significados sejam trabalhados em diversos momentos da educação escolar (LESSA, 2015).

Alguns autores trazem comentários a respeito do trabalho com alguns dos significados em específico.

Campos et al. (2014) comentam em seu artigo o destaque atribuído ao significado parte-todo, como uma oportunidade para introduzir o conceito de frações. Segundo estas autoras, em muitos países, o ensino de frações é iniciado por esse significado, trabalhando-se quantidades contínuas e ampliando-se para quantidades discretas. No entanto, as autoras advertem sobre a forma otimista, porém, enganosa, quanto a eficácia do seu ensino. Segundo as autoras, no Brasil, onde o ensino das frações são centradas no significado parte-todo, as crianças ainda não obtiveram bons resultados nas avaliações relacionadas ao uso da representação fracionária. Comentando sobre o ensino deste significado, Silva (2005) faz referência a ênfase dada às técnicas de dupla contagem (contar as partes que o inteiro foi dividido, denominador, e as partes que foram consideradas, numerador), trazendo como consequência a limitação no desenvolvimento dos alunos em outras técnicas e dificultando a compreensão de outros significados. A ênfase dada nesta técnica dificulta ao aluno a compreensão posterior da fração como um número e pode levar ao professor a ideia de que o aluno entendeu fração, quando na verdade não entendeu.

Lessa (2009) destaca que, para a compreensão deste significado, é importante o desenvolvimento de algumas habilidades, tais como: 1) compreender o conceito de unidade dentro das frações, que indica o todo que pode ser contínuo e discreto; 2) compreender que as frações se referem a partes de igual tamanho, assim as figuras devem ser divididas em partes iguais e os conjuntos em subconjuntos com o mesmo número de elementos; 3) perceber que o número de partes coincide com o número de divisões; 4) saber que uma mesma fração pode representar quantidades diferentes dependendo do todo: $\frac{1}{2}$ de 50 figurinhas é diferente de $\frac{1}{2}$ de 100 figurinhas; 5) ter noção da equivalência entre frações; 6) ter noção de que quanto mais se particiona, as partes se tornam menores; 7) saber que união das partes formam o todo.

Para o significado de medida, Lessa (2009) trabalhar com o processo de medir elementos pertencentes à própria sala de aula, estabelecendo qualquer unidade de medida, como por exemplo, uma tira de papel medindo 10 centímetros, como exemplificado pela autora, e, dessa forma, no processo de medição, os alunos poderão encontrar algumas medidas que não serão exatas, surgindo a necessidade de outros números para estarem representando essas medidas, podendo ser representadas a partir da unidade inicial estabelecida, ou partições dessa unidade. Charalambous e Pitta-Pantazi (2007 apud LESSA, 2009) pressupõe que certas habilidades são necessárias e devem ser construídas durante a etapa de ensino-aprendizagem para esse significado, como: (1) repartir em partes iguais; (2) a existência de um número racional entre dois outros racionais; (3) ter o zero como ponto inicial para o processo de medir; (4) compreender a bijetividade: ponto \rightarrow número e número \rightarrow ponto; (5) a necessidade n-1 pontos para uma determinada subdivisão da unidade em n subintervalos; (6) entender a ideia de ordem “maior/menor”; (7) ter uma ideia de equivalência em se tratando de frações; (8) ter noção do sentido empregado ao denominador b em uma determinada situação.

É importante lembrar que o significado de medida, trazido por Lessa (2009), está relacionado com o de número ou, como destaca a própria autora, “o ponto sobre a reta numérica” (LESSA, 2009, p. 26).

Lessa (2009) sugere também, para o significado de operador multiplicativo, se discuta com os alunos a relação entre este conceito e o de “parte todo”, mostrando a eles que quando se realiza a transformação de uma quantidade inicial, esta quantidade é o chamado “todo” e a transformação pode ser efetuada usando tanto

os conceitos de parte-todo, quanto efetuando as operações de multiplicação e divisão.

Charalambous e Pitta-Pantazi (2007 apud LESSA, 2009) pontuam a necessidade do desenvolvimento de determinadas habilidades no aluno para o ensino do significado quociente, sendo elas: “(1) identificar a barra da fração como divisão: $\frac{a}{b} = a \div b$; (2) relacionar com o significado parte-todo e, por vezes, com o operador; (3) estabelecer diferenças em contextos contínuos e discretos” (CHARALAMBOUS E PITTA-PANTAZI, 2007 apud LESSA, 2009, p. 28).

Também se referindo ao trabalho com o significado quociente, Campos, Magina e Nunes (2006) destacaram que, no trabalho realizado pelos alunos, é importante que se oportunize espaço durante as aulas para discussões sobre os conceitos de ordem e equivalência que são relevantes a construção da ideia de fração, pois discutir sobre os conceitos, em grupo, promove benefícios para a aprendizagem das crianças.

Campos, Magina e Nunes (2006) sugerem que na introdução de frações sejam, também, trabalhadas outras situações além da ideia de parte-todo, que geralmente é trabalhada a divisão de partes iguais, para que o conhecimento de frações seja sustentado, citando como exemplo, o uso do significado quociente, no intuito que os alunos se apropriem da ideia de ordenação das frações por meio do raciocínio lógico: “quanto mais crianças para dividirem o bolo, menor o pedaço de bolo que cada uma receberá” (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006, p. 128).

Além das orientações acima que dão destaque aos cinco significados, encontramos, na literatura orientações gerais para o ensino de frações que não se referem a um significado em específico.

Para Prado (2000), ensinar frações deve focar “na (re)criação dos conceitos matemáticos, destacando como elemento importante para esta, o caminho do movimento da história do conceito” (PRADO, 2000 apud JUSTULIN, 2016, p. 347).

Lapa (2013) sugere que sejam usadas diversas situações em que se possa usar o mesmo significado e diferentes representações mostrando como é possível trabalhar um mesmo conceito. Esta autora destaca a importância da valorização dos registros dos alunos pelos professores, além dos professores se comprometerem a uma organização no que se refere aos conceitos e atividades, de forma que abordem os diferentes níveis de complexidade desses conceitos que tange a proposta curricular de cada ano de ensino.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) coloca como sugestão que este ensino deve trazer elementos que envolvam o cotidiano dos alunos e elementos da própria matemática (PONTE, SERRAZINA, GUIMARÃES, BREDAS, GUIMARÃES, SOUSA, MENEZES, MARTINS & OLIVEIRA, 2007), ou mesmo, como afirma Bertoni (2008), o início de tudo deveriam ser situações significativas que tornassem o conceito útil e necessário.

De acordo com a revista Escola, mencionado por Oliveira e Silva (2014), a importância do uso do cotidiano do aluno para o ensino das frações, pois dessa forma eles serão capazes de manipular os conteúdos, além de esse estudo levar o aluno a construção de muitas outras relações. Porém, para que isso ocorra, é necessário que seja aprofundado o estudo desses conceitos.

Mamede e Cardoso (2015) destacam as orientações curriculares relacionadas ao 1º ciclo, relacionadas às frações, que traz que deve haver um domínio pelos professores no que se refere aos aspectos essenciais que pertencem ao conceito de fração, envolvendo suas propriedades conceituais, significados de fração, representação e comparação entre as frações.

Campos et al. (2014) destacam a necessidade de um planejamento no ensino de frações que envolvam o conceito dos conteúdos de fração, destacando, também, a lógica atribuída a divisão para se trabalhar a relação inversa que existe entre o denominador e o valor da fração, com objetivo de desenvolver no aluno sua compreensão em relação aos números fracionários.

Nesta seção foram apresentadas algumas orientações para o ensino de frações. Nestas orientações, pode-se perceber o destaque à preocupação com a parte conceitual, dando ênfase aos conceitos envolvidos na aprendizagem de cada significados, ao estabelecimento de relações entre eles. Outros autores pesquisados se preocupam mais com orientações quanto às metodologias de ensino, indicando como caminhos para a abordagem das frações: a evolução histórica dos conceitos e problemas que deem destaque as relações das frações com a realidade do aluno. Outro aspecto destacado nas orientações e que não se pode deixar de dar destaque aqui, são o trabalho com as diversas representações que uma fração pode ter.

Existe, ainda, um destaque à importância aos registros dos alunos. Além de auxiliarem os próprios alunos na resolução do problema, os registros são uma fonte de informação para o professor sobre o pensamento do aluno, quais os significados e conceitos eles utilizaram para resolver a situação.

O referências teóricos acima apresentados dão uma ideia da variedade e complexidade de elementos que devem ser considerados, segundo a literatura, ao se considerar o ensino das frações.

Com essa considerações conclui-se a primeira fase desta pesquisa, que é de cunho qualitativo. Segundo Ludke e André (2013), para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas e o conhecimento teórico construído a respeito dele. Neste sentido, como primeiro passo para o desenvolvimento dessa pesquisa, foi desenvolvida esta pesquisa bibliográfica. Partiu-se então para o segundo passo que é a coleta dos dados e será descrita no próximo capítulo.

3 METODOLOGIA

Nessa pesquisa a coleta de dados foi feita por meio da análise documental.

Para Calado e Ferreira (2004/2005) a análise de documentos possui as seguintes etapas: levantamento dos documentos e a análise do conteúdo dos documentos.

Entende-se por documento, de acordo com Bell (1993), como sendo “uma impressão deixada num objeto físico por um ser humano e pode-se apresentar sob a forma de fotografias, de filmes, de dispositivos, endereços eletrônicos, impressa (a forma mais comum), entre outras (BELL, 1993, apud CALLADO, FERREIRA,

2004/2005, p.2). Flick (2009) acrescenta que os documentos podem ser um arquivo eletrônico.

Para Ludke e André (2013), “documentos constituem uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentem afirmações e declarações do pesquisador” (LUDKE; ANDRÉ, 2013, p.45)

No caso desta pesquisa, os documentos analisados foram as produções dos professores PDE, sobre frações, produzidas nos anos de 2013, 2014 e 2016, que se encontram disponibilizadas no site da SEED, portanto, documentos eletrônicos. Para proceder a coleta dos dados, utilizou-se o sistema de busca do site, usando como palavras-chave: fração, razão, proporção, porcentagem e probabilidade. Optou-se por colocar entre as palavras-chaves os termos razão, porcentagem, proporção e probabilidade, pois, como foi visto nos referencias teóricos, estes estão associados a significados das frações. Na pesquisa eletrônica encontrou-se tanto as produções didáticas, como os artigos relacionados à fração, que resultaram da aplicação destas produções em sala de aula. Após ler alguns trabalhos, optou-se por analisar somente a produção didática, pois esta permitia conhecer, em mais detalhes, a proposta para o ensino de frações, elaborada pelos professores. Desta forma, se definiu o corpus desta pesquisa.

Para Moraes e Galiazzi (2007), o corpus se constitui uma amostragem de determinados documentos que serão alvo da pesquisa. Com a delimitação do corpus se inicia a pesquisa propriamente dita. Delimitado o corpus passou-se para o processo de tratamento e análise dos dados. Para isso foi utilizada a metodologia da Análise Textual Discursiva.

Essa metodologia, tem como princípio que: todo texto é constituído de significantes que receberão do pesquisador significados, baseados em seus conhecimentos e teoria, já que “toda leitura é feita a partir de uma perspectiva teórica, seja consciente ou não” (MORAES e GALIAZZI, 2007, p.15).

A primeira fase da análise textual discursiva é denominada: desconstrução ou unitarização. Nesta fase procede-se uma fragmentação do corpus, que se dá por meio de várias leituras do mesmo, identificando elementos de significado referentes aos fenômenos estudados. Estes elementos selecionados se constituem as unidades de análise. O pesquisador é quem decide como fragmentará o texto, tendo unidades de análise de diferentes amplitudes. Quanto ao critério utilizado, para selecionar as unidades de análise, os autores colocam:

“No processo de unitarização, é preciso ter sempre presentes os objetivos do estudo que se está conduzindo, os quais servirão de referência para os recortes dos textos. Cada fragmento produzido deve ter relação com os objetivos e o processo de unitarização, como um todo deve refletir as intenções da pesquisa e como atingi-lo” (MORAES E GALIAZZI, 2007, p.51)

A segunda etapa da Análise Textual Discursiva é o processo de categorização. A categorização é uma forma de construir relações entre diferentes unidades de análise, agrupando unidades semelhantes em grupos denominados categorias. Podem ser feitos vários níveis de categorias e subcategorias.

As categorias podem ser definidas de duas formas: a priori, quando são definidas antes de se iniciar a análise dos documentos, ou a posteriori, quando as categorias surgem após se examinar os documentos. As categorias a priori, geralmente, são elaboradas a partir da teoria na qual se embasou o pesquisador para fazer sua pesquisa.

Segundo Moraes e Galiazzi (2007), as categorias precisam apresentar duas características: precisam ser válidas e homogêneas. Um conjunto de categoria é válida quando ele é pertinente em relação ao objetos e aos objetivos do estudo. Quanto a homogeneidade, ela se refere as categorias serem construídas a partir de um mesmo princípio. Sobre isto os autores colocam:

“As categorias de um mesmo conjunto necessitam serem homogêneas, ou seja, precisam ser construídas a partir de um mesmo princípio, de um mesmo contínuo conceitual. Não se podem misturar plantas e animais quando categorizando plantas” (MORAES E GALIAZZI, 2007, p.26).

A terceira e última fase da Análise Textual Discursiva, é a construção do metatexto. Segundo Moraes e Galiazzi (2007), o metatexto é composto por textos descritivos e interpretativos, que apresentam a compreensão e teorização do autor sobre o fenômeno investigado. Quanto à parte descritiva dos metatextos, segundo os autores já mencionados, ela consiste em apresentar e descrever as categorias e subcategorias, fundamentando e validando as descrições a partir de citações retiradas do corpus. Quanto à interpretação, os autores colocam que é uma teorização que pode se dar de duas formas. Uma delas é a contrastação com teorias já existentes.

“O pesquisador, quando interpretando os sentidos de um texto com base em um fundamento teórico escolhido a priori, ou mesmo selecionado das análises, exercita um conjunto de interlocuções teóricas com os autores

mais representativos de seu referencial. Procura com isso melhorar a compreensão dos fenômenos que investiga, estabelecendo pontes entre os dados empíricos com que trabalha e suas teorias de base” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.36).

Outra forma é a criação, quando o pesquisador não escolheu um referencial teórico, previamente, e teoriza estabelecendo relações entre as categorias construídas.

Após essa breve exposição teórica, sobre a Análise Textual Discursiva, será descrito como ela foi aplicada neste trabalho. Após a coleta de dados partiu-se para a leitura dos trabalhos. Nesta fase da pesquisa, cada um dos trabalhos dos professores PDE (elemento do corpus), foi lido, procurando identificar-se neles: as dimensões do conceito de fração que o trabalho enfatiza, as metodologias ou recursos didáticos utilizados na produção, os significados de fração que são trabalhados na proposta, as inter-relações entre o conteúdo de frações com outros conteúdos ou com o cotidiano, que aparecem na produção.

A escolha destes elementos se deve ao fato deles fazerem parte dos objetivos específicos desta pesquisa. Assim eles funcionaram como categorias a priori, que guiaram a definição das unidades de análise. Tal procedimento está em consonância com o que destaca Moraes e Galiazzi (2007), que afirmam:

“As unidades de análise são sempre definidas em função de um sentido pertinente aos propósitos da pesquisa. Podem ser definidas em função de critérios pragmáticos ou semânticos. Num outro sentido, sua definição pode partir tanto de categorias definidas a priori, como de categorias emergentes. Quando se conhecem de antemão os grandes temas da análise, as categorias a priori, basta separar as unidades de acordo com esses temas ou categorias” (MORAES, GALIAZZI, 2007, p.19).

No momento da leitura, também foi criado um código para cada um dos trabalhos lidos, fazendo-se, então, necessário, que a codificação seja explicada. A letra “P” no início de cada código refere-se à “produção”, na sequência, o algarismo se refere aos dois últimos algarismos do ano da produção, as duas letras em seguida, referem-se à primeira letra do nome do autor da produção e a primeira letra do seu sobrenome. A codificação foi escolhida dessa maneira, pois, devido à quantidade de produções analisadas, a forma como foi codificada, além de facilitar para o leitor, para diferenciar cada produção mencionada, também serviu de meio facilitador para o autor desse trabalho, como forma de localização das produções, quando precisava a elas retornar no decorrer da análise.

No processo de categorização definiu-se a cadeia de categorias, subcategorias e unidades de análise apresentadas na Figura 1.

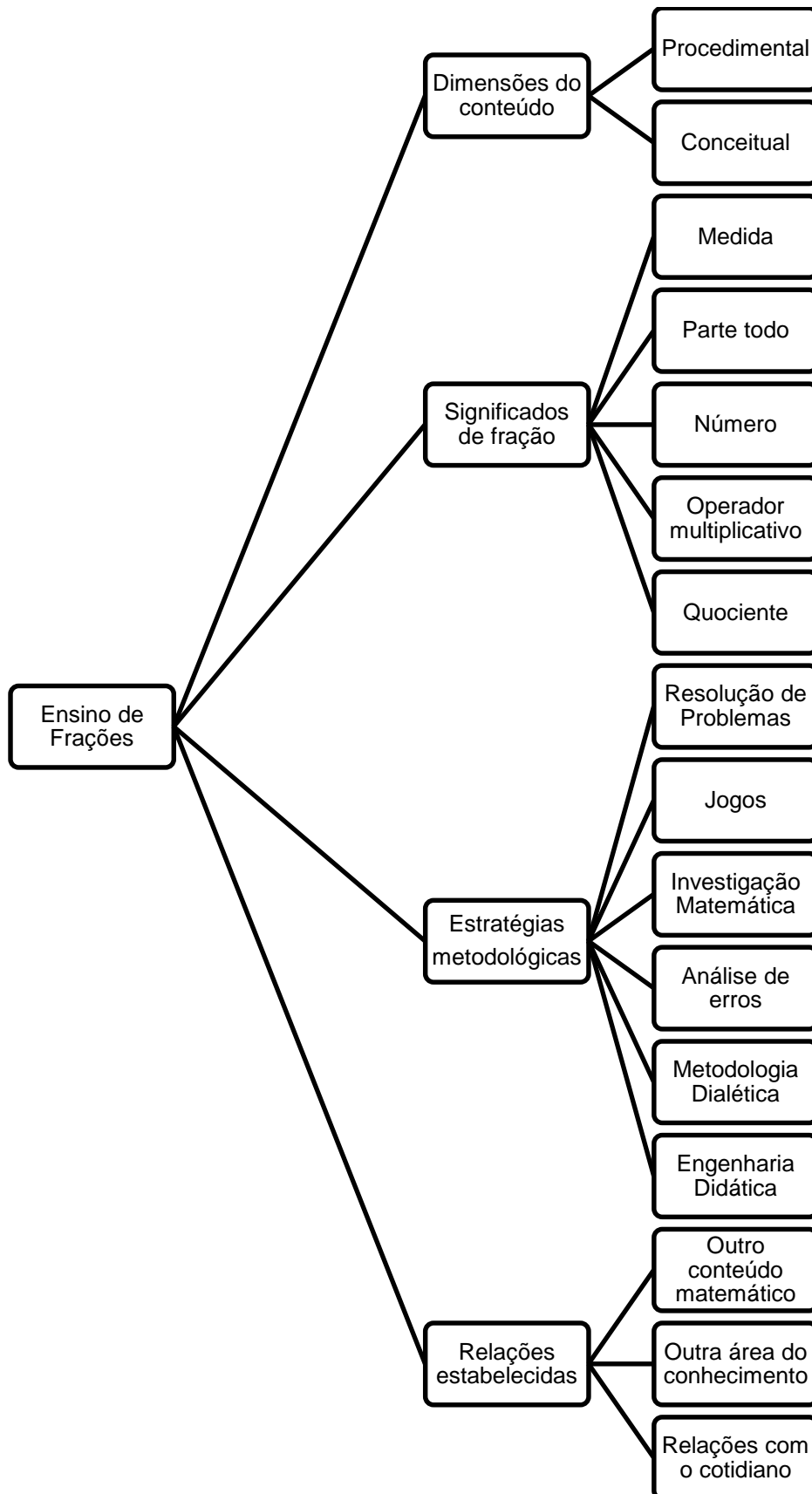


Figura 1 - Categoria, subcategorias e unidades de análise

Fonte: Dados da pesquisa

Como categoria temos o ensino de frações. A seguir, têm-se as subcategorias: dimensões do conteúdo, significados, estratégias metodológicas e relações estabelecidas. Tanto as categorias como as subcategorias podem ser consideradas como categorias a priori e, como já foi dito, foram definidas a partir dos objetivos desta pesquisa.

Pode-se considerar, que a definição destas categorias tem, também, relação com a fundamentação teórica, pois ao se propor fazer um mapeamento dos trabalhos que abordam frações, produzidos pelos professores PDE, procurou-se na literatura, quais os aspectos que deveriam ser considerados ao se pensar no ensino de frações.

Quanto as unidades de análise de cada subcategoria exposta na Figura 1, a maioria delas pode ser consideradas a priori, no sentido que, pelo referencial teórico, já eram esperadas que surgissem. Assim, já se esperava, para a subcategoria das dimensões do conteúdo trabalhado, as unidades de análise: procedimentais e conceituais. Para a subcategoria ensino de frações, as unidades de análise: operador multiplicativo, “parte todo”, quociente, medida e número. Para a subcategoria estratégias metodológicas, todas as unidades de análise a ela associadas, foram criadas a posteriori, embora fosse esperado que surgissem algumas delas, como a Resolução de Problemas, Investigação Matemática e uso de Jogos, pois estão presentes tanto nos PCN, quanto nas diretrizes de Matemática da Secretaria Estadual de Educação do Paraná. As estas, foram acrescentadas, que surgiram a medida que os dados estavam sendo coletados. Por fim, nas subcategorias relações estabelecidas, todas as unidades de análise: relações com o conteúdo matemático, relações com o cotidiano e relações com outras áreas do conhecimento, são também consideradas a priori, pois enfocam aspectos já abordados no referencial teórico.

Considerando as categorias e subcategorias estabelecidas, que tem relação com os objetivos da pesquisa, bem como com os referencias teóricos, considera-se que satisfazem as condições de validade colocadas por Moraes e Galiuzzi (2007), para as categorias, na Análise Textual Discursiva. Cada categoria e subcategoria e unidade de análise, abordam um único aspecto relacionado ao ensino de frações elencado na literatura, considera-se, assim, que também é satisfeito o critério de

homogeneidade das mesmas, outra exigência da metodologia da Análise Textual Discursiva. Para Moraes e Galiazzi (2007), cada categoria deve se referir a um único aspecto do fenômeno em estudo.

Apresentada a metodologia utilizada, na análise e coleta dos dados, parte-se para a última fase da pesquisa, que é a apresentação dos dados e sua análise. Assim, no capítulo seguinte, serão descritas, com mais detalhes, cada uma das subcategorias e suas respectivas unidades de análise, bem como as inferências feitas a respeito do fenômeno investigado, a partir das análises desenvolvidas, que são apresentadas na forma de metatextos, como indica a metodologia utilizada.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção será realizada a discussão dos resultados obtidos, por meio da análise das produções didático-pedagógicas, dos professores PDE. Na subseção 4.1 será feita uma análise apresentando algumas informações gerais sobre as produções, e na subseção 4.2 seguinte, serão apresentadas cada uma das subcategorias com suas respectivas unidades de análise.

4.1 Análise numérica dos dados coletados

Em um primeiro momento, apresentamos alguns dados numéricos com relação aos trabalhos encontrados. O Gráfico 1 apresenta a quantidade de trabalhos realizados por ano, pelos professores do PDE, que abordaram o ensino de frações, nos anos que foram objetos da pesquisa.



Gráfico 1: Número de produções didático-pedagógicas analisadas

Fonte: Autores

No Gráfico 2 é apresentada a relação do número de produções didático-pedagógicas por universidades e faculdade conveniada com o programa PDE. Pode-se observar, pelo Gráfico 1, que o tema frações apareceu em todos os três anos e o Gráfico 2 mostra que o tema esteve presente nos trabalhos desenvolvidos em 6 das 9 instituições¹ conveniadas no período analisado. Assim, pode-se inferir que o ensino de frações está entre os temas que despertam, em vários professores, preocupações ao ser ensinado, o que os levam buscar alternativas para que este possa ser aprendido pelos alunos.

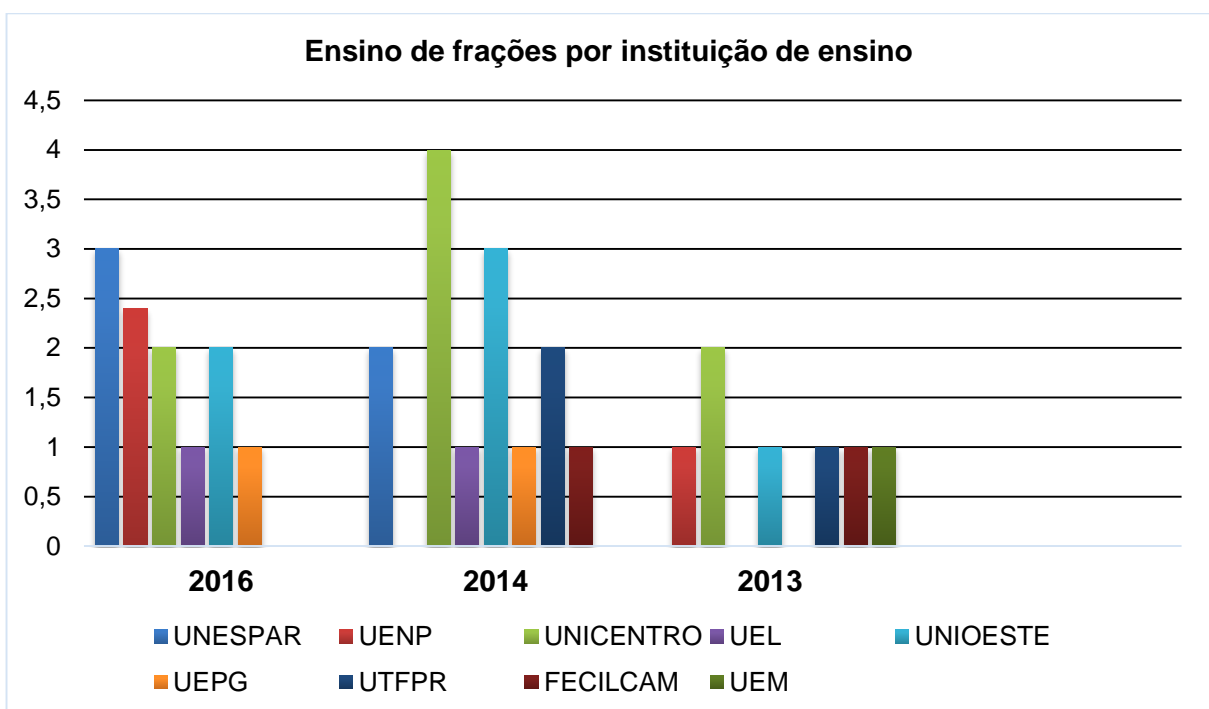


Gráfico 2: Conteúdo de frações abordado

Fonte: Autores

Os professores, autores das produções, apresentam, como justificativa para a escolha do tema, as dificuldades que os alunos possuem no ensino de frações, ou na própria matemática, sendo alguns deles:

“[...] optamos por trabalhar com o processo de ensino e da aprendizagem da matemática, mais especificamente o estudo

¹ Universidades que participaram do programa PDE: Universidade Estadual do Norte do Paraná (UNESPAR), Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO), Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (FECILCAM – UNESPAR), Universidade Estadual de Maringá (UEM).

das frações, pois entendemos que é significativo o número de alunos que apresentam dificuldades na apropriação desse conhecimento matemático”. P16VK

*“A escolha do tema, para o desenvolvimento desse trabalho de pesquisa, surgiu após várias reflexões e análises das situações vividas durante o exercício do trabalho docente, realizado ao longo dos anos, junto à clientela dos sextos anos do Ensino Fundamental, que levaram a constatação da aversão dos alunos ao trabalho com números racionais fracionários [...]”
914RA.*

Alguns autores trazem também os motivos que seriam as causas dessas dificuldades:

“[...] as dificuldades enfrentadas pelos alunos, na aprendizagem de frações, são gritantes, provavelmente porque o aluno não compreende a fração como uma divisão do todo em partes iguais, o que contribui para a ocorrência de erros conceituais” P16ER

“A escolha do tema levou em consideração as dificuldades enfrentadas por professores e alunos no ensino e na aprendizagem das frações, dos números decimais e das porcentagens, visto que estes conteúdos, muitas vezes, são trabalhados separadamente e sem relação com a realidade do aluno”. P16KB

Pode-se notar, que P16ER, a causa apontada pelo autor do trabalho está de acordo com a afirmação de Magina, Bezerra e Spinillo (2009), que colocam como uma das causas da dificuldade de fração, a sua relação com conceitos complexos, dentre eles, o da divisão. Já o autor do trabalho P16ER, aponta como causa da dificuldade, o trabalho desconexo entre os diferentes significados e formas de representação. Esta afirmação vai ao encontro do que coloca Lessa (2009), que

salienta a importância de não se trabalhar os vários conceitos associados à fração, de forma desconectada e, também, com o que afirma Lapa (2013), que destaca a importância de se trabalhar as diversas representações.

Outro aspecto que foi analisado nas produções investigadas, são os conteúdos abordados. O Gráfico 3 apresenta os conteúdos abordados nos trabalhos PDE, dos anos analisados.

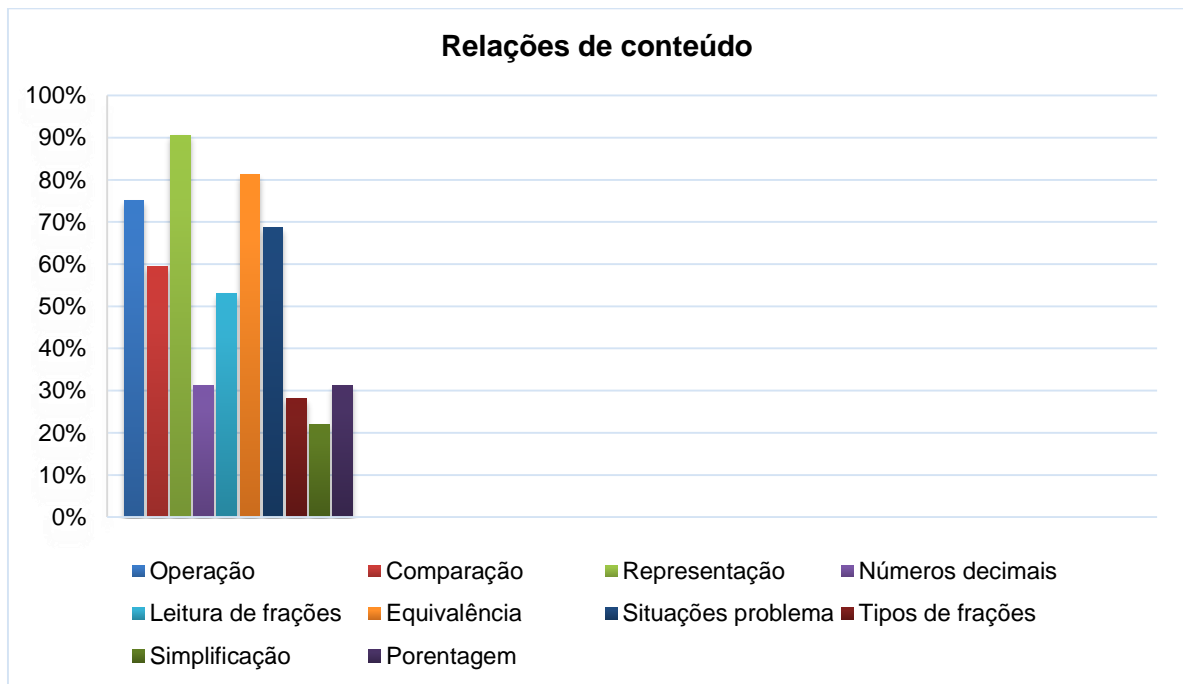


Gráfico 3: Relação de conteúdo

Fonte: Autores

O primeiro conteúdo que aparece no gráfico é o de operações. Este se refere àquelas produções nas quais o objetivo de ensino está relacionado ao domínio de operações com números fracionários: a divisão, multiplicação, subtração e adição. Abaixo é mostrado um exemplo desse tipo de atividade, apresentado em um dos trabalhos:

“Quanto é $\frac{5}{7} - \frac{2}{3}$?”. P13EF

“Divida as frações: a) $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ b) $\frac{3}{8} : \frac{6}{7}$ c) $\frac{5}{7} :$ d) $\frac{8}{6} : \frac{6}{9}$ ” P14CR

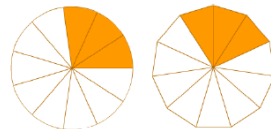
Outro conteúdo presente no Gráfico 3, é a comparação, ele se refere as produções que tem como um dos objetivos de ensino a ordenação de frações.

*“Utilizando os sinais de $>$, $<$ ou $=$, compare as frações: a) $\frac{7}{10}$
 $\frac{7}{20}$ b) $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{10}$ d) $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$ ”.* P13AA

Quanto ao conteúdo, representação de frações, este se refere às produções, cuja proposta teve como um dos objetivos de ensino, que o aluno soubessem representar uma fração na forma pictórica ou, dado um desenho ou enunciado, realizar sua representação na forma fracionária, explorando a relação “parte todo”. Um exemplo de atividade com este objetivo é:

“Num grupo de três formigas, uma tem a cor diferente. Represente essa situação na forma de fração fazendo a leitura”. P13AA

“Observe as frações correspondentes à parte laranja em cada figura:



Qual a representação fracionária das duas figuras?” P14JP

O termo números decimais, apresentado no Gráfico 3, indica os trabalhos cujas atividades exploraram a relação das frações com números decimais. Um exemplo é representado a seguir:

“É possível transformar o número 4,22 em uma fração?”.
P16KD

“Qual é o “representação decimal” da fração $\frac{3}{4}$? Como poderemos fazer para achar esse valor?” P13AA

A leitura de frações também é um conteúdo que aparece nas produções. Um exemplo dessa atividade, é dado abaixo:

“Faça a leitura das frações e registre:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{7}{12}$ ” P16VK

Embora os conteúdos de equivalência, operações e simplificação de frações, estejam relacionados, eles foram aqui apresentados separadamente, pois em algumas produções, os autores os exploram de forma separada. Há autores que trabalharam o conceito de equivalência, porém, não o de simplificação. Devido a isso, no Gráfico 3, eles são apresentados separadamente. Para uma melhor compreensão, a seguir são mostrados alguns exemplos:

“[...] abordaremos os conceitos de frações equivalentes, simplificação de frações, números decimais, porcentagem, sempre trabalhando com problemas relacionados ao dia a dia dos alunos [...]” P16MP

“Definido o conceito de equivalência, retomar os números fracionários exemplificando como chegar a frações equivalentes pela multiplicação ou pela divisão. Demonstrar através de exemplos a simplificação de frações, esclarecendo que ao chegar ao último resultado possível de uma fração simplificada, temos as chamadas frações irredutíveis”. P14AD

Para trabalhar simplificação foram desenvolvidas atividades como:

“Escreva as frações dadas e simplifique-as, se for o caso:

a) Seis oitavos b) Doze quinze avos [...]”

“Calcule e simplifique se for possível:

a) $\frac{8}{9} - \frac{2}{9}$ b) $\frac{7}{5} - \frac{1}{5}$ [...]” P16ER

“Represente todas as frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ “. P14MO

Foram também encontradas produções em que os objetivos de ensino estavam relacionados a desenvolver no aluno a capacidade de resolver situações problemas. Estas atividades estiveram presentes em 65% das produções, como mostra o Gráfico 3. Um exemplo dos tipos de problemas presentes nestas produções é:

“Para fazer um copo de suco de laranja são necessárias duas laranjas e meia. Quantas laranjas serão necessárias para fazer: a) 5 copos de suco; b) 8 copos de suco; c) 20 copos de suco”. P14MO

Entre os conteúdos explorados, também foram encontradas atividades que objetivavam que o aluno soubesse diferenciar e compreender diferentes tipos de fração: as frações aparentes, impróprias, próprias e mistas, abordados no Gráfico 3. Estes conteúdo é denominado “tipos de frações”. Um exemplo deles é:

“Coloque sobre a mesa, lado a lado, o correspondente a $\frac{10}{5}$, substitua por inteiros o que for possível e represente numericamente a substituição efetuada”. P14MO

Por último, temos as produções que envolveram porcentagem. Foi explicado o conceito, em seguida aplicado atividades referentes, que se manifestaram em forma de situações problemas. Alguns exemplos são:

“Se a professora regente da turma pagasse 50% do valor das pizzas. Quanto ela pagaria, sabendo que o valor total foi de R\$192,00?” P16MP

*“Como podemos transformar uma fração em porcentagem?
[...]Como podemos representar essa porcentagem em número decimal?” P14JP*

De forma geral, as produções apresentaram mais de um conteúdo, como pode ser verificado no Gráfico 3. As operações aparecem com grande frequência, acima de 70%, o mesmo ocorrendo com a leitura de frações, equivalência e situações problemas. A porcentagem de trabalhos que exploraram a representação de frações alcançaram 90%. Pode-se inferir disso, o destaque atribuído ao significado “parte todo” por parte dos professores. Tal fato é destacado por Campos et al. (2014), que destacam que no Brasil, este é o significado, mais explorado pelos professores e que é geralmente usado para introduzir o estudo das frações.

Após este panorama geral, sobre os trabalhos, serão apresentadas na seção seguinte: a categoria, as subcategorias e as unidades de análise, enfocando diferentes aspectos relacionados ao ensino de frações, investigados nas produções dos professores PDE.

4.2 Análise das categorias e subcategorias

A categoria mais geral escolhida foi o ensino de frações. Esta foi subdividida em 4 subcategorias. A descrição de cada uma delas será aqui apresentada em quadros. Cada quadro descreverá uma subcategoria e suas respectivas unidades de análise, acompanhados de exemplos de trechos dos trabalhos, que foram nelas classificados. Após cada quadro é apresentado um metatexto referente à análise desta subcategoria.

No Quadro 8 apresenta-se a análise da subcategoria *Dimensões do conteúdo*.

(continua)

Subcategoria nível II: Dimensões do conteúdo

Descrição: Nesta subcategoria compreende informações a respeito das dimensões do conteúdo, que são exploradas por meio das atividades que fazem parte da proposta didática. Segundo os PCN, do ensino Fundamental de Matemática (BRASIL,1998), os conteúdos possuem três dimensões: procedimentais, conceituais e atitudinais. Assim, esta categoria foi desmembrada em duas subcategorias de nível III. Procurou-se então analisar as atividades presentes em cada produção e analisar quais as dimensões do conteúdo eram exploradas por meio das atividades propostas na produção

- **Procedimental** – Nesta subcategoria se classificam as produções que apresentam alguma atividade que demonstra a preocupação com a aprendizagem de técnicas e algoritmos.
- **Conceitual** – Nessa subcategoria se classificam as produções que apresentam alguma atividade que demonstra a preocupação com a construção do conceito.

Estas unidades de análise foram construídas a priori, baseadas no referencial teórico.

A frente de cada unidade são apresentados alguns exemplos de atividades ou trechos das propostas que revelam uma abordagem do conteúdo que se classifica nesta unidade.

Unidades de análise	Exemplos de atividades utilizadas na produção
Procedimental	<p>“Deste modo, o momento é oportuno para explorar a forma como se transforma um número decimal em fração [...] que tal tentarmos transformar uma fração em porcentagem? Vamos usar o exemplo anterior: $4,22 = \frac{422}{100} = \underline{\quad}\%$”. P16KD</p> <p>“[...] mostraremos como fazer a transformação de um número misto em fração imprópria e vice-versa”. P16MP</p> <p>“Na multiplicação com frações, multiplica-se numeradores com numeradores e denominadores com denominadores. [...] Nas operações de adição e subtração com mesmo denominador, repete-se o denominador”. P16AA</p> <p>“[...] sendo necessário que o aluno transforme esta fração $\frac{2}{4}$ em uma fração equivalente. Existem várias possibilidades: se multiplicar numerador e denominador por 3, terá $\frac{6}{12}$ [...]”. P16JR</p>

(continuação)

Unidades de análise	Exemplos de atividades utilizadas na produção
Procedimental	<p>“Então, para cada uma delas, dividiremos o resultado do MMC pelo denominador da fração e, em seguida, multiplicaremos o resultado pelo seu numerador e realizaremos a adição ou subtração dos novos numeradores. O uso de material didático apropriado auxilia no entendimento dessa regra” P14KB</p> <p>“Observar, se os alunos fazem os cálculos mentais, com as devidas simplificações, se percebem que multiplicar um número natural por meio é o mesmo que dividi-lo por dois”. P13GW</p> <p>“Realizar a conversão de números decimais em números fracionários (com outros denominadores) e vice-versa”. P13MS</p>
Conceitual	<p>“[...] procurar nas demais circunferências, quais peças se sobrepõe sobre o $\frac{1}{2}$ e sobre $\frac{1}{3}$ ao mesmo tempo. Ele deverá perceber que as partes que se sobrepõe é da circunferência dividida em seis partes, onde cabem duas peças sobre o $\frac{1}{3}$ e três peças sobre o $\frac{1}{2}$”. P16EC</p> <p>“Manipule os pedaços de tira para descobrir quais destas frases são verdadeiras: () $\frac{3}{6}$ da tira é o mesmo que $\frac{1}{2}$ da tira [...]”. P16MP</p> <p>“[...] entregar uma folha de papel sulfite a cada aluno, pedir que dobrem ao meio o lado maior e, em seguida, cortá-la. Depois, questioná-los sobre como podemos representar matematicamente esse pedaço da folha”. P16ER</p> <p>“Pegue do seu material as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{8}$, coloque a fração menor sobre a maior, observe a parte restante” P16VK</p> <p>“Escreva frações equivalentes às frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{8}$ e $\frac{2}{4}$. Explique com o auxílio de suas folhas de papel dobrado porque as frações que você listou são equivalentes às frações dadas”. P14EF</p> <p>“Cortar um canudinho em 2 partes iguais. Separe uma parte e escreva ao lado a fração que indica a relação que existe entre a parte separada e o total de partes em que o canudinho foi cortado”. P14MG</p>

(conclusão)

Unidades de análise	Exemplos de atividades utilizadas na produção
Conceitual	<p>“Pegue a peça representada por $\frac{1}{3}$, no material de frações. Verifique com que outras, peças é possível formar $\frac{1}{3}$?”. P14SP</p> <p>“Pegue o inteiro do seu material e compare com as outras partes. Para cada uma, verifique quantas peças são necessárias para formar o inteiro. Represente numericamente e escreva a que conclusão você chegou”. P14MO</p> <p>“Vejam que as cores representam a barra de chocolate dividida em 8 partes iguais, onde cada uma delas representa um aluno. Assim, o primeiro aluno representado pela cor vermelha, vai receber uma parte das 8 partes fracionadas, que fica representada pela fração $\frac{1}{8}$?”. P13RG</p> <p>“[...] Pegue uma folha de sulfite. Podemos dizer que a folha de sulfite representa um inteiro?”. P13AA</p>

Quadro 8: Dimensões do conteúdo**Fonte: Dados da pesquisa**

Na análise das produções didático-pedagógicas, foram encontradas, nas propostas, indícios que revelam a busca pela construção do conceito. Um exemplo é a atividade apresentada na produção P16MP, que consta no quadro 8. A atividade trabalha o conceito de frações equivalentes. Porém, em outras propostas podem ser encontrados exemplos da abordagem do mesmo conteúdo que se limita a procedimentos e técnicas, como é o caso da atividade da produção P14AD, apresentada no Quadro 8, que trabalha o mesmo conteúdo, mas onde simplesmente uma regra é enunciada.

Na Tabela 1 mostra a porcentagem de produções didático-pedagógicas as quais apresentam atividades que enfatizaram procedimentos ou conceitos, considerando-se o universo das produções analisadas.

Unidades	Produções	%
Procedimental	P16KD	43,75%
	P16JR	
	P16AA	
	P16LP	
	P14AD	
	P14KB	
	P14CT	
	P13VA	
	P13AM	
	P13GW	
	P13FR	
	P13EF	
	P13MS	
	P16MP	
Conceitual	P16EC	65,63%
	P16VK	
	P16JR	
	P16ER	
	P16NS	
	P16LS	
	P16MP	
	P14CR	
	P14EF	
	P14MG	
	P14JB	
	P14SP	
	P14MO	
	P14MB	
	P14RA	
	P14JP	
	P14ME	
	P14IP	
	P13AA	
P13RG		
P13VA		

Tabela 1 – Síntese dos resultados: Subcategoria Dimensões do conteúdo

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados Tabela 1 mostram que 43,75% das produções apresentaram atividades envolvendo procedimentos e 65,63% apresentaram atividades envolvendo conceito. Tendo em vista todas as produções analisadas, nota-se uma maior abordagem no desenvolvimento conceitual, em relação ao procedimental. Todas as produções analisadas apresentam professores de várias universidades, podendo-se então inferir, que a preocupação com a compreensão conceitual é uma característica da maioria dos trabalhos analisados.

Na produção P16MP, a autora fala que mostrará como realiza a transformação de um número misto em fração imprópria e vice-versa, o que se caracteriza como uma atividade de ênfase procedimental, em outro momento, ela apresenta outra atividade, que se caracteriza como de ênfase conceitual. Isso também ocorre no trabalho P16JR, mostrando assim, a tentativa de se trabalhar buscando o equilíbrio, trabalhando ambas as dimensões, a conceitual e a procedimental.

Tal fato também se verifica na produção P13VA, onde o autor inicia trabalhando o conceito de “parte todo”, de forma a valorizar o aspecto conceitual, porém, quando apresenta as atividades que necessitam da ideia de equivalência, como é o caso das operações com frações, tal conceito não é utilizado, apresenta-se somente o algoritmo, o mesmo ocorre nas situações problemas apresentadas na produção.

Na produção P13EF, são propostos jogos de tabuleiros, e são feitos questionamentos pós-jogos, no entanto, a produção não menciona a explicação conceitual das operações. Assim, os alunos podem estar jogando somente baseados em algoritmos, ou seja, no aspecto procedimental.

Observando a Tabela 1, nota-se que há trabalhos que só figuram na unidade de análise procedimental. Isso corrobora as afirmações de Campos e Magina (2008), que afirmam que muitos professores ainda persistem em trabalhar somente algoritmos e procedimentos.

É importante ser destacado que não se está aqui dizendo que não se deve trabalhar os algoritmos. A preocupação é com propostas de ensino de frações, nas quais, estes não nascem como resultado de um processo de compreensão de conceitos, mas como “regras para se decorar”.

No Quadro 9 são apresentados as unidades de análise da subcategoria *Significado de fração*.

(continua)

Subcategoria Significados de fração

Descrição: Nesta subcategoria compreendem informações a respeito dos significados do número fracionário que foram abordados nas produções didático-pedagógicas. As unidades de análise são os cinco significados de fração apresentados por Nunes, Magina e Campos (2006):

- **Parte todo** – Nesta unidade de análise se classificam as produções cujas produções abordaram o significado “parte todo”, que é definido como um todo que é dividido em partes iguais, ocorrendo então uma relação entre o número de partes divididas e o todo.
- **Medida** – Nesta unidade de análise se classificadas as produções cujas produções abordaram o significado de medida, que é definido como uma fração que indica a relação de uma variável com outra.
- **Operador multiplicativo** – Nesta unidade de análise se classificam as produções cujas produções abordaram o significado de operador multiplicativo, que é definido como uma fração que expressa um operador escalar aplicado a uma quantidade.
- **Número** – Nesta unidade de análise se classificam as produções que abordaram o significado número, que é definido como uma indicação de um número racional, sem se referir a quantidades específicas.
- **Quociente** – Nessa unidade de análise se classificam as abordagens que enfatizam o significado quociente, que é definido como um resultado de uma divisão e a própria divisão.

A frente de cada quadro são apresentados alguns exemplos de atividades, ou trechos das produções que indicam a abordagem do significado associado a esta unidade.

Unidades de análise	Trechos das produções que revelam a exploração do significado:
Parte todo	<p>“Represente por meio de desenhos a parte da pizza que cada aluno consumiu e escreva como deve-se ler essa fração”. P16MP</p> <p>“Faça desenhos para representar as seguintes frações: a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{5}$ [...]” P16VK</p>

(continuação)

Unidades de análise	Trechos das produções que revelam a exploração do significado:
Parte todo	<p>“[...] na primeira folha, pinte a fração $\frac{2}{5}$ e, na segunda, a fração $\frac{3}{8}$” P14EF</p> <p>“Cortar um canudinho em 2 partes iguais. Separe uma parte e escreva ao lado a fração que indica a relação que existe entre a parte separada e o total de partes em que o canudinho foi cortado”. P14MG</p> <p>“De quantas metades precisamos para completar um 1 inteiro?” P14JB</p> <p>“Uma pizza foi dividida em 8 pedaços. Represente em frações com relação à pizza inteira, os pedaços que foram comidos em cada caso: 3 pedaços [...]”. P14CR</p> <p>“Como dividimos um inteiro em partes iguais?”. P13AA</p>
Medida	<p>“No jogo, a razão apresentada era $\frac{\text{verde}}{\text{laranja}}$ (lemos: laranja para verde). Se a razão fosse $\frac{\text{laranja}}{\text{verde}}$, mudaria o resultado do jogo?” P13EF</p> <p>“As misturas tem a mesma cor nos dois dias. Pode ser representada por meio da razão e/ou da fração (isto é, $\frac{3}{3} = 1$ e $\frac{2}{2} = 1$)”. P13AA</p> <p>“[...] represente sob a forma de fração a quantidade de suco em relação à quantidade de água”. P14RA</p> <p>“Para fazer um suco de laranja misturo em uma jarra 2 copos de água para 1 de concentrado de fruta. Que razão de concentrado tem na jarra?” P14JP</p> <p>“Uma farmacêutica mistura groselha num remédio de tosse. Para melhorar o gosto do remédio que é muito amargo ela usa uma colher do remédio e 2 colheres de groselha. Que parte da mistura foi feita com groselha?” P14MO</p>

(conclusão)

Unidades de análise	Trechos das produções que revelam a exploração do significado:
Operador multiplicativo	<p>“João e José juntaram dinheiro para comprarem juntos um videogame. João pagou por $\frac{5}{8}$ do preço e José pagou R\$ 45,00. Quanto custou o videogame? P16MP</p> <p>“Ângela ganhou uma caixa contendo 15 bombons. Ela já comeu $\frac{2}{5}$ dos bombons: a)Quantos bombons ela comeu?”. P13AA</p> <p>“De uma jarra contendo 9000 ml de leite, Juliane bebeu $\frac{1}{3}$. Quantos mililitros de leite ela bebeu?”. P14JP</p>
Número	<p>“Qual é a “representação decimal” fração $\frac{3}{4}$? Questioná-los como fazer para encontrar o ponto na reta que represente esta fração. Depois chamar o aluno para que localize a fração na reta”. P13AA</p> <p>“Encontre o resultado dos cálculos abaixo: a) $\frac{7}{5} - \frac{3}{5} = ?$ [...]”. P16MP</p> <p>“Marque as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{4}$ na reta numérica. O que significa fazer essa divisão em relação aos pontos da reta?”. P14JP</p>
Quociente	<p>“Vocês notaram que são dois meninos e três bolos. Qual o total de bolo que cada filho levará para a festa? Como poderemos ajudar os irmãos dividir esses bolos para que cada um leve a mesma quantidade para a festa? Podemos fazer uma operação? Qual? Represente esta divisão de bolos na forma de fração”. P13AA</p> <p>“Divida igualmente 4 pizzas entre 6 pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?”. P14MO</p>

Quadro 9: Significado de fração**Dados: Fonte da pesquisa**

A Tabela 2, apresenta cada significado e as produções que os abordaram.

(continua)

Unidades	Produções	%
Parte Todo	P13FR	100%
	P13RG	
	P13EF	
	P13AA	
	P13AM	
	P13GW	
	P13MS	
	P13VA	
	P14JP	
	P14CT	
	P14SP	
	P14KB	
	P14MB	
	P14JB	
	P14MG	
	P14CR	
	P14ME	
	P14MO	
	P14RA	
	P14AD	
	P14EF	
	P14IP	
	P16MP	
	P16EC	
	P16LS	
	P16ER	
	P16AA	
	P16LP	
P16KD		
P16VK		
P16NS		
P16JR		
Medida	P13EF	15,63%
	P13AA	
	P14JP	
	P14MO	
	P14RA	

(continuação)

Operador Multiplicativo	P13MS P13AM P13EF P13RG P13AA P13GW P13VA P14ME P14JP P14RA P14MO P14SP P14KB P14CR P14AD P16MP P16AA P16LS P16JR P16ER P16NS P16LP P16VK	71,88%
Número	P13MS P13EF P13RG P13AA P13GW P13VA P13AM P14JP P14ME P14RA P14MB P14CT P14MO P14SP P14KB	78,13%

(conclusão)

	P14JB P14CR P14AD P16EC P16LS P16MP P16ER P16LP P16JR P16VK	
Quociente	P13AM P13AA P13RG P13EF P13MS P14MO P14JP P14AD P14CR P16MP P16KD P16EC P16ER P16LS	43,75%

Tabela 2 – Subcategoria significados, trabalhos classificados

Fonte: Dados da pesquisa

Observando-se a Tabela 2, nota-se que 100% dos autores exploraram o significado “parte todo”. Vários destes trabalhos apresentavam atividades explorando este significado trabalhando a relação entre as representações numéricas e pictóricas das frações. Silva (2005) adverte que se deve ter cuidado ao utilizar este tipo de atividade, pois ela dá ênfase a dupla contagem. Isto pode trazer dificuldades posteriores para o aluno compreender a fração como um número, pois ele acaba considerando numerador e denominador como sendo dois números separados. O acerto destes tipos de questões, não é por si só, garantia que o aluno entendeu o que é uma fração, e pode transmitir a ideia de que o aluno aprendeu o conteúdo, por saber estabelecer essa relação, quando na verdade não entendeu.

Cabe destacar, que há produções que conseguiram fugir da tradicional abordagem do “parte todo” que dá ênfase a representação pictórica. As produções P13FR, P14CT, P14AD, P14IP e P16KD, não se utilizaram da representação pictórica para explorar o significado “parte todo”.

A P16KD trabalhou o conceito de porcentagem, por meio de algoritmos, conforme apresentando no Quadro 8, a P14CT, P13FR fez o uso de instrumentos musicais, a P14AD trabalhou o conceito com receitas, e a P14IP utilizou-se de peças do Tangram.

Segundo Lessa (2009), no trabalho com o significado “parte todo”, é necessário estar atento a alguns aspectos. Um deles é compreensão do conceito de unidade dentro das frações, que deve ser explorado tanto no todo contínuo quanto no discreto. Observando os trabalhos, notou-se que todas as produções apresentaram o número fracionário com a ideia do todo contínuo. No entanto, em relação ao todo discreto, ele esteve presente somente nas produções P13FR, P13VA, P13AM, P13MS, P14KB, P14AD, P14MG, P14SP, P14MB, P14CT, P14LP, P16KB, P16JR e P16AA. Assim 43,75% dos trabalhos, não abordaram. Aquelas produções que trabalharam as duas situações, muitas vezes não deram a devida ênfase, destacando o fato, tanto no momento da explanação do conceito, quanto nas atividades. Em algumas produções o todo discreto foi apresentado somente durante os exercícios propostos.

As produções P13RG e P13AA, foram as únicas que apresentaram, tanto nas explicações como nos exemplos, o todo contínuo e discreto ao mesmo tempo.

Outro fator destacável nas produções, é que em geral, os exemplos nos trabalhos que se referem ao significado “parte todo”, envolvem um desenho de uma pizza, uma circunferência ou um retângulo, não ocorrendo uma diversificação. Estes são geralmente os exemplos apresentados nos livros didáticos e é bem possível que com estes exemplos é que estes professores tenham aprendido frações. Este fato parece indicar o que já foi dito por Santos (2005), sobre a influência exercida pela formação como estudantes na Educação Básica, sobre os professores, quando estes tem que elaborar atividades sobre fração.

Um outro cuidado que se deve ter, ao abordar o significado “parte todo” explorando a representação pictórica, é destacado por Lessa (2005), que recomenda que se dê destaque ao fato de que o todo deve ser dividido em partes iguais.

Algumas produções que abordaram o significado “parte todo”, relacionando-o com sua representação pictórica, destacaram apenas nos enunciados dos exercícios, que as frações devem ser divididas em partes iguais, não enfatizando durante as explicações.

Este tipo de destaque apareceram somente nas produções P13VA, P14MG, P14JP, P16ER, P16EC, P13VA. Para uma melhor compreensão, é mostrado três exemplos das produções que enfatizaram esse aspecto:

“[...] a fração é parte de algo inteiro, que dividimos em partes exatamente iguais”. P13VA

“[...] se o professor considerar que o aluno cortou os canudinhos em tamanhos desiguais [...] sugere-se que o professor, primeiramente pegue a régua e peça para que o mesmo mostre a maneira como utilizou [...]. Em seguida, sugere-se que o professor mostre a maneira correta de utilizar a régua. A partir disso deixe que os alunos tentem fazer novamente o que se pede”. P14MG

“Repartição do todo em partes iguais em que cada parte pode ser representada por uma fração do todo”. P14JP

Para Lessa (2005), um conceito importante para a ser explorado, quando se aborda o significado “parte todo”, é o conceito de equivalência. Notou-se que as produções procuraram explorar este conceito. As produções usam em geral atividades com materiais manipulativos ou explorando a representação pictórica, para que o aluno consiga entender o conceito de equivalência. O conceito também é enfatizado na abordagem das operações de adição e subtração de números fracionários, os autores usam o conceito de equivalência para explicar os processos de somar e subtrair frações. Já na apresentação das operações de divisão e multiplicação, apenas a produção P14EF apresentou a explicação do algoritmo, usando os conceitos.

Quanto ao significado medida, este apresentou-se em 15,63% das produções. Destas, somente duas produções: P14MO e P13AA mencionam explicitamente que

está sendo abordado este significado. Em outras duas produções: a P14JP e a P13EF, não há menção ao termo medida, mas os autores se referem ao termo “razão”. Faz-se necessário lembrar que o conceito de razão está inserido no de medida, segundo Menegazzi (2013). A P14RA apenas apresenta um exercício que traz a ideia de medida, mas não menciona nem o termo medida, nem o termo razão. Apesar desse significado estar presente nas produções analisadas, este significado não foi trabalhado de forma profunda. Nas produções em que ele apareceu, no máximo foram dados dois exemplos.

O significado operador multiplicativo apareceu em 71,88% das produções analisadas. Em algumas produções ele foi explorado por meio de situações problemas, sendo apresentado depois do significado “parte todo” e do conceito de equivalência. Esta abordagem vai ao encontro das considerações feitas por Lessa (2009), que afirma que para abordar este significado, deve-se discutir a relação entre este e o de “parte-todo”, mostrando que quando se utiliza o significado operador multiplicativo, está se fazendo uma transformação de uma quantidade inicial, em outra quantidade, sendo a fração o multiplicador dessa quantidade. Já as produções P13FR, P13EF, P13AM, P13GW, P13MS, P13VA, P14CT, P14KB, P14AD, P16AA, P16LP, P16KD e P16JR, que também exploraram este significado, apresentaram somente o algoritmo, não atendendo as orientação dadas por Lessa (2009).

O significado Quociente aparece também em 43,75% das produções analisadas, sendo sempre associado a uma situação problema, ou em exercícios que relacionam a forma fracionária e a decimal. Em alguns dos trabalhos pode-se encontrar atividades, como propõe Charalambous e Pitta-Pantazi (2007 apud LESSA, 2009), que desenvolvem algumas habilidades para esse significado, como a identificação da “barra”, no ato de dividir e a relação com o símbolo \div , como apresentado:

“Uma fração também pode ser interpretada como uma divisão, e o traço da fração pode ser interpretado como \div ”. P13AA

O significado número esteve presente em 81,25% das produções. As atividades usadas para explorar este significado envolveram ordenação de frações ou operações com as mesmas, ou localização de números fracionários na reta real.

A Figura 2 apresentam os significados trabalhados em cada produção analisada. Este quadro foi construído com o objetivo de analisar se uma mesma produção trabalha diferentes significados.

ARTIGOS	SIGNIFICADOS DAS FRAÇÕES				
	Parte todo	Medida	Operador Multiplicativo	Número	Quociente
P13FR					
P13RG					
P13EF					
P13AA					
P13AM					
P13GW					
P13MS					
P13VA					
P14JP					
P14CT					
P14SP					
P14KB					
P14MB					
P14JB					
P14MG					
P14CR					
P14ME					
P14MO					
P14RA					
P14AD					
P14EF					
P14IP					
P16MP					
P16EC					
P16LS					
P16ER					
P16AA					
P16LP					
P16KD					
P16VK					
P16NS					
P16JR					

Figura 2 – Abordagem dos significados por conteúdo

Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se, pela Figura 2, que com exceção do P13FR, P14MG, P14EF e P14IP, que só trabalharam o significado “parte todo”, todos os demais trabalhos trabalharam mais de um significado, o que vai ao encontro das orientações dadas por vários autores, como Lessa (2009), Campos Nunes e Magina (2006) e Brocardo (2010), que destacam a importância de que a abordagem de frações, com os vários significados, devem ser apresentados de forma integrada.

De uma forma geral, analisando os dados da Figura 2, também verifica-se que todos os trabalhos abordaram o significado “parte todo”. Tal fato vai ao encontro dos estudos de Campos et al. (2014), que afirmam que esse significado é o mais abordado no Brasil, quando se trabalha frações. No entanto os autores fazem uma advertência, quanto a serem otimista, porém enganosa, da eficácia do ensino de frações, quando sempre baseado no “parte todo”. Utilizando-se do procedimento de dupla contagem, os alunos podem chegar a respostas certas nas atividades sem no entanto, ter compreendido o conceito.

O significado medida é o menos encontrado nas produções, estando presente em apenas 15,63% das produções analisadas. O que chama a atenção, pois este significado estar presente no conceito de razão, porcentagem e probabilidade, sendo assim, um significado que apresenta várias aplicações em outras áreas do conhecimento e também em situações do cotidiano, merecendo assim um destaque no trabalho escolar, sendo assim um instrumento que pode ser utilizado pelo alunos para a análise e compreensão da realidade.

Além de se investigar nos trabalhos os conceitos trabalhados, procurou-se identificar as estratégias metodológicas utilizadas.

No Quadro 10 são apresentados as unidades de análise da subcategoria *Estratégias metodológicas*.

(continua)

Subcategoria nível II: Estratégias metodológicas de ensino

Descrição: Nesta subcategoria procuram-se verificar as estratégias metodológicas de ensino: a saber, metodologias ou recursos didáticos foram utilizados nas produções didático-pedagógicas. Para classificar as produções em cada uma das unidades de análise, foi usado o que os autores mencionaram ter utilizado em suas produções.

Esta subcategoria foi desmembrada em sete unidades de análise:

- **Resolução de problemas** – nesta unidade de análise se classificam aquelas produções nas quais os autores mencionaram que utilizaram a Resolução de Problemas na sua produção didática.
- **Jogos** – nesta unidade de análise se classificam aquelas produções nas quais os autores mencionaram o uso de recurso de jogos em sua produção didática, quer eletrônicos, quer de tabuleiro
- **Investigação Matemática** – nesta unidade de análise classificam aquelas produções cujos autores mencionaram que utilizaram Investigação Matemática.
- **Metodologia Dialética**- nesta unidade de análise se classificam aquela produção ao qual o autor menciona que utilizou a Metodologia Dialética.
- **Engenharia didática** – nesta unidade de análise se classifica aquela produção ao qual o autor menciona que utilizou a metodologia de Engenharia Didática para construir sua proposta.
- **Análise de erros** - Nessa unidade de análise se classifica a proposta ao qual o autor menciona que se utilizou Análise de Erros como metodologia de ensino na sua proposta.
- **Metodologia tradicional:** nessa subcategoria se classificaram as propostas dos autores que mencionaram ter usado a metodologia tradicional em sua proposta

Estas subcategorias de análise foram construídas a priori, baseadas no referencial teórico, porém, a Metodologia Dialética e Engenharia Didática e a Análise de Erros são subcategorias emergentes.

A frente de cada quadro são apresentados alguns exemplos, com trechos das produções, nas quais os autores mencionam o uso destes recursos ou metodologias.

(continuação)

Unidades de análise	Trechos das produções que mencionam o uso de uma metodologia ou recurso didático.
<p>Resolução de problemas</p>	<p>“Esta unidade trata da operação com números fracionários através da resolução de problemas”. P16MP</p> <p>“Esperamos que esse trabalho possa contribuir para o enriquecimento do estudo sobre números racionais na representação fracionária, utilizando a metodologia da resolução de problemas [...]”. P16VK</p> <p>“[...] nessa produção didático pedagógica o trabalho será desenvolvido por meio da Resolução de Problemas, haja vista que essa “opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras [...]”. P14MG</p> <p>“Utilizar a metodologia de resolução de problemas para facilitação do ensino”. P14RA</p> <p>“O foco principal será conteúdo de fração, o qual será abordado por meio da resolução de problemas, buscando, assim, verificar se um trabalho nessa abordagem favorece a aprendizagem desse conteúdo [...]”. P13RG</p>
<p>Jogos</p>	<p>“[...] o aluno poderá vir a se apropriar do conhecimento, acima citados, a partir do jogo de xadrez, porque este admite que, por meio de objetos e atividades práticas, o aluno estimula não só o seu carácter individual, mas também o coletivo”. P16LP</p> <p>“A metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho será a construção, aplicação e o uso de jogos matemáticos como recurso didático pedagógico no ensino de frações [...]”. P16JR</p> <p>“[...] utilizando-se de jogos de tabuleiro, de lápis e papel, de estratégia, e online, vídeos, atividades lúdicas, interativas e colaborativas, para analisar, interpretar e resolver situações-problema envolvendo frações [...]”. P16NS</p> <p>“Esta Unidade Didática pretende proporcionar ao aluno a construção do conhecimento matemático através de jogos lúdicos e educativos[...]. P16LS</p>

(continuação)

	<p>“O jogo será utilizado como metodologia de ensino dentro do contexto pedagógico, a fim de proporcionar aos alunos a construção de novos conhecimentos, novas possibilidades de raciocínio [...]”. P14KB</p> <p>“[...] utilizando metodologias baseada em Jogos e Resolução de Problemas através de situações presentes no cotidiano desses alunos [...]”. P14MB</p> <p>“[...] será realizado com o manuseio das peças do Tangram, onde os educandos trabalharão com formas geométricas [...]”. P14IP</p> <p>“[...] utilizar-se-á de jogos e outros meios propiciando aos alunos a oportunidade de produzir métodos para os cálculos mentais e desenvolver a capacidade de usar a matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real”. P13AM</p> <p>“[...] a finalidade dessa unidade pedagógica é apresentar os jogos com recurso pedagógico no ensino dos números fracionários, suas representações e significados [...]”. P13GW</p> <p>“A presente Produção Didático-Pedagógica, cujo tema é, Jogos Matemáticos como metodologia de ensino aprendizagem das frações em diferentes contextos na Sala de Apoio à Aprendizagem [...]”. P13EF</p>
<p>Investigação matemática</p>	<p>“[...] apresentarei algumas tarefas que serão desenvolvidas por meio da Trajetória Hipotética da Aprendizagem utilizando a estratégia de Investigação Matemática”. P16KB</p> <p>“Este material didático foi fundamentado na tendência metodológica da Investigação Matemática, com foco nas aulas e tarefas exploratórias [...]”. P14MO</p>
<p>Análise de erros</p>	<p>“O Projeto de Intervenção tem por objetivo mostrar que a ação didática, empreendida a partir de um trabalho diferenciado feito com o estudo de frações e utilizando a análise de erros como metodologia de ensino, pode contribuir com uma melhor aprendizagem dos alunos[...]. P16ER</p>
<p>Metodologia tradicional</p>	<p>“Partindo do pressuposto de que alunos aprendem de maneira diferente entre si, este trabalho pretende abordar o ensino das frações no primeiro ano do ensino fundamental (6º ano) utilizando as duas abordagens: o método tradicional - baseado na exercitação e na repetição”. (P14CR)</p>

(conclusão)

Metodologia da dialética	“[...] começaremos a segunda etapa do aprendizado do conteúdo dos números fracionários, onde o aprendizado será reforçado com a construção do conhecimento acerca das frações, utilizando a metodologia da dialética”. P14CR
Engenharia didática	“[...] abordaremos os conceitos da adição e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes através de uma metodologia diferente daquela usual, a Engenharia Didática, utilizando uma sequência de atividades com diferentes materiais como forma de estratégia de ensino [...]”. P14SP

Quadro 9: Metodologia de ensino**Dados: Fonte da pesquisa**

Várias foram as metodologias encontradas, nas produções didático-pedagógicas, algumas classificadas como a priori, pois já eram esperadas na análise das produções, e outras classificadas como emergentes, pois são metodologias pouco encontradas em trabalhos. Como subcategoria a priori, temos a Resolução de problemas, Jogos, Investigação Matemática, e metodologia tradicional e como emergentes, a Metodologia Dialética e Engenharia Didática e a Análise de Erros.

Na tabela 3, verifica-se a porcentagem das estratégias metodológicas utilizadas nas produções.

(continua)

Unidades	Produções	%
Resolução de problemas	P13AA	25%
	P13RG	
	P14EF	
	P14MG	
	P14ME	
	P14RA	
	P16MP	
	P16VK	

(conclusão)

Unidades	Produções	%
Jogos	P13AM P13EF P13GW P13MS P14CT P14IP P14JB P14JP P14KB P14MB P16AA P16EC P16JR P16LP P16LS P16NS	50%
Investigação Matemática	P13VA P14AD P14MO P16KB	12,5%
Metodologia Dialética	P13FR P14CR	6,25%
Metodologia tradicional	P14CR	3,13%
Engenharia Didática	P14SP	3,13%
Análise de Erros	P16ER	3,13%

Tabela 3 – Síntese dos resultados: Metodologia de ensino**Fonte: Dados da pesquisa**

A Resolução de problemas foi a metodologia utilizada em 25% das produções analisadas. Os autores que optaram por ela, usaram como argumentos para essa escolha, a possibilidade do aluno exercitar: o seu conhecimento, sua maneira de realizar cada atividade, de forma a não limitar o que o aluno conhece, valorizando o seu raciocínio e os diversos caminhos para chegar a uma determinada solução, para cada exercício proposto, além do conhecimento conceitual adequado, conjecturas, desenvolvendo a capacidade de refletir e obter resultados.

Para essa metodologia, Allevato e Onuchic (2011) sugerem algumas etapas a serem seguidas: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observação e incentivo; registro da resolução na lousa; plenária; busca do consenso, e; formalização do conteúdo.

Os trabalhos que utilizaram da Resolução de Problemas foram P13AA, P13RG, P14MG, P14RA, P14ME, P14EF, P16MP e P16VK. Porém, não foram seguidas todas as etapas da metodologia. As produções P13RG, P13EF, P14RG, P14MG, P16VK e P16MP foram as que seguiram as etapas de forma mais aproximadas às propostas por Allevato e Onuchic (2011), seguindo: preparação do problema, a leitura em conjunto, a resolução do problema, observação e incentivo, registro das resoluções na lousa, plenária e formalização do conteúdo. Isto pode ser verificado nos trechos abaixo:

“Professor, realizar comentários sobre as estratégias utilizadas, registrando os processos no quadro de giz, explorando as diferentes maneiras de resolução e as formas de evitar os erros cometidos. Incentivá-los a questionamentos acerca das estratégias, processos, erros e acertos”. P16VK

“Os grupos devem apresentar na lousa ou verbalmente como pensaram para resolver cada problema proposto. A professora discutirá os erros e acertos e as estratégias utilizadas pelos grupos, levando-os a refletir e discutir as resoluções dos problemas. Ao final, será apresentada pela professora a forma matemática de resolução de cada problema, buscando favorecer uma articulação entre as estratégias dos alunos e o novo conteúdo a ser estudado”. P13RG

O uso do recurso didático de jogo, foi a estratégia metodológica mais utilizada nos trabalhos, aparecendo em 50% dos analisados. As produções que utilizaram-se desta metodologia foram: P13MS, P13AM, P13GW, P13EF, P14MB, P14IP, P14JP, P14KB, P14CT, P14JB, P16LP, P16EC, P16JR, P16NS, P16LS e P16AA, baseando-se em jogos de tabuleiro (incluindo xadrez), Tangram, jogos com música e softwares.

Lara (2003) coloca que os jogos se dividem em quatro tipos:

- Jogos de construção: o conteúdo trabalhado é desconhecido;
- Jogos de treinamento: utilizado para fixação de conteúdo;
- Jogos de aprofundamento: após o conteúdo trabalhado, utiliza-se o jogo com situações que mostra onde o conteúdo é aplicado;
- Jogos estratégicos: as crianças elaboram estratégias de ação por meio das situações que o jogo proporciona.

As produções P13EF, P13MS, P14IP, P14JP, P14MB, P16JR, P16EC, e P16NS foram aquelas que utilizaram jogos e, conjuntamente, realizaram atividades problematizando os mesmos e promoveram reflexões após o término de cada jogada, como mostram os trechos retirados da produções:

“Considerando que o dado possui números de 1 a 6, quais frações podem ser consideradas para a elaboração do tabuleiro deste jogo?”. P13EF

Ao final do jogo, podemos observar e refletir sobre algumas questões, entre elas: Os alunos utilizaram a régua de frações para saber quem estava com a maior fração? Qual foi à etapa em que os alunos apresentaram mais dificuldades? P16JR

Dessa forma considerou-se que nestas produções foram utilizados “jogos estratégicos”.

As produções P13GW, P13AM, P14KB, P16LP, P16LS usaram jogos considerados como “jogos de treinamento”. Eles foram assim considerados, pois os jogos foram aplicados após o conteúdo ter sido aplicado, assim os alunos simplesmente usavam os conceitos e algoritmos já aprendidos para jogar, sem atividades problematizadas pós-jogo ou reflexão.

A produção P14JB também apresentou como “jogo de treinamento”, mas com o uso de Objetos Virtuais de aprendizagem, diferente das demais que exploravam jogos de tabuleiro.

As produções P16AA e P14CT também trabalharam com “jogos de treinamento”, no entanto, com um diferencial das demais, estes estavam relacionados com a música, criando-se relações por meio de notas musicais.

Nas demais produções que usaram jogos, estes se classificaram como “jogos de construção”, pois eles foram usados como recurso para construir os conceitos.

A Investigação Matemática foi outra metodologia abordada, apresentando-se em 12,5% das produções. Vale aqui salientar que Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) afirmam que toda investigação gira em torno de dois ou mais problemas, sendo a identificação, clara destes, é o primeiro passo de qualquer atividade de investigação.

A autora da produção P16ER partiu de uma atividade para verificar o conhecimento dos alunos sobre frações. Em seguida, o conteúdo foi trabalhado por meio da utilização de disco de frações e de canudinhos, ou seja, de materiais manipuláveis, além de utilizar-se, também, de jogos de tabuleiros, que caracterizaram-se como “jogos de treinamento”.

“[...] os erros serão analisados e discutidos individualmente e juntamente com a turma, pois os erros praticados pelos alunos do 6º ano, com relação ao conteúdo de frações, podem propiciar reflexão sobre a nossa ação pedagógica”. P16ER

“[...] as correções das atividades propostas deverão ser interativas, sempre provocando os alunos a apresentarem conclusões de como e porque resolveram daquela forma, pois é a partir dessas diferentes possibilidades de correção dos exercícios que se torna possível fazer com que o erro possa ser refletido na sala de aula, oportunizando ao aluno compreender o que e por que errou [...]”. P16ER

Neste tipo de metodologia é dado um destaque as produções e registros dos alunos. Assim como é aconselhado por Lapa (2013).

A proposta P14SP usou para fundamentar o trabalho desenvolvido em sua produção, a Engenharia Didática:

“A etapa 1 (análise preliminares) consiste na obtenção de um referencial teórico e analisa como se encaminha determinado conhecimento ao

estudante, como ocorre o ensino atual em relação àquele conhecimento, as concepções dos estudantes, as dificuldades e ingerências [...]. A etapa 2 (concepção e análise a priori) envolve a definição das variáveis que estarão sob controle, comportando uma parte descritiva e outra preditiva, na qual o comportamento do estudante é o ponto principal para a análise. A etapa 3 (experimentação) é a ação do conhecer o *locus* para aplicação da sequência didática, como população predefinida e os registros das observações realizadas na investigação. A etapa 4 (análise a posteriori e validação) se assenta no conjunto de dados coletados para a experimentação, mas também na construção de conhecimento dos estudantes dentro e fora da sala de aula” (BRUM; SCHUHMACHER, 2013, p. 65).

A produção P14SP foi a única que utilizou-se desta metodologia. Na produção foram abordados os conceitos de adição e subtração de frações, com denominadores iguais e diferentes. Foi enfatizado o conceito de equivalência para justificar os procedimentos utilizados. A proposta usou como recurso, tiras de papel e o tangram, assim como, atividades com a representação pictóricas.

Outra estratégia metodológica encontrada em 6,25% das produções, foi a Dialética, apresentando-se nos trabalhos: P13FR e P14CR. Esta se caracteriza como uma metodologia de ensino que se expressa a partir de três momentos, que correspondem as três preocupações que o professor deve ter em relação ao seu trabalho pedagógico, definida por Vasconcelos (1992), sendo: a Mobilização para o conhecimento, Construção do Conhecimento e a Elaboração da Síntese do Conhecimento.

A *Mobilização para o conhecimento* é um momento que verifica o interesse do sujeito em conhecer. É nesta etapa que se objetiva estabelecer um vínculo inicial entre o sujeito e o objeto, ou seja, “estabelecer um primeiro nível de significação, em que o sujeito chegue a elaborar as primeiras representações mentais do objeto a ser conhecido” (VASCONCELOS, 1996, p. 3).

A *Construção do Conhecimento* caracteriza-se como o momento em que ocorrerá o confronto de conhecimento entre o sujeito e o objeto, onde haverá a construção do conhecimento por meio do desenvolvimento de relações, com a mediação do professor.

Por último, a *Elaboração da Síntese do Conhecimento*, sendo este o momento que o professor auxilia o educando “a elaborar e explicitar a síntese do conhecimento” (VASCONCELOS, 1996, p. 2), sendo o objetivo da síntese, compreender de forma concreta o objeto de estudo.

O autor da produção P14CR destaca que em sua proposta também se utiliza da metodologia tradicional, em um primeiro momento

“Partindo do pressuposto de que alunos aprendem de maneira diferente entre si, este trabalho pretende abordar o ensino das frações no primeiro ano do ensino fundamental (6º ano) utilizando as duas abordagens: o método tradicional - baseado na exercitação e na repetição e o método dialético, fazendo as demonstrações de resolução de frações, partindo do conhecimento prévio dos alunos”. P14CR

Vê-se então que a metodologia dialética seria como que uma confrontação entre as resolução feita pelo método tradicional e uma outra abordagem utilizando situações problemas contextualizadas, e atividades com materiais manipuláveis.

Na tradicional, foram trabalhadas as operações com frações, por meio de exemplos, com relatos dos alunos sobre o que eles conhecem sobre os números fracionários:

“Começaremos com as demonstrações de resolução de frações, descrevendo numerador, denominador, o que a fração representa com relação ao todo e desenvolveremos as quatro operações nas frações. Com uma série de exercícios, iremos trabalhar as frações fazendo todo o processo, ou seja, conteúdo, exercícios e avaliação”. P14CR

Na abordagem dialética, o autor fez uso de recursos variados para a retomada do conteúdo de frações:

“[...] começam as atividades de iniciação às frações, com situações problema de fácil entendimento para uma melhor compreensão dos números fracionários. Nesta etapa serão trabalhados assuntos do dia a dia dos alunos, onde os mesmos iniciarão novamente o aprendizado sobre frações, construindo o através da experimentação, de atividades com material

concreto, como sulfite, cartolina, pizzas, barras de chocolate, etc. Nesta abordagem também será desenvolvido todo o processo de ensino, ou seja, após as demonstrações, atividades e estudo das frações nas quatro operações e nos problemas, faremos a avaliação dos conteúdos trabalhados, sintetizando os resultados e descrevendo o desempenho dos estudantes”. P14CR

Na produção P13FR, a estratégia metodológica utilizada, foi também a Dialética, mas estabelecendo relações entre as frações e as escalas musicais, iniciando-se por meio de um questionário, buscando verificar o interesse dos alunos sobre o conteúdo e o conhecimento dos mesmos sobre a música e a fração. Em seguida, usando de instrumentos e notas musicais, buscou-se relacionar com o conteúdo frações:

“Quando se toca a corda inteira e depois $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda a um aumento de quantos tons? Verifique a resposta dos outros grupos, e anote suas conclusões”. P13FR

Concluindo a análise desta subcategoria, percebe-se um destaque as metodologias que utilizaram trabalho com problemas: a saber, a metodologia de Resolução de Problemas, as atividades de investigação ou jogos estratégicos, ou uso dos mesmos como contexto para elaborar problemas. Isto vai ao encontro das orientações dadas por Justulin (2016) que indica os problemas como um bom caminho para aprendizagem de frações.

Houveram várias que também utilizaram os jogos como formas de construir os conceitos ou construíram sequências de ensino baseados em teorias, como a Engenharia didática e a Método da Dialética, envolvendo materiais manipuláveis, procurando levar o aluno a construir seu conhecimento, ou refletir sobre regras e procedimentos que ele utiliza. No entanto, há ainda uma parte das propostas que utiliza somente “os jogos de treinamento”, uma forma “diferente” de treinar algoritmos e procedimentos padrão. Nestes casos, o uso do recurso é simplesmente justificado, pelos autores, como uma forma de fugir das aulas tradicionais, de facilitar a aprendizagem e de ser mais motivador.

Por fim, analisou-se as relações estabelecidas nas produções, entre o conteúdo de frações e outros conteúdos. As unidades de análise desta subcategoria se encontram no Quadro 10.

(continua)

Descrição: Nesta subcategoria procuram-se verificar se o conteúdo frações foi relacionado com outros conteúdos matemáticos, outras áreas do conhecimento ou com o cotidiano, nas produções didático-pedagógicas.

Esta subcategoria foi desmembrada, inicialmente, em três unidades de análise:

- **Outro conteúdo matemático:** Nesta subcategoria se classificam as produções que abordaram a relação das frações com outros conteúdos matemáticos.
- **Outra área do conhecimento:** Nesta subcategoria se classificam as produções que abordaram o conteúdo de frações relacionado com outras áreas do conhecimento, trabalhadas no currículo escolar. Como não foi encontrado nenhum trabalho que explorasse este tipo de relação, esta unidade de análise foi eliminada.
- **Relações com o cotidiano:** Nesta subcategoria se classificam as produções que realizaram abordagem do conteúdo de frações relacionando-o com situações do cotidiano dos alunos.

A frente de cada quadro são apresentados alguns exemplos produções que se classificaram nestas subcategorias.

Unidades de análise	Exemplos de trechos que demonstram as relações.
<p>Outro conteúdo matemático:</p>	<p>“Para transformar números decimais em números fracionários, contamos as casas após a virgula dividimos por 10, 100, 1000... (uma casa após a virgula e dividir por 10, duas casas depois da virgula, dividir por 100 e assim por diante)”. P13MS</p> <p>“Podemos escrever uma fração na forma decimal dividindo o numerador pelo denominador. Por exemplo: $\frac{11}{4} = 11 \div 4 = 2,75 \Rightarrow \frac{11}{4} = 2,75$”. P13EF</p> <p>“Qual é o “representação decimal” fração $\frac{3}{4}$? Como poderemos fazer para achar esse valor?” P13AA</p>

(conclusão)

<p>Outro conteúdo matemático:</p>	<p>“Como podemos transformar uma fração em número decimal?” P14JP</p> <p>Se colocarmos água até a metade no copo de 250 ml e despejarmos no copo de 500ml, que quantidade obteremos? Como podemos representar a operação em forma de fração? Então, qual o resultado de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$?” P14ME</p>
<p>Relações com o cotidiano:</p>	<p>“Sofia resolveu fazer uma receita de “farofa fria”, para sua família experimentar no almoço de domingo. Ao observar a receita, percebeu que as frações precisam ser simplificadas”. 13RG</p> <p><i>“E quando dividimos a corda ao meio ou seja pressionamos $\frac{1}{2}$ de seu comprimento obtemos 8 tons acima que equivale a um intervalo de oitava”.</i> P13FR</p> <p><i>“[...] Professora: Quais números aparecem nos textos?</i></p> <p><i>Aluno 1: A fração, o número com vírgula.</i></p> <p><i>Aluno 2: Número com vírgula é número decimal.</i></p> <p><i>Aluno 3: Aparece o número com % e o dinheiro [...]”</i> P16KD</p>

Quadro 10: Relações estabelecidas

Dados: Fonte da pesquisa

A porcentagem de trabalhos classificados em cada unidade de análise é apresentada na tabela 4.

(continua)

Unidades	Produções	%
Outro conteúdo matemático	P13MS P13EF P13AA P13GW P14JP P14ME P14MB P14MO P14AD	40,63%

(conclusão)

Unidades	Produções	%
Outro conteúdo matemático	P16MP P16NS P16KD P16JR	40,63%
Relações como cotidiano	P13FR P14CT P16AA P16VK P13RG P14ME P14AD P16ER P16JR P16KD	31,25%

Tabela 4 – Síntese dos resultados: Relações estabelecidas

Fonte: Dados da pesquisa

Algumas produções que estabeleceram relação dos números fracionários com outros conteúdos matemáticos foram: P13MS, P13EF, P13AA, P13GW, P14JP, P14MB, P14ME, P14MO, P14AD, P16MP, P16NS, P16KD, P16JR. Essa relação foi feita apenas com os números decimais. Os números decimais é uma das representações dos números racionais, que também podem ser representados por frações. Bertoni (2008) dá destaque ao uso das frações como uma forma de auxílio para a introdução a representação decimal.

Os professores desenvolveram atividades, onde os números decimais surgiam como resultado da uma divisão indicada pela fração, quando esta é usada no sentido de quociente. No entanto, não houveram, nestas produções, exemplos que mostrassem para os alunos, que as frações são uma forma de representar situações que não podem ser expressas, muitas vezes, apenas por número decimal ou natural, como aconselha Delgado (2009). Segundo este autor, no ensino de frações, deve ser destacado que a representação decimal não é suficientemente adequada para dar sentido a situações dentro e fora da matemática. Tal fato é importante, pois é uma forma de justificar a necessidade de se usar a representação fracionária.

A P14ME utilizou-se dos laboratórios de ciência para trabalhar o conceito de equivalência e “parte todo” por meio dos copos graduados. A professora tentou estabelecer uma relação por meio da unidade de medida *ml*, que os copos apresentam, sem utilizar-se das frações. A ideia era tentar fazer os alunos compreenderem o conceito de equivalência e de “um certo todo” particionado, de forma geral:

“Após, pedir que coloquem água até a marca de 125 ml no copo e em seguida despejar no copo de 250 ml. Pedir que repitam a operação até que a água atinja a marca de 250 ml e perguntar: Quantos copos de 125 ml precisamos para encher o copo de 250 ml? O que isso significa? Como podemos indicar? Qual tem maior quantidade?” P14ME

Quanto a relação estabelecida entre os números fracionários e o cotidiano, apresentou-se em atividades que utilizaram receitas e a música, totalizando 31,25% das produções.”.

As produções que utilizaram-se da música foram: P13FR, P14CT, P16AA e P16VK. Os autores as elaboraram considerando as dificuldades apresentadas pelos alunos em entender o conteúdo com números fracionários:

“O que desejo com isso é dar sentido ao conteúdo e trazer para a sala de aula algo de que tanto nossos alunos gostam: a música, e relaciona-la com a matemática será para muitos algo surpreendente”. P13FR

“Esta unidade didática tem por objetivo propor uma metodologia diferenciada no ensino de frações para alunos do sexto ano do ensino fundamental, com atividades que exploram a interdisciplinaridade entre a Música e a Matemática”. P14CT

A produção P13RG P14ME, P14AD, P16ER, apresentaram exemplos envolvendo receitas:

“Em uma receita de muffins, é utilizado $\frac{1}{3}$ de xícara de trigo. Utilizando a balança, verifique a quantos “gramas”, equivale essa quantidade de trigo e registre o resultado”. P14AD

Outros trabalhos, fizeram uso de textos informativos, que possuíam números fracionários e até mesmo o termo porcentagem, como era o objetivo da aula, para que os alunos conseguissem ver a presença desses números em situações reais:

[...] Professora: Quais números aparecem nos textos?

Aluno 1: A fração, o número com vírgula.

Aluno 2: Número com vírgula é número decimal.

Aluno 3: Aparece o número com % e o dinheiro [...].” P16KD

“As frações surgiram a partir da necessidade dos povos Egípcios fazerem marcações em suas terras, que ficavam as margens do rio Nilo. Essas marcações eram feitas pelos faraós e para isso eram utilizadas como unidade de medida, as cordas!” P16JR

“Através de Pitágoras, Arquimedes, Platão e outros, esta civilização deu início a muitas descobertas importantes da matemática. Em relação às frações, destaca-se a sua utilização na música. Após a exibição do filme, levar os alunos a refletir sobre a utilização das frações em situações mencionadas no filme e sua importância na escala musical”. P16VK.

Pode-se considerar que estes exemplos vão ao encontro do que coloca Bertoni (2008), que destaca que o trabalho com frações deve envolver situações significativas, que demonstrem que o conceito é útil e necessário. No entanto, em outras produções, encontram-se exemplos, nos quais as relações com o cotidiano, são construídas de forma, assim dizer artificial e forçada, pois são situações e problemas, nos quais o aluno não utiliza frações .

A autora da P13MS trabalha um jogo chamado “Repartindo dinheiro”, que aborda o sistema monetário, uma das situações do jogo é:

“O banqueiro coloca 366 reais sobre a mesa. A quantia é repartida igualmente entre as outras 3 pessoas. Posteriormente cada pessoa faz um registro parecido com esse no caderno: a) $366 : 3 = 122$ b) $366 \times \frac{1}{3} = 122$ c) $366 \times \frac{1}{2} = 244$ ” . P13MS

É destacado pela autora, a importância de se trabalhar o sistema monetário, mas, faz-se necessário observar, que ao dividir o dinheiro, no dia a dia, não se usa a representação fracionária, e sim a decimal.

Outra produção P13RG, exemplifica o uso das frações no cotidiano da seguinte maneira:

“[...] esse vídeo mostra o uso da fração no cotidiano, é utilizada uma laranja para mostrar o conceito de fração; de início a laranja servirá para mostrar o inteiro, depois cortam a laranja em quatro partes exatamente iguais, explicando a parte do todo” . P13RG

Em situações do cotidiano, ao repartir uma laranja, o aluno não tem necessidade de usar o conceito de fração.

Um dos exemplos mais comuns apresentados, é o da pizza, encontrado até mesmo em livros didáticos, mas que não tem relação verdadeira com a vida real.

“[...] traremos pizzas para os alunos, faremos a divisão das pizzas em partes para que eles associem a prática com o conteúdo visto [...]” . P16MP

Percebe-se então por meio da análise desta categoria, que as abordagens carecem de exemplos que apontem a importância das frações, quer no contexto da matemática, quer no contexto do dia a dia. Tal carência pode se dar por dois fatos: pelo desconhecimento de tais relações, ou por não considerar este um elemento importante no ensino de frações.

É interessante notar, que este resultado apresenta relação com outra subcategoria analisada, a dos significados. Na análise desta categoria, o significado menos explorado foi o de medida, que é o significado que se utiliza ao se trabalhar com razão, proporção, probabilidade, que são justamente conceitos usados para representar relações entre grandezas, interpretar informações. Conceitos extremamente úteis para a cidadania, e que usam as frações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa tinha como objetivo fazer um mapeamento das produções didático-pedagógicas relacionadas com frações, desenvolvidas pelos professores participantes do PDE.

Por meio da metodologia da Análise Textual Discursiva, foram analisados 32 produções, dos anos de 2013, 2014 e 2016, onde buscou-se verificar o conteúdo relacionado às frações abordado, as estratégias metodológicas utilizadas, qual o significado de fração apresentados na proposta de intervenção pedagógica elaborada pelos professores, se o trabalho revela preocupações com domínio de algoritmos ou aprendizagem de conceitos, se envolve relações do conteúdo de frações com outros conteúdos: matemáticos, de outras áreas do conhecimento ou com situações do cotidiano do aluno.

Por meio dessa análise, foi possível identificar, nas produções, vários conteúdo para o ensino de frações, sendo os mais frequentes: as representações de frações, as operações, leitura de frações, equivalência e situações problemas.

Quanto às produções que se desenvolveram, por meio de conceitos ou algoritmos, notou-se uma maior abordagem no desenvolvimento conceitual, em relação ao procedimental.

Quanto aos significados, apesar da maioria dos trabalhos explorarem mais do que um, o que vai ao encontro do que é recomendado na literatura, as abordagens ainda carecem de tomar alguns cuidados na exploração dos mesmos, notando que significados importantes, como o de medida, foram poucos explorados.

O destaque dado ao significado “parte todo”, usando como forma de introduzir o conceito de fração em todos os trabalhos, bem como os exemplos utilizados nas representações pictóricas, sempre apresentando retângulos, círculos ou pizzas, sinalizam a influência dos livros didáticos sobre a forma como os professores pensam o ensino de fração. Estes elementos também podem ser resultados do próprio ensino que estes professores receberam, como indica Santos (2015).

Quanto à escolha das estratégias metodológicas, percebe-se em vários professores a preocupação com a problematização, e a compreensão dos conceitos, o que é um ponto positivo. A maioria dos professores optou-se por usar jogos, como estratégia metodológica. Tal fato vai ao encontro do que coloca Fiorentini e Miorim (2018), que apontam sobre a grande atração dos professores por jogos. Estes

autores afirmam que os professores, incapazes de pensar por si só o seu fazer matemático, consideram os jogos como receitas, capazes de melhorar o ensino.

Percebe-se, também, nas justificativas para o trabalho, a preocupação do professor em que o ensino seja motivador, sendo que, no caso de várias produções analisadas, o caminho escolhido para isso é do uso como meio lúdico, no caso o jogo. Outra opção, para tornar o conteúdo motivador, seria explorar suas relações com outras áreas do conhecimento, outros conteúdos matemáticos e situações do cotidiano, porém, as produções apresentam poucas propostas. Além de pouco exploradas, os exemplos de relações apresentados são, muitas vezes, relações artificiais, não evidenciando as reais aplicações das frações no cotidiano e em outras áreas. É interessante notar que o significado menos explorado foi o de medida, que é justamente aquele, que está relacionado aos conteúdos de razão, proporção, que são bastante ricos em aplicações com outras áreas do conhecimento e do cotidiano.

Este fato e, também, a lista de conteúdos mais explorados: representação de frações, operações e leitura de frações, permitem também inferir sobre um outro aspecto relacionado ao ensino de frações, discutido nos referenciais teóricos: o por que ensinar frações. Pelos conteúdos explorados, pelos significados enfatizados e relações estabelecidas, pode-se inferir, para estes professores, que os motivos para ensinar frações seja como coloca Viana (2008), simplesmente por estar no currículo, por ser uma forma de representar os racionais, que são um conjunto numérico, matemática pela matemática, não havendo uma preocupação mais profunda de relacioná-lo com outros conteúdos. Esta é uma das limitações das propostas apresentadas.

Percebe-se, também, que faltam na construção das propostas, uma reflexão maior sobre um outro aspecto apontado nos referenciais teóricos: o por que o assunto de frações é tão complexo, quais os conceitos envolvidos devem ser destacados em cada significado. Tais reflexões poderiam ter contribuído para aperfeiçoar as produções e poderiam evitar várias das limitações que foram apontadas nos trabalhos.

Esta análise, apesar de não ter sido realizada com todas as produções dos anos disponíveis no site da SEED, foi possível verificar que apesar das limitações apontadas acima, as produções apresentam também vários pontos positivos, tais como a preocupação de vários professores com o fato de que os alunos realmente compreendam o que estão fazendo e não simplesmente decorrem algoritmos, o uso

de estratégias metodológicas que envolvam a problematização, discussão e reflexão dos resultados. Dessa forma considera-se que as produções dos professores PDE podem ser uma fonte de informação útil para buscar outros caminhos para explorar o conteúdo de frações e melhorar sua compreensão.

6 REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Danielle S. **Análise de Erros Matemáticos: interpretação das respostas dos alunos**. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

BERTONI, Nilza E. A construção do Conhecimento sobre o número fracionário. 2008. **Bolema**, Rio Claro, Ano 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. 3 ed. São Paulo: IME/USP, 1998.

BRUM, Wanderley P.; Schuhmacher, Elcio. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula matemática: Análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. Universidade Federal de Santa Catarina. Blumenau. Ano 60 v 6(2), 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª séries): Matemática**. Brasília: MEC, 1997.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries): Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

BROCARD, Joana. Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido número. **Educação e Matemática**. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, n.109, 2010.

CALADO, Sílvia dos S.; FERREIRA, Sílvia C. dos R. Análise de documentos: método de recolha e análise de dados. **Metodologia da investigação I – DEFCUL** (Mestrado em Educação-Didática das Ciências). 2004-2005.

CAMPOS, Tânia M. M; MAGINA, Sandra. A Fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Bolema**. Rio Claro. Ano 21, n. 31. p. 23-40, 2008.

CAMPOS, Tânia M. M; MAGINA, Sandra.; NUNES, Terezinha. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 8, n. 1, p. 125-136, 2006.

CAMPOS, Tânia M. M.; NUNES, Terezinha.; BRYANT, Peter.; SILVA, Angélica da F. G.; CANOVA, Raquel F.; CERVANTES, Patricia de B. M. Uso de situações quociente no ensino de frações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. São Paulo/Londres, v. 7(3), 2014.

CANELAS, Anabela P. V. **Resolução de problemas com números racionais**. Um estudo com alunos do 5º. ano de escolaridade. 2016. Dissertação (Mestrado em

Ensino do 1º e do 2º Ciclo Básico) – Instituto Politécnico de Setúbal. Escola Superior de Educação. Setúbal, 2016.

CARDOSO, Paula.; MAMEDE, Ema. O conceito de fração – o conhecimento de professores do 1.º ciclo. CIEC – Universidade do Minho. **Revista de estudios e investigación en psicología y educación**. España,v. Extr., n. 6. 2015

DELGADO, Catarina. Os Números e as operações no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. 2009. **Educação e Matemática**. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal. 2009.

FERNANDES, J. A.; LEITE, Laurinda. Compreensão do Conceito de Razão por Futuros Educadores e Professores dos Primeiros Anos de Escolaridade. **Bolema**. Rio Claro, eISSN: 2386-7418, v. 29, n. 51, p. 241-262, 2015.

FLICK, Uwe. **Introdução a pesquisa qualitativa**. Artmed: São Paulo, 2009.

FIORENTINI,Dario, MIORIN, Angela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**.Boletim SBEM, ano 4, n 7. Disponível em : <

JUSTULIN, Andresa M. Um estudo sobre as relações entre as atitudes, gênero, série e desempenho em exercícios e problemas envolvendo frações. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 11, n. 2, p.343-362, 2016.

KRIPKA, Rosana M. L.; SCHELLER, Morgana.; BONOTTO, Danusa de L. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. **Revista de investigaciones**. UNAD Bogotá – Colombia, v. 14, n. 2, julio-diciembre, 2015.

LAPA, Clésia M. dos S. **O ensino de frações e seus diferentes significados**: Um estudo a partir do livro didático A Conquista da Matemática e dos registros dos cadernos de alunos do 7º ano da rede municipal de Aracaju/SE. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão. 2013.

LARA, Isabel C. M. **Jogando com a matemática de 5ª e 8ª série**. São Paulo: Editora Rêspel, 2003.

LESSA, Valéria E. Números Fracionários em Diferentes contextos. Relato de Experiência. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Erechim, 2009.

_____. O significado Medida dos Números Fracionários: aprendizagem na forma de conhecimento em ação. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 100-113, 2015.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MAGINA, Sandra.; BEZERRA, Francisco B.; SPINILLO, Alina. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. **Estudos RBEP**. Brasília. v. 90, n. 225, p. 411-432, 2009.

MAGINA, Sandra.; CAMPOS, Tânia. A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental. **Bolema**. Rio Claro, Ano 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MENEGAZZI, Marlene. O estudo de frações: uma experiência no curso de pedagogia. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 08, n. 1, p. 248-265, 2013.

MONTEIRO, Cecília.; PINTO, Hélia G. **Desenvolvendo o sentido do número racional**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2 ed. 2007.

MORAES, Roque. Análise de conteúdo. Revista Educação. Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MOUTINHO, Leonel V. **Fração e seus diferentes significados**: Um estudo com alunos das 4^a e 8^a séries do Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

OLIVEIRA, Raquel G. de.; SILVA, Leonardo C. L. Aprendizagem do conceito de frações frente a situações de aprendizagem sugeridas pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 9, n. 1, p. 69-89, 2014.

ONUCHIC, Lourdes R.; Allevato, Norma S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**. Rio Claro, v. 25, n.41, p. 73-98, 2011.

PARANÁ. **Documento Síntese PDE**. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. SEED. Curitiba, 2012.

PATRONO, Rosângela M. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental**: análise de uma proposta de ensino. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

PINTO, Hélia.; RIBEIRO, Carlos M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. **Da investigação à Prática**. Portugal, 3(1), 80-98, 2013.

PONTE, João Pedro da.; QUARESMA, Maria. Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória. **Bolema**. Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1464-1484, 2014.

PONTE, João Pedro da.;

PONTE, João P. da.; SERRAZINA, Lurdes.; GUIMARÃES, Henrique M.; BRENDA, Ana.; GUIMARÃES, Fátima.; SOUZA, Hélia.; MENEZES, Luís.; MARTINS, Maria E. G. M.; OLIVEIRA, P. A. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. 2007. Lisboa, Ministério da Educação, DGIDC.

SANTOS, Aparecido dos. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

SILVA, Maria J. F. da. Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

TEODORO, Flavia P.; Beline, Willian. **Investigação Matemática em sala de aula na Educação Básica: um estudo com alunos do 3º ano do Ensino Médio.** VIII Encontro de Produção Científica e Tecnológica, 2013.

VASCONCELOS, Celso S. Metodologia Dialética em Sala de Aula. **Revista de Educação AEC.** Brasília, n. 83, 1992.

VASCONCELOS, Isabel C. P. **A compreensão das relações numéricas na aprendizagem de frações:** um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica. 2015. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2015.

VIANA, Carlos R. A hora da Fração: pequena sociologia dos vampiros na Educação Matemática. **Bolema.** Rio Claro, Ano 21, n. 31, p. 161-181, 2008.